

# SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

*Autor: Fernández-Plaza, José Antonio*

*Directores: Castro, Enrique; Rico, Luis; Ruiz-Hidalgo y Juan Francisco*

## RESUMEN:

El trabajo de tesis aborda el estudio de los significados que los estudiantes de bachillerato atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto. La noción de significado de un concepto matemático escolar que seguimos tiene tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y fenómenos que le dan sentido. Elaboramos un cuestionario para detectar concepciones de los estudiantes sobre esas componentes, que dan lugar a distintas interpretaciones del concepto en estudio. Llevamos a cabo un análisis de contenido de las respuestas, según un sistema propio de categorías. Posteriormente, realizamos entrevistas semiestructuradas a los estudiantes para identificar los obstáculos detectados. El estudio empírico reporta cinco aspectos de significado de la noción intuitiva de límite: concepción dual objeto-proceso, no rebasable, no alcanzable, carácter finito o ilimitado del proceso y valor exacto-aproximado del límite.

**Palabras clave:** Significado de un concepto matemático; Límite finito de una función en un punto; Análisis de contenido; Concepciones; Aspectos intuitivos de significado.

## 1. INTRODUCCIÓN

El autor que presenta esta comunicación desarrolla su tesis doctoral en el marco de una beca FPU que obtuvo en 2011 para un periodo de cuatro años. Está adscrito a la línea de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» y al grupo de investigación «FQM-193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del PAIDI (Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación).

Inicia su aproximación a la Didáctica de la matemática con la realización de un trabajo de fin de máster sobre planificación de una unidad didáctica relativa el tópico «Límite y Continuidad de Funciones» (Fernández-Plaza, 2010), presentado en el Máster de Secundaria, especialidad de matemáticas, curso 2009/2010.

Continúa su formación académica e investigadora en el Máster de Investigación en Didáctica de la Matemática, curso 2010/2011, que culmina con un estudio exploratorio sobre los «Significados de estudiantes de Bachillerato sobre la noción de límite finito de una función en un punto» (Fernández-Plaza, 2011).

Los trabajos previos y los realizados durante el desarrollo de la tesis doctoral iniciada en el curso 2011/2012, han dado lugar a diferentes publicaciones que han contribuido a la difusión de sus resultados:

- Congresos internacionales: PME36 (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2012a); ICME-12 (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2012b); CERME-8 (Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2013b).
- Congresos nacionales: XVI SEIEM (Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2012)
- Artículos: PNA (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro, 2013); Gaceta de la RSME (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2013); IJMEST, (Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2013a).
- Otras presentaciones y/o publicaciones: Seminarios del Grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM (2012); Seminarios del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM) de la SEIEM (2011, 2012, 2013); Congresos de la SAEM Thales (2012); Seminarios de Investigación del Departamento de Didáctica de la Matemática de la UGR (2013).

Describimos, a continuación, el estado de progreso de la investigación para la tesis doctoral.

## 2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de la tesis es el siguiente:

Estudiar los significados que los estudiantes de bachillerato atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto.

Algunos antecedentes sobre el tema de estudio se resumen en los siguientes puntos:

- Investigaciones que enfatizan la dualidad objeto/proceso en las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981; Sierpinska, 1987; Sfard, 1991). Estos autores destacan que los escolares conciben implícitamente el límite como un par formado por un proceso iterativo-dinámico infinito y por su resultado, si bien aparecen incoherencias que se reflejan en afirmaciones como « $0,999\dots$  es estrictamente menor que 1», o bien «el límite está indefinido pues sólo conocemos sus aproximaciones».
- En segundo lugar, consideramos trabajos sobre fenomenología del límite finito de una función en un punto, en el sentido considerado por Sánchez-Compañía (2012) quien establece diferencias relevantes entre la definición intuitiva -*aproximación doble intuitiva*- y la definición formal -*fenómeno ida y vuelta*-, entre ellas el carácter infinito potencial de la primera y su ausencia en la segunda. Detectamos que aquellos estudiantes familiarizados con el primer fenómeno, quitan importancia al carácter infinito potencial del proceso, ya que

consideran suficiente un número finito de aproximaciones para conocer el límite (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2012a).

- Por último, algunas investigaciones detectan en las concepciones de los escolares sobre límite las propiedades de no ser rebasable y/o alcanzable; relacionan su presencia con el uso coloquial del término «límite» y de acciones como «limitar», que denotan una idea de acotación o no alcanzabilidad de un valor (Cornu, 1991; Monaghan, 1991).

### 3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El modelo teórico de significado adoptado para el trabajo de tesis se basa en las nociones de signo, sentido y referencia (Rico, 2012). En nuestro marco, el significado de un concepto matemático escolar se establece mediante tres componentes:

- *Estructura conceptual*, dada por las definiciones, relaciones, operaciones, propiedades, y proposiciones derivadas que enmarcan el concepto en estudio. La estructura conceptual establece las condiciones para evaluar la veracidad o falsedad de las proposiciones que establecen y se derivan del concepto que se estudia; la estructura conceptual desempeña el papel de referencia.
- *Sistemas de representación*, definidos por los sistemas estructurados de signos y gráficos, así como por sus reglas, que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros. Los sistemas de representación sistematizan conjuntos de signos apropiados para un concepto ya que destacan algunas de sus propiedades; mediante sus reglas de transformación y de traducción, regulan y hacen operativos criterios de inferencia.
- *Fenomenología*, incluye aquellos contextos, situaciones y problemas que están en el origen de un concepto y le dan sentido. Los fenómenos y su análisis establecen la pluralidad de sentidos de un determinado concepto.

Un ejemplo de este modelo se encuentra en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008). La interpretación fundada sobre lo que comunican, expresan o entienden los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función la encuadramos en este modelo de significado de un concepto matemático.

### 4. MÉTODO

Se han llevado a cabo dos estudios. Un primero de carácter exploratorio y descriptivo, y un segundo confirmatorio. Describimos la metodología empleada.

- *Cuestionario de respuesta abierta*. Se diseñó un cuestionario con tareas extraídas de otras investigaciones y se implementó a 36 estudiantes de un grupo de 1º de Bachillerato (16-17 años) de la modalidad de Ciencias y Tecnología, que cursaban la asignatura de matemáticas, elegidos de manera intencional y por disponibilidad. Los detalles pueden consultarse en (Fernández-Plaza, 2011).
- *Entrevistas semiestructuradas*. Con el fin de confirmar los resultados obtenidos en el estudio exploratorio, llevamos a cabo una réplica de las cuestiones anteriores, con los mismos sujetos y un año después, en formato de entrevista semiestructurada. Cada cuestión se replicó con un grupo específico

de estudiantes de manera que estuvieran contempladas todas las categorías de respuesta previamente obtenidas que pueden consultarse en (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2012a). El número total de estudiantes entrevistados fueron 33. Los resultados se presentarán próximamente en el XVII Simposio de investigación de la SEIEM (en Septiembre, 2013), si bien, parte de los resultados fueron ya presentados en CERME-8 (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2013b).

## 5. AVANCE DE RESULTADOS

Los resultados se organizan según diferentes aspectos del significado de la noción intuitiva del concepto de límite finito de una función en un punto, cuyo análisis detallado se encuentra en los trabajos citados en la sección introductoria de este informe.

*Dualidad Objeto/Proceso.* Discriminamos entre *concepciones/proceso*, *concepciones/objeto* y *concepciones duales* del concepto de límite. Por *concepciones proceso*, entendemos aquellas que consideran el límite íntimamente relacionado con un procedimiento de cálculo iterativo, que muestra cómo se acerca al límite. Con una *concepción objeto*, el estudiante reconoce propiedades de un punto o un número que se identifica como límite, con independencia del proceso implicado. Concepciones intermedias entre las dos anteriores se denominan *concepciones duales*. Por ejemplo, al solicitar a los estudiantes valorar la veracidad del enunciado «El límite describe cómo se mueve una función  $f(x)$  cuando  $x$  se mueve hasta cierto punto», los argumentos se ajustaron a estos tipos de concepciones, dependiendo de si los estudiantes interpretaban el límite como aquello que describe «cómo» (*concepción proceso*) o «hacia dónde» (*concepciones objeto o duales*) una función se mueve.

*Carácter no alcanzable y no rebasable del límite.* Observamos una persistencia de concepciones erróneas debidas a la atribución al valor del límite de no ser rebasable ni alcanzable, coincidiendo con los hallazgos de Cornu (1991) y Monaghan (1991). Aunque fuimos más allá, pues algunos estudiantes relacionaban el hecho de que el límite sea no rebasable con el de ser inalcanzable. Consideramos que este tipo de conflicto puede surgir de una generalización de propiedades que se dan en un contexto particular de la convergencia monótona.

*Carácter finito o ilimitado del proceso.* Algunos estudiantes consideran que el cálculo del límite se puede reducir a un número finito de pasos, es decir, bastan una cantidad finita de aproximaciones para detectar la tendencia a un límite.

*Carácter exacto-aproximado del límite.* Algunos estudiantes consideran el límite exacto como un valor definido, mientras que otros sujetos consideran el límite como un número aproximado cuando expresan que del límite sólo se conocen aproximaciones, es decir, está indefinido.

Los estudiantes comunican todos estos aspectos de significado mediante uso e interpretación de términos relacionados con las nociones básicas de «aproximar», «tender», «alcanzar», «rebasar» y «limitar».

## 6. REFLEXIÓN SOBRE EL PROCESO DE APRENDIZAJE EN EL DOCTORADO

Mi proceso de aprendizaje en el doctorado se ve fomentado por las siguientes experiencias:

- Las reuniones semanales con los directores de la tesis, en las que se va haciendo un seguimiento permanente del trabajo de investigación, en las que se discuten y revisan mis avances y los trabajos realizados.
- La guía de mis directores de tesis, que valoran mis iniciativas en el camino de investigación, y las reconducen cuando no son exitosas.
- Los seminarios organizados en el seno del grupo de investigación y en el Departamento de Didáctica de la Matemática, me proporcionan una amplia variedad de perspectivas, sobre todo, de marcos metodológicos y teóricos compartidos.
- Las propias reuniones de discusión de trabajos con mis compañeros de doctorado suponen una retroalimentación positiva tanto a nivel académico como personal.
- Las actividades que organiza el propio programa de doctorado pueden proveerme de elementos metodológicos y teóricos de los que se pueden sacar buen aprovechamiento.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Esta comunicación ha sido realizada con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto «Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación» (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fernández-Plaza, J.A. (2010). *Unidad didáctica: Límite y Continuidad de Funciones*. Trabajo final del Máster de Secundaria. Granada: Universidad de Granada.
- Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por Estudiantes de Bachillerato respecto al Concepto de Límite Finito de una Función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp. 229-237). Jaén: SEIEM

- Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., & Rico, L. (2012a). The Concept of Finite Limit of a Function at one Point as explained by Students of Non-Compulsory Secondary Education. In Tso, T.Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 235-242. Taipei, Taiwan: PME.
- Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., & Rico, L. (2012b). Meanings of the Concept of Finite Limit of a Function at one Point, as demonstrated by students in Bachillerato. In *Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 2715-2721), Seoul, Korea: ICMI.
- Fernández-Plaza, J.A., Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J.F. (2013a). Concept of Finite Limit of a Function at a Point: Meanings and Specific Terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 699-710.
- Fernández-Plaza, J.A., Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J.F. (February, 2013b). *Meanings of the concept of finite limit of a function at one point: Background and advances*. Unpublished paper presented at 8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME-8), Antalya, Turkey.
- Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., y Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la RSME*, 16(1), 131-145.
- Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., Rico, L., y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), 117-131.
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, 1, 39-63.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Sánchez-Compañía, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 1-36.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397
- Tall D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus, (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 170-176). Berkeley: PME.
- Tall, D.O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.