Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

Tesis Doctoral

ESTIMACIÓN EN CÁLCULO CON NÚMEROS DECIMALES: DIFICULTAD DE LAS TAREAS Y ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS Y ERRORES CON MAESTROS EN FORMACIÓN

Carlos de Castro Hernández

GRANADA, 2012

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ESTIMACIÓN EN CÁLCULO CON NÚMEROS DECIMALES: DIFICULTAD DE LAS TAREAS Y ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS Y ERRORES CON MAESTROS EN FORMACIÓN

Tesis Doctoral que presenta
CARLOS DE CASTRO HERNÁNDEZ

Fdo.: Carlos de Castro Hernández

V° B° del director

V° B° del director

Fdo.: Dr. D. Enrique Castro Martínez

Fdo.: Dr. D. Isidoro Segovia Álex

GRANADA, 2012

Este trabajo de tesis doctoral ha sido realizado dentro del proyecto EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática'' financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

A Marisa, la de siempre

A mis padres, Jesús y Aurora

Y a Lourdes, mi hija

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Enrique Castro Martínez y al Dr. Isidoro Segovia Álex, directores de la presente tesis doctoral, por su paciencia en el seguimiento de un largo proceso de formación investigadora y de culminación del trabajo de investigación. Su disponibilidad siempre que hacía falta, su apoyo, aliento, su comprensión y sus orientaciones me han mantenido en el esfuerzo. Sus investigaciones sobre problemas de estructura multiplicativa y sobre estimación inspiraron la mía a partes iguales.

Gracias a todos los miembros del Grupo de Pensamiento Numérico Algebraico (PNA), perteneciente a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Las investigaciones que se han desarrollado en el seno de dicho grupo han contribuido decisivamente en mi formación investigadora a lo largo de los últimos años. Las distintas reuniones del Grupo PNA, desde Palencia (2001), en la que realicé mi primera presentación, previa a la lectura de la memoria de tercer ciclo, hasta la última, celebrada en Granada (2011), han posibilitado el debate y el progresivo afinamiento de muchas de las ideas que se aportan en esta tesis.

Gracias a todos los profesores del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, por la formación que me han dado. Mirando atrás, ir a Granada a estudiar fue el mayor acierto. Los méritos que pueda tener el presente trabajo de investigación, así como los futuros, deberán atribuirse en gran medida a los que han sido (y seguirán siendo) mis maestros.

A María Paz Bujanda Jáuregui, gracias a la cual me incliné por la Especialidad de Didáctica de las Matemáticas, cuando estudiaba la Licenciatura en Matemáticas, y a D. Miguel de Guzmán Ozámiz, que me recomendó realizar el doctorado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Las opciones fundamentales que tomé, orientado por ellos, han sido decisivas en mi vida.

A D. Leopoldo Gonzalo, sin cuyo apoyo y amistad, seguramente, no hubiese tenido ocasión de dedicarme a la enseñanza universitaria, ni se me hubiera ocurrido hacer un doctorado.

A mis padres, Jesús y Aurora, que siempre han confiado en mí, me han apoyado y ayudado en todo, a los que tanto tengo que agradecer…

Y, finalmente (que significa aquí 'hasta el final'), un agradecimiento que no acabe nunca para Marisa y para Lourdes -"Papá está haciendo tesis"-, las más perjudicadas por el tiempo dedicado durante tantos años a la investigación hasta ver concluido este trabajo. Espero saber recompensarlas con acierto por su generosidad, y por todos los sacrificios que han hecho por mí. Como en el cuento de la Oveja Selma, si alguien me pregunta alguna vez qué es el amor, y no sé darle una respuesta teórica, tendré que contarle la historia de Marisa.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Estudio transversal con una parte cuantitativa (diseño factorial de medidas repetidas) en que se analiza la dificultad relativa de tareas de estimación en cálculo, dependiendo de la operación -multiplicación, división A (dividendo mayor que divisor), y división B (dividendo menor que divisor)- y número (naturales, decimales mayores que 1, decimales menores que 1 pero mayores que 0,1, y decimales menores que 0,1). En la parte cualitativa, con entrevista semiestructurada, se analizan conocimientos y procesos metacognitivos, estrategias y errores al estimar.

Participan 131 estudiantes de magisterio; 108 del CSEU La Salle (Universidad Autónoma de Madrid) y 23 de la Facultad de Educación (Universidad de Granada). Se administra una prueba de estimación a los participantes. Resultados: tareas con decimales menores que 0,1 son significativamente más difíciles que las demás; con decimales menores que 1, más difíciles que con naturales o decimales mayores que 1; las divisiones B, más difíciles que las divisiones A.

El estudio cualitativo, a través de entrevistas, muestra en la estimación tres estrategias básicas: Primeros dígitos, fracciones, y algoritmo alternativo; actuaciones no consideradas estrategias: Imitación del algoritmo escrito, adivinación, y renuncia a resolver; y 17 tipos de error: 6 en fase de interpretación, 10 en la ejecución (8 ajustando el valor posicional), y uno en fase de evaluación.

Como conclusión, la dificultad fundamental al estimar con decimales radica en los propios decimales. Entre los errores al estimar, destacan los producidos al operar la coma decimal. Como campo para futuras investigaciones, se propone la evaluación de la estimación.

PRESENTACIÓN

El trabajo que aquí se presenta es la Memoria de TESIS DOCTORAL realizada por Carlos de Castro Hernández para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática, bajo la dirección de los doctores Enrique Castro Martínez e Isidoro Segovia Álex, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

El contenido del trabajo, resumido en el apartado anterior, está organizado en capítulos como se indica a continuación. En el capítulo 1 se explica el origen y la evolución que ha seguido el problema de investigación hasta su definitivo planteamiento. Después, se tratan algunos aspectos de la estimación que resultarán importantes para abordar el problema de investigación, como el grado de aproximación o la precisión de las estimaciones. Se justifica el interés de la investigación haciendo referencia a documentos curriculares. El capítulo concluye con los objetivos de la investigación.

El capítulo 2, dedicado a los fundamentos teóricos, está centrado en detallar las opciones que se han tomado acerca de los términos clave en la presente investigación. Así, se dedica un espacio considerable a las estrategias en matemáticas, al error en el aprendizaje de las matemáticas, a las dificultades y, finalmente, al aprendizaje de los decimales.

El capítulo 3 está dedicado a hacer una completa revisión sobre investigaciones en estimación dividida en tres periodos: La estimación, antes de 1976, el periodo ‘dorado’ de investigación sobre estimación (1976-1994), y el periodo posterior (1994-2011).

El capítulo 4 presenta el marco metodológico y el diseño de la investigación. En él se caracteriza la investigación, se proponen las hipótesis, se describe el método, con los participantes, el periodo de instrucción sobre estimación, y los instrumentos (prueba de estimación y entrevistas), así como el modo de administración de los mismos y detalles relativos a fiabilidad y validez.

El capítulo 5 constituye la parte cuantitativa del estudio. En él se describen, analizan e interpretan los resultados de la aplicación de la prueba de estimación. Tras el planteamiento de las técnicas estadísticas, con sus hipótesis estadísticas y la comprobación de los supuestos del análisis, se estudia primero la influencia de los factores 'tipo de operación', 'tipo de número', y 'curso' sobre la variable dependiente 'puntuación', así como sus posibles interacciones. El último apartado del capítulo está dedicado al estudio de la variable dependiente 'tiempo de respuesta'.

El capítulo 6 comienza la parte cualitativa de la investigación. Está dividido en tres partes que tratan, respectivamente, el estudio de las destrezas de estimación, los conocimientos y procesos metacognitivos y, finalmente, basándonos en estos elementos anteriores, se pasa al estudio de las estrategias de estimación. En el capítulo 7 se realiza el análisis de errores e imprecisiones en la estimación, que completa el análisis cualitativo de la tesis y complementa los resultados descritos en el capítulo 5 de la prueba de estimación.

El capítulo 8, con las conclusiones e implicaciones, cierra el cuerpo del presente trabajo, realizando una revisión global sobre el proceso de investigación. Tras las conclusiones, se proponen dos temas de investigación que han ido surgiendo a lo largo del trabajo y ofrecen interés de cara a estudios futuros: Las redes de dificultades y errores, y la evaluación de la estimación. El capítulo finaliza con una reflexión sobre las implicaciones para la docencia.

Para finalizar, tras el preceptivo apartado de referencias, seis apéndices completan el trabajo: El Apéndice A incluye las tablas de datos de la prueba de estimación, con las estimaciones dadas por los participantes para cada ítem de la prueba, sus correspondientes puntuaciones y tiempos de respuesta, y los órdenes en que aparecieron los ítems al administrar la prueba a cada estudiante. El Apéndice B recoge los programas de las asignaturas que cursaron algunos de los cinco grupos de alumnos participantes (en particular, todos los alumnos seleccionados para las entrevistas). Dentro de dichas asignaturas, se desarrolló el periodo de instrucción sobre estimación que siguieron una parte de los participantes. Los Apéndices C y D están dedicados a suministrar toda la información relativa a las entrevistas, con los datos (estimaciones, tiempos de respuesta, órdenes) correspondientes a las respuestas de los alumnos y las transcripciones completas de las entrevistas que incluyen los protocolos de pensar en voz alta de los participantes al realizar sus estimaciones. En cuanto al Apéndice E, podría haber constituido otro capítulo de la tesis, pero se ha optado finalmente por introducirlo como material complementario. En él aparece un análisis de cada uno de los ítems de la prueba de estimación, estudiando las estimaciones dadas por los alumnos e incluyendo reflexiones importantes sobre el uso del porcentaje de error para evaluar la estimación, e incluso para decidir sobre la precisión de las estimaciones. El análisis individual de cada ítem ofrece ideas interesantes para formular nuevas hipótesis de cara a futuros estudios; en especial, sobre la evaluación de la estimación.

Por último, el apéndice F está dedicado al análisis de las dificultades semióticas. Este aspecto de las dificultades queda abierto para futuras investigaciones, al igual que el tema de las redes de dificultades y errores.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El trabajo de investigación que aquí se presenta tiene por título "Estimación en cálculo con números decimales: Dificultad de las tareas y análisis de estrategias y errores con maestros en formación". Este primer capítulo comienza con una reseña sobre el nacimiento, evolución, y progresivo refinamiento que ha experimentado el problema de investigación hasta llegar a su definición final.

A continuación, se procede a revisar algunos aspectos relacionados con la estimación, que tienen especial interés para el trabajo de investigación que aquí se desarrolla. Comenzaré con la idea de estimación, en sus diversas variantes, considerando la estimación dentro del campo de la resolución de problemas y del sentido numérico, y justificando el interés de investigar en este campo. Después me centraré en dos aspectos clave: la relación que se establece entre la estimación y el valor matemático del control, relación que se materializa a través del porcentaje de error de una estimación y, por otra parte, en aquellas destrezas (como las de aproximación, con sus diferentes grados de aproximación y las de ajuste del valor posicional) que resultan clave para entender los procesos metacognitivos y las estrategias que serán estudiados en el capítulo 6 de este trabajo. La revisión que se hace sobre la estimación no es exhaustiva. En este sentido, se remite al lector interesado en revisar otros aspectos de la estimación a los trabajos: De Castro (2002a), D'Hainaut (1978), Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) o Schoen y Zweng (1986). Este primer capítulo concluirá con la exposición de los objetivos de la investigación.

1. INTRODUCCIÓN: ORIGEN Y DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA A INVESTIGAR

El problema de investigación surge dentro de los cursos de doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Posteriormente, ha ido evolucionando dentro del ámbito del Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), perteneciente a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

1.1. Un problema docente en el inicio

En principio, la opción por el campo de la estimación en cálculo, surge del descubrimiento de la estimación, como contenido matemático[1] para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria y, en consecuencia, como contenido de la formación inicial matemático-didáctica de los maestros. La lectura de los trabajos de Segovia (1986), Segovia (1996), Segovia (1997), y Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), realizada durante los cursos de doctorado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, fue canalizando mi interés hacia el ámbito de la estimación.

En aquel momento, se me planteaba un problema docente[2]: ¿Cómo incluir la enseñanza de la estimación dentro de la asignatura de 'Matemáticas y su Didáctica'? El problema, planteado en términos ingenuos, era: Supuesto que los alumnos tienden a estudiar menos (o a no estudiar) aquellos contenidos que

[1]Como estudiante, nunca había estudiado estimación, y desconocía que la estimación estuviese incluida en el currículo de matemáticas de la Educación Primaria.

[2] Dado que simultaneaba los cursos de doctorado con mi trabajo como profesor de las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas, en las titulaciones de Magisterio que se imparten en el Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle (Centro privado adscrito a la Universidad Autónoma de Madrid).

saben que no se evalúan, ¿cómo puedo hacer para evaluar la estimación, de modo que pueda incluirla, y sea estudiada por los alumnos, en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica?

La respuesta a aquel problema docente consistió en la elaboración de un programa de ordenador para la evaluación de la estimación[3] (Figuras 1.1 y 1.2). Los alumnos podían llevarse el programa[4] a casa y trabajar con él. El programa solicitaba 20 estimaciones y contenía 5 multiplicaciones, 5 divisiones, 2 sumas de 4 números cada una, un problema de paso de euros a pesetas, otro de paso de pesetas a euros, 3 problemas de porcentajes y 3 problemas de regla de tres (ver ejemplos de tareas en la Figura 1.2). Cada vez que se ejecutaba el programa, los números que aparecen en las operaciones y las cantidades de los problemas variaban aleatoriamente, dentro de ciertos márgenes, mientras que el texto de los problemas se mantenía inalterado.

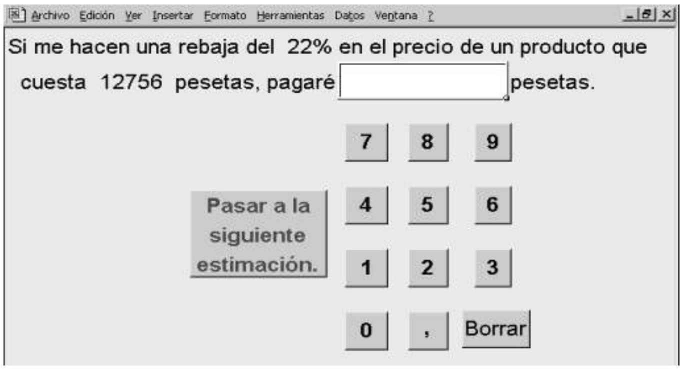


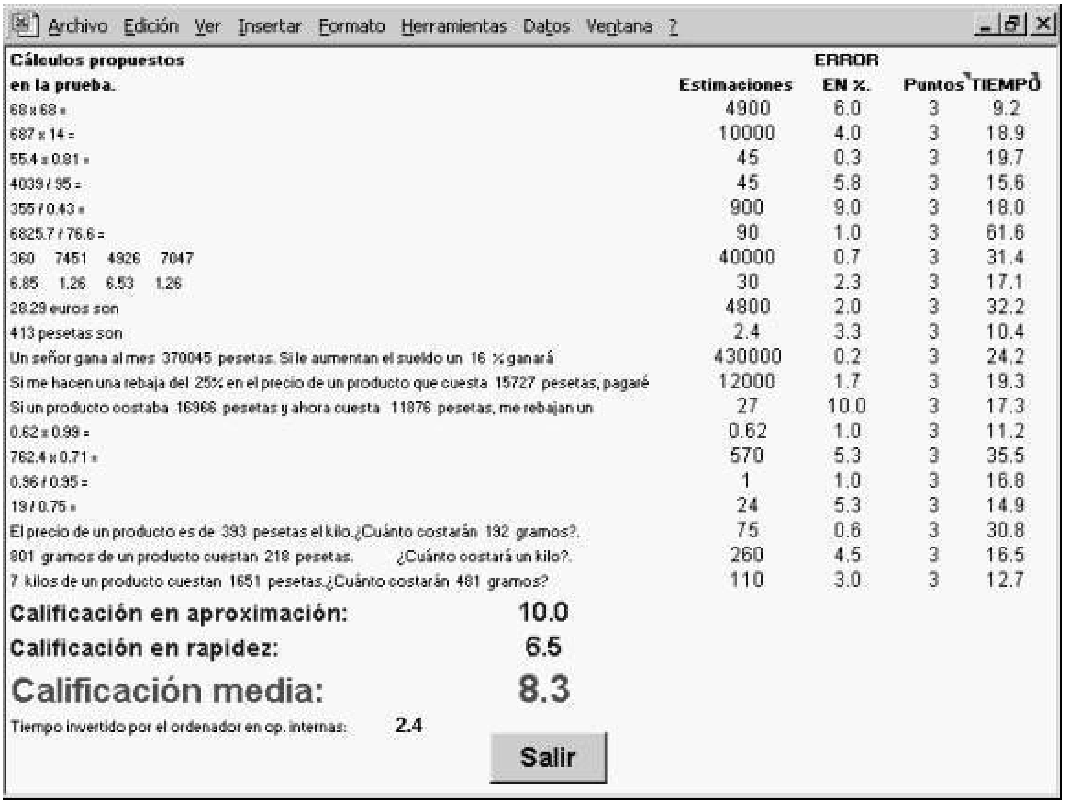
Figura 1.1. Aspecto de una pantalla del programa de estimación

Después de haber contestado las 20 preguntas, aparecía una pantalla de evaluación que permitía a los alumnos disponer de: los problemas propuestos, sus propias estimaciones, el porcentaje de error de cada estimación, la

[3] Dicho programa, diseñado con Excel, está descrito en De Castro (2002), en el apéndice E (pp. 307-310).

[4] Al estar elaborado con Excel el programa de estimación, prácticamente todos los alumnos podían utilizarlo en su casa o practicar con él en el aula de ordenadores del Centro.

puntuación correspondiente a la estimación[5], el tiempo de respuesta en segundos, y las calificaciones en aproximación, rapidez y la calificación media, que trataba de valorar globalmente su destreza en la estimación (Figura 1.2).


Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

Cálculos propuestos en la prueba.	Estimaciones	ERROR EN %.	Puntos	TIEMPO
68 x 68 =	4900	6.0	3	9.2
687 x 14 =	10000	4.0	3	18.9
55.4 x 0.81 =	45	0.3	3	19.7
4039 / 95 =	45	5.8	3	15.6
355 / 0.43 =	900	9.0	3	18.0
6825.7 / 76.6 =	90	1.0	3	61.6
360 7451 4926 7047	40000	0.7	3	31.4
6.85 1.26 6.53 1.26	30	2.3	3	17.1
28.29 euros son	4800	2.0	3	32.2
413 pesetas son	2.4	3.3	3	10.4
Un señor gana al mes 370045 pesetas. Si le aumentan el sueldo un 16 % ganará	430000	0.2	3	24.2
Si me hacen una rebaja del 25% en el precio de un producto que cuesta 15727 pesetas, pagaré	12000	1.7	3	19.3
Si un producto costaba 16966 pesetas y ahora cuesta 11876 pesetas, me rebajan un	27	10.0	3	17.3
0.62 x 0.99 =	0.62	1.0	3	11.2
762.4 x 0.71 =	570	5.3	3	35.5
0.96 / 0.95 =	1	1.0	3	16.8
19 / 0.75 =	24	5.3	3	14.9
El precio de un producto es de 393 pesetas el kilo. ¿Cuánto costarán 192 gramos?.	75	0.6	3	30.8
801 gramos de un producto cuestan 218 pesetas. ¿Cuánto costará un kilo?.	260	4.5	3	16.5
7 kilos de un producto cuestan 1651 pesetas. ¿Cuánto costarán 481 gramos?	110	3.0	3	12.7

Calificación en aproximación: 10.0
Calificación en rapidez: 6.5
Calificación media: 8.3
Tiempo invertido por el ordenador en op. internas: 2.4
Salir

Figura 1.2. Pantalla de evaluación del programa de estimación

La calificación media que se daba a los alumnos en la prueba era una media ponderada que tenía en cuenta la rapidez y la precisión de la estimación. Los alumnos, a través de la práctica con el programa, tendían a buscar un buen equilibrio entre estos dos aspectos, con la información que les daba la prueba de estimación.

Después de practicar con el programa de estimación fuera del aula, los alumnos realizaban una (o varias pruebas) con el mismo programa en el aula de

[5] Siguiendo el sistema de puntuación de Levine (1982): tres puntos, si el porcentaje de error es menor o igual que el 10%; dos puntos, si el porcentaje de error es mayor que el 10% y menor o igual que el 20%; un punto, si el porcentaje de error estaba entre el 20% y el 30%; cero puntos, si el porcentaje de error era superior al 30%.

ordenadores del Centro. Los alumnos podían repetir su prueba cuantas veces quisieran. Al final recibían como calificación en estimación la mediana de las diferentes calificaciones obtenidas en las pruebas realizadas.
La calificación en estimación era tenida en cuenta como una de las notas de la asignatura que, junto a las de los exámenes (parcial y final), y las de otros trabajos propuestos, configuraban la evaluación de la asignatura.

1.2. Del problema docente al problema inicial de investigación

La preceptiva elaboración de la Memoria de Tercer Ciclo (De Castro, 2002), dentro de los cursos de doctorado, supuso la transformación del problema docente en un problema de investigación. En ese momento, junto con los trabajos de estimación citados en el apartado anterior, resultaron especialmente relevantes las investigaciones del profesor Enrique Castro Martínez sobre problemas de estructura multiplicativa (Castro, 1991; Castro, 1995; y Castro y Castro, 1996). Algunos de los resultados, descritos en la revisión de la literatura en estos dos trabajos, hacían referencia a las dificultades que experimentaban alumnos de distintas edades, en el ámbito de la resolución de problemas, cuando en éstos aparecían números decimales menores que uno. Esta problemática había sido también descrita en trabajos sobre estimación en cálculo (Levine, 1980 y 1982; Markovits y Sowder, 1994; y Morgan, 1989 y 1990). En esta situación, el objetivo principal de la Memoria de tercer ciclo fue "estudiar la dificultad relativa de tareas de estimación de multiplicación y división en función del tipo de número (natural, decimal mayor que uno, o decimal menor que uno) que en ellas aparecía" (De Castro, 2002). En este estudio piloto se utiliza el Test de Levine (1980, 1982) y se confirma la hipótesis inicial de que estimar con números decimales menores que uno es significativamente más difícil que estimar con decimales mayores que uno o con números naturales.

1.3. El problema de investigación definitivo

Los resultados obtenidos en el estudio piloto (De Castro, 2002) sugirieron profundizar en esa línea de investigación, diseñando una prueba de estimación específica[6] para abordar los nuevos objetivos del estudio. En este momento de la evolución del problema de investigación, se añadieron dos distinciones que prometían ofrecer importantes resultados: En primer lugar, se diferencia entre la división de un número por otro menor, y la división de un número por otro mayor, siendo esta última más difícil de conceptualizar, según la revisión de la literatura efectuada. En segundo lugar, se distingue, dentro de los decimales menores que uno, entre los mayores y los menores de 0,1. Los decimales menores que 0,1, podían producir una dificultad añadida por no resultar tan 'familiares', por aumentar la complejidad de los cálculos, etc.

Además de estas distinciones que guiaron el diseño del test definitivo, en De Castro (2002) se había realizado un análisis de estrategias de estimación. Para completar el estudio actual, pareció interesante profundizar en el análisis de las estrategias de estimación, incorporando previamente a estas el análisis de conocimientos y procesos metacognitivos y, además, añadir el análisis de errores en estimación, que proporcionara una visión complementaria a la puesta de manifiesto por el análisis estadístico sobre la dificultad de las tareas de estimación en función del tipo de operación y del tipo de número. También se decidió incluir un análisis de dificultades semióticas para ejemplificar con ellas la diferencia teórica establecida aquí entre la dificultad y el error. Todos estos aspectos tratados en la investigación aparecen detallados al final del presente capítulo, en los objetivos de la investigación.

[6] Como se ha comentado, en De Castro (2002) se utiliza el Test de Levine (1980, 1982). Esta prueba contiene todos los tipos de número y de operaciones de interés para una primera aproximación al problema, pero no estaba diseñada a propósito para el mismo.

2. La estimación en cálculo: aspectos fundamentales para la investigación

Voy a comenzar por delimitar el ámbito de estudio de la estimación y a considerar su inclusión dentro de la intersección de dos campos de investigación: la resolución de problemas y el sentido numérico. Después se justificará el interés actual de realizar una investigación sobre estimación, haciendo referencia a varios documentos curriculares de actualidad y con gran relevancia internacional. Luego, introduciré la distinción clave entre estimación y aproximación, para después considerar los procesos de estimación, y las destrezas que intervienen en la estimación como los 'ingredientes' de las estrategias. Se finalizará con la exposición acerca del modelo cognitivo-metacognitivo, basado en las fases de resolución de problemas y en el modelo RTC de Reys y otros (1982), como base para el análisis cualitativo que se realizará en los capítulos 6 y 7.

2.1. La estimación como campo de estudio

La definición general de estimación que asumo como punto de partida es la de Segovia, Castro, Rico y Castro (1989): "Juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (p. 18). Dentro de la estimación, Segovia (1997, p. 18) y Segovia y otros (1989, p. 15) diferencian entre la estimación en cálculo, referida a "las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados" y a la estimación en medida, referida a su vez a "los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida". Segovia (1997) distingue, dentro de la estimación en medida, para el caso de las magnitudes discretas, la estimación de la numerosidad de cantidades discretas, aspecto sobre el cual versa su investigación. Parece haber acuerdo en esta división dentro de la estimación. Hogan y Brezinski (2003) elaboraron pruebas para medir la habilidad en estos tres tipos de estimación y encontraron una correlación positiva entre las puntuaciones de la estimación en medida (de cantidades continuas) y la estimación de numerosidades y, por otro lado, y sin correlación positiva con ellas, la habilidad de estimar resultados de cálculos, que sí mostraba correlación positiva con el razonamiento cuantitativo y la habilidad en el manejo de números.

En esta investigación, centrada en la estimación en cálculo, considero esta dentro del campo de la resolución de problemas y fuertemente vinculada al sentido numérico (De Castro, 2002; Segovia y otros, 1989), como se verá en el próximo apartado.

2.2. Estimación y resolución de problemas

En la investigación que se presenta, se trata de estudiar la actuación de estudiantes de magisterio ante tareas de estimación del tipo: 9,88 ÷ 25,6. En el momento de buscar un marco apropiado para considerar este tipo de tareas, podría optarse en principio por considerar las tareas de estimación dentro del ámbito del estudio de algoritmos del cálculo o dentro de un marco más amplio. Al ser las operaciones planteadas para estimar, multiplicaciones y divisiones de números, fuera de cualquier contexto práctico, podría parecer más correcto enfocar la estimación dentro del ámbito de los algoritmos. Sin embargo, la revisión de la literatura sobre estimación hace apuntar lo contrario: Considerar la estimación dentro del campo de la resolución de problemas. En este sentido, Markovits (1987) indica que, incluso cuando una aproximación por medio de algoritmos es la más adecuada para dar una estimación, "podría haber varios algoritmos diferentes apropiados para resolver problemas aparentemente similares [...] y la elección del algoritmo requiere juicio y decisión" (p. 94).

Por otra parte, la relación entre la estimación en cálculo y la resolución de problemas ha sido puesta de manifiesto por varios investigadores en el campo de la Educación Matemática (Rubenstein, 1982). Por ejemplo, O'Daffer[7] (1979) y Polya (1965)[8] piensan que tratar de dar una estimación para la solución de un problema puede servir de motivación a los alumnos para buscar la respuesta exacta. La estimación también aparece en el modelo de Polya (1945)[9], en la "revisión del problema", al proponer juzgar la razonabilidad de la solución. Por otra parte, O'Daffer (1979) señala que la estimación puede ayudar a los niños en la resolución de problemas, al liberarlos de pensar en el problema de una forma mecánica. Por último, Trafton (1978) sostiene que a través de la práctica de la estimación, los niños aprenden a centrarse más en las estrategias que en el cálculo, lo cual favorece la resolución de problemas.

Reys (1985) elabora una propuesta de características comunes de la estimación en cálculo con la resolución de problemas. Este autor plantea que cualquier persona envuelta en una de estas dos situaciones:

1. Decide qué tipo de respuesta será necesario al final del problema;
2. Es flexible trabajando con formas diferentes de los números;
3. Selecciona estrategias apropiadas;
4. Reconoce que hay muchas soluciones y no teme dejar una estrategia en favor de otra; y
5. Examina si la solución alcanzada es razonable (p. 37).

[7] O'Daffer, P. (1979) A case and techniques for estimation: Estimation experiences in elementary school mathematics – Essential, not extra! *Arithmetic Teacher, 26*, 46-51.

[8] Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (vol. 1). New York: John Wiley & Sons.

[9] Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

2.3. Justificación del interés de la investigación

Como se explicará con más detalle al abordar la revisión de la literatura sobre estimación previa al año 1976, Buchanan (1978) escribió que "la enseñanza de la estimación no es algo que se haya intentado y haya fallado. No se ha intentado de forma sostenida o sistemática" (p. 2). Así pues, el primer documento curricular relevante en que se intenta promover la enseñanza de la estimación es el de los "Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática" (NCTM, 1989). Previamente, resultó fundamental para impulsar la estimación la publicación del Anuario del NCTM sobre estimación (Schoen y Zweng, 1986). Después vendrían los "Principios y estándares para la Educación Matemática" (NCTM, 2000; NCTM & SAEM Thales, 2003).

Dada la vigencia, y relevancia de este documento, voy a revisar la presencia de la estimación en cálculo en los estándares del NCTM (2000). En él, se plantea la necesidad de ir incorporando paulatinamente la estimación dentro del desarrollo del currículo. En este sentido, aparece realzada la necesidad que desarrollar buenos programas de enseñanza desde la Educación Infantil hasta el Bachillerato que permitan "a los alumnos [...] calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables (p. 32). La estimación aparece continuamente, en este documento, vinculada a la capacidad de juzgar la razonabilidad de resultados obtenidos por otros medios (p. 32).

Dentro del estándar de Números y Operaciones, se define el sentido numérico, enfatizando su relación con la estimación, al decir que este puede entenderse como la "habilidad de descomponer números, el uso de números particulares como 100 o 1/2 como referentes, del uso de relaciones entre operaciones aritméticas para resolver problemas, comprender el sistema numérico de base 10, estimar, dar sentido a los números, y reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números (Sowder, 1992)" (NCTM, 2000, p. 32).

Otro aspecto que aparece reflejado en este documento es el de situar la estimación entre un conjunto de técnicas de cálculo, aludiendo a la necesidad de que los estudiantes aprendan a elegir entre ellas:

> Una parte importante de la capacidad de calcular con fluidez implica tomar decisiones adecuadas sobre qué instrumentos emplear y cuándo. Los alumnos deben tener experiencias que les ayuden a aprender a elegir entre el cálculo mental, las estrategias de papel y lápiz, la estimación y el uso de la calculadora. (p. 36)

Esto aparece recalcado desde los primeros años de escolaridad, e incluso antes de la escuela, haciendo referencia al nivel Pre-K que no es obligatorio: "Los alumnos, desde la Educación Infantil hasta segundo curso de Educación Primaria, deben aprender a emplear una variedad de técnicas que incluyen el conteo y la estimación" (p. 46).

También se incide de nuevo en la importancia del sentido numérico, recalcando el papel de la estimación: "Las actividades de estimación son una aplicación temprana del sentido numérico" (p. 106). El aspecto de la razonabilidad trata de promoverse también desde el nivel Pre-K, al proponer, para estos alumnos, que "deberían también desarrollar estrategias de estimación en cálculo ante situaciones que requieran una estimación y como herramienta para juzgar la razonabilidad de los resultados (p. 144).

En el estándar de Números y Operaciones en los grados 3-5, la estimación pasa al ámbito de los números racionales con el objetivo planteado de "Desarrollar y emplear estrategias para estimar cálculos con fracciones y decimales en situaciones relevantes para la experiencia de los alumnos" (p. 148).

Otro aspecto de interés es la alusión del NCTM (2000) en la diferencia de enfoque, dentro del aprendizaje matemático, que suponen el cálculo escrito y la estimación, al defender que "ser capaz de calcular respuestas exactas no conduce automáticamente a la habilidad de estimar o juzgar la razonabilidad de los resultados" (p. 155).

En NCTM (2000) se trata de promover, a lo largo de los diferentes niveles educativos, los aspectos didácticos propios de la verbalización de la propia actividad matemática. En el párrafo siguiente, se enfatizan los beneficios didácticos de las explicaciones dadas a los compañeros: "Se debe animar a los estudiantes a explicar con frecuencia su pensamiento cuando están estimando… Compartir las estrategias de estimación permite a los estudiantes acceder al pensamiento de otros…" (pp. 155-156).

Finalmente, añadimos una nueva referencia, que aparece dentro del estándar de Números y Operaciones para los grados 6-8, a los números racionales, en que aparece reflejada la importancia de la estimación de cara a alcanzar una mejor comprensión del número racional, bien en su representación fraccionaria, decimal o porcentual:

> Los estudiantes deberían también desarrollar y adaptar procedimientos para el cálculo mental y la estimación de cálculo con fracciones, decimales, y enteros. El cálculo mental y la estimación también son útiles en muchos cálculos que implican los porcentajes. Dado que estos métodos requieren a menudo flexibilidad en el cambio de una representación a otra, resultan útiles para la profundización de la comprensión de los estudiantes sobre los números racionales y les ayuda a pensar con flexibilidad acerca de estos números (pp. 220-221).

En España, la estimación no aparecía en el currículo en 1982. Por ejemplo, MEC (1982) propone el "Cálculo mental y rápido de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales" (p. 9587), pero no menciona la estimación entre los contenidos, para el segundo ciclo de la Educación General Básica (equivalente a 3º, 4º y 5º de la actual Educación Primaria). La estimación aparece por primera vez en el currículo matemático español en 1991 (MEC, 1991) al decir que "Las matemáticas constituyen hoy un conjunto amplio de modelos y procedimientos de análisis, de cálculo, medida y estimación" (p. 31). El documento español que considero 'equivalente' de Schoen y Zweng (1986), en el ámbito español, es Segovia y otros (1989)[10] como documento de amplia difusión, anticipador de la futura presencia de la estimación en el currículo (MEC, 1991). Posiblemente haya sido España de los primeros países, después de EE. UU., en incluir la estimación en el currículo matemático.

A partir de 1989 en EE. UU., y de 1991 en España, la presencia de la estimación parece ser creciente. En particular, hay dos documentos que marcan la línea de evolución de los documentos curriculares matemáticos en EE. UU.: Los "puntos de enfoque curricular" (NCTM, 2006) y los "Estándares comunes fundamentales" (Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010). En los "Puntos de enfoque curricular" (NCTM, 2006) se recomienda la estimación: desde la educación infantil hasta el tercer grado, como uno de los procedimientos alternativos de cálculo; en segundo grado, para estimar resultados de sumas, restas y longitudes (dentro ya del ámbito de la estimación en medida); en tercer grado, para desarrollar la comprensión sobre los números; en cuarto grado, para estimar cantidades y distancias; en quinto grado, para estimar sumas y diferencias de fracciones y decimales y perímetros áreas y volúmenes de formas planas y tridimensionales irregulares; a partir de séptimo grado, dentro del análisis de datos y la probabilidad, para hacer estimaciones sobre una población basándose en informaciones obtenidas de una muestra[11]. Así, la estimación aparece en todos los cursos como un tema matemático fundamental, cada vez con una presencia más consolidada en el currículo matemático escolar.

[10] Trabajo influido por la investigación de Segovia (1986).

[11] Aunque el uso que se hace de la estimación en estadística es bastante diferente al concepto de estimación de este trabajo, es interesante ver que también aparece reflejado en NCTM (2006).

En los "Estándares comunes fundamentales" (NGA Center & CCSSO, 2010), se enfatiza la importancia del uso estratégico de la estimación para detectar errores (p. 7), se plantea el objetivo de estimar longitudes con unidades estándar para segundo grado (p. 18), estimar intervalos de tiempo, volúmenes de líquido y masas de objetos para tercer grado (p. 22) y aprender estrategias de estimación (incluyendo el uso del redondeo) y evaluar la razonabilidad de los resultados (p. 23), también para el tercer grado. En cuarto grado, aparecen las estimaciones de productos y cocientes; en quinto grado, la estimación se aplica a la suma y la resta de fracciones, y se continúa con la estimación en medida. En séptimo grado se vuelve a enfatizar el papel de la estimación para juzgar la razonabilidad de los resultados (p. 49). Se aplica por primera vez el término estimación al ámbito de la Estadística. En octavo grado aparece la estimación ligada a la notación exponencial y a la expresión aproximada de grandes cantidades. Por primera vez, lo que constituye una novedad en el tratamiento curricular de la estimación, aparece en este curso la estimación de las soluciones de ecuaciones a través de su representación gráfica. También aparece, ya a finales de la Enseñanza Secundaria, la estimación de la tasa de variación de una función (p. 69), con lo que la estimación, más tradicionalmente ligada al número y a las operaciones, empieza a aparecer como un instrumento fundamental ligado también al álgebra y a las funciones. También aparecen ejemplos de aplicaciones de la estimación a la geometría o a la modelización para alumnos de finales de Secundaria.

La revisión de estos dos influyentes documentos arroja la idea de que la estimación tiene una presencia no solo estable, sino creciente en el currículo matemático y que va extendiendo su influencia fuera de los temas de cálculo hasta aparecer, como contenido y proceso matemático transversal, en todas las áreas de las Matemáticas.

Esta breve reflexión curricular debería bastar para señalar la estimación como un campo de investigación prioritario que, en especial, debe desarrollarse también en el futuro más allá del número y el cálculo.

2.4. Estimación y aproximación

Aunque la estimación y la aproximación comparten ciertas similitudes, convendrá en los párrafos siguientes establecer claramente alguna diferencia fundamental entre ambas. Remitiéndonos a palabras de Hall (1984), la estimación es "la habilidad mental de producir adivinaciones educadas" (p. 516). La aproximación, por el contrario, se define como "búsqueda de un dato numérico suficientemente preciso para un determinado propósito" (p. 517). Con respecto a la aproximación, Segovia y otros (1989) indican que "las aproximaciones y sus grados de proximidad (errores) permiten elaborar una aritmética particular que se conoce por Cálculo Aproximado"[12] (p. 22). Así, la diferencia decisiva entre estimación y aproximación estriba en que en la aproximación "los valores asignados y los resultados obtenidos tienen un grado de proximidad controlada con respecto al dato exacto" (Segovia[13] y otros, 1989, p. 22), mientras que al estimar resulta muy complejo[14] controlar el tamaño del error cometido. Por esta razón, en cualquier revisión de la literatura sobre estimación, se encuentra que la evaluación de la estimación mediante un porcentaje de error es una opción muy discutida. Esta situación puede verse reflejada en el siguiente ejemplo:

Se desea estimar el resultado de 164×378, y se considera que una estimación aceptable es aquella cuyo porcentaje de error es menor de un 30%. Al redondear, utilizando un dígito significativo en cada número, se obtiene

[12] Las reglas del cálculo aproximado, junto con ejemplos del mismo, pueden consultarse en trabajos como: Anderson (1992), Hilton y Pedersen (1986) y Jollife (1999).

[13] Este trabajo no cita a NCTM (1989) pues salen ambos trabajos el mismo año.

[14] Segovia, Castro, Castro, y Rico (1989, p. 20) indican que en la estimación "el grado de aproximación de una respuesta puede controlarse".

$164 \times 378 \approx 200 \times 400 = 80000$, con un porcentaje de error del 29,05%, resultando una estimación aceptable. Si se repite el mismo proceso para el cálculo 164×374, utilizando la misma estrategia, se obtendrá: $164 \times 374 \approx 200 \times 400 = 80000$, con un porcentaje de error de un 30,43%, mayor que el límite establecido, por lo que la estimación no será aceptable.

En este trabajo se ha adoptado una 'doble' postura con respecto al margen de error del 30%. Por un lado, se ha adoptado como referencia, pero no como referencia única, sino como una referencia 'reforzada' por el uso del otro criterio habitual en la evaluación de las tareas de estimación: el intervalo de respuesta razonable. Las tareas que componen la prueba de estimación han sido diseñadas siguiendo un análisis previo según el cual, que una estimación esté fuera del intervalo del 30% de error suponga estar fuera del intervalo de respuesta razonable construido por medio de la aplicación de estrategias de estimación comúnmente enseñadas. Si se hubiese realizado este análisis previo con la tarea antes propuesta (164×374), esta hubiera sido desechada, por no cumplir que el redondeo a las centenas dé lugar a una estimación aceptable (el intervalo de respuesta razonable no estaría incluido en el del 30% de error).

Por otra parte, se espera recoger información relevante en este trabajo para facilitar la reflexión sobre el modo idóneo de evaluar las estimaciones de los alumnos. Así, en las conclusiones se valorará el resultado de haber aplicado la visión 'restrictiva' del uso del 30% de error que se ha utilizado aquí.

En todo caso, deben distinguirse dos ámbitos en que el porcentaje de error admitirá interpretaciones diferentes: el de la puntuación de un test de estimación, dentro del marco de una investigación, en el que se debe elegir una opción determinada de antemano, y el ámbito menos rígido de la docencia, donde el porcentaje de error puede tomarse como una información a valorar conjuntamente con otras.

2.5. La estimación y el valor matemático del control

Bishop (1999, 2001) describe seis valores que pueden considerarse propios de la cultura matemática occidental: racionalismo, objetivismo, control, progreso, apertura y misterio. Uno de estos valores, el control, está estrechamente vinculado a la estimación, pues la enseñanza de esta puede favorecer (o no), según cómo se plantee el proceso de aprendizaje, la adquisición del valor matemático del control por parte de los alumnos. Bishop (2001) define el control como un valor que supone:

> Valorar la [...] seguridad que las matemáticas ofrecen. Supone aspectos como tener reglas, ser capaz de predecir, y ser capaz de aplicar las ideas al entorno. Las Matemáticas, a través de la ciencia y la tecnología, han proporcionado a la cultura occidental un fuerte sentimiento de seguridad en el conocimiento. Sentimos que controlamos los fenómenos cuando podemos describirlos matemáticamente. Esta es una de las razones principales por las que a la gente les gustan las matemáticas. Tiene respuestas correctas que siempre pueden ser comprobadas (Bishop, 2001, pp. 98-99).

En el apartado anterior, dedicado a las relaciones entre la aproximación y la estimación, se ha explicado que una diferencia importante entre ambas reside en el control que se puede tener sobre el grado de aproximación. La pregunta que cabe hacerse aquí sería: ¿Puede enseñarse la estimación de modo que su estudio favorezca la adquisición del valor matemático del control, en los términos planteados por Bishop (2001)? Si se hace un uso de la estimación para determinar una cota inferior y otra superior para un cálculo, de modo que podamos decir con seguridad que el resultado exacto se encuentra dentro del intervalo establecido, y este intervalo sirve para examinar la razonabilidad de un resultado obtenido por otro medio (por ejemplo, por calculadora) o para tomar decisiones prácticas (por ejemplo, si tengo suficiente dinero para comprar algo), la estimación favorece la adquisición del valor del control. Por el contrario, si se utiliza la estimación de modo que los alumnos produzcan resultados cuya precisión dependa de valores establecidos arbitrariamente, no se favorecerá el valor del control. La recomendación que se da aquí es que en el desarrollo curricular se siga la línea de potenciar este valor del control a través de la enseñanza de la estimación. En la presente investigación, con unos objetivos claramente fijados, que no van en la línea del desarrollo del currículo, se ha optado por utilizar un 30% de error 'reforzado', como se ha indicado antes, de modo que el 30% no tiene ya un carácter arbitrario para las tareas elegidas, sino que estimar fuera del intervalo del 30% de error (para estas tareas) supone estimar fuera del intervalo de respuesta razonable, determinado mediante la aplicación de estrategias comúnmente aceptadas.

2.6. Procesos, destrezas y estrategias en la estimación

Uno de los trabajos más influyentes en la investigación sobre estimación ha sido el de Reys y otros (1982). En él se expone, por primera vez, el modelo de procesos de estimación conocido como RTC (iniciales de reformulación, traducción y compensación).

Reys y otros (1982) analizan las estrategias de estimación de los participantes en su investigación, identificando en ellas tres procesos generales, que sirven para describir a los buenos estimadores: reformulación, traducción y compensación. La reformulación se define en este trabajo como: "el proceso de cambiar los datos numéricos para producir una forma [del problema] más manejable mentalmente. Este proceso deja la estructura del problema[15] intacta"

[15] Interpreto aquí la estructura del problema como "la descripción de los algoritmos o ecuaciones algebraicas que hacen posible la obtención de una solución del problema" (Castro, 1991, p. 56). Así, considero que se produce un cambio en la estructura matemática del

(p. 187). Por otra parte, "la traducción es el proceso de cambiar la estructura matemática del problema por otra más manejable mentalmente. Esta forma será después utilizada en el cálculo para procesar los datos numéricos" (p. 188). Finalmente, la compensación se pone de manifiesto en los "ajustes hechos para reflejar variaciones en los números debidas a la reformulación y a la traducción" (p. 189).

Más allá de estas valiosas ideas del modelo RTC sobre los procesos de estimación, se encuentran las destrezas y estrategias de estimación, necesarias para terminar de delinear el modelo completo con el que abordaré el análisis de procesos metacognitivos, destrezas y estrategias de estimación y errores e imprecisiones al estimar. La línea básica de este trabajo sobre destrezas y estrategias en estimación está tomada del trabajo de Segovia y otros (1989):

> El Cálculo Aproximado y la Aproximación enfatizan los aspectos algorítmicos de la Estimación; se trata de destrezas y de los conceptos previos que las fundamentan. Sin embargo, la estimación es un proceso más general, que supone una utilización conveniente de las técnicas de aproximación, pero que tiene más que ver con las estructuras conceptuales y las estrategias generales. En este sentido podemos identificar el cálculo aproximado con el pensamiento algorítmico mientras que la estimación corresponde a una categoría más general del pensamiento: las estrategias generales (p. 22)

En el enfoque adoptado en este trabajo, producir una estimación consiste básicamente en: sustituir los datos del problema por aproximaciones, que

problema (y, por tanto, un proceso de traducción) al sustituir los datos iniciales por otros, cambiando el algoritmo de cálculo utilizado para hallar el resultado. Un ejemplo de traducción sería la sustitución en $400 \times 0{,}5$ de 0,5 por ½, en el caso de que la sustitución suponga un cambio en el algoritmo al pasar de "multiplicar por 5 y dividir por 10", como se haría en el algoritmo habitual de multiplicar, por "dividir por dos", al operar con fracciones.

permitan reducir la complejidad de los cálculos manteniendo la proximidad necesaria al valor exacto, aplicar un algoritmo sencillo de cálculo mental a estas aproximaciones, realizar una compensación (previa o posterior al algoritmo de cálculo), obtener el resultado y hacer una valoración del resultado obtenido. Como se ha expuesto, dependiendo del tipo de sustitución que se haga con los datos iniciales y si esta implica (o no) un cambio en el algoritmo de cálculo, se estará ante un proceso de *reformulación* o uno de *traducción*.

Al igual que en el trabajo de Segovia[16] y otros (1989), también se toma aquí como fundamental la idea de que las estrategias pueden definirse como "procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema" (Cockcroft, 1985, p. 87). Dentro del modelo adoptado para la estimación, expuesto en el párrafo anterior, deben hacerse las siguientes precisiones: En primer lugar, al analizar una estrategia de estimación se atenderá al tipo de sustitución que se realice con los datos iniciales del problema; en segundo lugar, se estudiará el modo en que se opera con las aproximaciones, indicando si este supone un proceso de traducción o de reformulación; y, finalmente, se señalará si se ha producido un proceso de compensación y de qué tipo ha sido la misma (intermedia o final). Así, en este trabajo, se toma el término "estrategia" en un sentido general, que no solo tiene en cuenta lo que en los trabajos sobre estimación se ha considerado como estrategias específicas de estimación, sino que también toma en cuenta los

[16] Según estos autores, las estrategias "no forman parte de los habituales enunciados de contenido, sino más bien de los modos de empleo del conocimiento" (p. 127). De acuerdo con este planteamiento, en este trabajo se da más importancia al modo en que se seleccionan, aplican y evalúan las destrezas implicadas en la estimación, que a las propias destrezas en sí. Por esta razón se ha dedicado un apartado a los procesos metacognitivos de monitorización y regulación que dan cuenta de cómo se seleccionan las destrezas de aproximación, se cambian, se ajustan teniendo en cuenta otras informaciones, como se elige la forma de operar la coma decimal, etc.

procesos de estimación utilizados, los algoritmos de cálculo mental y la valoración del resultado (o la ausencia de la misma). Al adoptar este planteamiento, se da cabida también -dentro de las estrategias de estimación- a procesos metacognitivos como los descritos por Sowder (1994). Esta autora afirma que los individuos considerados como buenos estimadores "suelen ser caracterizados como flexibles, tienen confianza en sí mismos, toleran el error en las estimaciones y [...] examinan la razonabilidad de los resultados" (p. 142). De este modo, el sujeto que realiza una estimación debe ser capaz de elegir de forma flexible una estrategia adecuada para el problema de estimación (para lo cual conviene que conozca varias). Del mismo modo, debe ser también capaz de evaluar tanto el proceso (modificándolo si fuera oportuno) como el resultado (examinando la razonabilidad del mismo). Sowder (1994) considera la elección flexible de estrategias y la valoración del proceso y del resultado como ejemplos de "auto-regulación" y "auto-monitorización" que constituyen procesos metacognitivos. Según esta autora, son "estos metaprocesos, quizá más que otros, los que distinguen a aquellos que tienen éxito en cálculo mental y en la estimación en cálculo de los que no lo tienen" (p. 143).

2.7. Modelo cognitivo-metacognitivo para la estimación

El análisis de las estrategias de estimación y errores del presente trabajo está basado en un modelo cognitivo-metacognitivo para la estimación que describiré a continuación. Dicho modelo está basado en las fases en el proceso de resolución de un problema, considerando la estimación dentro de la resolución de problemas (Reys, 1985). Las fases de resolución del problema se integran dentro de un modelo para la metacognición constituyendo el modelo cognitivo-metacognitivo que se propone.

Para comenzar, considero la metacognición como el conocimiento y control que tiene una persona sobre su propia actividad cognitiva. Dentro del conocimiento metacognitivo, Flavell (1987) establece la distinción entre el conocimiento referido a la propia capacidad cognitiva, el conocimiento de las tareas que se deben resolver, y el de las estrategias que se emplean para resolver dichas tareas. Así pues, hay conocimiento metacognitivo de persona, tarea y estrategia. El otro componente de la metacognición es el formado por el control metacognitivo, con sus procesos de monitorización (o supervisión) y regulación. La monitorización es el proceso de producción de conocimiento sobre el curso de la propia actividad cognitiva. La regulación consiste en la producción de cambios en el curso de la propia actividad cognitiva como resultado de la monitorización[17].

En los trabajos sobre metacognición en resolución de problemas matemáticos, se suelen tomar como punto de partida las fases de resolución de un problema. Una revisión de trabajos en los que se han descrito las fases en el proceso de resolución de problemas se puede consultar en Castro (1991, pp. 34-39). En este trabajo, he adoptado la opción de tres fases: representación-comprensión, planificación-ejecución (en adelante, ejecución) y evaluación. Dadas las peculiares características de los procesos de estimación[18], considero más adecuado tomar conjuntamente las fases de planificación y ejecución. Un aspecto fundamental al considerar estas "fases" es que en ocasiones no es posible establecer una distinción nítida entre las mismas. No se trata de fases temporales, sino de distintos tipos de actividad cognitiva que desarrollan las personas durante el proceso de resolución de un problema.

A lo largo de la literatura sobre educación matemática, se pueden encontrar diversos modelos elaborados con el objetivo de analizar los elementos metacognitivos de la actividad matemática de resolución de problemas. En todos ellos ha tenido una notable influencia el modelo de Polya (1957): Comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan, visión

[17] Las definiciones están tomadas básicamente del trabajo de Flavell (1987).

[18] Como su duración, de 61,1 segundos de media para cada tarea en esta investigación.

retrospectiva (aunque con muy notables cambios en su interpretación teórica). Entre los modelos cognitivos-metacognitivos cabe destacar el de Schoenfeld (1983), en el que se tienen en cuenta la lectura, análisis, exploración, planificación/implementación y verificación. También es importante el de Garofalo y Lester (1985) que considera la orientación (comprensión y representación inicial), organización (planificación), ejecución y verificación (evaluación). Finalmente, cito el modelo de Artzt y Armour-Thomas (1992) con fases de lectura, comprensión, análisis, exploración, planificación, implementación, verificación, observación y escucha. En este trabajo, basado en análisis de la realización de tareas en grupo, aparecen la 'regulación por otros' y la 'toma de decisiones conjunta' como elementos adicionales a otros modelos.

Para resumir, en la Figura 1.3[19] aparecen integrados los distintos componentes de la metacognición. Con respecto a ella, cabe hacer varias consideraciones. En primer lugar, como advertía Flavell (1987), no es posible separar por completo el conocimiento de la persona, la tarea y la estrategia. Por ejemplo, cuando un alumno dice que a él le parece más difícil producir una estimación para una multiplicación que para una división, el conocimiento de persona (lo que resulta difícil para él) y de la tarea (de multiplicación o de división) aparecen mezclados. Por otra parte, tampoco es fácilmente distinguible en las tareas de estimación, la fase de planificación y la de ejecución. Algunos sujetos comienzan la planificación de su estrategia eligiendo truncar los números e inmediatamente cambian (evidenciando en su pensamiento procesos de monitorización y regulación) a otra destreza de aproximación como el redondeo. Esto se hace antes incluso de haber concluido su planificación inicial eligiendo el grado de aproximación, forma de ajustar el valor posicional, etc. A este respecto, cabe destacar que hay en la literatura tanto autores que prefieren

[19] Adaptada de Mateos (2001).

considerar una única fase de planificación/ejecución (Schoenfeld, 1985) como otros que optan por separar estas dos fases (Artz, Armour-Thomas, 1992), dependiendo en gran medida esta elección de otras características de la investigación (como el analizar un trabajo individual o grupal, la duración de la resolución de las tareas, etc.). Davidson y Sternberg (1998, p. 54) indican que a medida que el sujeto va avanzando a través de la resolución de un problema se hace necesaria la actualización de dichos planes basándose en la supervisión metacognitiva que indica en qué medida están funcionando los planes y qué posibilidades de modificación están disponibles. Esto indica que los planes se rectifican o que incluso, en ocasiones, es necesario comenzar de nuevo el proceso de planificación durante la ejecución. Esta dificultad en separar tipos de conocimiento y fases de resolución, dentro del contexto de las tareas de estimación, hará que se ponga un énfasis mayor en ejemplificar distintos elementos del conocimiento y procesos metacognitivos que en elaborar un esquema de clasificación formado por categorías excluyentes.

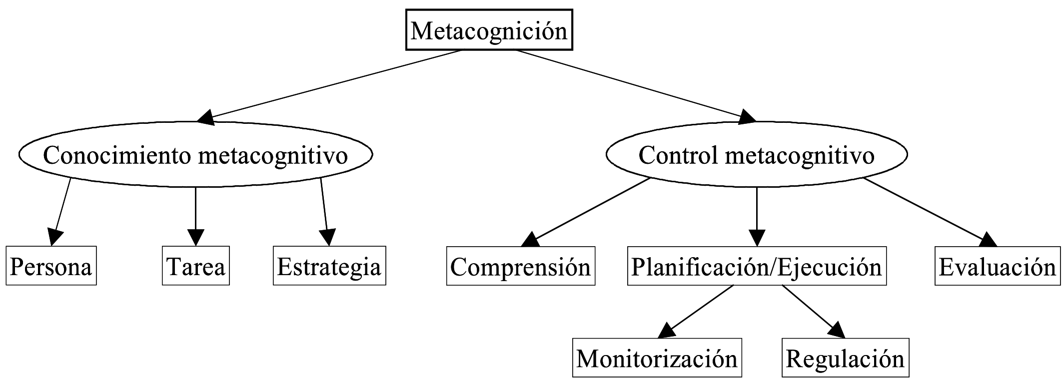


Figura 1.3. La metacognición como conocimiento y control metacognitivos

En mi planteamientos inicial sobre la metacognición, he adoptado un modelo previo que todavía necesita ser ajustado. Este modelo toma como partida el trabajo de Garofalo y Lester (1985) e incorpora al mismo otras referencias coherentes con sus fundamentos teóricos (Davidson, Deuser y Sternberg, 1996;

Davidson y Sternberg, 1998) y otros elementos que no estaban en el modelo inicial (como la aportación de Kluwe, 1982 y 1987 para la distinción entre autorregulación y supervisión).

Un objetivo interesante a largo plazo, sería la elaboración y validación de un modelo de actuación para las tareas de estimación en cálculo, que complemente el modelo descrito por Segovia y otros (1989). Este modelo consideraría la estimación (incluso la que se realiza para operaciones descontextualizadas) dentro del marco más general de la resolución de problemas. En este trabajo me planteo el objetivo más modesto de elaborar una herramienta para el análisis de protocolos de pensar en voz alta, con el que se puedan analizar también los aspectos metacognitivos y que aspire a la vez a dar una descripción detallada de las estrategias y los errores en la estimación.

Debe resaltarse la importancia de contar con un marco teórico adecuado para analizar los aspectos metacognitivos de los protocolos de resolución de problemas matemáticos. Por ejemplo, Kluwe (1982, pp. 213-214) indica que al utilizar su clasificación de decisiones ejecutivas para analizar los protocolos de pensar en voz alta que aparecen en el trabajo de Newel y Simon (1972), encontró que el 60% de las expresiones, consideradas como meta-expresiones, no aparecían codificadas por los autores del trabajo. Ignorar los aspectos metacognitivos puede conducirnos a perder una información demasiado valiosa para comprender adecuadamente la actividad matemática de los alumnos.

Los procesos metacognitivos han recibido menos atención en el ámbito de la estimación que en el de la resolución de problemas. Sowder (1994) afirma que los individuos considerados como buenos estimadores “suelen ser caracterizados como flexibles, tienen confianza en sí mismos, toleran el error en las estimaciones y [...] examinan la razonabilidad de los resultados” (p. 142). La persona que realiza una estimación debe ser capaz de elegir de forma flexible una estrategia adecuada para el problema de estimación y de evaluar tanto el proceso (modificándolo si fuera oportuno) como el resultado (examinando la razonabilidad del mismo). Sowder (1994) considera la elección flexible de estrategias y la valoración del proceso y del resultado como ejemplos de “auto-regulación” y “auto-monitorización”, que constituyen procesos metacognitivos. También Levine (1980) destaca la importancia de la flexibilidad al afirmar que:

> El alumno que cambia a algún otro modo alternativo de estimar al experimentar dificultades exhibe unos recursos y una flexibilidad no mostrados por los alumnos que, o bien dan un resultado al azar, o bien vuelven de nuevo a intentar la misma estrategia problemática. La misma flexibilidad fue mostrada por alumnos que tomaron en consideración sucesivamente varias variaciones de la misma estrategia sin realizar efectivamente los cálculos mas que para la última variación considerada. (p. 83)

Lemaire, Lecacheur y Farioli (2000) citan aspectos del uso de estrategias en los que se ponen de manifiesto distintos procesos metacognitivos: El repertorio de estrategias, la distribución de las estrategias en función del tipo de problema al que se aplican, la ejecución de estrategias (en términos de rapidez y precisión), y la selección de estrategias o ajuste de las mismas a las características de un problema (adaptabilidad estratégica) (p. 142).

Aunque las estrategias de estimación han recibido gran atención en la literatura sobre estimación, faltan trabajos en los que se haga un estudio detallado de los procesos metacognitivos que intervienen en la ejecución de las tareas de estimación. Además, en el presente trabajo se da gran importancia al análisis de los errores en la estimación. Parece pertinente aquí citar a Swan (2001) al afirmar que no todos los errores provienen de una idea equivocada. Propone el ejemplo de una alumna que pensaba que “la multiplicación siempre aumenta" a la que, después de pedírsele que reflexionara sobre su respuesta, fue capaz de cambiarla por una respuesta correcta y bien argumentada. Algunos errores son, por tanto, según este autor, resultado de una falta de autorregulación.

3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En la presente investigación, de acuerdo con la descripción que se ha hecho del origen y el planteamiento del problema de investigación, los objetivos que me planteo son los siguientes:

1. Estudiar la dificultad relativa de las tareas de estimación en función del tipo de operación y del tipo de número. Dentro del tipo de operación, se consideran la multiplicación, la división con dividendo mayor que el divisor, y la división con dividendo menor que el divisor. En el tipo de número de distinguen las operaciones que contienen solo números naturales, decimales mayores que uno, decimales menores que uno y mayores que 0,1, y decimales menores que 0,1. Para abordar este objetivo deberá diseñarse una prueba de estimación.
2. Analizar las destrezas, conocimientos y procesos metacognitivos, y estrategias de estimación que emplean los estudiantes de magisterio al estimar los resultados de multiplicaciones y divisiones con números decimales. En el planteamiento de este trabajo, las destrezas son consideradas como 'ingredientes de las estrategias', y los conocimientos y procesos metacognitivos influyen decisivamente en la selección, articulación y ejecución de destrezas. Por tanto, todo el esfuerzo de análisis está orientado hacia las estrategias.
3. Elaborar un esquema para la clasificación de errores en estimación, considerando la estimación dentro de la resolución de problemas, y atendiendo especialmente a las peculiaridades de los procesos de estimación y de las operaciones con números decimales.

4. Clasificar los errores e imprecisiones que cometen los estudiantes de magisterio al estimar los resultados de multiplicaciones y divisiones con números decimales.
5. Estudiar dificultades semióticas que experimentan los estudiantes de magisterio ante tareas de estimación, que sirvan para ilustrar la diferencia teórica establecida en este trabajo entre dificultad y error.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

El presente trabajo versa sobre la estimación en cálculo con números decimales. Dado que entre los objetivos se han señalado (en el capítulo 1) el análisis de estrategias, procesos metacognitivos, destrezas, dificultades, y errores, se hace necesaria una revisión, con cierta profundidad, sobre todos estos temas. Dada la extensión conjunta de los temas a tratar, se ha optado por dividir en dos capítulos (el segundo y el tercero) toda la parte de fundamentación teórica y revisión de antecedentes de la investigación. Así, a pesar de que la presente tesis es sobre estimación, las definiciones y cuestiones que atañen a la estimación no aparecen hasta el capítulo 3. Se ha hecho así para proceder de lo general a lo particular en el discurso, hablando primero de estrategias, destrezas, errores, dificultades, etc., en matemáticas, para después pasar a lo específico de estas cuestiones en el ámbito de la estimación.

Siguiendo este proceder, este capítulo está centrado en explicar qué alcance tienen los términos fundamentales: estrategia, error y dificultad. También se dedicará un apartado a hacer una revisión sobre los números decimales; en especial, centrándonos en los aspectos relevantes de cara a esta investigación.

1. Estrategias en Matemáticas

El objetivo de este apartado es revisar ciertos aspectos sobre el aprendizaje de las matemáticas relevantes para la investigación. Comenzaré por analizar términos clave como son 'estrategia' y 'destreza', que serán fundamentales al analizar los procesos metacognitivos y las estrategias en estimación.

1.1. Procedimientos en Matemáticas: Destrezas, algoritmos, heurísticos y estrategias

En este apartado, haré un breve análisis conceptual sobre el término "estrategia" para distinguirlo de otros términos afines como "algoritmo", "heurístico" y "destreza". La clarificación de qué entiendo por estrategia será necesaria, como se ha dicho, para abordar el análisis de estrategias en el capítulo 6. El enfoque adoptado para este ámbito de conocimientos matemáticos está fundamentalmente basado en los trabajos de Rico (1997a) y Gómez (1995) que considero, en muchos aspectos, muy cercano al presente trabajo. Finalmente, ya en el capítulo 3 dedicado a la estimación, revisaré algunas propuestas sobre fases de resolución de problemas y sobre modelos cognitivos-metacognitivos para la resolución de problemas. El objetivo principal de esta última parte del capítulo 3 es disponer de un modelo teórico para el análisis de las estrategias en estimación.

1.1.1. Procedimientos

Comienzo con el término 'procedimiento', para el que Coll (1995) ofrece la siguiente definición:

> Un procedimiento es un conjunto de acciones ordenadas y finalizadas, es decir, orientadas a la consecución de una meta. Para que un conjunto de acciones constituya un procedimiento, es necesario que esté orientado hacia una meta y que las acciones o pasos se sucedan con un cierto orden. (Coll, 1995, p. 139)

Como sinónimos de procedimientos, Coll (1995) cita las destrezas, técnicas, métodos y estrategias; como ejemplos de procedimientos en matemáticas, restar llevando o construir un plano. Desde este punto de vista, 'procedimiento' sería un término muy general, que englobaría tanto, en un extremo, a las destrezas, como, en el otro, a las estrategias. En esta misma línea, Rico (1997a) describe los procedimientos como “formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas” (p. 31) y considera, dentro de ellos, a destrezas y técnicas, razonamientos y estrategias.

Aunque este significado general del término 'procedimiento' es muy habitual, en este trabajo he seguido la propuesta de Gómez (1995) que distingue, dentro del cálculo mental, entre estrategias, métodos, modalidades de los métodos, enfoques de los métodos y *procedimientos* (pp. 96-97). Los procedimientos “son las secuencias ordenadas y explícitas de cálculos que desarrollan las modalidades de los métodos y que llevan hasta el resultado” (p. 97). En este enfoque, el procedimiento no es un término que englobe a las estrategias[20], sino que se refiere a la descripción de lo que el alumno hace, paso a paso, para realizar un cálculo mental o una estimación. Así, al examinar los protocolos de pensar en voz alta de los participantes en esta investigación, se llega, en un primer nivel de análisis, a los procedimientos llevados a cabo, mezclados con elementos de tipo metacognitivo que van a dar cuenta del carácter estratégico de los procesos de estimación.

1.1.2. Destrezas

Para Rico (1997a), las destrezas transforman unas expresiones simbólicas en otras, ejecutando reglas sobre manipulación de símbolos y procesando hechos numéricos. En este trabajo, son importantes las *destrezas aritméticas*, entre las que destacan “la lectura y escritura de números, el cálculo mental […], el cálculo con papel y lápiz, y el uso de la calculadora” (Rico, 1997, p. 32). En el ámbito de la estimación, considero como destrezas tanto el proceso de

[20] Dicho de forma más clara, en este trabajo la estrategia no es un tipo de procedimiento. Al analizar el procedimiento, considerando el mismo en distintos niveles, se aprecia que en él se están aplicando estrategias, métodos y enfoques de estos métodos.

aproximación[21], como el cálculo aproximado (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989). Un punto clave en este trabajo, en el que se insistirá posteriormente, es que la estimación no puede reducirse a la aproximación y al cálculo aproximado y no es, por tanto, una destreza. Estimar requiere elaborar un plan, ponerlo en marcha y evaluarlo, aspectos no prescritos de antemano, como en el caso de los algoritmos (Segovia y otros, 1989).

1.1.3. Algoritmos

Un tipo especial de destrezas son los *algoritmos*. Dado que la estimación aparece por primera vez en el currículo español de matemáticas de Educación Primaria[22] en el año 1991, muchos maestros de Educación Primaria, profesores de Educación Secundaria, y alumnos no han estudiado estimación durante su periodo de escolarización obligatoria. Están muy familiarizados con los algoritmos pero, como se ha señalado en el párrafo anterior, la estimación supone un enfoque muy diferente de la aritmética y la resolución de problemas que el propio de los algoritmos. Como veré, una forma habitual de abordar la estimación es intentar imitar mentalmente el algoritmo escrito. Resulta de

[21] La aproximación se define como "la búsqueda de un dato numérico suficientemente preciso para un determinado propósito" (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989, p. 22). El cálculo aproximado "estudia procedimientos que hagan posible reemplazar cálculos complicados por otros más sencillos; tiene como características el realizarse con rapidez y empleando números sencillos, y el que los valores asignados y los resultados obtenidos tienen un grado de proximidad controlada con respecto al dato exacto" (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989, p. 22).

[22] En el Real Decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria (BOE núm. 220, viernes 13 de septiembre de 1991). Anteriormente, en los Reales Decretos de 1981 y 1982 en los que se ordenaba la Educación General Básica y se fijaban las enseñanzas mínimas para el ciclo inicial, medio y superior de la EGB, solo aparecía como contenido el cálculo mental y rápido de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, pero no la estimación.

interés, por tanto, enfatizar los aspectos distintivos del trabajo con algoritmos, antes de pasar al estudio de la estimación. En este sentido, para Bouvier y George (1984)[23] un algoritmo es:

> Una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminaciones ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos.

Otra interesante definición de algoritmo es la debida a Maurer (1998):

> Un algoritmo es un método preciso y sistemático para resolver una clase de problemas. Un algoritmo toma una *entrada* (input), sigue un *determinado* conjunto de reglas, y en un número *finito* de pasos da una *salida* (output) que proporciona una solución *concluyente*. *Determinado* significa que para cada entrada permitida, la primera acción está totalmente especificada y, más generalmente, que después de cada acción en la secuencia la siguiente acción está totalmente especificada. *Concluyente* comúnmente significa que la salida (output) resuelve correctamente el problema, pero puede significar que el algoritmo o bien resuelve el problema correctamente o anuncia que no puede resolverlo. (p. 21)

En el mismo sentido de las dos anteriores, incide la definición de Mingus y Grassl (1998, p. 34):

> Un algoritmo es una receta de cálculo para la ejecución sistemática de un procedimiento diseñado para resolver un problema específico que cumple las siguientes características:

[23] Citado en Segovia, Castro, Castro y Rico (1989, p. 23).

> 1. Se nos dan datos de entrada (input) junto con un conjunto finito de instrucciones.
> 2. Un agente de cálculo reacciona a la entrada y a las instrucciones y efectúa los pasos.
> 3. Se almacenan y utilizan resultados intermedios.
> 4. El cálculo se efectúa en un número finito de pasos.
>
> El agente del cálculo interpreta el conjunto de instrucciones de modo que el cálculo se efectúa de forma determinística, sin el recurso a métodos aleatorios.

Al leer estas definiciones, puede dar la impresión de que un algoritmo se puede efectuar casi 'sin pensar', de forma prácticamente automatizada. Para matizar esta idea, Mingus y Grassl (1998, p. 34) indican que el *pensamiento algorítmico* requiere monitorizar el proceso de pensamiento para controlarlo y dirigirlo tomando decisiones durante el mismo. A continuación, propongo la definición de Vergnaud (1991) y, posteriormente, su contribución al debate sobre la automatización de los mismos:

> Un algoritmo es una regla (o un conjunto de reglas) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o, dado el caso, mostrar que no hay solución. (Vergnaud, 1991, p. 258)

Al debate sobre el carácter automático de los algoritmos, Vergnaud (1991) aporta que en los algoritmos siempre hay una parte de automatización y otra de decisión consciente, pues los algoritmos siempre presentan situaciones cuyas características obligan a los alumnos a generar secuencias de acción diferentes, adaptadas a la situación concreta. Siguiendo la postura de Mingus y Grassl, y Vergnaud, en este trabajo se supone que en la ejecución de los algoritmos hay implicados procesos metacognitivos de monitorización y regulación, que dan cuenta de los ajustes[24] que es preciso realizar en los algoritmos.

1.1.4. Heurísticos

Dentro del campo semántico de las estrategias, se encuentra el término '*heurística*', cuya acepción moderna, dentro del ámbito de la resolución de problemas, se debe a Polya. Para este autor, la "heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso" (Polya, 1995[25], p. 102). Estas operaciones se ponen en práctica ante preguntas o *sugerencias* del tipo: "¿Cuál es la incógnita? ¿Es posible satisfacer la condición? Dibuje una figura... ¿Puede utilizar el resultado?" (Polya, 1995, p. 102). Así, la idea de heurística es la de una sugerencia, un consejo, o una indicación, que podría ser de ayuda en la búsqueda de la solución de un problema. En este mismo sentido, English y Halford (1995) plantean la diferencia entre heurísticos, algoritmos y estrategias, que para este trabajo resultará clave, en los siguientes términos:

> Las *heurísticas* son reglas que facilitan la resolución de problemas pero no garantizan que se halle una solución. Como ejemplos pueden incluirse

[24] Por ejemplo, en el algoritmo de la resta hay ocasiones en las que la cifra de las unidades del minuendo es mayor que la correspondiente al sustraendo. En otras ocasiones, esta es menor y se debe 'pedir prestada' una decena a la cifra de las decenas del minuendo, para cambiarla por diez unidades. En este último caso pueden darse dos situaciones diferentes: que la cifra de las decenas del minuendo sea mayor que cero o que sea cero. En el caso de que la cifra de las decenas sea igual a cero, se debe 'pedir prestado' a las centenas, transformando una centena en diez decenas y una de estas decenas en diez unidades. En estas pequeñas variaciones, en el algoritmo de la resta, son en las que se pone de manifiesto la necesidad de los procesos de monitorización y regulación en los algoritmos.

[25] La primera edición en español es de 1965. Se ha consultado la decimonovena impresión, de 1995.

"indicios" tales como [...] buscar analogías en la resolución de problemas matemáticos. Los *algoritmos* son reglas que garantizan encontrar una solución cuando se aplican correctamente. Como ejemplos pueden incluirse [...] los procedimientos para realizar operaciones aritméticas tales como la multiplicación y la división números de varios dígitos. Las *estrategias* son conjuntos de reglas, junto con reglas de orden superior que especifican cuándo deben aplicarse las reglas (pp. 29-30).

1.1.5. Estrategias

Un término clave en este trabajo es el de *estrategia*. Algunos autores no plantean en sus trabajos qué entienden por estrategia. La delimitación conceptual de este término parece un paso previo imprescindible para realizar estudios de identificación y clasificación de estrategias.

Comienzo aportando algunas definiciones, tomadas de la literatura, sobre estrategias en matemáticas. Para Bisanz y Lefevre (1990) una estrategia es un "procedimiento que se invoca de forma flexible, está dirigido a la consecución de un objetivo y que influye en la selección y aplicación de procedimientos posteriores" (p. 236). Una definición bastante similar es la de Lemaire y Reder, (1999) que plantean que una estrategia es "un procedimiento o un conjunto de procedimientos para alcanzar un objetivo superior o realizar una tarea" (p. 365). Dentro de esta línea, pero con el interés de incluir el término 'destreza' del modo en que se hace en este trabajo, está la definición de Cockroft (1985) de las estrategias como "Procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema" (p. 87).

Un punto en común entre algoritmos y estrategias es, según Segovia y otros (1989, p. 25) que tanto el pensamiento instrumental (propio de los algoritmos) como el pensamiento relacional (propio de las estrategias) necesitan de la comprensión y pueden llegar a mecanizarse con la práctica, lo que no significa que puedan adquirirse de forma mecánica.

Dentro del ámbito de las investigaciones sobre estrategias, se han investigado aspectos diversos. Por ejemplo, Lemaire y Siegler (1995) estudian la rapidez y la precisión en el uso de estrategias, hablando de “eficiencia” en la ejecución de estrategias en términos de rapidez y precisión. Lemaire, Lecacheur y Farioli (2000, p. 142) se interesan por el 'repertorio de estrategias', o variedad de métodos que los niños utilizan para producir una estimación, 'distribución de estrategias' referida a cuándo se utiliza cada estrategia, que involucra a la vez las frecuencias relativas de cada estrategia y los tipos de problemas en los cuales se utiliza la estrategia. En este tipo de investigación tratan de responderse preguntas del tipo: ¿Se utilizan algunas estrategias más frecuentemente que otras? ¿Más frecuentemente con algunos problemas que con otros? Por otra parte, investigar sobre la 'ejecución de estrategias' significa (para estos autores) preguntarse con qué rapidez y precisión se ejecuta cada estrategia, así como las distintas variantes de cada estrategia. Finalmente, la 'selección de estrategias' se refiere a cómo son elegidas las estrategias, esto es, las decisiones sobre qué estrategia utilizar para cada problema. Las cuestiones acerca de la selección de estrategias conciernen a cómo ajustan los sujetos el uso de estrategias a las características del problema (por ejemplo, al tamaño de los números). Este ajuste del uso de estrategias también es llamado adaptabilidad estratégica y se mide mediante las correlaciones entre el porcentaje de uso de cada estrategia por el niño y las características del problema (como el tamaño de los números).

Como puede verse, hay diferentes formas de definir las estrategias y distintos aspectos que puede tener interés investigar dentro de este ámbito. Desde la perspectiva de este trabajo, interesa especialmente considerar las destrezas como 'ingredientes' de las estrategias, siguiendo la definición de Cockroft (1985) y comprender cómo funcionan los procesos metacognitivos de monitorización y regulación. Dado que hay bastantes estudios sobre estrategias de estimación, como se verá en el capítulo 3, el objetivo principal será elaborar un marco para el estudio de estrategias que permita revisar estas investigaciones, comparando sus resultados.

1.1.6. Nivel de generalidad en la consideración de las estrategias

Siegler y Booth (2005) plantean que las "estrategias de estimación en cálculo pueden ser clasificadas a diferentes niveles de generalidad. En un nivel general, se ha encontrado que niños y adultos utilizan tres familias de estrategias: reformulación, traslación y compensación" (2001).

Gómez (1995), en su trabajo sobre cálculo mental, al abordar el estudio de las estrategias que utilizan los profesores en formación, distingue entre estrategias, métodos de cálculo mental, modalidades de los métodos, enfoques de los métodos y procedimientos (pp. 95-97). La cuestión del nivel de generalidad en las estrategias será desarrollada con más detalle en el capítulo dedicado al análisis de estrategias en estimación. El nivel de generalidad será importante, junto al marco desarrollado para las estrategias, para comparar diferentes estudios sobre estrategias, ya que en diversos estudios se analizan las estrategias en niveles distintos, lo que dificulta la comparación y síntesis de trabajos.

2. El error en el aprendizaje de las Matemáticas

Este apartado se dedica a plantear algunas consideraciones de interés sobre el error en matemáticas, que servirán de marco de referencia para la posterior reflexión sobre los errores específicos vinculados a los procesos de estimación. Como se verá, los términos relacionados con el error son muchos, y la problemática amparada bajo el paraguas del error es extremadamente diversa.

El planteamiento que se hace en este trabajo sobre el error toma como punto de inicio el trabajo de Rico (1995). Básicamente, mi punto de partida es la posición de este autor que considera el error como un conocimiento deficiente e incompleto, que se da continuamente en la adquisición y consolidación del conocimiento (en particular, del matemático), que los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos y que el error es un importante objeto de estudio para la Educación Matemática.

2.1. Significados, términos afines, y metáforas para el error

La vigésima segunda edición del Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2001) define error como “concepto equivocado o juicio falso”. La segunda y tercera acepciones del término, en dicho diccionario, señalan respectivamente que el error puede ser también una “acción desacertada o equivocada” o la “diferencia entre el valor medido o calculado y el real”. Estas definiciones ya anticipan dos usos antagónicos del término 'error' en los trabajos sobre estimación: el error en sí mismo, considerado como un conocimiento deficiente o incompleto, y el error sin connotaciones relativas al conocimiento de un sujeto, como diferencia entre la estimación y el valor exacto del cálculo. Estas acepciones pueden tender a confundirse en situaciones en las que los alumnos perciben que el único tipo de respuesta aceptable para un problema es la respuesta exacta.

Sainz (1984) propone como sinónimos de error los siguientes términos: “Equívoco, mentira, falsedad, inexactitud, equivocación, yerro, gazapo, descuido, falta, desacierto, pifia, engaño, culpa, distracción, inadvertencia, errata, dislate, disparate, desatino, prejuicio, despropósito, desliz, defección, incorrección, omisión, falencia, desviación, aberración, defecto, alucinamiento, sofisma, trabamenta, quid pro quo[26], trabacuenta". Como único antónimo aparece 'verdad' (p. 453). Cada uno de estos sinónimos arrastra consigo una connotación, a veces de culpabilidad, otras de accidente, que pueden tener importantes consecuencias al transponerse al ámbito escolar.

Además de los diferentes sinónimos, la tradición educativa es rica en metáforas para el error. Por ejemplo, en la metáfora médica se habla de enseñanza diagnóstica, se dice que los errores pueden prevenirse, y se habla de un tratamiento de los errores y de recuperación (de los 'pacientes' que cometen los errores).

También suele utilizarse la metáfora de la receta de cocina, según la cual el error es un ingrediente en el proceso de aprendizaje o la metáfora, proveniente de la psicología cognitiva, y de la programación, del error como un *bug* o un subprograma que no funciona dentro del programa general que describiría el funcionamiento de los procesos cognitivos.

Como puede verse, también las metáforas tienen connotaciones positivas (error como ingrediente necesario, que se pueden encontrar en menor o mayor medida, pero seguro aparecen) o negativas (de enfermedad, que deberían evitarse).

Pasando a otro tipo de consideraciones, pueden considerarse distintos tipos de errores. Por ejemplo, para Rescher (2007) el error puede ser cognitivo, práctico o axiológico, según se produzca en el ámbito de las creencias, las acciones o la evaluación. Cada uno de estos errores pone en cuestión la calidad de la inteligencia, la competencia o el juicio, respectivamente, del agente del error.

Excluyendo el error de juicio, los errores, además, pueden ser de comisión u omisión[27]. Los *errores cognitivos de comisión* se cometen al aceptar falsedades,

[26] Error que consiste en tomar a alguien o algo por otra persona o cosa (DRAE, 22ª Edición). Consulta online en: Http://buscon.rae.es/draeI/

[27] Rescher (2007), a lo largo de su trabajo, suele establecer ciertos paralelismos entre el error epistémico y el error moral. En este ámbito, el "error moral de comisión" sería un equivalente

tomándolas por hechos verdaderos. Los *errores prácticos de comisión* suponen la realización de acciones contraproductivas de cara a la finalidad perseguida por la acción. Los *errores cognitivos de omisión* consisten en la falta de aceptación de hechos verdaderos, mientras que los *errores prácticos de omisión* consisten en la ausencia de ejecución de las acciones requeridas para facilitar la consecución del objetivo global de la acción en curso (Rescher, 2007, pp. 10-11). Así, en la definición del error (cognitivo) como "conocimiento deficiente o incompleto"[28] están presentes estas dos facetas del error: la del error cognitivo de comisión (en la deficiencia del conocimiento) y la del error cognitivo de omisión (por la incompletitud del conocimiento).

Otra distinción que establece Rescher (2007), dentro del error cognitivo, es entre el error sustantivo, que consiste en alcanzar un resultado incorrecto, y el error procedimental, que se produce al "manejar las cosas de un modo inapropiado" (p. 6). Esta diferencia tiene una aplicación muy clara en la estimación, en la que se pone de manifiesto que estos dos tipos de errores no tienen por qué ir acompañados.

2.2. Error e incertidumbre

Como se decía en el párrafo introductorio sobre el error, hay una acepción del término 'error', que es fundamental en estimación, diferente de cualquier idea

del "pecado de comisión". Análogamente, el "error moral de omisión" sería el "pecado de omisión" (La palabra 'sin' es la empleada por el autor). Hago esta advertencia explícitamente para enfatizar que, en el presente trabajo de investigación, solo se aborda el estudio del error epistémico. Por ello, se recomienda al lector, para una correcta interpretación de los términos, evitar la connotación moral que puedan tener las palabras "comisión y omisión".

[28] Rico (1995, p. 69). Esta definición es importante por ser la que fundamentalmente se sigue sobre el error en esta tesis. La aportación del filósofo americano Rescher, parece interesante al explorar diferentes tipos de errores relacionados con errores conceptuales y procedimentales e, incluso, dentro de estos últimos, los errores que son procedimientos incompletos, por omisión de alguno de los pasos.

de error al uso en matemática escolar referida al conocimiento o a las producciones de los alumnos. Taylor (1997) lo explica perfectamente:

> En ciencia, la palabra error no tiene la connotación habitual de equivocación[29] o tropiezo[30]. El error en una medición científica se refiere a la incertidumbre inevitable que afecta a todas las mediciones. Como tales, los errores no son equivocaciones; no se pueden eliminar actuando con mucho cuidado. Lo mejor que puede esperarse hacer es asegurarse de que los errores son tan pequeños como sea razonablemente posible y disponer de una estimación fiable de su tamaño. (p. 3)

Según Rescher (2007), el error cognitivo de comisión, al que frecuentemente se refiere como 'creencia incorrecta', supone la aceptación de una falsedad. Desde este punto de vista, no se considera un verdadero error de este tipo a las manifestaciones de "insuficiencia" que se producen ante la precisión, inexactitud, vaguedad o indefinición. Así, sería importante distinguir el matiz entre estos tipos de "insuficiencia" y la incompletitud característica de los errores cognitivos de omisión.

2.3. Error e ignorancia

El Diccionario de la Lengua Española[31] define ignorancia como "Falta de ciencia, de letras y noticias, general o particular". Si se define el error como "conocimiento deficiente o incompleto", la ignorancia podría ser responsable de cierta incompletitud del conocimiento, pero parece claro también que no resulta adecuado decir que todo error es producto de la ignorancia.

[29] Mistake.

[30] Blunder: Tropiezo o "metedura de pata".

[31] La vigésima segunda edición del Diccionario de la Real Academia Española puede consultarse en la dirección: http://buscon.rae.es/draeI/

> Muchos autores insisten en que no es legítimo confundir simplemente el error con la ignorancia, aún en el caso de que se suponga que el primero proviene de la segunda. En efecto, mientras la ignorancia es una falta de conocimiento, el error supone un conocimiento acerca del cual hay error. Con ello se admite que el error es, en cierto modo algo positivo. (Ferrater, 1994, p. 1049)

Sin embargo, debe matizarse esto haciendo referencia a distintas clases de 'cosas' a las que se puede aplicar el término de 'erróneas'. Para Rescher (2007) hay que distinguir, al hablar del error, entre la corrección de nuestras afirmaciones sobre las cosas y las de nuestras concepciones acerca de las cosas. Para hacer una afirmación verdadera sobre una cosa, basta con señalar un solo hecho particular que sea cierto sobre esa cosa. Sin embargo, para que nuestra concepción sobre una cosa sea verdadera es necesario captar correctamente todos los hechos relevantes acerca de esa cosa. Rescher (2007) afirma que la dualidad del error como falsa creencia y como concepción errónea ya se establece en los trabajos de Santo Tomás de Aquino. En el caso particular de las concepciones, la incompletitud significa incorrección. Puede pensarse que la ignorancia, como falta de conocimiento, no es responsable del error en las creencias (o de las falsas creencias) pero sí puede producir la incompletitud del conocimiento sobre algo, lo que determina que se tenga una concepción errónea (por incompleta), a pesar de tener cierto conocimiento correcto sobre ese algo.

2.4. Algunas cuestiones sobre el error desde la epistemología

En este apartado se pretende revisar algunas de las aportaciones de la epistemología sobre el error. Partiré de la visión del error como discrepancia entre el juicio y la cosa juzgada, para ir avanzando en otras direcciones.

Interesan, en especial[32], las referencias de Bachelard referidas a los peligros inherentes en la generalización y en la analogía, para comentar después algunos aspectos sobre los obstáculos epistemológicos.

Ferrater (1994) resume la posición de los escolásticos ante el error: "el error se opone a la verdad. Si la verdad es coincidencia entre el juicio y la cosa juzgada, el error será la discrepancia entre ellos" (p. 1048).

Bachelard (1938/1999) es un autor clave en la consideración actual del error dentro de la Didáctica de las Matemáticas. En este trabajo, advierte de los peligros de analogías y metáforas que se aplican a las ideas abstractas: "La idea científica demasiado familiar se carga con un concreto psicológico demasiado pesado, que ella amasa un número excesivo de analogías, imágenes, metáforas, y que poco a poco pierde su [...] afilada punta abstracta" (p. 17). También advierte de los riesgos del abuso de la generalización: "Hay en efecto un goce intelectual peligroso en una generalización precoz y fácil" (p. 66). Estas citas ya tienen bastante relevancia de cara al aprendizaje de las matemáticas, debido a la importancia que tienen los procesos de generalización en matemáticas, y al papel de las analogías y metáforas en la comprensión de los contenidos matemáticos.

Sin embargo, ha sido la noción de 'obstáculo epistemológico' la que ha tenido una mayor aplicación al ámbito educativo. Así, Bachelard (1938/1999) indicaba que: "La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación" (p. 19). Bachelard (1938/1999) defendía que la idea de 'obstáculo

[32] No se pretende hacer una revisión amplia sobre este tema. Sólo comentar algunos aspectos de interés. Por ejemplo, en la estimación, como en el cálculo mental, hay errores que parecen extrapolaciones y generalizaciones inadecuadas. En este sentido, debe valorarse la inclusión de referencias de Bachelard que hablan de los peligros de las analogías y las generalizaciones. Rico (1995) plantea en su trabajo unos 'fundamentos epistemológicos' del error, de forma más completa.

epistemológico' no era aplicable a las matemáticas: "Ninguna de las tesis que sostenemos en este libro apunta pues al conocimiento matemático"[33] (p. 26). También, más allá de la posibilidad de aplicar la noción, Bachelard (1938/1999) avisa de la dificultad inherente a la misma: "Está en la naturaleza de un obstáculo epistemológico ser confuso y polimorfo. Es también muy difícil establecer una jerarquía de los errores y seguir un orden para describir los desórdenes del pensamiento" (p. 24).

Como se explicará en un apartado posterior, algunos de los aspectos de los obstáculos epistemológicos han intentado aplicarse a la Didáctica de las Matemáticas; otros, sin embargo, como la 'ley de bipolaridad de los errores' de la que habla Bachelard (1938/1999) se han pasado por alto: "Es [...] muy notable que, de una manera general, los obstáculos a la cultura científica se presentan siempre por pares. A tal punto que podría hablarse de una ley psicológica de la bipolaridad de los errores" (p. 23). Más adelante, se insiste en esta idea: "Pero como los obstáculos epistemológicos van por parejas, en el reino mismo de la cantidad veremos oponerse a la atracción de un matematismo demasiado vago, la atracción de un matematismo demasiado preciso" (p. 249).

Popper (1972/2001) expone su posición frente al origen del error al criticar la teoría del conocimiento del sentido común (también llamada teoría de la mente como tabula rasa). Según esta teoría, todo error (conocimiento equivocado) es el resultado de un tratamiento intelectual inadecuado de “los elementos puros e inadulterados de información” (p. 66) que llegan a nosotros. El conocimiento, libre de error, llega a nosotros de forma pasiva; el error, lo producimos activamente al malinterpretar las informaciones libres de error que nos llegan o al relacionar las mismas de forma equivocada. El conocimiento que

[33] Esta es la cita de Bachelard que hizo mostrar su desacuerdo a Guy Brousseau y que supuso la aplicación, por este último, de la noción de "obstáculo epistemológico" a la Didáctica de las Matemáticas.

nos es dado constituye el patrón de certeza y nuestro cometido consiste en “purificar nuestra mente de las fuentes del error” (p. 67). Frente a esta visión, Popper (1972/2001) afirma que estos datos e informaciones que nos llegan del exterior, libres de error, no existen. Por el contrario, aprendemos a descifrar la información que nos llega por medio del ensayo y la supresión de los errores. Alcanzamos tal velocidad y precisión en el proceso de decodificación que llegamos a experimentar los mensajes descifrados como si fuesen “dados”. La información que recibimos no es el dato verdadero aceptado pasivamente, sino que es el resultado de referir activamente los mensajes recibidos a un “sistema coherente y relativamente ordenado” (p. 68).

Popper, 1972/2001) realiza una crítica del empirismo y de la consideración del error en la epistemología clásica. Popper describe la posición del empirismo en los siguientes términos:

> El conocimiento verdadero es el conocimiento puro no contaminado por esos prejuicios que tan proclives somos a añadir y mezclar con nuestras percepciones; solo estas constituyen la experiencia pura y simple. El error es el resultado de estos añadidos, de nuestras perturbaciones e interferencias con el proceso de acumulación de conocimiento (p. 308).

Para Popper (1972/2001), en la epistemología clásica (Descartes, Locke, Berkeley, Hume y Reid) la “verdad queda garantizada por el origen de las ideas que, en última instancia, supervisa Dios” (p. 72). Por eso, en estos autores se encuentran “trazas de la tesis de que la ignorancia es un pecado” (p. 72).

> Como ha dicho recientemente el físico John Archibald Wheeler. “Nuestro único problema no es otro que lograr que nuestros errores sean lo más breves posible”. Este problema de Wheeler se resuelve adoptando conscientemente la actitud crítica. Creo que esta es la forma más elevada

> que hay de actitud racional o de racionalidad. (p. 228-229)

Para Popper (1972/2001) una observación "presupone siempre la existencia de un sistema de expectativas" (p. 310), y la suma total de las mismas (ya sean estas conscientes o inconscientes) constituye una trama que Popper llamaba 'horizonte de expectativas', que nos sirve de referencia para dar sentido a nuestra experiencia, nuestras acciones y observaciones. Éstas últimas pueden tener el efecto de una bomba sobre el horizonte de expectativas, llegando a destruir su trama, obligándonos a reconstruir el horizonte para corregir las partes dañadas. Esta reconstrucción hace que las observaciones que han tenido un efecto devastador se integren con el resto de expectativas no dañadas y con las corregidas, elevando el horizonte a un nivel superior.

> Los ensayos y errores de los científicos son hipótesis formuladas verbalmente o, normalmente, por escrito. El científico trata de descubrir fallos en cualquiera de dichas hipótesis mediante la crítica y la constrastación experimental, asistido por sus compañeros científicos que se felicitarán si consiguen descubrir un fallo. Si la hipótesis no se mantiene en pie frente a esas críticas y contrastaciones, al menos con el mismo éxito que sus rivales, será eliminada. (p. 229)

> La constrastación consiste en tomar la teoría a contrastar y combinarla con todos los tipos posibles de condiciones iniciales, así como con otras teorías, para confrontar luego las predicciones resultantes con la realidad. Si desembocamos en expectativas contrariadas, en refutaciones, entonces hemos de reconstruir la teoría.
>
> En este proceso desempeña un papel muy importante el hecho de que se vean contrariadas algunas de las expectativas con las que antaño abordábamos, ávidamente, la realidad. Puede compararse a la experiencia del ciego que choca o topa con un obstáculo, haciéndose así consciente de

> su existencia. Entramos efectivamente en contacto con la "realidad" mediante la falsación de nuestras suposiciones. La única experiencia "positiva" que sacamos de la realidad es el descubrimiento y eliminación de nuestros errores.
>
> A la ciencia no le interesa decir la última palabra, si eso significa cerrar nuestra mente a experiencias falsadoras, sino que le interesa más bien aprender de nuestra experiencia; es decir, de nuestros errores. (p. 324-325)

2.5. Aspectos cognitivos del error

2.5.1. Mecanismos productores de errores

En este apartado se intenta mostrar que todo proceso productor de conocimientos nuevos es un potencial productor de errores. Ejemplificaré este punto refiriéndome a los procesos de generalización, particularización, razonamiento analógico y simplificación.

Para Polya (1995) "la *generalización* consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya el conjunto limitado" (p. 97). El proceso que puede considerarse 'inverso' de la generalización es la *particularización* que "consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño -o incluso de un solo objeto- contenido en el conjunto dado" (Polya, 1995, p. 138). Ambos procesos son fuentes de errores, como señala Ashlock (1998) que propone, como ejemplo de error en la generalización (overgeneralizing) cuando algunos alumnos consideran que, tanto 4 + 2 = 6, como 6 – 2 = 4 son sumas, porque consideran que "una suma es el número escrito a la derecha del signo igual" (p. 15). Como ejemplo de error en la particularización (overspecializing), Ashlock (1998) cita el de los alumnos que piensan que, en un triángulo obtusángulo, la única altura es la correspondiente al vértice del ángulo obtuso, que está dentro del triángulo.

Otra fuente de errores está en la analogía. El *razonamiento analógico* consiste en transferir parte del conocimiento de un dominio fuente a un dominio meta. Este tipo de razonamiento supone la existencia de dos procesos diferentes: el de recuperación, o búsqueda de información proveniente de una situación conocida, y el de extrapolación, o aplicación del conocimiento del dominio fuente al dominio meta a través del establecimiento de una correspondencia entre los dos dominios. En relación con el razonamiento analógico se observa la producción de errores debidos a una 'transferencia negativa', que se produce cuando se establece una analogía basada en características superficiales entre dos situaciones estructuralmente diferentes (González, 1997).

Por último, se propone el caso de la *simplificación* consistente en dejar fuera de nuestra consideración algún aspecto de la realidad que no es relevante de cara a nuestros propósitos. Una sobre-simplificación, o un exceso de simplificación, siempre supone un error de omisión. Consiste en simplificar algo hasta un punto en que se sufre una verdadera pérdida de información de cara a nuestros propósitos (Rescher, 2007). Esto último sería un error por abuso de simplificación (oversimplification).

Finalizo esta reflexión sobre los mecanismos productores de errores mencionando la "Teoría de las Reglas Intuitivas" que Stavy y Tirosh (2000) desarrollan para tratar de explicar algunas de las concepciones alternativas que tienen los alumnos en Ciencias y en Matemáticas que limitan su aprendizaje. Un ejemplo de regla intuitiva es: "*Igual A, igual B*". Esta regla intuitiva se aplica en situaciones o en objetos en los que hay presentes dos cantidades, A (con valores $A_1 = A_2$, respectivamente en cada situación) y B (con $B_1 \neq B_2$), cuando los alumnos argumentan que $B_1 = B_2$ porque $A_1 = A_2$.

En la presente investigación se van a establecer categorías de errores para la estimación en cálculo. Este trabajo tiene ciertas similitudes con el de Gómez (1995) en el que al analizar la problemática que se identificaba en los errores de los alumnos ante tareas de cálculo mental, se trataba de explicar los errores en términos de teoremas implícitos o reglas de acción de tres tipos (Gómez, 1995, p. 184):

- Extrapolaciones o inserciones improcedentes de alguna parte de los algoritmos de columnas o de otros métodos.
- Generalizaciones de métodos válidos en unas situaciones a otras situaciones donde no lo son.
- Centramientos en el dato o cifra alterada en vez de en el efecto de la alteración.

2.6. 'Misconceptions' y errores

El término "misconception" es muy utilizado en la literatura sobre errores en matemáticas. Aquí se determinará el significado que le voy a dar en este trabajo. Para empezar, el *Cambridge International Dictionary of English* (1995) define[34] 'misconception' como "una idea incorrecta basada en un fallo en la comprensión de una situación". Spooner (2002) trata de diferenciar cuándo un error se produce por una 'misconception' de cuando está originado por una causa distinta:

> Es importante establecer una distinción entre un error y una 'misconception'. Mientras ambos dan como resultado una respuesta incorrecta, las razones de las dificultades experimentadas por los niños demandarán diferentes respuestas.
>
> Un error puede ser el resultado de una 'misconception' pero también podría estar causado por una variedad de factores, incluyendo el descuido,

[34] A misconception is an idea which is wrong that has been based on a failure to understand a situation (p. 903).

> problemas en la lectura o en la interpretación de la pregunta y a la falta de conocimiento numérico.
> Una 'misconception' es el producto de una falta de comprensión o en muchos casos la aplicación inadecuada de una 'regla' o una generalización matemática. Cuando observamos una muestra de trabajo terminado la mejor pista para decidir si estamos ante un error proveniente de una 'misconception' o de otra causa es la frecuencia y la consistencia del error. (p. 3)

El término 'misconception' es difícil de traducir a otros idiomas. Prueba de ello es la publicación en español (traducida del inglés[35]) de los "Principios y Estándares para la Educación Matemática" (NCTM, 2003), en el que el término 'misconception' aparece traducido de ocho formas distintas (ver Tabla 2.1).

Tabla 2.1. *Traducciones de 'misconceptions' en NCTM (2003)*

Página NCTM (2000) Inglés	Página NCTM (2003) Español	Traducción	Frecuencia
24	25	Concepto falso	1
61, 80, 348	65, 85, 354	Concepto erróneo	3
103	107	Idea errónea	1
112, 242, 243, 254, 255	116, 246, 247, 258, 259	Concepción errónea	5
218	222	Falsa concepción	1
272	276	Conceptos mal entendidos	1
311	316	Falsa idea	1
351	358	Observaciones incorrectas[36]	1
196	---	Omitida[37]	1

[35] Esta dificultad de traducción también se da en italiano. Zan (2000) adopta la postura de dejar el término sin traducir en su trabajo "'Misconceptions' e difficolta in matematica".

[36] The teacher could look at students' incorrect observations and design a lesson to address those misconceptions. Traducido como: El profesor podría entonces diseñar una lección sobre las observaciones incorrectas de los alumnos, con el fin de corregirlas.

[37] La frase de la p. 196 del original en inglés: "For example, What strategies were they using? Were *misconceptions* being challenged?", ha sido omitida en la traducción.

Según el DRAE, una idea es el "primero y más obvio de los actos del entendimiento, que se limita al simple conocimiento de algo". De esta definición, me interesa sobre todo el aspecto de simplicidad que plantea.

Frente a esta simplicidad, a las concepciones se les suele atribuir un carácter más global (Ruiz, 1998). Esta autora indica que "La acepción como concepción del sujeto la utilizaremos para referirnos a los conocimientos del sujeto sobre un objeto, originados como consecuencia de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el seno de sistemas didácticos o en entornos informales" (Ruiz, 1998, p. 49). Por otra parte, los términos "incorrecto" y "equivocado" también tienen matices distintos. Mientras que "incorrecto" puede verse como equivalente a "falso" y resalta más el aspecto lógico y el valor de verdad, "equivocado" pone un énfasis mayor en el sujeto. Dado que los trabajos sobre *misconceptions* tratan de explorar el pensamiento del alumno que justifica o explica su producción de errores, parece más apropiado utilizar el término "equivocado". Así, haciendo esta distinción entre los términos idea y concepción, atribuyendo a cada una el matiz de puntual y global respectivamente, voy a utilizar *idea equivocada*[38] como traducción de *misconception*.

2.7. El error como resultado de un 'tipo' de pensamiento

Algunas investigaciones dirigidas por Gray y Tall (Gray, 1991; Gray, Pinto, Pitta y Tall, 1999; Gray y Tall, 1993; Gray y Tall, 1994; Tall y Razali, 1993) han tratado el tema de los errores y dificultades en matemáticas *indirectamente*, desde un punto de vista bastante diferente al habitual. En sus investigaciones, los autores suelen hablar de alumnos de bajo rendimiento, o alumnos que fracasan en matemáticas, y de alumnos que tienen éxito en matemáticas. Los

[38] En este trabajo se entenderá que la expresión *idea equivocada*, escrita en cursiva, será siempre la traducción del término misconception, cuando se cite un trabajo en inglés, o significará lo que se ha establecido en este capítulo para dicho término inglés.

autores acuñan el término 'procepto' y enfatizan la distinción entre un pensamiento proceptual y otro procedimental para explicar la diferencia entre un grupo de alumnos y el otro. En esta investigación, he dedicado un apartado a revisar los aspectos teóricos de este tipo de investigaciones pues, aunque no traten directamente del error o de la dificultad en matemáticas, sí plantean que unos alumnos hacen unas matemáticas más *fáciles*, y como consecuencia tienen éxito, y otros alumnos hacen unas matemáticas más *difíciles*, y como resultado de ello suelen fracasar (o tienen más probabilidad de cometer errores). Tomando el término 'fracaso' como sinónimo de 'error', parece justificado e interesante[39] referirnos brevemente a estos trabajos.

Gray y Tall (1993), tras analizar respuestas de niños ante diversas tareas aritméticas, indican que la razón de la gran diferencia de rendimiento que puede observarse entre los niños que tienen éxito y los que fracasan en matemáticas es que los que fracasan hacen (comparativamente) *un tipo de matemáticas más difícil.*

La diferencia de dificultad estriba en que, mientras los alumnos más capaces progresan desde procedimientos de conteo hacia procesos aritméticos y hacia el concepto de número, los alumnos menos capaces quedan estancados en esta progresión al buscar seguridad en los procedimientos de conteo, dan buen resultado en tareas sencillas, pero fallan al tratar de aplicarse a tareas más sofisticadas (Gray, 1991). La clave reside pues, para Gray, en que la experiencia inicial de los niños con procedimientos puede después evolucionar hacia la flexibilidad y hacia una gran capacidad, o puede también estancarse en un modo rígido de aprendizaje de reglas. Para Gray y Tall (1994) la falta de interpretación flexible de un símbolo como proceso o producto impide el

[39] El interés de estos trabajos es que centran el problema de la dificultad y el error (matemáticas fáciles/matemáticas difíciles, éxito/fracaso en matemáticas) en el tipo de pensamiento del alumno. Este es un enfoque diferente a todos los demás descritos en esta tesis sobre la dificultad en matemáticas y sobre el error.

adecuado desarrollo de los procedimientos. Estos deben recordarse como recursos aislados en su propio contexto de aplicación (“haz la multiplicación antes que la suma”, “invierte y multiplica”, “dos ‘menos’ hacen un ‘más’”, “suma lo mismo a ambos lados”, “cambia de signo al cambiar de lado”, “multiplica en cruz”, etc.).

Ahondando en estas mismas ideas, Gray, Pinto, Pitta y Tall (1999) sostienen que los diferentes modos en que los niños procesan la información pueden dar lugar a resultados beneficiosos para el aprendizaje, pero también podrían llegar a comprometer severamente el desarrollo. Por ejemplo, si un niño tiene una estructura de conocimiento fragmentada, carente de referentes comprimidos potentes para conectar con esquemas de acción eficientes, tenderá a experimentar dificultades al relacionar ideas. El problema que tienen estos alumnos no está en la falta de trabajo (o de esfuerzo). El alumno puede estar esforzándose muchísimo[40], pero centrado en estrategias poco eficientes y tratando de manejar demasiada información descomprimida. La única estrategia al alcance de estos alumnos es el uso de procedimientos mecánicos. Estos pueden emplearse para resolver tareas rutinarias que se resuelvan mediante dicho procedimiento en particular, pero no para abordar problemas más complejos que requieran de cierta flexibilidad en el pensamiento.

2.7.1. Procepto, pensamiento proceptual y cristalización

Dentro de estas investigaciones, Gray (1991) define *procepto* como la combinación de un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que puede denotar a cualquiera de ellos o a ambos. Según Gray (1991)

[40] Es interesante esta referencia de Gray y otros (1999) al esfuerzo y al trabajo de los alumnos, en la que no se vincula el éxito al esfuerzo, debido a que el esfuerzo estaría mal orientado. Sobre todo cuando tradicionalmente se ha culpado a los alumnos de sus propios errores atribuyéndolos falta de esfuerzo.

el pensamiento proceptual se opone al procedimental[41]. Gray y Tall (1994) caracterizan el pensamiento proceptual como aquel que permite manipular los símbolos con flexibilidad, bien como procesos o como conceptos, intercambiando libremente diferentes símbolos para el mismo objeto. El pensamiento proceptual otorga gran capacidad al alumno, mediante un uso ambiguo y flexible de los símbolos que representan, a través de una misma notación, la dualidad de proceso y concepto. Así, si la suma de números naturales no es proceptual, la multiplicación se complicará. Planteando esto en un nivel superior, si la aritmética de los naturales no es proceptual, la de las fracciones se volverá aún más difícil.

Un proceso importante en la transformación del pensamiento procedimental en proceptual, es el de 'cristalización'. Tall y Razali (1993) explican cómo se produce dicho proceso: Los alumnos aprenden a realizar un procedimiento, que va dominándose cada vez mejor hasta llegar a automatizarse. El procedimiento (dinámico) puede llegar a cristalizarse en un concepto (estático). Por ejemplo, el procedimiento de “contar a partir del primero”, aplicado a una suma como 2 + 3 puede conducir al concepto de suma de dos números. En este caso, la expresión “2 + 3” se refiere tanto al proceso como al concepto.

Así, proponen la hipótesis de 'fracaso en la conceptualización' (o en el proceso de cristalización) para explicar la diferencia en el rendimiento entre los alumnos más capaces y los menos capaces: Los más capaces son mejores en la cristalización de un procedimiento en un concepto y pueden manipular el concepto con mayor fluidez que los menos capaces, que siguen operando en el nivel procedimental.

[41] Para Gray (1991) la división entre pensamiento proceptual y procedimental tiene como antecedentes la diferenciación de Ausubel (1968/2002) entre aprendizaje memorístico y significativo y la distinción de Skemp (1976) entre la comprensión relacional e instrumental.

2.7.2. La división proceptual

Gray y Tall (1994) proponen que la interpretación de símbolos matemáticos como procesos o como conceptos conduce, desde edades muy tempranas, a la *división proceptual* entre los alumnos que fracasan y los que tienen éxito con las matemáticas escolares. Además, según Tall y Razali (1993), un aspecto preocupante de esta división proceptual es que la diferencia entre los procesos mentales de los alumnos más capaces y los menos capaces conduce inexorablemente a una creciente divergencia en la actuación en que los más capaces solo pueden mejorar en la comparación a medida que la materia avanza.

2.7.3. Implicaciones didácticas del modelo y propuestas para abordar el problema

Gray (1991) propone implicaciones didácticas que derivan de la distinción entre lo proceptual y lo procedimental. Por ejemplo, es adecuado permitir a los niños inventar sus propios algoritmos para resolver problemas, siempre que se desarrollen procedimientos eficientes y flexibles. Sin embargo, si un niño tiene éxito a través de métodos inventados basados en el conteo, esto puede dar lugar al desarrollo de un enfoque procedimental que produzca éxitos a corto plazo, pero posiblemente fracasos a largo plazo. Por otra parte, hacer simplemente que los niños que van retrasados practiquen más, no es una buena solución pues esta medida solo favorece el refuerzo de procedimientos poco flexibles. Por otra parte, a los niños se les pueden enseñar procedimientos más adecuados (eficientes y potencialmente flexibles) que los que utilizan. Sin embargo, resulta bastante difícil *enseñar* a emplear un procedimiento de forma flexible. Estos intentos parecen condenados a producir únicamente cierta "apariencia de flexibilidad".

Siguiendo el enfoque del pensamiento proceptual, una conclusión interesante de cara al error es que la *corrección de errores específicos* no sirve como solución para los alumnos anclados en un pensamiento procedimental. Esto se debería a que, según Tall y Razali (1993), los alumnos menos capaces padecen ya el problema de tener muchos fragmentos de conocimiento que sobrecargan su memoria y esto les conduce a cometer errores. Una recuperación a través de la corrección de errores específicos les proporcionará probablemente aún más fragmentos de información que deben recordar, causando una carga todavía mayor y aumentando la probabilidad de errar. Además, si los alumnos que tienen que recuperar no desarrollan la forma de pensar más versátil, disponible para los más capaces, estarán insuficientemente equipados para afrontar los siguientes cursos de matemáticas y seguirán sufriendo sobrecarga cognitiva.

Esto sugiere que dichos alumnos no deben centrarse en los múltiples y variados errores específicos que cometen, sino en las potentes estrategias globales empleadas por los más alumnos más capaces para tener éxito. Dado que los alumnos que requieren recuperación han sufrido una pérdida de estima debido a la comparación de su fracaso con el éxito de sus compañeros más capaces, necesitarán un enfoque positivo que ponga énfasis en un pequeño número de estrategias generales para darles un pensamiento más versátil y un mayor éxito (Tall y Razali, 1993).

De acuerdo con las razones expuestas en el párrafo anterior, Tall y Razali (1993) terminan dando orientaciones para los alumnos que necesitan un refuerzo. Para ellos, sería necesario:

(1) Revisar los procedimientos que proporcionan el éxito y una sólida base para la cristalización de los mismos como conceptos mentales manipulables.

(2) Reflexionar sobre estos procedimientos para darles un significado fundacional que dé a los alumnos una mayor confianza en el manejo de los mismos y puedan comenzar a encapsularlos como conceptos.

(3) Extensiones explícitas de los procedimientos para ver cómo deberían coordinarse, revertirse, y manipularse mentalmente como "fracciones" de código matemático de un modo más proceptual.

(4) Experiencia explícita y enseñanza de los procesos matemáticos de pensamiento que les dé confianza para clarificar, formular y resolver problemas matemáticos.

2.8. El error resultado de un obstáculo

Para Antibi (2005, p. 22) los obstáculos son necesarios en el aprendizaje pues "Si nos vemos confrontados, en un proceso de aprendizaje, solamente a situaciones conocidas que se pueden vencer sin esfuerzo, no aprenderíamos muchas cosas." Sin embargo, según este autor, "En la fase de evaluación, conviene examinar principalmente los conocimientos adquiridos por el alumno y no su capacidad para superar ciertos obstáculos en tiempo limitado" (p. 22).

> No solo las acciones individuales sino los procesos y procedimientos completos para el establecimiento de la verdad pueden ser erróneos. Precisamente este es el caso de aquellos que están enredados en falacias de razonamiento de cualquier tipo. Uno puede así errar no solo en una creencia, acción o evaluación específicas sino también en lo concerniente al modo general de proceder en estas materias. (Rescher, 2007, p. 3)

Esta cita de Rescher ofrece una idea que puede ser interesante relacionar con la de obstáculo epistemológico en Bachelard, al referirse a los obstáculos en los siguientes términos:

> Es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones… Es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos

> epistemológicos. […] Se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización. (Bachelard, 1938/1999, p. 15)

En la obra de Bachelard se pueden distinguir dos tipos de obstáculos epistemológicos de naturaleza distinta: Los referidos al propio funcionamiento cognitivo del sujeto y los vinculados a conceptos físicos concretos. Cuando se refiere a los ejemplos de conceptos concretos que constituyen obstáculos, lo hace dentro del marco más amplio de ejemplificar la aplicación de un obstáculo de funcionamiento cognitivo a un concepto concreto. En la Tabla 2.2 se mostrarán los obstáculos que estudia Bachelard (1938/1999). Otros ejemplos de 'obstáculos de pensamiento' propuestos por Bachelard (1938/1999) serían el 'obstáculo animista en las Ciencias Físicas', el 'obstáculo verbal', y el 'sustancialismo'.

Tabla 2.2. *Obstáculos pensamiento vs. Obstáculos contenido (Bachelard, 1938)*

Pensamiento	Contenido	Comentarios
La *experiencia básica* (o la observación básica) (p. 22)	El obstáculo alquímico, muy resistente y opuesto radicalmente a la química. (p. 57)	Entre observación y experimentación no hay continuidad sino ruptura. (p. 22) El espíritu científico debe formarse en contra de la Naturaleza, […], en contra del entusiasmo natural, en contra del hecho coloreado y vario. (p. 27) Al espectáculo de los fenómenos más interesantes, más chocantes, el hombre va naturalmente con todos sus deseos, con todas sus pasiones, con toda su alma. No debe pues asombrar que el primer conocimiento objetivo sea un primer error (p. 65).
El conocimiento general (p. 66)	La coagulación La fermentación (p. 74). La función mecánica de la esponja.	Puede advertirse que la generalidad inmoviliza el pensamiento, que las variables que describen el comportamiento general dejan en la sombra las variables matemáticas esenciales. (p. 69)

Rescher (2007) señala que, cuando es el mismo proceso para establecer la verdad el [que es] erróneo, se produce una gran cantidad de errores. Existe aquí cierto paralelismo como los obstáculos 'de pensamiento' y los 'de contenido' de Bachelard (1938/1999).

2.9. El error en la escuela

Pasando ahora del ámbito epistemológico y psicológico, al escolar, Astolfi (1999, p. 50) establece la siguiente tipología de errores:

1. Errores debidos a una inadecuada comprensión de las instrucciones para la realización de la tarea.
2. Errores producto de las costumbres escolares (contrato didáctico).
3. Errores resultado de concepciones alternativas.
4. Errores debidos a la falta de disponibilidad de las operaciones intelectuales implicadas.
5. "Errores" debidos al uso, por parte del alumno, de un procedimiento de resolución no estándar.
6. Errores debidos a una sobrecarga cognitiva durante la tarea.
7. Errores que tienen su origen en otra disciplina.
8. Errores causados por la complejidad propia del contenido.

Como puede observarse en esta lista, a veces en la escuela se consideran errores cosas que no lo son, como en el caso del punto 5. Esta lista muestra la complejidad del error escolar, dadas las múltiples causas que puede tener.

2.9.1. Error, culpa y atribución de responsabilidad

¿Dónde está nuestro error sin solución,
fuiste tú el culpable o lo fui yo?
(Canut y Berlanga, 1984)[42]

[42] Canut, N., y Berlanga, C. (1984). Ni tú ni nadie [Grabada por Alaska y Dinarama]. En N. Patrick (Prod.), *Deseo Carnal* [disco]. Madrid: Hispavox.

Sainz (1984, p. 453), en su 'Diccionario español de sinónimos y antónimos', propone 'culpa' como sinónimo de 'error'. Incidiendo en este sentido, Ferrater (1994) señala que, para Descartes, "el error reside en el acto de voluntad que se pronuncia sobre el juicio y no en el propio juicio" (p. 1049). Dado que la voluntad puede extenderse a la afirmación de ideas, pero también a la elección del mal en lugar del bien, Para Descartes, tanto el error como el pecado tendrían una misma causa (p. 1049).

En este mismo sentido, dentro del ritual de los sacramentos de la Iglesia Católica (Comisión Episcopal de Liturgia, 1985), en el momento de la renovación de las promesas bautismales, el celebrante pregunta a los padres y padrinos:

> Renunciáis a Satanás, esto es:
> – al pecado, como negación de Dios;
> – al mal, como signo del pecado en el mundo;
> – al *error, como ofuscación de la verdad*;
> – a la violencia, como contraria a la caridad;
> – al egoísmo, como falta de testimonio del amor. (pp. 22-23)

El error aparece aquí como algo a lo que se debe (y se puede) renunciar, en pie de igualdad con Satanás, el pecado, el mal, la violencia o el egoísmo. Rescher (2007) ha estudiado las posibles relaciones entre error y moralidad. Este autor se pregunta sobre el aspecto moral del error epistémico[43], contemplado desde una perspectiva de la historia de la filosofía. Para abordar esta cuestión, Rescher parte de los trabajos de Duns Scoto y René Descartes para los cuales el

[43] Rescher (2007) comienza planteándose la posibilidad de que el "error moral", definido como "fallo en el juicio al pensar que cierto modo de actuar es aceptable cuando no lo es", tenga naturaleza epistémica. Por eso utiliza el término "error epistémico", en lugar de "error", para contraponerlo al "error moral".

error supone una inmoralidad, pues nace de la voluntad, no de la inteligencia. Es decir, podría mantenerse, siguiendo a estos autores, que se equivoca quien *quiere* (pues siempre podría suspenderse el juicio que afirma lo que es falso) y no quien *no puede*, por falta de capacidad intelectual, descubrir la verdad. Según Rescher (2007), para Descartes "el error cognitivo, la aceptación de falsedades, siempre supone un elemento de culpabilidad moral" (p. 73).

Situados en una perspectiva didáctica, aunque entrando de nuevo en la dinámica de la atribución de responsabilidades, Movshovitz-Hadar, Inbar y Zaslasvsky (1987) titulan su trabajo "A veces, los errores de los alumnos son fallos nuestros". Estos autores administran un test de matemáticas a una muestra de 300 alumnos de Educación Secundaria en Israel. Tras una categorización de los errores, algunos de ellos parecen desconcertantes para los autores de la investigación. Tras un cuidadoso análisis del test, se llega a la conclusión de que determinados aspectos en la edición de los tests pudieron favorecer que los alumnos cometieran errores. Los autores proponen el siguiente ejemplo (p. 191):

> En un triángulo isósceles ABC,
> $AB = BC = 25$ cm; $\angle ABC = 38°$
> $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz de $\angle BAC$. Calcula el radio
> de la circunferencia circunscrita al triángulo
> ADC.

En este problema, el hecho de que ADC estuviese escrito en una línea aparte y que la línea anterior aceptase una lectura completa, favorecieron un error de lectura (consistente en ignorar la quinta línea del enunciado) y que los alumnos calculasen el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en lugar de la del ADC que se solicitaba en el enunciado. Al pasar el test con los aspectos de edición deficiente corregidos, los alumnos mejoraron considerablemente su calificación en el test.

En este trabajo, parece que parte de la atribución de la culpa por el error pasa de los alumnos a los maestros. Este enfoque supone ya un cambio en la consideración de los errores de los alumnos. Los autores proponen a los profesores un examen cuidadoso de los formatos de evaluación para evitar estas contribuciones no deseadas a la dificultad de las tareas propuestas a los alumnos.

2.9.2. Error y evaluación

El error escolar también tiene relación con la evaluación que hace el profesor de sus alumnos. De la Torre y otros (1994) indican que "El carácter sancionador del error en los exámenes es un rasgo difícilmente separable de la evaluación en la práctica escolar" (p. 44).

En el medio escolar, también se asume que la consideración que da un profesor al error de sus alumnos depende, en gran medida, de sus presupuestos teóricos acerca de la enseñanza. Así, dentro de una concepción reproductora y conductista de la enseñanza, el error es un reflejo de los aprendizajes no logrados y, por tanto, tiene siempre un carácter punitivo. En este enfoque, "la calificación es inversamente proporcional al número de errores" (De la Torre y otros, 1994, p. 45).

Dentro de la escuela, la propia idea de error cambia ligeramente, pues se entra en un campo en que, como indicaba Astolfi (1999) en un apartado anterior, el profesor juzga el trabajo de los alumnos tomando como referencia unas determinadas expectativas de aprendizaje. Ya no se trata, como decía para los escolásticos, de la verdad como coincidencia entre el juicio y la cosa juzgada, sino más bien de la coincidencia entre la producción del alumno y la expectativa docente. En este sentido va la definición de De la Torre (1992): "Entendemos el error como inadecuación o desajuste entre lo esperado y lo obtenido, entre lo establecido y la respuesta dada, fruto del proceso sociocognitivo en la adquisición de conocimientos o comportamientos" (p. 14). Esta cita enfatiza la idea de que el error, dentro del ámbito escolar, debe verse como resultado del juicio que hace un profesor sobre los conocimientos del alumno a la vista de la actuación del mismo ante una tarea. El error, visto así, no sería equivalente inmediatamente a falsedad, sino más bien una *valoración negativa*. Siguiendo en esta línea, la evaluación sería un "proceso interpretativo en el que influyen tanto los resultados como la interpretación que hace de ellos el evaluador[44]" (De la Torre, 1992, p. 47; De la Torre, 1996).

La función formativa de la evaluación enfatiza el aspecto del error como indicador de lagunas o deficiencias en el proceso de aprendizaje y proporciona al profesor la información necesaria para complementar o reorientar su estrategia docente. La finalidad del uso del error aquí es la de informar al alumno y ayudarle, no la de juzgar y sancionar.

2.10. Enfoques en Didáctica de las Matemáticas para aprender de los errores

En este apartado reviso algunos enfoques positivos sobre el error en Matemáticas. En particular, estoy interesado en planteamientos que sostengan que es posible "aprender de los errores" o hacer un uso sistemático de los errores de los alumnos.

Me centraré en el enfoque de 'enseñanza diagnóstica', los trabajos de Raffaela Borassi, y el uso del error dentro de los organizadores del currículo. Dejo sin tratar propuestas de menor calado como el trabajo, ya citado al hablar de 'misconceptions', de Spooner (2002) que también es un ejemplo muy

[44] El autor continúa: "Incluso en las pruebas de matemáticas, aparentemente más objetivas y en las que se espera mayor coincidencia [entre distintos evaluadores] en la calificación, concurren criterios personales y discriminativos que llevan a otorgar diferente peso a un mismo error o fallo." (p. 47)

interesante de propuesta sistemática de actividades para el aula pensadas para que los alumnos de Educación Primaria puedan aprender por medio de la reflexión sobre errores cometidos por compañeros hipotéticos.

2.10.1. Un modelo de enseñanza a partir del error: La enseñanza diagnóstica

Swan (2001) describe una metodología de enseñanza de las matemáticas desarrollada durante los últimos 20 años en el Shell Centre for Mathematical Education, de Nottingham, que toma como punto de partida las propias ideas y métodos de los alumnos, incluyendo sus errores: La Enseñanza Diagnóstica. Este modelo de enseñanza, en palabras de Raffaella Borasi (Swan, 2001, p. 42), "hace un uso explícito y positivo de los errores en la enseñanza de las Matemáticas, implicando a los alumnos directamente en su [de los errores] estudio". Swan (2001, pp. 158-159) indica cuáles son los principios que orientan el diseño de unidades en la Enseñanza Diagnóstica:

1. *Antes de enseñar, se deben evaluar los marcos conceptuales propios de los alumnos*. Esto se puede hacer a través del planteamiento de unas pocas cuestiones críticas o puede tomar la forma de un test. Es importante hablar con los alumnos para tratar de averiguar cómo pensaron las preguntas para llegar a las respuestas.

2. *Las ideas equivocadas de los alumnos deben hacerse explícitas en el aula*. Para ello, se plantea alguna tarea basada en un obstáculo conceptual bien conocido, para que los alumnos la resuelvan individualmente. No se produce enseñanza. El objetivo es que los alumnos sean conscientes de sus propios errores e ideas equivocadas y exponer los errores e ideas equivocadas más habituales.

3. *Se comparten los métodos y los resultados obtenidos por los alumnos en la etapa anterior para provocar el conflicto y la discusión*. Se suele pedir a los

alumnos que comparen su solución con otros compañeros o que repitan la tarea de la etapa anterior utilizando otro procedimiento para comparar los resultados. Se produce una confrontación de diferentes resultados dentro del grupo y se acaba pidiendo a los alumnos que describan inconsistencias encontradas en las diferentes aportaciones y posibles causas para los errores y las dificultades.

4. *Se resuelve el conflicto a través de la discusión y se formulan nuevos conceptos y métodos*. Se produce una discusión en la que participa toda la clase. Se anima a los alumnos a intentar articular los puntos de vista que entran en conflicto y a reformular sus ideas. Si es necesario, el profesor puede plantear el punto de vista matemático y explicar los casos con presencia de convenciones arbitrarias.

5. *Se consolida el aprendizaje utilizando los nuevos conceptos y métodos en situaciones de resolución de problemas*. En esta última etapa se plantean problemas a los alumnos, se les pide que planteen y resuelvan problemas elaborados por ellos mismos que cumplan determinadas restricciones, y se pide a los alumnos que analicen su propio trabajo y diagnostiquen las causas de sus propios errores.

Algunos ejemplos de investigaciones desarrollados dentro del modelo de Enseñanza Diagnóstica[45] son Bell y Beeby (1979), en que se comparan dos enfoques distintos para la enseñanza de la multiplicación con números decimales, Swan (1983a), estudio sobre el valor posicional en el ámbito de los números decimales en el que se compara el enfoque de enseñanza diagnóstica

[45] Durante los años 80, A. Bell escribió varios trabajos de divulgación para explicar el modelo de la enseñanza diagnóstica:

Bell, A., y Purdy, D. (1986). Diagnostic teaching. *Mathematics Teaching, 115*, 39-41.

Bell, A. (1986). Diagnostic teaching, 2: Developing confict-discussion lessons. *Mathematics Teaching, 116*, 26-29.

Bell, A. (1987). Diagnostic teaching, 3: Provoking discussions. *Mathematics Teaching, 118*, 21-23.

con un enfoque tradicional de la enseñanza de los decimales, y Swan (1983b), trabajo sobre el significado y uso de los números decimales en el que se diseñan tests diagnósticos y se proponen materiales de enseñanza. Hay que destacar que la enseñanza diagnóstica se nutre de investigaciones sobre dificultades y errores con los números decimales que han sido básicas también en el planteamiento del presenta trabajo de investigación (Bell, Fischbein, y Greer, 1984; Bell, Greer, Grimison, y Mangan, 1989; Bell, Swan, y Taylor, 1981; Fischbein, Deri, Nello, y Marino, 1985).

2.10.2. La investigación matemática a partir del error: El trabajo de Raffaella Borasi

Borasi[46] (1985, 1986, 1987, 1994) desarrolla una forma de trabajar en el aula[47] empleando el error como "trampolín para la indagación". Como ejemplo de su trabajo, en una primera sesión de 20 minutos se solicita a los alumnos que escriban definiciones de círculo. En una segunda sesión, se plantea a los alumnos que analicen 8 definiciones incorrectas de círculo (seleccionadas entre las dadas en la sesión anterior) y que traten de elaborar una definición correcta y traten de identificar las características fundamentales de una definición matemática. A través de este trabajo, los alumnos llegan a apreciar el papel del 'aislamiento de un concepto' y de la 'precisión en la terminología' dentro de las definiciones matemáticas. Dentro del trabajo realizado en estas sesiones, surgieron nuevas cuestiones para la investigación. Una de ellas nació de la dificultad[48] de un alumno para distinguir las expresiones $x^2+y^2 = r^2$ y $a^2+b^2 = c^2$.

[46] Toda la obra sobre los errores en matemáticas, y las investigaciones propuestas a partir de los mismos, puede verse resumida en Borasi (1996).

[47] En Borasi (1994, pp. 203-208) vienen descritos los 15 'episodios de enseñanza' a través de los cuales se desarrolla el experimento de enseñanza desarrollado por la autora para utilizar los errores como trampolines para la indagación.

[48] La dificultad surgió de una de las definiciones: "Círculo: $(x)^2 + (y)^2 = r^2$. Es redondo." [sic]

Esto condujo a una discusión sobre la diferencia entre variable y constante, y a proponer una ecuación más general para la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. También la determinación de la circunferencia que pasa por tres puntos, llevó al problema de encontrar todas las circunferencias que pasan por dos puntos.

Otro ejemplo de este tipo de trabajo partiendo de los errores surge de la discusión del error en la simplificación $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$ que tuvo lugar con alumnos de undécimo grado (equivalente aproximado de 1º de Bachillerato, 16-17 años). Este error condujo a los estudiantes a un intensivo trabajo de formulación y resolución de ecuaciones del tipo $\frac{10a + 6}{60 + c} = \frac{a}{c}$ que condujo a otras soluciones como $\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$ o $\frac{6\cancel{6}}{\cancel{6}6} = \frac{6}{6}$ (Borasi, 1996, pp. 187-193).

Tabla 2.3. *Taxonomía de usos de errores como trampolines para la indagación*

Situación de aprendizaje	Nivel del discurso matemático: Realización de una tarea matemática específica	Comprensión de contenidos matemáticos técnicos	Comprensión de la naturaleza de las Matemáticas
Remediación	Análisis de los errores reconocidos para comprender qué los produjo y corregirlos, hasta realizar la tarea correctamente. (*Remediación/tarea*)	Análisis de los errores reconocidos para clarificar la comprensión deficiente de un contenido matemático técnico. (*Remediación/contenido*)	Análisis de los errores reconocidos para clarificar la comprensión deficiente de la naturaleza de las matemáticas o temas matemáticos generales. (*Remediación/matemáticas*)
Descubrimiento	Errores y resultados inciertos usados constructivamente al resolver problemas o tareas nuevas, monitorizando el propio trabajo para identificar posibles fallos. (*Descubrimiento/tarea*)	Errores y resultados inciertos se usan constructivamente al aprender nuevos conceptos, reglas, temas, etc. (*Descubrimiento/contenido*)	Errores y resultados inciertos usados constructivamente según se aprende sobre la naturaleza de las matemáticas o temas matemáticos generales. (*Descubrimiento/matemáticas*)
Indagación	Errores y resultados inesperados motivan cuestiones generadoras de indagaciones en nuevas direcciones y nuevas tareas matemáticas a resolver. (*Indagación/tarea*)	Errores y resultados inesperados motivan cuestiones conducentes a nuevas visiones e intuiciones de conceptos, reglas, temas, no contemplados al inicio. (*Indagación/contenido*)	Errores y resultados inesperados motivan cuestiones que pueden llevar a nuevas perspectivas e intuiciones sobre la naturaleza de las matemáticas o temas matemáticos generales. (*Indagación/matemáticas*)

La Tabla 2.3 está adaptada de Borasi (1996, p. 279) y muestra diferentes posibilidades para hacer un uso de los errores para favorecer la investigación en el aula partiendo de ellos.

2.10.3. El error dentro de los "organizadores del currículo"

Los organizadores del currículo son "conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (Rico, 1997b, p. 45). Aparte de las disciplinas matemáticas (Álgebra, Análisis,...), Rico (1997b) propone como organizadores del currículo los *errores y dificultades*, las representaciones y los modelos, la fenomenología de los conocimientos, los materiales y recursos y la evolución histórica de los conceptos.

¿Cuál es el uso que se plantea de los errores en el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas en Rico (1997b)? En primer lugar, se sugiere que un escalonamiento de tareas[49] propuestas a los alumnos puede ayudar en la detección de los errores. Además, se plantea incluir recomendaciones al estudiante a modo de advertencias explícitas[50] para evitar que este caiga en errores habituales. También, se considera que el conocimiento de los errores puede orientar en la elaboración de secuencias que faciliten la superación de dificultades específicas, que puede proporcionar orientaciones metodológicas (con diseño de tareas que planteen conflictos cognitivos a los estudiantes) y ayuda en la evaluación, ofreciendo tareas que se sabe, por investigaciones precedentes, que tienen un gran potencial diagnóstico.

Con todo esto, la inclusión del conocimiento de los errores y dificultades de los alumnos como organizador del currículo permite hacer un uso positivo y sistemático de los errores en la enseñanza de las matemáticas (al tenerlos en cuenta en relación con cada uno de los componentes del currículo).

[49] Esta propuesta puntual tiene rasgos comunes con la de la Enseñanza Diagnóstica en el sentido de que el conocimiento de los errores que cometen habitualmente los alumnos puede servir para plantear tareas que pongan de manifiesto dichos errores.

[50] Advertencias del tipo: "Entre dos números decimales el mayor no tiene por qué ser el de más cifras: 0.115 es menor que 0.23" (Rico, 1997b, p. 48)

2.11. Algunas investigaciones sobre errores

Ohlsson (1996) desarrolla una teoría sobre cómo pueden las personas detectar y corregir sus propios errores durante la práctica de destrezas. Según este autor, los errores son causados por el excesivo grado de generalidad de las estructuras de conocimiento, se experimentan como conflictos entre lo que el aprendiz piensa que debería ser cierto y su percepción de lo que ocurre en realidad, y pueden llegar a corregirse mediante una especialización de las estructuras de conocimiento deficientes que conduzca a activarlas solo en situaciones apropiadas. Esta especialización consistiría en la incorporación, a las condiciones de aplicación de la estructura de conocimiento deficiente, de la característica opuesta a la característica de la situación que se piensa que ha producido el error. Dentro del modelo, se otorga a los conocimientos previos del alumno el papel de permitirle identificar los errores cometidos y ayudarle a supervisar su actuación. Aunque el trabajo de Ohlsson (1996) no se centra exclusivamente en el aprendizaje de las matemáticas, sí se aplica el modelo propuesto a situaciones de conteo en educación infantil.

Pinchback (1991) realiza un estudio en el que intervienen 51 estudiantes universitarios de primer curso. El objetivo inicial del trabajo era extender el estudio de Radatz (1979) a alumnos universitarios, intentando replicar las categorías halladas por dicho autor. Los alumnos siguen un curso de recuperación de álgebra, impartido por el investigador, de 16 semanas de duración. Durante el mismo, realizan cinco exámenes sobre: (1) propiedades de los números reales, (2) polinomios, (3) expresiones racionales, (4) raíces y radicales, y (5) ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones y desigualdades. El autor clasifica los errores en dos tipos: errores de concepto y errores de prerrequisito. Salvo en el examen sobre expresiones racionales, hubo más errores de concepto que de prerrequisito. Las categorías propuestas por el autor resultan poco específicas y algunos de los errores fueron muy difíciles de clasificar debido a una falta de información, que podría haberse subsanado con la realización de entrevistas. El autor propone varios ejemplos de errores en álgebra como el uso incorrecto de paréntesis o los errores en la simplificación de términos en el numerador y el denominador de fracciones racionales.

Clarkson (1992) dedica su estudio a identificar los errores que los alumnos pueden corregir por sí mismos en un segundo intento, sin ayuda del profesor. Estos errores reciben el nombre de “desconocidos / de descuido[51]” y tienen características opuestas a los errores sistemáticos (por ejemplo, son difícilmente previsibles). Estos errores son difíciles de definir pero su presencia constituye un fenómeno fácilmente reconocible como parte de la práctica docente de cualquier profesor. Además, suelen alcanzar en algunas investigaciones del 25% al 30% de los errores. Tras realizar un examen, los alumnos revisan su trabajo durante una entrevista. Se descubre que los alumnos de mayor rendimiento académico cometen en general menos errores que los de bajo rendimiento pero una proporción mayor de errores de este tipo. Este fenómeno puede explicarse por la propia definición del tipo de errores estudiados (como aquellos que el mismo alumno puede corregir sin ayuda) si se supone a los mejores alumnos una mayor capacidad de revisar su propio trabajo. A pesar de la dificultad de definir estos errores, el autor concluye que el término “descuido” no resulta muy adecuado para los mismos, dado el perfil de los alumnos que cometen la mayor parte de estos errores. El autor recomienda a los profesores con alumnos proclives a este tipo de error que traten de fomentar en sus estudiantes la “habilidad de planificar, considerar distintas opciones, y revisar tanto los pasos intermedios como el resultado final de su trabajo” (p. 14).

Cumming y Elkins (1994), basándose en la teoría del procesamiento de la información, estudian si el uso de estrategias ineficientes, o con una alta

[51] Unknown/Careless Errors.

demanda cognitiva, en la resolución de hechos numéricos, conduce a la producción de errores sistemáticos, que previamente han sido clasificados como errores de "descuido". Esta búsqueda de posibles causas de errores sistemáticos no detectadas previamente conduce al planteamiento de la investigación. Los autores plantean a 107 alumnos de primaria (de tercero a sexto) las 100 combinaciones básicas ($a + b$; $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$). Posteriormente, entrevistan a los alumnos pidiéndoles que expliquen el procedimiento que utilizan para hacer 12 de las 100 combinaciones. Al estudiar la distribución de los errores, se consideraron como "sistemáticos" los errores en cálculos en los que intervenía el 0. Los alumnos estaban aprendiendo a multiplicar y aplicaban erróneamente propiedades de la multiplicación como: ($6 \times 0 = 0$) a la suma ($6 + 0 = 0$). Análogamente, hubo problemas con el uso del 1 y otros errores sistemáticos, como aplicar el uso de "dobles más uno" en situaciones en que debía hacerse "dobles menos uno" (haciendo $6 + 7 = 7 + 7 + 1$ en lugar de hacer $6 + 7 = 7 + 7 - 1$). Entre las posibles explicaciones que ofrecen los autores para los distintos errores encontrados están el uso de la estimación (en lugar de un cálculo exacto), la excesiva demanda cognitiva de la aplicación de estrategias (como el "paso al 10", $9 + 5 = 9 + 1 + 4$; el uso de dobles más uno; etc.). La distribución del resto de los errores (los considerados no sistemáticos, para los que no se pudo encontrar explicación alguna) no fue aleatoria, observándose que el número de errores aumentaba con el tamaño de los sumandos. Los autores concluyen que la noción de "error de descuido" tiene poco valor explicativo. Entre las causas de errores sistemáticos que encontraron estaban: "la implementación incompleta o inexacta de una estrategia, aplicación de una regla incorrecta, perder la cuenta al contar, y una posible recuperación [de hechos numéricos de la memoria] deficiente o una adivinación [estimación]" (p. 29). Así, muchos errores que en otras investigaciones han sido considerados como "descuidos" pueden pasar a ser considerados “errores sistemáticos” bajo una nueva perspectiva de análisis. La recomendación que se hace a los profesores, en el apartado de implicaciones, es la de ayudar a los alumnos a que desarrollen estrategias eficientes para la resolución de problemas y tareas de modo que se procure evitar que una excesiva demanda cognitiva en una parte de la tarea produzca un error en la resolución global del problema.

Inskeep (1978) proporciona orientaciones a los profesores sobre cómo elaborar y utilizar pruebas escritas para diagnosticar dificultades de cálculo en el aula. Parte de la base de considerar dos tipos básicos de errores de cálculo: los que se dan en las combinaciones básicas y los que se producen en el algoritmo. Para hacer un diagnóstico, se propone elaborar una prueba en la que se planteen varias operaciones del mismo tipo a los alumnos. Un aspecto interesante del trabajo los constituyen las recomendaciones para la interpretación de los errores de los estudiantes según el número de operaciones mal hechas de cada tipo. Así, una sola operación mal hecha de un tipo puede deberse a un error de descuido. Sin embargo, en cuanto el alumno comete varios errores en un mismo tipo de operación, se debe atender a la posibilidad de que aparezca un “patrón de error” en las respuestas del alumno. Por otra parte, resulta interesante leer la advertencia del autor para los que consideran que una operación con el resultado correcto no merece la atención del maestro.

> “Es razonable asumir que un niño que no ha fallado en ninguno de los ejemplos de un tipo determinado, sabe como hacer ese tipo [de operación]. Sin embargo, las respuestas correctas no suponen una garantía absoluta de que el niño comprende. Hay ocasiones en las que el niño obtiene respuestas correctas para todos los ejemplos pero ha utilizado un procedimiento defectuoso. Esto es algo infrecuente pero debe señalarse para enfatizar la necesidad de un cuidadoso análisis” (p. 169)

El objetivo final del estudio del trabajo escrito de los niños es el de elaborar un diagnóstico para el cual el autor ofrece la siguiente clasificación de alumnos: (1) Los que demuestran tener un patrón de error, (2) los que cometen errores de forma aleatoria, sin que sea posible detectar patrón alguno, (3) los que saben cómo hacer el algoritmo pero desconocen los hechos numéricos, o (4) los que tienen combinaciones de los tres tipos anteriores de errores.

El trabajo finaliza con propuestas del autor para tratar de ayudar a los niños con cada una de las dificultades señaladas. Así, Inskeep (1978) propone para los niños que exhiben "patrones de error" en su trabajo:

(1) Desarrollar y examinar la secuencia de pasos en la ejecución del algoritmo en el que se da el patrón de error.
(2) Proporcionar modelos físicos para la actividad manipulativa.
(3) Desarrollar un diagrama para el algoritmo
(4) Utilizar un algoritmo alternativo (p. 172)

Las dificultades con los hechos numéricos se dividen en: dificultades de comprensión del concepto de la operación y dificultades en la memorización de los hechos numéricos. Mientras que en el primer caso se sigue recomendando el uso de modelos, diagramas, y la manipulación de objetos; para el segundo, se propone el uso de ayudas para la memoria (flash cards, grabaciones en casete, recitaciones en grupo) además de una planificación detallada de la práctica (con la búsqueda de buenos ejemplos y espaciando la práctica para evitar el aburrimiento) y la realización de pruebas con limitación del tiempo para evaluar de forma continuada y proporcionando un feedback apropiado a los alumnos para que puedan valorar su progreso.

Por último, se dedica un apartado a los procedimientos de conteo que se emplean para el cálculo de hechos numéricos. El conteo es considerado "poco eficiente". Aplicado correctamente, puede producir resultados correctos.

Ben-Zeev y Star (2001) plantean la hipótesis de que hay un “efecto de correlación espuria” que causa gran parte de los errores sistemáticos que se producen en los procesos de resolución de problemas. Este efecto consiste en que los alumnos establecen correlaciones entre alguna característica irrelevante de un problema y el procedimiento que se emplea para resolverlo. Los errores se producen al intentar aplicar el mismo procedimiento para resolver otro problema con la misma característica superficial en el enunciado. Los autores emplean tareas de comparación de fracciones como las que se muestran en la Tabla 2.4. Los resultados indican que la mitad de los alumnos correlacionaban la multiplicación de una columna por n/n con el hecho de que en el denominador hubiese un logaritmo, y multiplicar ambas columnas por n con que en el denominador hubiese un radical.

Tabla 2.4. *Los dos algoritmos y sus características correlativas*

Algoritmo 1: Multiplicar una columna por n/n		Algoritmo 2: Multiplicar ambas columnas por n	
Columna A	Columna B	Columna A	Columna B
$\frac{x+4}{\log 3}$	$\frac{2x+6}{2\log 3}$	$\frac{x+2}{\sqrt{5}}$	$\frac{2x+4}{2\sqrt{5}}$
Determinar si la cantidad de la Columna A es menor, mayor, o igual a la cantidad en la Columna B, o si la relación no puede determinarse.		Determinar si la cantidad de la Columna A es menor, mayor, o igual a la cantidad en la Columna B, o si la relación no puede determinarse.	
Estrategia: Multiplicar la Columna A por 2/2. Esto da $\frac{2x+8}{2\log 3}$ en la Columna A. Al comparar los numeradores, encontramos que, dado que 2× + 8 es mayor que 2× + 6, se cumple que la Columna A es mayor.		Estrategia: Multiplicar ambas columnas por $\sqrt{5}$. Esta acción cancela $\sqrt{5}$ en ambas columnas, y deja × + 2 en la Columna A y $\frac{2x+4}{2}$ o × + 2 en la Columna B. Así, las cantidades son iguales.	

La otra mitad de los alumnos establecieron la correlación al revés. El aspecto crucial de esta situación es que las dos estrategias son igualmente válidas en ambas situaciones y que los alumnos establecieron correlaciones espurias entre características superficiales (la presencia de un logaritmo o un radical) y las estrategias de resolución.

2.12. Algunas ideas sobre el error provenientes del ámbito del cálculo

En los apartados siguientes se recogen resultados de investigaciones en las que se han tratado temas muy próximos al del presente trabajo. Especialmente, se dará énfasis a algunos estudios sobre cálculo con decimales.

2.12.1. Presencia en trabajos clásicos de errores con decimales y fracciones.

Para Brueckner y Grossnickle[52] (1953, p. 466-467) las causas principales de las dificultades en el aprendizaje de las operaciones numéricas son: La necesidad de comprender el significado matemático del proceso y el conocimiento de los hechos básicos y los procedimientos esenciales para el cálculo[53].

Brueckner y Grossnickle (1953, p. 410) proponen el uso del cálculo aproximado (cercano a la estimación) como procedimiento para determinar la posición de la coma decimal en las operaciones con decimales. El cálculo aproximado y la estimación tienen importancia aún dentro del ámbito del cálculo escrito. La relación mostrada aquí puede unirse a la relación que se establece en otros trabajos entre la división y la estimación, para determinar, a través de la

[52] Este trabajo contiene una lista de errores que están tomados del trabajo de Brueckner (1928).

[53] Estas causas tienen un notable interés de cara al presente trabajo, pues aquí se utiliza un modelo para la estimación basado en las fases de resolución de problemas de: interpretación, ejecución y evaluación, donde las dos primeras fases corresponderían a las causas citadas por Brueckner y Grossnickle (1953).

estimación, la primera cifra del cociente en el algoritmo.

Por otra parte, dado que todos los alumnos tienen como referencia los procedimientos de cálculo escrito al aprender a estimar, será importante, de cara al estudio de los errores en el ajuste del valor posicional, explicar cuáles son los procedimientos correctos para determinar este valor. Esto permitirá explicar cuál es la lógica de la clasificación de los errores cometidos.

Brueckner y Grossnickle (1953) indican que "a menudo el alumno se sorprende cuando multiplica dos decimales puros[54] al descubrir que el producto es menor que cada uno de los dos factores" (p. 410). Aquí, puede verse cómo el problema que suponen las ideas equivocadas sobre la multiplicación y la división, tipo: "la multiplicación siempre aumenta" y "la división disminuye", puede considerarse un problema 'clásico'[55] dentro de la Didáctica de las Matemáticas.

Thorndike (1922, p. 437-438) explica cómo algunos errores persisten, aunque cambia la percepción de los mismos en función de la destreza que muestran los alumnos en la materia. El autor se refiere a que la adquisición de cierta destreza en el cálculo puede producir una apariencia (a veces ilusoria) de que el alumno tiene un conocimiento adecuado sobre los principios que rigen dichos cálculos. Una importante implicación didáctica de esta afirmación es que si el error es un importante indicador de la presencia de un conocimiento inadecuado, no puede decirse –por el contrario– que la ausencia de errores evidencie un conocimiento adecuado.

> En experimentos en los que adultos dotados hacen un trabajo algebraico, puede notarse una distinción en los errores (o en la precisión, mirando el tema de otra forma) que no coincide exactamente con la distinción entre

[54] Números decimales menores que uno. Los números decimales mayores o iguales que uno son “mixtos”.

[55] Y todavía no satisfactoriamente resuelto.

> la *falta de dominio*[56] de los principios y la falta de dominio en el cálculo, ni tampoco con la distinción entre la falta de conocimiento y el descuido, pero que es similar a ambas. Aparece especialmente en el trabajo en que deben realizarse operaciones con q elementos en un orden r; una operación es ignorada o conectada con un elemento equivocado, o un elemento es ignorado o tomado en un orden equivocado, o algo por el estilo. Hasta que se alcanza cierta destreza, los errores de este tipo parecen testificar una falta de habilidad matemática. El alumno no tiene las conexiones fundamentales con una fuerza suficiente como para operarlas bien...
>
> Sin embargo, después de alcanzar cierta habilidad, (los errores citados) parecen testificar, más que la ausencia de tal sistema, (una falta de) cuidado y deliberación... Esta apariencia puede resultar ilusoria salvo después de un grado de dominio rara vez alcanzado por los alumnos de Educación Secundaria. (pp. 437-438)

Para Thorndike (1922, p. 71-73) tanto nuestros aciertos en tareas aritméticas como nuestros errores admiten la misma explicación: "La ley general de formación de hábitos". Para ilustrar este principio, pone como ejemplo el error que cometen los niños al pensar que "la división disminuye" cuando, por ejemplo, hacen: $4 \div \frac{1}{4} = 1$.

> "Si eres un niño, inexperto en abstracciones numéricas, y has conectado la división con 'hacer más pequeño' tres mil veces y ninguna vez la has conectado con 'hacer mayor', seguramente te veas de algún modo impelido a hacer el número menor la vez tres mil una que te pidan que dividas".
>
> Los hábitos que han sido confirmados por cada multiplicación y división por enteros son [...] directamente opuestos a la formación de los hábitos

[56] Se ha traducido "inability" por "falta de dominio".

> requeridos por las fracciones. Y esta es, según creo, la causa fundamental de la dificultad (pp. 72-73).

Thorndike (1922) ofrece como solución a este problema del aprendizaje de la aritmética la creación de "hábitos preventivos para la multiplicación y división de fracciones". En esta situación, "la formación de ciertos vínculos contribuirá a contrarrestar la dañina influencia del 'multiplicar = obtener un número mayor' y 'dividir = obtener un número menor', vínculos que han sido reforzados por todo el trabajo con enteros" (pp. 78-79). El autor propone que, al inicio del trabajo sistemático de multiplicación de fracciones, deben escribirse en la pizarra e imprimir claramente en la parte superior de cada página relevante del libro de texto las siguientes advertencias:

> - Cuando multiplicamos un número por algo mayor que uno el resultado es mayor que el número.
> - Cuando multiplicamos un número por uno el resultado es igual al número.
> - Cuando multiplicamos un número por algo menor que uno el resultado es menor que el número. (p. 79)

Además, este hábito debe establecerse con la ayuda de ejercicios en los que se muestren convenientemente estos tres tipos de situaciones (p. 79).

3. DIFICULTAD Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En este apartado, planteo una breve revisión de distintas formas de ver las *dificultades en matemáticas* que se encuentran en la literatura.

3.1. La concepción psicométrica de la dificultad

En este trabajo, llamo "concepción psicométrica de la dificultad" a la identificación de la dificultad con el 'índice de dificultad' que se utiliza en psicometría, dentro de la Teoría Clásica de los Tests[57]. En los manuales de psicometría suele definirse el índice de dificultad de un ítem como "la proporción de sujetos que lo aciertan de aquellos que han intentado resolverlo" (Muñiz, 1998, p. 218). De esto se deduce que, a mayor índice de dificultad, mayor es la proporción de respuestas correctas y, por tanto, más fácil es el ítem. De acuerdo con esta definición, Muñiz (1998) señala que sería "semánticamente más apropiado llamarlo índice de facilidad" (p. 218). Por esta razón, Santisteban (1990) utiliza el término 'nivel de dificultad' relacionado en sentido inverso con el índice de dificultad. En este enfoque, la dificultad de un ítem no es una propiedad intrínseca del ítem, sino que depende de la muestra de sujetos para la que el índice se calcula (Muñiz, 1998). Una característica de esta forma de entender la dificultad es que no se establece ninguna distinción conceptual entre los términos 'dificultad' y 'error'. Un "gran porcentaje de errores" en el ítem es sinónimo de un "gran nivel de dificultad". Análogamente, en el aula se puede decir que una determinada tarea es muy difícil cuando un alto porcentaje de alumnos no son capaces de realizarla correctamente. "Dificultad" se entiende como "gran porcentaje de errores".

El enfoque psicométrico de dificultad, ha llegado incluso a aplicarse a asignaturas completas. Antibi (2005) sugiere que "La noción misma de dificultad no tiene sentido sino en relación a cierto nivel de exigencia y, sobre todo, de evaluación. Cuando una mayoría de estudiantes fracasa en cierta área de enseñanza, esta pasará a ser calificada como difícil" (p. 13).

[57] Considero un punto de vista bastante distinto la concepción de la dificultad en la Teoría de la Respuesta al Ítem (TRI) o Teoría del Rasgo Latente que se da en el Informe PISA 2003 (OCDE, 2005).

Quizá el mayor inconveniente de esta visión sobre la dificultad es que no arroja ninguna luz sobre las causas del 'fracaso'. Algo (un ítem, tarea, o asignatura) es difícil si produce gran cantidad de 'fracasos', pero no resulta fácil explicar a qué se debe tan alto número de alumnos que cometen errores en la tarea. Así, la idea tomada de la psicometría de que una tarea es más difícil que otra si el porcentaje de error es mayor, tiene limitaciones, y ha sido criticada por algunos autores. Cumming y Elkins (1994) se cuestionan el significado del término 'dificultad' al indicar que "no es suficiente decir que un hecho [numérico] es más difícil porque hay más gente que lo hace mal. ¿Por qué es más difícil?" (p. 25). Este inconveniente podría superarse con alguno de los enfoques de la dificultad como complejidad que abordaré en el epígrafe siguiente.

3.2. La dificultad como complejidad

La dificultad de una tarea puede interpretarse (a mi juicio, erróneamente) también como *complejidad*. Esta opción es la adoptada por Deaño (1993) en su investigación sobre conocimientos lógico matemáticos en la Educación Infantil al decir:

> Las tareas poseen un cierto grado de dificultad que las diferencia. A esta dificultad se le ha llamado complejidad de la tarea y esta complejidad vendría determinada por el número de operaciones mentales que la resolución de la tarea exige para su consecución. (p. 71)

Así, Deaño (1993) establece cinco categorías de conductas, organizadas en orden creciente de complejidad. En la primera categoría aparecen tareas del tipo: "Depositar objetos dentro", que solo requieren de la "operación espacial" (p. 71). En el otro extremo, en la categoría cuarta, aparecen tareas del tipo: "Indicar el número de veces que un recipiente contiene a otros", que requieren integrar, según el autor, conocimientos espaciales, de equivalencia, conceptualización y verbalización.

Otra visión distinta de la complejidad es la adoptada por Vergnaud (1991) al introducir el término de 'complejidad lógica'. Este autor introduce su reflexión sobre la complejidad planteándose una serie de preguntas:

- ¿Cuáles son las relaciones más simples para los niños?; ¿cuáles las más complejas?
- ¿Cuáles son las propiedades de las relaciones comprendidas y utilizadas más fácilmente?; ¿más difícilmente?
- ¿Qué formas de cálculo relacional hace el niño con mayor soltura?; ¿con menor soltura? (p. 263)

De la lectura de estas preguntas parece deducirse que el autor toma como equivalentes "ser más simple", "utilizado más fácilmente" y "hecho con mayor soltura", por un lado, y "más complejo", "más difícil" y "hecho con menos soltura", por otro. Más adelante, Vergnaud (1991) añade que es posible analizar distintas jerarquías en los diferentes: objetos lógicos, propiedades de estos objetos, clases de problemas, procedimientos, y representaciones simbólicas. Debo advertir que, en este trabajo, la noción de 'complejidad lógica' aparece solo esbozada y no desarrollada con detalle. El autor se limita a proponer ejemplos de diferencias de dificultad entre las tareas.

Rico (1995) propone el *análisis conceptual* como herramienta para abordar el estudio de lo que Cockburn (1999) llama *complejidad* matemática, de presentación y de traducción (Figura 1), para poder comprender mejor las dificultades y los errores:

> El tema central en relación con los errores y las dificultades es el análisis conceptual. ¿Cuántas piezas intervienen en cada concepto? Cuando hablo

> de raíz cuadrada, ¿cuántas cosas hay en la noción de raíz cuadrada? Hay un signo, hay una equivalencia, es una simplificación de la notación de la función exponencial, pero también es una función, además es un algoritmo, son los valores que toma la función y al mismo tiempo es una representación (puedo representar un cuadrado cuya superficie conozco y preguntar cuánto mide la longitud del lado) (Kilpatrick, Gómez y Rico, 1995, p. 65).

Para Stillman (2004), *dificultad* y *complejidad* son dos términos que *no* pueden considerarse equivalentes: "la dificultad de una tarea puede variar de un alumno a otro mientras que la complejidad de una tarea parece fija al estar determinada por los atributos de la tarea… Sin embargo, estos atributos pueden referirse a ciertos métodos de resolución más que a la tarea per se (un método puede requerir un nivel más profundo de integración de la información que el otro) (p. 63)".

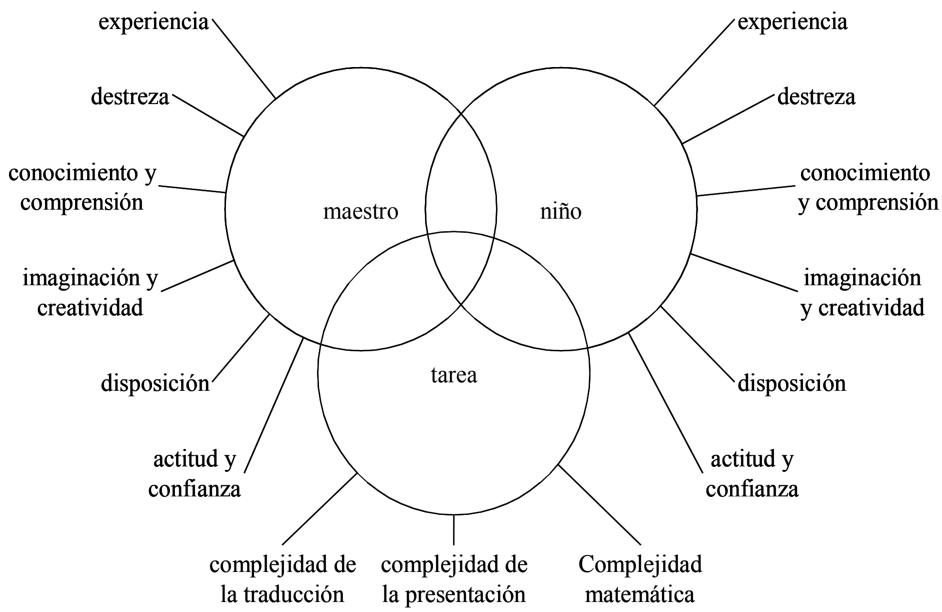


Figura 2.1. Fuentes de dificultades y errores en matemáticas (Cockburn, 1999)

En este trabajo, sigo la línea marcada por autores como Rico (1995) y Stillman (2004) al considerar que la complejidad y la dificultad no deben confundirse, aunque se encuentran estrechamente relacionadas. La complejidad está en la tarea y la dificultad, en el encuentro del alumno con la tarea.

3.3. La dificultad en el encuentro del alumno con la tarea

En el enfoque psicométrico tradicional, el término *dificultad* resulta opaco, mientras que para los autores que lo identifican, en mayor o menor medida, con la *complejidad* de la tarea, está situado en la tarea. Por otra parte, en algunos trabajos se ha planteado cuál es el grado de dificultad que debe tener una tarea matemática, a veces en relación con el desarrollo evolutivo de los alumnos. Esto ha sido indicado por Bredekamp (2004), al defender que los maestros de Educación Infantil necesitan:

> Una orientación acerca de qué expectativas sobre el aprendizaje de los niños son apropiadas. Cuando los objetivos suponen un *desafío asumible*, es decir, son apropiados desde el punto de vista del desarrollo evolutivo, proporcionan un marco teórico muy valioso y práctico para la planificación y la implementación del currículo y para la individualización de la enseñanza. (p. 78).

La clave de esta cita es la expresión "*desafío asumible*". Las tareas propuestas a los niños deben tener un grado de dificultad *asumible* para una mayoría de los pequeños pero, a su vez, deben suponer un pequeño *desafío*. Las actividades demasiado fáciles o demasiado difíciles no son adecuadas para promover el aprendizaje. Esta misma idea se puede encontrar en diversos autores con matices diferentes. Por ejemplo, Brousseau (1997), al proponer las características que debe tener una situación de aprendizaje, señala:

> La respuesta inicial que el alumno considera como respuesta a la cuestión planteada no debe ser la que se desea enseñar; si uno debe tener ya el conocimiento que le capacita para responder una cuestión, esta no sería una situación de aprendizaje. La "respuesta inicial" solo debe permitir al alumno poner en acción una estrategia básica con la ayuda de su conocimiento previo; pero esta estrategia debe rápidamente mostrarse como suficientemente inefectiva para forzar que el alumno se vea obligado a hacer algún tipo de acomodación, es decir, alguna modificación en su sistema de conocimientos a fin de enfrentarse a la situación propuesta. (p. 228)

Como se ve en la anterior cita de Brousseau, aprender implica modificar en algún sentido el conocimiento previo. Las tareas adecuadas son aquellas en las que el alumno no tiene el conocimiento previo para resolver la tarea, pero tampoco se queda bloqueado sin saber qué hacer. Debe tener un conocimiento anterior que pueda emplear para iniciar el trabajo y debe, a su vez, verse obligado a modificar este conocimiento para resolver la tarea.

Tanto en la cita de Bredekamp (2004) como en la de Brousseau (1997) se refleja que para valorar si una tarea es adecuada debe mirarse al alumno (sus conocimientos previos, su desarrollo evolutivo) tanto como a la tarea. Son, para nosotros, enfoques en los que la dificultad aparece en el encuentro del alumno con la tarea. Esta misma idea de dificultad en el encuentro ha sido expuesta por Gómez (2007), aunque en su trabajo no aborda con detalle la idea de dificultad:

> Tanto el camino de aprendizaje, como la dificultad se evidencian cuando el escolar aborda una tarea. Decimos que el escolar tiene una dificultad, cuando incurre en un error al abordar la tarea. Si resuelve la tarea exitosamente, afirmamos que esto puede ser evidencia de que sabe reconocer y ejecutar el camino de aprendizaje (p. 72).

3.4. Dificultad en PISA (2003)

El Informe PISA 2003 presenta un enfoque pragmático (sin ofrecer definición o conceptualización alguna) sobre la dificultad, basado en la teoría de respuesta al ítem (OCDE, 2005, p. 44). En este informe, se establece una *Escala de competencia en matemáticas*, en la que cada tarea recibe una puntuación según su dificultad y cada alumno obtiene una puntuación en función de su nivel de competencia. "Una vez que la dificultad de los ejercicios recibía una puntuación sobre esta escala" (p. 45), los alumnos eran situados "en un punto de la escala en el que tenían un 62 por ciento de probabilidad de responder a una pregunta correctamente" (p. 107). Teniendo en cuenta este enfoque, y aunque no se ofrezca una definición explícita de dificultad, queda clara implícitamente la concepción de dificultad latente en este influyente trabajo, al afirmarse que el modelo de puntuación elaborado en PISA permite "estimar la posición de cada uno de los ejercicios de la prueba de evaluación [grado de dificultad], observando qué grado de competencia matemática representa cada ejercicio" (p. 45). Es decir, *la dificultad de una tarea se equipara al grado de competencia matemática necesaria para resolver dicha tarea*.

En este enfoque resulta evidente la relación que se establece entre la tarea y el alumno. Tiene el inconveniente de que solo se cuantifica la dificultad para los ejercicios que se han planteado en la citada investigación. Para paliar este inconveniente, y ofrecer una orientación sobre qué tareas son fáciles y cuales difíciles, PISA establece una relación entre los 6 niveles de dificultad (y de competencia matemática) que se fijan en la escala y las características de la tarea. Por ejemplo, los ejercicios que requieren competencias de reproducción, suelen ser los más sencillos; aquellos que exigen competencias de conexión, tienen una dificultad intermedia, mientras que la mayor dificultad aparece asociada a las competencias de reflexión (p. 49).

3.5. Conclusiones sobre la dificultad en matemáticas

La conclusión que se extrae en el planteamiento de este trabajo es que existen tres términos: *complejidad*, *error* y *dificultad*, que se refieren a cosas claramente diferentes, aunque relacionadas estrechamente entre sí. La *complejidad* está en la *tarea* que hay que resolver[58]. Los conceptos, procedimientos, requeridos para resolver la tarea, forman parte de una *estructura conceptual* (Gómez, 2007; Rico, 1997) que se estudia al abordar el *análisis del contenido* (Gómez, 2007).

El error se detecta al hacer el *análisis de la actuación* de un sujeto al enfrentarse a una tarea. El *error* es el resultado de un juicio o valoración que el profesor emite sobre la producción de un alumno al compararla con la ejecución esperada (según los objetivos, lo que se ha enseñado en clase, etc.). Gómez (2007) indica que en el análisis de la actuación el profesor puede:

> Revisar si las tareas indujeron a los escolares a ejecutar caminos de aprendizaje en los que el profesor preveía que ellos pudieran manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron (los escolares incurrieron en errores al ejecutar esos caminos de aprendizaje) y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades (p. 93).

Por último, una tarea es *difícil* para un alumno si el alumno no tiene el nivel de competencia necesario para resolver dicha tarea. Esta definición de dificultad inspirada en el Informe PISA, solo resulta operativa dentro de un modelo de evaluación como el propuesto en dicho Informe[59]. Para hacerla operativa en

58 La complejidad está también en la *estructura conceptual*.

59 Una tarea, en el Informe PISA es más difícil para el sujeto (es decir, existen menos probabilidades de que la pueda realizar correctamente) cuando el nivel de competencia del sujeto, medido en la escala, es inferior al nivel de dificultad de la tarea o, dicho de otro modo, al nivel de competencia necesario para resolver dicha tarea exitosamente con una probabilidad

otros contextos, pienso que habría que definir la dificultad en términos de capacidades, más que de competencias (o nivel de competencia), siguiendo la distinción de Gómez (2007) sobre estos términos. También se podría profundizar en los 6 niveles de dificultad establecidos en PISA (2003) según los tipos de competencia requeridos en cada nivel.

En este planteamiento inicial del trabajo, mi objetivo era tratar de clarificar y delimitar el término *dificultad*. He excluido (a propósito) de esta revisión todo el planteamiento sobre "Dificultades de aprendizaje en matemáticas", que procede del ámbito de la Psicopedagogía, que se suele centrar en ofrecer propuestas de intervención para abordar ciertas áreas de dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, como los algoritmos o la resolución de problemas.

Por último, una revisión de los trabajos de investigación sobre dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y una clasificación de dichas dificultades pueden consultarse en Socas (1997 y 2007).

4. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE NÚMEROS DECIMALES

En este último apartado del capítulo 2 reviso algunos aspectos sobre los números decimales[60]. Comenzaré por los trabajos de Guy Brousseau de los años

del 62%.

[60] A lo largo de todo este trabajo de tesis, se ha procurado mantener un criterio uniforme en el uso del separador decimal. Se utiliza la coma como separador decimal (la tradición en español) habitualmente en el texto. Sin embargo, también se ha utilizado el punto como separador decimal en dos tipos de situaciones: a) cuando se traduce del inglés y se está informando de una investigación desarrollada en lengua inglesa, donde lo habitual es utilizar el punto como separador decimal, y b) en la prueba de estimación que se administró a los alumnos, en la que éstos debían introducir la estimación en la pantalla del ordenador utilizando un teclado virtual

ochenta (me refiero especialmente a G. Brousseau y N. Brousseau, 1987), al principio con una difusión restringida a ciertos ámbitos, que en los últimos 15 años han comenzado a difundirse en lengua inglesa (Brousseau, 1997; G. Brousseau, N. Brousseau, y Warfield, 2004; G. Brousseau, N. Brousseau, y Warfield 2007; G. Brousseau, N. Brousseau, y Warfield 2008; y G. Brousseau, N. Brousseau, y Warfield, 2009).

4.1. Algunos aspectos sobre la enseñanza de los números decimales

Algunas de las aportaciones más valiosas sobre las dificultades que se producen en la enseñanza-aprendizaje de los números decimales pueden encontrarse en los trabajos de Brousseau. Este autor (Brousseau, 1997)[61] afirma que un obstáculo que se produce en el aprendizaje de los decimales es la identificación de éstos con medidas. Esto hace que "los niños consideren a los mismos como tripletas (n, p, u) formadas por un número natural, una potencia de diez (por la que se divide el número natural) y una unidad de medida" (p. 91). Dado que una de las prácticas más habituales en el campo de la medida es el cambio de unidades, p y u jugarán un papel destacado en las operaciones con decimales. Asociar los decimales con medidas hará que "el número de decimales utilizados se limite implícitamente al utilizado en las medidas de uso común" (p. 92) (por

en el que, a imitación de las calculadoras, el separador decimal se indicaba con un punto.

[61] La primera fecha que aparece en cada cita corresponde a las publicación original en francés, en la Revista RDM; la segunda, es la de la edición consultada (Brousseau, 1997). Las referencias originales (no aparecen en el listado final, porque no se han consultado) son las siguientes:

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4* (2), 165-198.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques,* 1 (2), 33-115.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques, 2* (1), 37-127.

ejemplo, los precios expresados en francos, dólares o euros vienen con dos decimales). Números como 3,25 se consideran como “325 con las centenas como unidad”. Esto conducirá durante mucho tiempo a considerar, por ejemplo, que no hay ningún número decimal entre 3,25 y 3,26. Esta definición implícita de los decimales como “números naturales con coma decimal” hace que se produzcan errores también al realizar cálculos mentales.

> Al realizar mentalmente el producto de dos números decimales, algunos alumnos calculan el producto de la parte entera, luego el de la parte decimal y al final ponen las partes juntas. Por ejemplo: $(0,4)^2 = 0,16$ pero $(0,3)^2 = 0,9$ y algunas veces $(3,4)^2 = 9,16$. (Brousseau, 1997, p. 92)

En otro trabajo Brousseau (1981/1997), basándose en resultados obtenidos en su análisis de la enseñanza de los decimales (Brousseau, 1980/1997), toma la opción de presentar “los números decimales como números racionales, simplemente como una forma alternativa de escribir fracciones decimales” (p. 163). Por otra parte, presentará “las fracciones decimales como medio para aproximar números racionales debido a las facilidades de cálculo que ofrecen las mismas” (p. 163). Se espera que esta forma alternativa de presentar los números decimales ayude a eliminar las dificultades que produce la consideración de los mismos como “números naturales con coma”.

Para Pinto y Tall (1996), un factor indicador[62] de concepciones inadecuadas sobre los decimales es el modo en que habitualmente suelen leerse. Por ejemplo, leer 0.59 como “cero punto cincuentainueve” conducirá a pensar, de forma natural, que “cero punto cincuenta” es mayor que “cero punto cinco”, o que “cero punto once” es mayor que “cero punto nueve”[63]. Otro aspecto que

[62] Y favorecedor de estas concepciones inadecuadas.

[63] En español, lo correcto es leer 0.59 como “cincuentainueve centésimas” y 0.5 como “cinco décimas”. En la práctica diaria suele omitirse la unidad al final, dando lugar al tipo de

dificulta una comprensión adecuada de los decimales es la sobreexposición de los estudiantes a los decimales finitos. Esto hace que se les identifique erróneamente con las fracciones. También a veces los decimales familiares como 0,1 o 0,33... son interpretados como números racionales, mientras que los decimales recurrentes podrían no tener la consideración de "números racionales" para muchos alumnos (Pinto y Tall, 1996).

Tabla 2.5. *Orientaciones para la enseñanza de los números decimales en Educación Primaria (Adaptadas de Empson y Levi, 2011, pp. 174-179)*

Edad/Curso	*Tipo de actividad*	*Ejemplos*
5-6/3º EI	Problemas con 2, 3, 4, 5, o 10 en cada grupo.	En cada pecera podemos meter 3 peces. ¿Cuántas peceras necesitamos para 15 peces?
6-7/1º EP	Problemas con 10 en cada grupo.	En cada pecera podemos meter 10 peces. ¿Cuántas peceras necesitamos para 56 peces?
7-8/2º EP	Problemas con 10 y con 100 en cada grupo.	En cada cubeta caben 100 peces. ¿Cuántas cubetas hacen falta en la tienda de mascotas para 324 peces? En cada pecera caben 10 peces. ¿Cuántas peceras necesitan en la tienda de mascotas para 564 peces?
8-9/3º EP	Problemas con 10 y con 100 en cada grupo. Problemas de división reparto entre 10	Ejemplos de problemas de 7-8 años / 2º EP Diez niños tienen 2 tartas para repartir. ¿Cuánto le toca a cada uno? (Expresión de solución como fracción 2/10 o en lenguaje natural 'dos décimos').
9-10/4º EP	Problemas con 10, 100, 1000 y 0.1 en cada grupo. Sentencias abiertas.	Mi lagarto come 0.1 libras de comida al día. ¿Cuánto come en 6 días? ¿Y en 12? ¿En 24? Sentencias abiertas del tipo: $a \times 10 = 240$; $b \times 0.1 = 10$; $g \times 10 + h = 58$; $245 = r \times 100 + g \times 10 + p$; $y + b \times 0.1 = 34.7$
10-11/5º EP	Problemas con 10, 100, 1000, 10000, 100000, 0.1, y 0.01 en cada grupo. Sentencias abiertas.	Nick usa 0.1 gramos de polvo de chile para hacer una cazuela de chile. ¿Cuántos gramos de polvo de chile necesitará para hacer 4 cazuelas y media? $m \times 10 = 35$; $j \times 0.1 = 2.46$; $346 = p \times 10 + y \times 100$ $346 = b \times 100 + j \times 10$
11-12/6º EP	Problemas con 10,... hasta 1 millón en cada grupo y 0.1, 0.01 y 0,001 en cada grupo. Sentencias abiertas.	Un paciente del hospital recibe 0.34 onzas de medicina cada hora. Cuánta medicina recibirá en 24 horas? $34 \times r = 68000$; $0.02 = h \times 0.2$; $0.32 = y \times 0.2$; $2.4 \times \mathrm{m} = 48$

dificultades comentado.

Empson y Levi (2011) hacen una propuesta innovadora para la introducción de los números decimales en la Educación Primaria, que parte de trabajos previos pertenecientes al ámbito de la resolución de problemas aritméticos verbales (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999), y de trabajos en los que se trata de integrar la aritmética con el álgebra en la Educación Primaria (Carpenter, Franke y Levi, 2003). En la Tabla 2.5 se resume la propuesta, vertebrada en torno a los problemas aritméticos y a las sentencias abiertas.

Después de explorar algunas de las dificultades propias de los procesos de enseñanza-aprendizaje de los números decimales, pasaré a los problemas específicos que se producen al trabajar con números decimales menores que uno, que se han estudiado con detalle en el ámbito de la resolución de problemas.

4.2. Los trabajos de la década 1980-1990 sobre números decimales en la resolución de problemas

El campo de investigación de resolución de problemas aritméticos ha proporcionado gran cantidad de información sobre las ideas equivocadas de los niños, y adultos, sobre operaciones con números decimales. Un aspecto de los más destacados en el estudio de problemas de estructura multiplicativa, es el del efecto del tipo de número -natural o decimal menor que uno- en la elección de operación para resolver este tipo de problemas. Castro (1995, pp. 63-68) ha hecho una revisión de estos estudios y expone los resultados de los trabajos de Bell, Fischbein y Greer (1984), Bell, Greer, Grimison y Mangan (1989), Bell, Swan y Taylor (1981), De Corte, Verschaffel (1996), De Corte, Verschaffel y Van Coillie (1988), Ekenstam y Greger (1983), Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), Greer (1987), Nesher (1988), y Luke (1988). En todos estos estudios[64], participaron alumnos de 11 a 16 años. Los resultados

[64] Menos en Bell y otros (1989) en que también participan maestros en formación.

encontrados en estos estudios se presentan, de forma resumida, a continuación:

a) Ante problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa que contienen números decimales, los niños suelen experimentar dificultades en la elección de una operación apropiada para resolverlos.

b) Las dificultades son debidas a las ideas equivocadas infantiles sobre el efecto de multiplicar o dividir un número por otro menor que uno. Los pequeños tienden a pensar que "la multiplicación siempre aumenta", "la división disminuye" y que "siempre debe dividirse un número por otro más pequeño". Estas ideas, que resultan válidas en el ámbito de los números naturales, dejan de serlo al extrapolarse a los números decimales menores que la unidad.

c) El origen de estas ideas equivocadas acerca de la multiplicación y la división se localiza en el enfoque de la enseñanza, marcada por el predominio del modelo de multiplicación como suma repetida y el modelo de reparto para la división. Efectivamente, si se interpreta la multiplicación como adición repetida el multiplicador será un número natural y el producto siempre mayor que el multiplicando. Del mismo modo, si se interpreta la división como un reparto, el divisor será un número natural y divisor y cociente, menores que el dividendo.

4.3. Ideas equivocadas de maestros en formación sobre multiplicación y división con decimales

Hay cierto número de estudios sobre las ideas equivocadas de maestros en formación acerca de la multiplicación y división con números decimales menores que uno. A continuación, se presenta un breve resumen de las mismas.

Tirosh y Graeber (1989) tratan de evaluar si las creencias: "la multiplicación siempre aumenta" y "la división siempre disminuye" son mantenidas explícitamente por maestros en formación. Para ello, piden a los maestros que respondan "verdadero o falso" a los enunciados siguientes:

A. En un problema de multiplicación, el producto es mayor que cada uno de los factores.

B. El producto 0.45×90 es menor que 90.

C. en un problema de división, el cociente debe ser menor que el dividendo.

D. en un problema de división, el divisor debe ser un número entero.

E. El cociente en la división $60 \div 0.65$ es mayor que 60.

F. El cociente en la división $70 \div 1/2$ es menor que 70. (p. 81)

Igualmente, se pidió a los estudiantes que resolvieran cálculos del tipo: 0.38×5.14 y $3.75 \div 0.75$ que facilitaban contraejemplos para las creencias sometidas a discusión. Además, los estudiantes resolvieron problemas aritméticos verbales en los que tenían que elegir la operación adecuada para hallar la solución.

En los resultados del estudio, un 10% de los estudiantes mantiene explícitamente que "la multiplicación aumenta", y más del 50% de los estudiantes para maestro sostienen explícitamente que en un problema de dividir, el cociente debe ser siempre menor que el dividendo.

En lo que concierne a la multiplicación, la idea de que la "multiplicación siempre aumenta" es implícita para una mayoría y se pone de manifiesto en las respuestas de los estudiantes a los problemas. Sin embargo, esta creencia no es mantenida de forma explícita. Los alumnos mostraron gran dependencia de su conocimiento sobre las operaciones con números naturales; en especial, de su conocimiento procedimental sobre las operaciones. Siempre utilizan números naturales al proponer ejemplos para justificar sus concepciones sobre las operaciones. Suelen manifiestan una gran dependencia del modelo de multiplicación como suma reiterada y del modelo de división como un reparto.

Manifiestan ideas equivocadas en el ámbito de la multiplicación y la división cuando en estas aparecen decimales menores que uno y mantienen estas ideas equivocadas, aún al entrar estas en contradicción con resultados correctos obtenidos con las operaciones aritméticas que se les proponen.

Tirosh y Graeber (1990) también investigan sobre la idea equivocada que tienen muchos maestros en formación de que el cociente debe ser menor que el dividendo en una división. Se entrevista a 21 estudiantes de magisterio, a los que se pide que digan si están o no de acuerdo con las afirmaciones siguientes:

> A. En un problema de división, el cociente debe ser menor que el dividendo.
>
> B. El cociente en la división 10 ÷ 0.65 es mayor que diez.
>
> C. El cociente en la división 70 ÷ 1/2 es menor que 70. (p. 100)

También se pide a los alumnos que escriban una expresión que conduzca a la solución en varios problemas. Solamente deben elegir cuál de las cuatro operaciones es apropiada para resolver el problema y qué operación se debe realizar. Entre estos problemas hay algunos en los que debe dividirse un número por otro número decimal menor que 1. Así, las ideas equivocadas acerca de la división, mantenidas por los alumnos explícitamente en la primera parte de la entrevista, deberán también ponerse de manifiesto al elegir la operación adecuada para resolver estos problemas.

Las entrevistas mostraron que los maestros en formación tienen una gran dependencia del conocimiento sobre los conceptos y operaciones con números enteros. Estos alumnos, además, suelen carecer de la interpretación de la división como "medida" y tienden a cambiar algunos de sus procedimientos de cálculo para satisfacer las condiciones impuestas por estas ideas equivocadas.

Los alumnos que pensaban que "la división disminuye" pero realizaban correctamente el algoritmo de la división por un decimal menor que 1, no tardaron en darse cuenta de que su concepción de la división (válida en el ámbito de los números enteros) no funcionaba bien con números decimales. Sin embargo, para algunos sujetos (8 en este estudio), en los que la comprensión del algoritmo de la división no era la adecuada, fue posible "resolver" la contradicción, entre los resultados obtenidos en la operación y sus ideas equivocadas sobre la división, de una forma inapropiada.

Graeber y Tirosh (1990) utilizan dos entrevistas para explorar las ideas que tienen alumnos de cuarto y quinto grado sobre la multiplicación y la división con números enteros. El objetivo del estudio es analizar si estas ideas facilitan o dificultan el trabajo posterior que realizan los niños con números decimales. En la entrevista sobre multiplicación aparecen los siguientes ítems:

> Tarea 6: (se muestra a los alumnos los números 0.1 y 0.5).
>
> Hay dos números en esta tarjeta. ¿Cómo se llama el que está arriba?
>
> ¿Sabes qué significa 0.1? ¿Es mayor o menor que 0? ¿Es mayor o menor que 1?
>
> ¿Sabes que significa 0.5? ¿Es mayor o menor que 0? ¿Es mayor o menor que 1? ¿Es mayor o menor que 0.1?
>
> Tarea 7A: (Si el alumno ha respondido satisfactoriamente a la tarea seis, utiliza las tareas 7A y 7B. En caso contrario, pasa a la tarea 7C).
>
> $15 \times 0.6 = ?$
>
> ¿Puedes decirme qué número falta? ¿Puedes decirme algo sobre él? ¿Por qué piensas eso?
>
> Tarea 7B: (muestra al alumno la tarjeta con la siguiente sentencia numérica).
>
> $0.1 \times 10 = \ ?$
>
> ¿Puedes decirme qué número falta? ¿Puedes decirme algo sobre él? ¿Por qué piensas eso?
>
> Tarea 7C: (muestra al alumno la tarjeta con la siguiente sentencia numérica).

> $15 \times 0.6 = 9$
>
> Algunas personas mayores piensan que esta expresión es rara, si es que es correcta. ¿Podrías adivinar por qué piensan que es rara? ¿A ti te parece rara? (p. 569)

La mayoría de los alumnos se sorprendieron al ver sentencias como la 7C. Catorce de ellos (cerca del 25%) detectaron algún problema relacionado con el tamaño del producto diciendo "la respuesta debería ser mayor que nueve", "la respuesta debería ser alrededor de quince" o "la respuesta debe ser mayor".

Este estudio proporciona evidencias de que las ideas de que "la división disminuye" y "la multiplicación aumenta" ya aparecen en alumnos de cuarto y quinto grado.

Los modelos de multiplicación como "suma reiterada" y de división como "reparto" pueden obstaculizar la comprensión correcta de las operaciones con números decimales. Sin embargo, los modelos de multiplicación "de área" y de división "medida" pueden facilitar el paso de las operaciones con números enteros a las operaciones con decimales. Los autores proponen que los alumnos deben ser capaces de utilizar la estimación para anticipar una solución razonable cuando resuelven problemas. Este proceso de estimación debe permitir dilucidar si se espera una respuesta mayor, menor o igual que uno.

En el estudio de Graeber y Tirosh (1990) se piden "juicios de valor", sobre las operaciones, cercanos a la definición de Segovia y otros (1989)[65]. No aparece, sin embargo, la estimación como proceso de cálculo. El trabajo tiene el interés (de cara a la presente investigación) de que en él se plantea el problema de las ideas equivocadas sobre multiplicación y división con números decimales, en tareas (como la tarea 7) en las que la operación que se ha de realizar aparece indicada explícitamente.

[65] Estimación: Juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite (p. 18).

Tirosh y Graeber (1991) analizan la influencia que tienen el tipo de problema de división (de reparto o medida) y las ideas equivocadas de los alumnos acerca de la división (la división "disminuye") en la realización de distintas tareas sobre problemas de división. En la investigación participan 80 alumnas de magisterio. Se pide a estas alumnas que realicen dos tipos de tareas distintas: en la primera tarea, deben escribir expresiones que conduzcan a la solución de varios problemas dados; en la segunda tarea, deben escribir enunciados de problemas que se resuelvan utilizando expresiones dadas. Por ejemplo, deben escribirse problemas que se resuelvan mediante las expresiones: $6 \div 3$, $2 \div 6$, $4 \div 0.5$ y $0.5 \div 4$. Fueron entrevistadas 33 de las alumnas para determinar qué procedimiento habían utilizado para resolver las tareas.

Se encontró que las alumnas tuvieron más facilidad para escribir expresiones que resolvieran los problemas en los que no se producía contradicción entre la operación que debía realizarse y las ideas equivocadas de las alumnas sobre la división. Resultó también ser más sencillo, para estas alumnas, escribir expresiones que resolvieran problemas de división "reparto" que problemas de división "medida". Cuando se pedía a las alumnas que escribieran enunciados de problemas que se resolvieran mediante una expresión dada, estas solían casi siempre escribir problemas de división-reparto. En este tipo de tareas, pareció tener mayor influencia la compatibilidad de la expresión con la interpretación partitiva de la división que las restricciones impuestas por las concepciones erróneas de las alumnas acerca de la división.

Thipkong y Davis (1991) investigan las ideas equivocadas de un grupo de 65 maestros en formación sobre las operaciones con números decimales. Para ello elaboran una prueba escrita compuesta por 45 ítems. En algunos de ellos se pide a los alumnos que escriban una expresión que permita resolver el problema y que utilicen la calculadora para obtener la respuesta. Por ejemplo, el ítem nº 27 es el siguiente:

> Carla dedica 0.25 horas diarias a regar las plantas. ¿Cuánto tiempo es en minutos?
> Expresión: ______________________________________
> Respuesta: ______________________________________ (p. 95)

Los autores encontraron que "el 31% de los maestros en formación tuvieron dificultades con los números decimales menores que uno. Utilizaban la división en vez de la multiplicación cuando el multiplicador era menor que uno (como ocurre en el ítem nº 27)" (p. 97). En las entrevistas, realizadas para conocer los procedimientos que habían utilizado los sujetos para dar sus respuestas, "los maestros en formación explicaban esta respuesta diciendo que 'la división disminuye'" (p. 97).

4.4. El sentido numérico, el efecto de la alteración de los datos en el resultado de una operación y la estimación en cálculo

En este trabajo se utiliza el marco teórico propuesto por McIntosh, Reys y Reys (1992) para el sentido numérico. Estos autores dan la siguiente definición de sentido numérico:

> Con el término 'sentido numérico' nos referimos a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a utilizar con flexibilidad este conocimiento para emitir juicios matemáticos y para desarrollar estrategias prácticas que le permitan manejar números y operaciones. Refleja una inclinación y una destreza en el uso de números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar informaciones. (p. 3)

Las definiciones que pueden encontrarse sobre sentido numérico son demasiado generales. Los autores que han intentado describir o evaluar el sentido numérico de un grupo de sujetos han optado por desglosar el sentido numérico en componentes. En el modelo teórico utilizado como referencia, se consideran los componentes del sentido numérico agrupados en tres áreas: el conocimiento de los números, conocimiento de las operaciones y el conocimiento sobre cómo utilizar los números y las operaciones en distintas situaciones.

Dentro del conocimiento de las operaciones hay tres componentes: el conocimiento de las propiedades de las operaciones (asociativa, conmutativa, distributiva, etc.), el conocimiento de la relación entre distintas operaciones (entre la suma y la multiplicación, la resta y la división, la multiplicación y la división, etc.) y el conocimiento del efecto relativo de las operaciones.

En este trabajo se examina únicamente el conocimiento del efecto relativo de las operaciones por estar estrechamente relacionado con las tareas de estimación con números decimales menores que uno. McIntosh y otros (1992) consideran que:

> La correcta conceptualización de una operación supone la comprensión del efecto que tiene realizar la misma con distintos tipos de números, incluyendo números enteros y racionales. A menudo utilizamos modelos para ayudar a los alumnos a comprender las acciones que realizan las operaciones. Por ejemplo, la modelización de la multiplicación como suma repetida proporciona un modo concreto de pensar acerca de la multiplicación y de realizarla. Es importante que sean explorados varios modelos de multiplicación de modo que los alumnos puedan ver, a la vez, las posibilidades del modelo y sus limitaciones. Por ejemplo, pensar en la multiplicación como suma reiterada puede conducir a generalizaciones incorrectas (por ejemplo, a pensar que la multiplicación siempre aumenta) (p. 7).

Más adelante añaden:

> Investigar cómo cambia el resultado de una operación a medida que varía el tamaño de los operandos puede contribuir al desarrollo del sentido numérico. Por ejemplo, ¿qué ocurre cuando multiplicamos dos números menores que uno?... La reflexión sobre las interacciones entre los números y las operaciones estimula el pensamiento y favorece el desarrollo del sentido numérico. (p. 7)

Al referirse al componente del conocimiento del efecto relativo de las operaciones citan al NCTM (1989, p. 43) "el sentido de las operaciones implica también la adquisición de ideas e intuiciones sobre el efecto que tienen las operaciones sobre dos números". Este sentido de las operaciones es necesario en tareas de estimación. El uso de procesos de reformulación, traducción o compensación depende del conocimiento sobre cómo afecta al resultado de un cálculo el cambio de los números que aparecen en el problema.

Al considerar el efecto relativo de las operaciones, Behr (1989) plantea como cuestión básica, relacionada tanto con el sentido numérico como con la estimación, saber "cuándo el resultado de una operación permanece constante bajo la transformación de uno o varios de los operandos, y cómo compensar este cambio cuando ocurre" (p. 85). Según este autor:

> Cuando el objetivo es encontrar el resultado de una operación indicada, si realizamos una operación con una expresión transformada, necesitamos conocer con antelación cuál será el efecto de la transformación y cuál debe ser la compensación que debemos realizar a continuación. Dado que en una operación intervienen dos operandos y un resultado, podemos utilizar dos estrategias distintas para realizar esta compensación, dependiendo de qué cantidades queramos modificar y en qué momento realicemos la compensación. Una estrategia requiere realizar una transformación en uno de los operandos y otra transformación que compense la anterior en el resultado; la otra estrategia supone realizar

> transformaciones en los dos operandos, cada una de las cuales debe compensar a la otra. (p. 85)

Teniendo en cuenta el enfoque de Behr, puede deducirse que el conocimiento del efecto de las operaciones[66] es esencial para la realización de tareas de estimación. En efecto, Reys y otros (1982), al describir los procesos cognitivos que se dan en las tareas de estimación, definen la compensación diciendo que consiste en "los ajustes hechos para reflejar el cambio que se produce como resultado de la reformulación o la traducción del problema" (p. 189).

Cuando se utiliza la estrategia de redondeo -ejemplo de reformulación- para realizar una estimación, debe conocerse de antemano cuál será el efecto que producirá cambiar los datos originales por los datos redondeados. Por ejemplo, si se sustituye el cálculo 87×55 por 90×60, redondeando los dos factores, debe saberse que el resultado exacto del cálculo propuesto será menor que el resultado obtenido (5400) dado que se han sustituido ambos números por otros mayores. Esto puede servir como orientación para realizar una compensación, dejando la estimación en 5000 (más cercana al resultado exacto que es 4785). También se podría realizar una compensación previa al cálculo. Si se sustituye 87 por 90, el resultado obtenido es mayor y puede compensarse este aumento sustituyendo 55 por 50. En este caso se hace una compensación previa a la realización del cálculo que conduce a una estimación de 4500.

En estas estrategias de estimación se ve un claro ejemplo de lo que entiende Behr (1989) por "efecto relativo de las operaciones". Así, se puede considerar el conocimiento del efecto que tiene la alteración de los datos en el resultado de una operación como un componente básico, tanto del sentido numérico como

[66] Se conserva aquí la traducción literal de la expresión "relative effect of operations", aunque en este trabajo se utiliza la expresión "efecto de la alteración de los datos en el resultado", que resulta más clara que "el efecto relativo de las operaciones" y coincide también, como se ha señalado, con lo que Behr (1989) llama "variabilidad".

de las tareas de estimación. Esta coincidencia es la responsable de que se utilicen ítems del mismo tipo en instrumentos (tests y entrevistas) pertenecientes a estudios sobre sentido numérico e investigaciones sobre estimación en cálculo. Por ejemplo, Reys y Yang (1998), Shull (1998) y Yang (1995), han utilizado, en las pruebas diseñadas para caracterizar el sentido numérico de los participantes en sus estudios, ítems en los que se evalúa el conocimiento que tienen los sujetos del efecto relativo de las operaciones. Un ejemplo de este tipo de ítems es el siguiente1:

> Sin realizar un cálculo exacto, señala la mejor estimación para $72 \times 0{,}025$
> mucho menor que 72
> un poco menor que 72
> un poco mayor que 72
> mucho mayor que 72

Schoen, Blume y Hart (1987) y Schoen, Blume y Hoover (1990) utilizan en sus tests de estimación ítems planteados con distintos formatos. Uno de los formatos utilizados es el de "número de referencia". En este tipo de ítems no se pide al sujeto que realice una estimación sino que, como en el ejemplo anterior, solamente se debe valorar si el resultado de una operación es mayor o menor que una cantidad dada. Por ejemplo, uno de los ítems es el siguiente2:

> ¿Es 521×29 mayor o menor que 18000?
> Mayor, porque 521×29 es mayor que 500×20
> Mayor, porque 521×29 es mayor que 500×30
> Menor, porque 521×29 es menor que 600×30
> Menor, porque 521×29 es menor que 500×40

En ambos casos, se debe responder a los ítems utilizando el conocimiento sobre el efecto que tiene la alteración de los datos en el resultado. En el primer ejemplo, la respuesta será utilizada para evaluar el sentido numérico de los sujetos y en el segundo para valorar su habilidad de estimar.

4.5. Relaciones entre el conocimiento conceptual y procedimental en tareas de estimación en cálculo

En la realización de tareas de estimación aparecen involucrados gran cantidad de conocimientos que funcionan como requisitos previos. Sowder y Wheeler (1989) han realizado un análisis pormenorizado de estos "componentes de la estimación"1. Entre los componentes conceptuales, estas autoras citan el conocimiento de que una estimación es un valor aproximado, la aceptación del uso de varias estrategias y distintos resultados al estimar, el conocimiento de las propiedades de las operaciones y de que modificar los números puede cambiar el resultado de un cálculo. Entre los componentes procedimentales se pueden citar las estrategias de cálculo mental -que incluyen las operaciones con potencias de diez- y las estrategias de estimación (como el redondeo, el truncamiento, el uso de números compatibles, etc.).

Estos conocimientos no se utilizan de manera independiente en la realización de las tareas de estimación sino que aparecen interconectados. Una conexión adecuada entre el conocimiento conceptual y procedimental debería favorecer, por ejemplo, que el conocimiento conceptual ejerza sobre los procedimientos una función de "control ejecutivo", descrita por Hiebert y Lefevre (1986):

> El conocimiento conceptual, si aparece ligado con un procedimiento, puede dirigir su selección y uso y puede evaluar la razonabilidad del resultado alcanzado mediante el procedimiento. Con vistas a la selección, el conocimiento conceptual sirve a) como una ayuda en la elección de los procedimientos apropiados... y b) como una fuerza que desanima la

> selección de procedimientos inaceptables. (p. 12)

> Una segunda función del conocimiento conceptual relacionada con el control ejecutivo consiste en dirigir los fines del procedimiento. El conocimiento conceptual satisface esta función desempeñando el papel de una validación crítica... Juzga la razonabilidad de la respuesta; controla si la respuesta “tiene sentido”. (p. 13)

Schoen y otros (1987) advierten del peligro que supone la falta de una conexión adecuada entre la estimación y el conocimiento conceptual. Para ellos, la mayor parte de los alumnos ven la estimación como un proceso equivalente a redondear los números, según las reglas estándar del redondeo, y realizar un cálculo mental con los números redondeados. Los autores piensan que esta manera de entender la estimación puede conducirnos a un aprendizaje memorístico de la misma, que no favorezca el desarrollo de la comprensión de conceptos.

En la revisión realizada de antecedentes del problema, hay ejemplos muy claros de esta ausencia de conexión entre el conocimiento conceptual y el procedimental en la realización de tareas de estimación. Por ejemplo, Levine (1980) analiza los tipos de errores cometidos por alumnos universitarios en tareas de estimación en cálculo. En algunos de estos errores se pusieron de manifiesto dificultades en la conceptualización de la multiplicación y de la división. Del análisis de las respuestas dadas por los alumnos se obtienen los siguientes resultados:

> Para el ítem 64.6×0.16 un 37% de las estimaciones dadas fueron mayores que 64.6. Para 424×0.76 un 24% de las respuestas fueron mayores que 424. En el ítem 187.5×0.06 un 25% de las estimaciones fueron mayores que 187.5. Un 49% de las estimaciones dadas para 0.47×0.27 fueron

> mayores que 0.26 o 0.47. (p. 96)

Levine (1980) atribuye este tipo de errores a que los alumnos están tan concentrados en el proceso de producir una estimación que no son capaces de utilizar el conocimiento que tienen (en caso de que lo tengan) sobre el efecto de multiplicar un número por una cantidad menor que uno para evaluar la razonabilidad de sus estimaciones. Se detecta aquí una falta conocimiento conceptual, o de "control ejecutivo" del mismo sobre los procedimientos, que posibilita que se produzcan estos resultados carentes de sentido.

En algunos casos, los alumnos realizaban una operación con números decimales "quitando" las comas decimales y a continuación olvidaban restablecer el orden apropiado del resultado colocando la coma en el lugar apropiado. En otras ocasiones:

> Más que olvidarse de poner la coma al final, los alumnos pensaban equivocadamente que habían realizado una transformación en los números que ya había tenido en cuenta las comas decimales. Por ejemplo, un alumno utilizó la siguiente de estrategia: "0.47 × 0.26. Quitamos ambos decimales y queda 47 × 26... 50 por 25... 125 y un 0. Luego son 1250". (p. 89)

Este tipo de procedimiento incorrecto puede estar relacionado con el algoritmo habitual de división de números decimales, en el que las comas decimales se quitan tanto del dividendo como del divisor para dar lugar a una división equivalente. Se produciría aquí una falta de comprensión de cómo influye la modificación de los datos en el resultado de un cálculo. Esto reflejaría un conocimiento inadecuado del efecto relativo de las operaciones, siguiendo el planteamiento de Behr (1989), y también una ausencia de sentido numérico.

Levine (1980) encontró también otros tipos de errores asociados con las operaciones en las que aparecían números menores que uno. Por ejemplo, al utilizar la estrategia de sustituir un número decimal por una fracción un alumno realizó la siguiente estimación: "943 ÷ 0.48. Es la mitad de 900. 450. Bien, 470" (p. 92). En varios alumnos se encontró la idea equivocada de que se "debe dividir siempre un número por otro menor". Levine propone el ejemplo de "uno de los participantes [que] invirtió los papeles del dividendo y del divisor al dar su estimación para 0.76 ÷ 0.89, pero realizó la división correctamente cuando estimaba 943 ÷ 0.48" (p. 95). Todas estas descripciones de estimaciones son una muestra de la existencia de ideas equivocadas y de la influencia de las mismas en la producción de estimaciones incompatibles con una comprensión adecuada de las operaciones. A veces también ejemplifican cómo los alumnos, en caso de tener un conocimiento adecuado, no lo utilizan en la realización de sus estimaciones.

Por otra parte, y en el extremo opuesto, se encuentra un ejemplo propuesto por Dowker (1992) que, utilizando el test de Levine (1982), encontró en su investigación, sobre identificación de estrategias de estimación utilizadas por matemáticos profesionales, un participante que utilizó como estrategia para estimar 0.76 ÷ 0.89: "el conocimiento de que dividir un número por un número racional un poco menor que uno, produce un resultado un poco mayor que el número de partida. Así, 0.76 ÷ 0.89 será un poco mayor que 0.76" (p. 47). Este es un ejemplo de cómo puede utilizarse un conocimiento adecuado del efecto que tiene la alteración de los datos en el resultado de una operación, para producir una estimación sin necesidad de realizar un cálculo.

Capítulo 3. La estimación en cálculo: Revisión de la literatura

En este capítulo, se realiza una revisión completa de los trabajos de investigación sobre estimación que se han realizado hasta la fecha. Esta revisión está basada en la realizada en De Castro (2002), aunque ha sido notablemente ampliada para cubrir los periodos anterior al 1976, etapa considerada como la 'prehistoria' de la investigación sobre estimación, y posterior al 2002, que quedaron fuera de la revisión hecha en el citado trabajo.

Existen varias revisiones[67] de investigaciones sobre estimación en cálculo en la literatura (Benton, 1986; De Castro, 2002; Reys, 1993; Segovia, 1997; Segovia[68] y Castro, 2009; Segovia y De Castro, 2007; Siegler y Booth, 2005; Sowder, 1992; y Sowder y Wheeler, 1989). Considero la revisión hecha en De Castro (2002) bastante completa, como punto de partida, para lo que he llamado "el periodo dorado de la investigación sobre estimación". Un objetivo del presente trabajo es ampliar y completar dicha revisión, añadiendo algunas investigaciones y referencias a la estimación en trabajos anteriores a 1976. También he actualizado la revisión llegando hasta el 2011.

He distinguido 3 periodos en el tiempo: Primero, la estimación hasta el año

[67] Se han puesto las revisiones en orden cronológico, lo que en este caso parece relevante, pues varias de ellas citan, y se apoyan en, trabajos de revisión anteriores.

[68] Esta es la última revisión recogida en el presente trabajo. Se trata de una recopilación en la que se describen los trabajos de investigación sobre estimación, que se vienen desarrollando desde 1985, dentro del Departamento de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada.

1976. En este primer periodo apenas hay estudios sobre estimación. Esta etapa podría considerarse la 'prehistoria' de la investigación sobre estimación. En el año 1976 sucede un acontecimiento que va a suponer el inicio de un nuevo periodo en la estimación: El trabajo[69] de Carpenter, Coburn, Reys y Wilson (1976). Además, este trabajo coincide con las tesis doctorales de Hall (1976) y Sutherlin (1976), a las que, poco más tarde, se añadirá la tesis de Fesharaki (1978) y el trabajo de Trafton[70] (1978). Aquí comienza el "periodo dorado de la investigación sobre estimación", que abarca hasta 1994, fecha de la publicación del libro "Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States" (Reys y Nohda, 1994), trabajo en el que participan Reys, Reys, Schoen y Sowder, y que marca prácticamente el abandono de estos tres grandes autores[71] del campo de investigación sobre estimación en cálculo.

A partir de 1994, hasta la actualidad, comienza un nuevo periodo caracterizado por la *polarización* de las investigaciones sobre estimación y por su *dispersión*.

[69] Este es un trabajo publicado en una revista de divulgación (Arithmetic Teacher) y, sin embargo, muy citado en investigaciones posteriores (Se trata de unas 'notas' sobre la evaluación nacional en Matemáticas en los Estados Unidos de América). Tiene el acierto de avisar, en una revista de gran difusión, y por autores de prestigio, sobre la necesidad de poner más atención y dedicar más investigaciones a la estimación. Buchanan (1978) señala la importancia de este trabajo de Carpenter y otros (1976) al explicar que pertenece a una serie de informes sobre las destrezas más importantes enseñadas por entonces en la escuela. Este autor señala, con cierta ironía, que si se hubiera dado a la estimación la importancia que realmente tenía en la práctica escolar, el informe no habría "merecido más de un párrafo" (p. 3). Además, es el primer trabajo sobre estimación de Robert Reys, uno de los grandes impulsores de la investigación en estimación a lo largo de los 20 años siguientes (Quizá aquí resida el aspecto de más relevancia del trabajo).

[70] Colaborador habitual de Robert Reys en los años siguientes en sus trabajos sobre estimación.

[71] Realmente, Robert Reys ha seguido investigando indirectamente sobre estimación, dentro del marco más amplio del 'Sentido Numérico'. De hecho, el trabajo Alajmi y Reys (2007) es una investigación sobre el concepto de 'razonabilidad', estrechamente ligado a la estimación.

Por un lado, el trabajo de Dowker[72] (1992) marca el inicio de una serie de trabajos realizados por psicólogos (Dowker, Hogan, Lemaire y Siegler, en especial) que, si bien tienen interés para la Educación Matemática, suponen una *psicologización* de la investigación en estimación, cambiando notablemente los objetivos y enfoques de investigación. Por otra parte, se producen, dentro del área de Didáctica de la Matemática una serie de investigaciones sobre estimación caracterizada por la dispersión de los trabajos, muchos de ellos realizados fuera de los Estados Unidos de América, e inspirados en los trabajos de la anterior “época dorada”, liderada por Reys, Reys, Schoen y Sowder.

1. LA ESTIMACIÓN EN CÁLCULO, ANTES DE 1976

En 1978 Buchanan remarcaba que “la enseñanza de la estimación no es algo que se haya intentado y haya fallado. No se ha intentado de forma sostenida o sistemática” (p. 2). En esta situación, no es raro que las investigaciones sobre estimación, en el periodo anterior al año 1976, sean escasas.

Antes del año 1976, existen ya referencias a la estimación de autores de prestigio aunque pocas investigaciones sobre estimación. Por ejemplo, Thorndike y otros (1924), en el epílogo de su “Psicología del Álgebra”, dedica un apartado al razonamiento matemático que se pone de manifiesto en las adivinaciones (conjeturas) afortunadas.

> Para el psicólogo parece que el procedimiento de los alumnos más capaces es, y debería ser para todos los alumnos, la adivinación, o la formulación de una hipótesis, y la modificación de tu conjetura o hipótesis hasta que se

[72] Lo considero un trabajo importante de referencia y lo he elegido como inicio de este último periodo por estar publicado en el “Journal for Research in Mathematics Education”, una de las revistas más importantes en el área de Didáctica de la Matemática.

> acierte en la conjetura, en casos tales como la búsqueda de las cifras del cociente en la división larga en aritmética... Uno tiene la impresión, a partir de los libros de texto, de que los profesores de matemáticas consideran el proceso mental de formular una hipótesis afortunada como una aventura dudosa, indecorosa si no inmoral y, en dignidad, muy por debajo de probar que una hipótesis es correcta (pp. 438-439).

Aunque Thorndike no utiliza directamente la palabra "estimación", sus palabras parecen referirse indirectamente a la misma, pues propone un ejemplo clásico de aplicación de la estimación dentro del cálculo escrito: La determinación de las cifras del cociente en una división larga.

Algunos especialistas en estimación (Hall, 1976; Rubenstein, 1982) atribuyen a Polya (1957) la paternidad de conceptos relacionados con la estimación. Por ejemplo, ven en la 'visión retrospectiva' de Polya (1957/1995, p. 53) un antecedente del concepto de 'evaluación de la razonabilidad' de una estimación, aplicado a la resolución de un problema. Hall (1979, pp. 5-6) sostiene que la elaboración de conjeturas (guess[73]) de Polya (1957/1995, p. 89-90) puede relacionarse con la producción de una estimación de la solución de un problema, con el fin de favorecer la reflexión sobre el mismo y orientar el proceso de resolución.

También hay algunos trabajos de investigación en esta época. Por ejemplo, Dickey (1934) estudia si la práctica en estimación puede mejorar el rendimiento en resolución de problemas[74]. Para ello, propone una intervención consistente en 5 minutos diarios de práctica de estimación, durante 50 días seguidos de clase, con 198 alumnos de sexto de primaria, con el fin de valorar

[73] El término 'guess' del original (Polya, 1957) es traducido como 'hipótesis' en Polya (1995). Aquí lo veo más cercano a 'conjetura'.

[74] Las tres investigaciones anteriores que Dickey (1934) cita, no ofrecen resultados concluyentes acerca del efecto de la práctica de la estimación.

su efecto en la resolución de problemas. El grupo de control trabajaba 15 minutos diarios en resolución de problemas y el experimental dedicaba 5 minutos a la estimación previa de la solución de los problemas y 10 a la resolución de los problemas para los que se había dado la estimación. Ambos grupos aumentaron notablemente su rendimiento en resolución de problemas sin hallarse diferencias significativas entre ellos. El autor concluye que en esta edad, y con respecto al objetivo de mejorar el rendimiento en resolución de problemas, "la práctica de estimar las soluciones de los problemas puede que no sea de especial valor" (pp. 29-30). Se acaba conjeturando que la práctica de la estimación puede resultar más beneficiosa con alumnos de mayor edad, que tengan una mayor "madurez de juicio", variable que al autor le parece fundamental.

Nelson (1966) se plantea si la enseñanza de la estimación puede mejorar el rendimiento en aritmética de alumnos de cuarto y sexto grado[75]. Participan 541 alumnos de cuarto y 579 de sexto, distribuidos en 9 grupos de control y 12 grupos experimentales en tres colegios. En los grupos experimentales se produce durante todo el curso enseñanza de la estimación. La estimación se entiende como cálculo con números redondeados. Se dan orientaciones generales a los maestros sobre técnicas de estimación. En todos los grupos de cada curso se utilizaba el mismo libro de texto. Se elabora una guía para los maestros en la que se indica cómo se puede integrar la estimación en cada actividad propuesta en el libro de texto. Esto se hace página a página. Por ejemplo:

> Página 242. Al estimar en estos problemas, explica a los niños que 5/12 + 1/12 va a estar cerca de ½ porque 5/12 está cerca de ½.
>
> Página 243. En el número 1 de la muestra: 5/6 + 5/6, estímalo como 1 + 1 y di que la respuesta tiene que estar cerca de 2. Continúa ayudando a los

[75] Equivalentes a cuarto y sexto de Educación Primaria en el sistema educativo español.

> niños a redondear al número natural más próximo para estimar sus respuestas. (Nelson, 1966, p. 82)

Los alumnos realizan un test de estimación compuesto por 40 ítems (con problemas y cálculos descontextualizados) diseñado para la investigación y se entrevista a 60 de ellos, 30 de los grupos de control y 30 del experimental. Al finalizar el curso, los participantes pasan el *Test de Rendimiento en Aritmética de Standford,* que contiene partes dedicadas al *cálculo*, *conceptos* relacionados con la aritmética y *aplicaciones* de la aritmética. Los alumnos de sexto de los grupos experimentales tuvieron un mayor rendimiento en conceptos y aplicaciones de la aritmética que en el grupo de control. Por el contrario, los alumnos de cuarto del grupo de control mejoraron significativamente a los del grupo experimental en cálculo. La autora deduce de estos resultados que la enseñanza de la estimación resulta más efectiva en sexto por la mayor madurez de los alumnos. En el test de estimación, tanto los alumnos de sexto como los de cuarto del grupo experimental tuvieron un rendimiento significativamente superior a los participantes del grupo de control.

Ibe (1971) compara dos métodos para la enseñanza de una unidad (con 5 días de duración) sobre medida de ángulos en sexto de Educación Primaria. En el grupo experimental, se pide a los alumnos que den una estimación de la medida en grados de los ángulos, antes de medirlos con un transportador. En el grupo de control, se miden directamente los ángulos con el transportador. El tratamiento resultó ser efectivo, tanto en la habilidad de estimar como en el rendimiento de los alumnos en el tema. Estos resultados continuaron siendo significativos cuatro semanas después de haber concluido el periodo de instrucción. Se encuentra una correlación significativa de la habilidad de estimar con la capacidad intelectual general, la destreza en el manejo de números, la habilidad espacial y la flexibilidad en la clausura perceptual.

En la investigación de Paull (1971), participan 196 alumnos pertenecientes a 12 clases de undécimo grado[76] a los que se administra 6 tests[77]: Estimación de áreas, estimación de longitudes, estimación en cálculo, rapidez de cálculo[78], resolución de problemas y operaciones mediante ensayo y error[79], y un test de resolución de problemas[80]. En dicho estudio se encuentra que: Se produce una correlación significativa entre la habilidad de estimar cálculos y la estimación de áreas ($r = 0{,}35$; $p < 0{,}001$) y entre la estimación de longitudes y la de áreas ($r = 0{,}40$; $p < 0{,}001$), pero no hay correlación significativa entre la estimación en cálculo y la estimación de longitudes ($r = 0{,}03$); hay correlación positiva entre la habilidad de estimar y la habilidad matemática ($r = 0{,}50$; $p < 0{,}001$) y entre la habilidad de estimar y la habilidad verbal ($r = 0{,}53$; $p < 0{,}001$); no hay correlación significativa entre la estimación de longitudes y la habilidad matemática ($r = 0{,}05$) ni con la habilidad verbal ($r = -0{,}06$); se encuentra una correlación positiva significativa ($r = 0{,}52$; $p < 0{,}001$) entre la estimación en cálculo y la resolución de cálculos y problemas mediante ensayo y error y entre la estimación en cálculo y la rapidez de cálculo ($r = 0{,}43$; $p < 0{,}001$).

Hay otras investigaciones[81] sobre estimación anteriores a 1976 de las cuales

[76] Equivalente en el sistema educativo español a primero de Bachillerato.

[77] También se utilizaron las calificaciones de los alumnos en habilidad en matemáticas y habilidad verbal, procedentes del PSAT (Preliminary Scholastic Aptitude Test), uno de los tests más importantes en Estados Unidos, dentro de la Educación Secundaria.

[78] Test compuesto por 32 multiplicaciones (de dos números con 2 dígitos cada uno) a realizar en 5 minutos.

[79] Tres ejemplos (de los 6 ítems totales) del test de ensayo y error eran: (1) Encuentra una solución entera de $x^3 - 30x - 133 = 0$; (4) Encuentra la raíz cúbica de 117649; (5) Entre los papeles del granjero, se ha encontrado un recibo: 24 docenas de huevos… $_2.4_. El primer dígito y el último aparecen borrados. ¿Cuál fue el precio, p, de una docena de huevos? En las hojas de respuesta de cada ítem, había espacio para realizar 9 ensayos.

[80] Compuesto por 8 problemas aritméticos verbales.

[81] Estas investigaciones se encuentran referenciadas en los trabajos de tesis de Hall (1976), Levine (1980) y Rubenstein (1982); no han sido consultadas directamente para este trabajo.

ofrezco, a continuación un breve resumen.

Moser (1949) realiza un estudio sobre la estimación de la primera cifra del cociente en una división por números de dos cifras. El autor estudia las dos reglas siguientes[82]:

> Regla 1: Si la cifra de las unidades del divisor es menor que 6, divide la primera cifra (o las dos primeras cifras) del dividendo por la primera cifra del divisor para probar [el resultado de esta división] como cifra del cociente. Si no es la cifra correcta del cociente, inténtalo sucesivamente con los siguientes números menores, hasta que aparezca la cifra adecuada para el cociente.
> Regla 2: Si la cifra de las unidades del divisor es 6 o mayor, aumenta en 1 la cifra de las decenas. Entonces divide la primera cifra (o las dos primeras cifras) del dividendo por esta primera cifra aumentada del divisor para probar como cifra del cociente. Si esto no nos da el cociente correcto, inténtalo sucesivamente con los siguientes números mayores, hasta que encuentres la cifra correcta del cociente[83]. (p. 515)

Faulk (1962) estudia los procesos de estimación de 52 alumnos de quinto grado [84], a los que no se había enseñado estimación, al pedírseles que estimaran (y explicaran cómo lo habían hecho) la solución del siguiente problema: "Si un galón de gasolina cuesta 26 céntimos, ¿cuánto costarán 15 galones?"

[82] Estas reglas pueden, de forma sencilla, adaptarse para la enseñanza de la estimación. Obsérvese que no coinciden con las reglas del redondeo estándar pues, cuando la segunda cifra es un 5, la primera cifra permanece inalterada. Es interesante, también, ver que en la regla 1 se puede producir una sobrestimación o una estimación adecuada y, en el segundo, da lugar a una subestimación o una buena estimación. Por otra parte, Hall (1976) informa de varias investigaciones, en torno a 1950, en Estados Unidos, en que se discute cuál es la mejor aproximación a la división por números de dos cifras.

[83] Esta cita puede consultarse en: http://www.jstor.org/pss/998724 (consulta hecha el 27-08-09).

[84] Equivalente a quinto de Educación Primaria.

La estrategia más frecuente fue redondear 26 a 30 y multiplicar. Otras estrategias fueron: redondear a 25 y multiplicar, redondear 26 a 20 y 15 a 10 (es una estrategia de truncamiento), y redondear 26 a 30 y 15 a 20 y multiplicar. Este estudio tuvo el interés de ser uno de los primeros en informar sobre las estrategias de estimación empleadas por los estudiantes, aunque presenta limitaciones en la descripción de la metodología y por emplearse una única tarea de estimación en el estudio.

2. El periodo 'dorado' en la investigación sobre estimación en cálculo (1976-1994): Los trabajos de Reys, Sowder y Schoen

Los trabajos que revisaré en esta sección aparecen clasificados en los siguientes apartados: La habilidad de estimar y los factores relacionados con el rendimiento en estimación, las estrategias y procesos de estimación, la enseñanza de la estimación en cálculo, la evaluación de la estimación, y el desarrollo de conceptos y destrezas relacionados con la estimación[85].

2.1. La habilidad de estimar y los factores relacionados con el rendimiento en estimación

En la literatura sobre estimación, hay diversos trabajos en los que se estudia la posible influencia de diversas variables en el rendimiento de los alumnos en tareas de estimación[86]. Por ejemplo, Rubenstein (1985a) considera las variables:

[85] Este apartado es una versión reformada de la revisión hecha en De Castro (2002). Se ha seguido la misma clasificación de entonces para las investigaciones sobre estimación.

[86] En este primer apartado aparecen mezclados estudios de tipo correlacional, muy habituales en la investigación sobre estimación, en los que se trata de valorar la relación entre la estimación y otras destrezas y, por otra parte, diseños factoriales en que el rendimiento en

formato de respuesta; que puede ser abierta, razonable o no-razonable, número de referencia y orden de magnitud; el formato de la pregunta, con cálculos aplicados o cálculos descontextualizados; el tipo de operación, de suma, resta, multiplicación o división; y el tipo de número, ya sea entero o decimal. También se interesa por la posible diferencia de rendimiento entre sexos. En su investigación, participan 309 alumnos de octavo grado[87] (114 chicas y 165 chicos). Para la investigación, Rubenstein (1985a) diseña un test con 64 ítems (con 16 ítems pertenecientes a cada formato de pregunta). Entre los resultados de este trabajo, se destaca que las cuestiones de respuesta abierta resultaron las más difíciles; los cálculos descontextualizados, más difíciles que los aplicados; los ítems con números decimales, más difíciles que aquellos con números enteros; las divisiones, más difíciles que las multiplicaciones; y multiplicaciones y divisiones, más difíciles que sumas y restas. En cuanto a la variable 'sexo', y especialmente en el formato de respuesta abierta, los alumnos tuvieron un rendimiento mayor en las tareas de estimación que las alumnas.

En otro trabajo, centrado en el estudio de la relación entre el sentido numérico y la habilidad de estimar, Lynchard (1989) trabaja con una muestra, compuesta por 86 alumnos de sexto grado. Para evaluar el sentido numérico, fue preciso identificar sus posibles componentes, para después evaluar la relación de cada componente con la habilidad de estimar.

Los alumnos realizan una prueba de estimación y una entrevista. El autor llega a las siguientes conclusiones: (1) el rendimiento en matemáticas de los alumnos puede ser un indicador fuerte del sentido numérico, (2) si se utiliza solamente el rendimiento de los alumnos en cada uno de los componentes, se obtendrá un indicador débil para el sentido numérico, (3) tanto las relaciones espaciales

estimación puede variar en función de variables de la tarea (tipo de operación, tipo de número, etc.) o de la respuesta (como el formato de respuesta: opción múltiple, respuesta abierta, etc.).

[87] Con una edad equivalente a la de segundo de Educación Secundaria Obligatoria, en el sistema educativo español.

como la actitud hacia las matemáticas no parecen ser buenos indicadores del sentido numérico, (4) la habilidad de cálculo no es un indicador preciso para la habilidad en estimación en cálculo, y (5) los buenos estimadores dominan mucho mejor las destrezas que constituyen prerrequisitos para la estimación que los malos estimadores, pero ni los buenos ni los malos estimadores demostraron una comprensión adecuada sobre la estimación.

Kinkade (1991) examina el rendimiento de alumnos de octavo grado en los ítems de estimación y aproximación del SIMS (Segundo Estudio Internacional de las Matemáticas). El estudio describe la relación que hay entre las actitudes de los profesores y las de los alumnos sobre las matemáticas en general y sobre la estimación y las relaciones entre estas actitudes y el rendimiento de cada clase en los trece ítems de estimación o aproximación del SIMS. Los alumnos estaban agrupados en clases según su rendimiento en matemáticas. Había clases de "recuperación", clases con un nivel medio, y clases con alumnos "avanzados". En las clases de recuperación hubo diferencias significativas en las puntuaciones dependiendo de la concepción que tenían los maestros de las matemáticas como procedimiento. En las clases con nivel medio hubo diferencias significativas atendiendo a la percepción de los maestros sobre la dificultad de los ítems (esto es, a la estimación que hacían los maestros sobre el porcentaje de alumnos de su clase que responderían correctamente al ítem). Las clases avanzadas fueron las únicas en las que se encontraron diferencias significativas en las puntuaciones atendiendo a las variables independientes y al nivel de dificultad de los ítems del test. Los resultados sugieren que los maestros deben recibir una formación más profunda sobre estimación y sobre procesos cognitivos en general y que debe revisarse la formación de grupos de alumnos atendiendo al rendimiento de los mismos.

Gliner (1991) analiza distintas variables que pueden influir en el rendimiento en estimación en cálculo. Participan 141 maestros en formación que realizan un test con veinticinco problemas de estimación. Las variables más importantes resultaron ser la nota media de los alumnos en la escuela, los años de estudio de matemáticas y manifestar que disfrutaban con las matemáticas. El mejor predictor de éxito en la prueba de estimación fue la respuesta a la pregunta: ¿Se te dan bien las matemáticas? Los alumnos obtuvieron mejores resultados en cálculos aplicados que en cálculos directos. Este resultado parece entrar en contradicción con otros hallados en el campo de la resolución de problemas.

Mottram (1996) se plantea el problema de la influencia del contexto en la habilidad de estimar y en la elección y uso de estrategias de estimación. Para ello elabora pruebas de estimación con tres formatos de pregunta distintos: cálculos directos -descontextualizados-, cálculos en los que se da un contexto y problemas verbales. Participan en la investigación 236 alumnos de séptimo grado. Se eligió una muestra estratificada de 60 alumnos que fueron entrevistados para ver qué estrategias habían utilizado para hacer las estimaciones. Los alumnos obtuvieron mejores resultados en los cálculos con contexto que en el formato numérico y en el de problemas verbales. El redondeo a números enteros y la imitación de algoritmos escritos fueron las estrategias más utilizadas en el formato numérico y en el de problemas verbales respectivamente. El redondeo a decenas, a números enteros y el uso de números compatibles fueron utilizados con la misma frecuencia en los cálculos con contexto. El redondeo a mitades y "otras estrategias" fueron más utilizados en los cálculos con contexto que en el formato numérico y en el de problemas verbales. Los alumnos con mayor habilidad de estimar utilizaron mayor número de estrategias distintas y utilizaron estas en mayor número de ocasiones.

Albertson (1996) compara el rendimiento en estimación de un grupo de alumnos de educación secundaria con problemas de aprendizaje en matemáticas con otros dos grupos de control. Pasa a todos los alumnos una prueba de estimación y realiza entrevistas para analizar las estrategias utilizadas en la producción de las estimaciones. Observa diferencias en la precisión de las estimaciones, en los niveles de dificultad de los problemas planteados y en el uso de estrategias. En el grupo de alumnos con problemas de aprendizaje las estimaciones estaban mucho más alejadas de la respuesta exacta y tuvo una gran influencia el tamaño de los números en la dificultad de las tareas de estimación. Al analizar las estrategias utilizadas por los alumnos de este grupo se encontraron discrepancias entre la de elección de estrategias y las respuestas numéricas. Los alumnos con problemas de aprendizaje en matemáticas describían estrategias de estimación sencillas pero sus respuestas numéricas no coincidían con las que se obtendrían al aplicar correctamente las estrategias descritas debido a errores de cálculo.

Reys y Yang (1998) estudian la relación entre la habilidad de hacer cálculos escritos y el sentido numérico en alumnos de Taiwan (115 de sexto grado y 119 de octavo grado). Para ello utilizan dos pruebas: una de cálculo escrito y otra para medir el sentido numérico de los alumnos. Dentro de la prueba, de 40 ítems, utilizada para medir el sentido numérico se utilizaron algunos ítems sacados de pruebas de estimación en cálculo. Se observa un gran rendimiento en los alumnos de Taiwan en las pruebas de cálculo escrito, pero estos alumnos tienen grandes dificultades para afrontar problemas parecidos a los que se presentan en las pruebas de cálculo escrito cuando se les pide que utilicen algún procedimiento alternativo (como la estimación) en el que se manifieste su sentido numérico. Se encontraron muy pocas evidencias de la utilización de componentes identificables del sentido numérico, como el uso de puntos de referencia (que también es una estrategia de estimación).

Hanson y Hogan (2000) estudian la habilidad en estimación de un grupo de 77 alumnos universitarios (con edades comprendidas entre 18 y 21 años). Estos alumnos realizan un test de estimación con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. En estas operaciones aparecen números enteros, decimales, porcentajes y fracciones. Los alumnos obtienen buenos resultados en las estimaciones de sumas y restas con números enteros y tienen los peores resultados en la multiplicación y división de números decimales y en la resta de fracciones. En una segunda fase de la investigación se selecciona una muestra de 45 alumnos con niveles alto, medio y bajo en habilidad de estimar. Se categorizan las estrategias de estimación utilizadas por estos alumnos al analizar los protocolos de "pensar en voz alta" encontrando 23 estrategias distintas de estimación, trece de las cuales no aparecían en anteriores investigaciones.

2.2. Estrategias y procesos de estimación

Reys y otros (1980, 1982[88]) desarrollaron un test para medir la habilidad de estimar. Utilizaron este test para seleccionar a los mejores estimadores de entre 1200 sujetos que tomaron parte en la investigación. Participaron alumnos desde séptimo a 12º grado y un grupo de adultos. Se entrevistó a 59 de los mejores estimadores para identificar los procesos mentales que utilizaban cuando hacían estimación en cálculo. Las entrevistas revelaron el uso de muchas estrategias diferentes de estimación. Se describieron las características de los buenos estimadores y se propuso un modelo para los procesos de estimación. Este modelo postula la existencia de tres procesos cognitivos de alto nivel (reformulación, traducción y compensación) que se manifiestan en las estrategias de estimación.

Sowder J. T. (1984) entrevista a 26 alumnos de sexto, séptimo, octavo y noveno grado (con edades comprendidas entre once y quince años). Utiliza en su entrevista doce problemas representativos de los ítems del NAEP[89]. En ellos

---

[88] Este artículo es el informe de investigación correspondiente al estudio realizado en 1980.

[89] National Assessment of Educational Progress (Evaluación Nacional del Progreso Educativo)

aparecen ítems de respuesta abierta y de elección múltiple; cálculos directos y aplicados; ítems de suma, multiplicación y división; y números enteros, decimales y fracciones. Se pide a los alumnos que expliquen la estrategia que han utilizado para dar sus estimaciones. Se clasifican las explicaciones como aceptables o inaceptables. El número de explicaciones inaceptables es muy alto incluso en los ítems de elección múltiple en los que se da una respuesta correcta. Los alumnos tienden a utilizar estrategias como el redondeo de forma mecánica. Se concluye que la habilidad de estimar está estrechamente relacionada con el sentido numérico (ausente en gran parte de las explicaciones dadas por los alumnos durante la entrevista).

Wyatt (1986) se plantea en su trabajo los tres objetivos siguientes: (1) identificar los procesos utilizados para formular estimaciones, (2) investigar el concepto de estimación razonable, e (3) identificar criterios utilizados para determinar la razonabilidad de una estimación. Participan 130 alumnos de noveno grado. A estos alumnos se les administra un test con 50 ítems utilizando un ordenador. Se selecciona una muestra estratificada de 18 alumnos para las entrevistas. Se analizan los protocolos de "pensar en voz alta" de los alumnos mientras realizan las entrevistas. Se detectaron dos etapas en la producción de las estimaciones: en la primera etapa los alumnos seleccionaban números aproximados o simplemente tomaban los números del problema. En la segunda etapa, calculaban mentalmente con los números elegidos en la primera etapa. Los estimadores de mayor nivel tendían a utilizar en la primera etapa los números redondeados mientras que los estimadores de bajo nivel utilizaban los números exactos (tal como aparecían en el problema). La mayoría de los sujetos no tenían una buena comprensión del concepto de razonabilidad y no fueron consistentes en la aplicación del criterio de razonabilidad para determinar estimaciones razonables. La noción de intervalo de respuesta razonable no fue comprendida por la mayor parte de los alumnos.

Flores y otros (1990) y Reys y otros (1991) utilizan la misma metodología de investigación que se aplicó en Reys y otros (1982) con alumnos de Estados Unidos a una muestra de 177 alumnos mejicanos de 8º grado, encontrando los mismos procesos generales descritos en Reys y otros (1982). El rendimiento medio de los alumnos mejicanos fue muy bajo. Destacó la utilización de la estrategia de "uso de puntos de referencia" con la que los sujetos demostraban la comprensión que tenían de los cálculos con porcentajes.

Reys y otros (1991) seleccionan 21 alumnos de una muestra de 466 estudiantes japoneses utilizando un test de estimación. Estos alumnos seleccionados pertenecen al 5% con mejores calificaciones en la prueba. Tras realizar entrevistas a estos alumnos se encuentran los mismos procesos generales de estimación hallados anteriormente en estudiantes de Estados Unidos y México. Además, los alumnos japoneses demuestran un mayor nivel en cálculo mental que los americanos y una mayor resistencia a aceptar el error. Los alumnos japoneses tienden a aplicar mentalmente procedimientos de cálculo con papel y lápiz que interfieren en sus habilidades como estimadores.

Levine (1980, y 1982) investiga el número y los tipos de estrategias de estimación utilizados por alumnos de primer ciclo universitario y su relación con la habilidad cuantitativa y la habilidad en estimación en cálculo. Participan en el estudio 89 estudiantes. Se utilizó un test para medir la habilidad cuantitativa y otro para medir la destreza en estimación en cálculo (compuesto por 20 ítems de multiplicación y división). Además, se analizaron los protocolos de "pensar en voz alta" de todos los alumnos participantes para determinar qué estrategias habían utilizado en la producción de sus estimaciones. Se encontró que: (1) hubo diferencias significativas en la frecuencia del uso de las distintas estrategias, (2) se dio una correlación positiva significativa entre la habilidad cuantitativa y el número de estrategias utilizadas, (3) no hubo diferencias significativas en la precisión de las estimaciones según el tipo de estrategia utilizada con independencia de la habilidad cuantitativa, y (4) la correlación entre la habilidad en estimación en cálculo y el número de estrategias utilizadas con independencia de la habilidad cuantitativa no fue significativa. Aparecieron en el análisis 8 tipos de estrategias distintas. El redondeo de ambos números y la imitación del algoritmo escrito son las estrategias más utilizadas. Los mejores estimadores utilizan mayor número de estrategias mientras que los peores utilizan casi exclusivamente la imitación del algoritmo escrito. Se identificaron nueve tipos de errores en la producción de las estimaciones: realización de procedimientos incompletos, olvido de pasos intermedios, estrategia incompleta, error en el significado de la operación, en la compensación, en el redondeo y en el orden de magnitud.

Brame (1986) investiga las estrategias utilizadas en estimación en cálculo por alumnos de últimos cursos de educación secundaria calificados como "malos estimadores". Participaron 460 alumnos a los que se les administró el test de evaluación de estimación en cálculo de Reys y otros (1980). De estos alumnos, 40 fueron seleccionados para las entrevistas posteriores. Fueron utilizadas un gran número de estrategias; sin embargo, en algunas ocasiones los alumnos que no disponían de ninguna estrategia para dar una estimación intentaban realizar un cálculo exacto. Todos los alumnos menos uno utilizaron en alguna ocasión las estrategias del redondeo y truncamiento utilizando los primeros dígitos. Los alumnos con bajo rendimiento en la prueba de estimación utilizaban sobre todo la estrategia de redondeo. Estos alumnos tuvieron especiales dificultades cuando en las tareas aparecían números grandes. En conexión con este problema se encontró la dificultad de los alumnos con bajo rendimiento para trabajar con potencias de 10.

Hope y Skerrill (1987) eligen 15 alumnos que destacan en cálculo mental y otros quince con bajo rendimiento utilizando un test de cálculo mental.

Analizan las estrategias que utilizan estos alumnos y llegan a la conclusión de que los alumnos que tienen bajo rendimiento en cálculo mental suelen utilizar estrategias propias del cálculo escrito mientras que los alumnos que destacan en cálculo mental utilizan estrategias basadas en el uso de propiedades numéricas sugeridas por los factores (en el test aparecían solamente multiplicaciones). Este resultado concuerda con las investigaciones hechas sobre identificación de estrategias en buenos y malos estimadores.

Reehm (1994) examina los procesos de estimación observados en alumnos de octavo grado con distintos niveles de habilidad en estimación, al realizar problemas de estimación presentados en formato numérico y contextual. Participan 238 alumnos de octavo grado a los que se les pasa una prueba de estimación para determinar su nivel de habilidad al estimar. Se eligen aleatoriamente 14 alumnos de cada nivel (alto, medio o bajo). Cada alumno fue entrevistado dos veces utilizando en las dos entrevistas los mismos problemas presentados en cada una de ellas en un formato distinto (numérico o contextual). Los resultados encontrados fueron los siguientes: (1) Los alumnos de nivel medio y bajo dieron más respuestas aceptables en el formato numérico que en el contextual, mientras que los alumnos de nivel alto dieron más respuestas aceptables en el formato contextual, (2) El uso de números compatibles y el cambio de orden en los operandos fueron más utilizados por todos los grupos en los problemas con contexto mientras que el redondeo estándar fue más utilizado en los problemas numéricos, (3) el truncamiento fue más utilizado por los grupos bajo y medio en los problemas con contexto y por el grupo de nivel alto en los problemas numéricos, (4) la estrategia de traducción de "cambio de operación" fue más utilizada para problemas con contexto por los grupos de nivel alto y bajo, y (5) la compensación fue más utilizada en el grupo de nivel bajo en problemas numéricos en contraste con los grupos de niveles alto y medio, que la utilizaron con más frecuencia en problemas contextuales.

Siegel, Goldsmith y Madson (1982) analizan las estrategias utilizadas por 20 niños (con edades comprendidas entre los 7 y los 15 años) y 10 adultos (con edades comprendidas entre 20 y 40 años) al resolver 24 tareas de estimación en medida y estimación de cantidades discretas. Intentan validar un modelo propuesto para estos procesos de estimación y sugieren modificaciones para este modelo. Para analizar las estrategias piden a los participantes que piensen "en voz alta" mientras realizan sus estimaciones. También se pide a los alumnos que expliquen cómo han realizado sus estimaciones (después de dar cada estimación). Se hace una distinción entre la precisión y la razonabilidad de las respuestas. Se describen 9 tipos distintos de estrategias para estas tareas de estimación. Se encuentra un proceso principal en la producción de las estimaciones que es el uso de puntos de referencia (benchmarks) y otros dos procesos –descomposición y recomposición- que complementan al primero. Las estrategias y procesos encontrados encajan bastante bien dentro del modelo revisado propuesto.

Lefevre y otros (1993) diseñan su investigación para obtener datos sobre el desarrollo de los procedimientos de estimación en alumnos de Educación Primaria y en adultos. Para ello proponen una prueba, en la que hay que estimar el resultado de 24 multiplicaciones y la solución de 16 problemas de multiplicación, a una muestra formada por 56 alumnos (de cuarto, sexto y octavo grado) y 20 adultos. Se pide a los participantes que den una estimación y expliquen posteriormente el procedimiento que han utilizado para darla. Se obtienen los siguientes resultados: La precisión de las estimaciones aumenta con la edad y la precisión decrece cuando el tamaño de los números aumenta. Los adultos tuvieron la misma precisión en los ítems aplicados que en los cálculos directos. Los alumnos de 8º grado fueron más precisos en los cálculos aplicados y los alumnos de 6º grado tuvieron más precisión en los cálculos directos. La habilidad de estimar mejora con la edad. A partir de sexto grado, los alumnos parecen entender el concepto de estimación y reducen la complejidad de los problemas mediante redondeo y compensación intermedia. Los adultos tienden a dar respuestas exactas en problemas sencillos y a utilizar la compensación final. Los autores proponen un modelo para los procesos de estimación basado en el modelo de Siegler de elección de estrategias en aritmética.

Berry (1999) analiza las estrategias de estimación en cálculo utilizadas por alumnos de octavo grado empleando las entrevistas diseñadas en la investigación de Reys y otros (1980). Se observó el uso de 7 estrategias distintas al analizar los protocolos de "pensar en voz alta" de los alumnos en los ítems de cálculos directos y cálculos aplicados. Los alumnos tienden a identificar la estimación con el redondeo. El autor hizo también una revisión de libros de texto utilizados en colegios públicos para analizar la presencia de la estimación y el modo en que se enseña esta destreza en ellos. Suele recomendarse en los libros de texto el uso de 4 estrategias distintas aunque es la de redondeo la principalmente utilizada.

2.3. Enseñanza de la estimación en cálculo

Bestgen, Reys, Rybolt y Wyatt (1980) estudian las actitudes de 187 maestros en formación hacia la estimación, su rendimiento en tareas de estimación y la efectividad de la enseñanza sistemática de la estimación durante un periodo de instrucción de 12 semanas. Los alumnos fueron distribuidos en tres grupos: en el primero, la estimación se practicaba una vez a la semana realizando una serie de tareas para las que después se daban los resultados, en el segundo se enseñaron técnicas de estimación además de practicar la estimación, y en el tercero (grupo de control) no hubo enseñanza ni práctica de la estimación. Se administró a los participantes un pretest y un postest compuestos por 60 ítems en los que se pedía que se estimaran los resultados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números enteros y decimales. Los alumnos mejoraron considerablemente su rendimiento y su actitud hacia la estimación. Los ítems de suma y resta resultaron más fáciles que los de multiplicación y división. Los ítems con números decimales fueron más difíciles que aquellos en los que solo había números enteros.

Jarret (1980) realiza su investigación con 42 alumnos de quinto grado y 54 alumnos de sexto grado. En cada grado se formaron tres grupos mediante un muestreo aleatorio. En cada grupo se siguió un período de instrucción de cinco días utilizando tres metodologías distintas: en un grupo se instruyó a los niños en cálculo exacto de sumas y multiplicaciones con una metodología basada en la repetición de ejercicios utilizando un programa de ordenador, en otro grupo se enseñó a los niños a realizar estimaciones de sumas y productos mediante la repetición de ejercicios utilizando otro programa de ordenador, y en el último se produjo una enseñanza significativa de la estimación con ayuda de calculadoras. La única estrategia enseñada en los grupos que recibieron instrucción sobre estimación fue la de redondeo. Los alumnos dedicaron entre 10 y 15 minutos diarios a realizar las tareas correspondientes al período de instrucción.

Acabado el período de instrucción se pasó a los alumnos una batería de ocho tests: uno sobre estimación -con cálculos directos-, otro sobre estimación en resolución de problemas, otro sobre cálculo escrito y otro sobre resolución de problemas. Estos tests se repitieron tres semanas después de haber concluido el período de instrucción para medir la retención de los aprendizajes. Los grupos que habían recibido instrucción sobre estimación obtuvieron mejores resultados en las pruebas de estimación y utilizaron mejor y con más frecuencia la estrategia de redondeo. No se observaron diferencias significativas entre los grupos en los tests de cálculo ni en los de resolución de problemas. En las pruebas que se realizaron inmediatamente después del periodo de instrucción sobre estimación en resolución de problemas, los alumnos que habían recibido una enseñanza significativa de la estimación obtuvieron mejores resultados.

Schoen y otros (1981) llevan a cabo dos estudios con alumnos de Educación Primaria para ver si la enseñanza de la estimación mejora el rendimiento de los alumnos en estimación, en cálculo escrito y en resolución de problemas. En el primer estudio, 42 alumnos de cuarto grado aprenden durante dos semanas (en cinco sesiones de 45 minutos de duración) a estimar los resultados de sumas y multiplicaciones de números enteros. Se enseñan las estrategias de redondeo y operación frontal. Se administra a estos alumnos cuatro tests: uno de cálculo exacto, otro de resolución de problemas, otro de estimación y otro para conocer los procesos de estimación utilizados por los alumnos. En el segundo estudio participan 100 alumnos de quinto y sexto grado a los que se divide en cuatro grupos. Hay un periodo de instrucción sobre estimación en cada uno de estos grupos, en cinco sesiones de 15 minutos cada una. Se administra, al finalizar el periodo de instrucción, una batería de ocho tests.

Todos estos métodos resultan efectivos al ser medidos inmediatamente utilizando postests. Los alumnos de cuarto, quinto y sexto grado llegaron a ser mejores estimadores en un corto periodo de tiempo y además utilizaron estrategias válidas de estimación. Los alumnos siguieron manteniendo buenos resultados después de haber pasado tres semanas desde el final del período de instrucción. Además, se llega a la conclusión de que, cuando la enseñanza de la estimación es significativa, y no solo memorística, la habilidad de estimar puede transferirse a la estimación en resolución de problemas. Por el contrario, no hay evidencia de que una enseñanza basada en la práctica y la repetición (que no sea significativa) conduzca a obtener mejores resultados en cálculo escrito o en resolución de problemas.

Levin (1981) elabora una serie de técnicas para la enseñanza de la estimación de los resultados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Estas técnicas están basadas en la medida de cantidades más que en el conteo de unidades. Utilizan la posición de los números en la recta real y suponen una aproximación alternativa al uso de los algoritmos habituales de cálculo y a las técnicas que se suelen utilizar en estimación. Al usar estas técnicas de estimación, los alumnos realizan continuamente conversiones entre números y posiciones de la recta real consiguiendo mejorar sus intuiciones acerca de los números y las operaciones. Se realizaron varias experiencias con niños de 10 años en las que se utilizaron juegos de ordenador para practicar este tipo de conversiones (entre número y posición).

Edwards (1983, 1984) desarrolla e implementa un programa para la enseñanza de la estimación en cálculo para adultos en Papúa Nueva Guinea. Enseña distintas técnicas de estimación para el cálculo de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y para el cálculo de la media de dos números. Utiliza un programa de ordenador para evaluar las técnicas enseñadas. Por ejemplo, enseña la siguiente técnica para multiplicar dos números de cuatro cifras:

> Si el primer número está cerca[90] de 1000 o de 10.000, multiplicamos el segundo por esta cantidad. Por ejemplo, 1295 por 4638 nos conducirá a una estimación de 4638000. Lo mismo haremos cuando el número cercano a 1000 o 10.000 sea el segundo factor. (p. 20)

Para evaluar esta técnica, el ordenador genera aleatoriamente 5000 productos de dos números de cuatro cifras. En este caso el resultado de la evaluación fue que "el 95% de las 5000 estimaciones realizadas utilizando esta técnica produjeron errores entre el –16% y el +7,5%" (p. 20).

[90] En este contexto, "cerca de una potencia de diez" quiere decir que o bien el primer dígito significativo es 1 y el segundo es 0, 1 o 2, o bien el primer dígito significativo es 7, 8 o 9.

Reys, Bestgen, Trafton y Zawojewski (1984a) realizan una investigación con el objetivo de desarrollar una serie de lecciones, cuidadosamente secuenciadas, sobre estimación en cálculo, implementar el programa en sexto, séptimo y octavo grado, y evaluar los resultados del programa valorando la destreza en estimación lograda por los alumnos y los tipos de procesos utilizados por los mismos. Para ello desarrollaron materiales (Reys y otros, 1984b, 1984c y 1984d) para la enseñanza de la estimación en cálculo para sexto, séptimo y octavo grado. Estos materiales se utilizaron en un programa para la enseñanza de la estimación llevado a cabo en 48 clases de 14 colegios durante un período de un año. Se utilizaron tres instrumentos con todos los participantes en el proyecto: un test de actitudes, un test de cálculo mental y otro de estimación en cálculo. Estos instrumentos se utilizaron al principio y al final del periodo de instrucción. También se realizaron entrevistas a unos pocos alumnos de cada grupo para analizar los procesos de estimación utilizados. Acabado el período de instrucción, los grupos que habían tomado parte en la experiencia tuvieron un rendimiento mucho mayor en el test de estimación que los grupos de control correspondientes. Sin embargo, no hubo diferencias significativas en el postest de cálculo mental. Se observó que los alumnos que habían participado en la experiencia se habían acostumbrado a realizar estimaciones y persistían haciéndolas incluso cuando la ocasión requería un cálculo mental exacto. Se produjo una gran mejora en la actitud y la valoración de los alumnos sobre la estimación. Las entrevistas revelaron además que los alumnos habían alcanzado una comprensión mucho mayor sobre la estimación y que había aumentado considerablemente el número de estrategias utilizadas por los alumnos para realizar una estimación y la tolerancia del error.

Abed (1985) compara la efectividad de tres métodos para la enseñanza de la estimación del cociente de divisiones con números decimales. El período de instrucción duró tres días y se llevó a cabo con alumnos de séptimo grado. El primer grupo siguió una instrucción basada en los procesos de estimación utilizados en el algoritmo de la división larga, en el segundo se enseñaron técnicas de estimación de uso más general y en el tercero no se produjo enseñanza explícita de la estimación. El análisis de los resultados obtenidos en el pretest y en el postest reveló que el método basado en el algoritmo de la división larga fue el más efectivo de los tres.

Gossard (1986) intenta comparar la enseñanza que han recibido alumnos de sexto, séptimo y octavo grado sobre estimación en cálculo con lo que realmente han aprendido y con el uso que hacen de esta habilidad en la resolución de problemas en la vida real. Se consideraron tres tipos de estimación: reformulación, traducción y compensación. Se seleccionaron 12 alumnos de octavo grado de habilidad media en estimación. Se utilizó un cuestionario y se analizaron los libros de texto que habían utilizado los alumnos para ver qué enseñanza sobre estimación habían recibido. Se utilizó un test para medir la habilidad de los alumnos en estimación en cálculo. Finalmente, para determinar qué conocimientos sobre estimación eran utilizados en la resolución de problemas matemáticos en la vida real se plantearon tres problemas a cada alumno. Se obtuvieron las siguientes conclusiones: (1) todos los alumnos habían aprendido el proceso de reformulación redondeando números enteros y decimales demostrando una comprensión bastante profunda del redondeo, (2) el proceso de traducción no fue nunca enseñado y la compensación solo se enseñó en la división con números enteros, (3) el redondeo fue muy poco utilizado en las sesiones de resolución de problemas y la traducción y la compensación no fueron nunca utilizadas en esta situación. El autor concluye que los sujetos participantes en este estudio no habían recibido instrucción adecuada para los tipos de estimación que se requieren en la vida real y que el redondeo de enteros y decimales es la única estrategia enseñada, aprendida y de vez en cuando utilizada por los alumnos de octavo grado de habilidad media estudiados.

Segovia (1986) intenta determinar si la enseñanza sistemática de técnicas específicas de redondeo y cálculo mental mejoran el rendimiento en la estimación de resultados de operaciones aritméticas. Participan 179 alumnos de sexto de EGB pertenecientes a 5 grupos de dos colegios. Los alumnos del grupo de control reciben, durante un curso, instrucción sobre estimación en cálculo con lecciones sobre redondeo de números, cálculo exacto (en las que se aprenden estrategias de cálculo mental) y cálculo aproximado. El test y el postest realizados, antes y después del periodo de instrucción, indican que la enseñanza de técnicas de redondeo y estimación mejoran el rendimiento de los alumnos en estimación. Además se observó durante el periodo de instrucción que los alumnos de sexto tenían dificultades con la descomposición de números en suma, resta, multiplicación y división de otros y con la estimación con números decimales. La investigación sirvió también para poner a punto un instrumento para la evaluación de la estimación de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números naturales compuesto por 21 ítems de elección múltiple.

Whiteman (1989) analiza la influencia de un período de instrucción sobre estimación, en el que se utilizó un programa de ordenador, en el aprendizaje de varios tipos de estrategias y en la mejora de la habilidad de estimar. En la investigación participaron 149 alumnos de octavo grado. El período de instrucción se desarrolló durante seis sesiones, de media hora cada una, distribuidas a lo largo de tres semanas. El programa de ordenador generaba de forma aleatoria productos de dos números. Al dar su estimación, los alumnos recibían del ordenador información sobre el tamaño y el sentido del error cometido. Se utilizaron dos tests: uno para medir la habilidad de estimar y otro para evaluar el uso de distintas estrategias (en especial la compensación). Se realizaron formas paralelas de ambos tests que fueron utilizados como pretest y postest. Se encontró, en concordancia con otras investigaciones, que la habilidad de estimar de los alumnos antes de recibir instrucción sobre estimación es bastante pobre. El periodo de instrucción supuso una mejora significativa en la habilidad de estimar de los alumnos. También mejoró el uso de las estrategias enseñadas.

Whalen (1989) compara dos métodos de instrucción en estimación en cálculo. Se dividió un total de 88 alumnos de séptimo grado en dos grupos. Uno de los grupos siguió una enseñanza tradicional en la que el maestro enseñó distintas estrategias de estimación en cálculo. El otro grupo recibió enseñanza de estrategias de estimación con ayuda de varios programas de ordenador. Se utilizó un mismo test como pretest y postest para medir la habilidad de estimar de los alumnos. Tres semanas después del postest se administró una prueba para medir el grado en que la habilidad de estimar se transfería a otras tareas matemáticas que no requerían la producción de estimaciones. Los resultados encontrados fueron los siguientes: (1) los alumnos que utilizaron programas de ordenador no mejoraron significativamente en su habilidad de estimar, (2) los alumnos que siguieron enseñanza tradicional empeoraron del pretest al postest, (3) los chicos tuvieron mejor rendimiento que las chicas, y (4) los alumnos no transfirieron su habilidad de estimar a otras tareas en las que no se les pedía directamente que realizaran una estimación.

Murphy (1992) estudia el efecto de la instrucción sistemática en estimación en cálculo en: (1) la habilidad de los alumnos para estimar, (2) el rendimiento de los alumnos en tests escolares, y (3) el rendimiento de los alumnos en los tests estandarizados. Para ello, 245 alumnos de octavo grado participaron en esta investigación. Los alumnos que habían recibido instrucción sistemática sobre estimación obtuvieron mejores resultados, en la prueba de estimación, que aquellos que no habían recibido instrucción sobre estimación. La instrucción y la práctica de la estimación en cálculo no supusieron una mejora significativa en aquellos ítems de los tests que no estaban relacionados directamente con la estimación.

Sanfiorenzo (1990) realiza un estudio experimental en el que compara la efectividad de tres métodos de enseñanza de la estimación con números decimales. Participaron 133 alumnos de séptimo grado. Durante el período de instrucción se impartieron seis lecciones sobre estimación en cálculo. En el primer grupo la estimación se practicaba diariamente, en el segundo se enseñó dentro de un tema del curso y en el tercero no se produjo enseñanza de la estimación. Se administraron a los alumnos un pretest y un postest paralelos en los que se utilizaron ítems de respuesta abierta e ítems de elección múltiple. Los ítems de respuesta abierta fueron evaluados utilizando una escala de respuesta razonable o no razonable. No se encontraron diferencias significativas entre los tres tratamientos. Tampoco se encontraron diferencias significativas debidas al sexo o al tiempo de respuesta. La escala utilizada en la puntuación de los ítems de respuesta abierta resultó tener una fiabilidad baja, lo cual puede poner en duda los resultados obtenidos.

Chien (1990) intenta demostrar que las destrezas de estimación en cálculo de maestros en formación pueden mejorar si éstos utilizan materiales adecuados de auto-aprendizaje. Para ello participaron en la investigación 65 estudiantes universitarios, la mayor parte de los cuales eran maestros en formación. Las estrategias sobre las cuales se daba enseñanza a través de los materiales eran: estimación frontal, redondeo, uso de números compatibles y uso de promedios. En este trabajo se utilizaron cuatro instrumentos: un test para medir la habilidad de estimar, otro para evaluar el conocimiento de los estudiantes sobre la estimación, un cuestionario para conocer las actitudes de los alumnos hacia la estimación antes de la instrucción y otro cuestionario para conocer la opinión de los alumnos sobre los materiales de auto-aprendizaje y el cambio de actitud hacia la estimación después del período de auto-aprendizaje. Se observó que la habilidad en estimación de los estudiantes mejoraba con el uso de estos materiales. Tanto antes como después del período de auto-instrucción de dos semanas, los estudiantes tuvieron dificultades para estimar la suma de una lista de números y para determinar el primer dígito del cociente de dos números. La estrategia de redondeo fue la preferida por los alumnos antes y después de la instrucción. Después de la instrucción muchos alumnos fueron capaces además de identificar otras estrategias y de diagnosticar errores (cuando se les presentaban estimaciones dadas por otras personas). La mayor parte de las estrategias enseñadas fueron calificadas como sencillas y claras por los estudiantes. Los dos métodos con los que hubo mayor dificultad fueron el uso de números compatibles y el uso de promedios.

Bobis (1991) investiga el efecto de la enseñanza de la estimación en la habilidad de estimar y en el desarrollo de estrategias de estimación. También analiza los tipos de errores cometidos en las estimaciones después de la instrucción. Participaron en el estudio cuatro grupos (dos grupos experimentales y otros dos de control) de chicos de cuarto grado. El periodo de instrucción duró 15 semanas y en el se enseñaron estrategias de estimación para sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números enteros y sumas y restas de fracciones y decimales. Se desarrolló un test de estimación en cálculo, compuesto por 30 ítems de elección múltiple, que fue utilizado como pretest y postest. También se utilizó un test para medir la destreza de los alumnos en ciertos prerrequisitos de la estimación (como el redondeo y el dominio del valor posicional y los hechos básicos). Después del postest se eligió una muestra aleatoria de 24 alumnos pertenecientes al grupo experimental que fueron entrevistados para conocer las estrategias que habían utilizado para producir sus estimaciones. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: Todos los grupos mejoraron en el dominio de los prerrequisitos de la estimación pero solo los grupos experimentales mejoraron en su rendimiento en estimación. El dominio de las destrezas necesarias para estimar no es suficiente, por si solo, para garantizar la destreza en estimación. Las entrevistas revelaron que los alumnos habían utilizado las estrategias enseñadas durante el periodo de instrucción. Después de la instrucción se produjo una mejora muy leve en la estimación de sumas con enteros, una mejora moderada en la resta con enteros y en la multiplicación y división con decimales y una mejora muy grande en las operaciones con fracciones.

Markovits y Sowder (1994) analizan los efectos de una intervención, en la instrucción de un grupo de alumnos de séptimo grado, que tenía el propósito de desarrollar el sentido numérico de estos alumnos. Los alumnos recibieron enseñanza sobre calculo mental (5 a 10 minutos al día durante 3 meses), conceptos relacionados con el tamaño de los números (siete sesiones de clase), fracciones (siete sesiones) y estimación en cálculo (nueve sesiones). Se utilizaron entrevistas para evaluar a los alumnos en cálculo mental y en estimación y pruebas escritas para evaluar el aprendizaje de conceptos relacionados con el tamaño de los números. Los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas de estimación en cálculo utilizadas mostraron que los alumnos pueden mejorar su comprensión en aspectos conceptuales difíciles de la estimación: redondear sumandos a cero cuando es apropiado, comprender el efecto que tiene en el producto de dos números el redondeo en los factores, los conceptos de error absoluto y relativo, saber cuándo y cómo deben utilizar la compensación, utilizar números compatibles para estimar cocientes y estimar el resultado de productos y cocientes con factores y divisores menores que uno.

Chandler y Brosnan (1994) realizan un análisis comparativo de libros de texto editados antes y después de 1989 (fecha de la publicación de los estándares del NCTM). El objetivo de su trabajo es ver si hay cambios en los libros de texto y si estos cambios reflejan las recomendaciones del NCTM (1989). Para ello eligen siete series de libros de matemáticas de Educación Primaria. Estos libros son los más usados en 16 colegios seleccionados previamente. Se analizan los libros atendiendo al contenido (aritmética y dentro de esta sentido numérico, numeración, operaciones, fracciones y decimales; geometría; análisis de datos, etc.), al tipo de actividades (ejercicios, problemas), a cómo se presenta la teoría (definiciones, explicaciones, desarrollo de fórmulas, problemas resueltos, etc.), etc.). El análisis de datos revela que las actividades de estimación y las que proponen el uso de las calculadoras aumentan considerablemente. En particular, el número de páginas en las que hay actividades en las que se anima a realizar una estimación aumenta un 61%. Se concluye que los cambios en los libros de texto reflejan bastante bien las recomendaciones del NCTM, salvo quizá en el área de "medida". Se observa también un aumento en el tamaño (número de páginas) de los libros de texto y se advierte del potencial efecto psicológico negativo que puede tener este sobre los niños.

Floyd (1992) realiza un estudio experimental para evaluar el efecto de dos secuencias de instrucción sobre estimación en cálculo con fracciones en el rendimiento de los alumnos en estimación y en cálculo escrito. Participaron nueve clases de alumnos de quinto grado que fueron asignadas a tres grupos: en el primer grupo se dio instrucción sobre estimación en cálculo con fracciones y posteriormente instrucción sobre cálculo escrito con fracciones, en el segundo, fue primero la enseñanza del cálculo escrito y después la de la estimación y, en el tercero, se produjo solamente instrucción sobre cálculo escrito con fracciones. Se realizaron tests y se seleccionaron 4 alumnos de cada grupo que fueron entrevistados antes, inmediatamente después y seis semanas después del período de instrucción. Los resultados indican que los grupos que recibieron enseñanza sobre estimación obtuvieron mejores resultados en estimación que el grupo en el que no se había dado enseñanza de la estimación, sin embargo, las diferencias fueron significativas en el postest pero dejaron de ser significativas al aplicar el test seis semanas después. Los alumnos en los grupos primero y segundo obtuvieron puntuaciones significativamente mayores que los alumnos del tercer grupo en operaciones escritas con fracciones. Esta situación se dio tanto en el postest como en el test realizado seis semanas después. El rendimiento de los tres grupos en las pruebas de cálculo escrito con fracciones resultó muy bajo indicando que el enfoque dado a la instrucción no fue el más adecuado para favorecer el aprendizaje de las destrezas de cálculo escrito con fracciones para la mayoría de los alumnos. Las entrevistas revelaron que los alumnos que habían recibido instrucción sobre técnicas de estimación utilizaron estas técnicas mientras que en el grupo de control los alumnos no utilizaron métodos matemáticamente válidos para estimar.

Forrester y Pike (1998) utilizan técnicas de análisis de la conversación para estudiar los modelos implícitos y las metáforas utilizados por dos maestros durante un periodo de instrucción dedicado a la enseñanza de la estimación en medida. El estudio concluye que la estimación está íntimamente relacionada con la medida y tiene sentido dentro de situaciones prácticas. Los alumnos la asocian con vaguedad, ambigüedad y adivinación. El profesor era quien decidía, sin ninguna discusión acerca del grado de aproximación o del propósito de la estimación, si una respuesta era o no razonable. Los alumnos presuponían que la medida debía seguir siempre a la estimación dado que siempre, después de hacer una estimación, se procedía a realizar una medición exacta utilizando una regla.

Heinrich (1999) estudia la destreza en la aplicación de estrategias de estimación de 66 alumnos de sexto, séptimo y octavo grado, antes y después de un período breve de instrucción en el que, en ocho sesiones de clase, se enseñaron a los alumnos las estrategias de: redondeo con un dígito significativo y distintos procesos de traducción, reformulación y compensación. Se utilizó como pretest y postest la prueba diseñada por Reys (1980). Se observaron diferencias significativas en todos los grupos entre el pretest y el postest en reformulación, traducción y compensación. No hubo diferencias significativas en la aplicación del redondeo. La estrategia que los alumnos tuvieron más problemas en aplicar de forma efectiva fue la de compensación. El autor concluye que la compensación debe ser analizada con más profundidad con el fin de elaborar métodos nuevos que permitan una enseñanza más efectiva de este tópico.

2.4. Evaluación de la estimación

Schoen, Blume y Hart (1987) examinan los procedimientos utilizados por alumnos de quinto, sexto, séptimo y octavo grado al responder a los ítems de un test de estimación en cálculo. En los ítems se utilizan cinco formatos de respuesta distintos: elección múltiple estándar, operación en las opciones, puntos de referencia, orden de magnitud y operación en el tronco del ítem. Los ítems están diseñados para evaluar el uso apropiado de cinco estrategias de estimación distintas: redondeo estándar, operación frontal, otros redondeos (como por ejemplo redondeo con compensación intermedia), el uso de números compatibles y compensación final. Los alumnos muestran una fuerte tendencia a utilizar el redondeo a potencias de 10 incluso en situaciones en las que resulta más apropiado utilizar una estrategia distinta. Los autores consideran más apropiados los ítems de elección múltiple, en sus distintas variantes, que los ítems de respuesta abierta. Según ellos, los ítems de respuesta abierta solo sirven para medir la habilidad de los alumnos en el redondeo, pero no sirven para evaluar otros aspectos fundamentales de la estimación como por ejemplo la elección de estrategias adecuadas para realizar una estimación.

Sliva (1987) intenta elaborar un test con ítems de respuesta abierta para evaluar la habilidad en estimación en cálculo. El segundo objetivo planteado consistía en examinar la equivalencia de varios tipos de escalas que se pueden utilizar para puntuar los tests de estimación en cálculo. La investigación se realiza con alumnos de primer ciclo universitario. Las conclusiones del estudio se basaron en los datos recogidos en las entrevistas a los sujetos, en informaciones suministradas por un panel de educadores matemáticos y en la aplicación del test a los alumnos. Los ítems utilizados en el test fueron tomados de investigaciones anteriores o generados utilizando modelos de investigaciones previas. Para puntuar los tests se utilizaron dos procedimientos generales: uno basado en la variación del porcentaje de error con respecto a la respuesta correcta utilizando uno o varios niveles de variación, y otro en el que se utilizaban intervalos de respuesta aceptable utilizando la menor y la mayor de las estimaciones determinadas por el panel de educadores matemáticos. Teniendo en cuenta estos dos procedimientos se elaboraron varias escalas para dar puntuaciones a la prueba de estimación. Se observó una correlación bastante alta entre las puntuaciones obtenidas utilizando las distintas escalas. El autor concluye que el proceso de puntuación podría posiblemente simplificarse utilizando una escala basada en los porcentajes de error con respecto a la respuesta correcta. El intento de elaborar una prueba de estimación no fue considerado del todo "un éxito" debido, en parte, al rigor de los criterios utilizados en el análisis de los ítems.

Schoen y otros (1990) se plantean en su investigación el objetivo de ver si puede diseñarse un test de estimación que permita medir la habilidad de los alumnos para utilizar distintos procesos de estimación. También se proponen, en relación con el objetivo anterior, describir las respuestas que dan los alumnos a ítems de estimación con distintos formatos. Para ello, participan en el estudio alumnos de quinto, sexto, séptimo y octavo grado (con un total de 1376 alumnos). Los autores diseñaron una prueba de estimación con ítems en diferentes formatos para ver si los alumnos utilizaban los procesos de estimación identificados por Reys y otros (1982). Veinte alumnos fueron entrevistados para conocer las estrategias que habían utilizado para dar sus estimaciones. Los alumnos mostraron preferencia, entre todas las estrategias de estimación, por el redondeo a la potencia más cercana de 10 aun cuando era más apropiado utilizar otro tipo de estrategias. Los ítems, en los que el redondeo no era la opción adecuada, fueron los más difíciles. Se encontraron diferencias de dificultad entre formatos. Los más fáciles fueron los ítems cuyas opciones presentaban distinto orden de magnitud y los que tenían operaciones en las opciones. Los más difíciles fueron los que tenían intervalos en las opciones. Entre estos dos extremos se situaron los ítems de elección múltiple estándar y los de "puntos de referencia". Los autores proponen los ítems de elección múltiple estándar y los de intervalos en las opciones como los más apropiados para construir un test que evalúe la destreza de los alumnos para elegir la estrategia de estimación más apropiada en cada situación.

Goodman (1991) se plantea, como objetivo principal, desarrollar un test de estimación que pueda utilizarse para evaluar la habilidad de estimar de maestros en formación. También se propone replicar otras investigaciones en las que se estudiaba la dificultad de los ítems en pruebas de estimación en función de distintas variables de tarea y comparar el rendimiento de alumnos, con bajo y alto rendimiento en Matemáticas, en tareas de estimación. Para ello participan en la investigación 46 maestros en formación a los que se administra un test de 72 ítems desarrollado por el autor. En los ítems se utilizan varios formatos de respuesta (abierta, número de referencia y orden de magnitud), varios tipos de número (enteros, fracciones, decimales y porcentajes) y varios formatos de respuesta (problemas aplicados y cálculos sin contexto). Se encuentra que son más difíciles los ítems con fracciones, los que presentan cálculos descontextualizados y los de respuesta abierta y orden de magnitud. Los alumnos con bajo rendimiento en Matemáticas tuvieron especiales dificultades con los ítems en los que aparecían fracciones y porcentajes y con el formato de respuesta abierta. El resultado hallado con respecto al formato de la pregunta (los ítems aplicados son más fáciles que los cálculos directos) coincide con el encontrado por Reys y otros (1980) pero contradice el alcanzado por Rubenstein (1985). Parece que para los niños pequeños es más sencillo realizar estimaciones en cálculos directos mientras que para los alumnos de Magisterio resultan más fáciles los ítems aplicados.

Smith (1993) evalúa la comprensión de las estrategias de estimación, en cálculos de sumas y restas, de 60 maestros en formación. Las estrategias cuya comprensión fue evaluada en la investigación fueron: la operación frontal, el redondeo y dos tipos distintos de compensación. Se utilizó un test para medir la habilidad matemática cuantitativa de los alumnos. Participaron alumnos de primer y último curso del programa de formación de maestros. En cada curso se eligieron quince alumnos de alta habilidad cuantitativa y otros quince de baja habilidad cuantitativa. Se pasó a los alumnos un cuestionario compuesto por dieciséis situaciones-problema para los que se debía dar una estimación (ocho se resolvían mediante sumas y ocho mediante restas). Se pidió a los alumnos que explicaran las estrategias que habían utilizado mientras respondían al cuestionario. No se observaron diferencias significativas entre los alumnos de primer y último curso. Tampoco se encontraron diferencias en la comprensión de las estrategias para las sumas entre los alumnos de alta y baja habilidad cuantitativa. Sin embargo, sí hubo diferencias significativas en la comprensión de estrategias para la resta entre los alumnos de último curso de alta habilidad cuantitativa y los alumnos de primer curso de baja habilidad cuantitativa. Tanto para la suma como para la resta, la estrategia peor comprendida fue la de compensación.

Clayton (1996) hace un trabajo de revisión bibliográfica en el cual estudia cómo han sido utilizados los porcentajes de error en la evaluación de tareas de estimación de cantidades discretas. Realiza además un estudio piloto en el que analiza los porcentajes de error de estimaciones de cantidades discretas realizadas por 455 alumnos de Educación Primaria y 764 alumnos de

Educación Secundaria. Encuentra que utilizar como criterio un porcentaje de error dado no parece adecuado, pues este criterio se vuelve "más exigente" a medida que la cantidad a estimar aumenta. Por ejemplo, no es lo mismo aceptar un porcentaje de error del 50% cuando la cantidad a estimar es diez que cuando es 10.000. El autor propone un nuevo criterio para evaluar la razonabilidad de las estimaciones de cantidades discretas. Este criterio de razonabilidad (COR), que también está basado en los porcentajes de error, es de naturaleza logarítmica. El autor realiza una segunda experiencia en la cual compara las dos formas de evaluación (el uso de un porcentaje de error directo y el COR). Se llega a la conclusión de que, a falta de más investigaciones al respecto, el uso del COR parece una opción más adecuada. Asimismo, se propone la posibilidad de adaptar este nuevo criterio de evaluación a tareas de estimación en cálculo.

2.5. Desarrollo de conceptos y destrezas de la estimación

Sowder y Wheeler (1989) parten de un análisis de los componentes de la estimación en cálculo. Clasifican estos componentes en: conceptos sobre estimación, procesos, conceptos y destrezas relacionados con la estimación y componentes afectivos. El objetivo del trabajo es analizar cómo se desarrolla la comprensión de estos conceptos y destrezas componentes en alumnos de tercer a noveno grado. Participan en el estudio alumnos de tercer, quinto, séptimo y noveno grado. Se diseñan distintas tareas en las que se describen situaciones en las cuales es necesario dar una estimación, acompañadas de respuestas dadas por alumnos hipotéticos, y seguidas de explicaciones dadas por estos alumnos a su estimación. Los alumnos debían juzgar si las estimaciones presentadas eran apropiadas y si las explicaciones sobre los procesos seguidos para darlas eran aceptables. Estas tareas fueron complementadas con otros problemas de estimación de respuesta abierta.

Los niños más pequeños tendían a realizar cálculos exactos para después redondear sus respuestas (y a juzgar más adecuado este tipo de respuesta). Los mayores aceptaron mejor el uso de valores aproximados para el cálculo pero mostraron gran rigidez en el uso de estas aproximaciones, resistiéndose a aceptar aquellas que no coincidían con las enseñadas en clase. Muy pocos alumnos aceptaron que las tareas de estimación pudieran tener más de un resultado válido. Los procesos de compensación fueron comprendidos mejor por los alumnos mayores aunque supusieron una gran dificultad para todos. El estudio concluye que la estimación en cálculo es muy compleja para niños de Educación Primaria. Debería empezar a estudiarse a partir de tercer ciclo de Educación Primaria y dedicarse hasta entonces a aprender requisitos previos tales como la aproximación de números y el cálculo mental (y demás conceptos y destrezas componentes).

Baroody (1985) realiza un estudio con 17 alumnos de Educación Infantil. Se propone a estos niños la realización de varias tareas de cálculo mental. Los niños deben calcular el resultado de varias sumas de números de un dígito. El objetivo de esta investigación es comparar qué modelo teórico explica mejor la elección de estrategias que hacen los niños para dar sus respuestas: el modelo asociativo de Siegler[91] o el modelo basado en esquemas de Baroody y Ginsburg (1986). El estudio concluye que el modelo de Siegler (que da una importancia fundamental a la práctica) resulta insuficiente para explicar el dominio, por parte de los niños, de sumas que no habían sido realizadas durante el período de prácticas de ocho semanas (como la realización de sumas en las que uno de los dos sumandos es cero). El autor propone que las tareas de cálculo mental

[91] Siegler, R. S., & Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. In H. W. Reese & L. P. Lipsitt (Eds.), *Advances in child development and behavior* (Vol. I, pp. 241-312). New York: Academic.

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

suponen un ejercicio de estimación para niños pequeños. Esto es, ellos utilizan el conocimiento que tienen del número y de la aritmética para desarrollar estrategias para hacer adivinaciones educadas de los resultados.

Case y Sowder (1990) tratan de contrastar el modelo de desarrollo evolutivo de Case, intentando comprobar si sirve para explicar adecuadamente la competencia de niños de distintas edades en tareas de estimación en cálculo. Para ello, participan varios grupos de niños de educación infantil, segundo, cuarto, séptimo, noveno, undécimo y duodécimo grado. Se pide a los alumnos que estimen el resultado de grupos de sumas con distinto grado de dificultad. Estimar sumas requiere la coordinación de dos tipos de tareas cualitativamente distintas: utilizar valoraciones acerca de la proximidad de dos números para seleccionar sustitutos adecuados para los sumandos y calcular mentalmente la suma con los sustitutos de los sumandos. De acuerdo con la teoría de Case los niños no deberían dominar este tipo de tareas hasta alcanzar la etapa del pensamiento vectorial (en torno a los once o doce años). Los resultados hallados en esta investigación confirman las hipótesis de los autores. Se obtienen valiosas implicaciones para el diseño curricular, proponiendo tipos de actividades apropiadas para niños que no hayan alcanzado la etapa del pensamiento vectorial. Estos niños, que todavía no son capaces de dominar las áreas de estimación, pueden realizar tareas "componentes de la estimación" como la aproximación de números o el cálculo mental.

Segovia (1997) intenta describir y caracterizar la resolución, por parte de niños de 6 a 14 años, de tareas de estimación de cantidades discretas. También trata de poner de manifiesto el carácter evolutivo de estas estrategias de acuerdo con el modelo de desarrollo evolutivo de Case. Participaron alumnos de primer a octavo curso de EGB. De cada curso se seleccionaron 12 alumnos. A estos alumnos se les administró una prueba de estimación de cantidades discretas compuesta por 16 ítems, en los que las cantidades que se debían estimar variaban en tamaño y estructura. Se pidió a los alumnos que explicaran el procedimiento que habían utilizado para producir sus estimaciones en los 4 últimos ítems de la prueba. Se encuentra que los alumnos utilizan doce estrategias distintas que se pueden clasificar, desde el punto de vista evolutivo, en seis clases. Se establece que la estimación de cantidades discretas es una competencia cognitiva de carácter evolutivo en la que es posible diferenciar cinco subestadios correspondientes a los definidos por Case. Se observa la relación de la estimación de cantidades discretas con otros conceptos y destrezas matemáticos como son: contar, utilizar la regla de cardinalidad, usar números aproximados, calcular mentalmente y descomponer y recomponer una cantidad. También se valora la construcción del instrumento utilizado, que permite obtener mucha información acerca del desarrollo evolutivo de los alumnos así como la aplicación de esta prueba utilizando un ordenador.

2.6. La habilidad de estimar de los maestros en formación

Bestgen y otros (1980) llegan a la conclusión de que un breve periodo de instrucción puede mejorar las actitudes hacia la estimación y el rendimiento en tareas de estimación de maestros en formación. Se considera positivo que en la instrucción, además de ejercitarse los alumnos en la práctica de la estimación, se dé enseñanza explícita de estrategias. La enseñanza de estrategias produce una mejora en la comprensión, por parte de los alumnos, de los procesos de estimación y una actitud más favorable hacia la misma.

Sowder (1989) estudia factores afectivos relacionados con el rendimiento en estimación de maestros en formación. Encuentra que los buenos estimadores tienen muy buen autoconcepto como matemáticos y valoran positivamente tanto la estimación como el cálculo mental. Los malos estimadores tienen un bajo concepto sobre si mismos en Matemáticas, atribuyen su bajo rendimiento en tareas de estimación a la dificultad de las mismas y a la falta de tiempo para realizarlas correctamente y dan poco valor a la estimación y al cálculo mental.

Chien (1990) utiliza con éxito, con alumnos de Magisterio, materiales de auto-estudio para el aprendizaje de la estimación. Los alumnos mejoraron su rendimiento y sus actitudes hacia la estimación. También mejoró la comprensión de distintas estrategias de estimación como la operación frontal, el uso de promedios y el uso de números compatibles, aunque la estrategia preferida siguió siendo el redondeo.

Goodman (1991), en su trabajo con maestros en formación, afirma que las estrategias de estimación deben enseñarse explícitamente a los alumnos, pues no es probable que ellos puedan desarrollarlas adecuadamente por sí mismos. Las estrategias que se enseñan deben ser variadas (operación frontal, uso de promedios, compensación, uso de números compatibles...) para posibilitar que los alumnos las utilicen con flexibilidad. Por último, recomienda que se ponga un énfasis especial en la enseñanza de conceptos y propiedades relacionados con la estimación en cálculo como la comparación de números, la propiedad distributiva, las operaciones con potencias de 10, etc.

Gliner (1991) encuentra factores relacionados con el buen rendimiento en tareas de estimación en estudiantes de Magisterio. Los alumnos que se ven a si mismos como "buenos en Matemáticas" tuvieron buen rendimiento en estimación. Otras variables que influyeron positivamente fueron el número de años cursados en Matemáticas, la media de sus calificaciones y la actitud positiva de los que afirmaban "disfrutar con las Matemáticas". Alumnos que habían tenido hasta entonces un rendimiento bajo en Matemáticas tuvieron éxito en tareas de estimación, lo cual aumenta sus expectativas de tener éxito en Matemáticas y mejora su actitud hacia las mismas.

Smith (1993) estudia la comprensión que tienen los maestros en formación sobre distintas estrategias de estimación. Llega a la conclusión de que las estrategias de redondeo y operación frontal son las que se comprenden más fácilmente mientras que la compensación es la que tiene una mayor dificultad. La estrategia de redondeo es la única a la que los alumnos se refieren por su nombre.

2.7. Dificultad de los ítems en pruebas de estimación en función del tipo de número

En algunos trabajos se ha estudiado la influencia del tipo de número que aparece en las tareas de estimación en la dificultad de las mismas.

Bestgen, Reys, Rybolt y Wyatt (1980) analizan la efectividad de la enseñanza sistemática de la estimación en una muestra formada por 187 maestros en formación. Durante el período de instrucción se dio enseñanza teórica (diez lecciones) y práctica (un "concurso de estimación" en el que los alumnos practicaban respondiendo a 16 tareas de estimación) sobre estimación con números enteros y decimales. Entre los números decimales aparecen números mayores y menores que uno (tanto en la parte teórica de la instrucción como en la práctica). En el test de estimación, compuesto por 60 ítems, que se utilizó para medir la destreza en estimación de los alumnos (antes y después del período de instrucción) se encontró que los ítems en los que aparecían números decimales eran más difíciles que aquellos en los que solamente aparecían números enteros. En esta investigación no se hace ninguna distinción sobre si los decimales que aparecen son mayores o menores que uno.

En Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1980) se utiliza un test, compuesto por 55 ítems, diseñado a partir del test utilizado en Bestgen y otros (1980). En él aparecen ítems con números enteros, con números decimales mayores que uno y con números decimales menores que uno. Este estudio está orientado al análisis de las estrategias utilizadas en los procesos de estimación y en él no se realiza comparación alguna entre la dificultad de los ítems en función del tipo de número[92].

Rubenstein (1985a) utiliza en su estudio un test, compuesto por 64 ítems, con ítems tomados del trabajo de Reys y otros (1980) o diseñados para ser paralelos a los ítems del estudio citado. Al igual que en Bestgen y otros (1980) se llega a la conclusión de que los ítems en los que aparecen números decimales son más difíciles que los ítems que solo tienen números enteros.

Goodman (1991) también estudia la dificultad de los ítems en pruebas de estimación en función del tipo de número que aparece en los mismos. Utiliza en su prueba ítems con números naturales, decimales, fracciones y porcentajes. En esta prueba todos los decimales que aparecen son mayores que uno. El autor no encuentra diferencia significativa de dificultad entre los ítems en que aparecen números decimales y aquellos en los que solo hay números enteros. Este resultado parece entrar en contradicción con los hallados en las investigaciones de Bestgen y otros (1980) y de Rubenstein (1985a), en los que la diferencia de dificultad entre estos dos tipos de ítems sí se pone de manifiesto.

La hipótesis que se plantea en este trabajo es que la verdadera diferencia de dificultad se da entre los ítems que tienen números enteros y aquellos en los que aparecen números decimales menores que uno. En caso de confirmarse esta hipótesis, se obtendría un resultado análogo al que se da en el campo de la resolución de problemas de estructura multiplicativa que se ha descrito antes. Tanto la dificultad de las tareas de estimación como la dificultad en la elección de operación apropiada para la resolución de un problema serían manifestaciones distintas de las ideas equivocadas que tienen los alumnos sobre

[92] Se cita este estudio por ser el "puente" entre los trabajos de Bestgen y otros (1980) y Rubenstein (1985a). En este trabajo, se ha contado con las pruebas de estimación utilizadas en los trabajos de Reys y otros (1980) y de Rubenstein (1985a). En ellas aparecen decimales mayores y menores que uno. En el trabajo de Bestgen y otros (1980), no hay seguridad de que aparecieran decimales mayores y menores que uno pero hay varios indicios de que así fue.

la multiplicación y la división cuando en ellas aparecen números decimales menores que uno.

Además, la confirmación de esta hipótesis podría también explicar la aparente contradicción que se produce al confrontar los resultados encontrados en las investigaciones de Bestgen y otros (1980) y Rubenstein (1985a) con los hallados en el trabajo de Goodman (1991). En efecto, el hecho de que en el test utilizado por Goodman no aparezcan decimales menores que uno (al contrario que en los otros trabajos), puede ser el causante de que en este estudio no se hallan encontrado diferencias significativas entre estos dos tipos de ítems.

2.8. Estimación de multiplicaciones y divisiones con números decimales menores que uno

En varios trabajos de investigación se han tratado, directa o indirectamente, los problemas que se producen en la estimación en cálculo con números decimales menores que uno.

Morgan (1990) intenta determinar factores que afectan en el rendimiento de alumnos de educación secundaria en tareas de estimación en cálculo. Uno de los factores, cuya influencia trata de demostrar, es la presencia de números decimales menores que uno en estas tareas. Toma como referencia el trabajo de Levine (1982), en el que se advierte que alumnos universitarios tenían dificultades en la conceptualización de la multiplicación y de la división. Plantea una prueba compuesta por ítems aplicados e ítems de cálculo directo. Las respuestas dadas por los alumnos indican la existencia de ideas equivocadas sobre las operaciones. Aparece la idea de que "la multiplicación siempre aumenta", "la división disminuye" y otras en las que se invierten los papeles del dividendo y el divisor para poder obtener un resultado "coherente" con estas ideas equivocadas. Por ejemplo, en el ítem en el que se pedía dar una estimación para 93.4×0.68 un 23% de los alumnos dieron respuestas entre

93.4 y 105. Se observaron también las siguientes respuestas:

> Para 88.2 × 0.68 un 22% dieron estimaciones entre 88.2 y 91.
>
> Para 6.23 ÷ 8.85 un 17% dieron estimaciones entre 1 y 2.
>
> Para 4.86 ÷ 6.44 un 25% dieron estimaciones entre 1 y 2.
>
> Para 3 ÷ 0.06 un 35% dieron la respuesta 0.02.
>
> Para 2 ÷ 0.04 un 35% dieron la respuesta 0.02.
>
> Estas ideas equivocadas dejaron de aparecer en gran medida cuando se plantearon problemas equivalentes presentados dentro de un contexto. (pp. 268, 269)

Se observó, en concordancia con los resultados obtenidos en otras investigaciones, que los alumnos obtenían mejores resultados dando estimaciones en problemas aplicados que en ítems de cálculos directos. Esta diferencia fue mucho más acusada en los ítems en los que aparecían números decimales menores que uno. Las entrevistas, realizadas a los alumnos, mostraron que éstos utilizaban (cuando respondían a este tipo de ítems) estrategias en las que no realizaban ningún cálculo sino que usaban el conocimiento que tenían del contexto para producir su estimación.

Morgan (1989) compara el rendimiento de alumnos en tareas de estimación en formato numérico y en formato aplicado. Observa que para alumnos de Educación Secundaria es mucho más sencillo estimar si los cálculos se presentan dentro de un contexto. La mayoría de estos alumnos no han recibido enseñanza de técnicas de estimación. Sin embargo, muchos de ellos son capaces de desarrollar métodos informales de estimación cuando se les proporciona un contexto significativo. La autora dice que:

> El hecho de que muchos niños fueran capaces de realizar estimaciones razonables en contexto mientras que fallaban en estimar cálculos

parecidos fuera de contexto indica que estos alumnos no estaban convirtiendo el problema en un cálculo. Las entrevistas revelaron que ellos utilizaban estrategias muy diferentes para hacer estimaciones dentro de un contexto. (p. 16)

También añade que "estas ventajas proporcionadas por el contexto fueron más acusadas en aquellas operaciones difíciles de conceptualizar: la multiplicación o división de un número por otro menor que uno y la división de un número por otro mayor" (p. 16).

En el trabajo de Markovits y Sowder (1994), en el que se trata de mejorar el sentido numérico de los alumnos mediante una intervención en su proceso de instrucción, también se plantea el problema de las ideas equivocadas sobre la multiplicación y la división con números decimales menores que uno. Así, en la prueba realizada a los alumnos aparecen ítems del siguiente tipo:

$217 \div 0.35$ es mayor, menor que o igual que 217

a) Mayor, porque $0.35 < 1$

b) Mayor, por que el punto decimal está movido (en 0.35)

c) Menor, por que estamos dividiendo (p. 21)

Los alumnos dieron respuestas que confirmaban la existencia de estas ideas equivocadas:

Alumno: es menos que 217. Porque dividir es más que restar. Cuando divides estás quitando el número que hay ahí [señalando al 0,35].

Entrevistadora: ¿Puedes calcular la respuesta exacta con la calculadora?

Alumno: [lo intenta varias veces seguidas] sigue saliendo mayor y no debería ser así. [Continúa intentándolo]

Entrevistadora: ¿Sigue siendo mayor?

Alumno: [confundido] Sí. Aunque divida 0,35 por 217.

> Entrevistadora: pero es 217 dividido por 0,35.
>
> Alumno: Sí. Pero debería ser menor, porque estamos dividiendo.
>
> (pp. 21, 22)

Esta porción de entrevista indica claramente la presencia de una idea equivocada sobre la división y de cómo puede influir esta idea en el cambio de los papeles que juegan el dividendo y el divisor en una división cuando el resultado no cumple las expectativas que tienen los niños (de acuerdo con esta idea equivocada).

Las autoras comprobaron que, tras un período de instrucción, podía mejorarse la comprensión de las operaciones de modo que se redujera, de forma significativa, el número de errores producidos por los niños en este tipo de tareas.

En la revisión realizada de antecedentes del problema, hay ejemplos muy claros de esta ausencia de conexión entre el conocimiento conceptual y el procedimental en la realización de tareas de estimación. Por ejemplo, Levine (1980) analiza los tipos de errores cometidos por alumnos universitarios en tareas de estimación en cálculo. En algunos de estos errores se pusieron de manifiesto dificultades en la conceptualización de la multiplicación y de la división. En el análisis de las respuestas dadas por los alumnos destacan los siguientes resultados:

> Para el ítem 64.6×0.16 un 37% de las estimaciones dadas fueron mayores que 64.6. Para 424×0.76 un 24% de las respuestas fueron mayores que 424. En el ítem 187.5×0.06 un 25% de las estimaciones fueron mayores que 187.5. Un 49% de las estimaciones dadas para 0.47×0.27 fueron mayores que 0.26 ó 0.47. (p. 96)

Levine (1980) atribuye este tipo de errores a que los alumnos están tan concentrados en el proceso de producir una estimación que no son capaces de utilizar el conocimiento que tienen (en caso de que lo tengan) sobre el efecto de multiplicar un número por una cantidad menor que uno para evaluar la razonabilidad de sus estimaciones. Se encuentra aquí una falta conocimiento conceptual, o de “control ejecutivo” del mismo sobre los procedimientos, que posibilita que se produzcan estos resultados carentes de sentido.

En algunos casos, los alumnos realizaban una operación con números decimales "quitando" las comas y a continuación olvidaban restablecer el orden apropiado del resultado colocando la coma en el lugar apropiado. En otras ocasiones:

> Más que olvidarse de poner la coma al final, los alumnos pensaban equivocadamente que habían realizado una transformación en los números que ya había tenido en cuenta las comas decimales. Por ejemplo, un alumno utilizó la siguiente de estrategia: “0.47 × 0.26. Quitamos ambos decimales y queda 47 × 26... 50 por 25... 125 y un 0. Luego son 1250”. (p. 89)

Este tipo de procedimiento incorrecto puede estar relacionado con el algoritmo habitual de división de números decimales, en el que las comas decimales se quitan tanto del dividendo como del divisor para dar lugar a una división equivalente. Se produciría aquí una falta de comprensión de cómo influye la modificación de los datos en el resultado de un cálculo. Esto reflejaría un conocimiento inadecuado del efecto relativo de las operaciones, siguiendo el planteamiento de Behr (1989), y también una ausencia de sentido numérico.

Levine (1980) encontró también otros tipos de errores asociados con las operaciones en las que aparecían números menores que uno. Por ejemplo, al utilizar la estrategia de sustituir un número decimal por una fracción un alumno realizó la siguiente estimación: “943 ÷ 0.48. Es la mitad de 900. 450. Bien, 470” (p. 92). En varios alumnos se encontró la idea equivocada de que se “debe dividir siempre un número por otro menor”. Levine propone el ejemplo de "uno de los participantes [que] invirtió los papeles del dividendo y del divisor al dar su estimación para 0.76 ÷ 0.89 pero realizó la división correctamente cuando estimaba 943 ÷ 0.48" (p. 95). Todas estas descripciones de estimaciones son una muestra de la existencia de ideas equivocadas y de la influencia de las mismas en la producción de estimaciones incompatibles con una comprensión adecuada de las operaciones. A veces ejemplifican cómo los alumnos, aunque tengan un conocimiento adecuado, no lo utilizan al estimar.

Por otra parte, y en el extremo opuesto, se encuentra un ejemplo propuesto por Dowker (1992). Esta autora –que utiliza el test de Levine (1982)– halló en su investigación, sobre identificación de estrategias de estimación utilizadas por matemáticos profesionales, un sujeto que utilizó, como estrategia para estimar 0.76 ÷ 0.89, "el conocimiento de que dividir un número por un número racional un poco menor que uno, produce un resultado un poco mayor que el número de partida. Así, 0.76 ÷ 0.89 será un poco mayor que 0.76" (p. 47). Este es un ejemplo de cómo puede utilizarse un conocimiento adecuado del efecto que tiene la alteración de los datos en el resultado de una operación para producir una estimación sin necesidad de realizar un cálculo.

3. Las aportaciones desde la Psicología a la investigación sobre estimación en cálculo (1992-2011): Los trabajos de Dowker, Lemaire, Siegler y Hogan

Según Hogan y Brezinski (2003), la investigación en estimación se ha desarrollado históricamente dividida en dos tradiciones muy diferentes, con distintos autores, audiencias y ámbitos de publicación. Por un lado, está la investigación en *Educación Matemática* y, por otro, la investigación en el ámbito de la *psicometría*[93]. En el periodo 1992-2009 varios autores de prestigio, dentro del ámbito de la psicología, han dedicado gran parte de su esfuerzo a investigar sobre estimación. Es el caso de Dowker, Lemaire y Siegler. Como veré, los objetivos y posibilidad de aplicación de sus trabajos permanecen en ocasiones bastante lejanos de los intereses propios de la Educación Matemática. Sin embargo, contienen algunos resultados y reflexiones sobre la estimación en cálculo por los que merecen ser incluidos en esta revisión.

3.1. Los trabajos de Dowker y colaboradores

Dowker (1992) aplica el test de Levine (1982) a una muestra de 44 matemáticos profesionales. Los matemáticos hicieron estimaciones muy precisas y utilizaron un gran número de estrategias distintas. Las estrategias más utilizadas fueron la sustitución de números decimales por fracciones, el uso de números compatibles y la descomposición de números en factores. Los matemáticos, al contrario que los sujetos que participaron en el estudio de Levine (1982),

[93] Con referencia a la psicometría, Hogan y Brezinski (2003) hacen una revisión de la presencia de ítems de estimación dentro de distintos tests de inteligencia elaborados por autores influyentes de la historia de la psicología como Cattell, en 1890, Thorndike, en 1901 o Thurstone, en 1938. También citan una reciente corriente de estudios desarrollados desde una perspectiva neuropsicológica, en la que el autor más destacado, Dehaene, postula la existencia de dos tipos de habilidades numéricas en el cerebro humano: una sería la del cálculo exacto y otra estaría dedicada a las aproximaciones. Realmente, dentro de la literatura en psicología, pueden encontrase investigaciones sobre estimación que no podrían calificarse como "psicométricas" (como las de Siegler y colaboradores), ni neuropsicológicas. Por ejemplo, dentro del ámbito de la Psicofísica, Krueger (1972) muestra cómo el sistema perceptivo no es capaz de abstraer el número partiendo de colecciones de puntos, debido a la influencia en la percepción de diversos factores como la configuración espacial de los puntos. Parece interesante citar estas diferentes tradiciones que explican bastante bien el fenómeno que se ha producido, a partir de 1994 en la investigación sobre estimación: La emergencia de líneas fuertes de investigación, en Psicología, coincidente con el abandono, en la Educación Matemática, de la investigación en estimación por autores como Reys, Sowder y Schoen.

tendían a utilizar estrategias que demostraban comprensión de propiedades aritméticas y relaciones antes que estrategias basadas en el uso de técnicas enseñadas en clase. Estos resultados concuerdan con los hallados en otros estudios en personas con gran rendimiento en estimación y en cálculo mental.

Dowker y otros (1996) continúan el trabajo comenzado en Dowker (1992) comparando las estrategias que utilizan los matemáticos profesionales al realizar el test de Levine (1982) con las que utilizan otros tres grupos formados por 44 contables, 44 estudiantes de psicología y 44 estudiantes de inglés. Los matemáticos y los contables utilizaron un número mucho mayor de estrategias apropiadas distintas que los dos grupos de estudiantes. Los matemáticos fueron los que realizaron las estimaciones más precisas. Todos los grupos a excepción de los matemáticos utilizaron un gran número de estrategias inadecuadas.

Dowker (1997) analiza la relación entre la competencia aritmética, la habilidad de estimar y el nivel dificultad de las tareas de estimación. Doscientos quince niños de edades comprendidas entre cinco y nueve años son divididos en cinco grupos de acuerdo con su nivel de competencia en la realización de sumas. Dentro de cada grupo se propone a los niños tareas de estimación cuya dificultad está en correspondencia con su nivel de competencia aritmética. Algunos niños tuvieron que realizar problemas de estimación cuya dificultad era muy elevada para su nivel de competencia aritmética. Se observó que los niños con mayor nivel tendían a producir mayor número de estimaciones razonables que los de menor nivel. Cuando la dificultad de las tareas de estimación crecía, el número de respuestas razonables descendía. La autora propone que en estas edades existe una zona en que el conocimiento y la comprensión de las tareas de estimación son solamente parciales.

3.2. Los trabajos de Lemaire y colaboradores

Lemaire, Lecacheur y Farioli (2000) estudian el uso de estrategias de estimación, en tareas de suma y resta, de 23 niños franceses de 10 años. También investigan la frecuencia de uso de las estrategias, la relación del uso de estrategias con las características del problema y la eficiencia, en términos de precisión y rapidez, de las mismas. Los niños utilizaron cuatro estrategias: redondeo con descomposición, redondeo sin descomposición, compensación y truncamiento. Los dos tipos de redondeo fueron las estrategias utilizadas con más frecuencia. El truncamiento fue la estrategia ejecutada con mayor rapidez y la compensación, la más lenta. La compensación fue la estrategia utilizada con mayor precisión. Los niños eligieron las estrategias en función de las características del problema mostrando una gran capacidad de adaptación en el uso de las mismas. En otro trabajo, Lemaire y Lecacheur (2001) llevan a cabo un estudio para averiguar qué estrategias eran las preferidas por niños y jóvenes franceses para hacer conversiones de francos a euros. También investigan qué estrategias se aplican con mayor rapidez y precisión. La mejor estrategia (en términos de rapidez, precisión y preferencia por parte de los participantes) fue la de "añadir la mitad". Para hacer este tipo de conversión es necesario multiplicar por 0.152449. Si se desea realizar una estimación, basta con multiplicar por 0.15. Esta operación es equivalente a tomar la cantidad en francos, añadir la mitad y dividir por 10. Por ejemplo, 82 francos serán aproximadamente (82 + 41) ÷ 10 = 12.3 euros (La cantidad exacta es 12.5). Como resultado de sus investigaciones, los autores recomiendan la enseñanza de esta estrategia para realizar conversiones de francos a euros. Estos dos trabajos ponen un acento quizá excesivo en la eficiencia de las estrategias – valorada en términos de rapidez y precisión. Sin embargo, el trabajo de Lemaire y Lecacheur (2001) tiene interesantes implicaciones para el diseño curricular partiendo de un estudio sobre las estrategias que se utilizan realmente en la vida diaria y se han desarrollado fuera del contexto escolar.

Lemaire y Lecacheur (2002) investigan las estrategias que emplean para estimar los resultados de sumas de dos números de tres dígitos[94] los 216 participantes en la investigación (72 adultos, 72 alumnos de sexto de primaria y 72 de cuarto de primaria). A todos los participantes se les enseñaron dos estrategias básicas: redondear hacia abajo los dos números a las decenas y luego sumarlos y la segunda estrategia fue redondear hacia arriba los dos números y sumarlos. Los participantes fueron distribuidos en tres grupos: En el primero, podían elegir cualquiera de las dos estrategias para estimar y después debían indicar qué estrategia habían empleado; en el segundo, todos debían estimar utilizando el redondeo hacia abajo (truncamiento). En el tercer grupo, todos debían estimar mediante el redondeo hacia arriba. Esta división en grupos se hizo para evaluar la selección de estrategias (grupo 1) y la eficiencia en el uso de las dos estrategias alternativas (grupos 2 y 3). Otro objetivo era ver cómo evolucionaba la selección de estrategias con la edad y cómo se adaptaban las estrategias a las características de los números.

En los tres grupos de edad, dentro del grupo en el que había elección de estrategia, se utilizaron tanto el truncamiento como el redondeo hacia arriba, siendo el truncamiento la estrategia más utilizada por los participantes, más utilizada por los adultos y los alumnos de sexto de primaria, que por los de cuarto de primaria, y más utilizada con números con las cifras de las unidades bajas. También se observó que los adultos y los niños de sexto de primaria basaban la elección de estrategia más en el tamaño de las cifras de las unidades (las más relevantes para distinguir entre el truncamiento y el redondeo hacia arriba), mientras que los alumnos de cuarto de primaria se basaban más en el tamaño de las centenas y las decenas (casos en que la reducción del tamaño de los números al redondear hacia abajo da lugar a cálculos más sencillos). En

[94] En la mitad de las sumas, las dos cifras de las unidades eran mayores que 5 (de modo que es más adecuado usar el redondeo hacia arriba) y en la otra mitad de las sumas, las dos cifras de las unidades eran menores que 5. Esto se hizo para poder estudiar si las estrategias se elegían en función de las características del problema.

cuanto a la ejecución de estrategias, se encontró que el truncamiento es más rápido en ejecución y da lugar a mejores estimaciones (por producir menos errores) que el redondeo hacia arriba. Finalmente, y en contradicción con otras investigaciones, los participantes del grupo 1 (elección de estrategia) no tuvieron mejor rendimiento en estimación que los de los grupos 2 y 3, en los que se obligaba a utilizar el redondeo hacia abajo a las decenas (truncamiento) y hacia arriba. Este resultado sorprende a los autores por cuanto se espera que, al menos, en el grupo de adultos, la posibilidad de elegir entre estrategias y la capacidad de adaptar la estrategia a las características de la tarea, debería conducir a obtener mejores estimaciones, lo que no se cumplió.

Lemaire, Arnaud y Lecacheur (2004) realizan 4 experimentos con adultos (1°, 30 participantes de 30,2 años de media y otros 30 de 69,9 años; 2°, 96 participantes de 25,3 años de media y otros 96 de 70,6 años; 3°, 48 participantes de 23,4 años de media y otros 48 de 71,1 años; 4°, 20 participantes de 22,9 años de media y otros 20 de 74,9 años[95]) para estudiar los cambios que se producen con la edad en la habilidad de estimar y en la destreza de elegir la estrategia más precisa para cada tarea. En todos los experimentos se utilizan tareas de multiplicación con dos factores de dos cifras cada uno. En el experimento 1 se plantea a los dos grupos de adultos que estimen el resultado de 144 productos. En todos los productos, una de las dos cifras de las unidades era mayor que 5 y la otra menor que 5. En la mitad de los productos era más adecuado (en el sentido de producir un porcentaje de error menor) el redondeo hacia arriba a las decenas que el truncamiento (como en 68×34) y en la otra mitad era más adecuado truncar a las decenas (como en 26×71). Los participantes tenían el tiempo de respuesta para cada estimación limitado a 7 segundos y solo podían emplear como estrategias el redondeo hacia arriba o hacia abajo (truncamiento) a las decenas en ambos factores. En estas condiciones, los resultados

[95] En los cuatro experimentos se controlaron las variables: número de años de educación formal, fluidez en aritmética y la auto-puntuación según la percepción de la propia salud.

encontrados tras los cuatro experimentos que constituyen la investigación fueron: Los jóvenes adultos y los mayores utilizaron las dos estrategias previstas para realizar las tareas de estimación; en ambos grupos se eligieron las estrategias más adecuadas a las características de las tareas; en ambos grupos fueron suficientemente flexibles como para ajustar sus estrategias y la ejecución de las mismas a demandas de mayor precisión en la estimación; los adultos mayores tuvieron un rendimiento peor que los jóvenes en las tareas de estimación, especialmente cuando estas eran más difíciles y cuando debía utilizarse una estrategia más complicada[96].

3.3. Los trabajos de Siegler y colaboradores

Hay un campo de investigación en estimación que se está desarrollando con bastante intensidad en el último decenio. No coincide con la estimación en cálculo[97]. Se trata de la *estimación en la recta numérica*. Voy a examinar

[96] En este trabajo el interés principal está situado en conocer aspectos cognitivos afectados por el envejecimiento, como la selección de estrategias y la ejecución de estrategias. Los autores del trabajo valoran especialmente su estrategia metodológica de someter a los participantes a varias condiciones al realizar las tareas de estimación: elección de estrategia, no elección-obligación de realizar redondeo hacia abajo, no elección-obligación de realizar redondeo hacia arriba. El motivo de establecer estas condiciones es estudiar la ejecución de estrategias concretas en adultos (y el efecto del envejecimiento en esta ejecución) con independencia de la selección de estrategias. Desde el punto de vista de la Educación Matemática, la selección de estrategias está extraordinariamente restringida y la ejecución se debe hacer de forma muy mecánica y con una restricción temporal muy acusada de 7 segundos por estimación. Este enfoque de la estimación puede ser adecuado para un trabajo de psicología del envejecimiento, pero el control realizado sobre las variables hace que el planteamiento que se hace sobre la estimación en esta investigación esté profundamente distanciado de los objetivos que se plantean con la introducción de la estimación en los diferentes currículos de Educación Primaria o Secundaria.

[97] Podría considerarse matemáticamente como un subtipo de la estimación en medida de longitudes, pero autores como Siegler y Booth (2005) lo consideran como un tipo de estimación distinta, cuyo desarrollo influye notablemente en otros tipos de estimación, como el de

brevemente la investigación realizada por Siegler y colaboradores, dentro de este ámbito[98], para comprender el giro hacia la psicología que están tomando los trabajos sobre estimación, a qué deben estos trabajos su interés y sus posibles implicaciones didácticas.

En distintos estudios se ha encontrado que los niños tienen una comprensión incompleta del sistema de numeración que les conduce a producir representaciones numéricas inadecuadas sobre la recta numérica. Los niños poseen múltiples representaciones internas de la magnitud que representa un número que van desde tempranas representaciones logarítmicas hacia representaciones lineales más avanzadas. El carácter logarítmico o lineal se pone de manifiesto cuando los niños realizan tareas consistentes en localizar la posición adecuada para un numeral escrito con cifras sobre una recta numérica vacía (sin marcas ni números) con sus extremos marcados, por ejemplo, con un '0' y un '100' (Siegler y Opfer, 2003).

Se dice que la representación es logarítmica porque las representaciones de las estimaciones de los niños se ajustan bastante bien a la fórmula[99]:

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{0{,}0069}\mathrm{L_n}(x)$$

Donde se trataría de situar números naturales dentro del intervalo (0,1000) y, para números mayores o iguales que 5, la fórmula anterior daría un resultado que encajaría bastante bien con la posición en la que sitúa el niño el numeral correspondiente. Según este modelo, por ejemplo, la distancia 'psicológica' entre 0 y 75 es mayor que entre 75 y 1000, porque la representación logarítmica expande o separa los números en la parte baja de la escala, y los comprime en la parte alta de la misma (ver detalles en Siegler y Booth, 2004).

cantidades discretas.

[98] Otras investigaciones se han realizado dentro de esta línea, entre las cuales destacan los trabajos de Petitto (1990) y Newman y Berger (1984).

[99] El coeficiente 1/0,0069 se pone para que el valor de f(1000)=1000, dado que $\mathrm{L_n}(1000) \approx 6{,}907$.

Dentro de este tipo de Siegler y Opfer (2003) hallaron que el porcentaje de error al representar numerales sobre la recta numérica iba descendiendo con la edad, lográndose por tanto una mayor precisión en las estimaciones. Sobre una recta numérica, sin marcas, etiquetada en los extremos con '0' y '1000', el porcentaje medio de error fue de un 21% en segundo de Educación Primaria, de un 14% en cuarto, de un 7% en sexto y de un 1% en adultos. Con alumnos de segundo curso, el modelo logarítmico explicaba mejor las posiciones elegidas por los alumnos para los numerales; en cuarto curso, ningún modelo es preferible al otro; a partir de sexto curso, y en la muestra de adultos (alumnos universitarios), el modelo lineal supera claramente al logarítmico. Los autores concluyen que disponemos de varios sistemas de representación numéricos[100] y que, con la edad, estos sistemas van desarrollándose. Un solo modelo, o tipo de representación, no puede explicar de forma adecuada los hallazgos de esta investigación ni el desarrollo que se produce en los sistemas de representación.

Siegler y Booth (2004) parten de la investigación realizada en Siegler y Opfer (2003) y reducen la edad de los participantes y el rango de los números incluidos en su prueba: en lugar de 0 a 1000, los niños tendrán que colocar sobre la recta numérica números del 0 al 100. En este trabajo participan 21 alumnos de último curso de Educación Infantil[101], 33 de primero de Educación Primaria y 31 de segundo de Primaria. Se encuentra, en concordancia con el estudio anterior, que las estimaciones de los alumnos de último curso de Educación Infantil y primero de Educación Primaria siguen un patrón logarítmico mientras que las de los alumnos de segundo de Educación Primaria, siguen un patrón lineal. El modelo lineal se adelanta varios años

[100] Con estos 'sistemas de representación numéricos' los autores se refieren a representaciones internas de la magnitud representada por un numeral.

[101] A lo largo de este trabajo, se ha optado, en múltiples ocasiones, por sustituir los nombres de los cursos en sistemas educativos distintos del español por sus equivalentes aproximados en nuestro sistema educativo, para facilitar la lectura e interpretación de los resultados.

debido a la reducción del rango numérico, como los autores habían hipotetizado. Dentro de esta investigación hay un segundo experimento en que participan 20 alumnos de último curso de Educación Infantil, 19 de primero de Educación Primaria y 21 de segundo curso. Esta vez, los alumnos de Educación infantil deben situar números sobre la recta numérica limitada por marcas para el 0 y el 10. Hay una división en cada nivel en grupo de control y experimental. En este último grupo se pide a los niños que representen el 50 (el 5 en infantil) y después se les pide que lo comparen con la verdadera posición, haciéndoles ver que 50 es la mitad de 100 (y 5 la de 10). Después repiten el procedimiento del primer experimento. Los alumnos del grupo experimental de último curso de Infantil empeoraron significativamente su porcentaje medio de error en la tarea. Por el contrario, en primero y segundo de Primaria, los alumnos del grupo experimental mejoraron su rendimiento en la tarea y siguió notándose una preferencia creciente con la edad hacia el modelo lineal.

Opfer y Siegler (2007) tratan de profundizar en la línea de anteriores investigaciones sobre estimación en la recta numérica, para lo que trabajan con niños de segundo y cuarto de primaria (edades en las que se producía de forma más clara el cambio de representación en estudios anteriores) y eligen números de 0 a 1000 para solicitar estimaciones a los niños, poniendo énfasis en la elección de los números en la cercanía a 5, 150 y 725, que son los números que permiten diferenciar mejor el modelo logarítmico del lineal[102]. Entre los resultados, se destaca la confirmación de que el cambio del modelo logarítmico al lineal se produce entre segundo y cuarto de Educación Primaria. Además, los números elegidos confirman ser los más adecuados para discriminar entre

[102] Los números 5 y 725 son el resultado de redondear a las unidades las abscisas de los puntos de corte de la función lineal que mejor modeliza las estimaciones de alumnos de cuarto con la función logarítmica que mejor modeliza las estimaciones de los niños de segundo de primaria. El número 150 es el resultado de redondear la abscisa en la que se encuentra el máximo de la diferencia entre las dos funciones, dentro del intervalo (0, 1000).

ambos modelos. En un segundo experimento, dentro del mismo estudio, los autores tratan de contrastar la hipótesis de que dar feedback para las estimaciones de los niños con números en torno a 5, 150 y 725 puede provocar un cambio abrupto (no gradual) en el tipo de representación. La hipótesis se confirmo, con el cambio mayor debido al feedback dado a las estimaciones que dan los niños para 150. El cambio de representación fue abrupto y global, afectando a toda la representación, que cambia de logarítmica a lineal.

También hay dos trabajos (Siegler y Booth, 2005 y Booth y Siegler, 2006) que sí estudian la estimación en cálculo. Siegler y Booth (2005) es una revisión de investigaciones sobre estimación. La originalidad de esta revisión (con respecto a anteriores revisiones) estriba en que los autores adoptan un punto de vista psicológico, dividiendo la *estimación numérica*[103] en estimación en cálculo, estimación de numerosidades y estimación en la recta numérica y estableciendo, para cada tipo de estimación, una subdivisión en los siguientes apartados: Variabilidad de estrategias y representaciones, elección de estrategia, cambios en el uso de estrategias, y diferencias individuales.

Booth y Siegler (2006) realizan una investigación, con niños de último curso de Educación Infantil y primero, segundo y tercero de Educación Primaria, a los que se pide que realicen tareas de estimación en cálculo de sumas, que estimen el número de caramelos en un tarro, la longitud de una línea en pulgadas, y que coloquen un número sobre una recta numérica con los extremos marcados con dos numerales (Es decir, sobre todos los tipos de tareas de estimación numérica). En un primer experimento, se replicaron los hallazgos de anteriores investigaciones en cuanto a la evolución de la estimación en la recta numérica desde un modelo logarítmico a otro lineal. Otro resultado fue que con la edad, la precisión de las estimaciones (dentro de las demás categorías) aumenta. Los

[103] Dentro de la categoría de 'estimación numérica', los autores no incluyen la estimación de medidas de magnitudes continuas, aunque sí consideran este tipo de estimación como parte de la 'estimación numérica', como puede verse en Booth y Siegler (2006).

autores realizan un segundo experimento dentro del estudio para investigar si el cambio del modelo logarítmico al lineal se produce en todos los tipos de estimación numérica y qué relaciones hay entre la habilidad en los cuatro distintos tipos de estimación. Los autores encuentran que, para los alumnos de segundo de Primaria, hay correlaciones positivas significativas entre todas las habilidades de estimar (tomadas dos a dos) salvo para la estimación en cálculo y la estimación de numerosidades y para la estimación en medida y la estimación de numerosidades. Para cuarto de Primaria, la habilidad de estimar cálculos no tiene correlación significativa con ninguna de las otras habilidades de estimar. Los autores piensan que esto se debe a que la estimación en cálculo implica conocimientos aritméticos de hechos numéricos y otras destrezas que lo asemejan más al cálculo escrito que a otros tipos de estimación. Los autores encuentran que en los diferentes tipos de estimación, al igual que se había visto en la estimación en la recta numérica, los alumnos comienzan teniendo un modelo de representación de magnitudes numéricas logarítmico. Los autores piensan que esta representación inadecuada de la magnitud numérica es la responsable del bajo rendimiento en todo tipo de tareas de estimación del que se ha informado en múltiples investigaciones pasadas.

3.4. Los trabajos de Hogan y colaboradores

Hogan y Brezinski (2003) se preguntan por cuántas habilidades cabe diferenciar dentro del ámbito de la estimación[104]. Tradicionalmente, hay una distinción de tres categorías en la estimación: Estimación de numerosidades, estimación en medida y estimación en cálculo[105]. El objetivo del trabajo de

[104] El título de su trabajo es: “La estimación cuantitativa: ¿Una, dos o tres habilidades?”

[105] Segovia (1997) distingue entre “Estimación en cálculo; referido a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados” (p. 15) y la estimación en medida, dentro de la cual sitúa la estimación de la numerosidad de cantidades discretas y la estimación de la medida de cantidades continuas.

Hogan y Brezinski es determinar las relaciones entre medidas de los tres tipos de estimación que se suelen encontrar en la literatura y entre estas y otras habilidades matemáticas. Para ello, participan 53 estudiantes de distintas carreras que cursan una asignatura de psicología. A los participantes se les administran 5 tests: Agilidad con números[106], razonamiento cuantitativo, estimación en cálculo, estimación en medida y estimación de numerosidades. Además, se utilizaron las puntuaciones de los alumnos en el SAT[107] en habilidad matemática y habilidad verbal. En los resultados de esta investigación se pone de manifiesto la estrecha relación entre la estimación en cálculo y la agilidad con números y el razonamiento cuantitativo. Por otra parte, separados de estas habilidades, y con una correlación positiva significativa entre ambas, estarían la estimación en medida y la estimación de cantidades discretas.

Las conclusiones de los autores tienen una gran relevancia para la enseñanza de la estimación. Dado que la habilidad de estimar cálculos parece depender de la rapidez de cálculo y el razonamiento cuantitativo, los autores indican que seguramente el mayor obstáculo para el aprendizaje de la estimación sea que la enseñanza de la estimación suele evitarse, según documentan varias investigaciones anteriores. Sin embargo, si se enseñan estrategias como el redondeo, el significado y uso de las aproximaciones y el examen de la razonabilidad de los resultados, la enseñanza de la estimación no debería producir problemas más allá de las dificultades que suponga el dominio de los conceptos del sistema de numeración decimal. Es decir, cualquier persona que adquiera una buena competencia general en matemáticas, desarrollará sin problemas su habilidad de estimar cálculos. Sin embargo, no ocurrirá lo mismo con la enseñanza de la estimación en medida y la estimación de cantidades

[106] Definida como la "habilidad de realizar operaciones aritméticas básicas con rapidez y precisión" (p. 270).

[107] El SAT es el "Scholastic Assessment Test".

discretas, pues estas habilidades no se desarrollan con la habilidad matemática general, sino que su dominio puede depender más de habilidades perceptivas o espaciales y por tanto, debe atenderse a su desarrollo en la enseñanza.

Hogan, Wyckoff, Krebs, Jones y Fitzgerald (2004) estudian la posible relación entre la habilidad de estimar y la 'tolerancia del error'. Esta última es una variable afectiva que ha sido considerada en pasadas investigaciones (Reys, Bestgen, Rybolt, y Wyatt, 1980, 1982; Sowder y Wheeler, 1989; Sowder, 1989, 1992; Rubenstein, 1985; LeFevre, Greenham y Waheed, 1993) como una de las características que deberían tener los buenos estimadores.

Los autores se basan en el modelo de los 'Cinco Factores' de McCrae y Costa[108] (1985), que postula la existencia de cinco dimensiones independientes de la personalidad: Neuroticismo, Extroversión, Apertura a la Experiencia, Amabilidad y Sentido de Responsabilidad. El NEO (Inventario de personalidad, Desarrollado por McCrae y Costa, 1985) aísla un factor con una buena consistencia estadística: la *apertura a la experiencia*. Esta se considera formada por la receptividad a los sentimientos y estados internos y el predominio de la fantasía (Colom[109], 1998).

Participan en la investigación 65 estudiantes de distintos títulos de Grado, que estudiaban una asignatura de Psicología, de entre 18 y 22 años. Los estudiantes realizan un test de estimación empleado anteriormente en Hanson y Hogan (2000) y en Hogan y Brezinski (2003). Se utilizó el NEO para medir la *Apertura a la experiencia*, identificando esta con la *Tolerancia al error*.

La correlación entre la *Apertura* y la *habilidad de estimar* fue de -0.09, con p = 0.49, claramente *no significativa*. Se encuentra una 'modesta' correlación significativa entre la *habilidad de estimar* y la *Amabilidad* (r = -0,25;

[108] McCrae, R. R. y Costa, P. T. (1985). Openness to experience. En R. Hogan y W.H. Jones (Eds.), *Perspectives in Personality* (vol. 1). Greenwich, CT: JAI Press.

[109] Colom, R. (1998). *Psicología de las diferencias individuales. Teoría y práctica*. Madrid: Pirámide.

p = 0,04). Esta correlación no había sido hipotetizada por los autores.

Los autores reconocen que una posible debilidad de la investigación está en la identificación de la *tolerancia al error* con la *apertura a la experiencia* del inventario de McCrae y Costa (1985) y proponen buscar alternativas para caracterizar y medir la *tolerancia al error* y, por otra parte, tratar de profundizar en las posibles relaciones entre la habilidad de estimar y los distintos factores de la personalidad.

Hogan y Parlapiano (2009) continúan la línea de investigación comenzada en el trabajo de Hogan y otros (2004) tratando de encontrar factores de la personalidad que correlacionen con la habilidad de estimar en cálculo y de estimar cantidades discretas. Participan 80 alumnos universitarios de distintas carreras, que cursan una asignatura de psicología, con edades entre los 18 y 20 años. Los autores utilizan una prueba de estimación de cantidades discretas tomada del trabajo de Sorkin[110] (1998), una prueba de estimación en cálculo adaptada de estudios anteriores de los autores (Hanson y Hogan, 2000; Hogan y Brezinski, 2003; Hogan y otros, 2004) y el cuestionario de los 16 factores de personalidad de Cattell[111] (5ª edición). En los resultados de este trabajo, la habilidad de estimar cantidades discretas no correlaciona significativamente con *ningún* factor de la personalidad. Sin embargo, en concordancia con los resultados hallados en Hogan y otros (2004), la habilidad de estimar cálculos correlaciona positiva y significativamente, aunque la correlación no sea alta ($r = 0{,}25$ y $p < 0{,}05$) con el factor dependencia/independencia del cuestionario de Cattell. Esto quiere decir que ser persuasivo, voluntarioso, competitivo o escéptico podrían ser factores que favorezcan el éxito en tareas de estimación

[110] Sorkin, R. D. (1998). *Projects in experimental psychology*. Bayport, NY: Life Science Assoc. [Computer software]

[111] El factor dependencia/independencia, de Cattell, coincide con el factor "amabilidad" de Costa y McCrae (1985). Las puntuaciones altas en el factor dependencia/independencia corresponden a personas críticas, agresivas, mordaces, emprendedoras e independientes.

aunque estos resultados, a decir de los propios autores, deben tomarse con gran cautela.

3.5. Resumen del enfoque psicológico en la investigación sobre estimación

Las investigaciones de Siegler y colaboradores, descritas en el apartado anterior, contienen resultados sobre el desarrollo del pensamiento numérico de los niños de Educación Primaria con interesantes implicaciones didácticas. Según se ve en el trabajo de Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2007), en el que se realiza un análisis de los sistemas de representación de los números naturales, la recta numérica es un sistema gráfico de representación fundamental[112]. En este contexto, la información que dan los trabajos de Siegler puede orientar la elaboración de actividades en segundo y tercero de Primaria, con el uso de la recta numérica, y de indicaciones, incluso, de qué tipo de números (los cercanos a 150, dentro del rango 0-1000) y qué tipo de intervención (con incluso un único feedback para una estimación) producen una mejora mayor, más rápida, y más global en el sistema de representación infantil sobre las magnitudes representadas por los numerales escritos.

En estas investigaciones, se considera "comprensible" que los participantes tengan representaciones logarítmicas, especialmente para números que resultan menos familiares en función de la edad[113]. Sin embargo, cambiar estas representaciones de las magnitudes numéricas lo antes posible (y hay cambios del modelo logarítmico a lineal que pueden tener lugar en último curso de Infantil y en segundo de Educación Primaria) será fundamental para mejorar la

[112] El más importante citado por los autores junto a las configuraciones puntuales.

[113] Los autores entienden que para un niño, por ejemplo, es más importante la diferencia entre recibir 1 regalo o 10, que entre recibir 1001 regalos y 1010. Igualmente, para los animales hambrientos (que también parecen tener representaciones logarítmicas de la magnitud numérica) es más importante la diferencia entre 1 o 2 presas, que entre 101 y 102.

habilidad de estimar en sus distintas variantes.

Por último, de los dos estudios correlacionales anteriormente descritos, realizados por Hogan y colaboradores, es difícil obtener implicación didáctica alguna. La *tolerancia al error,* tal como la describen Reys y otros (1982) tiene que ver con la comprensión de la estimación, que permite aplicarla en situaciones prácticas sin sentir incomodidad, por aceptar un cierto margen de error en los cálculos. A mi juicio, no puede identificarse con rasgo alguno de la personalidad independiente del conocimiento matemático. La 'tolerancia al error' es un rasgo de un conocimiento matemático con connotaciones de tipo 'afectivo', en un sentido amplio del término.

La investigación de Lemaire y Lecacheur (2001) resulta bastante interesante para la Educación Matemática, pues plantea un problema en que la aplicación de las matemáticas a la vida diaria tiene una gran relevancia: la conversión de francos a euros y viceversa. Sin embargo, el control de las variables que se hace en las demás investigaciones de Lemaire y colaboradores, hace que tengan menos interés para la Educación Matemática que para la Psicología. Por ejemplo, tanto Lemaire y Lecacheur (2002) como Lemaire, Arnaud y Lecacheur (2004) imponen a los participantes restricciones notables sobre el tipo de estrategias de estimación que pueden emplear, al limitar estas explícitamente al redondeo hacia arriba de los dos números a las decenas y el truncamiento de los dos números a las decenas. En ambas investigaciones los autores informan de que los participantes trataban de introducir una compensación previa al cálculo redondeando uno de los operandos (sumandos o factores) hacia arriba y otro hacia abajo. Esta estrategia, normalmente más precisa que las otras dos, fue prohibida en ambas investigaciones. El 'carácter estratégico' de las estrategias se ve bastante reducido al imponerse dos estrategias de forma rígida que, además, no coinciden con las estrategias que gran parte de los participantes elegirían de acuerdo a sus conocimientos anteriores.

4. La investigación sobre estimación en el periodo (1994-2011) dentro de la Educación Matemática

Una vez acabado el llamado “periodo dorado de la investigación sobre estimación”, y que se ha seguido la línea de investigación sobre estimación dentro de la Psicología, me centraré en la investigación dentro de la Educación Matemática, en el periodo 1994-2011.

Volkova (2005) desarrolla un marco teórico para describir el pensamiento de los alumnos al implicarse en tareas de estimación en cálculo. Basándose en la teoría sobre el desarrollo de Case[114], el trabajo de Case y Sowder (1990), una revisión de la literatura sobre estrategias de estimación y en los resultados de su estudio de casos con niños de octavo grado[115], elabora este marco. Según esta autora, hay cuatro niveles jerárquicos en el desarrollo del pensamiento en el ámbito de la estimación: (1) predimensional, (2) unidimensional, (3) bidimensional, y (4) bidimensional integrado[116]. En el *nivel 1*, los alumnos tienden a intentar dar la respuesta exacta, a imitar los procedimientos de cálculo escrito para dar estimaciones y tienen un conocimiento limitado sobre las relaciones de orden que se establecen entre los operandos y el resultado de una operación. En el *nivel 2*, comienzan a utilizar el redondeo y el truncamiento con números naturales; tienden a convertir fracciones y porcentajes en números decimales y posteriormente a eliminar la parte decimal para trabajar con números naturales; suelen emplear de forma repetida y poco

[114] Descrita en: Case, R. (1989). *El desarrollo intelectual: Del nacimiento a la edad madura*. Barcelona: Paidós.

[115] Equivalente aproximadamente a segundo de ESO en España.

[116] Estos son los nombres dados por Case a las subetapas de cada etapa del crecimiento cognitivo.

flexible las estrategias que les dan buen resultado. En el *nivel 3*, los alumnos tienden a emplear mayor variedad de estrategias de estimación y a mostrarse más flexibles en la elección de las mismas. Sin embargo, todavía no muestran la misma flexibilidad en el cambio de una estrategia a otra y no suelen utilizar distintas técnicas para valorar la razonabilidad de sus estimaciones. Por último, en el *nivel 4*, los alumnos son capaces de coordinar distintos componentes complejos y multidimensionales como son el cálculo mental y la proximidad, cambian con más flexibilidad de una estrategia a otra cuando experimentan dificultades en la estimación y utilizan diversas estrategias para comprobar sus resultados.

En otra investigación (Volkova, 2006a) se ha encontrado que el pensamiento en estimación de los maestros en formación, que han superado el estadio vectorial de Case (11-18 años), también puede ser descrito adecuadamente empleando el modelo de Volkova (2005).

Una limitación clara de estos trabajos es que han sido realizados con alumnos de bastante edad (14 años en adelante) como para considerar que el modelo refleja bien los distintos niveles de pensamiento que se producen a lo largo del aprendizaje de la estimación. En este sentido, resulta interesante comparar los resultados de Volkova (2005, 2006b) con la caracterización que hace Van den Heuvel-Panhuizen (2001) de la trayectoria de aprendizaje-enseñanza de la estimación para la Educación Primaria. En ella, propone tres fases para el aprendizaje del redondeo: la informal, en la que se inicia el aprendizaje del redondeo; la del redondeo dirigido por reglas, en la que se aprende la regla estándar del redondeo; y la fase de redondeo flexible, en la que los alumnos son capaces de hacer elecciones más adecuadas a las demandas de un contexto práctico alejándose en ocasiones de la aplicación rutinaria del redondeo estándar (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, pp. 177-178). La autora propone las mismas fases para el aprendizaje de la aplicación de la estimación a las cuatro operaciones básicas.

Tanto el planteamiento de Volkova (2005, 2006b) como el de Van den Heuvel-Panhuizen (2001), parecen compartir ciertos rasgos comunes: los alumnos, en ambos modelos, van aprendiendo destrezas a lo largo de su escolaridad ampliando su repertorio de conocimientos, y se atribuye un nivel inferior de pensamiento a los alumnos inflexibles que a los que exhiben mayor flexibilidad. Sin embargo, dada la diferencia de edad entre los alumnos de Educación Primaria y los de Volkova (2005, 2006b) que prácticamente han concluido la escolaridad obligatoria, se observa que, en el primer caso, la primera fase se caracteriza por el dominio de un conocimiento intuitivo, mientras que en el segundo caso, la fase inicial se caracteriza por el peso de muchos años de enseñanza tradicional, y por el consiguiente predominio de la enseñanza de los algoritmos y la ausencia de un conocimiento adecuado de los procesos de estimación.

Volkova (2006a) se plantea el objetivo de analizar si el marco teórico evolutivo para la estimación, previamente desarrollado en Volkova (2005) con alumnos de octavo grado, resulta adecuado para caracterizar el pensamiento en estimación de maestros en formación. Este marco teórico también se emplea para describir el cambio en el pensamiento de los maestros sobre la estimación con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes.

Para ello, realiza un estudio de casos con cinco maestros en formación. Estos maestros son seleccionados de un grupo de alumnos que cursan una asignatura centrada en la resolución de problemas matemáticos y en el razonamiento y comprensión de los números y sus propiedades. Los cinco maestros son entrevistados en profundidad antes y después del periodo de instrucción, empleando un instrumento compuesto por 15 cuestiones[117] sobre estimación.

[117] De las 15 cuestiones, 9 consisten en cálculos descontextualizados (307 + 750; 712 – 458; 17 × 38; 319 ÷ 45; $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$; $3\frac{1}{8}+2\frac{4}{5}$; $6\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}$; $3\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}$; $\frac{11}{12}\div\frac{3}{4}$) y las otras 6 cuestiones son

Los procedimientos seguidos por los alumnos para estimar son analizados de un modo diferente que en anteriores investigaciones. En Volkova (2006a), en lugar de categorizarse los procedimientos identificando las estrategias o los procesos de estimación que se reflejan en ellos, se agrupan los procedimientos en clusters según sus semejanzas y elabora descriptores para cada clúster. Después estos descriptores se comparan con los descriptores de los niveles del marco teórico sobre pensamiento en estimación desarrollado por la autora en Volkova (2005) con el fin de buscar correspondencias entre los clusters y los niveles. Esta estrategia lleva a Volkova (2006a) a confirmar las hipótesis de su trabajo. Quizá dos limitaciones importantes en este trabajo son el pequeño número de alumnos entrevistado (cinco) y que las cuestiones elegidas para las entrevistas no suponen una muestra representativa de los tipos de números citados en el título del mismo. Por ejemplo, apenas hay cuestiones sobre números racionales con escritura decimal.

Entre los resultados encontrados en la investigación de Volkova (2006a) destaca, para los objetivos de esta investigación, que se encuentran las ideas equivocadas, con fracciones menores que uno, de que la multiplicación siempre aumenta y la división siempre disminuye. Esto se refleja en las entrevistas realizadas con los sujetos acerca de las cuestiones $3\ \frac{1}{2} \times {}^{9}/_{10}$ y ${}^{11}/_{12} \div \frac{3}{4}$ en que los maestros en formación "transponen incorrectamente su comprensión sobre la multiplicación y la división con números naturales a la multiplicación y división con fracciones" (Volkova, 2006a, p. 171).

Bana y Dolma (2004) estudian la relación entre la habilidad de cálculo escrito y la de estimación con alumnos de séptimo curso[118]. Para ello diseñan dos pruebas (una de cálculo escrito y otra de estimación) con 15 ítems cada una, y

problemas verbales para los que hay que dar una estimación (por ejemplo, "Hay 476 alumnos en la escuela. 7/8 de ellos asistieron al partido de fútbol del pasado viernes. Estima el número de alumnos que asistieron."). (Volkova, 2006a, pp. 190-191)

[118] Aproximadamente equivalente a primero de ESO.

con los ítems emparejados del modo que se observa en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. *Ejemplos de ítems emparejados de estimación y cálculo*[119]

Estimación	Cálculo
Sin calcular la respuesta exacta, rodea con un círculo la mejor estimación para: $0{,}5 \times 840$ a. $840 \div 2$ b. 5×840 c. 5×8400 d. $0{,}50 \times 84$	Calcula: $0{,}5 \times 840$
Sin calcular la respuesta exacta, rodea con un círculo la mejor estimación para: ¾ + ½ a. 1 b. 3 c. 4 d. 6	Calcula: ¾ + ½

Los alumnos tuvieron un rendimiento muy superior en cálculo escrito que en estimación. Sólo en 4 de los 15 ítems, el porcentaje de acierto correspondiente al ítem de estimación fue superior al de cálculo escrito. Esta situación se dio en los ítems: 18×19; $598 \div 9$; $590{,}43 + 312{,}5$; y ¼ de 798. En ellos, las estimaciones son sencillas y, prácticamente, no se han de manejar números decimales. Sin embargo, en ítems en los que aparecían decimales menores que uno, en los que la parte decimal no puede eliminarse al redondear o al truncar el número ($0{,}5 \times 840$; $87 \times 0{,}9$) y en el que los resultados violan las expectativas de que "la multiplicación aumenta", el porcentaje de acierto en estimación no llega a la mitad del correspondiente en cálculo escrito. Los autores atribuyen estas diferencias al distinto énfasis que se suele poner en la escuela en ambos tipos de tareas (de cálculo escrito y estimación). También se subrayan las dificultades que surgen cuando aparecen los números decimales, en especial, los menores que uno.

Ainsworth, Bibby y Wood (2002) desarrollan el entorno de aprendizaje con ordenadores CENTS[120] para el aprendizaje de la estimación con alumnos de 9 a 12 años. Dicho entorno de aprendizaje está diseñado para que los niños

[119] Tabla tomada de Bana y Dolma (2004)

[120] CENTS son las iniciales de '**C**omputational **E**stimation **N**otation-based **T**eaching **S**ystem' (Sistema para la Enseñanza de la Estimación en Cálculo basado en Notaciones).

practiquen las destrezas de estimación y reflexionen sobre las mismas. El objetivo fundamental es que los alumnos comprendan cómo la transformación de los datos afecta a la precisión de las estimaciones. Para ello se utilizan cuatro tipos de representaciones[121] para cada estrategia de estimación, junto con su resultado: Una representación numérica, en la que aparece el porcentaje de error cometido; una representación del porcentaje de error en un histograma, en el que cuanto más baja es la altura del rectángulo correspondiente a la estimación, mejor es la estimación; una representación con una diana, en la que el centro de la diana corresponde a una respuesta exacta y según aumenta el porcentaje de error se produce un alejamiento del centro de la diana; y una representación con un muro al que se arrojan bolas de arena, en el que también aparece representada la precisión del lanzamiento en función del porcentaje de error de la estimación. La función de estas representaciones es la de proporcionar una información visual sobre las estimaciones dadas, de modo que la representación permita reflexionar al estimador sobre la precisión de su estimación en términos de intensidad y dirección.

Con este entorno de aprendizaje para la intervención, los autores abordan un estudio experimental con 48 alumnos de quinto de Educación Primaria. A los alumnos se les administran un pretest de cálculo mental y uno de estimación con ocho productos de dos números de tres cifras cada uno y doce productos de dos números de dos cifras cada uno (por ejemplo, 213×789 o 21×78). Después se produjo la intervención con el entorno CENTS, de entre 80 a 100 minutos de duración con cada alumno en dos sesiones distanciadas una semana. En la intervención, los alumnos son asignados aleatoriamente a tres condiciones experimentales. Cada una de estas condiciones suponía que los alumnos debían dar dos estimaciones para un mismo cálculo utilizando truncamiento y

[121] http://www.psychology.nottingham.ac.uk/Staff/Shaaron.Ainsworth/ainsworthJLS2002.pdf

En esta dirección puede descargarse Ainsworth, Bibby y Wood (2002) y examinarse con detalle los cuatro tipos de representaciones. Consulta hecha el 15-11-2009.

redondeo y que el feedback les aparecía en dos de las cuatro representaciones de modo que en la condición de 'representación pictográfica' los alumnos veían el resultado de su estimación representado en una diana y en un muro; en la condición de 'representación matemática', veían los resultados en porcentajes y en pictogramas; y en la 'representación mixta', las estimaciones aparecían representadas en porcentajes y en una diana. Finalmente, se administró un postest paralelo al pretest de estimación.

El resultado principal de este estudio es que los alumnos asignados a la representación pictográfica y a la matemática mejoraron significativamente en su rendimiento en estimación mientras que los alumnos que utilizaron el método mixto de representación no mejoraron. Los autores atribuyen esta ausencia de mejora a la dificultad de traducir entre representaciones diferentes, propia de la condición de representación mixta. Tras este resultado, los autores realizan un segundo experimento para valorar si una intervención más larga, en la que los alumnos pudieran aprender a traducir mejor entre representaciones, posibilitaría que la mejora fuese significativa en las tres condiciones de representación (incluida la mixta). La mejora significativa hipotetizada para este segundo experimento se produce, pero los autores atribuyen el éxito de la intervención, no a que los alumnos hayan aprendido a traducir entre representaciones diferentes, sino a la integración de las representaciones en una única representación que contiene toda la información necesaria para que los alumnos puedan reflexionar sobre sus estimaciones.

Munakata (2002) estudia la posible relación existente entre la habilidad de estimar, las actitudes hacia la estimación y la *amplitud categorial*[122],

[122] La *amplitud categorial* es una variable ligada a la personalidad muy utilizada en Psicología que consiste en el *rango de casos incluidos por un sujeto en una categoría*. Se evalúa mediante un test en que se observa qué cota inferior y superior sitúa cada individuo alrededor de un valor medio dado. Si la cota inferior es baja y la superior es alta, la amplitud categorial del individuo es alta. La amplitud categorial es un rasgo de la personalidad perteneciente al ámbito

considerando estas dos últimas como posibles factores afectivos ligados a la estimación.

Participan 344 alumnos de Educación Primaria y Secundaria[123]. A estos estudiantes se les administra un cuestionario dividido en tres partes: habilidad de estimar, actitudes hacia la estimación y amplitud categorial[124]. En una segunda etapa de la investigación, se seleccionan 20 alumnos de undécimo grado (primero de Bachillerato) con resultados extremos en el test de amplitud categorial para evaluar su uso de estrategias ante problemas de Fermi (ver Ross y Ross, 1986).

En los resultados de la investigación de Munakata (2002) no se encuentran correlaciones significativas entre la habilidad de estimar, la actitud hacia la

---

del 'estilo cognitivo' que se ha intentado relacionar en diversas investigaciones con la 'actitud de toma de riesgos', con la 'tolerancia a la ambigüedad' y con la 'confianza para afrontar situaciones nuevas' (Munakata, 2002, p. 34-35). El gran interés que tienen todas estas variables de tipo cognitivo es que en distintas investigaciones se han tratado de vincular directamente a la habilidad de estimar o, indirectamente, a través de una relación con la 'tolerancia al error', identificada por Reys y otros (1982) como característica de los buenos estimadores. El posicionamiento en este trabajo con respecto a este tipo de variables se ha hecho al valorar el trabajo de Hogan, Wyckoff, Krebs, Jones y Fitzgerald (2004), al indicar que, a mi juicio, la 'tolerancia del error' no puede reducirse a una variable de personalidad, independiente del contenido matemático, sino que está fuertemente ligada al conocimiento de aspectos matemáticos de los procesos de estimación.

[123] Los 344 alumnos, en el sistema educativo español, serían de quinto de primaria, primero de ESO, tercero de ESO y primero de bachillerato, equivalentes en edad a los grados 5, 7, 9 y 11 del sistema educativo de EE. UU.

[124] Un ejemplo de ítem del test de 'amplitud categorial' es el siguiente (Munakata, 2002, p. 157):
2. Los ornitólogos (expertos en pájaros) dicen que la mejor estimación para la velocidad media de los pájaros en vuelo es aproximadamente de 17 millas por hora. ¿Cuál podría ser:
a. la velocidad de vuelo del pájaro más rápido?
1) 25 millas por hora; 2) 105 millas por hora; 3) 73 millas por hora; 4) 34 millas por hora.
b. la velocidad de vuelo del pájaro más lento?
1) 10 millas por hora; 2) 2 millas por hora; 3) 12 millas por hora; 4) 5 millas por hora.

estimación y la amplitud categorial. Entre las conclusiones del trabajo de Munakata[125](2002) se encuentra que "si el test de amplitud categorial es una medida válida para la tolerancia del error, entonces la tolerancia del error y la habilidad de estimar no están relacionadas" (p. 124). Sin embargo, más adelante, el autor señala que el hecho de que esta ausencia de correlación haya sido también detectada por Paull (1971) le hace inclinarse a pensar (en lo que estoy totalmente de acuerdo) que lo más probable es que el test de amplitud categorial no sea una medida válida de la tolerancia del error, con lo cual, el problema de caracterizar y medir la tolerancia del error continúa siendo un interesante problema abierto para la investigación sobre estimación.

Hurley, Boykin y Allen (2005) estudian el rendimiento en estimación de 78 estudiantes afroamericanos[126] de quinto grado (equivalente a quinto de Educación Primaria). El objetivo de la investigación es comparar entre un contexto de aprendizaje cooperativo y otro individual. Para el periodo de

[125] Resulta curioso que Munakata (2002, p. 122) cite el trabajo de Sowder y Wheeler (1989) como referencia básica en la que se postula la relación entre la habilidad de estimar y la tolerancia del error. Esto no es cierto, pues esta relación, junto a la definición original de la 'tolerancia del error' se propone por primera vez en Reys y otros (1982). Quizá el no disponer de la definición original que utilizan Reys y otros (1982) para la tolerancia del error es lo que impide advertir a Munakata (2002) sobre el enorme peso que tiene el conocimiento matemático (conceptual de la estimación) en dicha definición.

[126] Según trabajos anteriores revisados por los autores, los alumnos afroamericanos se benefician más de los contextos de aprendizaje cooperativo. En opinión de los autores, esto se debe al papel que juega el *comunalismo* en la cultura afroamericana. El *comunalismo* es un rasgo cultural que se caracteriza por una orientación social en la que priman las interacciones y las relaciones, una preocupación prioritaria por la problemática del grupo, un sentido de pertenencia al grupo que es central en la configuración de la propia identidad, y una búsqueda de recursos que pueden compartirse, situada por encima de la búsqueda del propio beneficio. En la investigación de Hurley y otros (2005) se identifica un aprendizaje de enfoque comunalista con el aprendizaje cooperativo, con el fin de hacer operativo en el estudio un posible 'enfoque comunalista' de la educación.

instrucción sobre estimación se diseña un cuaderno de trabajo de 11 páginas, basado en el trabajo de Reys, Reys, Trafton y Zawojewski (1985), para la enseñanza de la estrategia de 'uso de números compatibles[127]'. Para este estudio experimental, se diseña un test compuesto por 15 multiplicaciones para las que debe elegirse una estimación entre 4 opciones (por ejemplo, para 20×97, se presentan las opciones: a. 21000; b. 2000; c. 4700, y d. 3100, de modo que la opción correcta se produce aplicando la estrategia de números compatibles: $20 \times 97 \approx 20 \times 100 = 2000$). Confirmando la hipótesis planteada por los autores, el rendimiento en el postest de estimación fue significativamente superior ($F = 7{,}49$ y $p < 0{,}01$) en el grupo en de aprendizaje cooperativo que en el de aprendizaje individual[128].

Seethaler y Fuchs (2006) realizan un estudio correlacional[129] con 315 alumnos de tercero de Educación Primaria con el objetivo de examinar las posibles relaciones de la habilidad de estimar con varias habilidades cognitivas, de

[127] En el trabajo de Hurley y otros (2005), se emplea el término 'nice numbers', considerado equivalente en algunos trabajos al de 'compatible numbers', y que traduzco aquí por 'uso de números compatibles' -ver Reys, Reys, Trafton y Zawojewski (1985) y Rubenstein (1987).

[128] La investigación de Hurley y otros (2005) es un ejemplo muy claro de un tipo de estudios en los que se elige la estimación, como contenido de aprendizaje, por ser una destreza matemática que no suele enseñarse en muchos colegios. Realmente, se trata de una investigación acerca del comunalismo y el aprendizaje cooperativo en la Educación, más que una investigación sobre estimación. No obstante, se pueden extraer de ella conclusiones de interés para la enseñanza de la estimación al mostrarse el beneficio para su aprendizaje de un entorno cooperativo.

[129] Esta investigación es parte de un estudio longitudinal de 4 años de duración con alumnos de Educación Primaria sobre la enseñanza y la evaluación de las matemáticas en el cuál se trata, entre otros objetivos, de localizar variables cognitivas que puedan predecir el rendimiento en determinadas áreas de las matemáticas. La finalidad de este trabajo es utilizar los resultados de los tests iniciales para prevenir dificultades de aprendizaje en matemáticas. En un primer estudio no se introdujo, entre las destrezas matemáticas, la habilidad de estimar. Por esta razón, la estimación tiene un papel protagonista en este trabajo, dentro del estudio más amplio que se extendió a lo largo de 4 años.

lectoescritura y con algunos aspectos del rendimiento en cálculo escrito. Durante varias sesiones de clase, se administran a los alumnos: tres tests sobre *habilidades lingüísticas* (de comprensión oral, vocabulario y gramática), un test de *razonamiento no verbal* (que incluía clasificaciones, seriaciones y analogías), un test de *formación de conceptos*, un test de *velocidad de procesamiento* en tareas de emparejamiento visual, dos tests de *memoria* (uno que examinaba la memoria a largo plazo y otro la memoria de trabajo), uno sobre *atención* (construido a partir de ítems utilizados para el diagnóstico de la hiperactividad y déficit de atención), tres tests de *lectura*, un test de *sumas y restas* de dos números entre 0 y 12 en formato horizontal, un test de *sumas y restas de números de dos dígitos* y, finalmente, un test de *estimación de sumas y restas de números de dos dígitos* del mismo tipo que el test anterior de cálculo escrito. Los autores llegan al resultado de que los únicos predictores adecuados del rendimiento en estimación son la destreza en combinaciones numéricas con números de un dígito, la memoria de trabajo, la atención, el razonamiento no verbal y formación de conceptos.

Yang (1995, 2005) evalúa el sentido numérico de 21 alumnos de sexto grado en Taiwan. Dentro del sentido numérico, se consideran los siguientes componentes[130]:

> 1. Comprensión de los significados básicos del número; 2. Reconocimiento de la magnitud de los números; 3. Capacidad para el uso adecuado de puntos de referencia; 4. Conocimiento del efecto relativo de las operaciones sobre los números; 5. Uso de estrategias adecuadas para la resolución de problemas numéricos, incluyendo la estimación, el cálculo

[130] Como explicaba en la introducción de la revisión de investigaciones, en muchos estudios, la estimación ha dejado de ser el foco matemático central, para pasar a ser estudiada (como en el trabajo referenciado en este párrafo) como una componente fundamental del sentido numérico.

> mental, […] así como ser capaz de evaluar la razonabilidad (Yang, 2005, p. 320).

Para evaluar el sentido numérico de los alumnos se realiza una entrevista en la que se pide que los alumnos razonen sus respuestas a las siguientes preguntas[131]:

> 1. En el siguiente problema, coloca el punto decimal correctamente, empleando la estimación: 534.6 × 0.545. Opciones de respuesta: (1) 2.91537; (2) 29.1537; (3) 291.537; (4) 2915.37
> 2. 60 × 40 es una estimación para 63 × 37. ¿Es la respuesta exacta menor, igual o mayor que 2400? ¿Por qué? Opciones: (1) menor; (2) igual; (3) mayor; (4) debo usar papel y lápiz.
> 3. Sin calcular la respuesta exacta, rodea con un círculo la mejor estimación para 72 ÷ 0.025. Opciones: (1) Mucho mayor que 72; (2) Un poco mayor que 72; (3) Un poco menor que 72; (4) Mucho menor que 72.
> 4. Estima el siguiente cálculo: 53687 + 8365 + 1638 + 28
> 5. Estima el siguiente cálculo: 8326 ÷ 86
> 6. ¿Cuántas números decimales distintos hay entre 7.43 y 7.44? Opciones: (1) Ninguno; (2) Uno; (3) Nueve o diez; (4) Infinitos.
> 7. ¿Cuántas fracciones distintas hay entre 8.3 y 8.4? Opciones: (1) Ninguna; (2) Una; (3) Nueve o diez; (4) Infinitas. (Yang, 2005, pp. 322-24)

Los resultados de este trabajo indican que los estudiantes de Taiwan participantes tendía a aplicar reglas y algoritmos para justificar las opciones elegidas en la entrevista. Los alumnos apenas utilizaron estrategias de estimación. En concordancia con resultados de otras investigaciones, se llega a

[131] Pienso que tiene interés descender, en este caso, al detalle de describir el instrumento empleado en el estudio, a fin de que se pueda valorar hasta qué punto una investigación sobre sentido numérico, dentro del modelo de división del sentido numérico en componentes, puede considerarse también investigación sobre estimación en cálculo.

la conclusión de que un énfasis excesivo en los algoritmos escritos puede convertirse en un impedimento para el desarrollo del pensamiento numérico.

Yang, Reys y Reys (2009) estudian las estrategias relativas al sentido numérico de 280 maestros en formación de Taiwan Se estudian dos aspectos del sentido numérico: el uso de puntos de referencia, como 1, ½ y 0, para reconocer la magnitud de un número; y el conocimiento del efecto relativo de la realización de una operación en el resultado de la misma. Se administró a los 280 estudiantes un test de 12 ítems, dos de los cuales, se muestran a continuación:

> 1. Tom caminó 0.4828 km, Jack caminó $^{13}/_{38}$ km, María caminó $^{8}/_{15}$ km, Jane caminó $^{17}/_{16}$ km, David caminó 0.966 km, y Bob caminó $^{7}/_{29}$ km. <u>Sin calcular una respuesta exacta</u>, por favor, ordena las distancias que caminaron todos ellos desde la más larga a la más corta. ¿Por qué?
>
> 2. Lin utilizó la calculadora para calcular 0.4975 × 9428.8, aunque luego se le olvidó escribir el punto decimal. <u>Sin calcular una respuesta exacta</u>, por favor, usa la estimación para decidir cuál de las siguientes opciones muestra la localización correcta del punto decimal.
>
> (1) 46.90828 (2) 469.0828 (3) 4690.828 (4) 46908.28
>
> (5) Sin calcularlo, no puedo decidirme por una respuesta.
>
> (Yang, Reys, y Reys, 2009, pp. 388-389).

En este estudio se encontró que solo una quinta parte de los maestros en formación emplearon estrategias basadas en el sentido numérico (como usar puntos de referencia o el conocimiento del efecto de las operaciones sobre el resultado). La mayoría de los maestros en formación utilizaron procedimientos escritos o métodos basados en reglas para responder el cuestionario. Los resultados hallados en esta investigación son consistentes con los de otros estudios previos realizados en Taiwan con alumnos de quinto y sexto de Educación Primaria y alumnos de Educación Secundaria y apuntan a la necesidad de un cambio en el currículo de la enseñanza obligatoria y en el de la formación de maestros que ponga un énfasis mayor en el sentido numérico.

Alajmi y Reys (2007) investigan el tratamiento que dan al concepto de razonabilidad en sus clases 13 profesores de octavo grado (equivalente a 2º de ESO). Se entrevista a los profesores para ver qué concepción tienen sobre la razonabilidad, qué tratamiento le dan en el aula y cómo valoran este concepto. Se administra a los alumnos de estos profesores un Test de Respuestas Razonables (RAT) y se pide a los profesores que valoren las respuestas de sus alumnos a este Test para disponer de información complementaria.

La mayoría de los profesores kuwaitíes piensan que una respuesta es razonable ¡solamente si es exacta! Sólo 3 profesores trataban el concepto de razonabilidad con sus alumnos y solo en presencia de respuestas erróneas de los alumnos. Ninguno tenía en cuenta el concepto de razonabilidad en la planificación de su enseñanza por ser un concepto que no aparece en el currículo kuwaití.

Quizá el resultado más interesante de este trabajo es la propia caracterización de la *razonabilidad*[132] que hacen los autores. Como resultado de la revisión de la literatura, se reconocen dos facetas fundamentales para el concepto de razonabilidad: (1) Las relaciones numéricas y el efecto de las operaciones y (2) La practicidad (o el sentido práctico en un contexto determinado).

En el primer aspecto, la comprensión del efecto que tiene multiplicar un número por un decimal debe llevar a un alumno a reconocer, por ejemplo, que 29.135 no puede ser una respuesta razonable para 534.6 × 0.545, porque multiplicar por 0,545 es aproximadamente hacer la mitad de 534.6. Los autores enfatizan que el de razonabilidad es un concepto diferente del de precisión,

[132] Como se ve más adelante, Alajmi y Reys (2007) distinguen dos facetas en la razonabilidad pero, a continuación, explican cada una de ellas a través de ejemplos. Como ocurre siempre que se trata un concepto elusivo como el de razonabilidad, es más sencillo poner un ejemplo en que claramente una respuesta no es razonable que explicar en qué consiste exactamente la razonabilidad.

establecida a través del porcentaje de error. "Por ejemplo, 31.94 no puede ser una respuesta razonable para 1.99×15 porque 1.99 está cerca pero es menor que 2, y 2×15 son 30. Así que 30 es una cota superior para un resultado razonable" (Alajmi y Reys, 2007, p. 78). Como se ve en este caso, 31.94, a pesar de ser una respuesta muy próxima, no puede considerarse como razonable. Por otra parte, desde un punto de vista práctico, por ejemplo, una respuesta de 5.30€ para el coste de la compra semanal de una familia con 4 miembros no parece razonable. La respuesta debe 'tener sentido' dentro del mundo real.

Alajmi (2009) estudia la comprensión que tienen 59 maestros de Educación Primaria y Profesores de Educación Secundaria sobre la estimación en cálculo, así como su visión acerca de la importancia de la estimación en el currículo.

A los profesores se les entrevistó para averiguar: (a) la definición que daban sobre la estimación en cálculo, (b) cómo utilizaban la estimación en sus vidas, (c) cuándo consideraban un estimación razonable, y (d) las estrategias que utilizaban al estimar.

Dentro de la entrevista se presentaron 7 problemas a cada profesor para ver cómo estimaban la respuesta. En los problemas aparecían números naturales, decimales, y fracciones.

Las estrategias utilizadas por los profesores ante estos 7 problemas fueron clasificadas como *efectivas* o *inefectivas*. Estrategias efectivas eran aquellas en las que se detectaba alguno de los tres procesos de reformulación, traducción y compensación, característicos de la estimación. Sólo un 40% de las estimaciones fueron efectivas y dentro de ellas destacó sobre todas el uso del redondeo. Las estrategias inefectivas fueron aquellas en las que los profesores intentaban aplicar un algoritmo para determinar la respuesta exacta, empleaban conceptos matemáticos incorrectos, o daban lugar a una estimación no razonable.

Entre los resultados de esta investigación destaca el que para más de un 60% de los profesores, la estimación es lo mismo que el redondeo. A casi la mitad de los profesores, la estimación no les parece importante dentro de las matemáticas. A más de la mitad de los profesores no les gustaría enseñar estimación (el 80% no la enseñan nunca y el 20% ocasionalmente, cuando enseñan la división larga o para corregir errores); a la mayoría les parece muy difícil su aprendizaje o manifestaron el temor de que la enseñanza de la estimación supusiese una dificultad para el aprendizaje de los algoritmos convencionales que requieren una respuesta exacta. Muchos profesores manifestaban que la estimación era solo adecuada para los alumnos mejores y que solo merecía la pena enseñarla relacionada con la división larga. El análisis de las respuestas de los profesores puso de manifiesto las dificultades que es necesario afrontar para abordar el problema de la inclusión de la estimación en el currículo de matemáticas.

Liu (2009) investiga el rendimiento en estimación y el uso de estrategias de estimación de 403 alumnos de tercer y quinto grado de Educación Primaria en China. Utiliza un test compuesto por 32 ítems (todos ellos de multiplicación) en situaciones de resolución de problemas (distinguiendo entre problemas de aplicación, sencillos y problemas complejos) y con ítems de cálculo descontextualizados (expresados en forma de operación). También utiliza otras dos variables de tarea: el tamaño de los números, con multiplicaciones de números de un dígito por otros de dos, hasta multiplicaciones de números de dos dígitos por otros de tres, y el 'tipo de ajuste' (largo[133] en operaciones como 54×56 y corto en operaciones del tipo 9×12). En la investigación se encontró que resultaron más fáciles los ítems con números de un dígito que los que tenían números de varios dígitos, los ítems con ajuste corto que los de ajuste largo, y los ítems con operaciones sin contexto a los inmersos en situación de

[133] La expresión 'ajuste grande' se refiere, en Liu (2009), a que el redondeo de los números transforma estos, modificándolos de forma notable, en comparación con otros que, al redondearse, se modifican menos. Así, 9×12 se sustituye por 10×10 y el ajuste es pequeño, puesto que las sustituciones están cerca de los valores iniciales sustituidos.

resolución de problemas[134]. Los alumnos tienden a dar respuestas exactas, a pesar de que se les pida estimaciones, siempre que pueden. Los alumnos de tercer grado tendieron a dar estimaciones utilizando el redondeo, mientras que los alumnos de quinto grado emplearon con más frecuencia la imitación del algoritmo escrito. Hay dos aspectos del trabajo de Liu (2009) que resultan especialmente interesantes. En primer lugar, el sistema de puntuación para las estimaciones. En principio, parte del sistema de puntuación de Levine (1982), ya explicado en este trabajo, en que obtienen cero puntos las estimaciones con un porcentaje de error mayor del 30%. Para Liu (2009) este porcentaje resulta muy exigente para los niños de 3º y 5º de Educación Primaria y opta por asignar 1 punto a las estimaciones con un porcentaje de error menor del 40% y 0 puntos a las demás. La elección del 40% se justifica[135] en este trabajo en que muchos alumnos dieron la estimación de 200 para la operación 8×18, sustituyéndola por 10×20, con un error cercano al 39%.

En segundo lugar, otro aspecto interesante de la investigación de Liu (2009) es la consideración que hace sobre las estrategias en función de la edad de los alumnos. Liu (2009) parte del modelo de procesos de Reys y otros (1982) y utiliza para afinarlo las estrategias específicas de Levine (1982) que se adaptan bien al tipo de tareas de multiplicación que plantea Liu (2009). Sin embargo, justificándolo en la edad de los alumnos, elabora un nuevo esquema con tres

[134] Hay algunos aspectos de esta investigación deficientemente explicados. En primer lugar, se dice que los 32 ítems son de multiplicación, pero los hay de resolución de problemas y de cálculo simbólico. Ahora bien, si todos los ítems son de multiplicación, los alumnos descubrirán pronto que lo único que deben hacer con los problemas es tomar los datos y multiplicarlos. Este aspecto no está suficientemente explicado en la metodología.

[135] En el fondo, esta opción vuelve a incidir en el carácter arbitrario de cualquier porcentaje de error para evaluar las estimaciones. Seguramente, para el porcentaje del 40% sea posible encontrar una operación a la que, aplicando una estrategia que parece razonable para la situación, y se obtenga un porcentaje de error ligeramente superior al 40%.

estrategias[136]:

a) Estrategias basadas en la imitación mental del algoritmo escrito.

b) Estrategias del tipo "redondea y multiplica".

c) Estrategias alternativas al cálculo escrito como las que usan la propiedad distributiva[137] ($8 \times 18 = 8 \times 10 + 8 \times 8$) o la factorización ($5 \times 144 = 10 \times 144/2$).

Hanks[138] (2008) realiza una investigación[139] sobre estimación con fracciones[140] con 10 alumnos de octavo grado (equivalente a segundo de ESO) en el que trata de identificar diversos componentes en los procesos de estimación empleadas para abordar las tareas[141]. El autor trata de emplear una unidad de análisis (los

---

[136] Estas tres estrategias son bastante parecidas a las que propongo como estrategias en este trabajo. Lo que realmente diferencia el esquema de Liu (2009) del de Reys y otros (1982) o del de Levine (1982) es que Liu (2009) plantea un análisis de las estrategias en un nivel diferente, más fino que el de Reys y otros (1982) al proponer sus *procesos*, y menos fino que el de Levine (1982) con sus *estrategias específicas*.

[137] Lo distintivo de esta forma de estimar, frente al uso de la imitación del algoritmo, no es el uso de la propiedad distributiva, que evidentemente se hace en ambos casos, sino que en esta estrategia se opera de izquierda a derecha, al contrario que en el algoritmo escrito.

[138] A pesar de que este trabajo no está publicado en un medio importante, contiene reflexiones de gran interés de cara a la consideración sobre qué es una estrategia, los diferentes niveles de análisis y de clasificación en que se pueden estudiar las estrategias, y qué relación hay entre las estrategias y sus componentes (destrezas como la aproximación, el cálculo, la operación de la coma decimal, etc.).

[139] Es una tesina de máster en el Departamento de Educación Matemática de la "Brigham Young University".

[140] Como señala el autor, solo el trabajo anterior de Hanson y Hogan (2000) había tratado la estimación con fracciones, pero con estudiantes adultos, no con alumnos de secundaria como en este caso.

[141] Las tareas que se utilizan en Hanks (2008) son cuatro operaciones y cuatro problemas en los que hay que estimar la solución. Las operaciones son: $\frac{49}{52}-\frac{1}{4}$; $\frac{14}{19}\times\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{3}+\frac{28}{41}$; $5\div\frac{39}{72}$

Un ejemplo de problema es: "La población alemana consume 7/30 del chocolate mundial y en Estados Unidos se come 6/25. Estima qué parte del chocolate mundial come la población de los componentes), de tamaño 'inferior' a las estrategias de estimación, para tratar de realizar un análisis más fino que el de investigaciones precedentes. Para justificarlo, cita una estrategia utilizada en el trabajo de Reys y otros (1991) en la que un alumno estima el 30% de 54.215 cambiando el 30% por 1/3 y después dividiendo 54.000 por 3. Este caso, propuesto por los autores del estudio como un ejemplo de proceso de traducción, pero no asignado a ninguna categoría de estrategia de estimación específica encaja, según Hanks (2008) en varias definiciones de estrategias específicas al producirse simultáneamente una sustitución (del 30% por 1/3), un redondeo o truncamiento (de 54215 a 54000), y una traducción (al dividir por 3 en lugar de multiplicar por 1/3). La unidad de análisis elegida en este estudio es la "acción" o "acción implícita", definidas por el autor como:

> Un segmento de transcripción que alude o describe directamente una operación sobre una cantidad o cantidades, donde la operación se define de forma abierta como una operación aritmética, una comparación, un redondeo, etc. Por ejemplo, considero los siguientes como ejemplos de acciones: 'He multiplicado 5 veces 12' (operación aritmética), o 'Yo sabía que cinco novenos está cerca de un medio' (Hanks, 2008, p. 21).

El autor encuentra tres categorías para los 'componentes' de los procesos de estimación: componentes de estimación con números naturales y decimales (redondeo, truncamiento o sustitución de una fracción por un decimal), componentes de estimación con fracciones (simplificar una fracción, reducir a común denominador, aumentar proporcionalmente numerador y denominador en una fracción) y componentes de números naturales, decimales y fracciones (como realizar una operación o la compensación).

Star y Rittle-Johnson (2009) llevan a cabo un estudio experimental con 157

dos países juntos." (Hanks, 2008, p. 48).

alumnos de quinto y sexto de Educación Primaria. La hipótesis de los autores es que la comparación de diferentes estrategias de estimación (a través de la búsqueda de semejanzas y diferencias) produce un beneficio mayor que la enseñanza independiente de cada una de las estrategias, pues favorece la transferencia flexible de las estrategias de una situación a otra. Para ello los alumnos responden preguntas sobre procedimientos utilizados por alumnos hipotéticos. En la situación de comparación (grupo de 82 alumnos), se proponen dos métodos simultáneamente, ilustrados en la figura 3.2, y preguntas que requieren la comparación de los mismos, del tipo: “¿En qué se parecen el método de Allie y el de Claire?” (p. 413).

El otro grupo de 75 alumnos (asignado a la condición secuencial, en lugar de la de comparación) responde preguntas sobre los mismos procedimientos de Allie y Claire, pero mostrados uno a continuación de otro y con preguntas que no requieren la comparación de métodos, del tipo: “¿Te parece una estimación correcta? ¿Cómo decides si una estimación es correcta?” (p. 413).

El periodo de instrucción dura una semana[142]. A los dos grupos se les administra el mismo test, antes, inmediatamente después del periodo de instrucción sobre estrategias de estimación y, varias semanas después de finalizar el mismo. El test evalúa conocimiento procedimental, flexibilidad en el uso de estrategias y conocimiento conceptual relacionados con la estimación en cálculo. Los resultados indican que la comparación de estrategias de estimación favorece que los estimadores sean más flexibles[143]. Los autores sostienen además que los alumnos de quinto y sexto de primaria dan prioridad a la *simplicidad* de cálculo frente a la *proximidad* de la estimación, mientras que en otras investigaciones (Dowker, 2005; Levine, 1982) se ha observado que

[142] Los propios autores reconocen en las conclusiones que la intervención es excesivamente breve como para que los resultados merezcan tener gran incidencia en la práctica educativa.

[143] La flexibilidad se define como la “habilidad de reconocer, implementar y evaluar múltiples estrategias para el cálculo de estimaciones” (Star y Rittle-Johnson, 2009, p. 415).

los adultos buscan un mayor equilibrio entre estos dos objetivos fundamentales en la producción de una estimación.

Método de Allie	Método de Claire
27×43 Mi estimación es 800. He tapado los dígitos de las unidades y he multiplicado los dígitos de las decenas así: 2■ × 4■ = 8 Después he añadido dos ceros, porque había tapado dos dígitos, y obtengo 800.	27×43 Mi estimación es 1200. He redondeado ambos números. He redondeado 27 hacia arriba a 30. He redondeado 43 hacia abajo a 40. Después, he multiplicado 30×40 y he obtenido 1200.

Figura 3.1. Comparación de estimaciones (Star y Rittle-Johnson, 2009, p. 413)

Star, Rittle-Johnson, Lynch y Perova[144] (2009) examinan con detalle un hallazgo novedoso de la investigación realizada por Star y Rittle-Johnson (2009). En dicho trabajo, la flexibilidad en el uso de estrategias dependía de los conocimientos previos sobre estimación que se ponían de manifiesto en el pretest del estudio experimental. En este caso, se trata de analizar el papel del conocimiento previo en el desarrollo de la flexibilidad en el uso de estrategias. Se obtienen algunos resultados como, por ejemplo, que todos los participantes, independientemente de su nivel de conocimientos previos, mejoraron en su flexibilidad. Sin embargo, los alumnos con mayor conocimiento previo avanzaron más en la destreza de identificar la dificultad relativa de la estrategia de 'redondear un factor' (con respecto a las otras dos estrategias enseñadas de redondear los dos factores o la de truncarlos). Este ejemplo, extraído de los resultados presentados por los autores, muestra que la relación entre

[144] Este es otro artículo sobre la misma investigación (Star y Rittle-Johnson, 2009), de modo que evitaré repetir todos los detalles relativos a participantes y método.

conocimiento previo y flexibilidad muestra un nivel alto de complejidad[145].

4.1. La investigación sobre estimación en lengua española

Cortés, Backhoff y Organista (2004, 2005)[146] se plantean el objetivo de conocer el nivel en estimación en cálculo que tienen los alumnos de 2º de Educación Secundaria en Baja California (México) y las estrategias de estimación que utilizan. Para ello, siguen la metodología propuesta por Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982), traduciendo y adaptando su test de estimación.

Los autores indican que "uno de los propósitos de nuestro estudio fue replicar la investigación de Reys y otros (1982), realizada en Estados Unidos, este trabajo representa un eslabón más en la cadena investigadora para validar y generalizar el modelo que explica las estrategias, los procesos y las características de los buenos estimadores." (Cortés, Backhoff y Organista, 2005, p. 557)

Participan 248 estudiantes de 2º de Secundaria (el 68% de los cuales tenía 13 años). En promedio, los alumnos respondieron correctamente a un 23,8% de los ítems y solo el 1% de los alumnos obtuvo una puntuación superior a 6 (sobre 10). Se observó que los problemas con números naturales resultaban menos difíciles que los problemas con números decimales o con fracciones.

[145] Manifestación hecha por los autores en las conclusiones. A mi juicio, en este trabajo no se llega a ningún resultado de verdadero interés que sea concluyente con respecto a la relación entre el conocimiento previo y la flexibilidad. Esto se debe no solo a que los resultados son difíciles de interpretar por cambiantes, en función de leves modificaciones en las variables, sino a que el periodo de enseñanza es extraordinariamente limitado y a que los tests empleados para medir los diferentes constructos: "conocimiento conceptual", "procedimental" y "flexibilidad" no son suficientemente explicados (en el trabajo solo aparecen algunos ítems de muestra). En conjunto, el trabajo no ofrece implicaciones de gran interés para la enseñanza de la estimación.

[146] Informes de investigación resultado del trabajo de investigación de Cortés (2001), dirigido por Backhoff y Organista.

Este resultado ya se había observado en Taiwan en una investigación desarrollada por Reys y Yang (1998).

Doce alumnos fueron seleccionados como 'buenos estimadores' al quedar en el 5% superior de las puntuaciones de la prueba. Las estrategias más utilizadas por los buenos estimadores de la población fueron el redondeo y el 'dígito de la izquierda' (front-end).

Los autores concluyen, a partir de los resultados de la prueba y de los comentarios de los alumnos mostrando su falta de familiaridad con el tipo de tareas, que, a pesar de la introducción de la estimación en el currículo, los alumnos no reciben una enseñanza adecuada de la estimación (si llegan a recibir alguna).

La investigación de Pañellas (2004, 2006) se centra en los procesos utilizados por los niños para resolver tareas de estimación en numeración y cálculo al terminar la Educación Primaria, tratando de determinar las estrategias que utilizan, los errores que cometen y las dificultades con las que se encuentran.

El análisis cuantitativo y cualitativo de los datos se desarrolla a lo largo de tres estadios sucesivos de análisis que van profundizando progresivamente en las respuestas de los alumnos, los procesos que las determinan y las estructuras cognitivas que entran en juego. Para los dos primeros estadios de análisis se utiliza el TENC (Test de Estimación en Numeración y Cálculo, desarrollado para la investigación) que se aplica a una muestra de 19 grupos clase y para el tercer estadio los instrumentos son: el test razonado, obtenido a partir de una reducción del test completo, que se aplica a un conjunto de 80 alumnos, y la entrevista que se aplica a una submuestra de 22 niños y niñas.

Los resultados de la investigación permiten encontrar veintiséis tipos de dificultades incluidos en cinco categorías, ciento veinte tipos de errores situados en ocho categorías y ciento tres tipos de estrategias aceptables, compartimentados en clases diferenciadas, teniendo en cuenta nueve variables.

Pañellas[147] (2004) concluye que los alumnos demuestran poca flexibilidad en el uso de los números, por estar demasiado acostumbrados a la aplicación de reglas algorítmicas concretas; que no utilizan un abanico de estrategias de estimación en numeración y cálculo, adecuándolas a las situaciones problemáticas planteadas y que no reflexionan suficientemente sobre los procesos ni sobre los resultados que elaboran, y tienen poca habilidad para expresar verbalmente el procedimiento seguido en la resolución de problemas de estimación en numeración y cálculo.

Dentro del ámbito general de la investigación sobre estimación, concluyo esta revisión de investigaciones sobre estimación con dos tesis que, a pesar de no versar sobre la estimación en cálculo, tienen el mérito de haber abierto este campo de investigación en España: Los trabajos[148] de Segovia (1997) y Callís (2002).

El trabajo de Segovia (1997), descrito en el apartado de estudios dedicados al desarrollo de conceptos y destrezas de la estimación, es la primera tesis española sobre estimación aunque, como se ha dicho antes, parte de un trabajo sobre estimación en cálculo (Segovia, 1986) que inició una línea de investigación sobre estimación, descrita en Segovia y Castro (2009), de la que forma el último eslabón (por el momento) el presente trabajo.

Callís (2002) y Callís y Fiol[149] (2003) estudian las estrategias que utilizan los participantes[150] al estimar la medida de longitudes rectilíneas y curvilíneas. En

---

[147] De este trabajo resulta particularmente interesante el análisis de errores. Esta parte de la tesis de Pañellas (2004) se explica con detalle en el capítulo dedicado al análisis de errores en estimación, al comparar sus resultados con los de la presente investigación.

[148] A estos trabajos habría que añadir el de Pañellas (2004), sobre el que ya se da una amplia información en el capítulo dedicado a las conclusiones.

[149] Informe de investigación de la tesis Callís (2002), dirigida por M. Lluïsa Fiol.

[150] Hay 181 participantes en la investigación. De ellos, 108 son estudiantes de distintas especialidades de magisterio de la Universidad de Girona, otros 36 son alumnos de Educación Primaria de cuarto y sexto de Educación Primaria, y 37 son educadores populares de la

este estudio se llega a la conclusión de que la adquisición de la estimación de longitudes rectilíneas tiene un proceso diferente al de la estimación de longitudes curvilíneas y requiere recursos distintos para su aprendizaje y el dominio de estrategias también diferentes para su práctica. En las conclusiones se enfatiza la necesidad de practicar la estimación de longitudes curvilíneas.

comunidad Segundo Montes de El Salvador.

Capítulo 4. Marco metodológico y diseño de la investigación

Este capítulo consta de dos partes. En la primera, llamada 'marco metodológico' procederé a revisar brevemente dos aspectos relevantes, desde el punto de vista de la metodología, para la presente investigación sobre estimación. Primeramente, dedicaré un apartado a los *informes verbales*, dentro de la entrevista, como instrumento para reflexionar sobre los procesos seguidos por los alumnos al estimar. Después, concluiré con unos breves comentarios sobre los llamados *estudios de réplica*.

La segunda parte del capítulo estará dedicada a detallar cómo se ha realizado el *diseño de la investigación*, especificando las hipótesis, las variables, los participantes y los instrumentos del presente estudio.

1. Marco metodológico

1.1. Informes verbales

Un aspecto que ha destacado en la metodología de investigación, dentro del ámbito de la estimación en cálculo, ha sido el uso de entrevistas orientadas a que los participantes revelen los procedimientos empleados para realizar sus estimaciones. Carpenter, Coburn, Reys y Wilson (1976)[151] enfatizan la necesidad de ir más allá del resultado final del proceso de estimación y

[151] Este trabajo es importante pues marca el inicio de lo que he considerado la "edad de oro" de la investigación en estimación, especialmente gracias a los trabajos de Reys y colaboradores.

observar (escuchar) al alumno cuando se haya en el proceso de estimar, especialmente si el objetivo que se persigue es el de valorar la habilidad de estimar del alumno.

Voy a comentar, a continuación, varias cuestiones acerca de la validez y los posibles riesgos del uso de informes verbales. Tomaré como referencia fundamental el trabajo de MacLeod (1999) que aborda este problema -validez de los informes verbales- en situaciones de cálculo[152].

Dentro de los informes verbales, suele distinguirse entre los *concurrentes*, en los que el alumno explica el procedimiento que utiliza para realizar una tarea durante el transcurso de la misma, y los informes verbales *retrospectivos*, en los que se realiza la tarea y, solo después de haberla concluido, se explica el procedimiento empleado.

Habitualmente, se considera que existen dos amenazas fundamentales para la validez de los informes verbales. La primera es la *reactividad* y consiste en que el informe verbal, si es concurrente, puede afectar la ejecución de la tarea; la segunda es la *veracidad*, que sería el grado en que los informes verbales reflejan con precisión lo que el alumno verdaderamente ha pensado[153]. Dos errores aparecen asociados a la falta de veracidad de los informes verbales. Por una parte, están los errores de *comisión*, que consisten en que los alumnos pueden informar de pensamientos que no han tenido o procedimientos que no han llevado a cabo[154]. Por otro lado, los errores de *omisión* consisten en que el

[152] En su tesis, estudia la validez de los diferentes tipos de informes verbales (concurrentes y retrospectivos) como instrumento metodológico para analizar las estrategias que emplean niños de Educación Primaria en situaciones de resta.

[153] En términos psicológicos se diría que el informe es veraz si refleja con precisión los contenidos de la memoria a corto plazo.

[154] Un ejemplo de esta situación es cuando un alumno dice haber hecho $7 \times 6 = 42$, porque piensa que a su edad debería saberse este resultado de memoria, cuando realmente no se acordaba del resultado y lo ha deducido como $7 \times 6 = 6 \times 6 + 6$. El entrevistador pensará que el alumno ha utilizado un hecho numérico básico en lugar de un hecho numérico derivado.

informe verbal no sea completo y omita partes importantes del proceso (MacLeod, 1999).

Los informes retrospectivos se consideran más apropiados cuando las tareas son breves. Cuanto más larga sea la ejecución de la tarea, más probable es que se cometan errores de omisión en el informe verbal y que se pierda información valiosa. En esta situación, quizá sea preferible el informe concurrente (MacLeod, 1999).

Dentro del ámbito de investigación de la estimación en cálculo, no hay un acuerdo en torno a qué tipo de informes son preferibles. Se han utilizado informes *concurrentes* en: Dowker (1992), Dowker y otros (1996) y Hanson y Hogan (2000), Levine (1982), Schoen y otros (1990), Siegel y otros (1982). Sin embargo, los informes *retrospectivos* se emplearon en: Bobis (1991), Case y Sowder (1990), Flores y otros (1990), LeFevre y otros (1993), Reys y otros (1982), Reys y otros (1991), Schoen y otros (1981), Segovia (1997), y Threadgill-Sowder (1984). A esta división entre las dos opciones habría que añadir que en la literatura sobre estimación apenas se ha planteado como problema la elección de un tipo de informe o el otro. Reys y otros (1982) indican que en investigaciones sobre estimación en cálculo se han utilizado con éxito tanto informes escritos, como informes verbales concurrentes y retrospectivos. Sin embargo, a partir de esta investigación, los informes escritos no han vuelto a ser empleados en trabajos de estimación. Sowder y Wheeler (1989) también se plantean qué tipo de estrategia metodológica resulta más adecuada para obtener información relevante para los objetivos de su investigación sobre estimación. En un trabajo anterior (Sowder y Wheeler, 1987), habían llegado a la conclusión de que “las descripciones dadas por los alumnos sobre sus procedimientos, en tareas de estimación de respuesta abierta, no tuvieron el grado de precisión necesario” (p. 132) y hubo que desarrollar otro tipo de entrevistas. Así, deciden emplear respuestas dadas por "alumnos hipotéticos" sobre las cuales debe emitirse algún juicio. Por ejemplo, para valorar si los alumnos comprenden el valor que tiene trabajar con números aproximados en el proceso de estimación, las autoras plantean la siguiente cuestión:

> Aquí tenéis un problema que puse a dos alumnos de quinto grado hace unos pocos días. Tenéis nueve cajas de dulces. Cada una de ellas contiene 52 dulces. La pregunta dice: ¿Cuántos dulces hay aproximadamente?
> El primer alumno de quinto grado, al que llamaré Samuel, resolvió así el problema. Dijo: "9 es casi 10, y 52 está cerca de 50. Diez veces 50 son 500. Luego hay aproximadamente 500 dulces [La entrevistadora señala el 9 y el 52 y escribe $10 \times 50 = 500$ mientras lee esto].
> ¿Piensas que está bien que Samuel utilizara estos números [señalando al diez y al 50] en vez de estos [señalando al 9 y al 52]? ¿Es esta [señalando a 500] una buena respuesta a esta pregunta [señalando a "aproximadamente"]? ¿Por qué no?
> Algunos alumnos de quinto grado piensan que esta respuesta no es correcta. ¿Podrías explicarles por qué piensas tú que está bien?
> Ahora déjame que te enseñe cómo hizo el problema Vanesa. Ella escribió [Escribe $9 \times 52 = 468$ de la forma en que se realiza habitualmente el algoritmo de la multiplicación] y dijo: "Alrededor de 500 dulces". ¿Qué forma crees que es mejor para resolver el problema, la que utilizó Samuel o la que utilizó Vanesa? ¿Por qué elegiste esta forma? (p. 134)

Así, independientemente de que los informes verbales de los alumnos sean concurrentes o retrospectivos, habrá que valorar si resulta suficiente solicitar los informes verbales, para abordar los objetivos que se plantean en este estudio o deben elaborarse, en futuras investigaciones, otro tipo de situaciones para las entrevistas (como en el caso de Sowder y Wheeler, 1989) que permitan revelar aspectos del pensamiento de los estimadores que queda oculto en el tipo de entrevista más habitual en estudios sobre estimación en que solo se pide al sujeto que explique el procedimiento empleado para estimar.

1.1.1. Aspectos didácticos de los informes verbales

Debe destacarse que, dentro del ámbito de la Educación Matemática, los *informes verbales retrospectivos* tienen una gran relevancia de cara al aprendizaje de las matemáticas. Ya en el currículo de la Educación Primaria (MEC, 1992) se puede encontrar, entre los contenidos procedimentales, la "Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos" (p. 20). Las descripciones que los alumnos hacen de sus procedimientos, con el fin de comunicarlos o justificarlos ante sus compañeros, resultan de gran interés. Este tipo de comunicación en el aula permite que unos alumnos puedan aprender estrategias de otros. Los conocimientos comunicados, aunque sean erróneos, favorecen a través del debate que los alumnos compartan puntos de vista diversos que pueden beneficiar la comprensión de todos (Cockcroft, 1985). Además, la comprensión del conocimiento matemático puede mejorarse a través de la comunicación y articulación de las ideas. Éstas exigen que nuestra actividad se convierta en objeto del pensamiento, que se produzca reflexión sobre ella, y se identifiquen sus puntos críticos (Carpenter y Lehrer, 1999).

No obstante el especial interés que tienen para la didáctica los informes retrospectivos, es necesario distinguir este interés y el interés orientado por unos determinados objetivos de investigación[155].

[155] En las investigaciones en Psicología, el objetivo del uso de informes verbales es que éstos sean un reflejo, lo más ajustado posible, de los contenidos de la memoria a corto plazo (Ericsson y Simon, 1993). En el presente trabajo, no se hace ninguna suposición sobre la estructura, funcionamiento o contenidos de la memoria. En este sentido, Goldin y Kaput (1996) aclaran que, cuando utilizan el término 'representación interna' no se refieren a la observación directa del objeto de la actividad de introspección, sino a un constructo al que llega un observador a

1.1.2. La opción elegida sobre los informes verbales en esta investigación

Como se ha visto, tanto en las investigaciones sobre estimación, como en trabajos de metodología como el de McLeod (1999), los informes verbales concurrentes han demostrado ser igual de efectivos que los retrospectivos. Además, el estudio piloto previo (De Castro, 2002) ha dejado ver ciertas características de las tareas de estimación y su ejecución que parecen recomendar los informes concurrentes. Por ejemplo, en las tareas de estimación, aunque su duración no sea excesiva[156], los alumnos suelen

partir de la observación de la conducta de un individuo (pp. 399-400). Me adscribo al planteamiento de estos autores, al utilizar términos provenientes del ámbito de la psicología con un interés didáctico, descargándolos de parte de los presupuestos originarios en su disciplina de procedencia. Esta es la interpretación que hago aquí de los informes verbales concurrentes, como expresiones que tienen interés en sí mismos, proporcionan una información valiosa, reflejan un conocimiento que tiene el informante y ciertas acciones realizadas o imaginadas (en caso de que el informe no sea verídico, la descripción del procedimiento indica que el sujeto conoce la estrategia y sabe cómo aplicarla a la situación práctica, aunque no sea exactamente la que ha llevado a cabo para producir su estimación). Esta concepción de los informes verbales es independiente de su posible vinculación a teorías psicológicas sobre la cognición.

[156] En De Castro (2002) la ejecución de las tareas de estimación tuvo una duración media de 25,6 segundos. En el presente trabajo, esta duración media ha sido de 61,1 segundos. La diferencia, muy notable, entre las medias se debe a las características de los periodos de instrucción de ambos trabajos. En De Castro (2002) solo participaron en la prueba de estimación alumnos que habían seguido un periodo de estimación y que habían utilizado un software para el aprendizaje de la estimación. Los alumnos podían emplear el software todas las veces que quisieran y este les daba una puntuación en rapidez y otra en precisión (dependiente del porcentaje de error de la estimación). Para obtener un 10 en rapidez, era necesario dar la estimación menos de 20 segundos. El uso de este material, a través de la retroalimentación que suponía tener una calificación en rapidez tras cada uso del test, hizo que los alumnos fuesen cada vez dando más rápidamente sus estimaciones. Por el contrario, en esta investigación,

plantearse diversas alternativas y realizan cambios en elementos destacados de las estrategias.

De acuerdo a todo lo expuesto, he optado[157] por *solicitar*, en las entrevistas a los alumnos, que estos emitieran informes verbales *concurrentes*, aunque he *permitido* los informes verbales *retrospectivos*. Un ejemplo de transcripción de dos fragmentos de entrevista procedentes de De Castro (2002) servirá para justificar esta doble opción.

Entrevistador: $0{,}47 \times 0{,}26$

Alumno 13: 0,13. He redondeado esto [señalando a 0,47] a 0,5 y 0,5 es la mitad.

Entrevistador: $66 \div 0{,}86$

Alumno 53: 66 entre 0,86 es multiplicar [sic] por 85 cienavos. Entonces, divido entre 100 y me queda… Bueno. Esta me cuesta. Esta… Multiplico por… Más o menos, lo voy a aproximar a 0,9. Entonces 9 por 10^{-1}. ¡Es dividir! Entonces, esto me quedaría, aproximadamente, 660 entre 9, y me daría… por 7, 63… Pues, aproximadamente, 70.

En el primer caso, el Alumno 13 utiliza un informe *retrospectivo*. Primero da su estimación (0,13), y después explica cómo la ha realizado. En el segundo caso, el Alumno 53 produce un informe concurrente. En ambos casos, los

---

fueron menos de la mitad de los alumnos los que tuvieron un periodo de instrucción sobre estimación y no utilizaron ningún programa para el aprendizaje de la estimación. A esta razón se atribuye la diferencia.

[157] Desde el principio se descartaron los informes escritos. Estos no suelen utilizarse en investigaciones sobre estimación -como se explicó en un apartado anterior, solo existen noticias de su utilización y del abandono de su uso a través del trabajo de Reys y otros (1982). Además, no se recomienda que en tareas de estimación los alumnos dispongan de papel, pues se desea que las tareas se resuelvan mentalmente, sin instrumentos auxiliares de cálculo.

informes sirven al objetivo de la investigación de conocer la estrategia que han empleado los alumnos. Sin embargo, el informe concurrente permite recoger más información. Por ejemplo, que al principio el alumno piensa (equivocadamente) que está realizando una multiplicación y durante el proceso advierte su error y vuelve a comenzar con la operación correcta. También se aprecia que hay un cambio en el grado de aproximación y en el registro de representación: al principio, el alumno sustituye una escritura decimal (0,86) por una fraccionaria (85/100); después, reemplaza el número inicial por 9×10^{-1}, con una notación exponencial y una reducción en el grado de aproximación. Estos detalles del proceso, es más sencillo que aparezcan en un informe concurrente que en uno retrospectivo. Normalmente, si un alumno emite un informe retrospectivo, solo informará sobre la opción definitiva y se perderá información sobre un posible enfoque original, distinto del final, sobre los cambios realizados sobre la marcha, etc. Dado que en esta investigación me planteo estudiar los procesos metacognitivos, puestos de manifiesto en la selección de la estrategia inicial, los cambios en el grado de aproximación, en la destreza de aproximación, y en general, en cualquier indicio de conocimientos metacognitivos y procesos de monitorización y regulación, he optado por los informes *concurrentes,* como más apropiados para abordar los objetivos de la investigación. No obstante su mayor interés, no se 'presiona' a los alumnos para que emitan un informe *concurrente*. Pienso que es fundamental establecer un clima en la entrevista que posibilite que el alumno se sienta cómodo para expresar libremente sus pensamientos[158]. Acepto que, en caso de que el alumno decida informar retrospectivamente, perderé información relevante para la investigación. Sin embargo, es necesario explicar la diferencia sobre el distinto interés que tienen el análisis metacognitivo y el análisis de estrategias en este estudio. Mientras que, en el caso de las estrategias, se desea conocer las *todas*

[158] Aspecto de la entrevista enfatizado por Taylor y Bogdan (1996, pp. 119-120).

las estrategias que han empleado cada uno de los participantes en la investigación, en el caso del análisis metacognitivo, el interés se centra en elaborar un muestrario[159] de conocimientos y procesos metacognitivos que intervienen en la estimación y que dan cuenta del carácter estratégico de los procedimientos de estimación. Es decir, el objetivo del análisis de procesos metacognitivos es, fundamentalmente, el de reflexionar sobre el propio concepto de *estrategia* en matemáticas.

1.2. Estudios de réplica

Como se ha explicado detalladamente en el capítulo 1, al describir el origen del problema de investigación, el presente trabajo se origina con la idea de replicar varias investigaciones anteriores sobre estimación, añadiendo un ingrediente nuevo en las mismas: la distinción en el diseño de la investigación entre decimales mayores y menores que 1.

Nos ha parecido relevante incluir un apartado sobre estudios de réplica, para explicar qué relación tiene este trabajo con ese tipo de estudios y a qué tipo de réplica estaría más próximo. Para ello, he tomado como referencia el trabajo de Hendrick (1990) dedicado a explicar los diferentes tipos de réplica en la investigación en las Ciencias Sociales.

Considero tres tipos de investigación de réplica: la réplica *exacta*, *parcial*, y *conceptual*. Una réplica *exacta* o *estricta* es aquella en la que todas las variables de la investigación y los procedimientos tratan de reproducirse de la forma más fiel posible[160]. Una réplica *parcial* consiste en realizar algún cambio, consistente en añadir o eliminar algún aspecto de las variables o el procedimiento,

[159] Es imposible, dado que se ha visto en la revisión del trabajo de MacLeod (1999) que en los informes retrospectivos abundan las omisiones, conocer los conocimientos y procesos metacognitivos de los alumnos, pues muchos alumnos (más en los informes retrospectivos, pero también en los concurrentes) dan informes incompletos y no ofrecen información al entrevistador sobre dichos conocimientos y procesos.

mientras que otras partes permanecen sin cambios con respecto a la investigación original. Una réplica *conceptual* supone un cambio mayor en los procedimientos e implica un cambio necesario en algunas variables de tarea. Finalmente, Hendrick (1990) propone la posibilidad de llevar a cabo una réplica[161] *sistemática*:

> Intenta diseñar un rango de variación en las variables procedimentales tal que, para algunas variantes, se puedan esperar los mismos resultados, pero, para otras variantes no puedan esperarse los mismos resultados. (p. 48)

Como se ve, se trata de plantear modificaciones en el diseño, de modo que en algún caso se consiga un éxito en la réplica de los resultados y en otros un fracaso. Así, la réplica sistemática parece un modo adecuado de estudiar la relación que se produce entre el diseño de la investigación y los resultados obtenidos en la misma.

La presente investigación *no* puede considerarse como un estudio de réplica. Sin embargo, el diseño ha estado inspirado por la idea que guía las réplicas sistemáticas.

[160] Hendrick (1990) considera que, en este tipo de réplicas, debe intentar 'copiarse' todo el conjunto de instrucciones o eventos que puedan incluirse dentro de la "manipulación de las variables independientes".

[161] La réplica *sistemática* aparece como propuesta del autor ante el riesgo que suponen los estudios de réplica en caso de que no tengan éxito en reproducir los resultados del trabajo original, dado que en casos de fracaso en la réplica suele ser muy difícil la atribución de una causa concreta al fracaso de la réplica.

Tabla 4.1. *Aspectos de réplica en el origen de la investigación*

	Investigaciones				
Características	Bestgen y otros (1980)	Rubenstein (1982, 1985)	Goodman (1991)	De Castro (2002)	De Castro (2010)
Participantes	187 alumnos de magisterio.	309 alumnos de 8º grado.	46 alumnos de magisterio.	53 alumnos de magisterio.	131 alumnos de magisterio.
¿Periodo de instrucción?	Sí. Para todos los alumnos.	No.	No.	Sí. Para todos los alumnos.	Sí. Para 54 de 131 alumnos.
Formato de los ítems	Abierto.	Abierto, razonable-no razonable, Número de referencia, y Orden de magnitud.	Abierto, Número de referencia, y Orden de magnitud.	Abierto.	Abierto.
Tipo de ítems	Cálculo y problemas.	Cálculo y problemas.	Cálculo y problemas.	Cálculo.	Cálculo.
T. operación en el diseño	Suma, resta, multiplicación, división.	Suma, resta, multiplicación, división.	Suma, resta, multiplicación, división.	Multiplicación, división.	Multiplicación, división A y división B
T. operación en la prueba	Suma, resta, multiplicación, división A y división B.	Suma, resta, multiplicación, división A y división B.	Suma, resta, multiplicación, división A	Multiplicación, división A y división B.	Multiplicación, división A y división B.
T. de número en el diseño	Naturales, decimales.	Naturales, decimales.	Naturales, decimales, fracciones y porcentajes.	Naturales, decimales > 1 y decimales < 1.	Naturales, decimales > 1, 0,1<decimales<1 y decimales<0,1.
T. de número en la prueba	Naturales, decimales > 1, 0,1<decim<1 y decimales<0,1.	Naturales, decimales > 1, y decimales < 1	Naturales, *decimales > 1*, fracciones y porcentajes.	Naturales, decimales > 1, 0,1<decimales<1 y decimales<0,1.	Naturales, decimales > 1, 0,1<decimales<1 y decimales<0,1.
Resultados	Decimales *más* difíciles que naturales. Multiplicación y división *igual* de difíciles.	Decimales *más* difíciles que naturales. División *más* difícil que multiplicación.	Decimales *igual* de difíciles que naturales.	Decimales > 1 *igual* de difíciles que naturales. Decimales < 1 *más* difíciles que naturales y decimales > 1.	Decimales > 1 *igual* de difíciles que naturales. Decimales < 1 *más* difíciles que naturales y decimales > 1. Decimales < 0,1 más difíciles que todos los demás.

Para desarrollar esta idea, se ha elaborado la Tabla 4.1, que contiene las características fundamentales de los diseños de las investigaciones de Bestgen y otros (1980), Rubenstein[162] (1982 y 1985), Goodman (1991), De Castro (2002) y de la actual investigación[163]. Como puede verse, salvo en el trabajo de Rubenstein (1982, 1985), todos los participantes son estudiantes de magisterio. En el trabajo de Bestgen y otros (1980) y en el de Rubenstein (1982, 1985) se dan los mismos resultados en cuanto a la dificultad del tipo de número. Los números decimales resultan más difíciles que los naturales en las tareas de estimación. A pesar de que se dan los mismos resultados, son diferentes la edad de los participantes, la existencia de periodo de instrucción (que en un caso se da y en el otro no) o el formato de los ítems. El elemento más parecido entre ambas investigaciones es la prueba de estimación. Rubenstein (1982 y 1985) toma muchos ítems del trabajo de Bestgen y otros (1980) aunque cambia los formatos de respuesta. El trabajo de Goodman (1991) es, en el diseño, parecido al de Rubenstein (1982 y 1985): No hay periodo de instrucción, los ítems tienen el mismo formato de respuesta, y aparecen el mismo tipo de ítems y de operaciones. Sí hay un cambio en la edad de los participantes (de final de 'Secundaria Obligatoria' a Magisterio). Sin embargo, el cambio que sí parece sustantivo es que al examinar los ítems del trabajo de Goodman (1991) se

[162] 1982 es la fecha de la Tesis y 1985 la de la publicación en el Journal for Research in Mathematics Education. Los alumnos del estudio de Rubenstein (1982, 1985) están en 8º grado. Este curso sería equivalente a segundo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en el sistema educativo español. Este curso fue elegido por Rubenstein por considerarse como la culminación de la enseñanza sobre aritmética. También fue elegido para que los profesores de matemáticas tuviesen una referencia sobre el límite de la habilidad de estimar al final de la Educación Primaria (Rubenstein, 1982, pp. 39-40).

[163] En la Tabla 4.1 se ha establecido la diferencia entre el tipo de operación y número planteados en el diseño y el tipo de operación y número que verdaderamente aparece en la prueba desde nuestra perspectiva de distinguir dos tipos de división y tres tipos de números decimales.

comprueba que todos los números decimales del mismo son mayores que 1. ¿Cuál es la opción tomada en este trabajo? Como se ve de nuevo en la Tabla 4.1, he optado por restringir el tipo de ítems a los de cálculo descontextualizado, y eliminar los de resolución de problemas aplicados. Se ha realizado la investigación con maestros en formación y ha habido periodo de instrucción en De Castro (2002) para todos los alumnos y en el trabajo actual para parte de los alumnos. Sin embargo, el cambio fundamental se ha introducido en las variables *Tipo de operación* y *Tipo de número*. Considero que la manipulación de dichas variables es la clave para comprender las diferencias halladas entre los trabajos de Bestgen y otros (1980) y Rubenstein (1982 y 1985), por un lado, y de Goodman (1991), por otro. Así, al distinguir en De Castro (2002), y en este trabajo, entre números decimales mayores y menores que uno, espero que no haya diferencia significativa de dificultad entre los números naturales y los decimales mayores que uno, "confirmando" (y de algún modo replicando conceptualmente con éxito) los resultados del trabajo de Goodman (1991). Por otra parte, espero encontrar diferencias significativas entre los ítems con números decimales menores que uno y los números naturales y decimales mayores que uno. Esta diferencia sería la que explicaría las diferencias de dificultad encontradas en el trabajo de Bestgen y otros (1980) y Rubenstein (1982 y 1985). La 'verdadera' diferencia de dificultad, entre los decimales menores que uno y los demás tipos de número, produce en estos dos trabajos, diferencias entre los números naturales y los decimales. En el fondo, la no distinción entre los dos tipos[164] de números decimales (mayores y menores que uno) es la que produce la (en el fondo, 'aparente') contradicción de resultados

[164] Curiosamente, cuando los números racionales aparecen en su escritura fraccionaria, en lugar de en su escritura decimal, sí se hace esta distinción (entre menores y mayores que uno, como fracciones propias e impropias) y sí se le da un tratamiento didáctico diferenciado (en el sentido, por ejemplo, de que se sabe que la representación de fracciones impropias supone una fuente de dificultades para los alumnos).

entre las investigaciones citadas. Un paso más en el mismo sentido se da en la presente investigación con respecto a De Castro (2002) y las tres investigaciones de referencia: la distinción entre la división de un número por otro menor (tipo A) y la división de un número por otro mayor (tipo B). Estos dos tipos de división suelen enseñarse de forma separada, tanto en el trabajo con números naturales, como con fracciones (Sharp, 1998). Sin embargo, no se da en ninguna de las investigaciones consultadas de considerar estas divisiones como 'diferentes operaciones' de cara al diseño de la investigación. En este sentido, una de las hipótesis de nuestra investigación es que la división de tipo B es más difícil que la de tipo A. Esta distinción podría contribuir a aclarar las diferencias de resultados encontrados en estas investigaciones con respecto a la dificultad de las tareas de estimación en función del tipo de operación.

2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Caracterización de la investigación

La presente investigación consta de dos partes complementarias: una de tipo cuantitativo, llevada a cabo a través de la administración y posterior análisis estadístico de una prueba de estimación, y otra de tipo cualitativo, realizada a través de entrevistas individuales[165].

[165] Pese a que en ocasiones se presenta lo cuantitativo como opuesto a lo cualitativo, aquí se defiende su complementariedad (Anguera, 1995). Como se ha visto en el apartado de "origen y delimitación del problema" y en la breve revisión sobre metodología utilizada en investigaciones sobre estimación, este tipo de combinación cuantitativo-cualitativo (con la combinación de pruebas de estimación y entrevistas individuales) está presente en la mayoría de las investigaciones sobre estimación.

La parte *cuantitativa*[166] de la investigación tiene un *diseño factorial* [167] *de medidas repetidas*[168], definido por Hernández, Fernández y Baptista (1998) como aquel en que se "manipulan dos o más variables independientes e incluyen dos o más niveles de presencia en cada una de las variables independientes" (p. 158). Este tipo de investigación está incluido dentro de los diseños "con *tratamientos múltiples y un solo grupo*" (Hernández y otros, 1998, p. 157). Los diseños factoriales son estudios *explicativos* pues "analizan las relaciones entre una o varias variables independientes y una o varias dependientes y los efectos causales de las primeras sobre las segundas" (Hernández y otros, 1998, p. 168).

En la parte cualitativa[169] de la investigación, se ha realizado una *entrevista semiestructurada*[170]. En este estudio reconozco a la parte cualitativa, dedicada al

[166] Según Martínez (2007) esta parte cuantitativa, parte de presupuestos empiristas y positivistas, y utilizan procedimientos cuantitativos, numéricos y estadísticos basados en la medición, que permiten cuantificar hasta cierto grado las características de la realidad estudiada (p. 31). Esta línea de investigación suele utilizar el método hipotético-deductivo, que parte de la formulación de hipótesis sobre el comportamiento de la realidad estudiada, las cuales se someten posteriormente a contrastación. Anguera (1995) reconoce que el paradigma de investigación empírico positivo sigue siendo dominante en la actualidad (p. 513).

[167] Este es un tipo de investigación al que León y Montero (1997) denominan "diseño complejo", por contar con más de una variable independiente, dentro de los *diseños experimentales con los mismos sujetos*.

[168] Puede verse en Pascual (1995) una explicación sobre los diseños de medidas repetidas.

[169] Sigo la definición de Taylor y Bogdan (1996, p. 20) de metodología cualitativa como aquella "investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable.

[170] En cuanto al grado de estructuración de la entrevista, he tenido en cuenta que las cuestiones que se planteaban a todos los alumnos estaban diseñadas de antemano. Sin embargo, la respuesta era abierta y el orden de presentación de las cuestiones (las 12 tareas de estimación) era aleatorio. En algunas ocasiones, era necesario hacer alguna pregunta complementaria para poder completar la respuesta inicial del entrevistado y facilitar la interpretación de la misma. Estas características hacen que considere la entrevista como semiestructurada (Delval, 2001;

análisis de estrategias y errores en la estimación, un doble carácter *inductivo* y *deductivo* (ver Anguera, 1995, p. 517). Por un lado, el carácter *inductivo* se debe a la actitud de apertura hacia nuevas categorías de estrategias o errores que posiblemente 'surjan' de los datos. El carácter deductivo se debe a que estudio un campo en el que hay bastante teoría previa en la que me baso, de modo que el objetivo es articular, mejorar modelos teóricos anteriores y validar el modelo corregido[171].

En cuanto a la obtención de los datos para la investigación, el estudio es de tipo *transversal*, pues los objetivos de la investigación se han abordado a través de la administración de una *prueba*[172] *de estimación* y una *entrevista* en un momento concreto[173] del desarrollo de un curso académico con maestros en formación[174].

Por último, la investigación surge, en su origen, con un carácter de *estudio de réplica* (Hendrick, 1990) de investigaciones anteriores (Bestgen, Reys, Rybolt y Wyatt, 1980; Goodman, 1991; Rubenstein, 1985) y de los estudios previos[175] al presente trabajo (De Castro, 2002; De Castro, Castro y Segovia, 2002, De

Ginsburg, Jacobs y López, 1998; Martínez, 2007).

[171] Donde asumo que el modelo corregido puede incorporar nuevas categorías procedentes del presente estudio.

[172] Según Martínez (2007) el tipo de prueba realizado puede considerarse una "prueba objetiva".

[173] Solamente 54 de los 131 participantes en la investigación recibieron un periodo de instrucción sobre estimación de 10 horas de duración (durante 5 sesiones de 2 horas cada una, distribuidas en tres semanas). Durante estas sesiones no se recogió ningún tipo de información para la investigación.

[174] Hernández y otros (1998) definen los diseños transversales como aquellos en los que se "recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables, y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado" (p. 186).

[175] De Castro (2002) es el trabajo de investigación de tercer ciclo que puede considerarse como estudio piloto correspondiente al presente estudio.

Castro, Segovia y Castro, 2002a)[176].

2.2. Hipótesis de la investigación

Dado que la parte cualitativa de la investigación tiene un cierto carácter inductivo, parece preferible no formular hipótesis sobre la misma[177]. Así, me centraré en las hipótesis fundamentales que han dirigido el diseño de la prueba de estimación:

1. Las tareas de estimación en las que aparecen números decimales menores que 1, pero mayores que 0,1, son más difíciles que aquéllas en las que aparecen números naturales o números decimales mayores que uno.
2. Las tareas de estimación que contienen números decimales menores que 0,1 son más difíciles que las que tienen números naturales, decimales mayores que uno y decimales menores que uno.
3. Las tareas de estimación en las que aparecen divisiones de un número por otro número mayor son más difíciles que aquéllas en las que aparecen divisiones de un número por otro número menor.
4. Estos resultados deben cumplirse para todos los grupos de alumnos participantes y para ambas mitades de la prueba de estimación[178].

---

[176] Esto se ha explicado con detalle en el primer apartado del capítulo 1, dedicado al origen y delimitación del problema.

[177] Espero que la mayor parte de las estrategias y errores que encontremos en la presente investigación pueden ser clasificadas dentro de categorías definidas en investigaciones anteriores. Estas categorías y estrategias están descritas en los capítulos 2 y 3.

[178] Esta hipótesis se desglosa en varias hipótesis estadísticas que hacen referencia a las Interacciones de las variables *Tipo de número* y *Tipo de operación* con las variables *Mitad* y *Curso*.

2.3. Participantes

En la investigación han participado 131 sujetos. De ellos, 108 pertenecen a distintos cursos y especialidades del Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle (CSEU La Salle). Éste es un centro universitario privado, adscrito a la Universidad Autónoma de Madrid, en el que se imparten las titulaciones de Maestro, Educación Social, Terapia ocupacional y Psicopedagogía. Los otros 23 sujetos pertenecen a la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. Los participantes no han sido elegidos aleatoriamente de ninguna población, sino que constituyen una muestra de conveniencia, pues han sido seleccionados sobre la base de su disponibilidad para el estudio. En la Tabla 4.2 aparecen resumidas las características de los participantes en la investigación distribuidos por curso y especialidad de la siguiente manera:

— Curso 1: 33 alumnos pertenecientes a primer curso de las especialidades de Educación Primaria, Educación Musical y Lengua extranjera –turno de mañana. Todos ellos cursaron, durante el segundo semestre del curso, una asignatura de seis créditos llamada “Matemáticas y su Didáctica”, dentro de la cual, tuvieron un periodo de instrucción sobre estimación en cálculo.

— Curso 2: 19 alumnos de tercer curso de la especialidad de Educación Primaria –turno de mañana. Estos alumnos cursaron, durante el segundo semestre de su primer curso de carrera, una asignatura troncal de seis créditos llamada “Matemáticas y su Didáctica”. Dentro de esta asignatura tuvieron un periodo de instrucción sobre estimación en cálculo.

— Curso 3: 23 alumnos de la especialidad de Educación Primaria de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. Este grupo se distingue de los demás[179] por ser estudiantes de la universidad pública.

[179] Además de por ser estudiantes de la Universidad de Granada, en lugar de pertenecer al CSEU La Salle, de Madrid, como todos los demás participantes.

— Curso 4: 22 alumnos pertenecientes a primer curso de la especialidad de Educación Infantil –turno de tarde. Estos alumnos no han recibido instrucción sobre estimación en cálculo. Han cursado, durante el primer semestre del curso, una asignatura de seis créditos llamada "Bases del Pensamiento Matemático" que es obligatoria para la especialidad de Educación Infantil en el CSEU La Salle. Dicha asignatura estudia el desarrollo del pensamiento matemático propio de los niños de Educación Infantil, junto con aspectos didácticos relativos a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en dicho nivel educativo. En esta asignatura solo se aborda el estudio de contenidos matemáticos propios de la Educación Infantil, de modo que no se tratan temas como el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones básicas, los números decimales y las fracciones o la estimación en cálculo. No han estudiado ninguna otra asignatura de matemáticas o del área de Didáctica de la Matemática durante sus estudios de magisterio.

— Curso 5: 34 alumnos de primer curso de Educación Infantil -del turno de mañana. Estos alumnos recibieron la misma docencia del curso 4.

Tabla 4.2. *Características de los cursos participantes*

Curso	*N*	*Institución*	*Curso y Especialidad*	*Turno*	*¿Enseñanza de estimación?*
1	33	CSEU La Salle	1º E. Primaria, L. Extranjera y E. Musical	Mañana	Sí
2	19	CSEU La Salle	3º E. Primaria	Mañana	Sí
3	23	U. de Granada	E. Primaria	Mañana	No
4	22	CSEU La Salle	1º E. Infantil	Tarde	No
5	34	CSEU La Salle	1º E. Infantil	Mañana	No

2.3.1. El periodo de instrucción sobre estimación

El periodo de instrucción sobre estimación se ha producido dentro del bloque temático tercero de la asignatura "Matemáticas y su Didáctica I", titulado: "Alternativas al cálculo escrito en Educación Primaria". Dicho bloque está formado por dos temas. El primero, dedicado al uso de la calculadora en la Educación Primaria y el segundo, al aprendizaje de la estimación en cálculo[180].

El tema sobre estimación tiene dos apartados: "Estimación en cálculo: Estrategias de estimación" y "Evaluación de la estimación en cálculo". El primer apartado está dedicado a explicar qué es la estimación, su utilidad y su inclusión en el currículo[181] de Educación Primaria. También se aprenden estrategias de estimación y se reflexiona sobre su enseñanza en la Educación Primaria.

El aprendizaje de estrategias tiene un tratamiento "inductivo" en el aula. El profesor plantea cálculos para los que hay que dar una estimación. Después, los alumnos van dando estimaciones que el profesor apunta en la pizarra. A continuación, el profesor va señalando las estimaciones y el alumno o alumna que ha producido cada estimación debe explicar a sus compañeros cómo ha realizado la estimación. Normalmente, en esta exposición por parte de los

[180] Dentro del primer bloque de la asignatura, hay un apartado llamado "El dominio de las combinaciones básicas. Estrategias de cálculo mental." En él se estudia el cálculo mental en la Educación Primaria, especialmente desde la perspectiva del dominio de las combinaciones básicas relativas a la suma y la resta, y la tabla de multiplicar, antes de proceder al estudio de los algoritmos de las operaciones. Por esta razón, las "alternativas al cálculo escrito" se centran, en el bloque 3 de la asignatura, en el uso de la calculadora y la estimación.

[181] Ninguno de los alumnos participantes en el periodo de instrucción había estudiado estimación a lo largo de su trayectoria académica anterior (ni en Educación Primaria, ni en Secundaria). Esto hace que los alumnos no piensen en la estimación como contenido ni como proceso a enseñar y que, gran parte del esfuerzo de la instrucción, deba dedicarse a justificar su presencia en el currículo matemático de la Educación Primaria. Para esta justificación, puede recurrirse tanto al currículo oficial como a la presencia de la estimación en libros de texto.

alumnos, aparecen las estrategias de estimación más habituales. El profesor va poniéndoles nombre a las mismas: "Esto que ha hecho Martín es lo que llamamos 'truncamiento'". Finalmente, los alumnos discuten en grupo, y se trata de llegar a un acuerdo dentro de la clase, sobre qué estimaciones aceptaríamos como válidas y cuáles no[182], introduciendo el problema de la evaluación de la estimación.

Después, el profesor presenta en clase parte del programa para la enseñanza de la estimación diseñado por Reys y otros (1987) para alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria. Este programa[183] está formado por "mini-lecciones" que mezclan aspectos teóricos y prácticos para la enseñanza de la estimación. La presentación de las mini-lecciones, cada una de las cuales explica una estrategia, o un aspecto importante de la estimación, sirve de refuerzo para el conocimiento matemático sobre la estimación de los alumnos y, a su vez, ofrece un modelo para la incorporación sistemática de la estimación en el currículo matemático de la Educación Primaria.

La segunda parte del tema sobre estimación está dedicada a la evaluación de la estimación. El profesor plantea dos alternativas para la evaluación: el uso de intervalos de respuesta aceptable con extremos determinados por el mínimo y

[182] Siempre hay alumnos más 'estrictos' que otros. Suelen aparecer problemas 'de límites': hasta dónde se acepta y cuándo ya es 'demasiado'. El profesor solo da el criterio de que no se puede evaluar negativamente cuando el alumno hace correctamente algo que el propio profesor ha enseñado. Esta idea hace referencia a que deben ser correctos los resultados de la aplicación de estrategias de estimación enseñadas en clase, lo cual ya es un primer criterio para la evaluación. Muchos alumnos, al explicar sus estimaciones, las descartan diciendo: "Me he equivocado", cometiendo, por ejemplo, errores de valor posicional, circunstancia que también se utiliza para comentar cuáles son los errores más típicos al estimar. Siempre aparecen alumnos a los que, a lo largo de su historia académica se les han dado mal las Matemáticas, que destacan en estimación, suponiendo esto un refuerzo afectivo y una motivación hacia la asignatura.

[183] En De Castro (2002, pp. 286-299) se presentan ejemplos traducidos al español de 13 mini-lecciones pertenecientes al programa de Reys y otros (1987).

el máximo de los resultados de aplicar las diferentes estrategias de estimación disponibles para cada operación y el uso de un determinado porcentaje de error admisible (habitualmente de un 30%). La primera opción ha sido la empleada informalmente en clase, en la primera parte del tema, y es la recomendada. Se discuten ventajas y desventajas de ambos enfoques para la evaluación.

La referencia bibliográfica fundamental para los alumnos durante el periodo de instrucción es el libro de Segovia y otros (1989). Los alumnos cuentan además, en el campus virtual del Centro, con varios documentos de apoyo de lectura recomendada. Son traducciones al español de varios artículos[184] de la revista "Arithmetic Teacher" (Schoen, 1987; Trafton y Zawojewski, 1987; Rubenstein, 1987; y Rubenstein, 1985b) que tratan sobre las estrategias de truncamiento, redondeo y uso de números compatibles (incluyendo el trabajo de estimación con fracciones y porcentajes).

Al finalizar el tema de estimación, los alumnos realizan la prueba de estimación, cuyo resultado cuenta para la evaluación de la asignatura, aunque solo en el caso de obtenerse un resultado positivo. En la evaluación de la asignatura de "Matemáticas y su Didáctica I", a la calificación obtenida en los dos exámenes que se realizan durante la asignatura, se le suman las calificaciones de los trabajos voluntarios que realizan los alumnos durante el curso. Dichos trabajos pueden aumentar la nota de examen hasta un máximo de 2 puntos. En cada curso, se ofrece la posibilidad de hacer 4 trabajos voluntarios. Los trabajos voluntarios nunca tienen una puntuación negativa; siempre suman a la nota final de la asignatura. Durante este curso, la prueba de estimación tuvo un carácter obligatorio, pero solo se tuvo en cuenta el resultado en caso de que los alumnos la realizaran correctamente.

[184] Estas traducciones se incluyeron en el Apéndice D del trabajo De Castro (2002). Ver páginas 267-284.

2.4. Variables de la investigación

En la descripción de las variables se incluyen, en cursiva, los nombres que han recibido las mismas. A continuación, describo las variables que forman parte del diseño de la investigación distinguiendo entre variables independientes, dependientes y controladas.

2.4.1. Variables independientes

Se han empleado dos variables independientes en la elaboración de las tareas de estimación: el *tipo de operación* y el *tipo de número*. En la variable *tipo de operación* se han considerado la operación que aparece explícitamente indicada en las tareas de estimación y la relación de orden que se da entre los operandos -esto último, solamente en el caso de la división. Así, en la prueba hay multiplicaciones, divisiones de un número por otro menor, y divisiones de un número por otro mayor.

O_1 = "multiplicación"

O_2 = "división de un número por otro número menor", a la que, por comodidad me referiré como "división A" o "división de tipo A".

O_3 = "división de un número por otro número mayor", también llamada "división B" o "división de tipo B".

En cada caso, la variable *Operación* se codificará respectivamente con 1, 2 o 3.

La variable *Tipo de número* se refiere al tipo de números que aparecen en la tarea para la que hay que realizar la estimación. En cada tarea aparecen dos números. Los números pueden ser enteros, decimales mayores que uno, decimales menores que uno y mayores que 0,1, y decimales menores que 0,1. Al considerar la variable *Número* no se han tenido en cuenta todas las posibles variaciones de los cuatro tipos de números antes citados tomados de dos en dos. Solamente se han considerado cuatro tipos de tareas distintos, que son los que permiten contrastar de manera más adecuada las hipótesis de la investigación. Así, los tipos de tareas de estimación considerados son los siguientes:

N_1 = "Tareas en las que solo aparecen números naturales"

N_2 = "Tareas en las que solo aparecen números decimales mayores que 1"

N_3 = "Tareas en las que aparecen números decimales menores que 1, pero no contienen números decimales menores que 0,1"

N_4 = "Tareas en las que aparecen números decimales menores que 0,1"

En cada caso, la variable *Número* se codificará respectivamente con 1, 2, 3 o 4. En la Tabla 2 pueden verse las tareas de estimación que componen la prueba clasificadas atendiendo a las dos variables independientes propuestas.

2.4.2. Variables dependientes

En este trabajo se consideran las siguientes variables dependientes:

La *puntuación* que obtiene un sujeto al realizar una estimación. Dada una estimación, se calcula el porcentaje de error correspondiente a esta estimación. Si este es mayor que el 30%, se da a la estimación cero puntos; si es mayor que el 20%, pero menor o igual que el 30%, se da a la estimación un punto; si es mayor que el 10% pero menor o igual que el 20%, se da a la estimación dos puntos y si es menor o igual que el 10%, se da a la estimación tres puntos.

Esta forma de puntuar los ítems de estimación se debe a Levine (1980, 1982) y se ha utilizado en los trabajos de De Castro (2002), Dowker (1992), Dowker, Flood, Griffiths, Harris y Hook (1996), Hanson y Hogan (2000), y LeFevre, Greenham, y Waheed (1993). Este sistema de puntuación para las tareas de estimación, u otros similares, se utiliza para evitar los inconvenientes de utilizar como puntuación el porcentaje de error[185]. Éstos pueden fácilmente ilustrarse con el siguiente ejemplo: Para el ítem 24 de la presente investigación (0,086 ÷ 0,42), una estimación razonable es 0,2, que puede obtenerse

[185] Para más detalle, ver el apartado sobre estimación y aproximación del capítulo 1.

sustituyendo la operación inicial por 0,08 ÷ 0,4. Varios (6) participantes han dado una estimación de 2 (con un 900% de error), mientras que 26 participantes han dado una estimación de 0,02 (a la que corresponde un -90% de error). Ambos errores se deben a un empleo deficiente del modo de operar la coma decimal y podrían considerarse como "igual de graves", pues en ambos casos el valor posicional del 2 es incorrecto, siendo en un caso la estimación 10 veces mayor a la estimación correcta y, en el otro, diez veces menor. Sin embargo, la diferencia en los porcentajes de error es muy notable debido a que las subestimaciones siempre tienen un porcentaje de error acotado (menor del 100% en valor absoluto). Mientras tanto, las sobrestimaciones con errores en el ajuste del valor posicional pueden superar fácilmente el 1000% (o incluso el 10000%), lo que produce valores extremos con los que no es apropiado utilizar la media. Esto limita mucho el tratamiento estadístico de los datos y por esta razón se hace conveniente tomar límites (como el 30%) para puntuar como 0 cualquier estimación que contenga un error en el ajuste del valor posicional.

La *precisión* de una estimación. Dada una estimación, se dirá que el sujeto que la ha realizado ha cometido una imprecisión o que la estimación tiene una precisión inaceptable -y se codificará la variable precisión con un cero- cuando el porcentaje de error de la estimación supere el 30%. En otro caso, se considerará que la estimación tiene una precisión aceptable (o razonable) -y la variable precisión se codificará con un uno[186].

El *tipo de destreza de aproximación*, el *tipo de estrategia* y el *tipo de error*

[186] Aunque la elección de cualquier porcentaje de error fijo puede parecer arbitraria, se ha realizado un análisis previo de las tareas de estimación empleadas en el estudio para justificar esta opción. La conclusión de este análisis es que la aplicación correcta de estrategias de estimación comúnmente aceptadas, a las tareas de estimación utilizadas, conduce siempre (para las tareas diseñadas para esta investigación) a un porcentaje de error inferior al 30%. Es importante observar que dicha definición está en concordancia con la atribución de 0 puntos en el test a las estimaciones con un porcentaje de error mayor del 30%.

serán otras tres variables dependientes que se considerarán en la investigación.

El *tiempo de respuesta* es el tiempo que tarda un sujeto en realizar una estimación, expresado en segundos.

2.4.3. Variables controladas

En el diseño de las tares de estimación se han controlado algunas variables de tarea, para facilitar que las tareas de estimación sirvieran para obtener una información adecuada a los objetivos del estudio.

Al considerar la variable *tipo de operación* se ha evitado utilizar ítems de suma y resta. Asimismo, al considerar la variable *tipo de número* se han dejado fuera las fracciones y los porcentajes. Los números que aparecen en las tareas de estimación tienen un máximo de tres cifras decimales, un mínimo de dos cifras distintas de cero y un máximo de tres cifras distintas de cero (multiplicadas o divididas por una potencia de 10), y un máximo de 4 cifras en total.

En cuanto al *formato de las preguntas*, se han utilizado solamente tareas de estimación en las que aparecen cálculos directos –desprovistos de contexto–, en los que la operación que hay que realizar aparece indicada explícitamente, y se ha evitado usar problemas en los que se presenta una situación en la cual hay que realizar una estimación dentro de un contexto aplicado. Asimismo, hay que advertir, en lo concerniente al *formato de las tareas*, que todos los cálculos se han presentado en formato horizontal. También se ha querido controlar la variable *formato de respuesta*. Para ello se han utilizado solamente tareas de respuesta abierta. En ellas, los alumnos deben producir una estimación.

2.5. Instrumentos

En esta investigación se han utilizado dos instrumentos: una prueba de estimación y una entrevista (en la que se emplean como material los ítems de la prueba de estimación).

Tabla 4.3. *Prueba de estimación*

(1) 46 × 771	(9) 85,9 ÷ 3,42	(17) 0,37 ÷ 0,543
(2) 58 × 244	(10) 96,2 ÷ 6,25	(18) 0,63 ÷ 0,785
(3) 968 ÷ 24	(11) 9,88 ÷ 25,6	(19) 0,025 × 776
(4) 354 ÷ 88	(12) 8,85 ÷ 42,6	(20) 852 × 0,048
(5) 86 ÷ 222	(13) 2,57 × 0,72	(21) 0,46 ÷ 0,066
(6) 36 ÷ 258	(14) 0,45 × 7,85	(22) 0,68 ÷ 0,024
(7) 78,4 × 89,5	(15) 0,962 ÷ 0,25	(23) 0,059 ÷ 0,23
(8) 34,1 × 47,2	(16) 0,747 ÷ 0,35	(24) 0,086 ÷ 0,42

2.5.1. La prueba de estimación

En la Tabla 4.3 aparecen los ítems que componen la prueba de estimación empleada en esta investigación y en la Tabla 4.4, estos ítems figuran clasificados según el tipo de operación y el tipo de número. En ella puede observarse cómo se han elegido dos representantes equivalentes para cada una de las 12 categorías de tipo de operación por tipo de número del diseño, según se explica en el apartado dedicado a las variables independientes del diseño.

Tabla 4.4. *Tareas de estimación clasificadas por tipo de operación y tipo de número*

	Operación		
Número	*Multiplicación*	*División A*	*División B*
N_1	(1) 46 × 771 (2) 58 × 244	(3) 968 ÷ 24 (4) 354 ÷ 88	(5) 86 ÷ 222 (6) 36 ÷ 258
N_2	(7) 78,4 × 89,5 (8) 34,1 × 47,2	(9) 85,9 ÷ 3,42 (10) 96,2 ÷ 6,25	(11) 9,88 ÷ 25,6 (12) 8,85 ÷ 42,6
N_3	(13) 2,57 × 0,72 (14) 0,45 × 7,85	(15) 0,962 ÷ 0,25 (16) 0,747 ÷ 0,35	(17) 0,37 ÷ 0,543 (18) 0,63 ÷ 0,785
N_4	(19) 0,025 × 776 (20) 852 × 0,048	(21) 0,46 ÷ 0,066 (22) 0,68 ÷ 0,024	(23) 0,059 ÷ 0,23 (24) 0,086 ÷ 0,42

2.5.2. Composición de la prueba

El uso del porcentaje de error no es un método apropiado para valorar la razonabilidad de una estimación. En las investigaciones sobre estimación suelen emplearse los porcentajes de error -o, alternativamente, los intervalos de respuesta aceptable- para dar una puntuación a los sujetos que permita evaluar su habilidad de estimar. El porcentaje de error que se toma como límite para aceptar una estimación es arbitrario. El porcentaje más utilizado en las investigaciones ha sido el 30%.

En este trabajo, al abordar el diseño de las tareas de estimación, se han elaborado el intervalo de respuesta aceptable y el intervalo de error del 30%. El intervalo de respuesta aceptable para una tarea de estimación se ha formado considerando como extremos del mismo la más baja y la más alta de las estimaciones obtenidas mediante la aplicación de estrategias de estimación comúnmente aceptadas. Los dos intervalos se elaboran mediante procedimientos totalmente independientes. Se ha optado por elegir las tareas para la prueba de estimación de forma que los dos criterios de evaluación tradicionales en estimación estén en consonancia. Esto se logra eligiendo tareas de estimación en las que el intervalo de respuesta aceptable esté incluido en el intervalo del 30% de error y, además, que los extremos de ambos intervalos estén lo más próximos que sea posible. La situación ideal sería que ambos intervalos coincidiesen, lo cual es muy difícil de lograr. Sin embargo, sí es posible conseguir que una respuesta con un error superior al 30% no pertenezca al intervalo de respuesta aceptable, con lo cual, el uso del porcentaje de error, que sigue siendo arbitrario, está ahora mucho mejor justificado. En el apéndice E se realiza un análisis individual de cada uno de los ítems de la prueba de estimación. Para cada ítem, se valora[187] si ha habido

[187] Este análisis a posteriori de las tareas de estimación puede proporcionar información de interés para modificar las tareas de la prueba de estimación de cara a futuras aplicaciones.

estimaciones no aceptables pertenecientes al intervalo del 30% de error (situación en la que los dos criterios de evaluación no coincidirían), o si ha habido estimaciones con un porcentaje de error superior, pero cercano al 30%, que puedan considerarse como estimaciones válidas (situación que cuestionaría el uso del intervalo del 30% de error para evaluar dicho ítem y la construcción del intervalo de respuesta aceptable).

Siguiendo esta forma de trabajar, se ha introducido el término de "precisión razonable" para estimaciones con un error menor del 30%. Esto se ha hecho así porque una estimación de este tipo pertenece o está muy próxima al intervalo de respuesta aceptable –o razonable. Por otra parte, se ha considerado que una estimación con un error superior al 30% tiene una precisión inaceptable por que, con seguridad, no pertenece al intervalo de respuesta aceptable.

Otro aspecto que se ha tenido en cuenta en la elaboración de las tareas de estimación ha sido que estas favorezcan el uso de distintas destrezas de aproximación. Por ejemplo, todas las tareas tienen las dos primeras cifras significativas -de alguno de sus números- próximas a alguno de los siguientes números: 25, 33, 50, 66, 75 o 100. Esto se hace para que se pueda emplear en todos los cálculos la sustitución de un número por una fracción -1/4, 100/4, 1/3, 100/3, etc.- o por una potencia de 10. Se ha tratado de favorecer que pueda emplearse en las divisiones la sustitución de los números iniciales por números compatibles -entre los que haya relación de múltiplo y divisor. También se ha favorecido que en las divisiones de un número por otro mayor sea posible, de una forma sencilla, dividir el divisor por el dividendo. Este es un tipo de error que podría aparecer en la investigación, de acuerdo con la revisión de antecedentes realizada, y se ha contemplado en la elaboración de las tareas.

En la Tabla 4.5 se muestra un resumen del análisis previo realizado a las tareas de estimación que componen la prueba. En la primera columna, aparecen las tareas de estimación que se han propuesto. En la segunda se proponen distintos ejemplos de sustitución de los números iniciales por aproximaciones. En la tercera columna figura el tipo de sustitución -nombre de la destreza de aproximación- indicando la presencia -en su caso- de una compensación previa al cálculo. Por último, desde la columna cuarta a la sexta, pueden observarse el resultado de la estimación empleando cada destreza de aproximación, la puntuación que obtendría cada estimación y, por último, los intervalos de respuesta aceptable y del 30% de error.

En algunas de las tareas de estimación se han propuesto ejemplos de cómo una estrategia comúnmente aceptada -y correctamente aplicada- puede conducir a una estimación imprecisa. Por ejemplo, al realizar una estimación para el cálculo 46×771, se pueden sustituir los datos iniciales por 50 y por 1000 respectivamente dando lugar al cálculo 50×1000 y a una estimación de 50000. El porcentaje de error correspondiente a esta estimación es de un 40,98% y, en consecuencia, puede decirse que el sujeto ha cometido una imprecisión. En esta situación, el sujeto obtendría una puntuación de cero.

Esto no quiere decir que el alumno haya cometido un error al producir su estimación. Sin embargo, al atribuir cero puntos a la estimación se está señalando que la estimación no tiene una precisión razonable. Dicho de otro modo, existen otras estrategias sencillas cuya aplicación al cálculo planteado producirían una estimación claramente más próxima al resultado exacto del cálculo. El uso de cualquiera de estas estrategias refleja un mayor sentido numérico en el estimador que las emplea. En el ejemplo anterior, el sujeto que realiza la estimación debería darse cuenta de que es más adecuado sustituir el cálculo 46×771 por 50×800, en lugar de sustituirlo por 50×1000.

2.5.3. Procedimiento de aplicación

La prueba de estimación se administró en el aula de informática. Los alumnos realizaron la prueba durante una sesión de clase de dos horas de duración. El aula de informática está dotada con veinte ordenadores. La prueba constaba de 24 ítems que aparecían en orden aleatorio en la pantalla del ordenador. La duración media de la prueba fue de 24 minutos y 27 segundos[188].

Los alumnos entraban en el aula de informática sin llevar nada consigo. Con esta medida, se trataba de evitar que pudieran utilizar procedimientos no mentales de cálculo. Los alumnos no tenían limitación de tiempo para responder a la prueba de estimación pero se les indicó que debían dar su respuesta con rapidez.

2.5.4. *Fiabilidad*

En este trabajo, la prueba de estimación que se ha utilizado ha sido diseñada de modo que contenga dos formas paralelas[189] del mismo test. Cada ítem impar de la prueba está diseñado para ser equivalente al ítem siguiente. El coeficiente de fiabilidad[190] tiene un valor de r = 0,79.

[188] La duración mínima fue de 6 minutos y 14 segundos y la máxima de 1 hora, 2 minutos y 35 segundos.

[189] Se entiende por formas paralelas del mismo test a dos tests construidos de forma que resulten ser prácticamente iguales, de manera que las puntuaciones de los sujetos en ambos sean comparables ítem a ítem (Santisteban, 1990, p. 52).

[190] El coeficiente de fiabilidad es el coeficiente de correlación lineal (Santisteban, 1990, p. 55) entre las medias de las puntuaciones de los ítems impares y los pares. El índice de fiabilidad es la raíz cuadrada del coeficiente de fiabilidad y tendría un valor de 0,89. Según se verá en el capítulo de análisis de datos, no podemos considerar del todo equivalentes a los ítems 5 y 6, por un lado, ni a los ítems 13 y 14, por otro. Si se eliminasen estos cuatro ítems de la prueba de estimación, el coeficiente de correlación entre los ítems impares y los pares pasaría de ser de 0,79 a 0,95, lo que supondría un coeficiente de fiabilidad extraordinario. En el capítulo de conclusiones, explicaré a qué se deben las diferencias (la no equivalencia) entre los ítems indicados.

Tabla 4.5. *Análisis de las tareas de estimación empleadas en la prueba*

Tareas	*Sustitución*	*Tipo de sustitución*	*Estimación*	*Puntuación*	*Intervalos*
(1) 46 × 771	40 × 700	Truncamiento	28000	1	[24826,46105] [28000,46000]
	40 × 3/4 × 1000	Fracciones	30000	2	
	40 × 800	Redondeo + comp.	32000	3	
	50 × 700	Redondeo + comp.	35000	3	
	50 × 800	Redondeo	40000	2	
	100/2 de 800	Fracciones	40000	2	
	46 × 1000	Potencias de 10	46000	1	
	50 × 1000	P. de 10 y redondeo	50000	0	
(2) 58 × 244	50 × 200	Truncamiento	10000	1	[9906,18397] [10000,18000]
	55 × 200	N. compatibles	11000	1	
	60 × 200	Redondeo	12000	2	
	100/2 × 250	Fracciones	12500	2	
	60 × 1000/4	Fracciones	15000	3	
	50 × 300	Redondeo + comp.	15000	3	
	55 × 300	N. compatibles	16500	2	
	60 × 300	Redondeo h. arriba	18000	1	
(3) 968 ÷ 24	900 ÷ 30	N. compatibles	30	1	[28,2,52,4] [30,50]
	960 ÷ 30	N. compatibles	32	1	
	1000 ÷ 30	Redondeo + comp.	33,3	2	
	900 ÷ 100/4	Fracciones	36	2	
	900 ÷ 25	N. compatibles	36	2	
	1000 ÷ 100/4	Fracciones	40	3	
	1000 ÷ 25	N. compatibles	40	3	
	900 ÷ 20	Truncamiento	45	2	
	960 ÷ 20	Truncamiento	48	2	
	1000 ÷ 20	Redondeo	50	1	
(4) 354 ÷ 88	300 ÷ 100	N. compatibles	3	1	[2,69,5,00] [3,5]
	300 ÷ 90	Truncamiento	3,3	2	
	354 ÷ 100	Potencias de 10	3,54	2	
	360 ÷ 90	N. compatibles	4	3	
	300 ÷ 300/4	Fracciones	4	3	
	320 ÷ 80	N. compatibles	4	3	
	400 ÷ 100	Redondeo + comp.	4	3	
	400 ÷ 90	Redondeo	4,4	3	
	400 ÷ 80	N. compatibles	5	1	
(5) 86 ÷ 222	75 ÷ 300	N. compatibles	0,25	0	[0,271,0,503] [0,3,0,5]
	90 ÷ 300	N. compatibles	0,3	1	
	80 ÷ 1000/4	Fracciones	0,32	2	
	100 ÷ 300	N. compatibles	0,33	2	
	90 ÷ 1000/4	Fracciones	0,36	3	
	80 ÷ 200	Truncamiento	0,4	3	
	100 ÷ 250	N. compatibles	0,4	3	
	86 ÷ 200	Truncamiento o red.	0,43	2	
	90 ÷ 200	Redondeo	0,45	2	
	100 ÷ 200	N. compatibles	0,5	1	
(6) 36 ÷ 258	30 ÷ 300	N. compatibles	0,1	1	[0,098,0,181] [0,1,0,18]
	36 ÷ 300	N. compatibles	0,12	2	
	40 ÷ 300	Redondeo	0,13	3	
	30 ÷ 1000/4	Fracciones	0,13	3	
	35 ÷ 1000/4	Fracciones	0,14	3	
	30 ÷ 200	Truncamiento	0,15	3	
	40 ÷ 1000/4	Fracciones	0,16	2	
	36 ÷ 200	N. compatibles	0,18	1	

Tabla 4.5 (Continuación)
Análisis de las tareas de estimación empleadas en la prueba

Tareas	*Sustitución*	*Tipo de sustitución*	*Estimación*	*Puntuación*	*Intervalos*
(7) 78,4 × 89,5	70 × 80	Truncamiento	5600	1	[4911,9121] [5600,9000]
	100 × 3/4 × 80	Fracciones	6000	2	
	70 × 90	Redondeo + comp.	6300	2	
	80 × 80	Redondeo + comp.	6400	3	
	80 × 90	Redondeo	7200	3	
	78,4 × 100	Potencias de 10	7840	2	
	100 × 89,2	Potencias de 10	8920	1	
	100 × 90	Potencias de 10	9000	1	
	100 × 100	Potencias de 10	10000	0	
(8) 34,1 × 47,2	30 × 40	Truncamiento	1200	1	[1126,2092] [1200,2000]
	35 × 40	N. compatibles	1400	2	
	30 × 50	Redondeo	1500	3	
	40 × 40	Redondeo + comp.	1600	3	
	34 × 100/2	Fracciones	1700	3	
	40 × 45	N. compatibles	1800	2	
	40 × 50	Redondeo h. arriba	2000	1	
(9) 85,9 ÷ 3,32	80 ÷ 4	N. compatibles	20	1	[18,1,33,6] [20,33,3]
	84 ÷ 4	N. compatibles	21	2	
	88 ÷ 4	N. compatibles	22	2	
	90 ÷ 4	Redondeo + comp.	22,5	2	
	80 ÷ 10/3	Fracciones	24	3	
	100 ÷ 4	Potencias de 10	25	3	
	75 ÷ 3	N. compatibles	25	3	
	80 ÷ 3	Truncamiento	26	3	
	90 ÷ 10/3	Fracciones	27	3	
	84 ÷ 3	N. compatibles	28	3	
	90 ÷ 3	Redondeo	30	2	
	100 ÷ 3	N. compatibles	33,3	1	
(10) 96,2 ÷ 6,25	90 ÷ 7	Redondeo	12	1	[10,77,20,01] [12,20]
	100 ÷ 8	N. compatibles	12,5	2	
	91 ÷ 7	N. compatibles	13	2	
	90 ÷ 20/3	Fracciones	13,5	2	
	90 ÷ 6	Truncamiento	15	3	
	96 ÷ 6	N. compatibles	16	3	
	100 ÷ 6	Redondeo	16,5	3	
	90 ÷ 5	N. compatibles	18	2	
	100 ÷ 5	N. compatibles	20	1	
(11) 9,88 ÷ 25,6	9 ÷ 30	N. compatibles	0,3	1	[0,27,0,50] [0,3,0,5]
	10 ÷ 30	Redondeo	0,33	2	
	9 ÷ 100/4	Fracciones	0,36	3	
	100 ÷ 250	N. compatibles	0,4	3	
	10 ÷ 100/4	Fracciones	0,4	3	
	9 ÷ 20	Truncamiento	0,45	2	
	10 ÷ 20	N. compatibles	0,5	1	
(12) 8,85 ÷ 42,6	8 ÷ 100/2	Fracciones	0,16	1	[0,14,0,27] [0,16,0,25]
	9 ÷ 50	Redondeo	0,18	2	
	9 ÷ 100/2	Fracciones	0,18	2	
	8 ÷ 40	Truncamiento	0,2	3	
	9 ÷ 45	N. compatibles	0,2	3	
	10 ÷ 50	N. compatibles	0,2	3	
	8,8 ÷ 40	N. compatibles	0,22	3	
	10 ÷ 40	N. compatibles	0,25	1	

Tabla 4.5 (Continuación)
Análisis de las tareas de estimación empleadas en la prueba

Tareas	*Sustitución*	*Tipo de sustitución*	*Estimación*	*Puntuación*	*Intervalos*
(13) 0,72 × 2,57	0,7 × 2	Truncamiento	1,4	1	[1,30,2,41] [1,4,2,4]
	3/4 × 2	Fracciones	1,5	2	
	0,8 × 2	Redondeo + comp.	1,6	2	
	0,7 × 2,5	N. compatibles	1,75	3	
	1 × 2	N. compatibles + comp.	2	3	
	0,8 × 2,5	N. compatibles	2	3	
	0,8 × 10/4	Fracciones	2	3	
	0,7 × 3	Redondeo	2,1	2	
	3/4 × 3	Fracciones	2,25	1	
	0,8 × 3	Redondeo h. arriba	2,4	1	
	1 × 2,57	Potencias de 10	2,57	0	
(14) 0,45 × 7,85	0,4 × 7	Truncamiento	2,8	1	[2,47,4,59] [2,8,4,5]
	0,4 × 7,5	N. compatibles	3	2	
	0,4 × 8	Redondeo + comp.	3,2	3	
	0,5 × 7	Redondeo + comp.	3,5	3	
	0,45 × 8	N. compatibles	3,6	3	
	0,5 × 8	Redondeo	4	2	
	0,45 × 10	Potencias de 10	4,5	1	
	0,5 × 10	P. de 10 y redondeo	5	0	
(15) 0,962 ÷ 0,25	0,9 ÷ 0,3	N. compatibles	3	1	[2,694,5,002] [3,5]
	1 ÷ 0,3	Redondeo	3,3	2	
	0,9 ÷ 1/4	Fracciones	3,6	3	
	1 ÷ 0,25	N. compatibles	4	3	
	1 ÷ 1/4	Fracciones	4	3	
	0,9 ÷ 0,2	Truncamiento	4,5	2	
	1 ÷ 0,2	N. compatibles	5	1	
(16) 0,747 ÷ 0,35	0,7 ÷ 1/2	N. compatibles	1,4	0	[1,49,2,77] [1,5,2,5]
	0,6 ÷ 0,4	N. compatibles	1,5	1	
	0,7 ÷ 0,4	Redondeo	1,75	2	
	0,7 ÷ 0,35	N. compatibles	2	3	
	0,8 ÷ 0,4	N. compatibles	2	3	
	0,7 ÷ 1/3	Fracciones	2,1	3	
	0,7 ÷ 0,3	Truncamiento	2,3	3	
	0,8 ÷ 1/3	Fracciones	2,4	2	
	0,75 ÷ 0,3	N. compatibles	2,5	2	
	1 ÷ 0,4	N. compatibles	2,5	2	
	1 ÷ 1/3	Fracciones	3	0	
	0,9 ÷ 0,3	N. compatibles	3	0	
(17) 0,37 ÷ 0,543	0,3 ÷ 0,6	N. compatibles	0,5	1	[0,477,0,886] [0,5,0,8]
	0,3 ÷ 10/2	Fracciones	0,6	2	
	0,3 ÷ 0,5	Truncamiento	0,6	2	
	0,36 ÷ 0,6	N. compatibles	0,6	2	
	1/3 ÷ 1/2	Fracciones	0,66	3	
	0,4 ÷ 0,6	Redondeo + comp.	0,66	3	
	0,35 ÷ 0,5	N. compatibles	0,7	3	
	0,4 ÷ 10/2	Fracciones	0,8	2	
	0,4 ÷ 0,5	Redondeo	0,8	2	
(18) 0,63 ÷ 0,785	0,5 ÷ 1	N. compatibles	0,5	0	[0,56,1,04] [0,6,1]
	0,6 ÷ 1	Potencias de 10	0,6	1	
	0,7 ÷ 1	P. de 10 + comp.	0,7	2	
	0,6 ÷ 0,7	Truncamiento o red.	0,8	3	
	0,7 ÷ 0,8	Redondeo + comp.	0,8	3	
	0,64 ÷ 0,8	N. compatibles	0,8	3	
	0,6 ÷ 3/4	Fracciones	0,8	3	
	0,63 ÷ 0,7	N. compatibles	0,9	2	
	0,7 ÷ 0,7	N. compatibles	1	1	

Tabla 4.5 Continuación

Análisis de las tareas de estimación empleadas en la prueba

Tareas	*Sustitución*	*Tipo de sustitución*	*Estimación*	*Puntuación*	*Intervalos*
(19) 776 × 0,025	700 × 0,02	Truncamiento	14	1	[13,5,25,2] [14,25]
	800 × 0,02	Redondeo + comp.	16	2	
	700 × 1/40	Fracciones	17,5	3	
	¾ ×1000×0,024	Fracciones	18	3	
	800 × 1/40	Fracciones	20	3	
	700 × 0,03	Redondeo + comp.	21	3	
	800 × 0,03	Redondeo	24	1	
	1000 × 0,025	Potencias de 10	25	1	
(20) 852 × 0,048	800 × 0,04	Truncamiento	32	1	[28,62,53,16] [32,50]
	900 × 0,04	Redondeo + comp.	36	2	
	800 × 0,05	Redondeo + comp.	40	3	
	850 × 1/20	Fracciones	42,5	3	
	860 × 1/20	Fracciones	43	3	
	900 × 0,05	Redondeo	45	2	
	1000 × 0,049	Potencias de 10	49	2	
	1000 × 0,05	P. de 10 + redondeo	50	1	
(21) 0,46 ÷ 0,066	0,4 ÷ 0,1	Potencias de 10	4	0	[4,87,9,06] [5,9]
	0,4 ÷ 0,08	N. compatibles	5	1	
	0,4 ÷ 0,06	Truncamiento	6 o 6,6	2 o 3	
	0,42 ÷ 0,06	N. compatibles	7	3	
	0,5 ÷ 0,07	Redondeo	7	3	
	1/2 ÷ 2/30	Fracciones	7,5	3	
	0,48 ÷ 0,06	N. compatibles	8	2	
	0,4 ÷ 1/20	Fracciones	8	2	
	0,45 ÷ 0,05	N. compatibles	9	1	
	0,5 ÷ 0,05	N. compatibles	10	0	
(22) 0,68 ÷ 0,024	0,6 ÷ 0,03	N. compatibles	20	1	[19,8,36,8] [20,35]
	0,5 ÷ 1/40	Fracciones	20	1	
	0,6 ÷ 1/40	Fracciones	24	2	
	0,5 ÷ 0,02	N. compatibles	25	2	
	0,7 ÷ 1/40	Fracciones	28	3	
	0,6 ÷ 0,02	Truncamiento	30	3	
	0,66 ÷ 0,022	N. compatibles	30	3	
	0,75 ÷ 0,025	N. compatibles	30	3	
	0,7 ÷ 0,02	Redondeo	35	1	
	0,8 ÷ 0,02	N. compatibles	40	0	
(23) 0,059 ÷ 0,23	0,06 ÷ 0,3	Redondeo	0,2	2	[0,17,0,33] [0,2,0,3]
	0,05 ÷ 0,25	N. compatibles	0,2	2	
	0,05 ÷ 1/4	Fracciones	0,2	2	
	0,06 ÷ 1/4	Fracciones	0,24	3	
	0,05 ÷ 0,2	Truncamiento	0,25	3	
	0,06 ÷ 0,2	N. compatibles	0,3	1	
(24) 0,086 ÷ 0,42	0,05 ÷ 0,5	N. compatibles	0,1	0	[0,14,0,26] [0,15,0,25]
	0,075 ÷ 1/2	Fracciones	0,15	1	
	0,08 ÷ 1/2	Fracciones	0,16	1	
	0,09 ÷ 1/2	Fracciones	0,18	2	
	0,08 ÷ 0,4	Truncamiento	0,2	3	
	0,1 ÷ 0,5	N. compatibles	0,2	3	
	0,084 ÷ 0,4	N. compatibles	0,21	3	
	0,09 ÷ 0,4	N. compatibles	0,225	2	
	0,1 ÷ 0,4	N. compatibles	0,25	1	
	0,1 ÷ 1/3	Fracciones	0,3	0	

En el contexto de este estudio, no tiene sentido utilizar el coeficiente α de Cronbach para evaluar la fiabilidad[191].

2.5.5. *Validez*

En estudios sobre estimación, una posible amenaza para la *validez* es que los alumnos obtengan sus respuestas por un procedimiento distinto al de la estimación. Para evitar esta circunstancia, los alumnos realizaron el test en la pantalla de un ordenador, sin necesidad de utilizar el teclado -las estimaciones se escribían pulsando sobre un teclado virtual, situado en la pantalla del ordenador[192], con ayuda del ratón, los números deseados[193]. Además, como se ha indicado en un apartado anterior, los alumnos no podían llevar consigo papel, ni ningún utensilio para escribir, ni instrumento de cálculo alguno.

[191] El α de Cronbach refleja el grado en que covarían los ítems que constituyen el test. Es un indicador de la consistencia interna del test que se utiliza en escalas unidimensionales. Es decir, en tests donde se desea medir una sola cosa. En este caso, α indica la medida en la que todos los ítems de la prueba miden lo mismo. La prueba de estimación podría emplearse para medir la habilidad de estimar de los participantes. Si así fuera, tendría sentido el uso de α pues en todos los ítems se pide una estimación. Sin embargo, la prueba está diseñada para encontrar diferencias entre los ítems en función del tipo de operación y el tipo de número, no para medir la habilidad de estimar.

[192] El programa de ordenador, diseñado por el autor de la investigación, no permitía el uso de ningún otro recurso del ordenador. Al comenzar la prueba, los alumnos se encontraban el ordenador con la pantalla inicial del programa de estimación, en la que debían escribir su nombre y apellidos. El programa, en ningún momento ofrecía la posibilidad de salir del mismo, minimizando o reduciendo su tamaño en la pantalla, para permitir el acceso a otro software.

[193] El uso de un teclado virtual, que solo tiene las teclas estrictamente necesarias, reduce toda la ejecución de la prueba a mirar la pantalla y emplear el ratón. El objetivo es doble: por una parte, el uso del teclado virtual es un elemento de control que garantiza que el alumno está estimando; por otra parte, simplifica al máximo el uso del programa de estimación de modo que los participantes no se vean perjudicados por una falta de familiaridad con el teclado o con los medios tecnológicos en general.

En cuanto a la *validez de contenido* hay que asegurar que los ítems del test cubran o representen adecuadamente el dominio y que el contenido sea relevante; es decir, que incluya todos los aspectos de interés (Santisteban, 1990, p. 151). La *relevancia* está garantizada al observarse, entre las variables independientes del diseño, todas las posibilidades de interés en cuanto al tipo de operación y tipo de número. Considero este uno de los fuertes del diseño, al haber distinguido entre divisiones de tipo A y tipo B, aspecto que no había sido tenido en cuenta en *ninguna* investigación anterior sobre estimación. Lo mismo puede decirse de la distinción entre números decimales menores que 1, pero mayores que 0,1 y números decimales menores que 0,1. En cuanto a la *representatividad* del dominio, la duda que puede producirse es en cuanto a si los números elegidos son representativos del tipo de número correspondiente. Como ejemplo, para los números decimales mayores que uno, en la prueba de estimación están los siguientes seis ítems:

(7) $78{,}4 \times 89{,}5$	(9) $85{,}9 \div 3{,}42$	(11) $9{,}88 \div 25{,}6$
(8) $34{,}1 \times 47{,}2$	(10) $96{,}2 \div 6{,}25$	(12) $8{,}85 \div 42{,}6$

Como puede observarse, al elegir los números que iban a aparecer en la prueba de estimación, se fijaron las condiciones de que cada número tuviese entre 2 o 3 cifras diferentes de cero, y una o dos cifras decimales. En esta situación, cabe preguntar: ¿Son los ítems del tipo $78{,}4 \times 89{,}5$ representativos del conjunto de los productos de dos números decimales mayores que uno? Probablemente no lo sean, pero la limitación del número de preguntas del test a 24, con el fin de no hacer el test excesivamente largo, junto con la intención de que la prueba contuviera dos formas paralelas del mismo test, me han hecho optar por incluir en cada una de las 12 categorías producto del diseño, dos ítems equivalentes y quizá no suficientemente representativos del tipo de ítem al que corresponden. Sin embargo, pienso que más que la representatividad, considerada en términos absolutos, es más importante que las parejas de ítems (7) $78{,}4 \times 89{,}5$ y (8) 34,1

$\times$ 47,2 y (13) 2,57 $\times$ 0,72 y (14) 0,45 $\times$ 7,85, sí representen correctamente la diferencia de dificultad entre multiplicar números decimales mayores que uno y multiplicar un número por un decimal menor que uno pues entre los dos tipos de tareas, prácticamente, apenas hay más cambios que la posición de la coma decimal.

2.6. Las entrevistas

El objetivo de las entrevistas es analizar los procesos metacognitivos, las estrategias y los errores en las tareas de estimación.

2.6.1. Materiales utilizados en la entrevista

Los 26 alumnos entrevistados fueron divididos al azar en dos grupos. En el primero de ellos se pidió que dieran una estimación para los ítems impares de la prueba de estimación explicando el procedimiento que habían seguido para producir el resultado. En el segundo grupo, se utilizaron los ítems pares de la prueba. Esta opción se tomó aprovechando que las dos partes de la prueba se habían diseñado para ser equivalentes y que la entrevista con los 24 ítems de la prueba resultaría excesivamente larga.

2.6.2. Selección de sujetos para la entrevista

Los participantes entrevistados fueron 26 de los 33 alumnos[194] del Curso 1. Fueron elegidos por su disponibilidad[195], dado que recibían un curso de Didáctica de las Matemáticas para la Educación Primaria, en el que la

[194] En principio, estaba previsto que participasen todos los alumnos del Curso 1. La participación era voluntaria, pues la entrevista, al contrario que la administración del test, se realizaba fuera del horario de la asignatura. Los participantes eran recompensados con una calificación complementaria (que nunca podía ser negativa) que se incluía en la evaluación del tema de "alternativas al cálculo escrito" correspondiente a la asignatura que cursaban.

[195] Se trata, pues, de un muestreo de conveniencia (Cohen y Manion, 1990, p. 138).

estimación en cálculo formaba parte de los contenidos y la prueba de estimación y la entrevista podían ser integrados dentro de las actividades del curso. Todos los alumnos fueron entrevistados unos días después de finalizar el periodo de instrucción sobre estimación y de realizar la prueba de estimación, que se administró inmediatamente después de dicho periodo de instrucción.

2.6.3. Forma de conducir la entrevista

Las entrevistas se han realizado individualmente y en una habitación aislada. El entrevistador estaba sentado junto al alumno, a su derecha, y ambos estaban delante del ordenador. Todas las entrevistas se realizaron varios días después de la administración de la prueba de estimación y con el mismo programa de ordenador que se empleó en la misma. Las entrevistas fueron registradas con una grabadora y transcritas para su análisis.

Antes de comenzar, el entrevistador recordaba a cada participante que tenía que dar una estimación para cada cálculo y explicar lo que iba haciendo a medida que lo hacía. El entrevistador intervenía lo menos posible, casi siempre para recordar al alumno que tenía que explicar lo que estaba haciendo cuando el alumno permanecía en silencio.

2.6.4. Fiabilidad de la codificación de los datos de la entrevista

Un aspecto metodológico importante al establecer categorías para los errores[196], es estudiar la fiabilidad del proceso de codificación, en el que se asignan los distintos fragmentos de la transcripción a una u otra categoría, atribuyéndoles

[196] Se ha optado por analizar la fiabilidad de la codificación de los errores, puesto que es la parte más relevante del análisis cualitativo (como complemento del análisis cuantitativo) y hay muchas categorías de errores, algunas de las cuales se diferencian entre sí en pequeños matices. No ocurre lo mismo con la clasificación de las estrategias, en la que se han distinguido solo tres tipos básicos de estrategias diferentes y el análisis de la fiabilidad de la codificación tiene un interés menor.

un código. Habitualmente, este estudio de la fiabilidad se desarrolla a lo largo de un proceso[197] en que paso a paso se va aumentando la fiabilidad, cambiando definiciones de las categorías, etc. Hay diferentes propuestas sobre qué indicador es más adecuado para valorar el grado de acuerdo interjueces (o intercodificadores). Delval (2001, p. 179) propone que se tome entre un 10 y un 20 por ciento del material y que sea analizado por dos codificadores. Para este autor, será satisfactorio que el acuerdo se sitúe entre un 80 y un 90 por ciento de las codificaciones. Miles y Huberman (1994, p. 64) proponen comenzar por un examen (hecho por dos codificadores) de 5 a 10 páginas del material, utilizando la siguiente fórmula para la fiabilidad:

$$Fiabilidad = \frac{número\ de\ acuerdos}{número\ de\ acuerdos + desacuerdos}$$

Tras este cálculo, que puede situar la fiabilidad en torno al 70%, deben producirse una o varias reuniones de discusión entre los codificadores para discutir y llegar a acuerdos de interpretación sobre el material, unir o separar categorías o refinar definiciones. Al final del proceso, se espera que el acuerdo sea superior al 90% sobre aproximadamente dos tercios del total del material analizado.

En este trabajo, siguiendo el enfoque de Krippendorff (1997), se ha optado por utilizar el coeficiente kappa[198] de Cohen (Cohen, 1960), para evitar una sobrestimación[199] de la concordancia entre codificadores producida por el efecto de las concordancias debidas al azar. Así, he empleado para el

[197] Un ejemplo interesante de aumento de la fiabilidad a través de varias etapas está en el trabajo: Marcelo, C., y Perera, V. H. (2007). Comunicación y aprendizaje electrónico: La interacción didáctica en los nuevos espacios virtuales de aprendizaje. *Revista de Educación, 343*, 381-429.

[198] Sigo la interpretación del coeficiente kappa propuesta por Landis y Koch (1977). Considero que un coeficiente con valor 0 representa una concordancia *pobre*, que los valores entre 0,01 y 0,20 suponen una concordancia *leve*; entre 0,21 y 0,40, *aceptable*; entre 0,41 y 0,60, *moderada*; entre 0,61 y 0,80, *considerable* o *sustancial*; y entre 0,81 y 1, la concordancia será *casi perfecta*.

coeficiente kappa, la siguiente fórmula:

$$\kappa = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e}$$

Donde P_o es la proporción de concordancia esperada (en tanto por 1) y P_e es la proporción de concordancia esperada al azar. El objetivo planteado, en el diseño de la investigación, es el de que el proceso de análisis de la fiabilidad conduzca, finalmente, a acercarnos lo más posible a una fiabilidad *casi perfecta*. Además, se ha decidido incluir las *matrices de confusión* (Buela-Casal y Sierra, 1997, p. 331) para dos codificadores, para representar las concordancias y no concordancias entre los codificadores y favorecer la localización de discrepancias entre codificadores, dentro del proceso de análisis de la fiabilidad. Los resultados del análisis de la fiabilidad en la codificación de los errores se muestran al final del capítulo 7.

[199] Esta sobrestimación se produce al utilizar la fórmula propuesta por Miles y Huberman (1994).

Capítulo 5. Análisis de datos cuantitativos: La prueba de estimación

En este capítulo se analizan los datos obtenidos al administrar la prueba de estimación. Todos estos datos aparecen organizados en tablas en el Apéndice A. Además, otro apéndice de este trabajo, el F, en el que se analizan las respuestas dadas por los alumnos a cada uno de los ítems de la prueba de estimación, pueden considerarse parte de este capítulo.

1. Introducción

Antes de pasar a las pruebas estadísticas que se han empleado, voy a comenzar comentando algunos resultados de la prueba de estimación. Estos pueden proporcionar una idea general sobre la aplicación de dicha prueba, que revele aspectos interesantes sobre cómo han afrontado los alumnos las tareas de estimación.

1.1. Algunos resultados generales de la aplicación de la prueba de estimación

La prueba de estimación, compuesta por 24 ítems, ha sido administrada a 131 estudiantes de magisterio. Esto supone un total de 3144 respuestas a tareas de estimación. Como puede verse en la Tabla 5.1, 1730 (un 55%) de dichas respuestas han sido clasificadas como imprecisas (con un porcentaje de error mayor del 30%), quedando casi todas ellas también fuera del intervalo de respuesta razonable.

En el extremo opuesto, 1414 respuestas (un 45%) han tenido una puntuación positiva, según su porcentaje de error ha sido menor del 10% (un 25,5%), mayor del 10%, pero menor del 20% (un 11,5%), o mayor del 20%, pero menor del 30% (un 8,3%). Hay, por tanto, aproximadamente, una división en mitades entre las respuestas consideradas como estimaciones válidas y las que no se aceptan como tales.

Tabla 5.1. *Puntuaciones para cada ítem de la prueba de estimación*

	Ítems de la prueba de estimación																									
Puntos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Total	Porcentaje
0	49	43	52	62	32	52	60	60	32	45	68	77	102	76	80	93	93	81	98	102	95	102	85	91	1730	55%
1	6	13	15	11	31	53	8	3	5	14	21	5	3	4	12	5	4	16	7	3	3	3	13	3	261	8,3%
2	37	39	11	9	17	8	4	2	71	11	5	2	9	28	3	7	19	15	11	8	8	6	27	4	361	11,5%
3	39	36	53	49	51	18	59	66	23	61	37	47	17	23	36	26	15	19	15	18	25	20	6	33	792	25,2%

Otro aspecto interesante que se puede valorar, habiendo pedido a los estudiantes que hicieran una estimación, en lugar de un cálculo exacto, es si las respuestas a las tareas planteadas se expresan con números 'redondos' (acabados en cero) o no. En principio, parecería normal que los alumnos dieran gran parte de sus respuestas con números redondos, al tratarse de tareas de estimación. En la Tabla 5.2, se observa que esto no ha sido así. En la primera fila aparecen las respuestas (estimaciones) acabadas en cero, mientras que en la segunda fila figuran las 'estimaciones' no acabadas en cero.

Tabla 5.2. *Respuestas acabadas en cero para cada ítem de la prueba*

Ítems de la prueba de estimación																								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Total
115	113	62	33	5	4	94	88	48	15	8	9	9	13	5	8	4	4	37	42	7	13	3	3	742
16	18	69	98	126	127	37	43	83	116	123	122	122	118	126	123	127	127	94	89	124	118	128	128	2402

Solo en los ítems número 1, 2, 7 y 8 (4 de los 24 ítems) ha habido más respuestas acabadas en cero. En el total de las 3144 estimaciones dadas, estas respuestas han sido un 23,6% (742), por un 76,4% de respuestas (2402) no acabadas en cero. Evidentemente, tanto las expectativas como los resultados deben matizarse atendiendo al tipo de tareas. Las situaciones en las que se han tendido a dar resultados 'redondos' han sido las tareas de multiplicación con números naturales o decimales mayores que uno, mientras que en las tareas de multiplicación con decimales menores que uno, y en las tareas de división, han abundado más los resultados 'no redondos' (no acabados en cero).

Tabla 5.3. *Medias de los tiempos de respuesta, y tiempos mínimo y máximo (en segundos), para los ítems de la prueba de estimación*

Ítems de la prueba de estimación																								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Media
63,6	55,6	62,7	58,8	57,1	54,3	52,1	52,7	62,4	63,6	57,1	63,2	62,2	60,0	52,1	48,9	55,4	60,9	87,5	90,8	67,2	73,6	50,4	55,1	61,1
9,8	8,9	7,3	13,9	6,5	6,4	5,5	2,8	8,7	3,1	5,0	4,7	5,5	3,6	3,0	2,0	5,6	3,5	3,0	7,6	3,2	2,4	3,9	2,6	5,4
381	169	395	248	425	238	234	334	319	340	273	360	280	298	271	300	305	419	323	678	465	421	257	288	334

También resulta interesante valorar cuánto tiempo emplean los estudiantes para producir sus estimaciones. En la administración de la prueba no se dio un límite de tiempo para estimar, aunque sí se explicó que la estimación debía ser rápida. En la Tabla 5.3 pueden verse, para cada ítem de la prueba de estimación, la media del tiempo de respuesta para los 131 participantes, el tiempo mínimo de respuesta y el máximo (expresados todos ellos en segundos). En esta investigación, el tiempo medio de respuesta ha sido de 61,1 segundos. Prácticamente, se puede decir que ha sido de un minuto. Hay alumnos que han realizado procesos casi instantáneos, de menos de 5 segundos, incluyendo la producción de la estimación y la anotación del resultado en la pantalla del ordenador. En el otro extremo, en casi todas las tareas de estimación, se pueden encontrar alumnos que han empleado más de 5 minutos para dar un resultado.

1.2. Técnicas estadísticas empleadas

En la investigación se ha empleado un diseño factorial de cuatro factores, de efectos fijos[200], con medidas repetidas en tres de los factores. Los tres factores intrasujetos son el *tipo de operación*[201], el *tipo de número* y la *mitad*[202] de la prueba. El factor inter-sujetos es el *curso*. En este diseño, el factor *operación* tiene tres niveles: multiplicación, división de un número por otro menor (división A), y división de un número por otro mayor (división B); el factor *número* tiene por niveles los números enteros, decimales mayores que 1, decimales menores que 1 pero mayores que 0,1, y decimales menores que 0,1; el último factor intra-sujetos (*mitad*) hace referencia a cada una de las dos partes de las que está compuesta la prueba (ítems pares o impares de la prueba) consideradas como dos niveles distintos de una variable independiente.

Se ha determinado un nivel α = 0,05 para todas las pruebas estadísticas. El estadístico η^2 se ha utilizado para estimar el tamaño del efecto[203]. También

[200] Tanto la variable intra-sujetos "mitad", como la variable "curso" podrían haberse integrado dentro de un diseño, muy parecido al utilizado en el presente estudio, como factores de efectos aleatorios en lugar de considerarse factores de efectos fijos.

[201] A lo largo de todo el trabajo, utilizo "tipo de operación" y "operación", por un lado, y "tipo de número" y "número", por otro, indistintamente como nombres de los factores del diseño factorial. Para evitar el uso excesivamente reiterado de comillas, utilizaré también las cursivas para los nombres de los factores.

[202] Como se ha explicado en el diseño de la investigación, cada ítem impar tiene al ítem siguiente como ítem diseñado para ser 'su equivalente'. En adelante me referiré a este factor como "Mitad".

[203] Representa el grado en que la hipótesis nula es falsa. Toma un valor que bajo la hipótesis nula es igual a cero y bajo la hipótesis alternativa es distinto de cero (Pascual, Frías y García, 1996, p. 53). Para Grimm y Yarnold (2000), η^2 "indica la proporción de varianza explicada por una variable" (p. 324). Por ejemplo, un η^2 = 0,09 indicaría que el 9% de la variabilidad de la variable dependiente puede explicarse por la variabilidad de la variable independiente. Según estos autores, adhiriéndose a la propuesta de Cohen (1977), un tamaño del efecto de 0,01 debe

aparece reseñada en cada tabla la potencia de la prueba[204].

1.3. Hipótesis estadísticas

A continuación se formulan las hipótesis estadísticas[205] del presente trabajo de investigación:

H_{01}: No hay efecto significativo del factor intra-sujetos *operación* sobre la variable *Puntuación*.

H_{02}: No hay efecto significativo del factor intra-sujetos *Número* sobre la variable *Puntuación*.

H_{03}: No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Operación* y *Número* con respecto a la variable *Puntuación*.

H_{04}: No hay efecto significativo del factor intra-sujetos *Mitad* sobre la variable *Puntuación*.

H_{05}: No hay efecto significativo del factor inter-sujetos *Curso* sobre la variable dependiente *Puntuación*.

H_{06}: No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Operación* y

ser considerado como pequeño y un tamaño de en torno a 0,09 será mediano, mientras que los tamaños del efecto mayores o iguales a 0,25 serán interpretados como grandes. En la presente investigación, interpretaré el tamaño del efecto de este modo.

[204] La potencia es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa. Ante una potencia alta, la ausencia de rechazo de la hipótesis nula puede interpretarse como una afirmación de la misma. Por contra, una potencia baja no permite tomar la ausencia de rechazo como evidencia clara en contra de la hipótesis alternativa (Pascual, Frías y García, 1996, pp. 47-50). En este trabajo, he seguido el criterio de que la potencia de la prueba es adecuada cuando supera 0,80 (Cohen, 1992).

[205] Estas hipótesis no son, ni mucho menos, *todas* las hipótesis estadísticas que se han contrastado en la presente investigación. Por ejemplo, no escribo aquí las hipótesis estadísticas sobre posibles efectos de interacciones triples, cuyo estudio es necesario para decidir sobre las interacciones dobles. Las hipótesis estadísticas que aparecen redactadas en este punto son solo las que se corresponden directamente con hipótesis de la investigación.

Curso con respecto a la variable *Puntuación*.

H_{07}: No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Operación* y *Mitad* con respecto a la variable *Puntuación*.

H_{08}: No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Número* y *Curso* con respecto a la variable *Puntuación*.

H_{09}: No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Número* y *Mitad* con respecto a la variable *Puntuación*.

1.4. Comprobación de los supuestos del análisis

En primer lugar, para contrastar la hipótesis de normalidad, se ha utilizado la corrección de Lilliefors para la prueba de Kolmogorov-Smirnov[206].

Tabla 5.4. *Pruebas de normalidad*

Variable	*Kolmogorov-Smirnov* [a]	*gl.*	*p*
P_1	0,26	131	0,000
P_2	0,23	131	0,000
P_3	0,27	131	0,000
P_4	0,31	131	0,000
P_5	0,25	131	0,000
P_6	0,28	131	0,000
P_7	0,31	131	0,000
P_8	0,34	131	0,000
P_9	0,35	131	0,000
P_{10}	0,30	131	0,000
P_{11}	0,32	131	0,000
P_{12}	0,38	131	0,000
P_{13}	0,47	131	0,000
P_{14}	0,37	131	0,000
P_{15}	0,38	131	0,000
P_{16}	0,44	131	0,000
P_{17}	0,44	131	0,000
P_{18}	0,38	131	0,000
P_{19}	0,45	131	0,000
P_{20}	0,47	131	0,000
P_{21}	0,45	131	0,000
P_{22}	0,47	131	0,000
P_{23}	0,40	131	0,000
P_{24}	0,43	131	0,000

[a] Corrección de la significación de Lilliefors.

[206] Según Visauta (1999, p. 250) esta opción es más fiable que el uso del estadístico Z de Kolmogorov-Smirnov. Para Balluerka (1999, p. 37) es la prueba más adecuada cuando los parámetros (media y desviación típica) de la distribución son desconocidos.

Según se pone claramente de manifiesto en la Tabla 5.1, la hipótesis inicial de normalidad debe ser rechazada en *todas* las celdas del diseño.

Para comprobar el supuesto de esfericidad, se ha utilizado la prueba de Mauchly. En la Tabla 5.2 se recogen los valores del estadístico W para los distintos factores intrasujetos[207]. Para el factor *número*, se rechaza la hipótesis de esfericidad ($p < 0,001$) y se emplea el valor de $\varepsilon = 0,87$ para ajustar los grados de libertad en el contraste. En el caso del factor *operación*, se ha optado por utilizar el valor $\varepsilon = 0,96$ para ajustar los grados de libertad[208]. Lo mismo se ha hecho en la interacción *operación* × *número* × *mitad*, al ajustar los grados de libertad multiplicando por 0,17. Para las demás interacciones entre factores, se asume la hipótesis inicial de esfericidad.

Tabla 5.5. *Prueba de esfericidad de Mauchly*

Efecto intra-sujetos	*W*	χ^2	*gl.*	*p*	ε*
Operación	0,96	5,72	2	0,057	0,96
Número	0,80	27,33	5	0,000	0,87
Operación × Número	0,81	26,25	20	0,16	0,93
Operación × Mitad	0,99	1,23	2	0,54	0,99
Número × Mitad	0,96	5,71	5	0,34	0,97
Operación × Número × M	0,77	33,19	20	0,03	0,17

Nota. W es el estadístico de Mauchly.
* ε de Greenhouse-Geisser.

La Tabla 5.3 revela que, salvo para las variables P_{13}, P_{19}, P_{20} y P_{22}, correspondientes a 4 de las 24 celdas del diseño factorial, la curtosis es siempre negativa. Esto significa que la prueba W es adecuada a pesar del

[207] Salvo para el factor "mitad", en cuyo caso no es necesario comprobar el supuesto de esfericidad al tener solamente dos niveles la variable.

[208] A pesar de que se ha determinado un nivel $\alpha = 0,05$ para todos los contrastes de hipótesis, el valor $p = 0,057$ obtenido para el factor *operación* resulta muy próximo al nivel fijado, en vista de lo cual se ha optado por una alternativa conservadora que, junto a la presentación de los contrastes multivariados -MANOVA-, "liberen" a los resultados obtenidos en el análisis de varianza de la amenaza del incumplimiento del supuesto de esfericidad.

incumplimiento del supuesto de normalidad (Ximénez y San Martín, 2000, p. 41). En la Tabla 5.4 están registrados los resultados de la prueba de Box. Dicha prueba se utiliza para contrastar la hipótesis nula de que las matrices de covarianza observadas de las variables dependientes son iguales en todos los grupos. Los resultados expuestos en la tabla obligan, en este caso, a rechazar la hipótesis nula. También cabe rechazar la hipótesis nula de igualdad de las varianzas error planteada mediante la prueba de Levene (Tabla 5.5).

Tabla 5.6. *Estadísticos descriptivos para puntuaciones correspondientes a cada ítem de la prueba*

Variables	*Media*	*Límite inferior**	*Límite superior*	*Desviación típica*	*Varianza*	*Asimetría*	*Curtosis*
P_1	1,50	1,28	1,72	1,27	1,61	-0,12	-1,67
P_2	1,52	1,31	1,73	1,21	1,47	-0,14	-1,55
P_3	1,50	1,26	1,73	1,37	1,87	0,02	-1,84
P_4	1,34	1,10	1,58	1,39	1,94	0,22	-1,84
P_5	1,66	1,45	1,88	1,23	1,50	-0,15	-1,59
P_6	0,94	0,77	1,11	1,01	1,01	0,95	-0,12
P_7	1,47	1,22	1,72	1,44	2,08	0,05	-1,95
P_8	1,56	1,31	1,82	1,48	2,19	-0,09	-1,99
P_9	1,65	1,47	1,83	1,04	1,08	-0,60	-0,88
P_{10}	1,67	1,44	1,91	1,36	1,85	-0,22	-1,79
P_{11}	1,08	0,86	1,31	1,30	1,69	0,63	-1,40
P_{12}	1,15	0,90	1,39	1,43	2,03	0,50	-1,73
P_{13}	0,55	0,36	0,74	1,08	1,17	1,61	0,81
P_{14}	0,98	0,77	1,20	1,23	1,51	0,61	-1,37
P_{15}	0,96	0,73	1,19	1,32	1,75	0,80	-1,24
P_{16}	0,74	0,53	0,95	1,23	1,50	1,17	-0,49
P_{17}	0,66	0,47	0,85	1,10	1,21	1,23	-0,18
P_{18}	0,79	0,59	0,98	1,13	1,28	1,05	-0,50
P_{19}	0,56	0,38	0,75	1,05	1,11	1,55	0,76
P_{20}	0,56	0,37	0,75	1,10	1,20	1,59	0,75
P_{21}	0,72	0,51	0,93	1,22	1,48	1,21	-0,41
P_{22}	0,57	0,38	0,77	1,12	1,26	1,57	0,62
P_{23}	0,65	0,48	0,81	0,96	0,92	1,08	-0,34
P_{24}	0,84	0,61	1,07	1,31	1,72	0,99	-0,97

* Límites correspondientes al intervalo de confianza para la media al 95%.

Tabla 5.7. *Prueba de Box sobre la igualdad de las matrices de covarianza*

M de Box	*F*	*gl1*	*gl2*	p
591,72	1,18*	300	12815,42	0,02

* $p < 0,05$.

Tabla 5.8. *Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error*

Variable	*F(4, 126)*	*p*
P_1	4,10**	0,01
P_2	1,98	0,10
P_3	0,35	0,84
P_4	1,71	0,15
P_5	1,51	0,20
P_6	0,19	0,94
P_7	0,16	0,96
P_8	1,01	0,40
P_9	2,44	0,05
P_{10}	2,38	0,06
P_{11}	2,13	0,08
P_{12}	0,65	0,63
P_{13}	2,78*	0,03
P_{14}	2,84*	0,03
P_{15}	2,86*	0,03
P_{16}	5,43***	0,00
P_{17}	4,63**	0,01
P_{18}	3,47*	0,01
P_{19}	3,82**	0,01
P_{20}	3,63**	0,01
P_{21}	9,42***	0,00
P_{22}	6,84***	0,00
P_{23}	2,76*	0,03
P_{24}	6,04***	0,00

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

En adelante, en la presentación de todos los resultados estadísticos he optado por la aproximación univariada del modelo de medidas repetidas, que es más apropiada cuando se asume la esfericidad, haciendo, donde resulta oportuno por incumplimiento de este supuesto, un ajuste en los grados de libertad. Sin embargo, en caso de incumplimiento de la esfericidad, puede ser más oportuna la aproximación multivariada. Así, he tomado la opción de seguir el modelo univariado pero informar, a través de notas al pie, de los resultados del análisis multivariado de la varianza[209].

[209] Pueden verse detalles sobre estas alternativas en Weinfurt (2000).

2. Resultados generales del análisis de varianza para la variable dependiente puntuación

En la Tabla 5.6 se muestran los resultados generales del análisis de varianza. En primer lugar, la variable 'tipo de operación' tiene un efecto significativo (F= 3,67; p = 0,03) sobre la variable dependiente "puntuación". Sin embargo, tanto la variable "curso", como el "tipo de número", y la variable "mitad", parecen interactuar con la variable operación con respecto a la variable dependiente. Si se utiliza la alternativa de los contrastes multivariados (ver Tabla 5.7), la situación es muy parecida, con la excepción de que la variable "curso" no interactúa con la variable "operación" respecto a la puntuación[210]. Dada la presencia de interacciones significativas, habrá que posponer el estudio del efecto de la variable "operación" a un apartado posterior en el que se valorará cuidadosamente la presencia de interacciones con otras variables y el tipo de las mismas.

Con la variable "tipo de número" se produce una situación similar de posible interacción con otras variables, aunque este caso resulta diferente por los altos valores de F, p, del tamaño del efecto y de la potencia. La variable "tipo de número" tiene un efecto significativo sobre la puntuación (F = 80,76; $p < 0,001$)[211].

[210] Si se utiliza la opción del Análisis de varianza, para la interacción operación × curso, F = 2,09 y p = 0,04. En el caso de los contrastes multivariados, F = 1,79 y p = 0,08. El desacuerdo entre las dos pruebas no es demasiado grande, ya que en ambos casos p > 0,01. No obstante, se examinarán los resultados de la variable operación, para los distintos cursos, para valorar la posible influencia de la variable "curso".

[211] Además, la potencia de la prueba es igual a 1, y el tamaño del efecto ($\eta^2 = 0,39$) es bastante alto. Recuerdo que he adoptado la posición, siguiendo a Cohen (1977) de considerar los

Tabla 5.9. *Análisis de varianza. Pruebas de efectos intra-sujetos*

Fuente	*SC*	*gl.*	*MC*	F[212]	*p*	η^2	*Pot.* [a]
Operación (O) [b]	12,89	1,91	6,73	3,67*	0,03	0,03	0,66
O × Curso	29,44	7,66	3,85	2,09*	0,04	0,06	0,82
Error (O)	442,96	241,21	1,84				
Número (N)[b]	350,15	2,60	134,53	80,67***	0,000	0,39	1,00
N × Curso	20,31	10,41	1,95	1,17	0,31	0,04	0,62
Error (N)	546,88	327,94	1,67				
N × O	32,70	6	5,45	3,85**	0,001	0,03	0,97
N × O × Curso	54,91	24	2,29	1,62*	0,03	0,05	0,98
Error (N × O)	1070,60	756	1,42				
N × O × M [b]	25,44	5,54	4,59	4,09**	0,001	0,03	0,97
N × O × M × Curso	28,39	22,17	1,28	1,14	0,30	0,04	0,86
Error (N × O)	783,30	698,39	1,12				
Mitad (M)	0,26	1	0,26	0,25	0,62	0,002	0,08
M × Curso	3,14	4	0,79	0,74	0,57	0,02	0,23
Error (M)	133,53	126	1,06				
N × M	18,43	3	6,14	6,20***	0,000	0,05	0,96
N × M × Curso	20,48	12	1,71	1,72	0,06	0,05	0,87
Error (N × M)	374,27	378	0,99				
O × M	8,16	2	4,08	3,60*	0,03	0,03	0,66
O × M × Curso	10,68	8	1,34	1,18	0,31	0,04	0,54
Error (O × M)	285,55	252	1,13				

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

Nota. η^2 es el tamaño del efecto.

[a] Potencia calculada con $\alpha = 0,05$.

[b] Los grados de libertad para el tipo de número y la interacción entre el tipo de número y el curso han sido multiplicados por el estadístico Epsilon de Greenhouse-Geiser para corregir las pruebas ante el rechazo de la hipótesis de esfericidad.

$\eta^2 > 0,25$ como altos. En el caso de los contrastes multivariados (ver Tabla 5.7), que F = 61,95; p < 0,001; $\eta^2 = 0,60$ y pot. = 1.

[212] En este trabajo adopto la recomendación APA (2002) de indicar los valores de *p* obtenidos en las pruebas. No obstante, aunque sea redundante al asumir esta opción indicar con asteriscos -junto al valor de F en la tabla- los niveles *p* usuales de 0,05, 0,01 y 0,001, he optado por mantener esta doble indicación de la significación de los resultados para facilitar la localización inmediata de los efectos significativos y para, al mismo tiempo, poder valorar el tamaño de *p* obtenido. En este contexto, se debe interpretar $p = 0,000$ como $p < 0,001$. Siempre que ha sido posible, he intentado respetar el criterio de emplear solo dos cifras decimales. Se ha incumplido este criterio en casos en los que considero que la probabilidad, el tamaño del efecto, o la potencia, podían proporcionar información de interés utilizando más de dos cifras decimales.

En la Tabla 5.7 figuran los resultados de los contrastes multivariados[213] para la prueba de estimación. En la Tabla 5.8 aparecen los resultados del las pruebas de los efectos intersujetos. La variable "curso" ha tenido un efecto significativo (F = 2,56; p = 0,04) sobre la puntuación. En un apartado posterior, se estudia la variable curso, especialmente al analizar sus efectos de interacción con otras variables, pues dará una buena aproximación a la cuestión sobre la posible generalización de los resultados.

Tabla 5.10. *Contrastes multivariados para la prueba de estimación*

Efecto	*Valor*	*F*	*gl. hipótesis*	*gl. error*	*p*	η^2	*Pot.* [a]
Operación (O)[b]	0,07	4,61*	2	125	0,01	0,07	0,77
O × Curso	0,11	1,79	8	252	0,08	0,05	0,76
O × M	0,06	3,86*	2	125	0,02	0,06	0,69
Número (N)	0,60	61,95***	3	124	0,000	0,60	1,00
N × Curso	0,10	1,13	12	378	0,33	0,04	0,65
N × M	0,12	5,81**	3	124	0,001	0,12	0,95
O × N	0,18	4,27**	6	121	0,001	0,18	0,98
O × N × Curso	0,28	1,53	24	496	0,053	0,07	0,97
O × N × M	0,16	3,77**	6	121	0,002	0,16	0,96
Mitad (M)	0,002	0,25	1	126	0,62	0,002	0,25
M × Curso	0,02	0,74	4	126	0,57	0,02	2,96

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

[a] Potencia calculada con $\alpha = 0,05$.

Nota. η^2 es el tamaño del efecto.

Nota. Todos los cálculos se han realizado empleando la Traza de Pillai.

[213] Realmente, la opción del análisis multivariado es una alternativa al modelo de análisis de varianza de medidas repetidas por el que he optado en este trabajo. Sin embargo, he incluido también los resultados correspondientes al análisis multivariado para proporcionar una mayor información y buscando un efecto "corroborador" de los análisis realizados en la otra alternativa.

Tabla 5.11. *Pruebas de los efectos inter-sujetos*

Fuente	*SC*	*gl*	*MC*	*F*	*p*	η^2	*Pot.*[a]
Intersección[214]	143,22	1	143,22	503,53***	0,000	0,80	1,00
Curso	2,92	4	0,73	2,56*	0,04	0,08	0,71
Error	35,84	126	0,28				

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

Nota. η^2 es el tamaño del efecto.

[a] Calculada con $\alpha = 0,05$.

A continuación, dedicaré los siguientes apartados al análisis detallado de la influencia del tipo de operación y del tipo de número (los dos factores fundamentales del diseño) sobre la puntuación. Para estudiar las posibles interacciones de estos factores entre sí, y con otros factores del diseño, presento las Tablas 4.9 y 4.10, con las pruebas de contrastes intrasujetos[215]. En ellas analizo entre qué niveles de cada uno de los factores se producen las interacciones significativas. En la Tabla 5.9 he elegido la opción de que todos los contrastes se hagan comparando cada nivel de cada variable con respecto al

[214] "La fila Intersección… permite contrastar, en el caso de que esto tenga sentido, la hipótesis de que la media total de la variable dependiente vale cero en la población" (Pardo y Ruiz, 2001, p. 270). En la presente investigación, tal hipótesis supondría que las 3144 estimaciones dadas por los 131 alumnos tendrían un cero como puntuación. Es decir, caerían todas fuera del intervalo de respuesta razonable correspondiente a su ítem, lo cual no tiene sentido en el contexto de este trabajo. Por esta razón, dejaré sin interpretar el contraste correspondiente a dicha fila.

[215] Estas pruebas no necesitan del cumplimiento de la hipótesis de esfericidad, llegando a convertirse incluso en una alternativa a la aproximación univariada del modelo de medidas repetidas. Suelen aplicarse especialmente cuando la variable independiente es el paso del tiempo, caso que no es el de la presente investigación. Considero los resultados de estas pruebas como una información 'complementaria', como apoyo a los resultados principales del análisis. Por esta razón, los resultados de las pruebas de contrastes intrasujetos siempre aparecerán comentadas en notas al pie. Ver Llopis, J. M. (2009). *Apuntes SPSS*. Almería: Universidad de Almería. Disponible en: http://www.ual.es/personal/jmllopis/files/curso_spss_tercera_parte.pdf). Consulta hecha el 3-8-2009.

último, tomando este como nivel de referencia. Estas comparaciones son las que tienen más interés teórico dentro de la presente investigación, pues las diferencias que más relevantes son las que se producen entre los números decimales menores que 1 y los menores que 0,1, en la variable tipo de numero (niveles 3 y 4), y entre las divisiones de tipo A y de tipo B, en la variable tipo de operación (niveles 2 y 3). Una alternativa, para que aparezcan estas mismas comparaciones, se presenta en la Tabla 5.10 y consiste en la comparación de niveles consecutivos de cada factor del diseño.

Tabla 5.12. *Prueba de contrastes intrasujetos (comparación de cada nivel con el último)*

Fuente	*Número*	*Oper.*	*Mitad*	*SC*	*gl.*	*MC*	*F*	*p*	η^2	*Pot.* [a]
Número (N)	1 - 4			65,46	1	65,46	151,21***	0,000	0,55	1,00
	2 - 4			72,48	1	72,48	108,33***	0,000	0,46	1,00
	3 - 4			2,19	1	2,19	7,21**	0,008	0,05	0,76
N × Curso	1 - 4			4,96	4	1,24	2,87*	0,03	0,08	0,76
	2 - 4			1,82	4	0,46	0,68	0,61	0,02	0,22
	3 - 4			0,35	4	0,09	0,29	0,89	0,01	0,11
Error (N)	1 - 4			54,54	126	0,43				
	2 - 4			84,30	126	0,67				
	3 - 4			38,37	126	0,31				
Operación (O)		1 - 3		0,89	1	0,89	1,85	0,18	0,01	0,27
		2 - 3		3,22	1	3,22	9,29**	0,003	0,07	0,86
O × Curso		1 - 3		6,02	4	1,51	3,11*	0,02	0,09	0,80
		2 - 3		0,88	4	0,22	0,64	0,64	0,02	0,20
Error (O)		1 - 3		60,93	126	0,48				
		2 - 3		43,66	126	0,35				
Mitad (M)			1 - 2	0,04	1	0,04	0,25	0,62	0,00	0,08
M × Curso			1 - 2	0,52	4	0,13	0,74	0,57	0,02	0,23
Error (M)			1 - 2	22,26	126	0,18				
N × O	1 - 4	1 - 3		20,18	1	20,18	7,52**	0,007	0,06	0,78
		2 - 3		6,76	1	6,76	2,52	0,12	0,02	0,35
	2 - 4	1 - 3		39,40	1	39,40	12,06**	0,001	0,09	0,93
		2 - 3		46,83	1	46,83	21,49***	0,000	0,15	1,00
	3 - 4	1 - 3		8,10	1	8,10	3,69	0,06	0,03	0,48
		2 - 3		10,54	1	10,54	3,96*	0,049	0,03	0,51
N × O × Curso	1 - 4	1 - 3		2,42	4	0,61	0,23	0,92	0,01	0,10
		2 - 3		7,27	4	1,82	0,68	0,61	0,02	0,22
	2 - 4	1 - 3		26,70	4	6,67	2,04	0,09	0,06	0,60
		2 - 3		8,21	4	2,05	0,94	0,44	0,03	0,29
	3 - 4	1 - 3		26,79	4	6,70	3,05*	0,02	0,09	0,79
		2 - 3		22,59	4	5,65	2,12	0,08	0,06	0,62
Error (N × O)	1 - 4	1 - 3		338,08	126	2,68				
		2 - 3		338.78	126	2.69				
	2 - 4	1 - 3		411,54	126	3,27				
		2 - 3		274.53	126	2.18				
	3 - 4	1 - 3		276,32	126	2,19				
		2 - 3		335,01	126	2,66				

Tabla 5.9. (Continuación) *Prueba de contrastes intrasujetos (comparación de cada nivel con el último)*

Fuente	*Número*	*Oper.*	*Mitad*	*SC*	*gl.*	*MC*	*F*	*p*	η^2	*Pot.* [a]
N × O × M	1 - 4	1 - 3	1 - 2	96,86	1	96,86	11,03**	0,001	0,08	0,91
		2 - 3	1 - 2	112,47	1	112,47	13,65***	0,000	0,10	0,96
	2 - 4	1 - 3	1 - 2	2,90	1	2,90	0,34	0,56	0,003	0,09
		2 - 3	1 - 2	6,06	1	6,06	0,85	0,36	0,007	0,15
	3 - 4	1 - 3	1 - 2	27,39	1	27,39	3,61	0,06	0,03	0,47
		2 - 3	1 - 2	0,12	1	0,12	0,02	0,89	0,000	0,05
N × O × M × Curso	1 - 4	1 - 3	1 - 2	60,96	4	15,24	1,74	0,15	0,05	0,52
		2 - 3	1 - 2	14,51	4	3,63	0,44	0,78	0,01	0,15
	2 - 4	1 - 3	1 - 2	17,79	4	4,45	0,53	0,72	0,02	0,17
		2 - 3	1 - 2	30,22	4	7,55	1,06	0,38	0,03	0,33
	3 - 4	1 - 3	1 - 2	27,99	4	7,00	0,92	0,45	0,03	0,29
		2 - 3	1 - 2	17,97	4	4,49	0,77	0,55	0,02	0,24
Error (N × O × M)	1 - 4	1 - 3	1 - 2	1106,56	126	8,78				
		2 - 3	1 - 2	1038,39	126	8,24				
	2 - 4	1 - 3	1 - 2	1061,34	126	8,42				
		2 - 3	1 - 2	899,17	126	7,14				
		2 - 3	1 - 2	735,02	126	5,83				
N × Mitad	1 - 4		1 - 2	10,51	1	10,51	8,13**	0,005	0,06	0,81
	2 - 4		1 - 2	0,36	1	0,36	0,31	0,58	0,00	0,09
	3 - 4		1 - 2	1,83	1	1,83	1,48	0,23	0,01	0,23
N × M × Curso	1 - 4		1 - 2	3,95	4	0,99	0,76	0,55	0,02	0,24
	2 - 4		1 - 2	14,36	4	3,59	3,09*	0,02	0,09	0,80
	3 - 4		1 - 2	1,88	4	0,47	0,38	0,82	0,01	0,14
Error (N × M)	1 - 4		1 - 2	162,91	126	1,29				
	2 - 4		1 - 2	146,48	126	1,16				
	3 - 4		1 - 2	154,95	126	1,23				
O × M		1 - 3	1 - 2	4,81	1	4,81	4,02*	0,047	0,03	0,51
		2 - 3	1 - 2	0,24	1	0,24	0,20	0,65	0,00	0,07
O × M × Curso		1 - 3	1 - 2	7,81	4	1,95	1,63	0,17	0,05	0,49
		2 - 3	1 - 2	5,18	4	1,29	1,10	0,36	0,03	0,34
Error (O × M)		1 - 3	1 - 2	150,90	126	1,20				
		2 - 3	1 - 2	148,72	126	1,18				

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.
[a] Calculado con alfa = 0,05.

Dado que en los contrastes simples solo se compara cada nivel del factor con respecto a un nivel de referencia (en este caso, el último), hay diferencias significativas entre niveles que no aparecen en la Tabla 5.9 y son de interés en la presente investigación (ver Tabla 5.10).

Tabla 5.13. *Prueba de contrastes intrasujetos (comparación de cada nivel con el siguiente)*

Fuente	*Opera.*	*Núm.*	*Mitad*	*SC*	*gl*	*MC*	*F*	*p*	η^2	*Pot.*[a]
Operación (O)	1 - 2			0,72	1	0,72	1,48	0,23	0,01	0,23
	2 - 3			3,22	1	3,22	9,29**	0,003	0,07	0,86
O × Curso	1 - 2			4,14	4	1,03	2,12	0,08	0,06	0,61
	2 - 3			0,88	4	0,22	0,64	0,64	0,02	0,20
Error(O)	1 - 2			61,52	126	0,49				
	2 - 3			43,66	126	0,35				
Número (N)		1 - 2		0,18	1	0,18	0,36	0,55	0,003	0,09
		2 - 3		49,45	1	49,45	84,44***	0,000	0,40	1,00
		3 - 4		2,19	1	2,19	7,21**	0,008	0,05	0,76
N × Curso		1 - 2		0,96	4	0,24	0,48	0,75	0,02	0,16
		2 - 3		1,20	4	0,30	0,51	0,73	0,02	0,17
		3 - 4		0,35	4	0,09	0,29	0,89	0,009	0,11
Error(N)		1 - 2		62,66	126	0,50				
		2 - 3		73,79	126	0,59				
		3 - 4		38,37	126	0,31				
Mitad (M)			1 - 2	0,04	1	0,04	0,25	0,62	0,002	0,08
M × curso			1 - 2	0,52	4	0,13	0,74	0,57	0,02	0,23
Error(M)			1 - 2	22,26	126	0,18				
O × N	1 - 2	1 - 2		6,04	1	6,04	2,02	0,16	0,02	0,29
		2 - 3		0,03	1	0,03	0,01	0,93	0,000	0,05
		3 - 4		0,16	1	0,16	0,07	0,79	0,001	0,06
	2 - 3	1 - 2		18,00	1	18,00	7,12**	0,009	0,05	0,75
		2 - 3		12,93	1	12,93	4,44*	0,04	0,03	0,55
		3 - 4		10,54	1	10,54	3,96*	0,049	0,03	0,51
O × N × Curso	1 - 2	1 - 2		5,39	4	1,35	0,45	0,77	0,01	0,15
		2 - 3		14,82	4	3,71	1,12	0,35	0,03	0,34
		3 - 4		12,38	4	3,09	1,39	0,24	0,04	0,42
	2 - 3	1 - 2		25,87	4	6,47	2,56*	0,04	0,08	0,71
		2 - 3		26,12	4	6,53	2,24	0,07	0,07	0,64
		3 - 4		22,59	4	5,65	2,12	0,08	0,06	0,62
Error(O × N)	1 - 2	1 - 2		376,76	126	2,99				
		2 - 3		416,50	126	3,31				
		3 - 4		280,62	126	2,23				
	2 - 3	1 - 2		318,69	126	2,53				
		2 - 3		366,79	126	2,91				
		3 - 4		335,01	126	2,66				
O × M	1 - 2		1 - 2	7,19	1	7,19	7,04**	0,009	0,05	0,75
	2 - 3		1 - 2	0,24	1	0,24	0,20	0,65	0,002	0,07
O × M × Curso	1 - 2		1 - 2	3,03	4	0,76	0,74	0,57	0,02	0,23
	2 - 3		1 - 2	5,18	4	1,29	1,10	0,36	0,03	0,34
Error(O × M)	1 - 2		1 - 2	128,71	126	1,02				
	2 - 3		1 - 2	148,72	126	1,18				
N × M		1 - 2	1 - 2	14,78	1	14,78	9,14**	0,003	0,07	0,85
		2 - 3	1 - 2	,56	1	0,56	0,42	0,52	0,003	0,10
		3 - 4	1 - 2	1,83	1	1,83	1,48	0,23	0,01	0,23
N × M × Curso		1 - 2	1 - 2	5,94	4	1,48	0,92	0,46	0,03	0,29
		2 - 3	1 - 2	20,90	4	5,23	3,89**	0,005	0,11	0,89
		3 - 4	1 - 2	1,88	4	0,47	0,38	0,82	0,01	0,14
Error(N × M)		1 - 2	1 - 2	203,71	126	1,62				
		2 - 3	1 - 2	169,06	126	1,34				
		3 - 4	1 - 2	154,95	126	1,23				

Tabla 5.10. (Continuación) *Prueba de contrastes intrasujetos (comparación de cada nivel con el siguiente)*

Fuente	*Opera*.	*Núm.*	*Mitad*	*SC*	*gl*	*MC*	*F*	*p*	η^2	*Pot.* [a]
O × N × M	1 - 2	1 - 2	1 - 2	0,00003	1	0,00003	0,00	0,999	0,000	0,05
		2 - 3	1 - 2	31,84	1	31,842	3,84	0,05	0,03	0,49
		3 - 4	1 - 2	23,86	1	23,861	4,15*	0,04	0,03	0,53
	2 - 3	1 - 2	1 - 2	66,33	1	66,327	6,18*	0,014	0,05	0,69
		2 - 3	1 - 2	4,46	1	4,462	0,70	0,40	0,006	0,13
		3 - 4	1 - 2	0,12	1	0,121	0,02	0,89	0,000	0,05
O×N×M×Curso	1 - 2	1 - 2	1 - 2	65,27	4	16,316	1,46	0,22	0,04	0,44
		2 - 3	1 - 2	30,15	4	7,54	0,91	0,46	0,03	0,28
		3 - 4	1 - 2	20,89	4	5,22	0,91	0,46	0,03	0,28
	2 - 3	1 - 2	1 - 2	77,69	4	19,423	1,81	0,13	0,05	0,55
		2 - 3	1 - 2	88,07	4	22,017	3,47*	0,01	0,10	0,85
		3 - 4	1 - 2	17,97	4	4,49	0,77	0,55	0,02	0,24
Error(O×N×M)	1 - 2	1 - 2	1 - 2	1410,44	126	11,19				
		2 - 3	1 - 2	1043,59	126	8,28				
		3 - 4	1 - 2	723,81	126	5,75				
	2 - 3	1 - 2	1 - 2	1351,46	126	10,72				
		2 - 3	1 - 2	799,72	126	6,35				
		3 - 4	1 - 2	735,02	126	5,83				

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.
[a] Calculado con alfa = 0,05.

3. ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL FACTOR OPERACIÓN SOBRE LA VARIABLE DEPENDIENTE PUNTUACIÓN

Como se ha advertido en la sección anterior, al examinar los resultados generales del análisis de varianza (Tabla 6), el factor "operación" tiene un efecto significativo sobre la variable "puntuación" (F = 3,67; p = 0,03)[216]. La Tabla 5.11 y la Figura 5.1 muestran las puntuaciones medias para los distintos tipos de operación de la prueba de estimación.

Las tareas más fáciles han sido aquellas en las que se dividía un número por otro menor; las más difíciles, las de división de un número por otro mayor. En una posición intermedia, se encuentran las tareas en las que hay que efectuar

[216] El mismo resultado se obtiene a través de los contrastes multivariados (F = 4,61; p = 0,01; ver Tabla 5.7).

una multiplicación. En las comparaciones por pares (Tabla 5.12) aparece como significativa (p < 0,01) la diferencia entre la división de tipo A y tipo B[217].

Tabla 5.14. *Medias de las puntuaciones por tipo de operación*

Operación	M	SD	Límite inferior*	Límite superior
Multiplicación	1,08	0,06	0,96	1,20
División A	1,15	0,06	1,03	1,27
División B	0,99	0,06	0,88	1,10

* Límites para los intervalos de confianza al 95%.

Tabla 5.15. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "tipo de operación"*

(I) Operación	*(J) Operación*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior*[a]	*Límite superior*
1	2	-0,08	0,06	0,68	-0,23	0,08
1	3	0,09	0,06	0,53	-0,07	0,24
2	3	0,16**	0,05	0,008	0,03	0,29

** $p < 0,01$.
[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

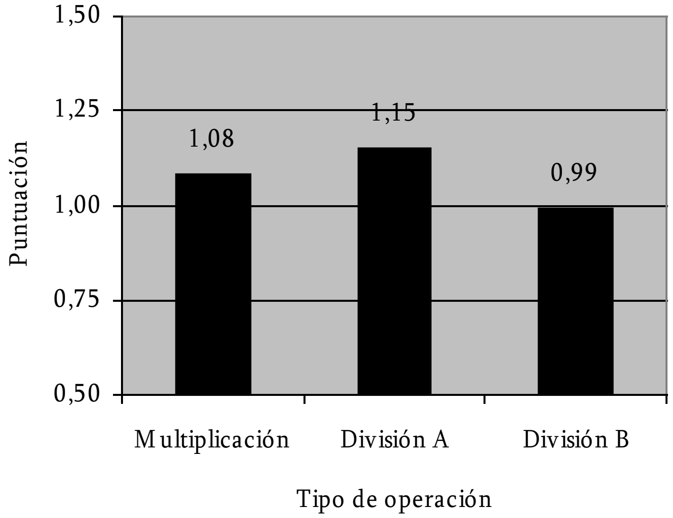


Figura 5.1. Puntuaciones medias por tipo de operación.

[217] En los contrastes intrasujetos (Tablas 4.9 y 4.10) la diferencia entre los dos tipos de división también resulta significativa (F = 9,29; p = 0,003)

Para estudiar si las diferencias halladas son significativas, se han realizado las comparaciones por pares con el ajuste de Bonferroni. Como puede verse en la Tabla 5.12, la única diferencia significativa se ha producido entre los dos tipos de división (niveles 2 y 3 de la variable independiente "Operación").

Voy a estudiar las interacciones de la variable "operación" con otras variables del diseño a fin de ver si la diferencia entre estos dos tipos de división se mantiene a través de los distintos valores de otras variables.

3.1. Influencia de la operación sobre la puntuación en función del curso

Los resultados generales del análisis de varianza (Tabla 5.6) indican que sí existe un efecto significativo de interacción entre los factores "tipo de operación" y "curso" ($F = 2{,}09$; $p = 0{,}04$). Esto hace que se rechace[218] la hipótesis H_{06}.

Tabla 5.16. *Estadísticos descriptivos de la variable puntuación según el tipo de operación y el curso*

	O_1		O_2		O_3	
Curso	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
1	1,16	0,12	1,18	0,12	0,87	0,11
2	1,01	0,16	1,24	0,16	1,16	0,14
3	1,13	0,14	1,48	0,14	1,35	0,13
4	0,97	0,15	0,84	0,14	0,69	0,13
5	1,12	0,12	1,03	0,12	0,89	0,11

[218] Es interesante observar que, en este punto, hay una diferencia entre el enfoque univariado y el multivariado. Según los contrastes multivariados, la decisión debería ser de no rechazar la hipótesis nula pues, para la interacción O × Curso, $F = 1{,}79$ y $p = 0{,}08$ (ver Tabla 5.7). No obstante, como puede verse en la Figura 5.2 y en los contrastes intrasujetos, la posible interacción no afectaría al resultado fundamental hallado para la variable "tipo de operación", pues afectaría solamente a la comparación entre la multiplicación y la división B —niveles 1 y 3 del factor "operación" entre los que se da la diferencia significativa ($F = 3{,}11$ y $p = 0{,}02$; ver Tablas 4.9 y 4.10) en función del Curso.

La Tabla 5.13 recoge los estadísticos descriptivos (medias y desviaciones típicas) correspondientes a las tres operaciones para los distintos cursos que han intervenido en la investigación. Como se advertía en la introducción de los resultados generales del análisis, se desea averiguar en qué grado los resultados que se obtienen dependen del grupo (variable independiente "Curso") al que pertenecían los participantes en el estudio.

Los resultados de la tabla anterior pueden valorarse con más facilidad en la Figura 5.2. Como se pone de manifiesto en ella, las tareas de división de un número por otro menor (División A) tienen siempre (para todos los cursos) una puntuación media superior a las tareas de división de un número por otro mayor (División B). También se destaca, en la Figura 5.2, que las tareas de multiplicación, que en promedio se situaban entre los dos tipos de división, se sitúan en algunos cursos (4 y 5) por encima en puntuación media y por tanto son más fáciles, en otros por debajo (2 y 3) y en el curso 1 en una posición intermedia.

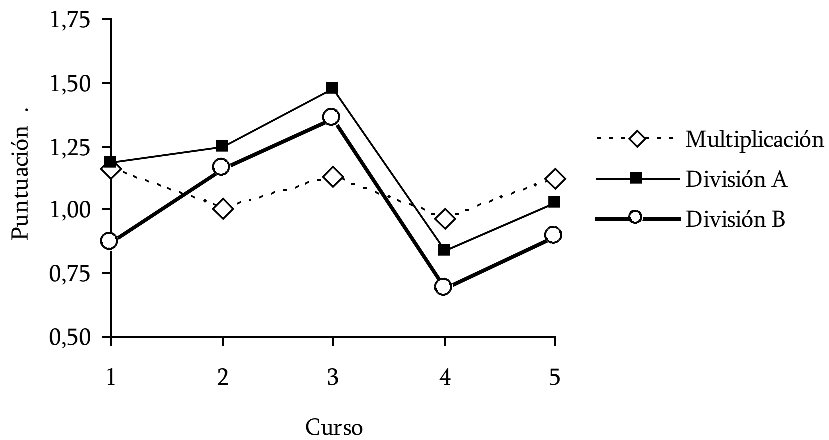


Figura 5.2. Puntuación en función del tipo de operación y curso.

Resulta interesante descubrir que el orden en la dificultad de los dos tipos de división no resulta afectado por el curso mientras que, por el contrario, a partir de estos resultados, parece muy difícil comparar la dificultad de las tareas de multiplicación con las de cualquiera de los dos tipos de división.

La Figura 5.3 enfatiza los promedios obtenidos para cada curso. Los valores correspondientes al curso 3 sobresalen sobre los demás, mientras que el curso 4 presenta los promedios más bajos.

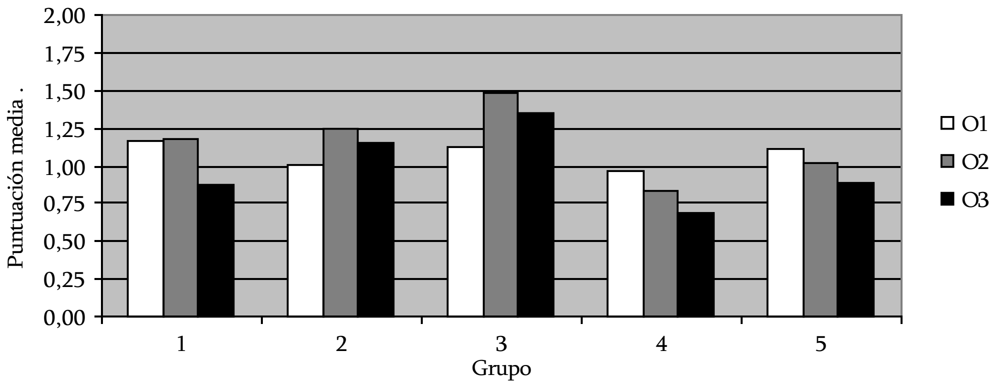


Figura 5.3. Puntuación en función del tipo de operación y curso: diagrama de barras.

Para saber cuáles de las diferencias entre los promedios de las operaciones, dentro de cada curso, han resultado significativas, se han realizado las comparaciones por pares empleando el ajuste de Bonferroni (Tabla 5.12). La única diferencia significativa encontrada se da en el Curso 1, entre los dos tipos de división. Estos resultados permiten establecer ciertos matices a la información ilustrada en la Figura 5.2. Resumiendo todos estos hallazgos se debe indicar que, no es posible en general concluir que las tareas de multiplicación sean significativamente más fáciles o difíciles que las de ninguno de los dos tipos de división al examinarlas en los resultados generales (independientemente de pequeñas diferencias atribuibles a los cursos). En cuanto a la dificultad de las tareas de división, han resultado significativamente más difíciles las de tipo B (división de un número por otro mayor) tanto en el análisis general de los datos como en los resultados parciales obtenidos al analizar los datos provenientes de cada curso. Además, se ve (Tabla 5.14 y Figura 5.2) que la diferencia de dificultad entre los dos tipos de división es mayor en el Curso 1 que en los demás cursos.

Tabla 5.17. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "operación" para cada curso*

Curso	*(I) Operación*	*(J) Operación*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
	1	2	-0,02	0,12	1,00	-0,31	0,28
1	1	3	0,29	0,12	0,05	-0,00	0,59
	2	3	0,31**	0,10	0,009	0,06	0,56
	1	2	-0,24	0,16	0,43	-0,63	0,15
2	1	3	-0,15	0,16	1,00	-0,54	0,24
	2	3	0,09	0,14	1,00	-0,24	0,41
	1	2	-0,35	0,15	0,06	-0,70	0,01
3	1	3	-0,22	0,15	0,38	-0,58	0,13
	2	3	0,13	0,12	0,93	-0,17	0,42
	1	2	0,13	0,15	1,00	-0,23	0,49
4	1	3	0,28	0,15	0,19	-0,08	0,64
	2	3	0,15	0,13	0,72	-0,16	0,45
	1	2	0,09	0,12	1,00	-0,20	0,38
5	1	3	0,23	0,12	0,18	-0,06	0,52
	2	3	0,14	0,10	0,54	-0,11	0,38

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

3.2. Influencia de la operación sobre la puntuación en función de la variable mitad

A continuación, voy a averiguar si los resultados obtenidos para el efecto de la variable independiente "Operación" en la puntuación, se dan por igual en los ítems pares y los impares. Es decir, si hay un efecto de interacción de la variable "operación" con la variable "mitad" y, en caso de darse esta interacción, si afecta a la comparación entre los dos tipos de división.

Viendo los resultados generales del análisis de varianza (Tabla 5.6) la decisión adoptada es la de rechazar la hipótesis H_{07} (No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Operación* y *Mitad* con respecto a la variable

Puntuación). Para dicha interacción, los resultados son: F = 3,60 y p =0,03[219].

En la Tabla 5.15 se desglosan los promedios de cada tipo de operación en función de que las tareas de estimación pertenezcan a una mitad de la prueba o a la otra.

Tabla 5.18. *Estadísticos descriptivos de la variable puntuación según la variable 'mitad' (ítems pares o impares)*

	Ítems impares		Ítems pares	
Operación	*M*	*SD*	*M*	*SD*
O_1	1,01	0,07	1,14	0,07
O_2	1,21	0,07	1,10	0,07
O_3	1,03	0,06	0,96	0,07

La Figura 5.4 recoge los valores promedio antes reseñados y manifiesta una situación parecida a la señalada al estudiar la dificultad relativa de los distintos tipos de operación en función del curso. La división de un número por otro mayor es, tanto para los ítems pares como para los impares, más difícil que la división de un número por otro menor. Esto queda en evidencia al observar las líneas correspondientes a los dos tipos de división de la Figura 5.4. Por otro lado, la multiplicación aparece ligeramente por encima (en dificultad) en los ítems pares y por debajo en los impares.

Las diferencias comentadas entre los ítems pares e impares aparecen más resaltadas en la Figura 5.5. De los ítems impares a los pares, la dificultad de la multiplicación aumenta y la de la división disminuye. En ambos casos, se comprueba que las divisiones de un número por otro mayor resultan más difíciles que las divisiones de un número por otro menor. En la Figura 5.4, se aprecia que el efecto significativo de interacción, encontrado entre los factores "operación" y "mitad", no afecta a los dos tipos de división[220].

[219] Un resultado análogo se obtendría con el enfoque multivariado (F = 3,86; p = 0,02; Tabla 5.7).

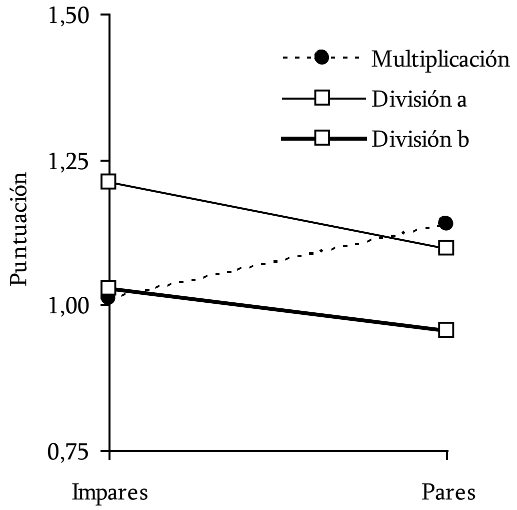


Figura 5.4. Puntuación en función del tipo de operación y mitad del test.

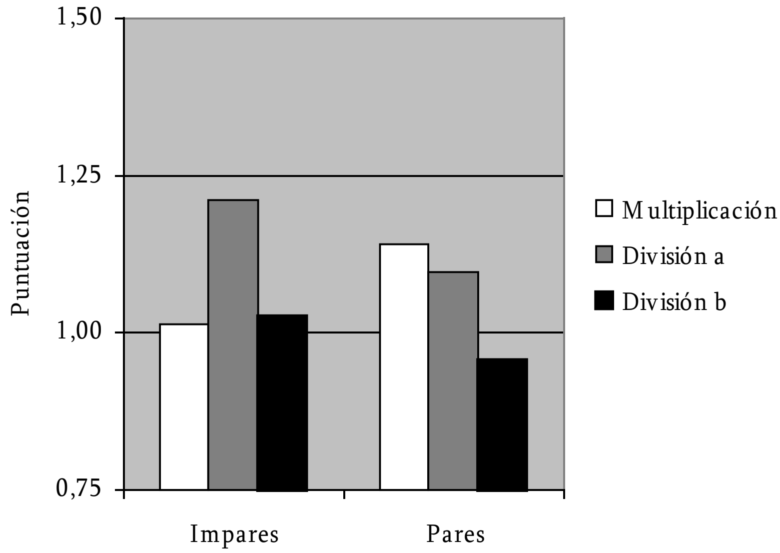


Figura 5.5. Puntuación en función del tipo de operación y mitad del test: Diagrama de barras.

[220] En los contrastes intrasujetos (Tablas 4.9 y 4.10) se aprecia que las diferencias entre los tipos de operación, en función de la mitad del test de estimación considerados (ítems pares o impares), se produce entre los niveles 1 y 3 del factor "operación" ($F = 4{,}02$; $p = 0{,}047$) y los niveles 1 y 2 del factor "operación" ($F = 7{,}04$; $p = 0{,}009$). Es decir, la interacción no afecta a la diferencia entre los niveles 2 y 3 (los dos tipos de división) que se "comportan igual" para los dos valores del factor "mitad".

En la Tabla 5.16 pueden verse los resultados de las comparaciones por pares para los niveles de la variable "operación" para cada mitad del test. Para la primera mitad del test, la diferencia[221] entre los dos tipos de división es significativa (p = 0,03).

Tabla 5.19. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "tipo de operación" para cada mitad de la prueba (ítems pares o impares)*

Mitad	*(I) Operación*	*(J) Operación*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	1	2	-0,20*	0,08	0,04	-0,39	-0,01
	1	3	-0,01	0,08	1,00	-0,20	0,17
	2	3	0,18*	0,07	0,03	0,01	0,36
2	1	2	0,04	0,08	1,00	-0,14	0,23
	1	3	0,18	0,08	0,08	-0,02	0,38
	2	3	0,14	0,07	0,17	-0,04	0,32

* p < 0,05.
[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.
Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

3.3. Influencia del "tipo de operación" sobre la "puntuación", en función del "tipo de número"

Para empezar, con respecto a la hipótesis H_{03} (No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Operación* y *Número* con respecto a la variable *Puntuación*), se toma la decisión[222] (ver Tabla 5.6) de rechazarla (F = 3,85 y p = 0,001).

En la Tabla 5.17 y en la Figura 5.6 aparecen las medias de las puntuaciones de la prueba de estimación según el tipo de operación y el tipo de número.

[221] La otra diferencia significativa, que se produce también en la primera mitad del test, entre la multiplicación y la división de un número por otro menor, no tiene tanto interés, pues no afecta a la diferencia que realmente se trata de valorar entre los dos tipos de división. Abordaré la reflexión sobre estas diferencias entre ítems pares e impares más adelante, en el apartado de este capítulo dedicado al análisis de los ítems de la prueba.

[222] Decisión refrendada por los resultados de los contrastes multivariados (ver Tabla 5.7; F = 4,27 y p = 0,001).

Tabla 5.20. *Medias de las puntuaciones según el tipo de operación y el tipo de número*

	Multiplicación		División a		División b	
Tipo de número	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
N_1	1,48	0,09	1,41	0,09	1,30	0,07
N_2	1,50	0,11	1,65	0,09	1,15	0,09
N_3	0,77	0,08	0,90	0,10	0,73	0,08
N_4	0,56	0,08	0,66	0,09	0,78	0,08

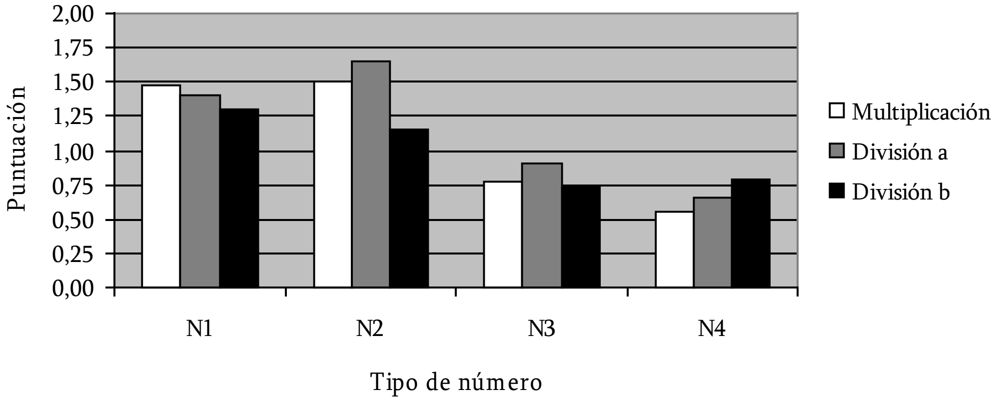


Figura 5.6. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número.

Tabla 5.21. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable 'tipo de operación' para cada 'tipo de número'*

Número	*(I) Operación*	*(J) Operación*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
	1	2	0,07	0,12	1,00	-0,21	0,36
1	1	3	0,18	0,11	0,32	-0,09	0,46
	2	3	0,11	0,12	1,00	-0,17	0,39
	1	2	-0,15	0,13	0,77	-0,46	0,17
2	1	3	0,34*	0,13	0,04	0,02	0,67
	2	3	0,49***	0,11	0,000	0,23	0,75
	1	2	-0,13	0,10	0,62	-0,39	0,12
3	1	3	0,04	0,10	1,00	-0,20	0,27
	2	3	0,17	0,10	0,32	-0,08	0,42
	1	2	-0,10	0,10	1,00	-0,35	0,16
4	1	3	-0,22	0,10	0,07	-0,45	0,01
	2	3	-0,12	0,09	0,57	-0,35	0,10

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

En la Tabla 5.18 pueden verse las comparaciones por pares entre los distintos tipos de operación para cada tipo de número. Solo se encuentran dos diferencias significativas: La primera, para los números decimales mayores que 1, entre la multiplicación y la división B ($p = 0,04$); la segunda, también para los decimales mayores que uno, entre la división A y la división B ($p < 0,001$). Esta última diferencia encontrada vuelve a señalar la importancia que tiene, a lo largo de todo el trabajo, la distinción que se ha hecho entre los dos tipos de división.

La Figura 5.7 muestra el gráfico de perfil[223] correspondiente a las puntuaciones de la prueba de estimación en función del tipo de operación y el tipo de número.

Se han encontrado[224] seis combinaciones de niveles de los factores "operación" y "número" en los que se produce la presencia de una interacción significativa, que estudiaré individualmente. Las interacciones que se den en todos los cursos

[223] En esta investigación he modificado los gráficos de perfil convencionales para hacer que en ellos aparezcan representadas todas las interacciones que resultan significativas al realizar las pruebas de contrastes intrasujetos (Tablas 4.9 y 4.10). Por ejemplo, en los contrastes intrasujetos aparecen dos interacciones significativas (con $p = 0,001$ y $p < 0,001$ respectivamente). Dichas interacciones se dan entre los niveles 2 y 4 del factor "número" y los niveles 1 y 3 del factor "operación", la primera ($F = 12,06$ y $p = 0,001$), y entre los niveles 2 y 4 del factor "número" y los niveles 2 y 3 del factor "operación", la segunda ($F = 21,49$ y $p < 0,001$). Ninguna de estas dos interacciones aparecería representada en un gráfico de perfiles convencional. Así, he adaptado el gráfico, incluyendo en el eje de abscisas, después del nivel 4 de la variable número, una repetición de los valores del nivel 2, para poder observar en el gráfico las dos interacciones antes referidas. Por la misma razón, he incluido a la izquierda de la gráfica una repetición del nivel 4 de la variable "tipo de número", para que aparezca representada otra interacción significativa hallada al analizar los resultados. Esta opción la he tomado, fundamentalmente, no para analizar las interacciones dobles sino, especialmente, para poder valorar visualmente, a través de distintos gráficos de perfil, las interacciones triples, aspecto importante en la presente investigación.

[224] Ver las pruebas de contrastes intrasujetos (Tablas 4.9 y 4.10).

y en cada una de las mitades de la prueba de estimación, se verán en este apartado. En el apartado siguiente, se verán las interacciones que dependen del curso. Para el último apartado dejaré las interacciones que dependen de la mitad de la prueba de estimación.

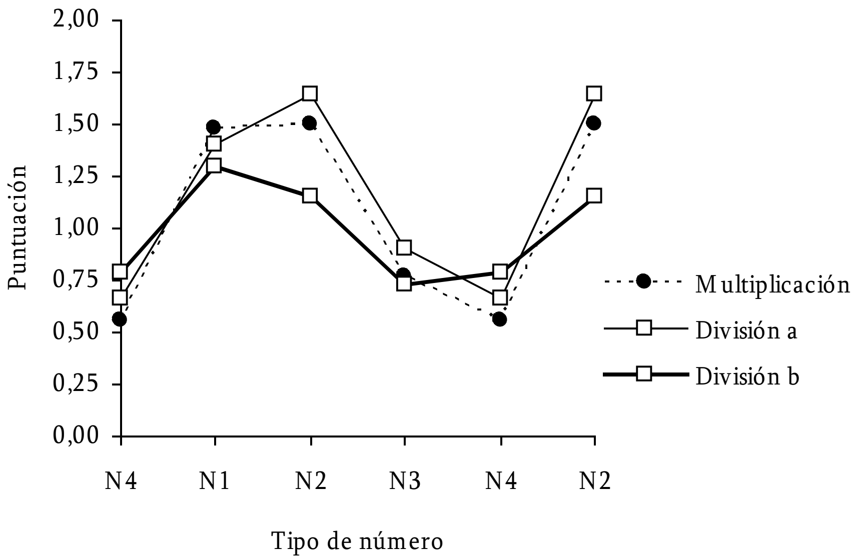


Figura 5.7. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número.

Hay cuatro situaciones de interacción que no dependen del curso ni de la mitad del test:

La primera se da entre los niveles 2 y 4 del factor número y los niveles 1 y 3 del factor operación (F = 12,06; p = 0,001; ver Tabla 5.9 y Figura 5.7). Se trata de una interacción cruzada. Al pasar de los números decimales mayores que 1 a los decimales menores que 0,1, la dificultad de la multiplicación aumenta mucho más que la dificultad de la división B. Esta interacción se produce en los 5 cursos con la particularidad de que en los cursos 2, 3 y 5, pasa a ser ordinal, con la multiplicación más difícil en los cursos 2 y 3, y más fácil en el curso 5 (Figuras 4.8 a 4.12). Esta interacción se da por igual en los ítems pares y en los impares (Figuras 4.13 y 4.14).

La segunda se produce entre los niveles 2 y 4 del factor número y los niveles 2 y 3 del factor operación ($F = 21,49$; $p < 0,001$; ver Tabla 5.9 y Figura 5.7). Es parecida a la anterior[225]. Al pasar de los números decimales mayores que 1 a los decimales menores que 0,1, la dificultad de la división A aumenta mucho más que la dificultad de la división B. Esta situación de interacción es igual en todos los cursos con la salvedad del primero, en el que es ordinal -con la división A más fácil que la división B. En todos los demás casos es una interacción cruzada del mismo tipo (Figuras 4.8 a 4.12) que se da por igual en los ítems pares y en los impares, aunque en los impares es ordinal -con la división A más fácil que la división B- y en los pares es cruzada (Figuras 4.13 y 4.14).

La tercera se encuentra entre los niveles 3 y 4 del factor número y los niveles 2 y 3 del factor operación ($F = 3,96$; $p = 0,049$; ver Tabla 5.9 y Figura 5.7). Al pasar de los números decimales menores que 1 a los decimales menores que 0,1, la dificultad de la división A aumenta y la dificultad de la división B disminuye. La interacción se produce en todos los cursos, pero cambia bastante entre uno y otro. En los cursos 1, 3 y 5, la interacción es ordinal y en los cursos 2 y 4 cruzada. En el curso 1 la división A es más fácil que la división B y en los cursos 3 y 5 ocurre al revés, aunque en los tres casos las diferencias son muy pequeñas (Figuras 4.8 a 4.12). Tanto en los ítems impares (Figura 5.13) como en los pares (Figura 5.14), se producen los mismos cambios en dificultad que en el caso general, aunque en los impares la interacción es ordinal -con la división A más fácil que la división B- y en los ítems pares hay una interacción cruzada.

La cuarta y última situación de interacción se puede ver entre los niveles 2 y 3 del factor operación y los niveles 2 y 3 del factor número ($F = 4,44$; $p = 0,04$; ver Tabla 5.10 y Figura 5.7). En este caso, al pasar de los decimales mayores que uno a los decimales menores que uno (pero mayores que 0,1), la división A aumenta su dificultad de una forma mucho más pronunciada que la

[225] Y también es interacción cruzada.

división B. En este caso, la interacción es ordinal. En todos los cursos (salvo en el tercero, en que se da interacción cruzada) la interacción es ordinal con la división B más difícil que la división A. En el curso 2 es en el único en que la dificultad de la división B aumenta más que la dificultad de la división A, al pasar de los decimales menores que 1 a los menores que 0,1 (Figuras 4.8 a 4.12). La interacción se da por igual en ítems impares y pares, aunque es bastante más acentuada en estos últimos (ver Figuras 4.13 y 4.14).

Estas tres últimas interacciones admiten una interpretación común. En general, la división B es más difícil que la división A. Por otra parte, Las tareas con decimales menores que 0,1 son más difíciles que con decimales menores que 1 y, a su vez, estas son más difíciles que las tareas con decimales mayores que uno. La tres interacciones se explican diciendo que, a medida que aumenta la dificultad con el tipo de número, las medias de las puntuaciones de la división A disminuyen a un ritmo muy superior al descenso de las medias en la división B, hasta llegar a un punto, con los números decimales menores que 0,1, en que la división A resulta más difícil que la división B.

La misma situación se da entre la multiplicación y la división B entre los niveles 2 y 4 del factor número. Al ser la multiplicación, en general, más fácil que la división B, la caída en las medias de las multiplicaciones es más acusada a través de los niveles 2, 3 y 4 del factor *número*, que la de las divisiones B.

Un aspecto que hay que señalar, es que en todas las interacciones significativas hayadas en esta investigación intervienen el nivel 4 del factor número o el nivel 3 del factor operación. Esto significa que para conocer los efectos de los factores sobre la puntuación es crucial la distinción que ha guiado el diseño de este estudio -entre división de un número por otro menor y división de un número por otro mayor, por un lado y, por otro, entre números decimales menores que 1 (pero mayores que 0,1) y números decimales menores que 0,1.

3.3.1. Interacción entre las variables operación y número en función del curso

Se ha encontrado un efecto de interacción triple entre las variables operación, número y curso, con respecto a la variable dependiente "puntuación" ($F = 1{,}62$; $p = 0{,}03$; ver Tabla 5.6)[226].

En la Tabla 5.19 se encuentran los estadísticos descriptivos para la cada tipo de número, operación y para cada curso. Las medias correspondientes aparecen representadas en las Figuras 4.8 a 4.12.

Tabla 5.22. *Medias para las combinaciones de niveles de las variables Número por Operación para cada Curso*

Curso	Número	Operación	Media	Error típico	Límite inferior	Límite superior
1	1	1	1,71	0,18	1,36	2,06
		2	1,50	0,18	1,15	1,85
		3	1,46	0,14	1,17	1,74
	2	1	1,83	0,22	1,41	2,26
		2	1,77	0,17	1,44	2,11
		3	0,79	0,18	0,44	1,14
	3	1	0,76	0,16	0,44	1,07
		2	0,68	0,18	0,32	1,05
		3	0,64	0,15	0,34	0,94
	4	1	0,35	0,15	0,04	0,65
		2	0,77	0,17	0,43	1,12
		3	0,61	0,16	0,30	0,91
2	1	1	1,18	0,23	0,72	1,65
		2	1,26	0,24	0,80	1,73
		3	1,47	0,19	1,10	1,85
	2	1	1,26	0,29	0,70	1,83
		2	1,66	0,22	1,22	2,10
		3	1,40	0,23	0,94	1,85
	3	1	1,03	0,21	0,61	1,44
		2	1,26	0,24	0,78	1,74
		3	0,55	0,20	0,16	0,95
	4	1	0,55	0,20	0,15	0,96
		2	0,79	0,23	0,34	1,24
		3	1,21	0,21	0,81	1,62

[226] Esta interacción triple no resulta significativa en la alternativa multivariada del análisis de la varianza ($F = 1{,}53$; $p = 0{,}053$; ver Tabla 5.7) aunque los resultados de F y p no difieren mucho en ambos análisis.

Tabla 5.22 (continuación)
Medias para las combinaciones de niveles de las variables Número por Operación para cada Curso

Curso	Número	Operación	Media	Error típico	Límite inferior	Límite superior
3	1	1	1,48	0,21	1,06	1,90
		2	1,83	0,21	1,40	2,25
		3	1,28	0,17	0,94	1,62
	2	1	1,54	0,26	1,03	2,06
		2	1,76	0,20	1,36	2,16
		3	1,65	0,21	1,23	2,07
	3	1	0,67	0,19	0,30	1,05
		2	1,24	0,22	0,80	1,68
		3	1,37	0,18	1,01	1,73
	4	1	0,83	0,19	0,46	1,19
		2	1,09	0,21	0,67	1,50
		3	1,11	0,19	0,74	1,48
4	1	1	1,48	0,22	1,05	1,91
		2	1,05	0,22	0,61	1,48
		3	1,02	0,18	0,67	1,37
	2	1	1,48	0,26	0,95	2,00
		2	1,34	0,21	0,93	1,75
		3	0,86	0,22	0,44	1,29
	3	1	0,55	0,20	0,16	0,93
		2	0,71	0,23	0,26	1,15
		3	0,48	0,19	0,11	0,85
	4	1	0,36	0,19	-0,01	0,74
		2	0,25	0,21	-0,17	0,67
		3	0,39	0,19	0,01	0,76
5	1	1	1,54	0,17	1,20	1,89
		2	1,40	0,18	1,05	1,75
		3	1,25	0,14	0,97	1,53
	2	1	1,37	0,21	0,95	1,79
		2	1,69	0,17	1,36	2,02
		3	1,07	0,17	0,73	1,42
	3	1	0,84	0,16	0,53	1,15
		2	0,62	0,18	0,26	0,98
		3	0,63	0,15	0,34	0,93
	4	1	0,72	0,15	0,42	1,02
		2	0,40	0,17	0,06	0,74
		3	0,60	0,15	0,30	0,91

Límites para los intervalos de confianza al 95%.

Esta interacción triple se explica al estudiar la dependencia de una de las interacciones dobles que se dan en este trabajo en función del Curso. En efecto, hay una situación de interacción entre los niveles 2 y 3 del factor operación y los niveles 1y 2 del factor número (F = 7,12; p = 0,009; ver Tabla 5.10). Esta interacción no se mantiene para los distintos valores del factor Curso[227], ni para los dos valores de la variable Mitad[228]. La interacción reseñada es del mismo tipo en los cursos 1, 4 y 5: Una interacción ordinal, con la división A más fácil que la división B y con la dificultad de la división A disminuyendo al pasar de los naturales a los decimales mayores que 1, y la dificultad de la división B aumentando al hacer el mismo cambio en el tipo de número. Sin embargo, en los cursos 2 y 3 se produce un tipo de interacción distinto: Mientras que en el curso 2, los cambios de dificultad en las divisiones se producen en el mismo sentido que en los cursos 1, 4 y 5, aunque la interacción es cruzada, en el curso 3, aparece otra vez una interacción ordinal, con la división A más fácil que la división B. No obstante, en este caso, al pasar de los números naturales a los decimales mayores que uno, la dificultad de la división A aumenta y la de la división B disminuye, lo que implica un tipo de interacción muy distinta a la de los demás cursos.

Por otra parte, en la Figura 5.13, correspondiente a los ítems impares, se observa que esta situación de interacción se produce; sin embargo, no se da[229] en los ítems pares (Figura 5.14).

[227] Hay una interacción triple O × N × Curso, en las pruebas de contrastes intrasujetos (ver Tabla 5.10) que afecta a los niveles 2 y 3 de O, los niveles 1 y 2 de N ($F = 2{,}56$; $p = 0{,}04$).

[228] Hay una interacción triple O × N × Mitad, en las pruebas de contrastes intrasujetos (ver Tabla 5.10) que afecta a los niveles 2 y 3 de O, los niveles 1 y 2 de N, y a los niveles 1 y 2 de Mitad ($F = 6{,}18$; $p = 0{,}014$). Así, esta situación de interacción podría ubicarse también en el apartado siguiente.

[229] Pueden verse las dos líneas correspondientes a la división A y a la división B prácticamente paralelas (entre N1 y N2) en la Figura 5.14.

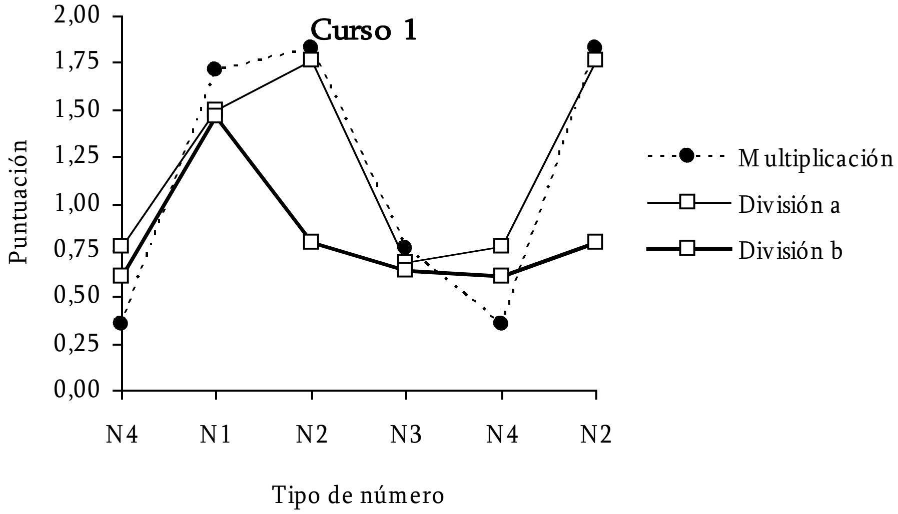


Figura 5.8. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número: Curso 1.

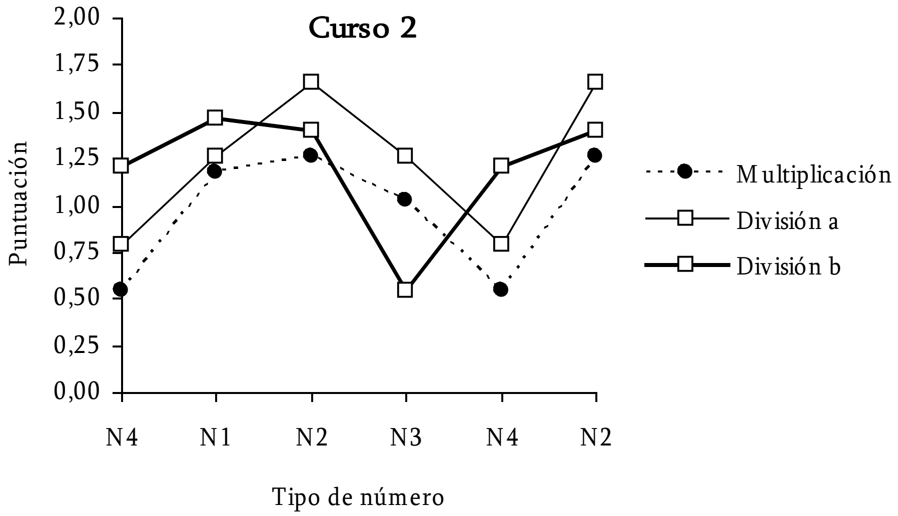


Figura 5.9. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número: Curso 2.

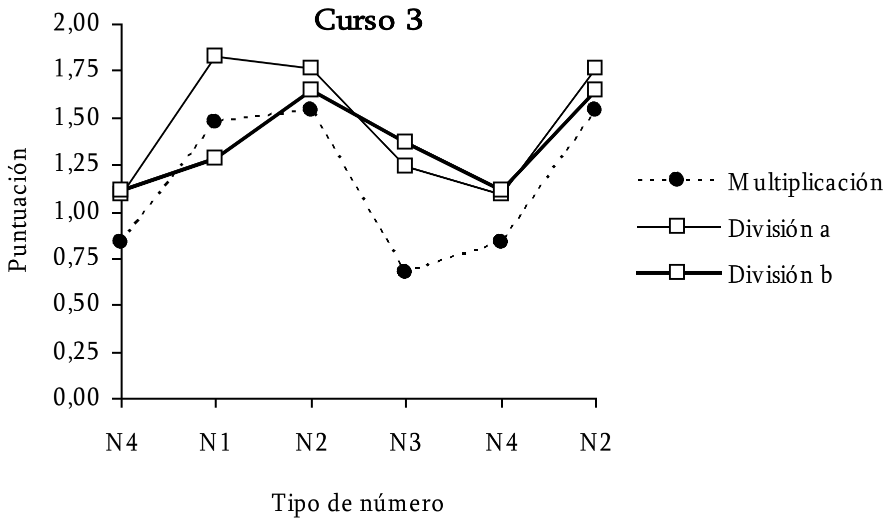


Figura 5.10. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número: Curso 3.

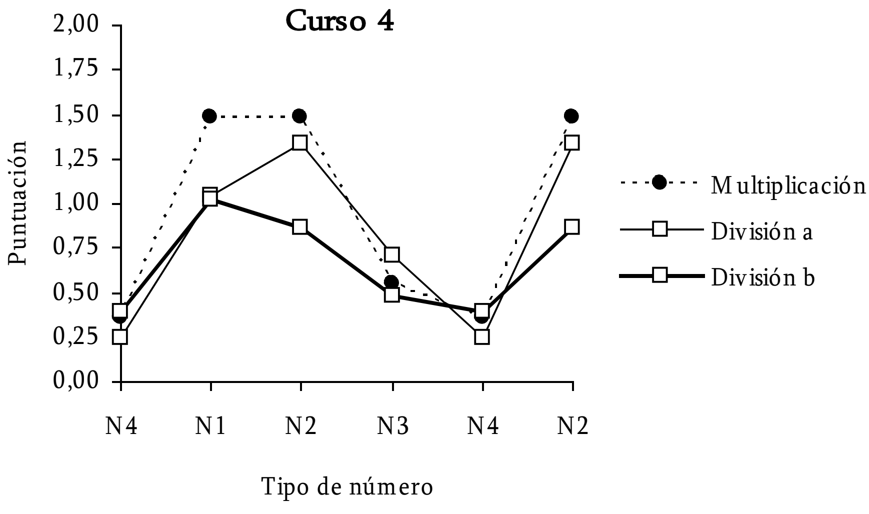


Figura 5.11. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número: Curso 4.

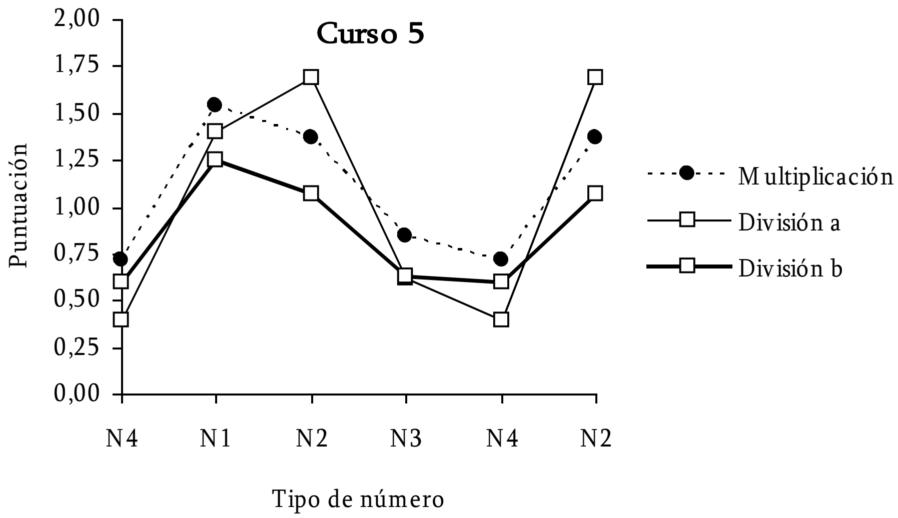


Figura 5.12. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número: Curso 5.

3.3.2. Interacción entre las variables operación y número en función de la mitad de la prueba

Para empezar, en la Tabla 5.20, presento las medias de las puntuaciones según el tipo de operación, número y según la mitad del test. Los valores de esta tabla aparecen representados gráficamente en las figuras 4.13 y 4.14.

Se produce un efecto de interacción triple[230] entre los factores Número, Operación y Mitad (F = 4,09; p = 0,001, ver Tabla 5.6) que en esta parte del trabajo[231] interpretamos[232] señalando que la interacción entre los factores Número y Operación depende[233] de la Mitad de la prueba de estimación que se utilice.

[230] Que aparece también en los contrastes multivariados (F = 3,77; p = 0,002; ver Tabla 5.7).

[231] Dado que estoy interesado en estudiar cómo cambia la interacción del factor operación con el factor número en función de la Mitad de la prueba.

[232] De acuerdo a los resultados de las pruebas de contrastes intrasujetos y a los gráficos de perfil.

[233] Y llega a cambiar notablemente según se ve en las Figuras 4.13 y 4.14.

Tabla 5.23. *Medias de las puntuaciones según el tipo de número, el tipo de operación y la mitad del test (ítems pares o impares)*

	N_1				N_2				N_3				N_4			
	Impares		Pares		Impares		Pares		Impares		Pares		Impares		Pares	
Oper.	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*
Mult.	1,49	0,11	1,47	0,11	1,45	0,13	1,54	0,13	0,55	0,10	0,98	0,11	0,56	0,09	0,57	0,10
Div.A	1,46	0,12	1,35	0,13	1,65	0,09	1,64	0,12	0,99	0,12	0,81	0,11	0,74	0,11	0,58	0,10
Div.B	1,66	0,11	0,94	0,10	1,10	0,12	1,21	0,12	0,66	0,10	0,80	0,10	0,69	0,08	0,88	0,12

Un ejemplo de esta dependencia de la Mitad se distingue en la situación de interacción producida entre los niveles 1 y 4 de la variable número y niveles 1 y 3 de la variable operación (F = 7,52; p = 0,007; ver Tablas 4.9 y 4.10). Esta interacción se da en todos los cursos[234], aunque en los cursos 2 y 5 se trata de interacciones ordinales[235] y en el curso 5 es una interacción bastante 'pequeña'. Esta interacción, no obstante, se produce en los ítems pares (Figura 5.14) pero está ausente en los impares (Figura 5.13). Esta diferencia se observa también en los resultados de la Tabla 5.9 en la que se rechaza que la interacción de los niveles 1 y 4 del factor número y los niveles 1 y 3 del factor operación sea igual para los niveles 1 y 2 del factor "Mitad" (F = 11,03; p = 0,001). El hecho de que esta interacción se dé solo en los ítems pares y que cambie de tipo y notablemente de intensidad según el curso, hace que resulte muy dependiente del tipo de prueba planteada y poco generalizable, de modo que queda excluida como interacción de interés para esta investigación.

[234] En las pruebas de contrastes intrasujetos, en N × O × Curso, la opción n1-n4, n1-n3, n1-n2 tiene F = 0,23, p = 0,92. Por esta razón se rechaza que la interacción señalada en N × O dependa del curso, aunque al inspeccionar la Figura 5.12, correspondiente al Curso 5, apenas se percibe una muy leve interacción ordinal.

[235] Y bastante diferentes pues en el Curso 2 la división B resulta más fácil que la multiplicación para N1 y N4, mientras que en el Curso 5 (la otra interacción ordinal) es la multiplicación más sencilla que la división B.

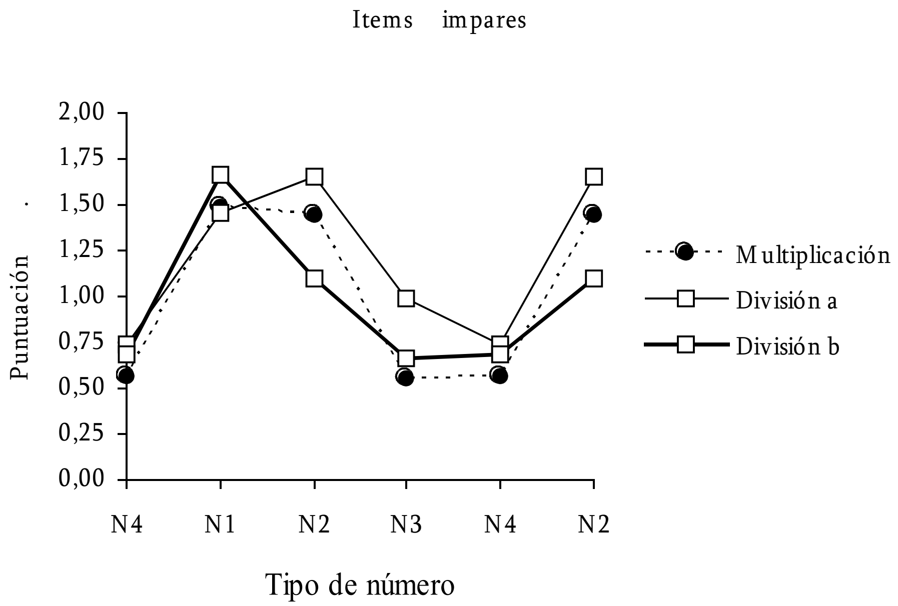


Figura 5.13. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número: Ítems impares.

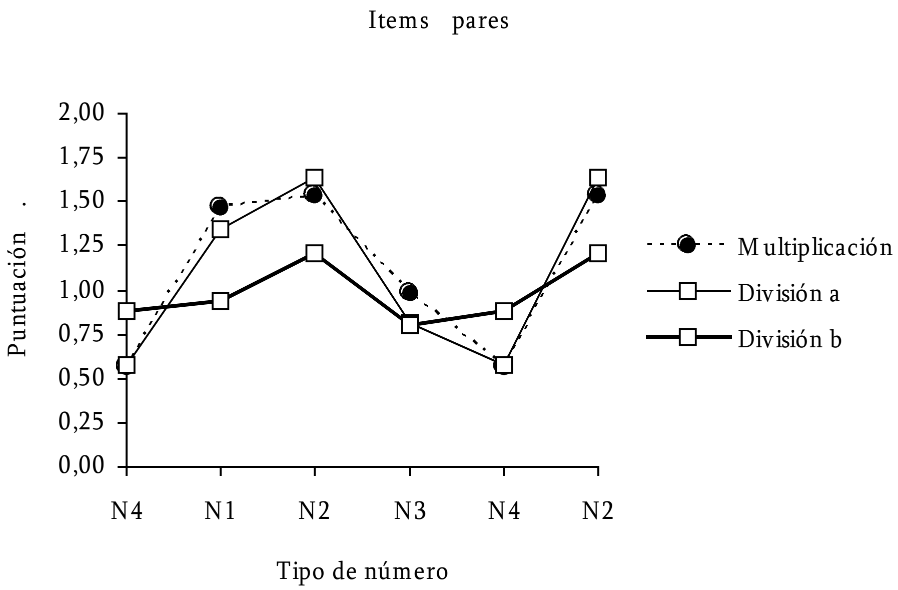


Figura 5.14. Puntuación en función del tipo de operación y tipo de número: Ítems pares.

4. ESTUDIO DEL EFECTO DEL FACTOR NÚMERO SOBRE LA VARIABLE DEPENDIENTE PUNTUACIÓN

Tras haber concluido el estudio del efecto del factor operación sobre la variable dependiente "puntuación" y de las interacciones de este factor con otros del diseño, pasaré al factor "tipo de número" con sus cuatro niveles: números naturales, decimales mayores que uno, decimales menores que uno[236] y decimales menores que 0,1.

Tabla 5.24. *Medias de las puntuaciones por tipo de número*

Número	*M*	*SD*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
N_1	1,39	0,06	1,29	1,50
N_2	1,43	0,07	1,30	1,56
N_3	0,80	0,06	0,68	0,92
N_4	0,67	0,06	0,55	0,79

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

De acuerdo a los resultados de las pruebas de efectos intrasujetos ($F = 80,67$; $p < 0,001$; ver Tabla 5.6[237]), se toma la decisión de rechazar la hipótesis H_{02} (No hay efecto significativo del factor intrasujetos *Número* sobre la variable *Puntuación*)[238]. En la Tabla 5.21 y en la Figura 5.15 aparecen los estadísticos descriptivos y la representación gráfica correspondientes a la

[236] Recuerdo que, a lo largo de toda la tesis, cuando utilice la expresión "decimales menores que 1", realmente quiere decir "… menores que 1 y mayores que 0,1". La última parte se omite por brevedad y por simplificar la lectura, entendiendo que queda clara implícitamente en el contexto de la investigación.

[237] Como comenté al principio del capítulo, en los resultados generales del análisis de varianza, los valores de $\eta^2 = 0,39$ y pot. = 1 son bastante altos.

[238] Utilizando los contrastes multivariados la decisión sería también de rechazo de la hipótesis. Incluso en este caso, el tamaño del efecto es bastante mayor ($F = 61,95$; $p < 0,001$; $\eta^2 = 0,60$ y pot. = 1; ver Tabla 5.7).

variable dependiente “puntuación” atendiendo al tipo de número.

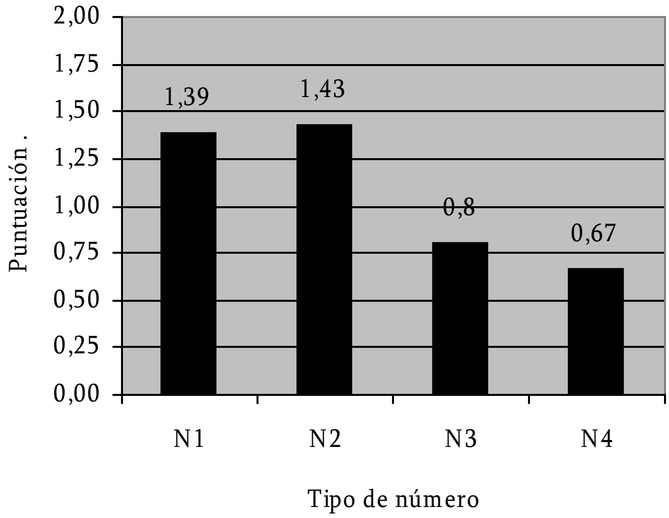


Figura 5.15. Puntuación media en función del tipo de número.

Tabla 5.25. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "tipo de número"*

(I) Número	*(J) Número*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	2	-0,04	0,06	1,000	-0,21	0,13
1	3	0,59***	0,06	0,000	0,44	0,75
1	4	0,73***	0,06	0,000	0,57	0,88
2	3	0,63***	0,07	0,000	0,45	0,82
2	4	0,76***	0,07	0,000	0,57	0,96
3	4	0,13*	0,05	0,049	0,00	0,27

* $p < 0,05$; *** $p < 0,001$.
[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.
Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Dado que se ha rechazado la hipótesis de ausencia de efecto de la variable “tipo de número” sobre la puntuación, debe averiguarse entre qué niveles del factor “tipo de número” se producen las diferencias significativas. Para ello, se consulta la Tabla 5.22, que contiene las comparaciones múltiples con el ajuste de Bonferroni. Se han encontrado diferencias significativas entre los niveles 1 y 3, 1 y 4, 2 y 3, 2 y 4 (en todos estos casos $p < 0{,}001$) y entre los niveles 3 y 4 ($p = 0{,}049$) de la variable "tipo de número". Es decir, no hay diferencia significativa de dificultad entre los ítems con números naturales y decimales mayores que uno. Hay diferencia significativa entre los naturales y decimales mayores que uno y, por otro lado, los decimales menores que 1 y menores que 0,01. Por último, hay diferencia significativa ($p = 0{,}049$) entre los decimales menores que 1 y mayores que 0,1 y los decimales menores que 0,1. Los mismos resultados se dan en las pruebas de contrastes intrasujetos[239] (Tablas 4.9 y 4.10).

4.1. Influencia de la variable número sobre la puntuación en función del curso

Con respecto a la hipótesis H_{08} (No hay efecto significativo de interacción entre los factores *Número* y *Curso* con respecto a la variable *Puntuación*), la decisión es de no rechazar la hipótesis, de acuerdo con los resultados del análisis de varianza[240] ($F = 1{,}17$; $p = 0{,}31$).

Como se comprueba en la Tabla 5.23 y en la Figuras 4.16 y 4.17, que -en que se representan las medias de las puntuaciones para cada tipo de número y curso- y confirma la ausencia de interacción entre el "tipo de número y el curso", los resultados hallados para los distintos niveles de la variable "tipo de número" se

[239] En los contrastes intrasujetos, hay diferencias significativas en el factor "tipo de número" entre los niveles 1 y 4 ($F = 151{,}21$; $p < 0{,}001$), entre los niveles 2 y 4 ($F = 108{,}33$; $p < 0{,}001$), niveles 3 y 4 ($F = 7{,}21$; $p = 0{,}008$) y niveles 2 y 3 ($F = 84{,}44$; $p < 0{,}001$). No hay diferencia significativa entre los niveles 1 y 2 ($F = 0{,}36$; $p = 0{,}55$). La diferencia encontrada en estos contrastes entre los niveles 3 y 4 (decimales menores que 1 y mayores que 0,1 y decimales menores que 0,1) es importante puesto que confirma la diferencia significativa encontrada en las comparaciones múltiples en un caso en que la significación era de 0,049 (justo en el límite para ser considerada una diferencia significativa).

[240] La decisión sería la misma recurriendo a los contrastes multivariados ($F = 1{,}13$; $p = 0{,}33$; ver Tabla 5.7).

mantienen en todos los cursos.

Tabla 5.26. *Estadísticos descriptivos de la variable puntuación según el tipo de número y el curso*

	N_1		N_2		N_3		N_4	
Curso	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
1	1,56	0,11	1,47	0,13	0,69	0,12	0,58	0,12
2	1,31	0,14	1,44	0,17	0,95	0,16	0,85	0,16
3	1,53	0,13	1,65	0,15	1,09	0,14	1,01	0,14
4	1,18	0,13	1,23	0,16	0,58	0,15	0,33	0,15
5	1,40	0,11	1,38	0,13	0,70	0,12	0,57	0,12

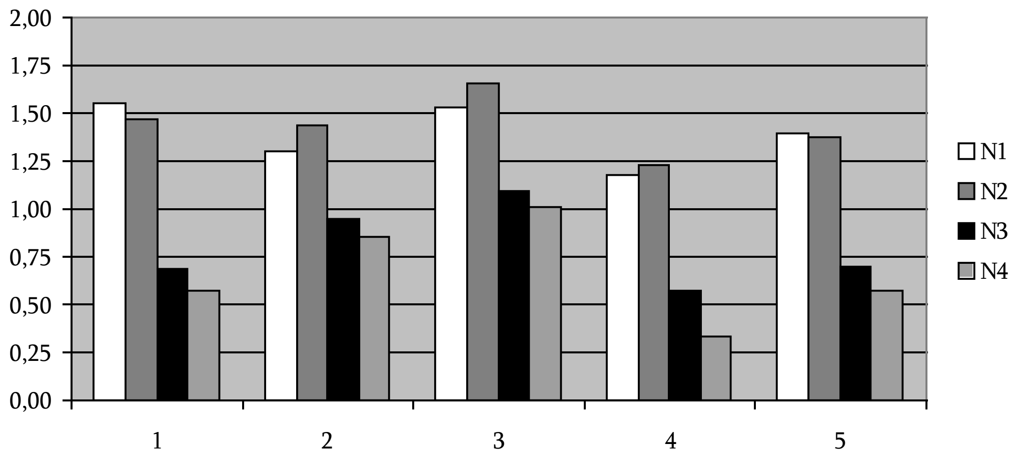


Figura 5.16. Puntuación en función del tipo de número y curso: Diagrama de barras.

La impresión que produce la Figura 5.17 queda plenamente confirmada por los resultados de la Tabla 5.24, en que figuran las comparaciones por pares para los niveles de la variable “tipo de número”, para cada curso. En dicha tabla se observa que, para todos los cursos, hay diferencias significativas de los niveles 1 y 2 con respecto a los niveles 3 y 4. El único aspecto llamativo, por novedoso, de estas comparaciones es que no haya -en el curso 2- diferencia significativa de dificultad entre números naturales y decimales menores que uno. Además, debe repararse en que para ningún curso hay diferencia significativa entre los decimales menores que 1 y mayores que 0,1, y los decimales menores que 0,1. Este resultado no entra en contradicción con la diferencia significativa encontrada entre los niveles 3 y 4 del factor "tipo de número". Realmente, esta diferencia se da en todos los cursos. Sin embargo, solo es significativa en los resultados generales del análisis de la varianza.

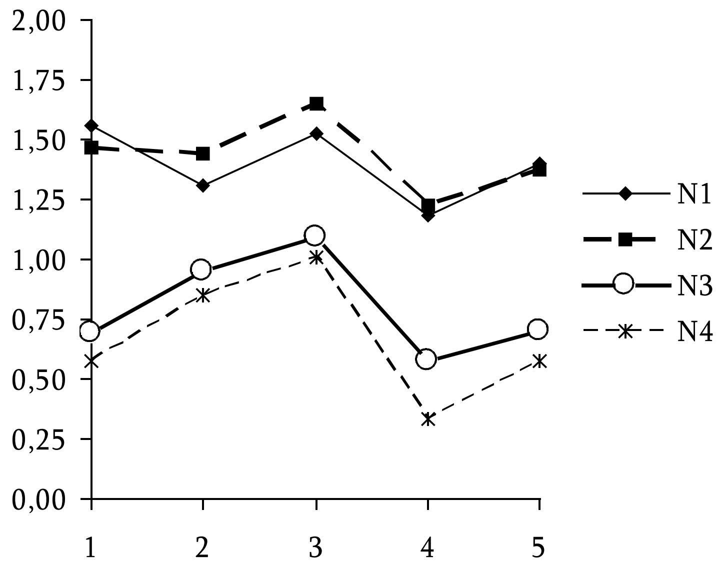


Figura 5.17. Puntuación en función del tipo de número y curso.

4.2. Influencia de la variable número sobre la puntuación en función de la variable mitad

Según se ha visto en la Tabla 5.6, hay un efecto significativo de interacción de los factores "tipo de número" y "Mitad" con respecto a la variable puntuación[241] (F = 6,20; p < 0,001; Pot. = 0,96). En esta situación, se debe analizar cuáles de los resultados obtenidos en el análisis de varianza, para la variable número,

[241] El mismo resultado se obtiene a través de los contrastes multivariados (F = 5,81; p = 0,001; ver Tabla 5.7).

dependen de los valores que tome la variable “Mitad”. En la Tabla 5.25 se presentan las medias de las puntuaciones para cada tipo de número y para los ítems impares y los pares y en las Figuras 4.18 y 4.19 se representan los valores de la Tabla 5.25.

Tabla 5.27. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable “tipo de número” para cada curso*

Curso	*(I) Número*	*(J) Número*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	1	2	0,09	0,12	1,000	-0,24	0,42
	1	3	0,86***	0,11	0,000	0,57	1,16
	1	4	0,98***	0,12	0,000	0,67	1,29
	2	3	0,77***	0,13	0,000	0,42	1,13
	2	4	0,89***	0,14	0,000	0,51	1,27
	3	4	0,12	0,10	1,000	-0,14	0,37
2	1	2	-0,13	0,16	1,000	-0,57	0,30
	1	3	0,36	0,15	0,090	-0,03	0,75
	1	4	0,46*	0,15	0,018	0,05	0,86
	2	3	0,49*	0,18	0,036	0,02	0,96
	2	4	0,59*	0,19	0,013	0,09	1,09
	3	4	0,10	0,13	1,000	-0,24	0,44
3	1	2	-0,12	0,15	1,000	-0,52	0,27
	1	3	0,44**	0,13	0,008	0,08	0,79
	1	4	0,52**	0,14	0,001	0,15	0,89
	2	3	0,56**	0,16	0,004	0,13	0,99
	2	4	0,65**	0,17	0,001	0,19	1,10
	3	4	0,09	0,12	1,000	-0,22	0,40
4	1	2	-0,05	0,15	1,000	-0,45	0,36
	1	3	0,61***	0,14	0,000	0,24	0,97
	1	4	0,85***	0,14	0,000	0,47	1,22
	2	3	0,65**	0,16	0,001	0,21	1,09
	2	4	0,89***	0,17	0,000	0,43	1,36
	3	4	0,24	0,12	0,248	-0,07	0,56
5	1	2	0,02	0,12	1,000	-0,31	0,34
	1	3	0,70***	0,11	0,000	0,41	0,99
	1	4	0,82***	0,11	0,000	0,52	1,13
	2	3	0,68***	0,13	0,000	0,33	1,03
	2	4	0,80***	0,14	0,000	0,43	1,18
	3	4	0,12	0,10	1,000	-0,13	0,38

* $p < 0{,}05$; ** $p < 0{,}01$; *** $p < 0{,}001$.
[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.
Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Al ver la Figura 5.18 y las pruebas de contrastes intrasujetos, se comprueba que la interacción afecta solo al nivel 1 del factor "tipo de número" que tiene una interacción significativa cruzada con el nivel 2 (F = 9,14; p = 0,003) y una interacción significativa ordinal con los niveles 3[242] y 4 (F = 8,13; p = 0,005).

Tabla 5.28. *Estadísticos descriptivos de la variable puntuación correspondientes a cada mitad de la prueba de estimación (ítems pares o impares)*

	Ítems impares		Ítems pares	
Número	*M*	*SD*	*M*	*SD*
N_1	1,53	0,07	1,25	0,07
N_2	1,40	0,07	1,46	0,08
N_3	0,74	0,07	0,87	0,07
N_4	0,66	0,07	0,67	0,07

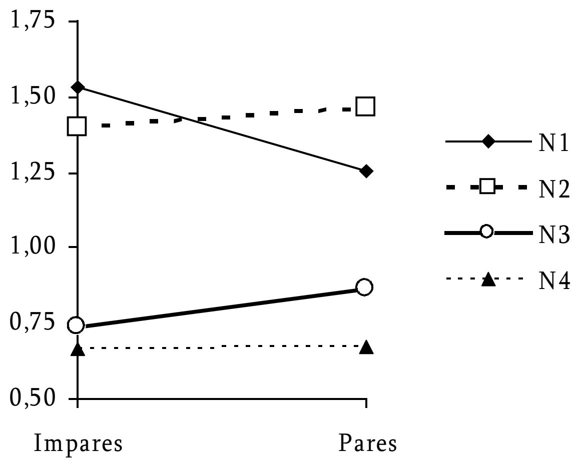


Figura 5.18. Puntuación en función del tipo de número y de la mitad de la prueba.

[242] Los datos correspondientes a esta interacción no aparecen en las pruebas de contrastes intrasujetos al haber elegido para los contrastes la opción de comparar niveles consecutivos del factor número y, por otra parte, todos los niveles con el nivel 4 como referencia (que, en principio, es el de mayor interés). Sin embargo, en la Figura 5.18 queda clara la presencia de esta interacción que, al ser ordinal, no afecta a las comparaciones entre los niveles del factor "tipo de número".

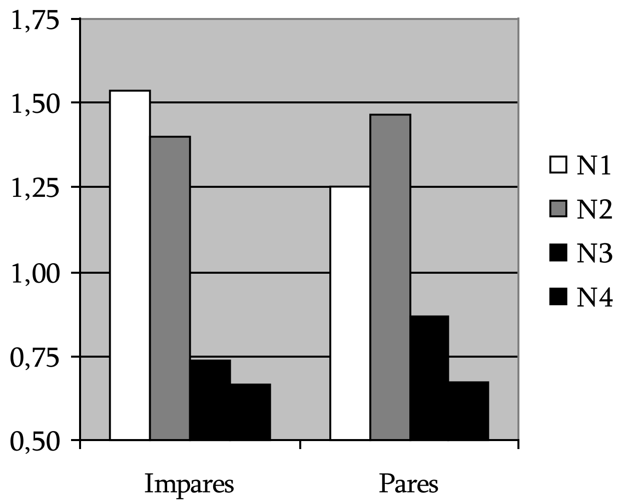


Figura 5.19. Puntuación en función del tipo de número y de la mitad de la prueba: Diagrama de barras.

Según los resultados que muestra la Tabla 26, hay siempre diferencias significativas (con $p < 0,01$) entre los números naturales y decimales mayores que uno, por un lado, y los decimales menores que 1 y menores que 0,1, por otro. La interacción significativa entre las variables "tipo de número" y "mitad" de la prueba apunta a la existencia de diferencias en el comportamiento de la variable "tipo de número" en función de la variable mitad. Estas diferencias se pueden resumir diciendo que en los ítems impares operar con números naturales resulta más difícil que con decimales mayores que uno, mientras que en los ítems pares es al revés y, por otra parte, en los ítems pares la diferencia de dificultad entre los ítems con números decimales menores que 0,1 y los decimales menores que 1 es significativa, mientras que en los ítems impares la diferencia no lo es (ver Figura 5.18 y diferencias significativas en la Tabla 5.26).

Tabla 5.29. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "tipo de número" para cada mitad de la prueba (ítems pares o impares)*

Mitad	*(I) Número*	*(J) Número*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	1	2	0,14	0,08	0,639	-0,09	0,36
	1	3	0,80***	0,08	0,000	0,60	1,00
	1	4	0,87***	0,08	0,000	0,65	1,09
	2	3	0,67***	0,09	0,000	0,44	0,89
	2	4	0,74***	0,08	0,000	0,52	0,96
	3	4	0,07	0,07	1,000	-0,12	0,26
2	1	2	-0,21	0,09	0,106	-0,45	0,02
	1	3	0,39***	0,08	0,000	0,18	0,60
	1	4	0,58***	0,07	0,000	0,39	0,78
	2	3	0,60***	0,09	0,000	0,36	0,83
	2	4	0,79***	0,09	0,000	0,54	1,04
	3	4	0,19*	0,07	0,040	0,06	0,38

* $p < 0{,}05$; ** $p < 0{,}01$; *** $p < 0{,}01$.

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

4.3. Influencia del "tipo de número" sobre la "puntuación", en función del "tipo de operación"

El efecto de interacción entre las variables "tipo de número" y "tipo de operación", con respecto a la variable dependiente "puntuación" ya ha sido tratado en un apartado anterior del presente capítulo. Ahora, las interacciones significativas deben ser valoradas desde otro punto de vista: el de la influencia del tipo de número sobre puntuación en función del tipo de operación. Las Figuras 4.20 y 4.21 corresponden al diagrama de barras y gráfico de perfil que contienen las medias de las puntuaciones para cada operación y tipo de número (ver Tabla 5.17).

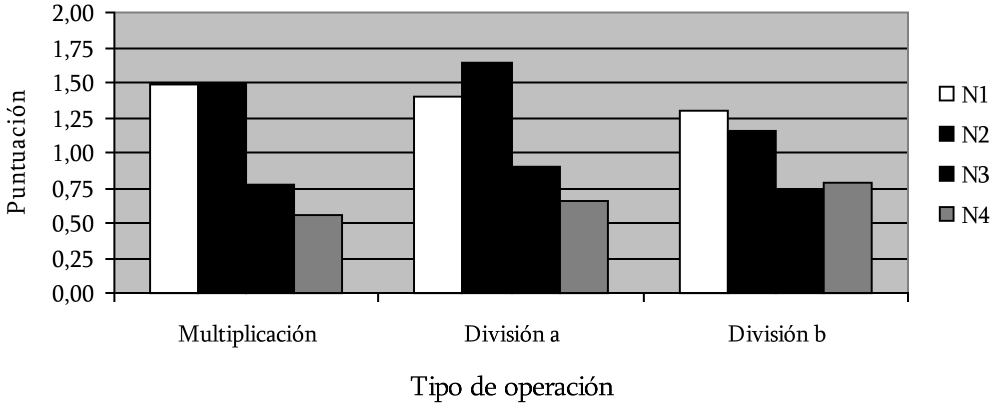


Figura 5.20. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Diagrama de barras.

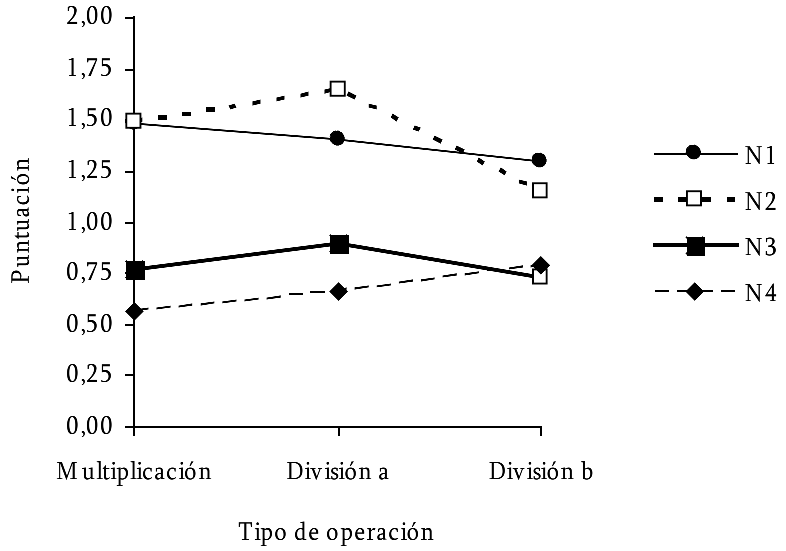


Figura 5.21. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación.

En las comparaciones por pares para los niveles del factor "tipo de número" para cada "tipo de operación" se observa un resultado fundamental en la presente investigación: Los ítems con números naturales y decimales mayores que uno son más fáciles (tienen medias de las puntuaciones significativamente superiores) que los ítems con números decimales menores que 1 (pero mayores que 0,1) y los ítems menores que 0,1. Además, esto ocurre en ¡todos los niveles del factor operación! (ver Tabla 5.27). Y se recoge en apartados anteriores, esta diferencia se da en las dos mitades del test y en todos los cursos.

Tabla 5.30. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "número" para cada operación*

Operación	*(I) Número*	*(J) Número*	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	1	2	-0,02	0,11	1,00	-0,32	0,29
	1	3	0,71***	0,10	0,000	0,44	0,99
	1	4	0,92***	0,11	0,000	0,63	1,21
	2	3	0,73***	0,12	0,000	0,40	1,06
	2	4	0,94***	0,13	0,000	0,59	1,28
	3	4	0,21	0,09	0,15	-0,04	0,45
2	1	2	-0,24	0,11	0,17	-0,53	0,05
	1	3	0,51***	0,12	0,000	0,19	0,82
	1	4	0,75***	0,12	0,000	0,43	1,07
	2	3	0,74***	0,12	0,000	0,43	1,06
	2	4	0,99***	0,11	0,000	0,70	1,27
	3	4	0,24	0,10	0,10	-0,03	0,51
3	1	2	0,14	0,10	0,89	-0,12	0,40
	1	3	0,56***	0,10	0,000	0,30	0,82
	1	4	0,51***	0,09	0,000	0,27	0,76
	2	3	0,42***	0,10	0,000	0,15	0,70
	2	4	0,37**	0,11	0,003	0,09	0,65
	3	4	-0,05	0,09	1,00	-0,29	0,19

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.
[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.
Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Ahora hay que interpretar los efectos significativos de interacción descritos entre los factores tipo de operación y tipo de número, desde el punto de vista de cómo afecta el tipo de operación a la comparación entre los ítems con distintos tipos de número. Para ello se recurre de nuevo a las pruebas de contrastes intrasujetos (Tablas 4.9 y 4.10). De todas las situaciones de interacción comentadas en apartados anteriores, se ignoran aquí las que no tienen interés desde el punto de vista de la comparación de tipos de número[243]. La situación de interacción de mayor interés se da entre los niveles 2 y 3 del factor operación y los niveles 3 y 4 del factor número ($F = 3{,}96$; $p = 0{,}049$; ver Tabla 5.9 y Figura 5.21). Al pasar de la división A a la división de tipo B, los ítems con números decimales menores que 1 (pero mayores que 0,1) aumentan en dificultad, al contrario que los ítems con decimales menores que 0,1, que disminuyen en dificultad, produciéndose una situación de interacción cruzada. Esta situación de interacción cruzada se produce tanto en los ítems impares como en los pares (Figuras 4.27 y 4.28 respectivamente). Sin embargo, pese a que, tanto en los ítems impares como en los pares, para la división B, la media de los ítems con números decimales menores que 1 resulta inferior a la media de los decimales menores que 0,1, esta situación solo se produce en el curso 2. En todos los demás cursos, para las divisiones de tipo B, los decimales menores que 0,1 resultan más difíciles que los menores que 1 (y mayores que 0,1)[244].

[243] Por ejemplo, la situación de interacción con mayor significación y con un tamaño de efecto mayor en esta investigación ($F = 21{,}49$; $p < 0{,}001$; $\eta^2 = 0{,}15$; pot. = 1; ver Tabla 5.9) no tiene gran interés desde el punto de vista de la comparación de los tipos de número. Es una interacción que se produce entre los niveles 2 y 4 del tipo de número y los niveles 2 y 3 del tipo de operación. Esta interacción es ordinal y, tanto para las divisiones de tipo A como para las divisiones de tipo B, las puntuaciones medias de los ítems con números decimales mayores que 1 permanecen muy por encima de las puntuaciones de los ítems con decimales menores que 0,1. Esta interacción ha resultado fundamental al comparar tipos de operaciones, pues afecta a la comparación entre los dos tipos de división en distintos niveles del factor "tipo de número", pero no tiene gran relevancia ahora. Una situación parecida la puede verse entre los niveles 2 y 3 del factor número y los niveles 2 y 3 del factor operación ($F = 4{,}44$; $p = 0{,}04$; ver Tabla 5.10 y Figura 5.21). Aquí, al pasar de las divisiones de tipo A a las de tipo B, la dificultad de los ítems con números decimales mayores que 1 aumenta mucho más que la dificultad de los ítems con decimales menores que 1, dando lugar a otra interacción ordinal, pues los ítems con números decimales menores que 1 se mantienen siempre por encima, en dificultad, de los ítems con decimales mayores que 1.

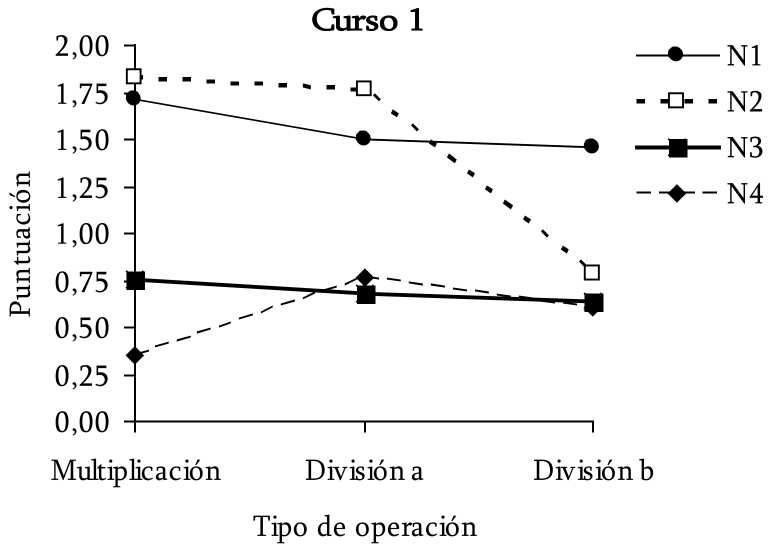


Figura 5.22. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Curso 1.

4.3.1. Interacción entre las variables número y operación en función del curso

En el análisis de varianza, se ha encontrado un efecto de interacción triple de los factores número, operación y curso, con respecto a la variable dependiente puntuación ($F = 1{,}62$; $p = 0{,}03$)[245]. En las figuras 4.22 a 4.26 aparecen, para cada

[244] Lo que ocurre es que la diferencia para el curso 2, entre la media para la división B de los ítems con N3 y N4 es tan grande, en comparación con las diferencias correspondientes a los demás cursos, que al hacer las medias que incluyen a todos los cursos 'arrastran' la media general. La interacción que estoy estudiando, pese a resultar significativa con $p < 0{,}05$, tiene una significación baja ($p = 0{,}049$).

[245] Sin embargo, en los contrastes multivariados, esta interacción triple no resulta significativa ($F = 1{,}53$; $p = 0{,}053$; $\eta^2 = 0{,}07$; pot. $= 0{,}97$). Esta "posible" interacción triple interesa solo a efectos de conocer si las interacciones dobles O × N dependen o no del curso, aspecto que estudio con los contrastes intrasujetos y los gráficos de perfil.

curso, los gráficos de perfil correspondientes a las medias de las puntuaciones según el tipo de número y el tipo de operación.

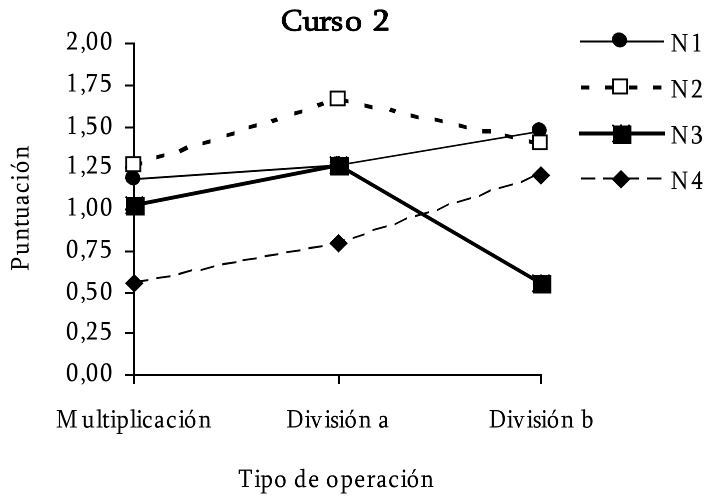


Figura 5.23. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Curso 2.

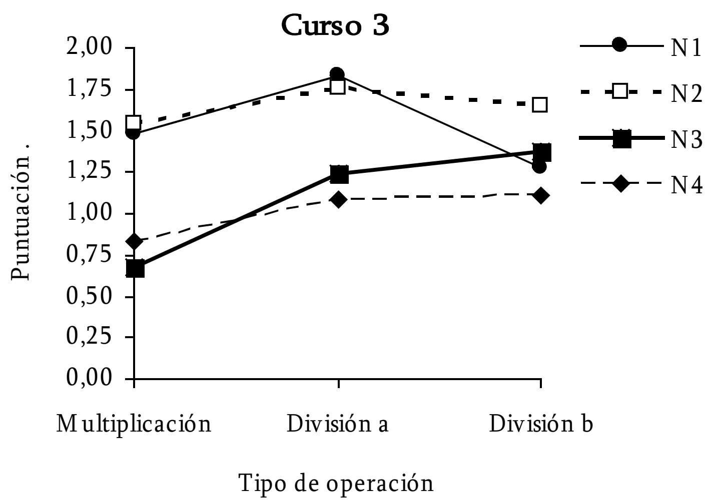


Figura 5.24. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Curso 3.

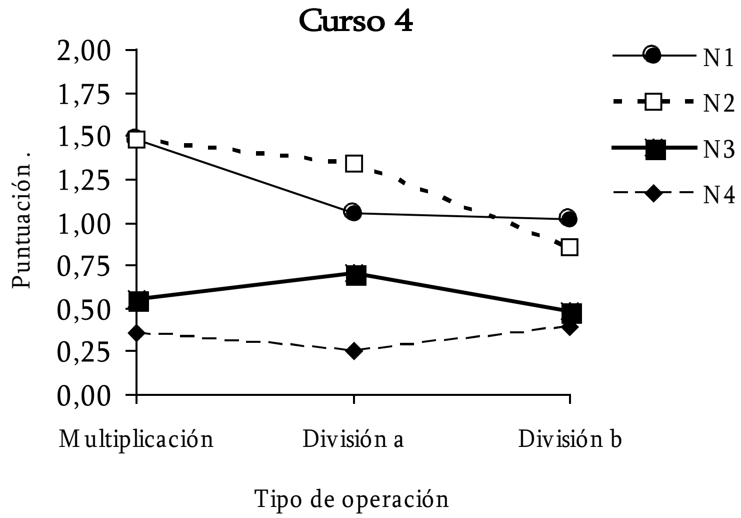


Figura 5.25. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Curso 4.

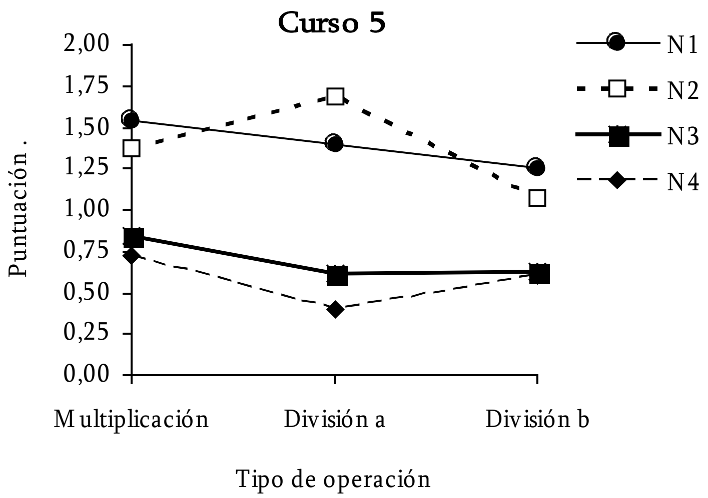


Figura 5.26. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Curso 5.

4.3.2. Interacción entre las variables número y operación en función de la mitad de la prueba de estimación

Se ha detectado, en el análisis de varianza, un efecto de interacción triple[246] entre los factores número, operación y mitad (F = 4,09; p = 0,001).

Tabla 5.31. *Medias de las puntuaciones según el tipo de operación, el tipo de número y la mitad del test (ítems pares o impares)*

	Multiplicación				División A				División B			
	Impares		Pares		Impares		Pares		Impares		Pares	
Número	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*	*M*	*S*
N_1	1,49	0,11	1,47	0,11	1,46	0,12	1,35	0,13	1,66	0,11	0,94	0,10
N_2	1,45	0,13	1,54	0,13	1,65	0,09	1,64	0,12	1,10	0,12	1,21	0,12
N_3	0,55	0,10	0,98	0,11	0,99	0,12	0,81	0,11	0,66	0,10	0,80	0,10
N_4	0,56	0,09	0,57	0,10	0,74	0,11	0,58	0,10	0,69	0,08	0,88	0,12

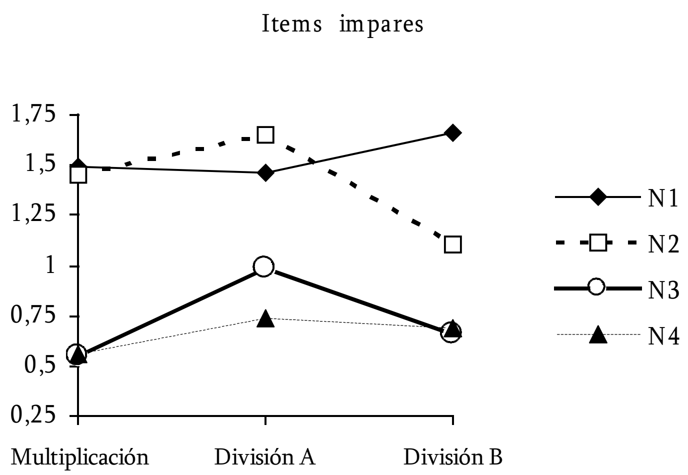


Figura 5.27. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Ítems impares.

En la Tabla 5.28 se muestran las medias de las puntuaciones por tipo de operación según sean los ítems impares o pares. Estos resultados aparecen reflejados en las Figuras 4.27 y 4.28. En ellas se ve un claro ejemplo del porqué

[246] Esta interacción triple aparece también en los contrastes multivariados (F = 3,77; p = 0,002).

de esta interacción triple. Por ejemplo, en los ítems impares (Figura 5.27) hay una clara situación de interacción entre los niveles 1 y 2 del factor número y los niveles 2 y 3 del factor operación. En la Figura 5.28, sin embargo, esta situación no se da. Se produce, pues, un cambio en la interacción de los factores operación y número, en función de la mitad de la prueba, que explica la interacción triple hallada.

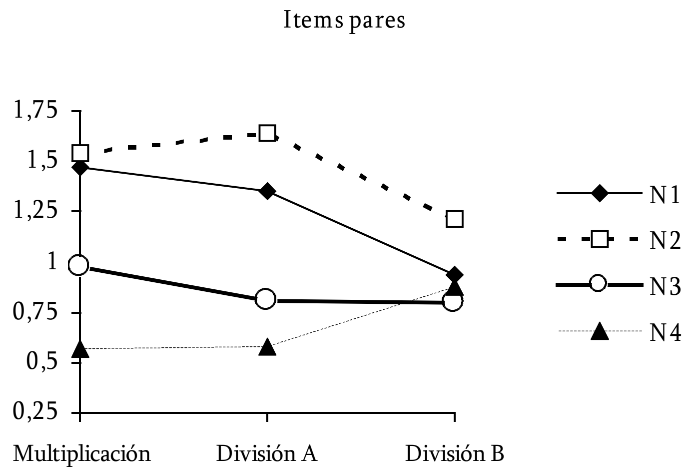


Figura 5.28. Puntuación en función del tipo de número y tipo de operación: Ítems pares.

4.3.3. Interacción entre las variables número y curso en función de la mitad de la prueba de estimación

Según las pruebas de efectos intrasujetos del análisis de varianza (Tabla 5.6), no se ha hallado efecto de interacción entre las variables número, curso y mitad, con respecto a la variable dependiente puntuación[247] (F = 1,72; p = 0,06).

En la Tabla 5.29 y en las Figuras 4.29 y 4.30 se vuelve a comparar la dificultad de los ítems de la prueba de estimación en función del tipo de número, a través de los distintos cursos y mitades del test.

[247] Es importante, en esta situación de ausencia de rechazo de la hipótesis nula, que la potencia de la prueba tenga un valor alto (pot. = 0,87).

Tabla 5.32. *Puntuación media para la variable Número, para cada Curso y Mitad del test*

Curso	*Número*	*Mitad*	*Media*	*SD*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	1	1	1,76	0,13	1,51	2,01
		2	1,35	0,14	1,09	1,62
	2	1	1,44	0,14	1,17	1,72
		2	1,49	0,16	1,17	1,80
	3	1	0,64	0,14	0,37	0,91
		2	0,75	0,14	0,47	1,02
	4	1	0,56	0,13	0,29	0,82
		2	0,60	0,14	0,33	0,86
2	1	1	1,49	0,17	1,16	1,82
		2	1,12	0,18	0,77	1,48
	2	1	1,42	0,18	1,06	1,78
		2	1,46	0,21	1,04	1,87
	3	1	0,79	0,18	0,44	1,14
		2	1,11	0,18	0,74	1,47
	4	1	0,83	0,18	0,48	1,17
		2	0,88	0,18	0,53	1,23
3	1	1	1,55	0,15	1,25	1,85
		2	1,51	0,16	1,19	1,83
	2	1	1,35	0,17	1,02	1,68
		2	1,96	0,19	1,58	2,34
	3	1	1,13	0,16	0,81	1,45
		2	1,06	0,17	0,73	1,39
	4	1	1,06	0,16	0,74	1,38
		2	0,96	0,16	0,64	1,28
4	1	1	1,33	0,16	1,03	1,64
		2	1,03	0,17	0,70	1,36
	2	1	1,39	0,17	1,06	1,73
		2	1,06	0,20	0,67	1,45
	3	1	0,42	0,17	0,10	0,75
		2	0,73	0,17	0,39	1,07
	4	1	0,32	0,16	-0,01	0,64
		2	0,35	0,17	0,02	0,68
5	1	1	1,54	0,13	1,29	1,79
		2	1,26	0,13	0,99	1,52
	2	1	1,39	0,14	1,12	1,66
		2	1,36	0,16	1,05	1,68
	3	1	0,70	0,13	0,43	0,96
		2	0,70	0,14	0,42	0,97
	4	1	0,56	0,13	0,30	0,82
		2	0,59	0,13	0,33	0,85

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

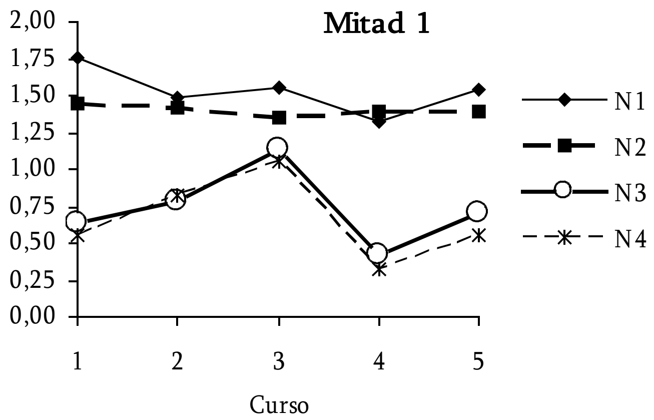


Figura 5.29. Puntuación en función del tipo de número y curso: Ítems impares.

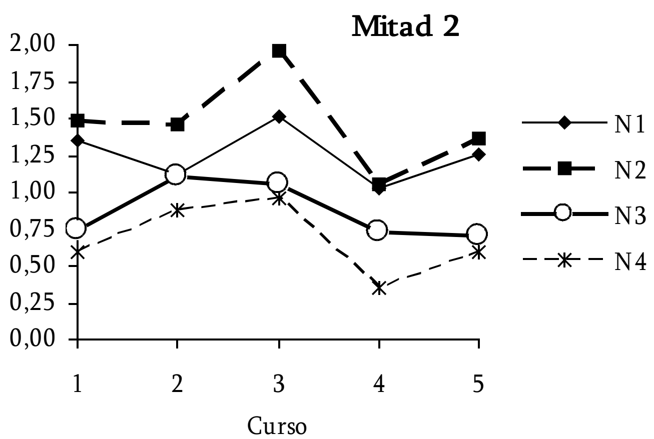


Figura 5.30. Puntuación en función del tipo de número y curso: Ítems pares.

5. ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE OTROS FACTORES SOBRE LA PUNTUACIÓN

Este apartado se dedica al estudio de la influencia de los factores “Curso” y “Mitad” sobre la variable dependiente puntuación. El estudio de los resultados por “Curso” dará una idea de hasta qué punto los resultados del presente trabajo pueden generalizarse a otro tipo de alumnos. El estudio de la variable Mitad será relevante para discutir la fiabilidad de la prueba de estimación para detectar los efectos hipotetizados de los factores principales (operación y número) del diseño.

5.1. Influencia de la variable curso sobre la puntuación

Los 131 alumnos de magisterio participantes en la investigación, se distribuyen por grupos según se indica en la Tabla 5.30. La Tabla 5.31 proporciona los estadísticos descriptivos para la variable “puntuación” desglosados según el curso y el la Figura 5.31 se representan las medias de las puntuaciones para cada curso.

Tabla 5.33. *Características de los cursos participantes*

Curso	*N*	*Institución*	*Curso y Especialidad*	*Turno*	*¿Enseñanza de estimación?*
1	33	CSEU La Salle	1º E. Primaria, L. Extranjera y E. Musical	Mañana	Sí
2	19	CSEU La Salle	3º E. Primaria	Mañana	Sí
3	23	U. de Granada	E. Primaria	Mañana	No
4	22	CSEU La Salle	1º E. Infantil	Tarde	No
5	34	CSEU La Salle	1º E. Infantil	Mañana	No

Con respecto a la hipótesis estadística H_{05} de la investigación (No hay efecto significativo del factor intersujetos *Curso* sobre la variable dependiente *Puntuación*), la decisión, según los resultados de las pruebas de efectos intersujetos (ver Tabla 5.8), es de rechazarla (F = 2,56; p = 0,04).

Tabla 5.34. *Media de las puntuaciones por curso*

Curso	*N*	*M*	*SD*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	33	1,07	0,09	0,89	1,26
2	19	1,14	0,12	0,89	1,38
3	23	1,32	0,11	1,10	1,54
4	22	0,83	0,11	0,61	1,06
5	34	1,01	0,09	0,83	1,19

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

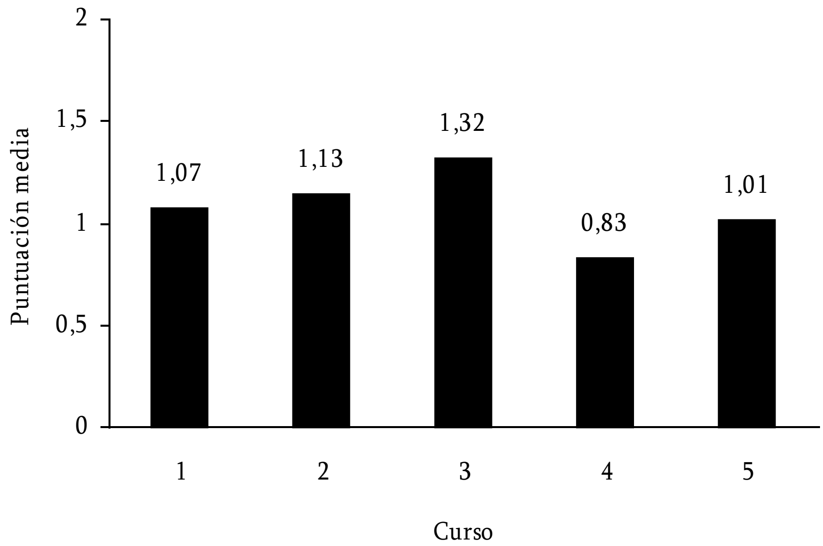


Figura 5.31. Puntuación media en la prueba de estimación por curso.

Para ver entre qué niveles del factor intersujetos "Curso" se producen diferencias significativas en las puntuaciones, se recurre a las comparaciones por pares (Tabla 5.32). La única diferencia significativa (p = 0,03) se da entre los niveles 3 y 4 del factor "Curso". Según estas comparaciones, los alumnos del grupo de estudiantes de magisterio de Educación Primaria, del turno de mañana, de la Facultad de Educación de Granada, que ha participado en la investigación, son mejores estimadores que los alumnos de La Salle de

Educación Infantil del turno de tarde. Los alumnos del curso 3 son estudiantes de la universidad pública, del turno de mañana, y de Educación Primaria. Los alumnos del curso 4 son estudiantes de un centro privado, del turno de tarde y de Educación Infantil[248].

Tabla 5.35. *Comparaciones por pares para las medias de la variable 'Curso'*

Curso	Curso	*Diferencia*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	2	-0,06	0,15	1,00	-0,50	0,38
1	3	-0,25	0,15	0,89	-0,66	0,17
1	4	0,24	0,15	1,00	-0,18	0,66
1	5	0,06	0,13	1,00	-0,31	0,43
2	3	-0,19	0,17	1,00	-0,66	0,29
2	4	0,31	0,17	0,69	-0,17	0,78
2	5	0,13	0,15	1,00	-0,31	0,56
3	4	0,49*	0,16	0,03	0,04	0,95
3	5	0,31	0,14	0,33	-0,10	0,72
4	5	-0,18	0,15	1,00	-0,60	0,24

* $p < 0,05$.

[a] Intervalo de confianza al 95 % para diferencia.

Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Tabla 5.36. *Estadísticos descriptivos de la variable puntuación según la mitad del test (ítems pares o impares) para cada curso*

	Ítems impares		Ítems pares	
Curso	*M*	*SD*	*M*	*SD*
1	1,10	0,09	1,05	0,11
2	1,13	0,12	1,14	0,14
3	1,27	0,11	1,37	0,13
4	0,87	0,12	0,79	0,13
5	1,05	0,09	0,98	0,10

Por último, según los resultados de la Tabla 5.6, se decide no rechazar la hipótesis de ausencia de efecto de interacción entre los factores Curso y Mitad

[248] Estas son las tres variables fundamentales que, a mi juicio, pueden explicar mejor la diferencia encontrada en la puntuación para estos dos grupos.

con respecto a la variable dependiente "puntuación" (F = 0,74; p = 0,57). En la Tabla 5.33 figuran los estadísticos descriptivos para la puntuación según el curso y la mitad de la prueba de estimación y en la Figura 4,32 se muestra el gráfico correspondiente a las puntuaciones medias para ítems pares e impares según el curso. En esta figura se observa la ausencia de efecto de interacción indicado, que se manifiesta gráficamente al ver que no importa qué mitad de la prueba se utilice para establecer el orden entre los cursos.

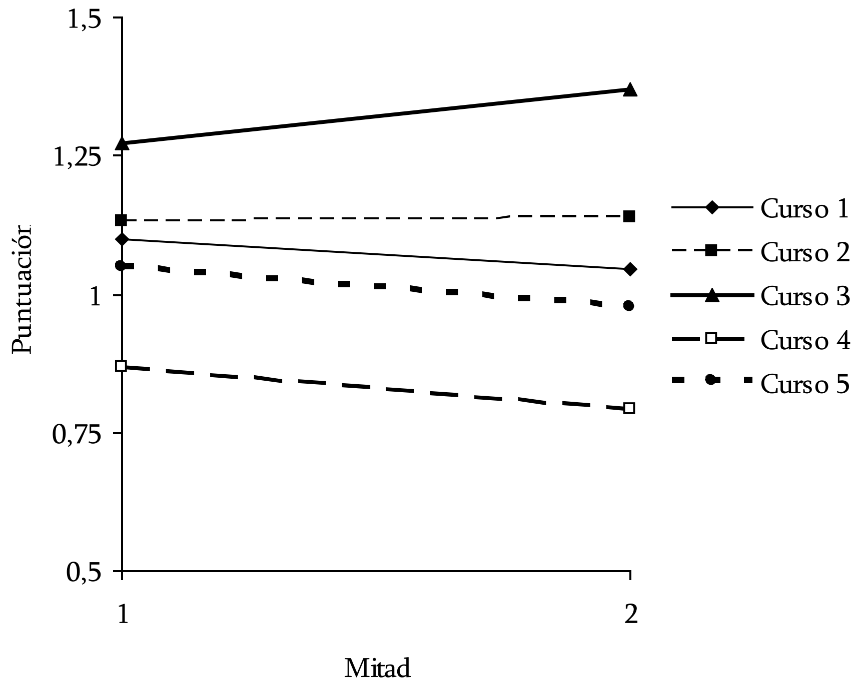


Figura 5.32. Puntuación media en función del curso y de la mitad del test.

5.2. Fiabilidad de la prueba: Influencia de la variable mitad sobre la puntuación

El diseño de la prueba de estimación está hecho de modo que cada tipo de ítem aparezca dos veces. Cada ítem impar de la prueba se ha diseñado como equivalente al siguiente ítem.

Así, la fiabilidad de la prueba depende de que no haya efecto significativo del factor "Mitad" sobre la puntuación ni efecto de interacción de los principales factores del diseño (tipo de operación y tipo de número) con el factor "mitad" sobre la puntuación. La hipótesis H_{04} (No hay efecto significativo del factor intrasujetos *Mitad* sobre la variable *Puntuación*) no se rechaza ($F = 0,25$; $p = 0,62$)[249]. Por el contrario, sí se ha encontrado un efecto significativo de interacción del factor mitad con los factores operación y número, que ya ha sido explicado con detalle en apartados anteriores.

En la Tabla 5.34 figuran los estadísticos descriptivos para la variable puntuación según sean los ítems pares o impares y en la Tabla 5.35, las comparaciones por pares[250] para las medias de la variable "mitad".

Tabla 5.37. *Estadísticos descriptivos de la variable puntuación según la mitad del test (ítems pares o impares)*

Mitad	Media	Error típico	Límite inferior*	Límite superior
1	1,08	0,05	0,99	1,18
2	1,07	0,05	0,96	1,17

*Intervalo de confianza al 95%.

Tabla 5.38. *Comparaciones por pares para las medias de la variable Mitad*

Mitad	Mitad	*Diferencia*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	2	0,02	0,04	0,62	-0,06	0,09
2	1	-0,02	0,04	0,62	-0,09	0,06

[a] Intervalo de confianza al 95 % para diferencia.

Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

[249] La potencia de la prueba es muy baja (pot. = 0,002) de modo que la ausencia de rechazo no implica, en este caso, una afirmación de la hipótesis alternativa. Por otra parte, en este caso, dado que el factor "Mitad" tiene solo dos niveles, los resultados de los contrastes multivariados coinciden con los arrojados por la opción univariante del análisis de la varianza.

[250] Aunque las diferencias no serán significativas, dado que no he rechazado la hipótesis de ausencia de efecto del factor "Mitad" sobre la puntuación.

Tabla 5.39. *Medias de las puntuaciones para cada ítem de la prueba de estimación*

Ítem	*M*	*SD*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	1,49	0,11	1,26	1,71
2	1,47	0,11	1,26	1,69
3	1,46	0,12	1,22	1,70
4	1,35	0,13	1,10	1,60
5	1,66	0,11	1,44	1,87
6	0,94	0,09	0,76	1,12
7	1,45	0,13	1,20	1,71
8	1,54	0,13	1,28	1,81
9	1,65	0,09	1,47	1,83
10	1,64	0,12	1,40	1,88
11	1,10	0,12	0,87	1,33
12	1,21	0,12	0,97	1,45
13	0,55	0,10	0,36	0,75
14	0,98	0,11	0,77	1,20
15	0,99	0,12	0,76	1,22
16	0,81	0,11	0,60	1,03
17	0,66	0,10	0,47	0,86
18	0,80	0,10	0,61	1,00
19	0,56	0,09	0,37	0,75
20	0,57	0,10	0,37	0,76
21	0,74	0,11	0,53	0,95
22	0,58	0,10	0,38	0,78
23	0,69	0,08	0,53	0,86
24	0,88	0,12	0,65	1,11

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

5.3. Análisis individual de los ítems de la prueba de estimación

En este apartado, voy a comparar cada uno de los ítems impares de la prueba de estimación con su siguiente ítem en la prueba. El objetivo de este análisis es comprobar cuáles de los ítems tomados en este trabajo como equivalentes lo son realmente y cuáles no. En posteriores capítulos, al estudiar las estrategias utilizadas por los alumnos y los errores que cometen, se tratará de profundizar en las causas de las diferencias entre ítems considerados equivalentes. En la Tabla 5.36 aparecen las medias e intervalos de confianza de las puntuaciones correspondientes a cada uno de los ítems de la prueba de estimación.

En la Figura 5.33 aparece cada uno de los ítems impares de la prueba comparado con el ítem siguiente, al cual se supone que es equivalente, según el diseño de la investigación. Se advierten un par de situaciones, en los ítems 5 y 6 y en los ítems 13 y 14, en los que parece no cumplirse tal equivalencia. En todos los demás casos, parece razonable mantener que la puntuación media no difiere demasiado. Al analizar los intervalos de confianza en la Tabla 5.36 se observa que los casos anteriormente señalados son los únicos en los que las intersecciones de los intervalos de confianza al 95% son vacías.

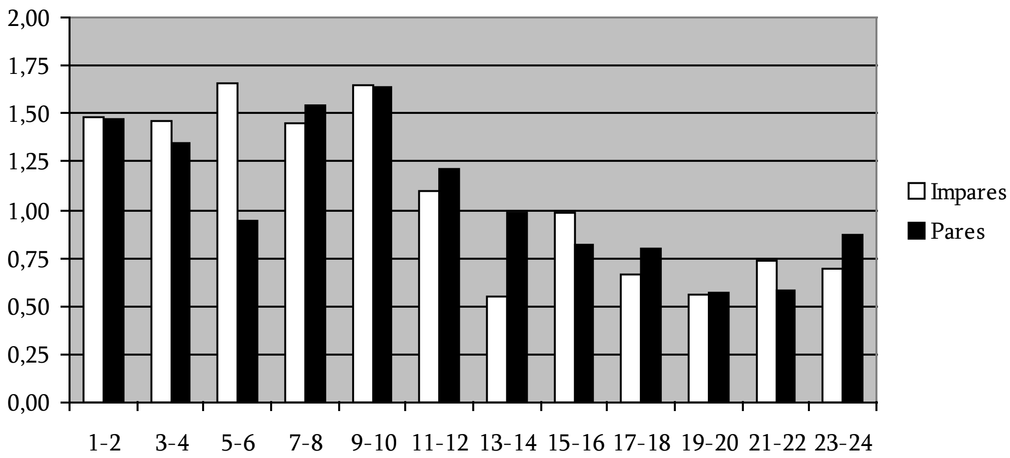


Figura 5.33. Puntuación media para cada ítem de la prueba de estimación.

Para ver cuáles de estas diferencias son significativas voy a recurrir a los contrastes intrasujetos de un análisis de varianza, con la puntuación como variable dependiente, un solo factor intrasujetos (*Ítem*, con 24 niveles) y el Curso como factor intersujetos. En esta situación, los contrastes intrasujetos (con la opción de comparación de los niveles consecutivos de cada factor) dan la información que aparece en la Tabla 5.37. Los resultados de esta tabla corroboran la impresión producida por la observación del diagrama de barras y la información obtenida de los intervalos de confianza. En efecto, las diferencias entre los niveles 5 y 6 de la variable Ítem (F = 28,58; p < 0,0005) y entre los niveles 13 y 14 (F = 11,34; p = 0,001) son las únicas significativas al hacer las comparaciones entre cada ítem impar y el siguiente (ítems considerados paralelos en la prueba de estimación). Estas diferencias significativas se producen en todos los cursos, pues la única interacción significativa de ítem × curso se produce para los ítems 9 y 10 de la prueba (F = 3,51; p = 0,009).

El Apéndice E está dedicado al análisis de las estimaciones dadas por los alumnos para cada uno de los ítems de la prueba de estimación. En el capítulo de conclusiones, se tratará de explicar esta diferencia de dificultad no prevista en el diseño de la investigación. Esta explicación requiere del análisis de las estrategias que emplean los alumnos para producir sus estimaciones, tema que será abordado en el capítulo siguiente.

Tabla 5.40. *Prueba de contrastes intrasujetos*

Fuente	*Ítem*	*SC*	*gl.*	*MC*	*F*	*p*	η^2	*Pot.* [a]
Ítem	n.1-n.2	0,02	1	0,02	0,01	0,91	0,00	0,05
	n.3-n.4	1,52	1	1,52	0,46	0,50	0,004	0,10
	n.5-n.6	63,93	1	63,93	28,58***	0,000	0,19	1,00
	n.7-n.8	0,96	1	0,96	0,39	0,53	0,003	0,10
	n.9-n.10	0,01	1	0,01	0,01	0,94	0,000	0,05
	n.11-n.12	1,63	1	1,63	0,55	0,46	0,004	0,11
	n.13-n.14	22,89	1	22,89	11,34**	0,001	0,08	0,92
	n.15-n.16	3,77	1	3,77	2,10	0,15	0,02	0,30
	n.17-n.18	2,41	1	2,41	1,43	0,23	0,01	0,22
	n.19-n.20	0,004	1	0,004	0,003	0,96	0,000	0,05
	n.21-n.22	3,17	1	3,17	2,48	0,12	0,02	0,35
	n.23-n.24	4,25	1	4,25	2,25	0,14	0,02	0,32
Ítem × Curso	n.1-n.2	13,31	4	3,33	1,67	0,16	0,05	0,50
	n.3-n.4	7,01	4	1,75	0,53	0,72	0,02	0,17
	n.5-n.6	14,27	4	3,57	1,60	0,18	0,05	0,48
	n.7-n.8	2,97	4	0,74	0,30	0,88	0,01	0,12

Tabla 5.37. (Continuación) *Prueba de contrastes intrasujetos*

Fuente	*Ítem*	*SC*	*gl.*	*MC*	*F*	*p*	η^2	*Pot.* [a]
	n.9-n.10	27,39	4	6,85	3,51**	0,009	0,10	0,85
	n.11-n.12	27,87	4	6,97	2,36	0,06	0,07	0,67
	n.13-n.14	9,77	4	2,44	1,21	0,31	0,04	0,37
	n.15-n.16	12,89	4	3,22	1,80	0,13	0,05	0,54
	n.17-n.18	3,80	4	0,95	0,56	0,69	0,02	0,18
	n.19-n.20	1,25	4	0,31	0,21	0,93	0,007	0,10
	n.21-n.22	3,00	4	0,75	0,59	0,67	0,02	0,19
	n.23-n.24	1,83	4	0,45	0,24	0,91	0,008	0,10
Error(ítem)	n.1-n.2	250,66	126	1,99				
	n.3-n.4	417,94	126	3,32				
	n.5-n.6	281,83	126	2,24				
	n.7-n.8	309,93	126	2,46				
	n.9-n.10	245,54	126	1,95				
	n.11-n.12	371,64	126	2,95				
	n.13-n.14	254,43	126	2,02				
	n.15-n.16	225,69	126	1,79				
	n.17-n.18	212,25	126	1,69				
	n.19-n.20	183,74	126	1,46				
	n.21-n.22	161,25	126	1,28				
	n.23-n.24	238,40	126	1,89				

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.
[a] Calculado con alfa = 0,05.

6. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE VARIANZA PARA LA VARIABLE DEPENDIENTE TIEMPO DE RESPUESTA

En este último apartado del capítulo 4 se presenta una selección de los resultados obtenidos al realizar con la variable dependiente *tiempo de respuesta* el mismo análisis que he realizado previamente con la variable *puntuación*. Dado que el *tiempo de respuesta* no pudo ser incluido como covariable en el diseño, y dada la mayor importancia para estudio de la variable *puntuación*, solamente informaré de los resultados más llamativos[251].

[251] Una vez excluida la posibilidad de incluir el tiempo de respuesta como covariable en el diseño, siguen siendo de interés algunos resultados referentes al tiempo de respuesta. Sobre todo, hay ítems a los que los alumnos dedican bastante más tiempo que a otros y será interesante, en las conclusiones, tratar de relacionar este mayor tiempo de respuesta empleado en algunos ítems con las estrategias utilizadas con mayor frecuencia para producir una

Tabla 5.41. *Medias de los tiempos de respuesta para cada ítem de la prueba de estimación*

Ítem	*M*	*SD*	*Límite inferior**	*Límite superior*
1	63,6	4,8	54,0	73,1
2	55,6	3,4	48,9	62,3
3	62,7	4,6	53,6	71,8
4	58,8	3,0	52,9	64,7
5	57,1	5,0	47,3	66,9
6	54,3	3,6	47,2	61,4
7	52,1	3,4	45,4	58,8
8	52,7	4,1	44,6	60,8
9	62,4	4,3	53,8	71,0
10	63,6	4,6	54,6	72,7
11	57,1	4,7	47,9	66,4
12	63,2	4,6	54,0	72,3
13	62,2	4,6	53,0	71,4
14	60,0	4,9	50,2	69,7
15	52,1	4,5	43,3	61,0
16	48,9	3,7	41,6	56,3
17	55,4	4,3	46,9	63,9
18	60,9	5,5	49,9	71,8
19	87,5	5,9	75,9	99,2
20	90,8	7,9	75,1	106,4
21	67,2	5,5	56,2	78,2
22	73,6	6,1	61,6	85,6
23	50,4	3,7	43,1	57,6
24	55,1	4,2	46,9	63,3

* Límites para los intervalos de confianza al 95%.

La Tabla 5.38 muestra los estadísticos descriptivos, correspondientes a la variable dependiente Tiempo de respuesta, para cada ítem de la prueba de estimación. Se ha optado, en la Figura 5.34, por emparejar cada ítem impar con el ítem siguiente[252].

estimación para dicho ítem.

[252] La prueba de estimación se diseñó de modo que cada ítem impar fuese del mismo tipo que el siguiente, y que, con excepción de los ítems 5 y 6, y 13 y 14, no se ha encontrado diferencia significativa de dificultad entre los demás pares de ítems. En la Figura 5.34 puede verse que

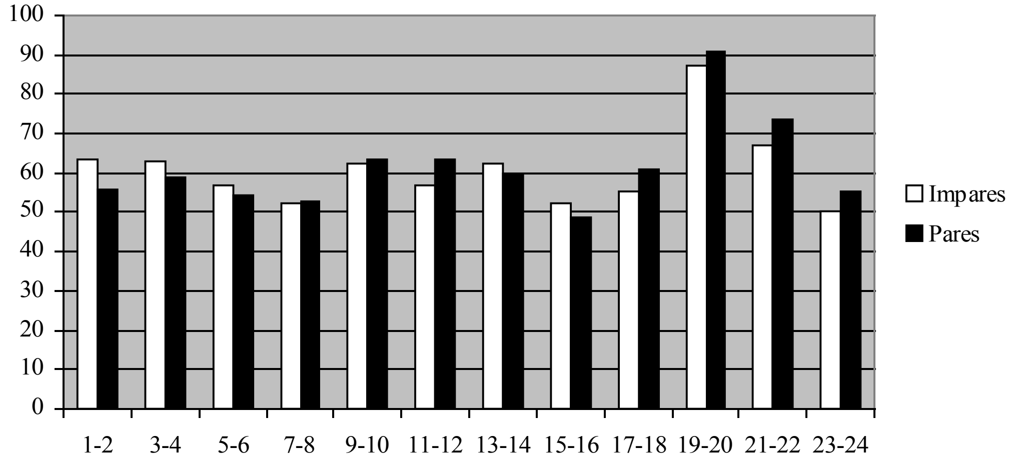


Figura 5.34. Medias de los tiempos de respuesta para cada ítem de la prueba.

6.1. Resultados generales del análisis de varianza para la variable dependiente tiempo de respuesta

En la Tabla 5.39 figuran los resultados generales del análisis de varianza para la variable dependiente *Tiempo de respuesta*. Existe un efecto significativo del factor *Operación* sobre el *Tiempo de respuesta* (F = 7,24; p = 0,001). También hay un efecto significativo del factor *Tipo de número* sobre el *Tiempo de respuesta* (F = 11,36; p < 0,001). Finalmente, hay un efecto significativo de interacción entre los factores *Operación* y *Número* sobre el *Tiempo de respuesta* (F = 11,02; p < 0,001). En esta situación, será necesario realizar el análisis de la interacción previamente a la consideración de los efectos principales.

Los contrastes multivariados ofrecen unos resultados iguales a los de la opción univariada[253]. Las pruebas de efectos intersujetos muestran que no ha habido efecto significativo del factor *Curso* sobre la variable dependiente *Tiempo de*

cada par de ítems consecutivos tiene un tiempo medio de respuesta bastante similar.

[253] En ellos se detectan exactamente los mismos tres efectos significativos de factores sobre el tiempo de respuesta: El factor *Operación* (F = 7,40; p = 0,001), el factor *Número* (F = 9,32; p < 0,001) y el efecto de interacción de los factores *Operación* × *Número* (F = 11,14; p < 0,001).

respuesta (F = 1,77; p = 0,14).

Tabla 5.42. *Análisis de varianza correspondiente a la variable dependiente "tiempo de respuesta" para la prueba de estimación*[254]

Fuente	*SC*	*gl*	*MC*	F	*p*	η^2	Pot. [a]
Operación (O)	37384,79	1,87	20020,26	7,24**	0,001	0,05	0,92
O × Curso	41074,21	7,47	5499,00	1,99	0,05	0,06	0,79
Error (O)	650869,48	235,29	2766,29				
Número (N)	86246,13	3	28748,71	11,36***	0,000	0,08	1,00
N × Curso	41613,28	12	3467,77	1,37	0,18	0,04	0,76
Error (N)	956426,31	378	2530,23				
N × O	155278,27	4,78	32516,59	11,02***	0,000	0,08	1,00
N × O × Curso	76696,52	19,10	4015,23	1,36	0,14	0,04	0,90
Error (N × O)	1775076,30	601,70	2950,13				
Mitad (M)	2049,72	1	2049,72	0,83	0,36	0,01	0,15
M × Curso	22496,38	4	5624,09	2,28	0,06	0,07	0,65
Error (M)	310623,86	126	2465,27				
N × M	17484,74	2,54	6882,59	2,44	0,08	0,02	0,56
N × M × Curso	52355,69	10,16	5152,25	1,83	0,05	0,06	0,85
Error (N × M)	902961,03	320,09	2820,92				
O × M	3707,14	2	1853,57	0,99	0,38	0,01	0,22
O × M × Curso	18972,27	8	2371,53	1,26	0,26	0,04	0,58
Error (O × M)	473796,61	252	1880,15				

* p < 0,05; ** p < 0,01; *** p < 0,001.
Nota. η^2 es el tamaño del efecto.
[a] Calculada con α = 0,05.

6.2. Estudio de la influencia del factor operación sobre la variable dependiente tiempo de respuesta

Los estadísticos descriptivos correspondientes a los tiempos de respuesta según

[254] La prueba de esfericidad de Mauchy para la variable *tiempo de respuesta* da, para el *factor tipo de operación*, unos valores de (W = 0,93; p = 0,01; ε = 0,93); para el factor *tipo de número* (W = 0,95; p = 0,24) y para *operación* × *número* (W = 0,51; p < 0,001; ε = 0,80). Esto supone que, ante el rechazo de la hipótesis de esfericidad, los grados de libertad para algunos de los factores e interacciones entre factores han sido multiplicados por el estadístico Epsilon de Greenhouse-Geiser para corregir las pruebas.

el *Tipo de operación*, aparecen en la Tabla 5.40 y están representados en la Figura 5.35. Dado que hay un efecto significativo del factor *Tipo de operación* sobre el *Tiempo de respuesta*, hay que recurrir a las comparaciones por pares, dentro de los niveles del factor *Operación*, para detectar las diferencias significativas entre niveles.

Tabla 5.43. *Medias de los tiempos de respuesta por tipo de operación*

Operación	*M*	*SD*	*Límite inferior**	*Límite superior*
Multiplicación	66,2	2,7	60,8	71,5
División A	61,3	2,3	56,7	65,9
División B	57,5	2,4	52,8	62,2

* Límites para los intervalos de confianza al 95%.

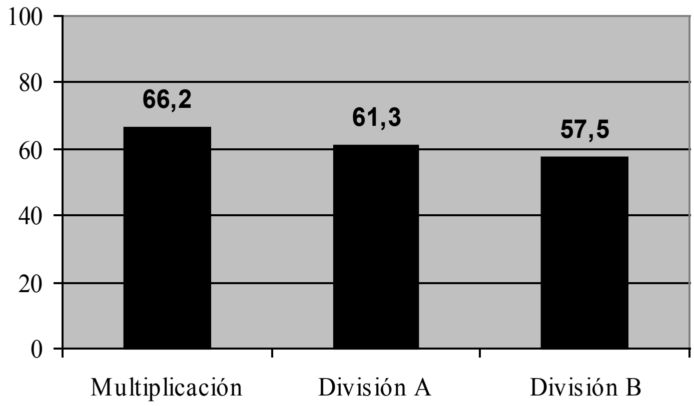


Figura 5.35. Medias de los tiempos de respuesta para cada tipo de operación.

En la Tabla 5.41 aparecen estas comparaciones por pares. La única diferencia significativa se produce entre los niveles 1 y 3 del factor *Operación*. La media de los Tiempos de respuesta para la multiplicación es significativamente mayor que la correspondiente a los ítems de división de tipo B (p = 0,001)[255].

[255] Este resultado es de especial interés en el contexto del diseño de esta investigación pues un elemento fundamental de la misma ha sido la diferenciación entre la división A y división B.

Tabla 5.44. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "tipo de operación"*

(I) Operación	(J) Operación	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	2	4,83	2,53	0,174	-1,30	10,96
1	3	8,66**	2,29	0,001	3,10	14,21
2	3	3,83	2,00	0,172	-1,02	8,67

** $p < 0,01$.

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

6.3. Estudio de la influencia del factor tipo de número sobre la variable dependiente tiempo de respuesta

Las medias de los tiempos de respuesta según el tipo de número pueden observarse en la Tabla 5.42 y en la Figura 5.36. En ellas se observa, a primera vista, que el tiempo medio de respuesta para los ítems con números decimales menores que 0,1 es llamativamente inferior a los correspondientes a los demás tipos de número.

Tabla 5.45. *Medias de los tiempos de respuesta por tipo de número*

Número	*M*	*SD*	*Límite inferior**	*Límite superior*
N_1	59,1	2,2	54,7	63,5
N_2	59,4	2,4	54,6	64,3
N_3	57,2	2,7	51,9	62,6
N_4	70,9	3,1	64,8	76,9

* Límites para los intervalos de confianza al 95%.

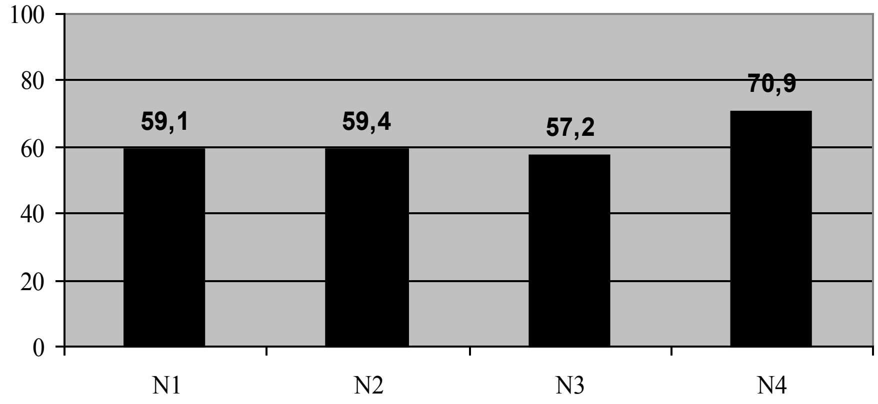


Figura 5.36. Medias de los tiempos de respuesta para cada tipo de número.

Dado que hay un efecto significativo de la variable 'Tipo de número' sobre el tiempo de respuesta, se procede a realizar las comparaciones por pares para los distintos niveles del factor tipo de número (Tabla 5.43). Se ha encontrado que la media del tiempo de respuesta para los ítems con números decimales menores que 0,1 es significativamente mayor que para los números naturales ($p < 0,001$), los números decimales mayores que 1 ($p = 0,001$) y que los números decimales menores que 1 pero mayores que 0,1 ($p < 0,001$).

Tabla 5.46. *Comparaciones por pares para los niveles de la variable "tipo de número"*

(I) Número	(J) Número	*Diferencia (I-J)*	*SD*	*p*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	2	-0,32	2,41	1,000	-6,77	6,14
1	3	1,86	2,51	1,000	-4,86	8,58
1	4	-11,76***	2,73	0,000	-19,08	-4,44
2	3	2,18	2,40	1,000	-4,26	8,61
2	4	-11,44**	2,84	0,001	-19,06	-3,82
3	4	-13,62***	2,71	0,000	-20,89	-6,35

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.
[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.
Nota. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Este es un resultado muy interesante en el presente trabajo pues uno de los aspectos que tenía mayor interés en el diseño de la investigación era establecer la distinción entre decimales menores que 1 pero mayores que 0,1 y los decimales menores que 0,1. Encontrar que la diferencia mayor en tiempos de respuesta se produce precisamente entre estos dos tipos de ítems ya es un resultado que justifica en gran medida esta distinción hecha en el diseño de la investigación.

6.4. Estudio de la influencia de la interacción entre los factores operación y número sobre la variable dependiente tiempo de respuesta

En la Tabla 5.44 aparecen medias y desviaciones típicas de los tiempos de respuesta a los ítems de la prueba según el tipo de operación y el tipo de número. Estas medias están representadas en las Figuras 4.37 y 4.38.

Tabla 5.47. *Medias de los tiempos de respuesta según el tipo de operación y el tipo de número*

	Multiplicación		División A		División B	
Tipo de número	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
N_1	60,7	3,2	60,9	3,0	55,7	3,1
N_2	52,6	3,1	63,6	3,6	62,1	3,6
N_3	62,9	3,8	50,3	3,0	58,5	4,1
N_4	88,4	5,1	70,5	4,3	53,6	3,2

En las comparaciones por pares[256] para cada *tipo de número* para los niveles del factor *operación*, se han encontrado diferencias significativas en los tiempos medios de respuesta para los ítems con números decimales mayores que 1, entre la multiplicación y la división A (p = 0,015). También para los números decimales menores que 1, entre la multiplicación y la división tipo A (p = 0,005). Por último, para los decimales menores que 0,1, se ha encontrado

[256] Empleando el ajuste para comparaciones múltiples de Bonferroni.

que el tiempo medio de respuesta a ítems de multiplicación es significativamente mayor al tiempo medio de los de división A (p = 0,009) y al de los de división B (p < 0,001). Además, para este tipo de números también ha habido diferencias significativas (p < 0,001) entre los ítems de división A y los de división B (ver Figura 5.37).

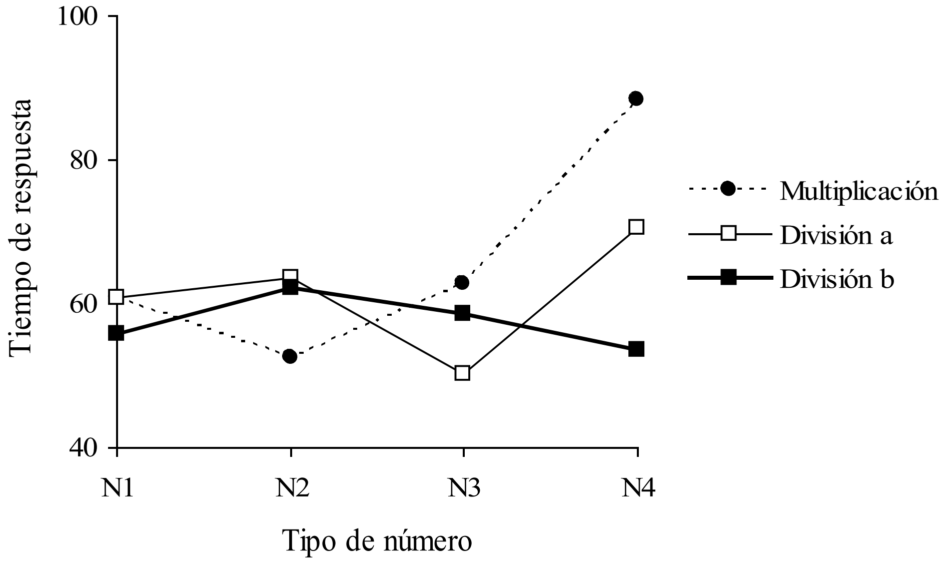


Figura 5.37. Tiempo medio de respuesta en función del tipo de operación y número.

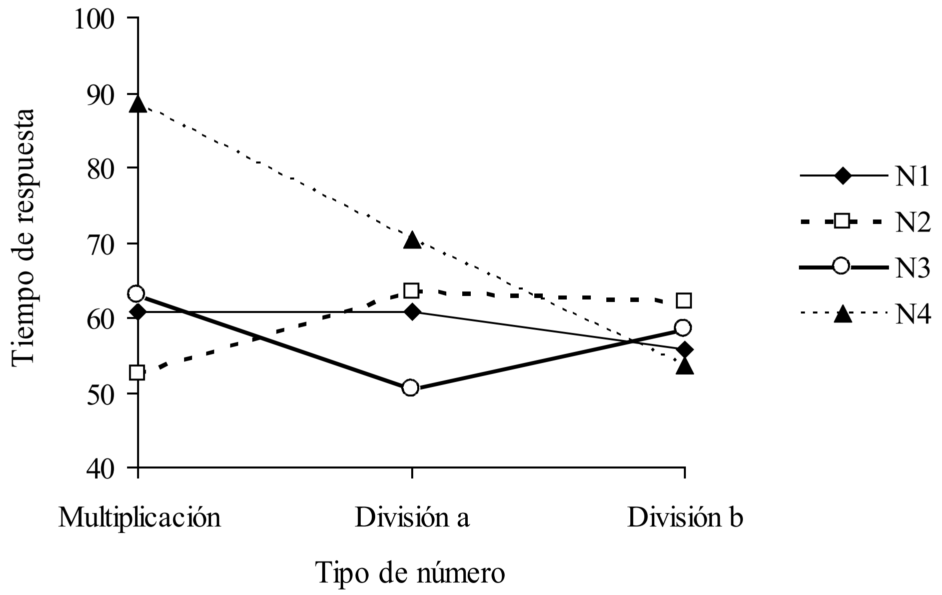


Figura 5.38. Tiempo medio de respuesta en función del tipo de número y operación.

Análogamente, se han realizado las comparaciones por pares, dentro de cada *tipo de operación*, para los niveles del factor *tipo de número*. En ellos, se encuentran solo diferencias significativas, dentro de la multiplicación y de la división de tipo A (ver Figura 5.38). En la multiplicación, los tiempos medios de respuesta para los ítems con números menores que 0,1 son mayores que los correspondientes a ítems con números naturales, a los que tienen decimales mayores que 1 y a los ítems con decimales menores que 1 (las tres diferencias tienen $p < 0{,}001$). La diferencia significativa también se produce en los ítems de división A entre los ítems con números decimales menores que 0,1 y los que tienen decimales menores que 1, pero mayores que 0,1. De nuevo, aquellos tienen un tiempo medio de respuesta superior a éstos ($p < 0{,}001$). Por último, también en ítems de división A, los ítems con números decimales menores que 1 tienen un tiempo medio de respuesta significativamente inferior a los ítems con números naturales ($p = 0{,}03$) y a los ítems con decimales mayores que 1 ($p = 0{,}005$).

6.5. Estudio de la influencia del factor 'Curso' sobre la variable dependiente 'Tiempo de respuesta'

En la Tabla 5.45 figuran las medias de los tiempos de respuesta por curso. Como se ha indicado, en los resultados generales del análisis de varianza, no se han encontrado diferencias significativas entre las medias de los distintos cursos.

Tabla 5.48. *Medias de los tiempos de respuesta por curso*

Curso	*N*	*M*	*SD*	*Límite inferior* [a]	*Límite superior*
1	33	59,5	4,0	51,5	67,5
2	19	60,8	5,3	50,3	71,4
3	23	72,5	4,8	62,9	82,1
4	22	58,6	4,9	48,8	68,4
5	34	56,9	4,0	49,0	64,8

[a] Límites para los intervalos de confianza al 95%.

En la Tabla 5.46 y en la Figura 5.39, en las que aparecen los tiempos medios de respuesta para cada *Curso* y *Tipo de operación*, se observa que, con alguna excepción, los tiempos medios de respuesta para los ítems de multiplicación suelen ser mayores que los correspondientes a los de división de tipo A y, estos, a su vez, mayores que los tiempos medios de respuesta a ítems de división B.

Tabla 5.49. *Estadísticos descriptivos de la variable Tiempo de respuesta según el tipo de operación y el curso*

	O_1		O_2		O_3	
Curso	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
1	57,4	5,2	63,5	4,5	57,5	4,6
2	63,0	6,9	59,3	5,9	60,2	6,0
3	82,9	6,3	70,1	5,4	64,4	5,5
4	61,9	6,4	57,3	5,5	56,7	5,6
5	65,5	5,2	56,5	4,4	48,6	4,5

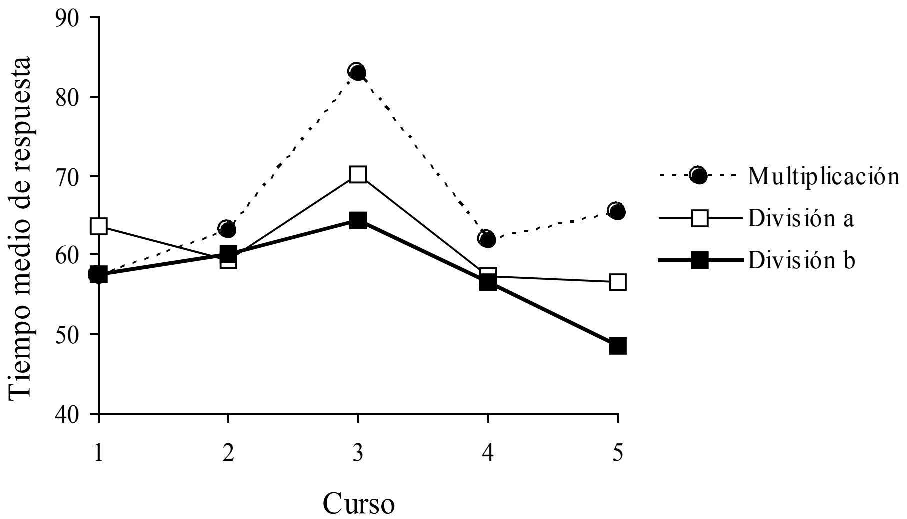


Figura 5.39. Medias de los tiempos de respuesta según el tipo de operación y el curso.

En la Tabla 5.47 aparecen los estadísticos descriptivos para la variable dependiente Tiempo de respuesta, según el tipo de número y el curso. Los tiempos medios de respuesta de esta tabla aparecen representados en la Figura 5.40. Uno de los resultados que aparecen destacados en esta Figura Es que los tiempos medios de respuesta para los ítems con números decimales menores que 0,1 son, para todos los cursos, mayores a los correspondientes a los demás tipos de número.

Tabla 5.50. *Estadísticos descriptivos de la variable Tiempo de respuesta según el tipo de número y el curso*

	N_1		N_2		N_3		N_4	
Curso	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
1	52,7	4,3	54,5	4,8	58,9	5,2	71,7	5,9
2	51,8	5,7	65,4	6,3	56,7	6,9	69,5	7,8
3	72,4	5,2	66,9	5,7	72,9	6,2	77,7	7,1
4	61,3	5,3	55,2	5,8	50,7	6,4	67,4	7,3
5	57,3	4,3	55,1	4,7	47,0	5,1	68,1	5,8

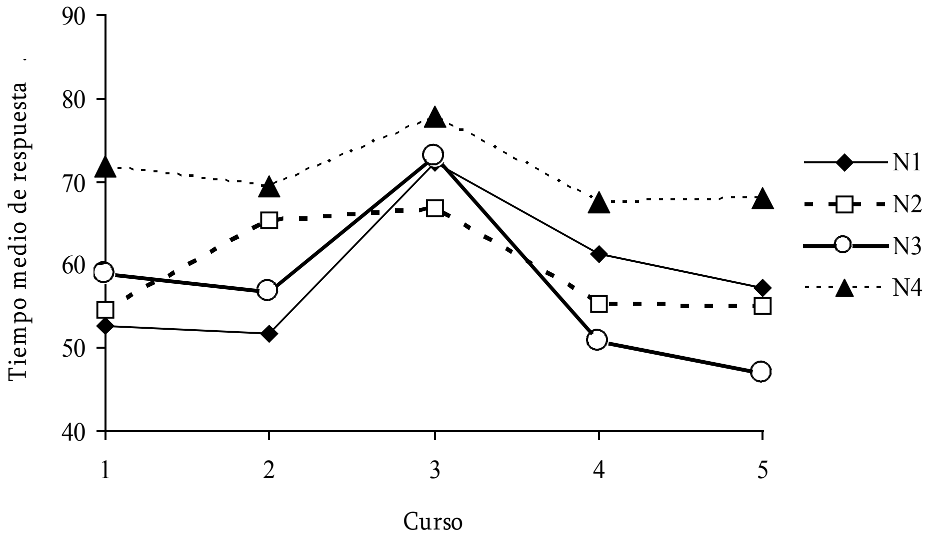


Figura 5.40. Medias de los tiempos de respuesta según el tipo de número y el curso.

6.6. Relación entre la puntuación media de los sujetos y su tiempo medio de respuesta

La Figura 5.41 muestra el gráfico de nube de puntos en el que aparecen representadas las medias de las puntuaciones y de los tiempos de respuesta de los 131 participantes en la investigación. Se ha calculado el coeficiente de correlación de Pearson ($r = 0,05$; $p = 0,54$). Con estos datos, no se puede rechazar la hipótesis de que el coeficiente de correlación sea 0. Por tanto, no se ha encontrado relación lineal entre las variables.

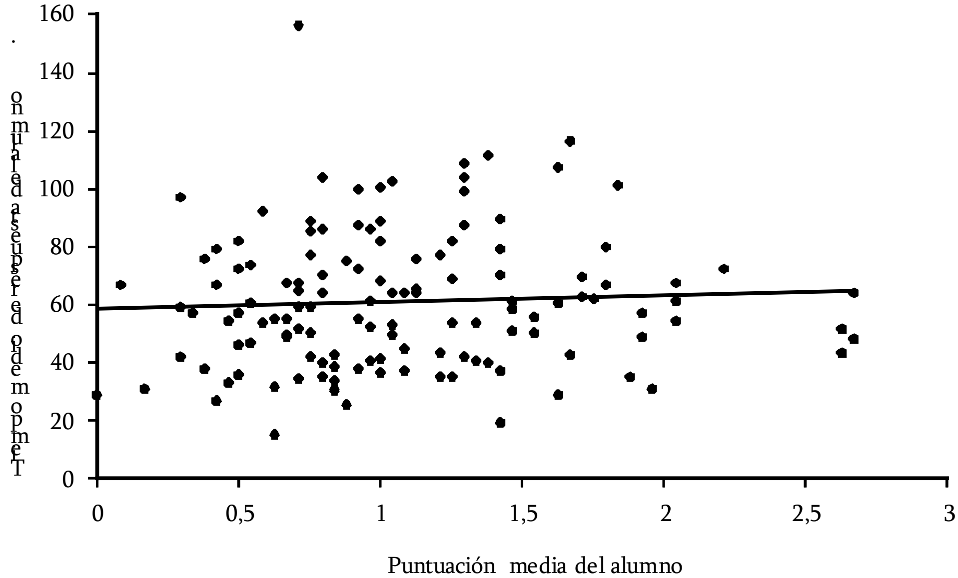


Figura 5.41. Gráfico de nube de puntos correspondiente a las puntuaciones medias de cada alumno y a sus tiempos medios de respuesta.

6.7. Relación entre la puntuación media de los ítems y su tiempo medio de respuesta

En la Figura 5.42 se observa la nube de puntos correspondiente a las puntuaciones medias de cada ítem y a los tiempos medios de respuesta correspondientes. El coeficiente de correlación de Pearson tiene un valor r = -0,33, con una significación p = 0,12. En este caso, como en el apartado anterior, se detecta una ausencia de relación lineal entre las variables.

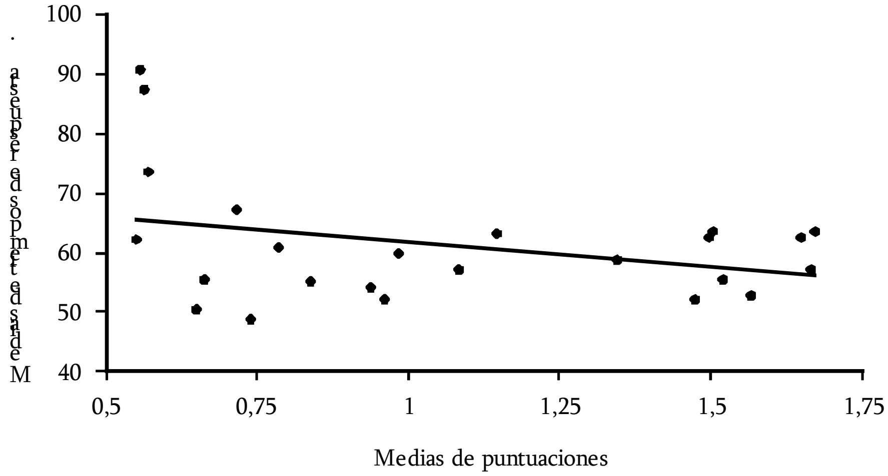


Figura 5.42. Gráfico de nube de puntos correspondiente a las puntuaciones medias de los ítems y a los tiempos medios de respuesta de cada ítem.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE DESTREZAS, CONOCIMIENTOS Y PROCESOS METACOGNITIVOS Y ESTRATEGIAS

Este capítulo está dividido en tres partes. En la primera, me voy a centrar en el estudio de dos variables fundamentales en la fase de cálculo: *El modo de determinar las cifras del resultado* y el *modo de operar la coma decimal*. Estas dos variables están condicionadas por las destrezas de aproximación[257], que se emplean en la fase de interpretación de los procesos de estimación. La segunda parte del capítulo está dedicada a los conocimientos y procesos metacognitivos, elementos clave para comprender cómo funcionan la selección, cambio, repetición... de destrezas, dentro de los procesos de estimación. En este sentido, uno de los objetivos de este trabajo es estudiar los procesos metacognitivos para lograr entender mejor algunos aspectos del pensamiento estratégico. Por último, la tercera parte del capítulo está enfocada al estudio de las estrategias de estimación, a su ejemplificación y a su representación en redes sistémicas de Bliss, Monk, y Obgorn (1983).

[257] Las destrezas de aproximación están muy bien descritas en Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), o en D'Hainaut (1978). Por esta razón, me limito a citar las distintas destrezas de aproximación dentro de las estrategias principales (como variantes de éstas), en el apartado dedicado a las estrategias.

1. Destrezas implicadas en los procesos de estimación

Si se entiende el proceso de estimar como la suma de un proceso inicial de aproximación, en el que se emplea una destreza de aproximación, seguido de un cálculo mental efectuado con números aproximados[258], hay que tener en cuenta que este cálculo mental suele realizarse con números acabados en uno o varios ceros o con números decimales. Esta situación hace que resulte interesante diferenciar dos procesos diferentes dentro del cálculo mental realizado con números aproximados: el cálculo mental que se realiza con las cifras significativas de cada número que se está operando y la determinación del valor posicional de las cifras del resultado de la operación.

Por ejemplo, para dar una estimación para el cálculo 347 × 566, normalmente se sustituye esta operación por otra como 300 × 500 (aplicando el truncamiento a ambos números) o 300 × 600 (aplicando el redondeo). En ambos casos, lo común es determinar las cifras significativas del resultado (en cada caso, 3 × 5 = 15 o 3 × 6 = 18) y después ajustar el valor posicional de estas cifras multiplicando por 10000 para obtener estimaciones de 150000 y 180000 respectivamente. Esta forma de operar se apoya en la descomposición factorial de los factores y a las propiedades asociativa y conmutativa del producto de números naturales:

$300 \times 500 = (3 \times 100) \times (5 \times 100) = \ldots = (3 \times 5) \times (100 \times 100)$

Antes de continuar, voy a definir "cifras significativas" y "valor posicional de un número".

[258] Y en algunos casos completado por una fase de evaluación del resultado, como planteo en el modelo teórico elaborado para este trabajo.

1.1. Cifras significativas y orden de magnitud de un número

El concepto de "cifras significativas" varía si se aplica a un número concreto[259] (a una cantidad) o a un número abstracto (un número). Por una parte, "cifras significativas" son las "cifras de un número concreto que son el resultado de una medición" (d'Hainaut, 1978, p. 46). Taylor (1997) matiza esta definición al señalar que todo proceso de medición da como resultado una medida que contiene cierto grado de incertidumbre. Así, la "afirmación de que x = 21 con dos cifras significativas quiere decir sin ambigüedades que x está más cerca de 21 que, tanto de 20 como de 22; así que, el número 21, con dos cifras significativas, significa 21 ± 0,5" (Taylor, 1997, p. 30).

Cuando en lugar de un número concreto se considera un número abstracto (que no viene acompañado por una unidad ni es resultado de una medición) el concepto de "cifras significativas" del número cambia bastante. En el caso del presente trabajo, en que no se emplean cantidades que provienen del resultado de una medición, y además los números con los que se calcula son el resultado de procesos de aproximación, interesa más la afirmación de D'Hainaut (1978): "Cuando se redondea, se reemplazan ciertas cifras por ceros; estos ceros no son cifras significativas" (p. 48). Por otra parte, el orden de magnitud de un número es el valor de este número redondeando al orden de su primera cifra significativa. El grado de aproximación de las destrezas (redondear o truncar al orden de la primera cifra significativa o de la segunda) influye decisivamente en el modo de determinar las cifras del resultado. Normalmente, los estimadores tratan de mantener el equilibrio entre estas dos variables. Si redondean los números al orden de su primera cifra significativa, la fase de

[259] El Diccionario de la Lengua Española (22ª edición) de la Real Academia Española define "número abstracto" como "El que no se refiere a unidad de especie determinada" y "número concreto" como "El que expresa la cantidad de una especie determinada". Puede consultarse la 22ª Edición en: http://buscon.rae.es/draeI/

cálculo se reduce a la recuperación de un hecho numérico y a la determinación del valor posicional del resultado. En este caso, la aproximación no será muy buena y el cálculo será muy sencillo. Si, por el contrario, se redondean los datos iniciales al orden de su segunda cifra significativa, el grado de aproximación es muy superior, pero la dificultad de la determinación de las cifras del resultado aumenta notablemente: se obtiene una mejor aproximación, asumiendo una mayor dificultad de cálculo.

1.2. Modo de determinar las cifras del resultado

Voy a considerar cuatro formas básicas de determinar las cifras del resultado de una estimación:

1.2.1. Hechos Numéricos (HN)

Se da en situaciones en las que la fase de cálculo se limita a la recuperación de un único hecho numérico y al establecimiento del valor posicional. En la multiplicación supone trabajar con una única cifra significativa en cada número (salvo casos especiales del tipo $25 \times 4 = 100$) y en la división supone la determinación de una única cifra significativa en el resultado. En el ejemplo siguiente, el alumno 22 utiliza un único hecho numérico ($5 \times 8 = 40$) y después ajusta el valor posicional añadiendo tres ceros para completar su estimación.

Entrevistador: 46×771

Alumno 22: 50 por 800. 8 por 5, 40. O sea. Redondeo el 46 a 50. El 771 a 800 y sería 50 por 8. 8 por 5, 40... Y ahora, 8 por 5, 40 y ahora le pongo un cero del 50 y dos ceros del 800. Sí.

Estimación: 40000; Error: 12,8%

En el caso de la división, la operación $85,9 \div 3,42$ queda reducida a $80 \div 4$ que requiere únicamente la aplicación del hecho numérico $2 \times 4 = 8$ (o $8 \div 4 = 2$) y el ajuste del valor posicional.

Entrevistador: 85.9 ÷ 3.42

Alumno 25: Y aquí multiplico por 100, en este lado, y corro la coma dos lugares. Aquí hago lo mismo. No. Mejor. Multiplico por 10. Corro la coma un lugar y me quedan 34,2 entre... Ah bueno. Espérate. 85,9 entre 3,42. Vale. Pues esto puede ser 80 entre 4. Vale. 80 entre 4 que sería 20.

Estimación: 20; Error: 20,4%

En algunos casos, en que resulta adecuada la sustitución de uno de los datos por una potencia de diez, se puede llegar a reducir el cálculo a una multiplicación o división por la unidad seguida de ceros:

Entrevistador: 354 ÷ 88

Alumno 2: El 88 lo redondeo a 100 pues... 3,54.

Estimación: 3,54; Error: 12,0%

Finalmente, como se indica en la introducción de esta forma de determinar las cifras del resultado, considero también un hecho numérico (básico) la relación $100 = 4 \times 25$, que conduce a la siguiente estimación.

Entrevistador: 968 ÷ 24

Alumno 3: Aquí he puesto 1000 y lo he hecho entre 25. Y como hay 4 cada 100, 4 por 10, 40.

Estimación: 40; Error: 0,8%

La diferencia de este último ejemplo con el anterior, también de división, es que en él se deja un divisor de dos cifras, en lugar de redondearlo o truncarlo a las decenas, lo que simplificaría los cálculos.

1.2.2. Algoritmo (ALG)

Se da cuando la operación no se reduce a la recuperación de un único hecho numérico. En la multiplicación supone el uso de la propiedad distributiva que se da, por ejemplo, en la mayoría de los casos en que se multiplica un número de dos cifras por otro de una cifra. En la división, se caracteriza por determinar más de una cifra significativa en el cociente, multiplicando la primera cifra del cociente por el divisor y restándola del dividendo para determinar después la segunda cifra del cociente. A continuación, se propone un ejemplo de una multiplicación. El alumno sustituye 46×771 por 45×800. Para multiplicar 45 por 8, utiliza la imitación mental del algoritmo escrito de la multiplicación. En el fragmento de la transcripción seleccionado, se observa que esta imitación del algoritmo comporta para el alumno cierta dificultad:

Entrevistador: 46×771

Alumno 14: 46 por 780, o por 770... Sigue siendo demasiado difícil para hacerlo mentalmente. Así que hago, por un lado, 460 lo voy a redondear un poco a 450. 771 hacia 800. Entonces, 45 por 8... 8 por 5, 45... No. 8 por 5, 5 por 8... 40. A ver. Otra vez. 45 por 800. 45 por 800... 8 por 5,... 8 por 5, 40 y me llevo 4. Y 8 por 4... 32 y 4, 36. 36, el cero que tenía aquí y dos más, de que es por 800. Ya está.

Estimación: 36000; Error: 1,5%

En el ejemplo de división aportado, el alumno va a sustituir $354 \div 88$ por $350 \div 90$ y esta por $35 \div 9$, operación que realiza también imitando el algoritmo escrito para dar su estimación de 3,8. Mientras que en la reducción a hechos numéricos, característica del apartado anterior, hubiese producido una estimación de 3 (o de 4 si sobrestimamos), en este caso el alumno multiplica la primera cifra del cociente por el divisor, para restar el resultado al dividendo y determinar la segunda cifra del cociente.

Entrevistador: 354 ÷ 88

Alumno 6: Pues aquí sería... Lo compensaría. Este lo subiría a 90 y este lo bajaría a 350. Sería 350 entre 90 que sería 35 entre 90 a 8... 35 entre 9 sería a 3, 27, 8, 84, 84... A 9. 81, 3... [Dice varios números entre dientes]. Sí, sería así. Bueno, a 4 casi. Me he liado. 350 entre 9 sería a 3, me llevo 8. 3,8.

Estimación: 3.8; Error: 5,5%

1.2.3. Fracciones (FRA)

Lo más característico de esta forma de determinar las cifras es que se sustituye un decimal por una fracción, lo que conlleva la aplicación de un algoritmo de fracciones.

Entrevistador: 0.45 × 7.85

Alumno 16: Como es 0,45 pues lo redondeo a 0,50 y la mitad, pues de 7,85 son 3,5. 3,7.

Estimación: 3.7; Error: 4,7%

Entrevistador: 2.57 × 0.72

Alumno 20: Esto multiplico. Voy a utilizar este número como 250. Este número como 0,75. 250 por 0,75 es como multiplicar 250 por ¾. 250 entre 4. Bueno, voy a hacer primero por 3 son 750. Entre 4 son un poco menos de 140. Y tengo que quitar dos comas. O sea, 1,4.

Estimación: 1,4; Error: 24,3%

En este segundo ejemplo, es posible que para dividir 750 entre 4, se haya imitado el algoritmo escrito. No obstante, el aspecto que marca de forma más significativa la operación es la sustitución de 0,72 por ¾.

1.2.4. Algoritmo Alternativo (ALT)

Hay algunos procesos de estimación en los que el cálculo no se reduce a la recuperación de un hecho numérico básico, ni tampoco se utiliza la sustitución de un decimal por fracción, o se imita el algoritmo escrito. Son situaciones (que han sido infrecuentes en este trabajo) etiquetadas como 'algoritmo alternativo' [260], e ilustradas con los dos siguientes ejemplos:

Entrevistador: 968 ÷ 24

Alumno 20: Veo que son los dos divisibles por 8. Entonces voy a reducir esta división. Voy a hacer los números más pequeños. Me queda 121 entre 3. Que son 120 entre 3, son 40. Aproximadamente 40.

Estimación: 40; Error: 0,8%

Mientras que la simplificación en la división de dividendo y divisor, dividiendo ambos por una potencia de diez, fue algo habitual, solo he encontrado un caso de simplificación dividiendo por un factor común que no fuese potencia de diez. La segunda etapa del cálculo sí encaja perfectamente con la reducción a un hecho numérico, pero la fase de cálculo de este proceso de estimación, visto globalmente, no encaja en ninguna de las categorías anteriores. En el siguiente ejemplo, el alumno utiliza un hecho numérico derivado.

[260] Podría etiquetarse esta categoría como "otras formas de determinar las cifras del resultado".

Entrevistador: $0.68 \div 0.024$

Alumno 27: 680 entre 24. 24 [inaudible] 25. 680 entre 24. 24 por 4, 100 por 7, 28. Yo creo que son 28.

Estimación: 28; Error: 1,2%

Primero se emplea la relación $25 \times 4 = 100$ y después $100 \times 7 = 700$. De estas dos relaciones, deriva la relación $25 \times 28 = 700$ con la que da respuesta aproximada al cálculo $0{,}68 \div 0{,}024$, tras haber operado la coma decimal.

1.3. Modo de operar la coma decimal

Dado que en la estimación en cálculo suele operarse con números que provienen de un redondeo o un truncamiento, con pocas cifras significativas, muchas veces el cálculo mental que debe realizarse se reduce a la recuperación de un hecho numérico y al establecimiento del valor posicional del resultado de la estimación.

En esta situación, cuando se estima con números decimales (caso de la presente investigación) hay una variable de proceso (Castro, 1991) que asume un gran protagonismo, al utilizarse para determinar el valor posicional de las estimaciones: *la forma de operar la coma decimal*.

Esta variable ha sido utilizada en el trabajo de cálculo mental de Gómez (1995) para distinguir, dentro de un cálculo mental con decimales, cuando la coma decimal se aparta, y se opera con los números como si fuesen naturales, para recuperarla al final, y cuándo la coma decimal se arrastra en los cálculos.

En el caso de la estimación se produce una situación especial que afecta a la forma de operar la coma decimal, pues las destrezas de aproximación (redondeo, truncamiento…) pueden utilizarse para eliminar la parte decimal de un número y así simplificar los cálculos.

En el tipo de tareas de estimación propuestas en esta investigación, hay tres formas básicas de operar la coma decimal, según lo primero que se haga sea: multiplicar algún operando por una potencia de diez para eliminar sus cifras decimales (Figura 6.1); aplicar alguna destreza de aproximación para eliminar las cifras decimales (Figura 6.2); o, sustituir el número decimal por una fracción (Figura 6.3). Voy a explicar a continuación estas tres formas básicas de operar la coma decimal, proponiendo ejemplos de cada una de ellas e ilustrando sus posibles variantes.

1.3.1. Multiplicación por potencias de diez (Coma 1)

Esta forma de operar la coma decimal consiste en comenzar el proceso de estimación multiplicando uno de los operandos -o los dos- (tanto en la multiplicación como en la división) por la unidad seguida de ceros para reducir el número de cifras decimales, no necesariamente eliminando todas las cifras decimales (Figura 6.1).

Los alumnos están muy acostumbrados al cálculo escrito y suelen tener poca experiencia en el ámbito de la estimación. En el cálculo escrito, la mayoría de los cálculos con números decimales se realizan como si los números fuesen naturales, para después aplicar alguna regla para determinar la posición de la coma decimal. Un ejemplo muy claro de esto se da en el algoritmo tradicional de la multiplicación con números decimales.

En la Figura 6.1 puede verse la configuración correspondiente a la primera forma que se presenta de operar la coma decimal. Es el procedimiento más cercano al algoritmo escrito y, como se ve en la figura, se caracteriza porque en primer lugar se multiplica el número decimal por una potencia de diez para intentar eliminar la coma decimal. Como indica el rectángulo de la derecha de la Figura 6.1, en función del resultado de la operación por la potencia de 10, hay tres posibilidades para el segundo paso, que constituirían diversas variantes de la misma forma de operar la coma.

- Sin operar la coma decimal
- Operando la coma decimal
  - Multiplicación por potencias de 10
    - Segundo paso innecesario
    - Multiplicación por potencias de 10
    - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas
  - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas
  - Sustitución por fracciones
    - Segundo paso innecesario
    - Multiplicación por potencias de 10
    - Uso de hechos numéricos
    - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas

Figura 6.1. Operación de la coma decimal multiplicando por potencias de diez.

A veces, esta multiplicación por una potencia de 10 puede ir inmediatamente seguida por la aplicación de una destreza de aproximación. Si es así, el número de dígitos de las aproximaciones de los operandos debe coincidir con el número de dígitos de los números de partida (ignorando las comas decimales). Es la forma de operar la coma decimal más parecida al algoritmo escrito (especialmente en el caso de la multiplicación).

Por ejemplo, para dar una estimación para el cálculo 78,4 × 89,5 se pueden multiplicar ambos números por 10, obteniendo 784 × 895. Si a continuación se redondea a las centenas, la operación queda: 800 × 900, que son 720000. Para finalizar, se divide por 100, para compensar la multiplicación inicial de ambos factores por 10, obteniendo un resultado final de 7200. A continuación, se propone un ejemplo completo con la operación 34,1 × 47,2.

Entrevistador: 34,1 × 47,2

Alumno 28: Multiplico por 10. Serían 341 por 472. 341 lo voy a redondear a 300 y 472 a 500. 5 por 3, 15 y cuatro ceros y le quito dos, por las comas. 1500.

Estimación: 1500; Error: 6,8%

Los alumnos suelen hablar de 'mover la coma' en lugar de multiplicar por la unidad seguida de ceros:

Entrevistador: 78,4 × 89
Alumno 22: Muevo la coma los dos. Sería... O, no. 800 por 900.
Estimación: 7200; Error: 2,6%

En algunas ocasiones, lo primero que verbalizan los participantes es la operación de las cifras significativas. En este caso lo importante es que añadan los ceros teniendo en cuenta el número de cifras de los números de partida (no de los números redondeados con la parte decimal ya eliminada).

Entrevistador: 78,4 × 89,5
Alumno 29: Esto sería 800 por 900.
Estimación: 7200; Error: 2,6%

En este último ejemplo, el alumno no menciona la multiplicación de ambos números por diez, ni el hecho de mover la coma. Sin embargo, si no hubiera multiplicado por diez antes de redondear, el producto quedaría como 80 × 90, en lugar de 800 × 900. Así, se supone que ha habido multiplicación previa por diez, aunque no aparezca explícitamente en la transcripción.

Las ventajas de esta forma de operar la coma decimal son que el número de cifras decimales de partida permanece siempre a la vista del sujeto y que es la forma con la que los participantes están más familiarizados por su experiencia previa con el cálculo escrito.

La operación de la coma decimal puede realizarse, a lo largo del proceso de producir la estimación, en dos fases consecutivas. Según cuál sea el resultado de la primera fase (si las cifras decimales hayan sido eliminadas o no tras la primera multiplicación de los operandos por la unidad seguida de ceros), y qué método se siga en la segunda fase, se deben tener en cuenta las posibles variantes:

1. Multiplicar dividendo y divisor por la unidad seguida del mismo número de ceros de modo que no se lleguen a eliminar completamente las cifras decimales que se eliminan por aproximación o se arrastran ignorándolas en el cálculo).
2. Parece que es un procedimiento de dos pasos, empleado en la división, en el que primero se elimina la coma decimal de uno de los operandos y luego del otro (en ambos casos multiplicando el dividendo y el divisor por la misma potencia de 10).

1.3.2. Aplicación de una destreza de aproximación (Coma 2)

Consiste en aplicar una destreza de aproximación previamente a la operación de la coma decimal. Cuando solo intervienen números decimales mayores que uno en la operación, la destreza de aproximación conduce a la eliminación de la coma decimal y consecuentemente a la necesidad de operarla en el cálculo. En el caso de que alguno de los números sea menor que uno, el número es aproximado por un número decimal con una sola cifra significativa. Esta forma de operar la coma decimal se caracteriza por la aplicación de la destreza de aproximación antes de operar la coma decimal (Figura 6.2). Esta forma de operar la coma decimal no es ya la característica del cálculo escrito y demuestra cómo se puede sacar provecho de las destrezas de aproximación para simplificar un cálculo. Por ejemplo, ante una de los ítems de la prueba de estimación utilizada (34,1 $\times$ 47,2), se puede utilizar la primera forma de operar la coma decimal (Coma 1) y sustituir el cálculo inicial por 341 $\times$ 472, para dividir el resultado final por 100. Sin embargo, sería más sencillo sacar provecho de las destrezas de aproximación y sustituir el cálculo inicial por

30 × 50 (Coma 2), por ejemplo, para operar con números menores y reducir considerablemente la dificultad del cálculo.

- Sin operar la coma decimal
- Operando la coma decimal
  - Multiplicación por potencias de 10
    - Segundo paso innecesario
    - Multiplicación por potencias de 10
    - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas
  - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas
  - Sustitución por fracciones
    - Segundo paso innecesario
    - Multiplicación por potencias de 10
    - Uso de hechos numéricos
    - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas

Figura 6.2. Operación de la coma decimal aplicando destrezas de aproximación.

1.3.3. Sustitución de un decimal por una fracción (Coma 3)

En este último caso, la primera operación consiste en la sustitución de un decimal por una fracción. Esta es una forma alternativa de operar la coma decimal, muy diferente de la aproximación del algoritmo escrito (Figura 6.3).

- Sin operar la coma decimal
- Operando la coma decimal
  - Multiplicación por potencias de 10
    - Segundo paso innecesario
    - Multiplicación por potencias de 10
    - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas
  - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas
  - Sustitución por fracciones
    - Segundo paso innecesario
    - Multiplicación por potencias de 10
    - Uso de hechos numéricos
    - Uso de primeros dígitos o ignorar las comas

Figura 6.3. Operación de la coma decimal sustituyendo por fracciones.

Dependiendo de cómo sea el segundo operando (el no sustituido por la fracción), habrá diferentes modalidades para esta forma de operar la coma decimal.

Las diferentes formas de operar la coma decimal pueden verse sintetizadas en la Figura 6.4 en la que un diagrama de flujo explica el procedimiento que debe seguirse al clasificar el modo de operar la coma decimal, dentro del proceso de estimación. Como se observa en la figura, la operación de la coma decimal a veces conlleva la aplicación de dos pasos consecutivos. No obstante, considero el primer paso como el más característico del proceso, mientras que el segundo sirve para distinguir modalidades diferentes de la operación de la coma decimal, dentro de las tres categorías principales.

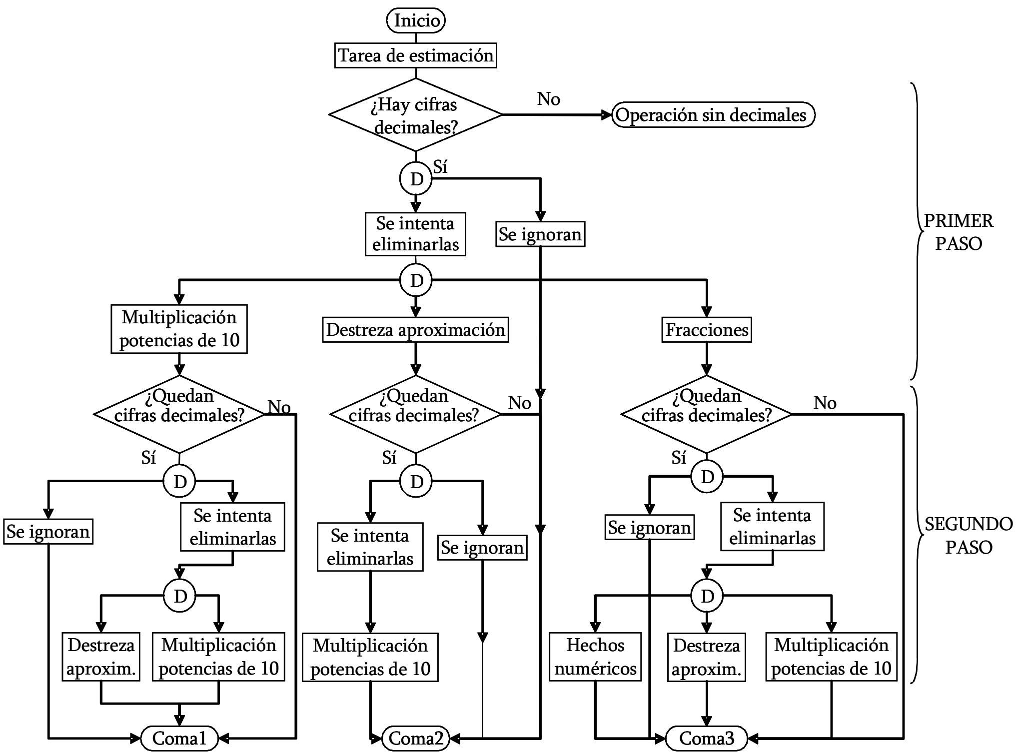


Figura 6.4. Forma de operar la coma decimal.

2. Resultados del análisis de conocimientos y procesos metacognitivos

Los protocolos de "pensar en voz alta" de los alumnos han sido analizados tomando como referencia el modelo explicado en la primera sección del trabajo. Se han hallado elementos de conocimiento metacognitivo y de control metacognitivo. Dentro del conocimiento cognitivo, se proponen ejemplos del conocimiento metacognitivo de persona, de tarea, y de estrategia. Los procesos de monitorización y regulación serán el centro de atención en el estudio del control metacognitivo.

2.1. Conocimiento metacognitivo

El conocimiento metacognitivo es el conocimiento que tiene una persona de su propio funcionamiento cognitivo, de las tareas que debe abordar y de las estrategias que sirven para resolverlas.

2.1.1. Conocimiento metacognitivo de persona (MKP)

Dentro de esta categoría, se incluyen las expresiones en las que se refleja el autoconcepto general de los estudiantes como matemáticos (estudiante 29), o el conocimiento que tienen de sus propias destrezas mentales, como la capacidad de tomar decisiones (estudiante 29) o de concentrarse para realizar una tarea (estudiante 30). Por el contrario, no se incluyen los casos en que los alumnos se refieren a su propia capacidad matemática con respecto a una tarea concreta (situación que se estudia en la siguiente categoría).

Entrevistador: 78.4×89.5

Alumno 29: Esto sería 800 por 900. 9 por 8 son 72. Cero coma... Ah, no, porque redondeas. Redondeabas [a] 80 por 90 y claro, se quedaba en 72. Y hacías así [escribe dos ceros] y valía esto. Me parece que sí, ¿No? Porque eran las comas iguales, ¿No?... Mira que... Es que no lo sé. *Yo dudo mucho*.

Estimación: 7200; Error: 2.6%

Entrevistador: 0.747 ÷ 0.35

Alumno 30: *Cómo se nota que no soy de ciencias, ¿eh?* Vale. Quito la coma. La corro dos aquí... Me quedaría 74 entre 35. Pues aquí también habría cero coma... Cabe a 2... 0,21.

Estimación: 0.21; Error: 90.2%

Entrevistador: 0.37 ÷ 0.543

Alumno 12: Tendría que hacer 37000 entre 543. Entonces redondeo a 40000 entre 500 que son, a ver… 2000. Un momento... Sería 2000 por 500... ¿200? *Yo es que me desconcentro con todo*.

Estimación: 100; Error: 14575.7%

En cada uno de los casos, las frases resaltadas en cursiva: "Yo dudo mucho", "Como se nota que no soy de ciencias, ¿eh?", "Yo es que me desconcentro con todo", son indicadoras de un conocimiento metacognitivo de persona. Es importante ver que no se hace referencia, en ninguna de estas frases, a una tarea concreta.

2.1.2. Conocimiento metacognitivo de persona y tarea (MKPT)

Es el conocimiento que tiene una persona sobre su propia capacidad para resolver una tarea matemática concreta. Los alumnos saben que unos problemas "se les dan mejor" que otros, que hay problemas que no saben resolver, etc.

Entrevistador: $8.85 \div 42.6$

Estudiante 27: 0,2... 42 entre 0,2 sería como multiplicarlo por 2. Ah no. Entonces no puede ser. No. Es que no sé cómo lo he hecho. Lo he puesto porque... no lo sé, no lo sé. *Es que yo esto siempre lo hago con lápiz.*

Estimación: 0,2; Error: 3,7%

Entrevistador: 78.4×89.5

Alumno 20: Ahora utilizo 80 por 90, que va a ser menos, pero *estos números, por ejemplo, para mí, son más complicados*. Entonces 80 por 90 son 7200.

Estimación: 7200; Error: 2,6%

Entrevistador: $0.962 \div 0.25$

Alumno 9: Aquí redondearía esto, como está más cerca de la unidad, que es 1 en este caso, lo redondearía y haría una división aproximada entre 0,25. Entonces sería 1 entre 0,25... Sería restar dos comas... Es que aquí ya me he liado. *El problema es que lo veo un poco abstracto*. Pero sería eso.

Estimación: 0,25; Error: 93,5%

Entrevistador: $0.46 \div 0.066$

Alumno 14: Ahora empieza lo difícil porque *no sé dividir con comas*. Y, sobre todo, porque no son iguales [Se refiere a los números de cifras decimales de los dos números].

Estimación: 0,46; Error: 93,4%

Las frases: “Es que yo esto [la división con decimales] siempre lo hago con lápiz”, “estos números [refiriéndose a la operación 78.4 × 89.5], por ejemplo, para mí, son más complicados”, “el problema [0,962 ÷ 0,25] es que lo veo un poco abstracto”, y “no sé dividir con comas”, hacen todas referencia a una operación concreta o a un tipo de operación y a la propia capacidad del sujeto en relación con este tipo de operación[261].

2.1.3. Conocimiento metacognitivo de tarea (MKT)

Suele aparecer cuando los alumnos, por ejemplo, valoran el grado de dificultad de una tarea o la dificultad relativa de dos tareas. Sólo se incluyen en esta categoría los juicios sobre la dificultad de tareas que no son considerados por los alumnos como una dificultad propia, sino como algo difícil, en general, para todos los alumnos. En los dos primeros ejemplos a continuación (estudiantes 14 y 2) la valoración de la dificultad o la facilidad de una tarea conducen, respectivamente, a hacer un cambio en el grado de aproximación o a ajustar la primera estimación empleando la propiedad distributiva. Así, estos ejemplos pueden ilustrar también el proceso de supervisión y posterior regulación que está llevando a cabo el alumno durante la ejecución de la tarea.

Entrevistador: 46 × 771

Estudiante 14: 46 por 780, o por 770… *Sigue siendo demasiado difícil*

[261] En metacognición se distingue entre el conocimiento metacognitivo de persona y tarea (MKPT) y el conocimiento metacognitivo de persona y estrategia (MKPS). En esta investigación, se ha optado por eliminar la categoría MKTS, porque en el tipo de tareas propuesto a los alumnos es difícil (o imposible) diferenciar cuándo los alumnos se refieren a una operación y cuando al algoritmo usual aprendido en la escuela para realizar la operación. El primer caso se referiría a la tarea (MKPT) y en el segundo a la estrategia (MKPS). Por ejemplo, en dos de los ejemplos del apartado, las frases: “Yo esto siempre lo hago con lápiz” y “no sé dividir con comas”, se refieren más al procedimiento del algoritmo de la división, que a la operación, pero podrían referirse a ambas.

para hacerlo mentalmente[262]. Así que hago, por un lado, 460 lo voy a redondear un poco a 450. 771 hacia 800.

Estimación: 36000; Error: 1.5%

Entrevistador: 0.68 ÷ 0.024

Estudiante 2: Esto sería el 0,68 lo multiplico por 100 y sería 68. Y el 0,024 lo multiplico por 100 y me daría 2,4. Entonces sería 68 entre 2,4 y... pues 68 entre 2, bueno, sí, o 70 entre 2 [son] 35. Bueno, es fácil de hacer así que 34.

Estimación: 34; Error: 20.0%

En el caso siguiente, se considera la división de un número por otro mayor como un caso especialmente difícil dentro de la división con números decimales.

Entrevistador: 0.37 ÷ 0.543

Estudiante 14: Este es todavía más difícil. Porque, como no me acuerdo de dividir con decimales, pues dividir un número pequeño con decimales entre uno mucho más grande es todavía más difícil... Entonces... ... Entonces me imagino que va a empezar por 0,0 y no sé si otro cero... Yo creo que sí. Y es que no sé. Así que voy a poner un número cualquiera. El mismo. [Escribe 0.0037]

Estimación: 0.0037; Error 99.5%

2.1.4. Conocimiento metacognitivo de tarea y estrategia (MKTS)

Es el conocimiento sobre qué destrezas, estrategias o procedimientos en general son adecuados para un determinado tipo de tarea.

[262] Al no hacer ninguna referencia a sí mismo el alumno,

Entrevistador: 0.025×776

Alumno 19: 776 lo redondearía a 800. Lo multiplico por 100 a ambos lados. ¡Ay!, un segundito. Lo estoy multiplicando. Es que, como no voy tomando nota, se me olvidan luego los números. Pues, multiplicando daría 266, que tendría que correr la coma.

Entrevistador: ¿Multiplicando que?

Alumno 19: A ver. 0,025 lo redondeo a 0,03 y 776 lo redondeo a 800. Multiplico por 100 a ambos lados, para que me sea más fácil el cálculo y, calculando a ojo, más o menos, son 266 que sé que tengo que correr la coma dos puestos a la izquierda. Sería 2,66.

Estimación: 2,66; Error: 86,3%

El alumno explica que: "En una tarea de cálculo de este tipo (conocimiento de tarea) es difícil realizarlo mentalmente y facilita los cálculos adoptar la estrategia de anotar los números en papel para que no se olviden (conocimiento de estrategia)." Se ponen pues de manifiesto conjuntamente el conocimiento del sujeto sobre una determinada tarea y sobre la estrategia adecuada para afrontarla. Otro conocimiento metacognitivo de esta naturaleza (tarea-estrategia) aparece al señalar poco después que la estrategia de eliminar las comas decimales multiplicando por 100 los dos números, facilita la ejecución del cálculo.

2.2. Control metacognitivo: Monitorización

Dentro del control metacognitivo, se distinguen los procesos de monitorización y de regulación. Por razones de brevedad, se han incluido solo los ejemplos de conocimiento metacognitivo y control metacognitivo más relevantes en el análisis. Se omiten algunos otros ejemplos (como la "selección de destreza de aproximación" o la "selección de la forma de operar la coma decimal", correspondientes a la planificación inicial del procedimiento para producir una estimación). No obstante, aunque no figuren como tipos formulados explícitamente, sí aparecen en el análisis. Cualquier cambio en la destreza de aproximación refleja una selección inicial, un proceso de evaluación (monitorización) y otro de regulación (al seleccionar la nueva destreza). Siguiendo el modelo de la Figura 1, se ha desarrollado en el análisis, fundamentalmente, la fase de planificación/ejecución.

Como advertí en la introducción, considero la monitorización como el proceso de producción de conocimiento sobre el curso de la propia actividad cognitiva. He elegido, para su presentación en este trabajo, ejemplos de situaciones en que los alumnos piensan que han cometido un error, por ser este un caso evidente de supervisión de la propia actividad cognitiva. En muchos de los ejemplos propuestos, la monitorización conducirá a una posterior regulación de la actividad cognitiva. También se prestará atención a la evaluación que hacen las personas, durante su actividad de producción de estimaciones, de su propio estado cognitivo o sobre la pertinencia o idoneidad de la aplicación de una estrategia.

2.2.1. Pensar[263] que hay un error en la representación del problema (MMER)

Aquí se presentan ejemplos correspondientes a la fase de representación-comprensión (ver Figura 1). En algunos casos los estudiantes tienden a atribuir a las tareas que tienen que realizar características distintas de las que realmente tienen (a veces, características de tareas inmediatamente anteriores). Esto

[263] En los nombres de las distintas categorías se ha utilizado la expresión "pensar que se ha cometido un error en…" en lugar de, por ejemplo, "detección de un error en…" porque es bastante común que los alumnos cometan errores en sus juicios sobre su propio trabajo matemático, de modo que piensen que han cometido un error cuando en realidad no es así.

ocurre al estudiante 2 y al 27, que suponen al inicio que están haciendo una división, o al estudiante 22 que piensa que está operando dos números con cifras decimales. Todos ellos advierten el error y modifican su procedimiento.

Entrevistador: 0.45×7.85

Estudiante 2: 0,45 lo... bueno. He puesto 0, porque no cabe. Entonces pongo 0,0 para que sea 45... Vale, nada. He dividido.

Estimación: 4; Error: 13,2%

Entrevistador: 0.025×776

Estudiante 22: Uno, dos,... Ah, no. Este no tiene nada [776 no tiene cifras decimales]. Pues esto, 776, [hago] la mitad. Bueno. Lo voy a redondear a 800. La mitad sería 400 y la mitad de 400, 200.

Estimación: 200; Error: 930,9%

Entrevistador: 852×0.048

Estudiante 27: 152. 152000 entre 48. 8 entre 4 a 2... Ah, no. Que es por [una multiplicación]. Me he hecho un lío. A ver. 8 por 4, 32. 8 por 5, 40. 40 con... Sí. 8 por 5, 40 con dos ceros, y luego le tengo que quitar tres. Sería a 0,4.

Estimación: 0.4; Error: 99,0%

2.2.2. Pensar que hay un error en la ejecución de una estrategia (MMES)

Son situaciones en las que los estudiantes piensan que han aplicado de manera incorrecta un procedimiento de cálculo a una situación concreta. Esto suele ocurrir cuando no tienen claro el procedimiento. En los siguientes cuatro ejemplos, se ve esta situación en el ajuste del valor posicional. En el primer caso, el estudiante 19 redondea 771 a 80, se da cuenta de su error y sustituye 80 por 800. Después de detectar su error en el redondeo, multiplica 5 por 8 y ajusta el valor posicional, para dar un resultado de 40000. Después, cuenta el número de ceros de 50 y 800 y parece pensar que ha cometido un error, pues entre 50 y 800 solo hay 3 ceros. De modo que elimina un cero y deja su estimación en 4000. La misma situación se da en sentido contrario en el siguiente ejemplo del estudiante 20.

Entrevistador: 46×771

Estudiante 19: Yo redondearía el 46 al 50 y el 771 a 80. Huy a 80, a 800. 5 por 8, 40. [Escribe 40000] Anda. Que pongo un cero de más. ¡Qué bruta soy! [Borra el último cero y deja 4000]

Estimación: 4000; Error: 88,7%

Entrevistador: 46×771

Estudiante 20: Voy a redondear a 800 por 50 que son 4000, 40000.

Estimación: 40000; Error: 12,8%

Entrevistador: 78.4×89.5

Estudiante 9: Esto es 80 por, ya casi 100. Entonces, se puede hacer así. O bien por otro método, que es 8 por 7, 56. Entonces, sería la estimación y luego se le añadirían los dos ceros. Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto. Se añadirían 4 ceros en este caso.

Estimación: 560000; Error: 7880,8%

Entrevistador: 78.4×89.5

Estudiante 22: Muevo la coma los dos. Sería... o, no. 800 por 900. 9 por 8, 72. 800 por 900 son dos ceros. ¿Tanto? Esto me parece absurdo. No. Mejor. A ver. Es que esto es una tontería.

Mejor 80 por 90. Eso. 8 por 9, 72. 80 por 90. Y dos ceros. [Escribe 7200]. Así.

Estimación: 7200; Error: 2,6%

2.2.3. Pensar que se ha cometido un error en la estimación final (MMEG)

Constituyen ejemplos de visión retrospectiva pues consiste en valorar si puede tener sentido una estimación o no. Son situaciones en las que se produce una evaluación del resultado (incluyen evaluar la propia estimación utilizando otra estrategia).

Entrevistador: 78.4×89.5

Estudiante 22: Muevo la coma los dos. Sería... o, no. 800 por 900. 9 por 8, 72. 800 por 900 son dos ceros. ¿Tanto? Esto me parece absurdo. No. Mejor. A ver. Es que esto es una tontería. Mejor 80 por 90. Eso. 8 por 9, 72. 80 por 90. Y dos ceros. [Escribe 7200]. Así.

Estimación: 7200; Error: 2,6%

Entrevistador: 0.025×776

Estudiante 29: 0,025 lo... subo a... 30 y 776 lo subo a 800. Sería 800 por 30. 3 por 8, 24. 24... y, como es una multiplicación con decimales, pues sería, cuento los decimales, los números que hay detrás del cero coma, que son tres. A ver. Esto es un lío. No sé. 800 por 20... No. 800 por 30. 8 por 3, 24. Será así. Sería... 0,024. Porque cuento los números que hay detrás del cero coma. Entonces cuento el 4 como 1, el 2 como 2, el cero como el 3. Entonces pongo el 0,024. Que no sé si será eso... Espérate a ver. Es que me parece muy raro que sea eso... ... 800 por 30. 3 por 8 son 24. Yo que sé. Es que yo creo que eso está mal... Vale. [Deja el 0,024 como estimación y pasa al siguiente cálculo]

Estimación: 0,024; Error: 99,9%

Entrevistador: 36 ÷ 258

Estudiante 30: Pondríamos un cero. Se lo pondríamos luego al 36. 360 entre 258. Entonces sería 0,... 0,1... ... No sé. Yo 0,1 pondría, pero yo creo que es poco resultado.

Estimación: 0.1; Error: 28,3%

2.2.4. Evaluación del estado actual de la persona (MMP)

Refleja situaciones de bloqueo, cansancio mental, que pueden influir en el proceso de producir una estimación. Aunque no es objetivo de la presente investigación estudiar tal tipo de influencia, propongo varios ejemplos (como el del estudiante 9 o el del 133) en que este tipo de bloqueos conduce, respectivamente, a un cambio de estrategia y a una repetición de la estrategia desde su inicio.

Entrevistador: 968 ÷ 24

Estudiante 12: Esto redondeo a 1000. 1000 entre... Esto lo redondeo a 25... Y... A ver... Sí. ¿No? A ver, un momento... No. ¿Qué estoy haciendo? Un momento... ... Estoy un poco espesita. A ver... [Escribe 50].

Estimación: 50; Error: 24,0%

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Estudiante 9: Esto es 1/2. Tiende a ½. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse ½ entre 0,01 y sería... ... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay...

Estimación: 0; Error: 100,0%

Entrevistador: $0.63 \div 0.785$

Estudiante 30: Estos tres lo paso aquí. Sería 630 entre 785. Como no me cabe, pongo otro cero. Entonces ya tengo 0,0 algo. Ahora para dividir 630. No. 6300 entre 785. Lo multiplico por 8, por que por 9 ya se me pasa. Entonces pondría 0,08. Vaya cacaos mentales me estoy haciendo.

Estimación: 0.08; Error: 90,0%

Entrevistador: $0.086 \div 0.42$

Estudiante 133: Cambio la coma aquí. Uno y dos. Entonces tengo que quitarla aquí. Uno y dos. Me queda 8,6 dividido entre 42... A ver. ¡Qué mareo de números tengo!... Me he quedado en blanco...

Estimación: 0.03; Error: 85,3%

2.2.5. Evaluación de la aplicación de una estrategia (MMS)

En este tipo se incluye el conocimiento de que la aplicación de un procedimiento es más sencilla que la de otro en una situación concreta. También se incluye la consideración de la posibilidad de aplicar otra estrategia después de haber estimado. Otro ejemplo de este tipo es la duda sobre si se recuerda bien un procedimiento o sobre si es correcto un procedimiento.

Entrevistador: 78.4×89.5

Estudiante 29: Esto sería 800 por 900. 9 por 8 son 72. Cero coma... Ah, no. Porque redondeas. Redondeabas 80 por 90 y claro, se quedaba en 72. Y hacías así [escribe dos ceros] y valía esto.

Me parece que sí, ¿No? Porque eran las comas iguales, ¿No?... Mira que... Es que no lo sé. Yo dudo mucho. 800 por 900. 80 por 90... 80 por 90... Pongo el 72 y... *Es que no sé si es 720 o 7200.* 80 por 90 se añadirían los dos ceros. [Escribe 7200]

Estimación: 7200; Error: 2,6%

Entrevistador: 85.9 ÷ 3.42

Estudiante 14: El 85,9 lo redondeo a 86 para que sea más fácil... Y 86, 86 lo podría dividir entre 3,42 y entonces tendría que ponerle dos ceros para quitar la coma y que se convirtiera en 342. Y eso, mentalmente, es muy difícil. Así que voy a hacer 86 entre 3 porque, al fin y al cabo, es estimación. 86 entre 3. 3 por 1, 3; 3 por 2, 6; 3 por 3, 9. 2. Del 6 al 2, del 6 al 8, 2. Y 6. 26 entre 3. 3 por 1, 3; 3 por 2, 6; 3 por 3, 9; 3 por 4, 12; 3 por 5, 15;[inaudible] 3 por 7, 21; 3 por 8, 24. 24. 8. O sea, 28... Súi, claro. Y si en lugar de haberme imaginado la división. Lo hubiera hecho a ojo,... pues también hubiera sido muy fácil y no me hubiera complicado todo lo que lo he hecho. Porque sé dividir 86 en tres partes. Pero bueno, es tarde.

Estimación: 28; Error: 11,5%

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Estudiante 5: Corro las tres comas para allá. Uno, dos y tres. Queda 66 y aquí igual. Uno, dos y pongo un cero. O sea que sería 460 entre 66 y 460 entre 66 es lo mismo que 500... ... que sería a... 80. O sea que pondría... 8 por 6, 48. Pues 7 por 6, 42, que ya me cabe aquí. Y... yo creo que habría que poner un cero. Porque al poner aquí un cero, habría que poner un cero. O bueno. No estoy segura si es un cero aquí... Yo creo que sí. Es que no estoy segura de si es con el cero o no.

Estimación: 0,7; Error: 90,0%

Entrevistador: 0.059 ÷ 0.23

Estudiante 9: Esto sería... Aquí yo no sé si se podría aplicar lo de la mitad de la mitad. Esto es como 0,050 que es la mitad de 0,5. Puede ser. Se podría ver desde ese punto de vista.

Estimación: 0,3; Error: 16,9%

Entrevistador: 0.962 ÷ 0.25

Estudiante 22: Estimación: 0,25; Error: 93,5%): Esto se acerca mucho a 1. Entonces, 1 entre 0,25 pues 0,25. ¿No?

Entrevistador: ¿Cómo lo haces? [Pregunto para saber si ha intercambiado los papeles del dividendo y el divisor 0,25 ÷ 1 = 0.25]

Estudiante 22: Pues porque 1 entre... es que 0,25 es como... Ah, no. Claro, claro. 1 entre... ... Es que esto. O sea, 1 entre 0,25 es un cálculo muy fácil pero... No sé si son 4. 1 entre 0,25 pero tampoco sé lo que hago. O si no, lo puedo hacer... Muevo dos a la derecha y muevo dos a la derecha 6.2 entre 25. 0,... Yo creo que es 0,25.

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Estudiante 9: Esto es 1/2. Tiende a ½. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse ½ entre 0,01 y sería... ... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay...

Estimación: 0; Error: 100,0%

Entrevistador: 86 ÷ 222

Estudiante 9: Esto está cerca de 200 y 200 es una parte, o sea, ¼ de 1000. Lo puedo ver de esa manera. O sea, 1/5, perdón, que diga. Bueno ya no sé, ya me he liado. Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

Estimación: 2,2; Error: 467,9%

2.3. Control metacognitivo: Regulación

A continuación presentaré ejemplos de cambios en la destreza de aproximación, el grado de aproximación, la forma de operar la coma decimal, o el orden en la operación. Los cambios durante la ejecución de una tarea suponen una selección (de destreza de aproximación,…) dentro de la planificación, seguida de una monitorización, en la que se valoran las posibilidades de aplicación de la selección, y de una nueva selección que se considera mejor que la anterior (por producir un cálculo más sencillo o que produzca una estimación más próxima al resultado del cálculo). En todo este proceso de cambio, solo la selección final, posterior a la monitorización, corresponde a la regulación. A pesar de que el cambio contiene a la vez selección, monitorización y regulación, he decidido incluir las categorías de "cambio" dentro del apartado de "regulación" porque los cambios son las situaciones en las que se hace evidente la regulación, mientras que la monitorización (aunque es evidente) suele ser implícita. El mismo tratamiento que doy a los cambios se da también a los numerosos ejemplos de repeticiones. Estas se emplean a veces como ayuda para la memoria y otras como comprobación de un resultado parcial. En las repeticiones, igual que en los cambios, se hacen evidentes los procesos de monitorización y de regulación. Las repeticiones vienen descritas al final del apartado dedicado a la regulación.

2.3.1. Cambio en la destreza de aproximación (MRC1)

Al analizar los protocolos abundan las situaciones en las que los estudiantes eligen primero el truncamiento, para después sustituirlo por el redondeo. Cualquier cambio en una destreza de aproximación (truncamiento, redondeo estándar, redondeo no estándar, uso de potencias de 10, uso de fracciones) encaja en este apartado. Estos cambios son el resultado de valorar conjuntamente la proximidad de los valores iniciales a los valores aproximados y la facilidad de cálculo resultante de la sustitución.

Entrevistador: 46×771

Estudiante 9: Esto tiende a 50. Esto a 1000. Entonces sería... así. O bien, también por 4 por 7, 28, con tres ceros, sería... 28000.

Estimación: 28000; Error: 21,1%

Se cambia el redondeo (46 a 50) y el uso de potencias de 10 (771 a 1000) por el truncamiento de ambos números (46 a 40 y 771 a 700).

Entrevistador: 58×244

Estudiante 1: 50. Bueno, 60 por... redondeo a 60. Aquí redondeo a 200 y son 6 por 2, 12. Uno, dos, tres. Añado tres ceros.

Estimación: 12000; Error: 15,2%

Se cambia el truncamiento (58 a 50) por el redondeo (58 a 60). Este aumento supone también una compensación previa al cálculo al truncar 244, sustituyéndolo por 200.

Entrevistador: $354 \div 88$

Estudiante 7: Lo voy a redondear a 300. No, a ver. Lo voy a redondear a

400 y 40 entre 8 a 5.

Estimación: 5; Error: 24,3%

Al principio utiliza el truncamiento (354 a 300) pero después, al truncar también 88 a 80, cambia y redondea 354 a 400 para facilitar la división empleando “números compatibles”.

Entrevistador: 0.962 ÷ 0.25

Estudiante 9: Aquí redondearía esto, como está más cerca de la unidad, que es 1 en este caso, lo redondearía y haría una división aproximada entre 0,25. Entonces sería 1 entre 0,25... Sería restar dos comas... Es que aquí ya me he liado. El problema es que lo veo un poco abstracto. Pero sería eso. O sea, redondear a 1 y dividirlo entre 0,25, que podría ser también entre ¼. Pues 1 entre ¼. 0,25.

Estimación: 0,25; Error: 93,5%

Comienza redondeando 0.962 a 1 pero, ante la dificultad que le supone dividir 1 entre 0,25 mentalmente, sustituye 0,25 por ¼. En este caso, el cambio se produce de no utilizar ninguna destreza de aproximación en el 0.25 al uso de fracciones. La sustitución viene seguida de un error al cambiar la “división por ¼” por la “división por 4”.

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Estudiante 9: Esto es 1/2. Tiende a ½. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse ½ entre 0,01 y sería... ... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay... Esto, ½, lo podría ver de esta manera, como 0,5 dividido entre 0,01.

Estimación: 0; Error: 100,0%

El estudiante 9 comienza sustituyendo 0.46 por la fracción ½ y, a continuación, utiliza el cambio por potencias de 10 cometiendo un error (al sustituir 0.066 por 0.01, en lugar de por 0.1). El cambio posterior de destreza de aproximación, al volver a convertir la fracción por un decimal, viene dado por la dificultad que le supone al estimador operar una fracción con un número decimal.

Entrevistador: $0.059 \div 0.23$

Estudiante 26: Pues esta la vamos a estimar a 0,060 y luego lo voy a dejar en 0,1 y este en 0,2. Es 0,1 entre 0,2. Pues también da 0, y entonces aquí, le pones un 0 al 1. Entonces 10 entre 2, 5. Entonces aquí... Entonces, te queda... claro. Corres la coma [inaudible]... 0,5. Te queda 1 entre 2, 0,5.

Estimación: 0,5; Error: 94,9%

En este caso, el estudiante utiliza primero el redondeo pero después utiliza la sustitución por potencias de 10 para simplificar la división posterior por 0,2.

2.3.2. Cambio en el grado de aproximación (MRC2)

En este caso, se produce un cambio, dentro del uso de una destreza de aproximación. Generalmente, consiste en un redondeo o un truncamiento a una unidad de un orden distinto. También puede darse al utilizar la sustitución de un decimal por una fracción al utilizar una fracción más próxima que la inicial, al número de partida.

Entrevistador: 34.1×47.2

Estudiante 7: Aquí voy a redondear. Lo voy a dejar en 34 por 50. Y me va a quedar 3 por 5, 15 pues 150.

Estimación: 150; 90,7%

En primer lugar, redondea 34.1 a las unidades (34) y 47 a 50. Dado que la operación todavía no le parece suficientemente fácil de hacer mentalmente, reduce el grado de aproximación redondeando a las decenas (34 a 30).

Entrevistador: 2.57×0.72

Estudiante 3: Nada. Sé que tengo que empezar por 0, pero... Le cojo... Si redondeo a 3, no son 3. Pero con menos y eso... Pondría 7,5. Porque he cogido 2,5 sería por ½ pero lo voy a hacer por ¾ porque como se acerca a 0,75.

Estimación: 7,5; 305,3%

En este caso hay primero un cambio en la destreza de aproximación, al cambiar el redondeo de 2.57 a 3 por el truncamiento a 2.5. Después, en el segundo número, sustituye 0.72 por ½, para a continuación darse cuenta de que ¾ está más próximo a 0.72 que ½, con lo cual aumenta el grado de aproximación. Lo mismo ocurre en el caso siguiente. Primero se sustituye 222 por ¼ de 1000 y luego por 1⁄5 de 1000.

Entrevistador: $86 \div 222$

Estudiante 9: Esto está cerca de 200 y 200 es una parte, o sea, ¼ de 1000. Lo puedo ver de esa manera. O sea, 1/5, perdón, que diga. Bueno ya no sé. Ya me he liado. Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

Estimación: 2,2; 467,9%

2.3.3. Cambio en la forma de operar la coma decimal (MRC3)

Cuando se realizan estimaciones para operaciones con números decimales mayores que 1, es posible eliminar la parte decimal de los números al emplear la destreza de aproximación oportuna obteniendo, la mayoría de las veces, una buena estimación. Los alumnos suelen mostrar una gran dependencia de los algoritmos escritos y tienden por ello a eliminar las comas decimales multiplicando por potencias de diez como primer paso en la operación. En muchas ocasiones, se produce un cambio en la forma de operar la coma decimal, como se ve en los siguientes ejemplos:

Entrevistador: 78.4×89.5

Estudiante 22: Muevo la coma los dos. Sería... o, no. 800 por 900. 9 por 8, 72. 800 por 900 son dos ceros. ¿Tanto? Esto me parece absurdo. No. Mejor. A ver. Es que esto es una tontería. Mejor 80 por 90. Eso. 8 por 9, 72. 80 por 90. Y dos ceros. [Escribe 7200]. Así.

Estimación: 7200; Error: 2,6%

En este caso, el alumno elimina primero las comas decimales de cada uno de los números y después los redondea. Ante la dificultad de operar con tantos ceros, quizá olvidando que al final debe eliminar dos ceros, cambia la forma de operar la coma decimal y redondea para eliminar directamente los ceros. En el primer caso, llegaba a la operación $(800 \times 900) \div 100$, y en el segundo a 80×90. Lo mismo sucede en el ejemplo siguiente, en el que el estudiante 25 piensa primero en eliminar las comas multiplicando ambos números por 100 o por 10, para luego eliminarlas por medio del redondeo.

Entrevistador: $85.9 \div 3.42$

Estudiante 25: Y aquí multiplico por 100, en este lado, y corro la coma dos lugares. Aquí hago lo mismo. No. Mejor. Multiplico por 10. Corro la coma un lugar y me quedan 34,2 entre... Ah bueno. Espérate. 85,9 entre 3,42. Vale. Pues esto puede ser 80 entre 4. Vale. 80 entre 4 que sería 20.

Estimación: 20; Error: 20,4%

Algunos alumnos realizan el cambio en un sentido inverso. Por ejemplo, en el caso siguiente, se empieza empleando el redondeo para eliminar la parte decimal de los números para luego rectificar y eliminar los decimales multiplicando por 100 el dividendo y el divisor. El error se produce al multiplicar el divisor solo por 10 en lugar de hacerlo por 100.

Entrevistador: 9.88 ÷ 25.6

Estudiante 5: Y esto son 10 entre 25. A ver. Son, quito la coma para allá y son 250 y aquí igual. Y son 98,8, 250, que son 1000 entre 250, que son... a 4... a 4.

Estimación: 4; Error: 936,4%

2.3.4. Cambio en el modo de determinar las cifras del resultado (MRC4)

El siguiente ejemplo es un caso claro de cambio en el modo de determinar las cifras del resultado. En él se cambia de la imitación del algoritmo (ALG) a la reducción a hechos numéricos (HN). Tras ciertos intentos infructuosos de realizar mentalmente el algoritmo de la división, el alumno sustituye la operación 354 ÷ 88 por 360 ÷ 90, con el fin de aplicar el 'uso de números compatibles', apoyándose en la relación de múltiplo y divisor de 36 y 9. Al final la estimación se resuelve recurriendo al hecho numérico $4 \times 9 = 36$.

Entrevistador: 354 ÷ 88

Alumno 32: Luego 354 entre 88 pues, a ver. 354 a ver. 8 por 4, 32 al 4, 2 me llevo 3... A 3, más o menos... O sea, no. A ver. 354 entre 88. Pues, para redondear subo a 355. Bueno, 355 y este lo subo a 90. Bueno, bajo a 350, ¿vale? y subo el 88 a 90. Entonces, 350 entre 90 [inaudible]. 360 entre 90... Por 4, 36. Me paso. Tres y pico... ... ... por 4, 36. 40. 40 no, 4.

Estimación: 4; Error: 0,6%

Realmente, en este fragmento de transcripción se muestra un cambio de estrategia, de la imitación del algoritmo escrito al uso de 'primeros números' en su modalidad de 'números compatibles'. Resulta interesante ver cómo el alumno, ante la dificultad de ejecutar una estrategia (resultado de un proceso de monitorización) cambia la misma (proceso de regulación).

2.3.5. Cambio de orden en la operación (MRC5)

Es cuando se hace un cambio en el orden en que se operan dos números o en el orden en que se ejecutan dos pasos dentro de la implementación de un algoritmo.

Entrevistador: 2.57×0.72

Estudiante 20: Esto multiplico. Voy a utilizar este número como 250. Este número como 0,75. 250 por 0,75 es como multiplicar 250 por ¾. 250 entre 4. Bueno, voy a hacer primero por 3, son 750. Entre 4 son un poco menos de 140. Y tengo que quitar dos comas. O sea, 1,4.

Estimación: 1,4; Error: 24,3%

Para multiplicar 250 por ¾, el alumno decide inicialmente dividir 250 por 4, para después multiplicar por 3. En esta ocasión, el cambio se produce en el orden en que se realizan estas dos operaciones, al multiplicar primero por 3, para luego dividir por 4. También hay bastantes ejemplos de cambios de orden para la recuperación de hechos numéricos básicos de la "tabla de multiplicar", cuando no se recuerda el producto de dos números. Este caso puede verse en el siguiente ejemplo:

Entrevistador: 0.45×7.85

Estudiante 32: Aquí multiplico normal. O sea. 4 por 7. Aquí multiplico 7 por 4, 28 y cuento los decimales que tengo a la derecha de cada uno. Entonces 1, 2, 3, 4. Entonces 28, 1, 2, 3, 4. ¡Ay no! pero que... pongo encima... vale. 28. Entonces cuento que hay cuatro ceros. 0,... 0,0028.

Estimación: 0.0028; Error: 99,9%

Así como los apartados anteriores están dedicados a los cambios que se producen en el proceso de estimar como resultado de la monitorización (que suele ser implícita), los siguientes apartados prestan atención a las repeticiones.

2.3.6. Repetición de los números que intervienen en un cálculo (MRRN)

A menudo, los participantes repiten la operación que deben realizar (repitiendo los números y el signo de la operación que tienen que hacer) antes de llevar a cabo dicha operación. Atribuimos[264] a esta repetición la función de mantener en la memoria los datos para realizar la operación. En todos los ejemplos que siguen, las repeticiones aparecen señaladas con cursiva.

Entrevistador: $968 \div 24$

Alumno 14: Hago 970, este para arriba y el 24 hacia abajo, 20. 970

[264] Las atribuciones hechas en este apartado sobre metacognición están basadas en las lecturas realizadas sobre metacognición. Se debe señalar, no obstante, que no es objetivo de esta investigación conocer la función de los procesos metacognitivos, sino simplemente señalarlos (en este caso las repeticiones), justificando porqué les confiero esta naturaleza de 'procesos metacognitivos'.

entre 20, *97 entre 2. 97 entre 2.* 2 por 4, 8 y una se baja 16. 2 por 8, 16. 48. 48, ¿Verdad? Bueno. Eso... Porque, habíamos quedado en que era 970... entre 20... *97 entre 2... 97 entre 2. 97 entre 2*, 2 por 4, 8; a 9, 1... 17. 17 entre 2... 2 por 5, 10; 2 por 6, 12; 2 por 7, 14; 2 por 8... Pues sí. Luego quedaría uno de resto, pero pasamos del resto.

Estimación: 48; Error: 19,0%

El ejemplo anterior es también un ejemplo de repetición global de todo el proceso de estimación. El alumno 14 repite el proceso de dividir 97 entre 2. Llega primero al resultado de 48 y después lo confirma, matizando que queda un res-to de uno al que no da importancia.

Entrevistador: 852×0.048

Alumno 16: Esto lo redondeo a *900 por 50. Son 9 por 5. 900 por 50, 9 por 5*, 45 mas tres ceros, que son 45000. Si le corro tres comas, será 45.

Estimación: 45; Error: 10,0%

2.3.7. Repetición de un cálculo (MRRC)

Estas repeticiones se refieren a la ejecución de un cálculo, dentro de la fase de cálculo en la producción de una estimación. Por ejemplo, en la operación siguiente, se sustituye el cálculo inicial $0{,}46 \div 0{,}066$ por $500 \div 70$, y este, a su vez por $50 \div 7$. A partir de aquí, el alumno imita mentalmente el algoritmo escrito para calcular $50 \div 7$, en dos ocasiones de forma consecutiva. No repite el proceso completo de estimar, sino que dando por buena la sustitución y la equivalencia de $50 \div 7$ con el cálculo inicial, repite solo la operación.

Entrevistador: $0.46 \div 0.066$

Alumno 25: [...] A 500 entre... entre... 70. ¿No? Sí. Entonces me queda 50 entre 7, que son: 1 por 7 [inaudible] 49. Vale. Pues sería a 7... A ver [inaudible], 71... No. A ver... 7,1. No. Espera. A ver. 50 entre 7 a... 7 por 7, 49... Sí. 71 coma algo, coma... 1.

Estimación: 71,1; Error: 920,1%

En el siguiente ejemplo ocurre lo mismo: Tras establecerse la equivalencia *aproximada* de 46×771 con 50×800, se repite solamente este último cálculo.

Entrevistador: 46×771

Alumno 29: Como estimamos, pues sería... a 50 por 800. *8 por 5 son 40.* ¿No? Sí. *8 por 5 son 40.* Uno, dos y tres. ¿40000? Sí, ¿Verdad? *8 por 5 son 40.* Sí. Es 40000.

Estimación: 40000; Error: 12,8%

2.3.8. Repetición del ajuste del valor posicional (MRRA)

El ajuste del valor posicional es uno de los aspectos más complejos de las tareas de estimación. En muchas ocasiones, se producen repeticiones en dicho ajuste, seguramente con el fin de revisar el proceso para asegurarse de su corrección. No obstante la repetición del ajuste, cuando la regla para ajustar el valor posicional que se utiliza es incorrecta, como en los dos ejemplos siguientes, no es posible para el alumno evitar el error.

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno 25: ...y luego aquí, corro la coma otros dos... No. Subo los números que hay al otro lado de la coma. Entonces son 4 [cifras decimales]. O sea, que sería por 10^{-4} el número que me quede luego para multiplicar. Entonces multiplico esto, que serían... *57, que puedo redondear a 60*[265], y esto lo redondeo a 70. O sea, que son 6 por 7, 42. 42... Vale. 6 por 7, 42. Y luego, *uno, dos, tres y cuatro*. Entonces sería 0,042. A ver. *Uno, dos, tres y cuatro*... No. Me falta un cero. Así. *Uno, dos, tres*... No. [Escribe 0,042].

Estimación: 0,042; Error: 97,7%

En el ejemplo anterior se producen una equivocación al estimar con datos diferentes de los propuestos. El alumno estima la operación 0,57 × 0,72. Además, comete el mismo tipo de error en el ajuste del valor posicional que se verá en el siguiente ejemplo. En él, el alumno 32 realiza el ajuste tres veces seguidas.

Entrevistador: 0.45 × 7.85

Alumno 32: Aquí multiplico normal. O sea, 4 por 7. Aquí multiplico 7 por 4, 28 y cuento los decimales que tengo a la derecha de cada uno. *Entonces 1, 2, 3, 4*. Entonces 28, *1, 2, 3, 4*. [...] Vale, 28. Entonces cuento que hay cuatro ceros: *0,... 0,0028*.

Estimación: 0.0028; Error: 99,9%

A pesar de las repeticiones, el alumno comete un error precisamente al ajustar el valor posicional. El procedimiento correcto es: $0{,}45 \times 7{,}85 \approx 40 \times 700 \times 10^{-4} = 28000 \times 10^{-4} = 2{,}8$. El error radica en no contar los tres ceros que se producen en la multiplicación 40 × 700 y ajustar el valor posicional teniendo en cuenta solo las cuatro posiciones decimales de partida.

[265] En este "57, que puedo redondear a 60", más la operación siguiente, es donde detecto que el alumno ha realizado todo el proceso de estimar con 0,57 en lugar de 2,57.

2.3.9. Repetición global de todo el proceso de estimación empleando el mismo enfoque (MRRG)

Mientras que en algunos de los apartados anteriores, se repite una parte del proceso de estimación, bien sea un cálculo, el ajuste del valor posicional, o los números implicados en una operación, en este caso se repite el proceso completo, incluyendo la destreza de aproximación y la fase de cálculo. Así, en el ejemplo siguiente, las tres primeras líneas de la intervención del alumno corresponden a la primera ejecución de la estrategia completa, mientras que las tres últimas líneas se refieren a la segunda ejecución completa de la misma estrategia. Se advierte incluso el detalle de cómo se repite, en ambas ocasiones, el cambio en la forma de operar la coma decimal (de 800 × 900 a 80 × 90) que es un indicador claro de que en ambos casos se repite el proceso de estimar desde el principio.

Entrevistador: 78.4 × 89.5

Alumno 29: *Esto sería 800 por 900. 9 por 8 son 72. Cero coma... Ah, no. Porque redondeas. Redondeabas 80 por 90 y claro, se quedaba en 72. Y hacías así [escribe dos ceros] y valía esto.* Me parece que sí, ¿No? Porque eran las comas iguales, ¿No?... Mira que... Es que no lo sé. Yo dudo mucho. *800 por 900. 80 por 90... 80 por 90... Pongo el 72 y... Es que no sé si es 720 o 7200. 80 por 90 se añadirían los dos ceros. [Escribe 7200]*

Estimación: 7200; Error: 2,6%

En algunas ocasiones, los estimadores sufren una dificultad que les impide completar la ejecución de una estrategia. En el siguiente ejemplo, el alumno se 'atasca' al ajustar el valor posicional y vuelve a comenzar desde el principio con la misma estrategia. Al segundo intento, llega a producir su estimación (errónea de 0,024) y, finalmente, acaba repitiendo por segunda vez la misma estrategia para comprobar el resultado, aunque termina manifestando grandes dudas hacia el mismo[266].

Entrevistador: 0.025 × 776

Alumno 29: 0,025 lo... subo a... 30 y 776 lo subo a 800. Sería 800 por 30. 3 por 8, 24. 24... y, como es una multiplicación con decimales, pues sería, cuento los decimales, los números que hay detrás del cero coma, que son tres. A ver. Esto es un lío. No sé. 800 por 20... No. 800 por 30. 8 por 3, 24. Será así. Sería... 0,024. Porque cuento los números que hay detrás del cero coma. Entonces cuento el 4 como 1, el 2 como 2, el cero como el 3. Entonces pongo el 0,024. Que no sé si será eso... Espérate a ver. Es que me parece muy raro que sea eso... ... 800 por 30. 3 por 8 son 24. Yo que sé. Es que yo creo que eso está mal... Vale. [Deja el 0,024 como estimación y pasa al siguiente cálculo]

Estimación: 0,024; Error: 99,9%

Revisando todos los tipos de repeticiones que se han examinado en estos apartados, el primer tipo (repetición de los datos y de la operación) es previo a la fase de cálculo. Se da al final de la fase de interpretación en que se ejecuta la destreza de aproximación y da la entrada a la fase de cálculo. Los dos siguientes tipos de repeticiones afectan, cada uno, a uno de los componentes de la fase de

[266] Este es uno de los no muchos ejemplos que hay, que evidencia la fase de evaluación dentro del proceso de estimación. En este caso, la evaluación además es correcta. El alumno produce una estimación no razonable y piensa que ha cometido un error. En el trasfondo de esta situación de evaluación, se nota que el alumno no domina las reglas de operar la coma decimal con lo que, a pesar de las repeticiones, no consigue dar una estimación adecuada.

ejecución: la operación de los números y el ajuste del valor posicional. Finalmente, el último tipo de repetición involucra al proceso completo de estimar, incluyendo la aproximación que se observa en la fase de interpretación.

3. ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS DE ESTIMACIÓN

Voy a comenzar el apartado dedicado al análisis de estrategias mostrando las diferencias entre el enfoque que se da a las estrategias en el presente trabajo y en De Castro (2002). Este trabajo anterior estaba basado en el trabajo de Reys y otros (1982) y en Segovia y otros (1989), fundamentado en el trabajo clásico de Reys y otros (1982), pero muestra algunas diferencias interesantes con él. Reys y otros (1982) distinguen claramente entre los *procesos* de estimación (reformulación, traducción y compensación), considerados como "procesos cognitivos de alto nivel" (p. 187) y las estrategias, como la *estrategia frontal*, que a su vez se dan en distintas *formas* (redondeo y truncamiento), que admiten variantes, como el redondeo con el mismo número de dígitos (MND) o el trabajo con extractos de los números redondeados (EXT). Así, en el modelo RTC de Reys y otros (1982) se distinguen 4 niveles diferentes: un nivel 0[267], correspondiente a los procesos de estimación, y los tres niveles de estrategias citados (ver Tabla 6.1).

Segovia y otros (1989) siguen básicamente el trabajo de Reys y otros (1982) pero con una diferencia de matiz bastante interesante. En este trabajo, se acepta el término de '*procesos de estimación*', pero se deja un poco en un segundo plano para dar más protagonismo al término 'estrategia'. Un ejemplo de estrategia será:

[267] He optado aquí por un Nivel 0 (de estrategias) puesto que los autores hablan de 'procesos', contraponiendo el término al de 'estrategia'.

Problema de cálculo estimativo → Reformulación Truncamiento → Cálculo Algoritmo usual → Compensación en el resultado → Resultado → Valoración

Las estrategias incorporan, dentro de su ejecución, los procesos de estimación. En el modelo original (Reys y otros, 1982), los procesos se ven de forma más global[268]. La reformulación tiene que ver con poner en un primer plano los números, tratando de simplificarlos, y trabajar con la misma operación, mientras que la traducción requiere un pensamiento más flexible, pensar simultáneamente en los números y las operaciones, alejándonos más del problema original[269]. Mientras tanto, en Segovia y otros (1989), los procesos de estimación se ven asociados a ciertas componentes de las estrategias (como la reformulación aparece vinculada al truncamiento) y las estrategias se convierten en las protagonistas en la estimación[270].

Siguiendo el planteamiento de Segovia y otros (1989), en De Castro (2002) se clasifican las estrategias atendiendo a los procesos de estimación que aparecen en ellas. Así, hay estrategias en las que se detectan procesos de traducción y compensación, y otras en las que solo aparecen procesos de reformulación[271].

[268] En este contexto, 'global' quiere decir que el procedimiento empleado por el estimador, visto en su totalidad, produce la impresión de que el estimador es más o menos flexible a la hora de abordar el problema de estimación.

[269] Los autores hablan de la flexibilidad, y del alejamiento del problema original en términos de que la traducción cambia la 'estructura matemática del problema', mientras que la reformulación mantiene esta estructura inalterada.

[270] Ahondando en la diferencia, en el trabajo de Reys y otros (1982) la traducción tiene una connotación de flexibilidad atribuida al estimador que se pone de manifiesto al vincular la compensación, por ejemplo, con la 'tolerancia del error' (factor afectivo frecuentemente vinculado a la estimación a partir de este trabajo). En Segovia y otros (1989), la reformulación (y los demás procesos) tienen una mayor connotación de características de los procedimientos.

[271] Este tipo de clasificación es posible gracias al distinto tratamiento que se da a binomio proceso-estrategia de estimación en los trabajos de Reys y otros (1982) y Segovia y otros (1989), que se acaba de comentar.

Los trabajos de Gómez (1995) sobre cálculo mental y Siegler y Booth (2005), en su revisión sobre estimación, subrayan algo que ya estaba presente en los trabajos anteriores sobre estimación, pero lo hacen mucho más evidente: Las estrategias de estimación pueden considerarse según distintos niveles de generalidad. Ya en el trabajo de Reys y otros (1982) he diferenciado, al comenzar este apartado, cuatro niveles distintos. Siegler y Booth (2005) utilizan el término 'familia de estrategias' para lo que otros autores llaman 'procesos' (reformulación, traducción y compensación) y utilizan un segundo nivel para las estrategias propiamente dichas. Gómez (1995) distingue 5 niveles en el análisis de estrategias (ver Tabla 6.1).

Tabla 6.1. *Diferentes niveles de generalidad para las estrategias de estimación*

	Referencias para la elaboración del modelo de niveles en estrategias				
Nivel	Reys y otros (1982)	Segovia y otros (1989)	De Castro (2002)	Siegler y Booth (2005)	Gómez (1995)
0	*'Procesos'* Reformulación, Traducción y Compensación	*Estrategias* con Reformulación, Traducción y Compensación	1. *Procesos* R,T,C y *Estrategias* R, RC, RT, RTC, y Sin RTC	1. *'Familias de estrategias'* Reformulación Traducción y Compensación	1. Estrategias 2. Métodos
1	Estrategia frontal	Estrategia frontal	2. Redondeo R2, Redondeo R1, Potencias de 10, Fracciones, Exponentes, Imitación del algoritmo.	2. Redondeo, Truncamiento, Compensación previa, Compensación posterior, Descomposición, Traducción.	3. Modalidades
2	Redondeo Truncamiento	Redondeo Truncamiento			
3	Redondeo EXT Redondeo MND Trunca. EXT Trunca. MND	Redondeo EXT Redondeo MND Trunca. EXT Trunca. MND			4. Enfoques 5.Procedimientos

En el presente trabajo he querido profundizar en el enfoque sobre las estrategias iniciado en Segovia y otros (1989), en el que se describen cuidadosamente las estrategias a través de sus componentes[272]. Se han incluido el 'grado de aproximación' como variable de proceso ligada a las estrategias y el

[272] Ver los diagramas presentes en Segovia y otros (1989, pp. 148-150) en los que se muestran las diferentes componentes de las estrategias de estimación.

'modo de operar la coma decimal', tomado de Gómez[273] (1995) y se ha incluido la representación de las estrategias como configuraciones en redes sistémicas de Bliss y otros (1983).

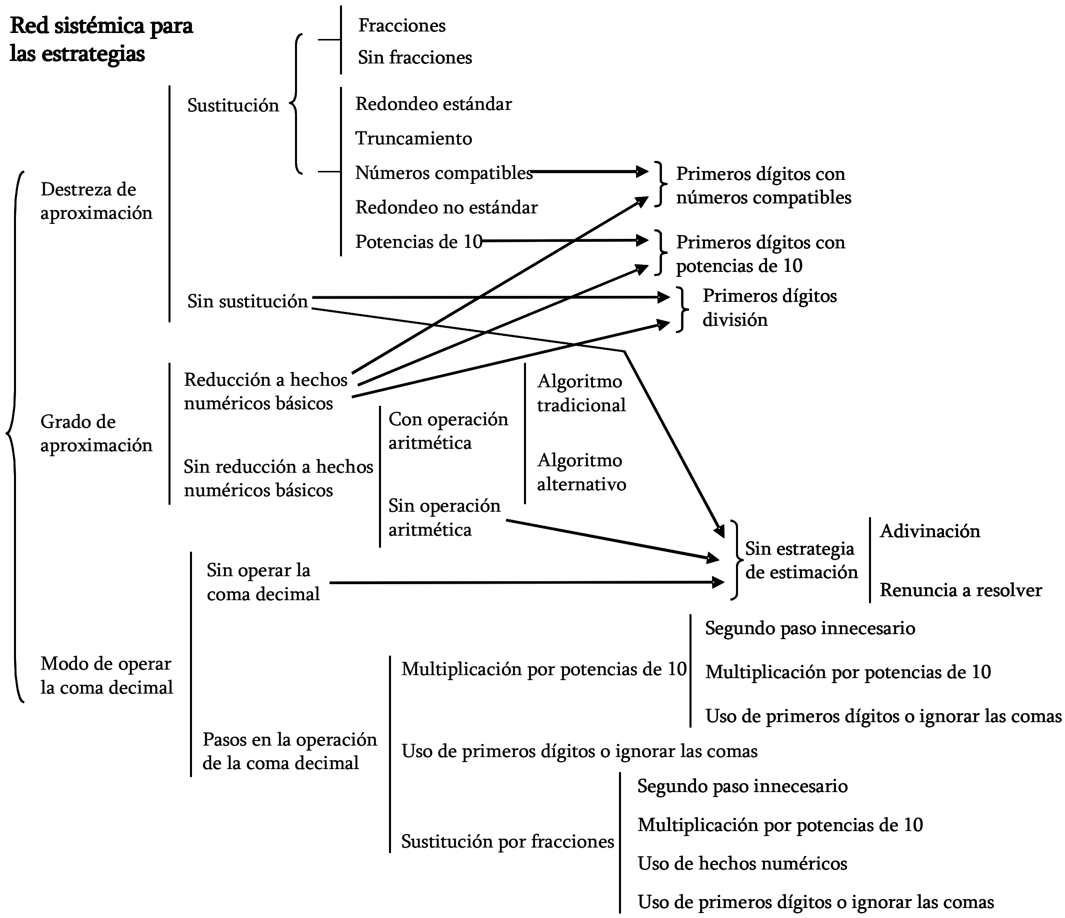


Figura 6.5. Red sistémica para las estrategias de estimación

[273] El valor que tiene, en este punto, el trabajo de Gómez (1995) es que habla explícitamente de la 'forma de operar la coma decimal'. En otros autores, la forma de determinar el valor posicional es importante y aparece, aunque de forma implícita. Es el caso del trabajo de Reys y otros (1982) cuando distingue entre el extracto del redondeo (EXT) y el redondeo con el mismo número de dígitos (MND). Evidentemente, se trata de dos formas diferentes de determinar el valor posicional, añadiendo al final los ceros, o arrastrándolos a través de todo el proceso. En el análisis de Levine (1980) también describe cuidadosamente dos formas diferentes de operar la coma decimal: aplicando primero una destreza de aproximación y después multiplicando por la unidad seguida de ceros, o al revés. En el primer caso se suelen simplificar notablemente los cálculos pero el segundo es más habitual, por ser el modo en que se opera con los algoritmos.

Para avanzar sobre el trabajo de De Castro (2002), se ha abordado un análisis más fino de las estrategias, estudiándolas en un segundo nivel en el que no se consideran los procesos de reformulación, traducción y compensación, como era habitual en trabajos anteriores. En la Figura 6.5, se observa la red sistémica empleada como base para la descripción de las estrategias de estimación.

3.1. Estrategias 'básicas' de estimación

En el título de este apartado, utilizo el término 'básicas', aplicado a las estrategias, para significar que es posible descender a un nivel más detallado en el análisis de las estrategias y distinguir aspectos importantes dentro de una misma estrategia como serían los diferentes modos de sustituir los números por aproximaciones, o de operar la coma decimal. Dentro de los apartados dedicados a las estrategias se intentará ejemplificar la variedad de posibilidades que se pueden encontrar dentro de cada estrategia.

3.1.1. Primeros dígitos

La característica principal de la estrategia 'primeros dígitos' consiste en la reducción de la estimación al uso de hechos numéricos básicos y al ajuste del valor posicional. Normalmente, se produce una sustitución mediante una destreza de aproximación, pero en el caso de la división a veces se lleva a cabo sin sustitución. Voy a poner ejemplos de las diferentes variantes que admite esta estrategia según se aplique una destreza de aproximación u otra, e incluso, sin destreza de aproximación (ver Figura 6.6). Se presentan primero ejemplos con *redondeo*:

Entrevistador: 34,1 × 47,2

Alumno 2: 34.1 lo redondeo a 30 y 47.2 a 50. Tres por cinco, 15. Mil quinientos.

El redondeo también se utiliza con otra forma de operar la coma decimal. En este caso, el Alumno 2 utiliza primero el redondeo, eliminando las cifras decimales; otros alumnos eliminan primero la coma y luego aplican el redondeo:

Entrevistador: 34,1 × 47,2

Alumno 28: Multiplico por 10. Serían 341 por 472. 341 lo voy a redondear a 300 y 472 a 500. 5 por 3, 15 y cuatro ceros, y le quito dos por las comas. 1500.

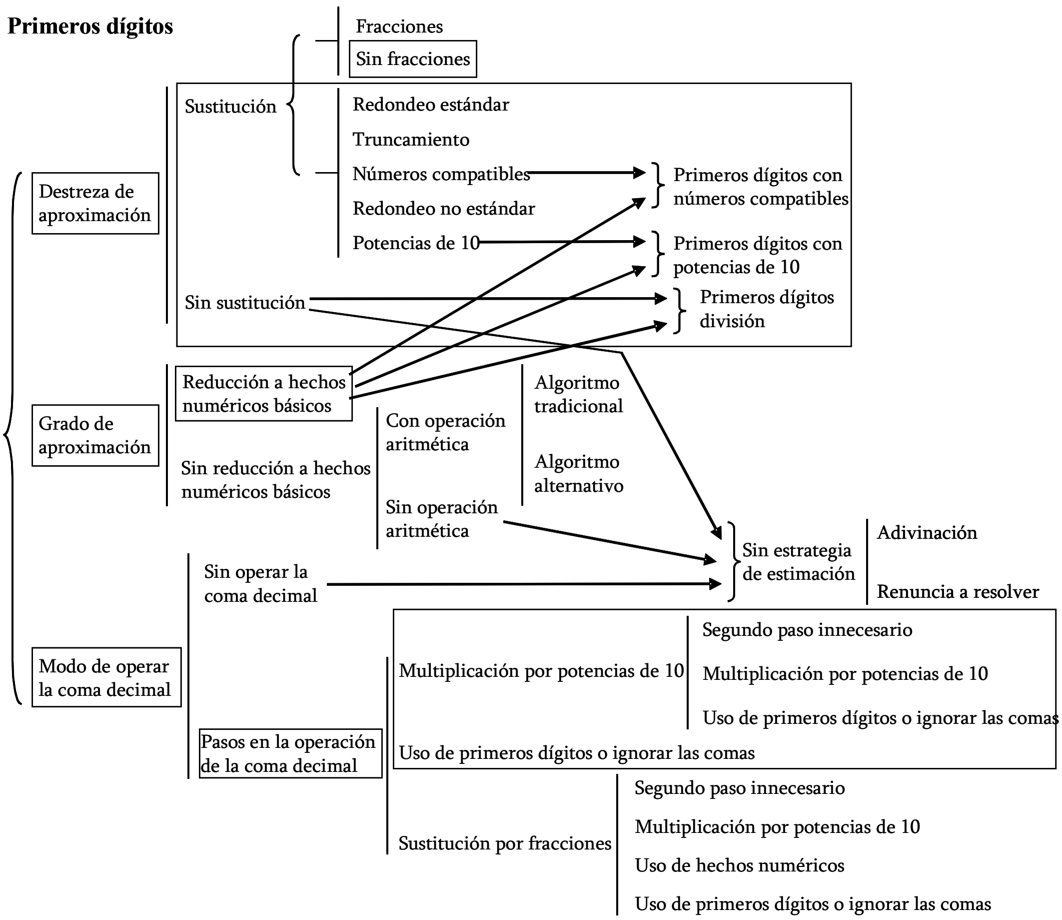


Figura 6.6. Configuración para la estrategia de "primeros dígitos"

A continuación, se muestran ejemplos de truncamiento[274]:

[274] En el apéndice E, dedicado al análisis individual de los ítems, se ve que para 34.1 × 47.2, sólo 2 alumnos dieron una estimación de 1200, asociada claramente al truncamiento, mientras que

Entrevistador: $34{,}1 \times 47{,}2$

Alumno 32: Redondeo a 34. O sea. Me olvido de los decimales aquí y los multiplico. 4 por 3, 12, 12, 1200, 12000[275].

Entrevistador: 46×771; Estimación: 28000

Alumno 9: Esto tiende a 50. Esto a 1000. Entonces sería... Así, o bien, también por 4 por 7, 28, con tres ceros, sería... 28000.

En este último ejemplo, se ve como el alumno 9 comienza aplicando el redondeo y la sustitución por potencias de 10, para pasar al truncamiento. También hay ejemplos de 'números compatibles', más característicos de situaciones de división, aprovechando la sustitución del dividendo y el divisor por dos números entre los cuales se da la relación de múltiplo y divisor:

Entrevistador: $968 \div 24$

Alumno 3: Aquí he puesto 1000 y lo he hecho entre 25. Y como hay 4 cada 100, 4 por 10, 40.

E: 40; 0,8% error.

En algunos casos se ha utilizado el redondeo a la *potencia de 10* más cercana. Por ejemplo, en el caso siguiente, se redondea 89,5 a 100 en lugar de a 90 (o la sustitución de 0,72 por 1 del alumno 22).

Entrevistador: $78{,}4 \times 89{,}5$

Alumno 12: Redondeo esto a 80 y esto a 100. Entonces 80 por 100 son 8000.

---

47 alumnos dieron 1500, correspondiente al redondeo, como respuesta. Esto muestra una preferencia notable del redondeo frente al truncamiento. En el ítem 46×771, 4 alumnos dieron la estimación de 28000, frente a 31 que dieron la de 40000.

[275] En este caso, se produce un error en el ajuste del valor posicional. El alumno da 12000 como estimación, cuando lo correcto sería dar 1200.

Entrevistador: 2,57 × 0,72

Alumno 22: Pues, esto, lo más fácil, a lo mejor, sería... Este le dejo 2,5 por 1. 2,5.

También pueden encontrarse algunos ejemplos que encajan dentro de la categoría del 'redondeo[276] no estándar', especialmente, en situaciones previas a la sustitución de un número decimal por una fracción, que se examinarán con más detalle en el siguiente apartado.

Entrevistador: 2.57 × 0.72

Alumno 20: Esto, multiplico. Voy a utilizar este número como 250. Este número como 0,75. 250 por 0,75 es como multiplicar 250 por ¾.

En este caso, el redondeo estándar de 0,72 debe hacerse a 0,7 y la sustitución de 0,72 por 0,75 es un paso previo pensado en función de la relación 0,75 = 3/4 y es un caso claro de redondeo no estándar.

Hay casos en los que no se utiliza *explícitamente* ninguna destreza de aproximación y no hay sustitución de los números iniciales. Se trata de una estrategia de estimación, especialmente vinculada a la división, que supone *implícitamente* la aplicación de un truncamiento. Consiste en comenzar una división determinando la primera cifra del cociente, junto con su valor posicional, dejando el algoritmo 'a medias'. No hay pues, en este tipo de estrategia, ni un proceso de reformulación evidente, ni una traducción, aunque se considera una estrategia válida para estimar (ver Figuras 6.7 y 6.8, tomadas de un texto en que se enseña esta estrategia).

[276] El uso del término "redondeo" puede resultar abusivo aplicado a situaciones como el cambio de 0,72 por 0,75, dado que no hay sustituciones de cifras por ceros. No obstante, mantengo la expresión 'redondeo no estándar', entrecomillada, para indicar este tipo de sustituciones.

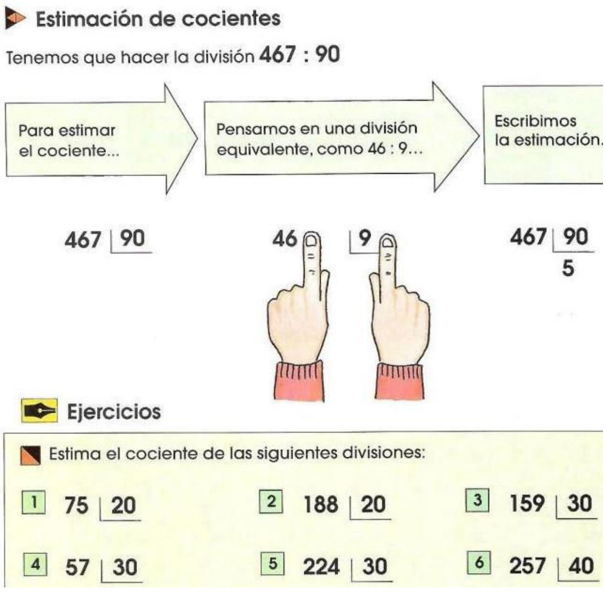


Figura 6.7. Ejemplo, en un libro de texto, de la estrategia "primeros dígitos", sin sustitución

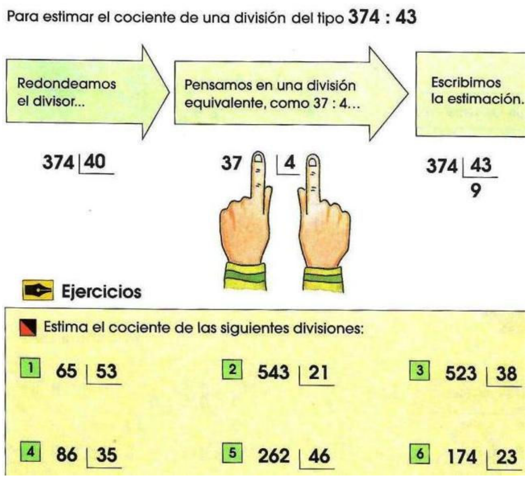


Figura 6.8. Aplicación de la estrategia en una situación diferente

Entrevistador: 0,37 ÷ 0,543

Alumno 20: Corro la coma tres a la derecha en el divisor. Tres a la derecha en el dividendo. 370 entre 543, 0,7.

Como puede verse, en el proceso anterior no hay fase de aproximación.

Simplemente, basta con mirar los primeros dígitos (37 en el dato de la izquierda y 5 en el de la derecha) y recuperar un hecho numérico apropiado (en este caso, $5 \times 7 = 35$) para producir una estimación. Se produce la ventaja, además, sobre el algoritmo de la división, de que la estimación puede ser tanto una subestimación como una sobrestimación, no como en el algoritmo de la división, en que se debe estar pendiente de aproximarse al dividendo por valores inferiores al mismo.

Otros ejemplos de estrategia de primeros dígitos se producen en la multiplicación, cuando el proceso de aproximación conduce a la multiplicación de un número de dos cifras por un número de una cifra. En el primer ejemplo, 46×771 se cambia por 45×800. En el primer caso hay un ejemplo de sustitución por números compatibles o un 'redondeo' no estándar (46 a 45). La dificultad de hacer mentalmente el cálculo imitando el algoritmo escrito hace que el alumno 14 repita varias veces el proceso hasta estar seguro del resultado.

Entrevistador: 46×771

Alumno 14: 46 por 780, o por 770... Sigue siendo demasiado difícil para hacerlo mentalmente. Así que hago, por un lado, 460 lo voy a redondear un poco a 450. 771 hacia 800. Entonces, 45 por 8... 8 por 5, 45... No. 8 por 5, 5 por 8... 40. A ver. Otra vez. 45 por 800. 45 por 800... 8 por 5,... 8 por 5, 40 y me llevo 4. Y 8 por 4... 32 y 4, 36. 36, el cero que tenía aquí y dos más, de que es por 800. Ya está.

Estimación: 36000; 1,5% error.

En este caso, la misma operación 58×244 se sustituye, empleando el redondeo y el truncamiento, por 60×240. Tanto en el ejemplo anterior como en este, el esfuerzo de operar con números de dos cifras se ve recompensado con estimaciones muy precisas (de un 1,5% de error y un 1,8% respectivamente).

Entrevistador: 58×244

Alumno 6: Pondría 60 por 240. 4 por 6 es 24 y me llevo 2, 144 y dos ceros más.

Estimación: 14400; 1,8% error.

En el caso de la división, se imita el algoritmo escrito dividiendo números de dos cifras por otros de una cifra. En el caso siguiente, $85.9 \div 3.42$ se sustituye por $86 \div 3$ y se determina el cociente de dicha división (28) ignorando las cifras decimales de la misma, consecuentemente con el hecho de estar en un proceso de estimación.

Entrevistador: $85.9 \div 3.42$

Alumno 22: Pues, en esta, haría 86 entre 3 y quito los decimales. 2 por 3, 6... 28. Creo. Sí.

Estimación: 28; 11,5% error.

Lo mismo ocurre en este último ejemplo de división. Se advierte en estos ejemplos que, siempre que los alumnos pueden dar una mejor estimación sin complicar demasiado el proceso, lo hacen. Así, muchos pueden reconocer que $90 \div 6$ son 15, pero en este caso se recupera el 6 de las unidades del dividendo para alcanzar mayor precisión en la estimación.

Entrevistador: $96.2 \div 6.25$

Alumno 7: Aquí voy a redondear a 96 y a 6 y me va a quedar... 96 entre 6 a 16.

Estimación: 16; 4,0% error.

Estos ejemplos de multiplicación y división resultan muy interesantes por que en ellos se desarrollan cálculos mentales que Plunkett (1979) consideraba en la 'banda amarilla'. Es decir, tipos de cálculos que una persona en la calle haría seguramente de cabeza. Como ejemplo de este tipo de cálculos, Plunket propone 17×3 y $72 \div 4$. Podrían considerarse los procesos de estimación que contienen estos cálculos como un subtipo, dentro de la estrategia de 'primeros dígitos'. Lo interesante de esta variante, o subtipo, dentro de la estrategia, es que permite ver con detalle cómo los estimadores juegan con las variables 'grado de aproximación', tanteando o examinando los límites de su propia destreza de cálculo mental, buscando el equilibrio perfecto entre aproximación en los datos y precisión en el resultado.

3.1.2. Fracciones

El elemento distintivo de esta estrategia es la sustitución de un número decimal por una fracción. Esta sustitución afecta, tanto al algoritmo empleado en la fase de cálculo mental, como a la forma de ajustar el valor posicional del resultado (y al modo de operar la coma decimal). Normalmente, la sustitución de un dato por una fracción conlleva una sustitución del otro dato con el fin de 'acomodar' este a las operaciones que deben realizarse con la fracción.

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno20: Esto multiplico. Voy a utilizar este número como 250. Este número como 0,75. 250 por 0,75 es como multiplicar 250 por ¾. 250 entre 4. Bueno, voy a hacer primero por 3 son 750. Entre 4 son un poco menos de 140. Y tengo que quitar dos comas. O sea, 1,4.

Estimación: 1,4; 24,3% error.

El cálculo inicial 2.57×0.72 se sustituye por (¾ de 250) $\div$ 100. Para operar la coma decimal en 2.57 se multiplica por 100 y se deja pendiente la división por 100 para el final. Si se utilizase en su lugar el redondeo a 3, o el truncamiento a

2 en 2.57, se eliminarían desde el principio las cifras decimales. En su lugar, se ha optado por el truncamiento de 2.57 a 2.5. En el ejemplo siguiente, se muestra una variante de la estrategia del uso de fracciones, en la que se opera de un modo diferente la coma decimal.

Entrevistador: 0.45×7.85

Alumno2: 0.45 lo redondeo a 0,5 que es ½. Y lo multiplico por... no sé. A ver... Bueno, sí. Un medio y por eso [7.85] pues... 4 más o menos.

Estimación: 4; 13,2% error.

En este caso, tras sustituir 0.45 por ½, 7.85 se redondea implícitamente a 8, con lo que la operación queda como ½ de 8, eliminando la necesidad inicial de trabajar con números decimales. En el siguiente ejemplo, no se utiliza realmente ninguna de las dos formas anteriores de operar la coma decimal: ni se redondea el número, para eliminar las cifras decimales, ni se opera como en el algoritmo de la multiplicación, retirando la coma decimal para recuperarla después. En este caso, la coma decimal se 'arrastra' a lo largo del cálculo, pues al hacer la mitad de 7.85, parece hacerse por un lado la mitad de la parte entera (½ de $7 \approx 3$) y, por otro, la mitad de la parte decimal (½ de $85 \approx 43$).

Entrevistador: 0.45×7.85

Alumno6: 0.45 pues... lo paso... Esto es 0,5 que sería la mitad al multiplicarlo por esto [7.85] y sería 3,43, creo.

Estimación: 3.43; 2,9% error.

En el siguiente ejemplo, el Alumno 16 hace en primer lugar la mitad de 7 (3,5) y después añade la mitad de las 4 décimas (0,2) para una estimación final de 3,7. Resulta curioso cómo haciendo la mitad con más precisión que en el caso anterior, el porcentaje de error resulta mayor. Esto se debe a que, realmente, no se pide hacer la mitad, sino el 45%. En este caso se opera la coma decimal de un modo parecido al anterior, arrastrándola en lugar de eliminarla y recuperarla al final.

Entrevistador: 0.45×7.85

Alumno16: Como es 0,45 pues lo redondeo a 0,50 y la mitad, pues de 7,85 son 3,5. 3,7.

Estimación: 3.7; 4,7% error.

En el caso siguiente, hay una sustitución de 0.025 por $(^{100}/_{4}) \div 1000$. El alumno, que es bueno en cálculo mental, consigue determinar la respuesta exacta del cálculo. Posiblemente utilice la descomposición $800 = 776 + 24$, o la imitación del algoritmo ($776 \div 4$), para realizar su cálculo. Este es un ejemplo de sustitución de un dato por una fracción dejando inalterado el otro dato.

Entrevistador: 0.025×776

Alumno 20: Divido 776 entre 4, que son 194. Multiplico por 100, 19400 y quito tres ceros. 19,4.

Estos ejemplos ilustran bien lo que serían las diferentes variantes del uso de la estrategia de fracciones, lo que supondría un análisis más fino y profundizar pasando a un nivel distinto de análisis, según la idea de diferentes niveles en el análisis de estrategias que se esboza en la Tabla 6.1. Así, en el primer ejemplo propuesto en este apartado, junto a la sustitución por fracciones hay otros ingredientes que permiten un análisis más fino: se utiliza como *destreza de aproximación* (en el otro dato no sustituido por fracción) el truncamiento, y esta destreza, con el *grado de aproximación* de truncamiento a las décimas (2.57 a 2.5) y la *operación de la coma decimal* se realiza como en el algoritmo escrito. Sin embargo, en el segundo ejemplo se opta por el *redondeo a las unidades* (7.85 a 8), lo que implica, además de un diferente *grado de aproximación*, un modo distinto también de *operar la coma decimal*, al ser esta eliminada al aplicar el proceso de aproximación. Es en estas tres variables (destreza de aproximación, grado de aproximación, y modo de operar la coma decimal) en las que se ponen de manifiesto las diferentes variantes de la estrategia de fracciones, si se profundiza en el nivel de análisis de la misma.

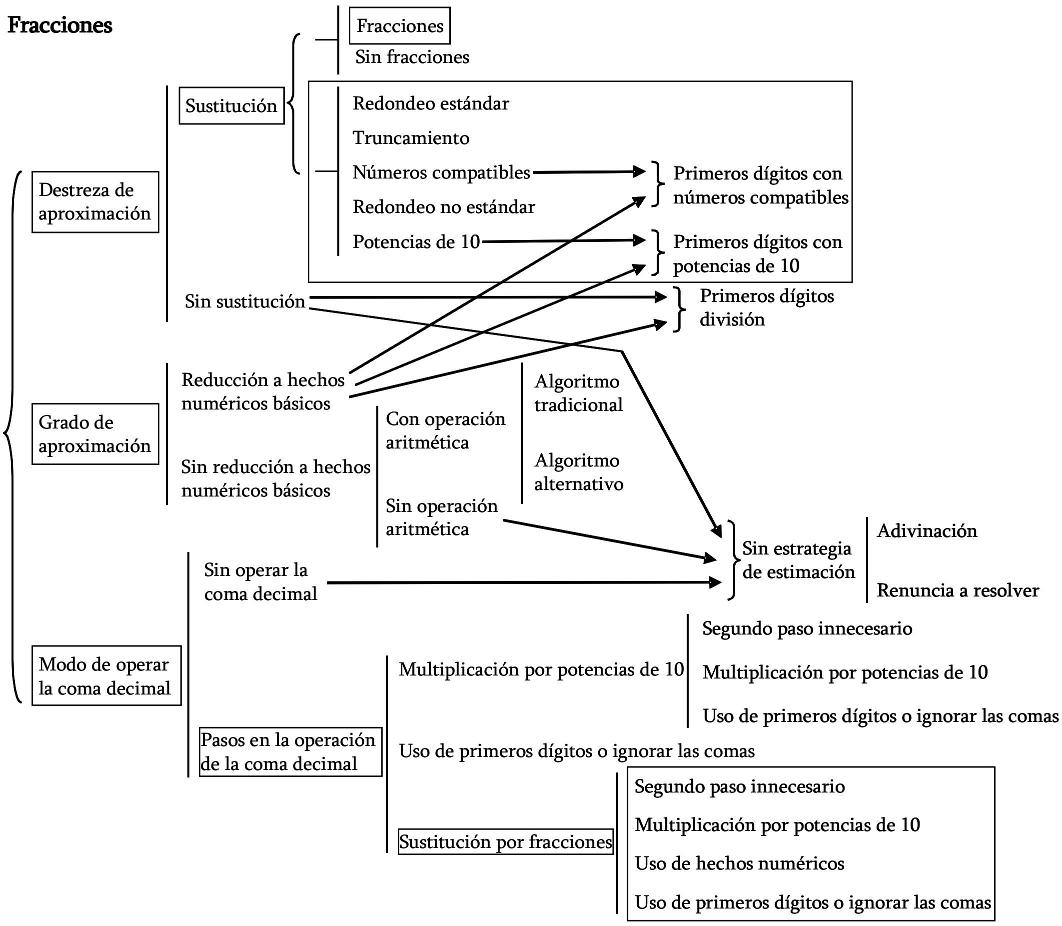


Figura 6.9. Configuración para la estrategia de "fracciones"

3.1.3. Algoritmo alternativo

Un tercer tipo de estrategia, muy poco frecuente en la investigación, es el uso de 'algoritmos alternativos'. Este tipo de estrategia se refiere a procedimientos en los que los alumnos no han reducido el cálculo de las cifras del resultado a hechos numéricos básicos (recuperando resultados de las tablas de multiplicar), ni tampoco han imitado (siquiera de forma simplificada) los algoritmos tradicionales de las operaciones, ni los propios del uso de fracciones. En su lugar, han utilizado un enfoque diferente para el cálculo. Esta estrategia se ha producido en divisiones y parece una adaptación de una estrategia de cálculo mental a situaciones de estimación. Consiste en descomponer factorialmente el dividendo como producto de dos factores, buscando que uno de ellos sea un múltiplo aproximado del divisor; a continuación se calcula cuántas veces cabe el divisor en ese factor (bien a través de sumas reiteradas del divisor o de productos del divisor por otro número), y luego se multiplica el resultado por el otro factor. Todo esto se hace entendiendo las relaciones de múltiplo y divisor de forma aproximada, para adaptar una estrategia de cálculo mental a la estimación. En el ejemplo siguiente, el cálculo inicial $968 \div 24$ se sustituye por otro más sencillo ($1000 \div 25$) a fin de poder aplicar el cálculo mental. Se descompone 1000 como 10×100, se utiliza que $4 \times 25 = 100$, y se multiplica el 4 hallado por el otro factor proveniente de la descomposición inicial de 1000 (10), para tener una estimación de $4 \times 10 = 40$.

Entrevistador: $968 \div 24$

Alumno3: Aquí he puesto 1000 y lo he hecho entre 25. Y como hay 4 cada 100, 4 por 10, 40.

Estimación: 40; 0,8% error.

En el segundo ejemplo, la operación de la coma decimal transforma la operación inicial en $680 \div 24$. Después se cambia por $700 \div 25 = (7 \times 100) \div 25$ y esto, a su vez, por $7 \times (100 \div 25) = 7 \times 4 = 28$. Dado que apenas se alteran los datos iniciales, y que su cambio incluye además una compensación previa involuntaria, el porcentaje de error es solo del 1,2%.

Entrevistador: $0.68 \div 0.024$

Alumno27: 680 entre 24. 24 [inaudible] 25. 680 entre 24. 24 por 4, 100 por 7, 28. Yo creo que son 28.

Estimación: 28; 1,2% error.

El último ejemplo de esta estrategia incluye un pequeño cambio con respecto a los anteriores. El alumno 14 realiza la división de $100 \div 25$ a través de una suma para llegar a la conclusión de que "100 tiene 4 veinticincos". La estrategia puede sintetizarse del modo siguiente: $9.88 \div 25.6$ da lugar a un resultado que comienza por '0,'. A continuación, se debe resolver $98.8 \div 25.6 \approx 100 \div 25$. Aquí es donde el alumno resuelve la división a través de una suma.

Entrevistador: $9.88 \div 25.6$

Alumno14: Me parece que, si pongo un cero de resultado, eso quiere decir que bajo la coma. O sea, que en lugar de 9,88, puedo poner 98,8. Y a mí me da que eso lo hago, si pongo un cero coma en el resultado. Entonces yo sigo así. Y 98,8 entre 25,6... Vamos a redondear. Claro. Y 98,8 ya directamente ¿a qué pasa? A 100. Y 100 entre 25. 100 entre 25. 2 por 5... 5 por 4... A ver. 100 entre 25. 25 más 25, 50, 75 y 100. 4. 100 tiene 4 veinticincos. Porque 4 por 5, 20; 4 por 2, 8 y 2, 10. Vale.

Estimación: 0,4; 3,6% error.

Una variante de esta estrategia podría ser buscar, mediante tanteos sucesivos, utilizando la descomposición aditiva del dividendo ($96 = 90 + 6$), y recuperando el resultado $6 \times 15 = 90$. En este caso (como ya ocurre en el ejemplo anterior) no hay descomposición factorial del dividendo, aunque sí aditiva, por eso la considero una 'variante' de la estrategia básica.

Entrevistador: 96.2 ÷ 6.25

Alumno27: 6 por 15 serían 90, mas otro 6, 96. Sería 16.

Estimación: 16; 4,0% error.

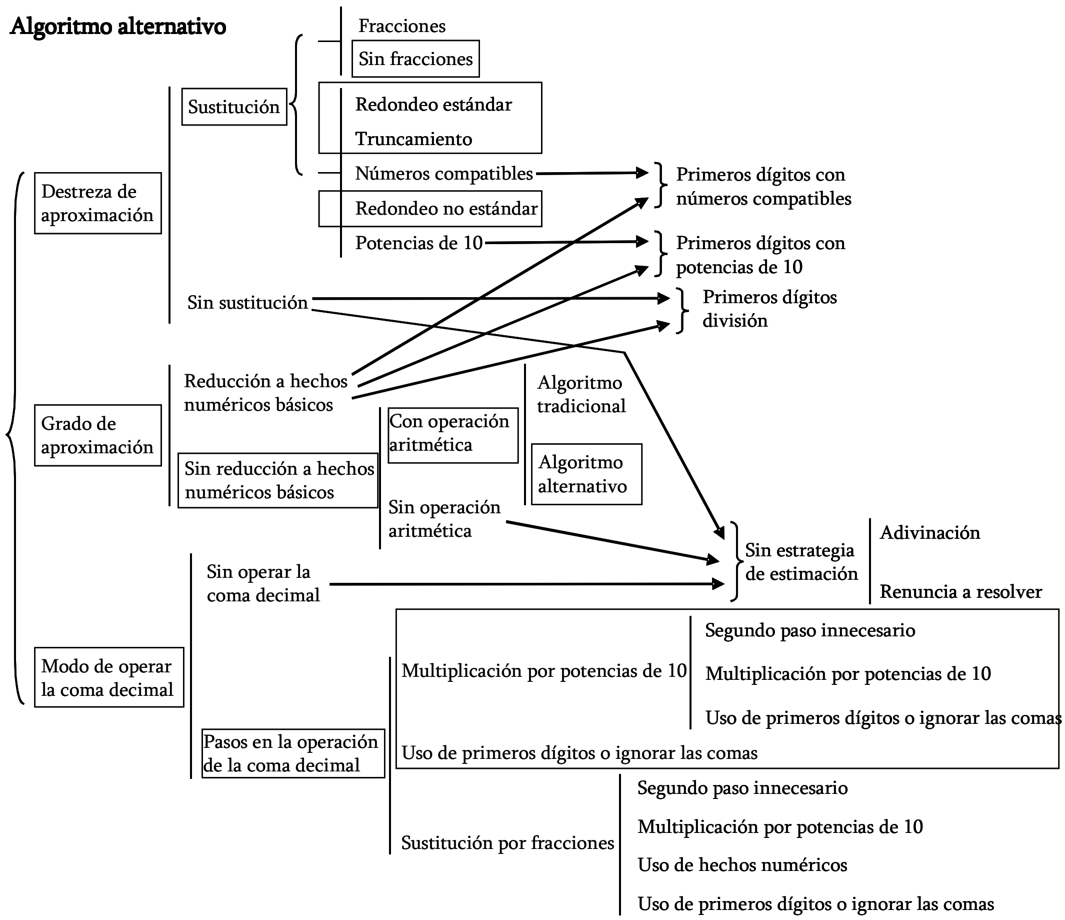


Figura 6.10. Configuración para la estrategia de "algoritmo alternativo"

Un aspecto interesante de resaltar en esta estrategia[277] es que refleja procesos de reformulación y traducción. La reformulación se da en el redondeo (de 98,8 a 100) y en el truncamiento (25,6 a 25) del último ejemplo analizado. La reformulación puede verse en el cambio de una división por una multiplicación

[277] Dicho en una sola frase, la estrategia consiste en aproximar el divisor a una parte alícuota de un factor de una aproximación del dividendo. Es una estrategia de estimación, basada en una estrategia de cálculo mental similar a la descrita para la multiplicación en Gómez (1995, p. 55) en la que se hace $a \times b = a/n \times b{\times}n$.

o incluso de una suma, como en el último ejemplo también. La estrategia explicada se basa en la división como operación inversa de la multiplicación, y en la división con descomposición factorial del dividendo.

3.2. Configuraciones de las redes sistémicas que no corresponden a estrategias de estimación

Hay algunas configuraciones de la red sistémica presentada en la Figura 6.2 muy frecuentes como respuestas a tareas de estimación. En este trabajo, se hacen dos distinciones fundamentales: en primer lugar, una estrategia no es una configuración, sino que *puede representarse*[278] como una configuración en una red sistémica. En segundo lugar, mientras que a cada estrategia le corresponde una configuración, existen configuraciones que no corresponden a estrategias de estimación, pero sí a 'modos de comportarse' habituales de los individuos ante situaciones en las que hay que estimar[279]. Estas configuraciones son muy interesantes, pues sirven para identificar procedimientos o 'modos de comportarse' ante tareas de estimación, que algunos autores han identificado como estrategias (Hanson y Hogan, 2000) y que aquí no considero como tales. Las redes sistémicas y sus configuraciones muestran así un gran potencial, no solo para identificar y describir estrategias, sino también para comparar unos modelos sobre estrategias de estimación con otros.

[278] Sigo, en este punto, el principio general de no confundir un objeto con su representación.

[279] Se utiliza la expresión 'modo de comportarse' en un sentido no técnico para abarcar tanto la *adivinación no educada* (dar una estimación prácticamente al azar) como la *renuncia a resolver* una tarea de estimación. Estos 'modos de comportarse' ante una tarea de estimación, podrían darse casi ante cualquier tipo de tarea matemática e incluso no matemática. Es cierto que estos dos comportamientos se dan habitualmente como respuesta a tareas de estimación, pero esto no quiere decir que deban considerarse como 'estrategias de estimación', especialmente porque no son procedimientos eficientes (que sirvan para obtener una respuesta razonable) para el tipo de tareas propuestas.

3.2.1. La imitación del algoritmo escrito

Muchos alumnos, posiblemente por el desconocimiento de procesos específicos de la estimación, al enfrentarse a una tarea de estimación, intentan imitar mentalmente el algoritmo escrito. Este tipo de enfoque no lo considero como adecuado para la estimación, aunque es muy habitual. En la Figura 6.7 se muestra la configuración correspondiente a la imitación del algoritmo escrito. En dicha figura, la característica fundamental es la ausencia de sustitución (destreza de aproximación) y, por tanto, de reducción de la operación al uso de hechos numéricos y al ajuste del valor posicional.

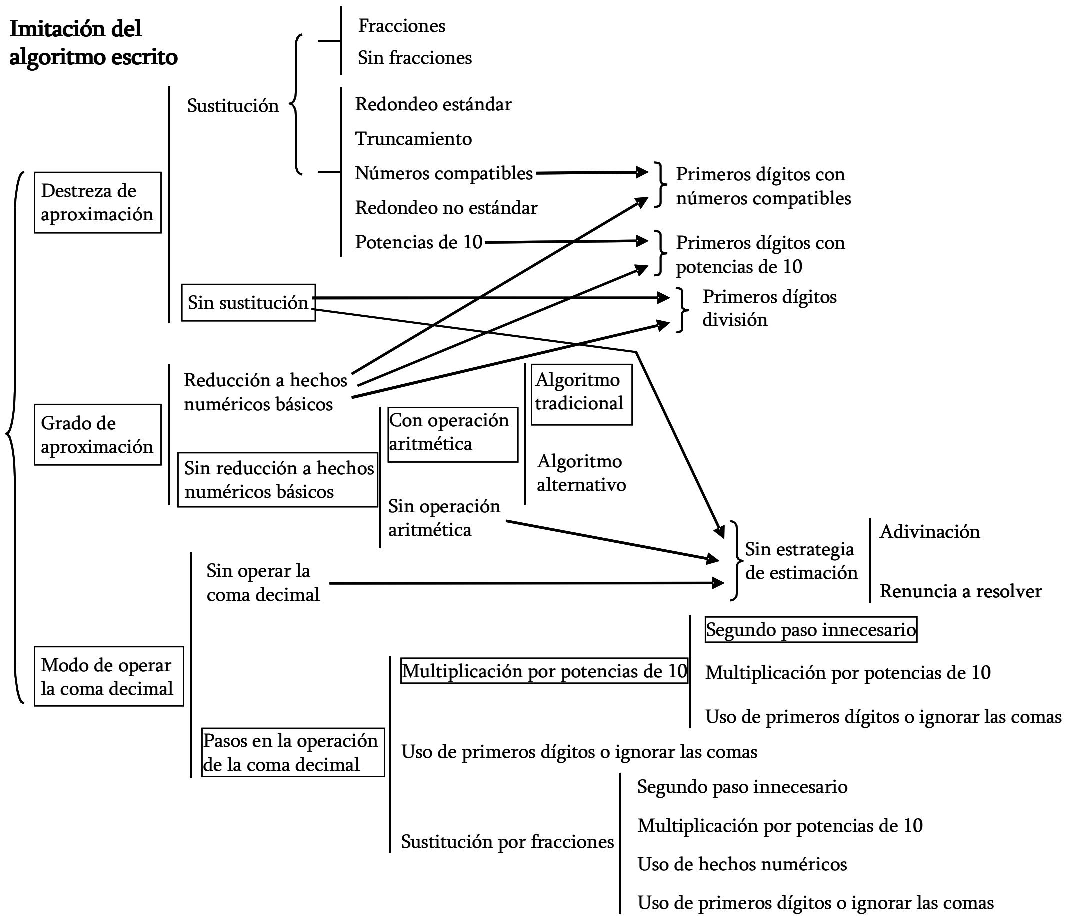


Figura 6.11. Configuración correspondiente a la "imitación del algoritmo escrito"

A continuación se presentan ejemplos tomados de las transcripciones de las entrevistas en los que los alumnos utilizan la imitación del algoritmo escrito. En algunos casos, como en el siguiente (alumno 20), la imitación del algoritmo escrito da lugar a un resultado muy próximo al resultado exacto del cálculo.

Entrevistador: 0,962 ÷ 0,25

Alumno 20: Corro la coma dos a la derecha, dos a la derecha. 96,2 entre 25. Pues son 3 por 25, 75. A 96 van 21. Y un 2. 212 entre 25 son algo más de 8. Entonces me quedo con 3,8.

La distinción entre el algoritmo simplificado, propuesto como un caso particular de la estrategia de 'primeros dígitos', y la imitación del algoritmo escrito es la siguiente: Si la operación inicial se reduce, por medio de un proceso de aproximación, al producto o a la división de un número de dos cifras por otro de una cifra, se está ante un caso de 'algoritmo simplificado'. En otro caso, es decir, reduciendo la operación planteada a la multiplicación o división de un número de tres cifras por uno de una cifra significativa (se entiende, diferente de 1) o de dos números de dos cifras significativas. En el ejemplo anterior, se imita perfectamente una división de un número de tres cifras significativas por otro de dos (0,962 ÷ 0,25).
Aunque en el caso anterior la imitación del algoritmo escrito sea perfecta, suele requerir una gran destreza y es bastante compleja. La mayoría de las veces, la imitación del algoritmo escrito, al no poder utilizarse ayudas externas, se convierte en un procedimiento muy poco eficiente, que no conduce a una buena estimación. A continuación propongo otros ejemplos de este procedimiento, que puede considerarse una estrategia, pero no una estrategia de estimación.

Entrevistador: 354 ÷ 88

Alumno 6: Pues aquí sería... Lo compensaría. Este lo subiría a 90 y este lo bajaría a 350. Sería 350 entre 90 que sería 35 entre 90 a 8... 35 entre 9 sería a 3, 27, 8, 84, 84... A 9. 81, 3... [Dice varios números entre dientes] Sí, sería así. Bueno, a 4 casi. Me he liado.

Estimación: 3.8; 5,5% error.

Al principio, el alumno 6 planifica hacer el algoritmo simplificado, sustituyendo 354 ÷ 88 por 350 ÷ 90. Sin embargo, al comenzar la imitación del algoritmo determinando la primera cifra del cociente (3), recupera el 4 del dividendo para calcular la segunda cifra del cociente, de modo que finalmente realiza 354 ÷ 90.

En el siguiente ejemplo, se ve la dificultad que conlleva realizar mentalmente la imitación del algoritmo escrito sin ayudas externas. Sin embargo, una imitación con errores importantes (desde el punto de vista del cálculo escrito), conduce a una estimación muy precisa (8,4% de error).

Entrevistador: 85.9 ÷ 3.42

Alumno 29: 8590 entre 342 sería... 3 por 2, 6. Me paso. Un 2. 2 por 2, 4; 5, 6, 7, 8, 9; al 9, 4. 2 por 4, 8; 9 [inaudible] y me llevo una. 2 por 3, 6; Sería 1, 1, 4, 0. 1140 entre 342. 3 por 3, 9. Yo creo que sí. Pongo 23. Da igual.

Estimación: 23; 8,4% error.

Ahí donde el alumno 29 pone 1140, para iniciar el cálculo de la segunda cifra del cociente, debería poner (859 – 342 × 2) × 10 = 1750. A partir de este error, el alumno pone como ‘estimación’ 23, en lugar de 25. Ahora bien, este error que afecta a dos cifras del resultado parcial en la imitación del algoritmo (1140 en lugar de 1750) conduce a un resultado excelente, desde el punto de vista de la estimación. Ante este caso, parece más ajustado a los objetivos y a los procesos de estimación realizar el algoritmo simplificado con 85 ÷ 3, dando lugar a una estimación de 24, más sencilla de obtener, e incluso más precisa, que la dada mediante la imitación del algoritmo (23). La misma dificultad que se muestra en este ejemplo se da en el siguiente. Al tratar de realizar 9620 ÷ 625, el alumno determina correctamente la primera cifra del cociente (1), y también la multiplica por el cociente sustrayendo el resultado del dividendo para obtener 337. Hasta aquí, la imitación del algoritmo escrito es perfecta, pero demanda un esfuerzo demasiado grande y, llegado a este punto, el alumno se 'pierde' y determina la segunda cifra del cociente como 2 en lugar de la correcta de 5. ¿Cuál es el resultado de este error en la imitación del algoritmo escrito? Una estimación razonable y con un grado de precisión (22% de error) aceptable. Igual que en el caso anterior, considero el algoritmo simplificado, que da lugar a 96 ÷ 6, con una estimación de 16, como una opción mucho mejor dentro del ámbito de la estimación.

Entrevistador: 96.2 ÷ 6.25

Alumno 28: Multiplico por 100. 9620 entre 625 pues... a ver. 9620 entre 625... 9 entre 6 pues a 1. Entonces serían... No, a ver. 962. Sí. Entonces sería 962 menos 625, entonces sería 337. No. Sería un 2. No. Sería 7, 4 y 3. A ver, un momento... Sería 300... A 12... A 12.

Estimación: 12; 22,0% error.

A continuación se muestra, en dos ejemplos relacionados de procedimientos para la misma operación, otra dificultad añadida a la imitación del algoritmo escrito. En el primer caso, la imitación del algoritmo escrito es casi perfecta. Sin embargo en el segundo caso, el alumno determina las mismas cifras en el cociente de la división, pero comete un error al establecer el valor posicional de estas cifras, dando una estimación de 0,21 en lugar de 2,1. La imitación del algoritmo escrito, que se supone un campo de dominio seguro para los estudiantes, no es realmente tan seguro, y conduce a errores importantes como el mencionado aquí.

Entrevistador: 0.747 ÷ 0.35

Alumno 4: Aquí corro la coma dos lugares. Y aquí también. Entonces se me queda en 74,7 entre 35. Entonces se me queda... a dos. Bueno... se me quedaría... porque 2 por 5 son diez y me llevo una. Dos por tres, seis y una siete, setenta. Entonces sí. Entonces sería 2... Le pondría la coma. Sería 1.

Entrevistador: Explícalo.

Alumno 4: 74,7 entre 35. Entonces lo he multiplicado por 2. Me daba 70. He puesto la coma. Luego he bajado el 4 porque del 70 a 74 van 4 y se me queda en 47. Entonces 35 por una me quedaría...

Estimación: 2.1; 1,6% error.

Entrevistador: 0.747 ÷ 0.35

Alumno 30: ... Cómo se nota que no soy de ciencias, ¿Eh? Vale. Quito la coma. La corro dos aquí... Me quedaría 74 entre 35. Pues aquí también habría 0,... Cabe a 2... 0,21.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

Alumno 30: Primero he quitado las comas de aquí. Las he corrido dos lugares y quedaría 74 entre 35. Entonces 74 entre 35 he puesto que cabe a 2 porque 2 por 35 son 70. Entonces he puesto 2 por 5, 10, al 14, 4. Luego 2 por 3, 6 y una 7, 0. Luego bajo el 7. 47 entre 35 a 1. Aquí antes he multiplicado por 2 y luego 1. 0,21. A ver si estoy aquí todo ilusionado explicándolo y luego está mal.

Estimación: 0.21; 90,2% error.

Para terminar con el análisis de esta estrategia, propongo un ejemplo en que se ilustra claramente la búsqueda de equilibrio entre la dificultad de cálculo y el esfuerzo necesario para realizar una operación, con el grado de aproximación y la precisión del resultado. El Alumno 14 cambia de estrategia, a lo largo del fragmento de transcripción, desde su intento inicial de imitar el algoritmo escrito hasta la realización final del algoritmo simplificado centrado en los 'primeros dígitos'. Con cada cambio en el grado de aproximación (que se va reduciendo) va disminuyendo la dificultad y, en principio, se va perdiendo algo de precisión. Al final se llega a un equilibrio con una operación asequible 86 ÷ 2 y una precisión aceptable (11% de error).

Entrevistador: 86 ÷ 222

Alumno 14: 86... Pues 86. Como este tiene dos cifras y el otro tres, le sumo un cero. 860... y lo que me dé tiene que empezar por cero coma. Entonces ahora, habiendo puesto cero coma en el resultado, puedo operar con 860 entre 222... Lo que voy a hacer es, primero dejarlo a 860, y 222 lo voy a redondear a 200... A 200. ¿No?... ¿O no?... Bueno, sí. No. A ver. Voy a intentarlo 860 entre 220. Así los dos acaban en cero, los tacho, y me quedo con 86 entre 22. Pero 86 y 22 ya es muy complicado. Así que lo dejo... lo dejo en qué... En 86 entre 20. 86 entre 20, me imagino la división... la de toda la vida, y digo: 2 por 1, 2; 2 por 2, 4; 2 por 3, 6 y 2 por 4, 8. Y 2 por 3, 6. 43. 0,43.

Estimación: 0,43; 11,0% error.

3.2.2. Adivinación (no educada)

En los siguientes ejemplos tiene lugar una 'adivinación no educada[280]'. En

[280] En capítulos anteriores se ha citado la conocida definición de Thompson (1979) de la estimación como "adivinación educada" (*educated guess*). Hanson y Hogan (2000, p. 499), en la

ambos casos el alumno no realiza ninguna sustitución. En el primer ejemplo, insiste en dos ocasiones en que 0,025 no puede sustituirse por 1. Sin embargo, da la estimación de 776 inventándose la falsa propiedad de que 'multiplicar por un número muy pequeño no altera apenas el resultado'.

Entrevistador:	0.025×776
Alumno 14:	La primera cifra, como no quiero multiplicar con comas y, sobre todo, con cifras que tengan comas y que empiecen por cero, porque me complica... El 0,025 pues no lo voy a cambiar a 1, porque no tiene nada que ver. Es muchísimo inferior. Es mucho más inferior... Entonces no lo puedo sustituir por 1. Entonces, voy a poner 776 de resultado por que supongo que, multiplicarlo por 0,025 no lo iba a cambiar mucho.

El alumno deja como estimación 776, sin realizar ningún cálculo, basándose en una 'falsa propiedad' de la multiplicación, que es generalización incorrecta del 1 como elemento neutro de la multiplicación. Algo así como decir: "Si la multiplicación por 1, que es el menor entre los números naturales, no varía el otro factor, lo mismo ocurrirá al multiplicar por otro número muy pequeño". Esta especie de generalización de los números naturales a los decimales no es correcta. Así, se llega a la conclusión de que el alumno ha dicho un número que no es resultado de un cálculo, sino más bien una estimación guiada por una idea equivocada sobre la multiplicación con números decimales.

---

lista de estrategias de estimación de su trabajo, citan como estrategias 22 y 23, respectivamente, la *renuncia a resolver*, y la *adivinación* (no educada, casi como sinónimo de una respuesta dicha al azar). Este apartado de la tesis, considerando los modos de actuar ante tareas de estimación que, correspondiendo a configuraciones en redes sistémicas, no deben ser considerados como estrategias de estimación, surge como respuesta a Hanson y Hogan (2000).

Entrevistador: 0.37 ÷ 0.543

Alumno 14: Este es todavía más difícil. Porque, como no me acuerdo de dividir con decimales, pues dividir un número pequeño con decimales entre uno mucho más grande es todavía más difícil... Entonces... Entonces me imagino que va a empezar por 0,0 y no sé si otro cero... Yo creo que sí. Y es que no sé. Así que voy a poner un número cualquiera. El mismo. [Escribe 0.0037]

En este último ejemplo, el alumno 14 dice una frase que resulta clave para decidir que ha obtenido el resultado prácticamente al azar: "no sé. Así que voy a poner un número cualquiera". Se ha utilizado un conocimiento en parte correcto; el resultado, en efecto, debe comenzar por '0,', pero no por '0,0' como dice el alumno. No es un resultado totalmente dicho al azar, pero está orientado por un conocimiento claramente deficiente sobre el valor posicional, indicando una dificultad (con la división de un número por otro mayor) que lleva al error de comenzar la división por '0,0' en lugar de por '0,'. No se puede considerar una adivinación educada, dado que el resultado que pone sería el de dividir por 100, cuando está realmente dividiendo por 0.543.
Aunque las 'adivinaciones no educadas' no han sido frecuentes en este trabajo, hay algún ejemplo más, diferente a los anteriores.

Entrevistador: 96.2 ÷ 6.25

Alumno 30: Este casi se puede hacer directamente... A ver, espera. 96 lo voy a poner como 100 y lo voy a dividir 100 entre 6. 100 entre 6. Bueno, 100 entre 5 es a 20, entre 6... Ya no sé ni lo que hago. Es que sé que es 11 coma algo pero... 11,2 por ejemplo. Bueno. Lo voy a poner pero...

Estimación: 11.2; 27,2% error.

Adivinación

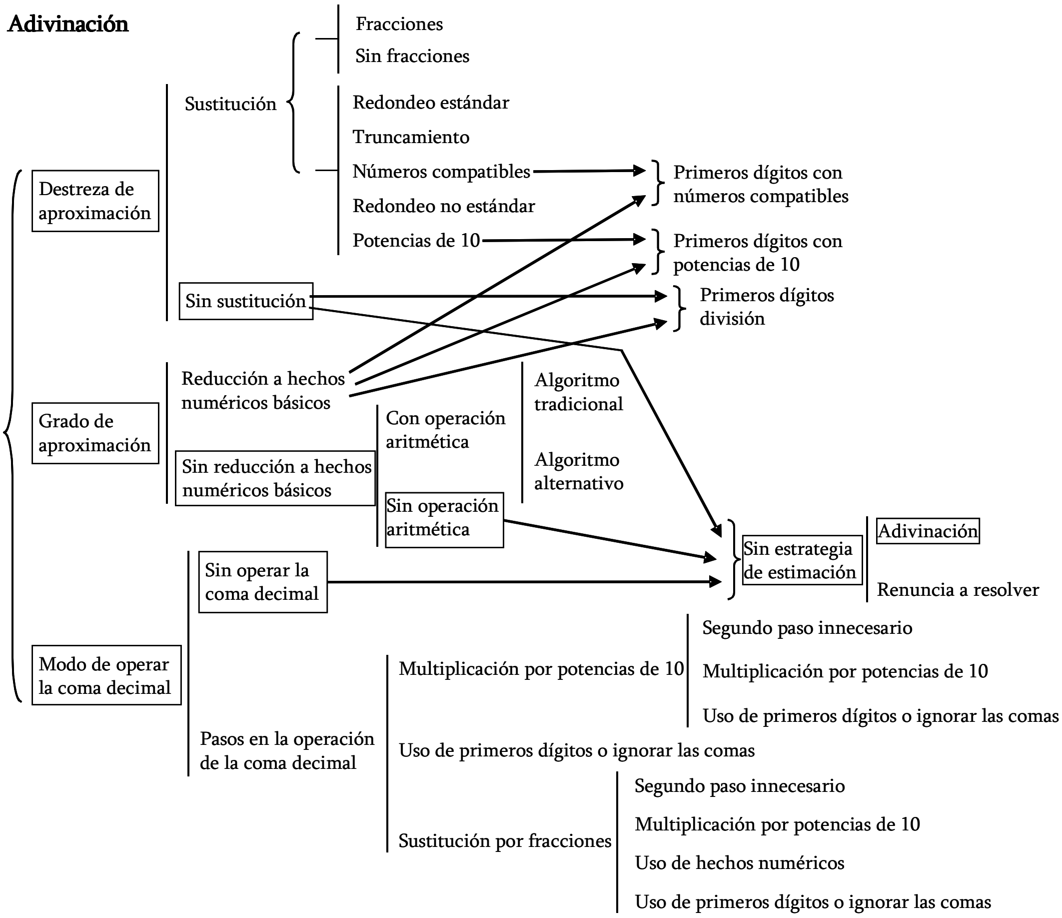


Figura 6.12. Configuración correspondiente a una "adivinación"

La clave de este proceso es que 96.2 ÷ 6.25 es sustituido por 100 ÷ 6. Dada la dificultad inicial percibida en esta operación, se sustituye por 100 ÷ 5 = 20. A partir de aquí, el alumno sabe que 100 ÷ 6 < 100 ÷ 5, pero el resultado de 11,2 no parece el resultado correcto de ninguna operación ni refleja un conocimiento adecuado sobre la compensación. Parece un resultado dicho un poco 'al azar'. Los comentarios del alumno al dar la estimación: "Ya no sé ni lo que hago" o "lo voy a poner pero..." indican falta de confianza del alumno en su proceso de estimación y dudas sobre el resultado. Lo curioso de este caso, y que lo diferencia de los anteriores ejemplos, es que la estimación entra en el intervalo de respuesta del 30% de error, con lo que no puede ser tachada de imprecisa.

3.2.3. La renuncia a resolver

Al igual que en el caso anterior, en que se ha tratado la 'adivinación no educada', en este trabajo se acepta que un alumno pueda renunciar a dar una estimación o dejar una tarea a medias sin concluir. Sin embargo, considero esto como una posible forma de comportarse ante una tarea de estimación, pero no como una estrategia de estimación. Así, en el ejemplo propuesto a continuación, el alumno 9 comienza utilizando una estrategia de sustitución por fracciones. Dado que solo sustituye uno de los dos operandos, y el otro es un decimal, se ve obligado a dividir una fracción por un decimal. Esto le produce un bloqueo y abandona el problema. El alumno renuncia a resolver[281]:

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Alumno 9: Esto es 1/2. Tiende a ½. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse ½ entre 0,01 y sería... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay... Esto, ½, lo podría ver de esta manera, como 0,5 dividido entre 0,01. Entonces sería... ¿Puedo pasar a otro?

Entrevistador: No.

Alumno 9: Me he bloqueado. [El alumno se ve incapaz de dar una estimación y da al cero para pasar al siguiente cálculo[282]]

E: 0; 100,0% error.

[281] Esta renuncia a resolver es, en este caso, producto de un bloqueo que responde a una dificultad semiótica (ver Apéndice F). Considerar la renuncia a resolver como una estrategia (o una forma como cualquier otra de afrontar una tarea de estimación) enmascararía esta dificultad, que es lo más interesante que puede verse en el proceso de estimación del alumno.

[282] El programa de ordenador con el que se administró la prueba de estimación está diseñado de tal forma que no permite dejar problemas sin solucionar. Si al dar al botón “pasar al siguiente cálculo”, la casilla correspondiente a la estimación está vacía, el botón permanece inactivo. Fueron muy pocos los alumnos que se bloquearon de tal modo que fueron incapaces de dar una estimación. En este caso, el alumno pone ‘cero’ para poder pasar a la siguiente estimación.

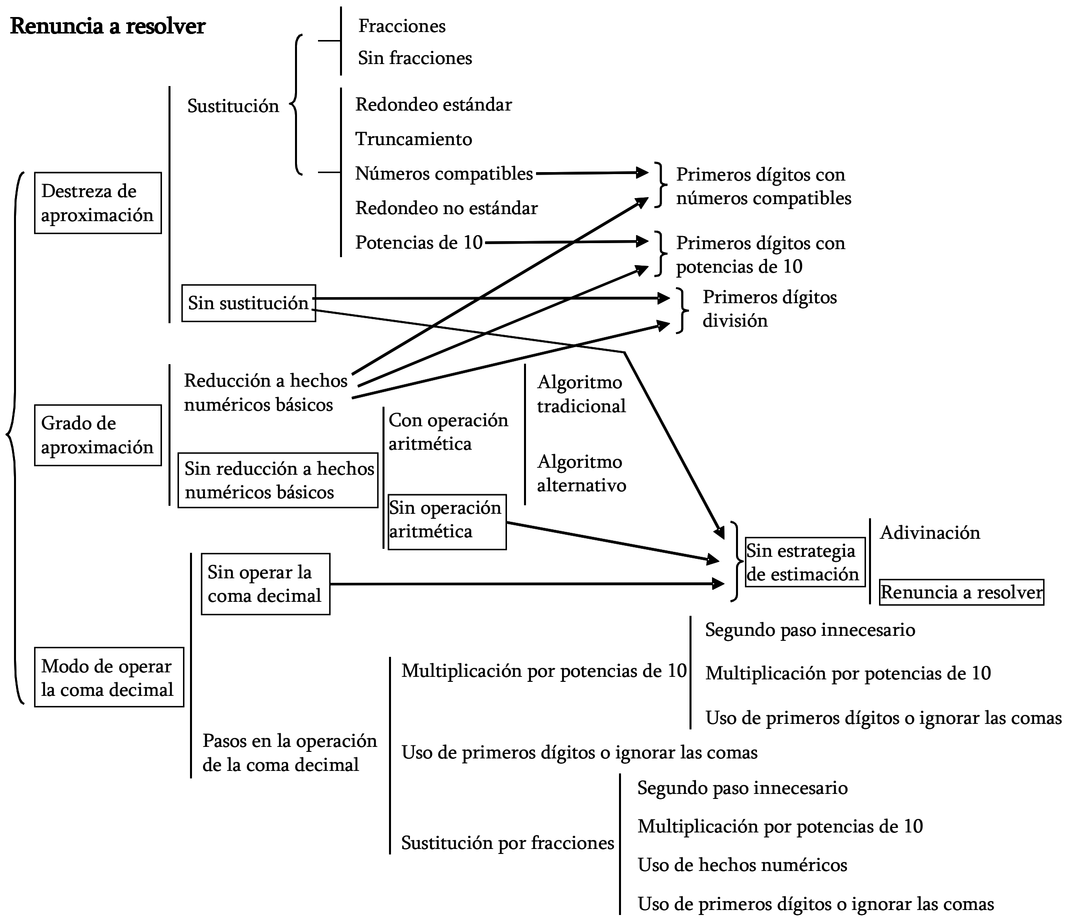


Figura 6.13. Configuración correspondiente a una “renuncia a resolver”

Así, en las Figuras 5.12 y 5.13 se presentan las configuraciones de las redes sistémicas correspondientes a la 'adivinación' y a la 'renuncia a resolver', aceptando, como se ha advertido antes, que dichas configuraciones sirven para representar modos de comportarse ante las tareas de estimación, y no solo estrategias.

3.3. Las frecuencias en el uso de las estrategias

El estudio sobre estrategias de estimación finaliza con un pequeño resumen acerca de las frecuencias de aparición de procesos, estrategias, y de algún otro aspecto relevante, como las destrezas de aproximación o el modo de operar la coma decimal. Dado que se ha entrevistado a 26 estudiantes, y cada uno ha explicado los procedimientos seguidos para producir estimaciones para 12 cálculos, hay un total de 312 procedimientos a analizar. De ellos, en 206 se han dado procesos de reformulación; en otros 24, procesos de traducción[283], y sólo ha habido 5 casos de compensación[284]. Es muy posible que la compensación se haya dado en más ocasiones, pero se ha seguido un criterio muy estricto, consistente en reconocer sólo como compensaciones aquellas indicadas explícitamente por el estudiante al explicar su procedimiento.

En las estrategias, hay un gran predominio de dos estrategias sobre el resto: Primeros números, utilizada en 167 casos, y algoritmo simplificado, que aparece en 94 ocasiones. Estrategias minoritarias han sido el uso de fracciones (24 casos), o el uso de algoritmos alternativos (sólo en 4 casos). Entre los tipos de respuesta no considerados como estrategias de estimación, destaca el uso de la imitación del algoritmo escrito (en 26 casos). Apenas ha habido un ejemplo de adivinación (no educada) del resultado y otro de renuncia a resolver, que sí constituyen comportamientos más habituales en otros trabajos.

La destreza de estimación empleada con mayor frecuencia ha sido el redondeo (157 veces), seguida por el truncamiento (49 veces), la sustitución por fracciones (24 veces), el uso de potencias de 10 (21 veces), el uso de números compatibles (18 veces) y algún tipo de redondeo no estándar (6 veces).

Finalmente, la forma de operar la coma decimal más habitual ha sido Coma1 (predominio de la multiplicación por potencias de diez para eliminar las cifras decimales, 144 veces), seguida de Coma2 (predominio de la aproximación para eliminar cifras decimales, 66 veces), y Coma3 (sustitución por fracciones, 22 veces).

[283] Que siempre se han dado en situaciones en las que se sustituía un decimal por una fracción, con el consiguiente cambio en el algoritmo realizado.

[284] En muchos procesos, especialmente en el uso del algoritmo simplificado (en la división), no se han dado ninguno de los tres procesos característicos de la estimación.

CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE ERRORES E IMPRECISIONES

Para analizar los errores que cometen los alumnos de magisterio al realizar tareas de estimación del tipo propuesto en esta investigación, se debe comenzar presentando un esquema de clasificación que oriente el análisis. Este esquema, desarrollado en este capítulo, está basado en el modelo cognitivo-metacognitivo para la estimación explicado y adoptado en el capítulo 1.

1. UN ESQUEMA PARA LA CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES EN TAREAS DE ESTIMACIÓN

Los fundamentos para elaborar el esquema de clasificación para los errores en estimación en cálculo son los siguientes:

1. En primer lugar, considero las tareas de estimación dentro del ámbito de la resolución de problemas.
2. Se establecen para la resolución de problemas, atendiendo a las características de la estimación, las fases de: a) Interpretación, b) Ejecución, y c) Evaluación.
3. Se aplica a estas fases el marco teórico de Hiebert y Wearne (1986) para estudiar las operaciones (y, en particular, los errores) con números decimales.
4. Se relacionan las fases de resolución de problemas y el marco de Hiebert y Wearne (1986) con el modelo sobre estimación RTC de Reys y otros (1982).
5. Se emplean resultados de anteriores investigaciones sobre errores en

estimación (De Castro, 2004; De Castro, Segovia, Castro, 2002) para valorar la adecuación del modelo.

6. Finalmente, se utiliza el esquema de clasificación de los errores para analizar los errores cometidos por los estudiantes de magisterio en la presente investigación.

En primer lugar, se comenzará justificando cada uno de los pasos indicados en este apartado para elaborar el esquema de clasificación para los errores.

1.1. Marco teórico de Hiebert y Wearne (1986) para las operaciones con números decimales

Hiebert y Wearne (1986) elaboran un marco teórico interpretativo para estudiar la actuación de alumnos de quinto y sexto de Educación Primaria ante tareas de suma, resta, multiplicación y división con números decimales (incluyendo decimales menores que uno). Las tareas que utilizan se presentan como operaciones del tipo 42 ÷ 0.6 (igual que en el presente trabajo). Algunas de ellas se proponen con un formato que las asemeja más a tareas de estimación que a meros ejercicios de cálculo. Por ejemplo, se presenta la tarea de colocar el separador decimal (sin hacer cálculos) en la parte derecha de la expresión:

$$30 \div 0{,}6 = 0\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

Estos autores especifican tres puntos claves en el proceso de resolución de problemas, en los que resultan fundamentales las conexiones entre el conocimiento conceptual y el procedimental, indicando que la ausencia de tales conexiones puede resultar especialmente dañina, en el sentido de producir errores.

El punto 1 es el momento en que se inicia la resolución del problema, o fase de *interpretación*, en la que se debe atribuir un significado a cada uno de los símbolos que aparecen en el problema (los problemas, en este caso, son operaciones descontextualizadas con números decimales). Los autores reconocen la existencia de al menos dos tipos distintos de significados: sintácticos y semánticos. Por ejemplo, en la expresión 2/3 ÷ ½, un posible significado sintáctico del signo "÷" sería el de "invertir y multiplicar"; un significado semántico sería "cuántas veces cabe ½ en 2/3". En este punto se produce también, de acuerdo a la interpretación que se haya dado a los símbolos, la selección de estrategias para resolver el problema.

El punto 2 corresponde al ámbito de la *ejecución* de la estrategia seleccionada en el punto anterior. Hiebert y Wearne (1986) indican que "muchos de los procedimientos que se enseñan a los alumnos en la escuela son reglas que prescriben cómo manipular símbolos escritos. Aunque las reglas están motivadas por consideraciones conceptuales, puede que los alumnos no conecten las reglas procedimentales con sus justificaciones conceptuales" (p. 202). En este punto, las conexiones entre los dos tipos de conocimiento contribuyen a una "genuina competencia" en las operaciones, mientras que la ausencia de conexiones puede producir errores.

El punto 3 es el momento de la *evaluación*, posterior a la ejecución de la estrategia seleccionada. En este punto, los alumnos deben examinar la *razonabilidad* de los resultados.

1.2. Relación del marco para el análisis de errores con el modelo RTC

Resumiendo los dos apartados anteriores, la interpretación de símbolos, la ejecución de procedimientos de cálculo y la evaluación de la solución, son los tres puntos clave del proceso de resolución de problemas que servirán como punto de partida para elaborar la categorización de los errores que se cometen en las tareas de estimación.

Así, para establecer las categorías de errores en la presente investigación, se tendrá en cuenta si los errores se cometen en la fase de *interpretación*, en la de *ejecución* o en la de *evaluación*, teniendo en cuenta que en el procedimiento realizado por un alumno para producir una estimación pueden aparecer errores en una, dos, o incluso en las tres fases.

Este modelo de tres fases de la resolución de problemas se debe relacionar con los procesos más específicos de la estimación. La definición de estimación que conviene[285] para este trabajo es la de Sowder (1988): "La estimación en cálculo es el proceso de transformar números exactos en aproximaciones y calcular mentalmente con estos números para obtener una respuesta razonablemente próxima al resultado exacto de un cálculo" (p. 182).

Como se ve, esta definición enfatiza *la sustitución de los números por aproximaciones*, el *cálculo mental*, y la valoración sobre si la respuesta es o no razonable; es decir, la *evaluación* del resultado. Esta visión de la estimación encaja perfectamente con el modelo en elaboración, de los apartados anteriores, para los errores en estimación.

Por otra parte, el modelo más comúnmente aceptado en la literatura de investigación sobre estimación es el modelo RTC (expuesto en el capítulo 3), con sus procesos generales de reformulación, traducción y compensación. En la Figura 7.1 se representa, empleando una red sistémica, el modelo para el análisis de errores que surge de la consideración conjunta de las fases de resolución de problemas, el modelo para evaluar errores en cálculo con decimales de Hierert y Wearne (1986) y el modelo RTC de Reys y otros (1982)

[285] Hay muchas definiciones de estimación en la literatura. Algunas, bastante generales, como la de Thompson (1979), que llama a la estimación "adivinación educada", o la de Laurent (1976), citada en Segovia, Castro, Castro y Rico (1989): "habilidad mental para hacer conjeturas en cálculo y medida con una formación previa" (p. 19). Sin embargo, y aún a riesgo de no abarcar algunos de los aspectos más interesantes de la estimación, prefiero la definición de Sowder (1988), que podría simplificarse hasta el extremo en la fórmula: Estimación = aproximación + cálculo mental + evaluación. Esta definición se ajusta perfectamente al modelo que emerge de la consideración simultánea del modelo de fases de resolución de problemas y el modelo de Hiebert y Wearne (1986) para los decimales, expuestos en apartados anteriores.

de procesos de estimación.

Como se observa en dicha figura, los procesos más importantes de estimación (la reformulación, traducción y compensación previa) se dan en la fase de interpretación del problema. La fase de ejecución corresponde con el cálculo mental que se efectúa al estimar con las aproximaciones correspondientes a los datos iniciales, aunque también están presentes los procesos de compensación y, finalmente, la fase de evaluación en la que se valora la razonabilidad del resultado.

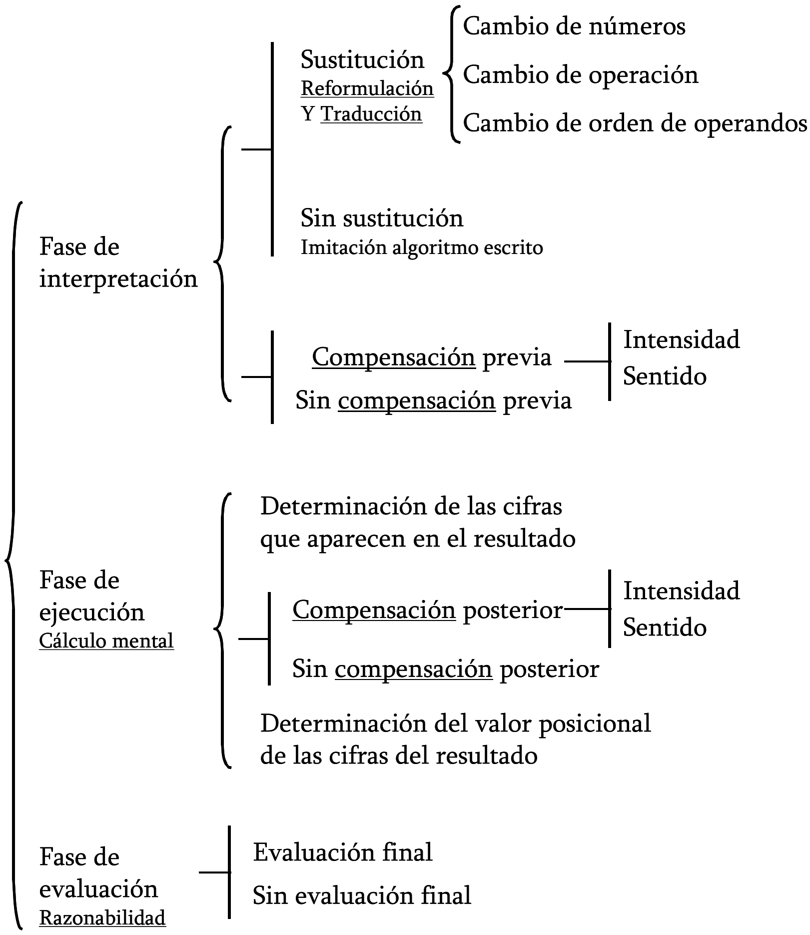


Figura 7.1. Red sistémica para los procesos de estimación, adaptada para los errores.

Hay que resaltar también en la Figura 7.1 que a toda compensación que se hace, para minimizar el efecto de la sustitución de los datos iniciales por aproximaciones (en la reformulación y en la traducción), debe dársele una intensidad y un sentido adecuados. En este trabajo, considero que una equivocación en el sentido de la compensación es un error que denota un conocimiento inadecuado del efecto que tiene una modificación de los operandos sobre el resultado de una operación y, por otra parte, que una equivocación en la intensidad de la compensación será, en los casos pertinentes [286], considerada solamente como "imprecisión", dado que la intensidad de las compensaciones suele casi siempre determinarse intuitivamente; es decir, no suele ser resultado de un cálculo, y es muy difícil apreciar cuál debe ser el 'tamaño' adecuado de una compensación.

A partir del modelo para el análisis de errores esbozado en la Figura 7.1, voy a realizar el análisis de errores correspondiente a la presente investigación. Trataré, al definir las categorías de errores, de que estas se ajusten al modelo predefinido. En un apartado posterior al del análisis de errores, trataré de determinar si las categorías para el análisis de errores que surjan en este trabajo sirven también para anteriores investigaciones sobre el tema de los errores en la estimación en cálculo.

2. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE ERRORES

Al analizar las transcripciones de las entrevistas, se han encontrado los tipos de errores que figuran a continuación. En cada caso se proponen varios ejemplos que acompañan la definición del error. Al final de la explicación dada por el alumno, aparecen la estimación (precedida por una "E:") y el porcentaje de error de la estimación. En algunos casos (llamados 'Estimación con datos u operación diferentes de los propuestos') figura también el cálculo anterior, para que pueda valorarse si este ha tenido influencia en la actuación del alumno.

[286] En este trabajo, cuando el porcentaje de error supere el 30%.

Aunque el objetivo es el análisis de errores, hay categorías referidas a situaciones en las que no considero adecuado hablar de errores, pero sí de actuaciones que suelen valorarse como erróneas, como pueden ser las imprecisiones[287], aunque en este trabajo no se les dé esta consideración. Para estos casos, no utilizo el término 'error' en el nombre de la categoría correspondiente.

2.1. Errores en la fase de interpretación

2.1.1. Error en la sustitución (SU)

Consiste en sustituir uno de los números que aparecen en el cálculo inicial (o los dos) por otro que no esté suficientemente próximo al de partida, de forma que el error relativo[288] al sustituir el valor inicial por su aproximación sea superior al 30% y, además, la sustitución no sea el resultado de la aplicación correcta de una destreza de aproximación[289] al número inicial, reflejando un conocimiento deficiente del valor posicional[290]. Ejemplo de este tipo de error es

[287] Recuerdo que he definido la *imprecisión* como estimación con un porcentaje de error superior al 30%, que este porcentaje es arbitrario y ha sido elegido por haberse adoptado en varias investigaciones, reforzándolo con la consideración del intervalo de respuesta razonable, y que en el capítulo de conclusiones deberá dedicarse un apartado a reflexionar sobre el par error-imprecisión y sus posibles relaciones.

[288] Si α es el valor exacto, el número inicial que aparece en el cálculo propuesto para estimar, y *a* es el valor aproximado, el error absoluto será $\varepsilon = a - \alpha$ y el error relativo $|\varepsilon/\alpha|$ (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989, p. 87). En el ejemplo propuesto, si se sustituye 0,06 por 0,5, el error relativo es de un 733,33%. Lo correcto sería sustituir 0,06 por 0,05, si resulta más cómodo, en el contexto de la operación, manejar un 5 que un 6.

[289] Incluyendo dentro de las destrezas de aproximación el 'redondeo no estándar' que se produce, por ejemplo, en la estrategia de uso de *números compatibles* (De Castro, 2002a, p. 297; Rubenstein, 1987), cuando se sustituye el dividendo por un múltiplo del divisor.

[290] Este error no es fácil de definir, aunque la idea que hay detrás es sencilla. Redondear 0,0067 a 0,007 es correcto. Truncar el número a 0,006 también. Redondearlo a la potencia de 10 más

la sustitución de 0,06 por 0,5. No lo sería, sin embargo, sustituir 0,06 por 0,1, a pesar de cometer un error del 66,6% (mayor que el 30% propuesto), dado que se estaría sustituyendo el número por la potencia de diez más próxima. Esta es una estrategia válida de estimación, aunque no siempre adecuada, aplicada de forma correcta.

En el siguiente ejemplo, el alumno sustituye 0,025 por ¼ al cambiar la multiplicación por 0,025 por hacer “la mitad de la mitad” –lo que resulta equivalente a dividir por 4, según se enseñó en el periodo de instrucción sobre estimación, al sustituir 0,25 por ¼ para hacer un cálculo.

Entrevistador: 0.025×776

Alumno 22: Pues, esto, 776, la mitad. Bueno. Lo voy a redondear a 800.
La mitad sería 400 y la mitad de 400, 200.

E: 200; 930,9% error

Lo correcto en este caso hubiera sido dividir por 10 el resultado, para una estimación de 20. Otro error de este tipo se produce al sustituir 0,048 por ½:

Entrevistador: 852×0.048

Alumno 17: 0,048 es 0,05, que sería ½.

E: 0.426; 99,0% error

O al sustituir 25 por 0,25 para cambiar después 0,25 por ¼:

---

cercana, para dar un resultado de 0,01, no lo considero un error, pero sí una imprecisión. Sin embargo, sustituir 0,0067 por 0,06, por 0,07, o por 0,05, para luego sustituirlo por $1/2 \div 10$, lo considero un error en la sustitución, además de producir una imprecisión. Podría definirlo también diciendo que se incurre en un error de sustitución cuando el resultado de la sustitución se diferencia del resultado de la aplicación correcta de una destreza de aproximación en una potencia de 10.

Entrevistador: $968 \div 24$

Alumno 19: 250 por que, redondeando sería... 968 lo redondearía a 1000 y 24 a 25 y sería como dividir entre la cuarta parte.

E: 250; 519,8% error

En este caso se puede dividir 968 por 1/4 de 100, pero se omite el 100 y se divide por 1/4. Ahí está el error en la sustitución. Posteriormente, se ha cometido además el error de cambiar la división por ¼ por la división por 4[291]. Como se advierte en los ejemplos, muchos errores de sustitución se deben a una dificultad para adaptar correctamente sustituciones como la de 0,5 por ½ y 0,25 por 1/4, a situaciones similares (0,05 por 1/20 o 0,025 por 1/40). Para realizar correctamente el proceso de estimación se debería sustituir $968 \div 24$ por $1000 \div 100/4 = 4 \times 1000/100 = 40$. En este tipo de errores, cuando un alumno toma 25 por 0,25, hay veces que no puede asegurarse si solo sustituye erróneamente 25 por 1/4, o si tenía previsto posteriormente tener en cuenta que 0,25 = 25/100, empleando oportunamente el 100 en el ajuste final del valor posicional. Esta distinción tiene su relevancia, puesto que, en el primer caso, el error se produce en la fase de interpretación y, en el segundo, en la de ejecución. Para solventar esta dificultad, he adoptado el criterio (enfatizado en la Tabla 7.1, de resumen de errores) de considerar un error de sustitución toda adaptación incorrecta de la sustitución de un decimal por una fracción a una situación en la que el dato se diferencia del decimal típicamente sustituido por fracción (como 0,5, 0,25 o 0,66) en el valor posicional (0,05, 25, 0,066, etc.). Adoptando este criterio, no se determina si el error se produce en la sustitución (fase de interpretación) o en el ajuste del valor posicional (fase de ejecución). He preferido adoptar este criterio para identificar mejor este tipo de error, y mejorar la fiabilidad de la codificación, aún a riesgo de pasar por

[291] Lo que será considerado más adelante como un error de tipo TO, de traducción por cambio de operación, que es claramente un error en la fase de interpretación.

errores de interpretación algunos errores en la fase de ejecución.

El siguiente es un caso interesante de error en la sustitución. El alumno opera los decimales como si fuesen enteros, arrastrando el “0,”. Es un caso curioso por cuanto no se elimina la coma decimal mediante ninguno de los tres métodos contemplados en el capítulo anterior, sino que la coma decimal se arrastra a lo largo de todo el cálculo.

Entrevistador: 0.962 ÷ 0.25

Alumno 14: 0,962 lo voy a redondear a 0,1000 [dicho ‘cero coma mil’]. Entre 0,20 [dicho ‘cero coma veinte’]. El cero coma veinte lo redondeo hacia abajo, para que tenga un cero... y, en la división, pues quitarle un cero de cada lado. ¿No? Entonces, el primer divisor se queda en cero coma cien y el segundo en 0,2. Y 100 entre 2 son 50. El resultado es 0,50.

E: 0,5; 87,0% error

Aquí, los números decimales son tratados como números naturales con coma[292]. Como se comentará más adelante, al estudiar los errores en el ajuste del valor posicional, hay errores en la fase de interpretación como este, de redondeo, que también supone un desconocimiento del valor posicional y que implica un valor (0,5) que difiere de una estimación adecuada (5) justo en el valor posicional del resultado.

[292] La propia forma (incorrecta) en que a veces se leen los números decimales favorece este tipo de errores. Por ejemplo, 0,95 es mayor que 0,345, pero la lectura de ambos números como “cero coma noventa y cinco” y “cero coma trescientos cuarenta y cinco” parece indicar lo contrario.

2.1.2. Imprecisión en la destreza de aproximación (IA)

Una estimación se clasifica en esta categoría cuando el alumno emplea una destreza de aproximación válida y enseñada en clase, o comúnmente aceptada en la literatura sobre estimación, la aplica correctamente, y esta aplicación le conduce a una estimación con un porcentaje de error mayor del 30%. Este caso no es considerado como error, porque no puede decirse que se haya aplicado un conocimiento deficiente o incompleto. El alto porcentaje de error, que obliga a clasificar la estimación como "imprecisa", se debe a que en estos casos se utiliza la sustitución de un número por otro que no está 'suficientemente' próximo al de partida[293]. Esto ocurre cuando, por ejemplo, se emplea la sustitución de un número por la potencia de 10 más cercana, como puede verse en los ejemplos siguientes:

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno 9: Esto tiende a, se acerca mucho a 1 y esto a 3. Entonces sería 1 por 3, tendiendo por lo alto, que es 3.

E: 3; 62,1% error

En este caso, los dos redondeos (a las unidades) están bien aplicados, pero el hecho de que en ambos casos se sustituyan los datos iniciales por valores superiores y no se efectúe ningún tipo de compensación (y que, en el caso del 0,72 se redondee a las unidades, cuando la cifra de mayor valor posicional es la de las décimas), conduce a una estimación bastante alejada del resultado exacto (62% de error). Sería más adecuado haber sustituido 0,72 por 0,7 (redondeando a las décimas) en lugar de hacerlo por 1 (empleando la sustitución por

[293] Debe recordarse que, aunque el 30% se haya tomado en diversas investigaciones como margen para evaluar la estimación, este 30% es totalmente arbitrario, su uso ha sido criticado, y no es adecuado para calificar una estimación como errónea. Por esa razón, hablo aquí de 'imprecisión' y no de 'error'.

potencias de 10). En los dos ejemplos siguientes, la imprecisión es menor que en el caso anterior. En el primer caso, hay incluso una pequeña compensación previa, que parece ser involuntaria, al sustituir 2,57 por 2,5.

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno 22: Pues, esto, lo más fácil, a lo mejor, sería... Este le dejo 2,5 por 1. 2,5.

E: 2,5; 35,1% error

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno 14: Vale... Como es una estimación y no quiero multiplicar con ceros y con comas, voy a multiplicar 2,57 por 1 porque es mucho más fácil y porque se va a quedar igual, el 2,57.

E: 2,57; 38,9% error

Estos dos últimos casos resultan interesantes. Dado lo arbitrario de la elección del 30% de error, se podría considerar las dos estimaciones anteriores como absolutamente razonables: ni erróneas (por supuesto), ni imprecisas.

En el ejemplo siguiente, el uso de potencias de 10 conduce también a una imprecisión. La sustitución de 96,2 por 100 no es problemática, pero sí lo es la de 6,25 por 10. El problema no está, por tanto, solo en la aplicación de una destreza de aproximación concreta (como el uso de potencias de 10), sino en la idoneidad de la aplicación de dicha destreza en una situación concreta y en la posibilidad de utilizar la compensación para corregir desviaciones fuertes en el resultado introducidas en las sustituciones de los datos.

Entrevistador: $96.2 \div 6.25$

Alumno 4: Aquí lo redondeo. Sería 100 dividido entre 10... Sí, que sería igual a 10.

E: 10; 35,0% error

En el caso de 96,2, el uso de potencias de 10 da el mismo resultado que el redondeo a las decenas (100). Sin embargo, en el caso de 6,25, el redondeo a las unidades da 6 y la sustitución por potencias de 10 lleva al resultado de 10.

Entrevistador: 0.059 ÷ 0.23

Alumno 26: Pues esta la vamos a estimar a 0,60 [sic] y luego lo voy a dejar en 0,1 y este en 0,2. Es 0,1 entre 0,2. Pues también da 0, y entonces aquí, le pones un 0 al 1. Entonces 10 entre 2, 5. Entonces aquí... Entonces, te queda... claro. Corres la coma [inaudible]... 0,5. Te queda 1 entre 2, 0,5.

E: 0,5; 94,9% error

En este último ejemplo, la imprecisión está en la sustitución de 0,059 por 0,1. Esta sustitución es el resultado correcto de redondear el dato inicial a las décimas (o del uso de potencias de 10). Sin embargo, es más correcto redondear a las centésimas (a 0,06). Una buena estimación se obtendría sustituyendo 0,059 ÷ 0,23 por 0,06 ÷ 0,2 = 0,3. En este caso, la estimación de 0,5 la considero una *imprecisión*, pero no un *error*.

2.1.3. Estimación con datos u operación diferentes de los propuestos (DI)

Se producen al realizar una estimación con la operación, o con alguno de los operandos, diferentes de los propuestos en el cálculo. Este tipo de actuación no es considerada como ‘error’. He evitado caracterizarlos como 'errores de descuido', o de 'falta de atención', porque entiendo que esto supondría un exceso de simplificación en la atribución de causas para estas 'equivocaciones'.

Efectivamente, en algunos casos, estas actuaciones parecen influenciadas por una o varias de las estimaciones que el alumno acababa de realizar con anterioridad.

En los siguientes cinco ejemplos puede verse como el alumno 25 opera con 0,57 en lugar de 2,57, como se hace una división en lugar de una multiplicación (alumnos 1 y 3), se hace una multiplicación en lugar de una división (alumno 3) o se toma 0,043 en lugar de 0,543 (alumno 22). En tres de los cinco casos podría atribuirse la confusión a las características de la operación para la que los alumnos acaban de dar la anterior estimación.

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno 25: ...y luego aquí, corro la coma otros dos... No. Subo los números que hay al otro lado de la coma. Entonces son 4. O sea, que sería por 10^{-4} el número que me quede luego para multiplicar. Entonces multiplico esto, que serían... 57, que puedo redondear a 60, y esto lo redondeo a 70. O sea, que son 6 por 7, 42. 42... Vale. 6 por 7, 42. Y luego, uno, dos, tres y cuatro. Entonces sería 0,042. A ver. Uno, dos, tres y cuatro... No. Me falta un cero. Así. Uno, dos, tres... No. [Escribe 0,042].

E: 0,042; 97,7% error; A: $968 \div 24$

En el momento de la transcripción en que se ve que el alumno redondea 57 a 60, ignorando por completo el 2 del 2,57, se advierte que está estimando el resultado de $0,57 \times 0,72$ en lugar de $2,57 \times 0,72$. Es bastante razonable que se produzcan estos deslices, pues en 12 de las 24 tareas de estimación propuestas al alumno hay números decimales menores que 1. Así, el que haya tantas tareas que comienzan por '0,' ha podido influir en el cambio de 2,57 por 0,57.

Entrevistador: 0.45×7.85

Alumno 1: Aquí pasa la coma dos lugares y aquí otros dos. 45 entre 785. Como no me cabe, tengo que poner dos ceros aquí, o sea, que serían 0,00... 0,00 y aquí sería, me quedaría... 4000 entre 800, que serían 40 entre 8, a 5.

E: 0.005; 99,9% error; A: $0.68 \div 0.024$

En este ejemplo, se cambia una multiplicación por una división. Cabe decir que $0{,}45 \div 7{,}85 \approx 0{,}057$ y que, en este caso, la estimación de 0,005 muestra también un error en el ajuste del valor posicional, que se produce cuando el alumno comienza a poner en el resultado '0,00' en lugar de poner solo '0,0'.

Entrevistador: 0.025×776

Alumno 3: Cojo los tres decimales y los pongo primero y luego, como no me da, pongo otro. Me sale 2500 entre 775 y como con 4 me paso, he puesto un 3.

E: 0,00003; 100,0% error; A: 46×771

En este caso, también se toma la multiplicación por división. El alumno hace $0{,}025 \div 776 \approx 0{,}000032$. Esta estimación está muy próxima a este resultado (0,00003). En este caso, al contrario que en el anterior, si se asume la equivocación inicial del alumno, la estimación sería correcta.

En el ejemplo siguiente, se cambia la división por multiplicación. Dentro de este cambio, el alumno comete un error en el ajuste del valor posicional producido por una descoordinación entre el redondeo y el ajuste del valor posicional (error PV4). En efecto, redondeando los dos números del producto $9{,}88 \times 25{,}6$, y sustituyéndolo por $9 \times 25 = 225$, no deben tenerse ya en cuenta las cifras decimales de la operación inicial, pues han sido eliminadas en el redondeo. El hecho de recuperar al final la coma decimal parece un automatismo procedente del algoritmo escrito de la multiplicación.

Entrevistador: 9.88 ÷ 25.6

Alumno 3: He puesto 25 por 9, 225. Como hay tres decimales, he corrido la coma...

E: 0,225; 41,7% error; A: 0.025 × 776

En el último ejemplo propuesto, el alumno da una estimación para el cálculo 0,37 ÷ 0,043 en lugar de para el propuesto 0,37 ÷ 0,543[294]. Asumiendo el desliz inicial, la estimación dada (10) debe ser tomada como 'razonable'.

Entrevistador: 0.37 ÷ 0.543

Alumno 22: A ver. 37 entre 4,3... 37 entre 4,3... O sea, entre 4 lo voy a hacer mejor. Y 40 entre 4, por ejemplo, 10.

E: 10; 1367,6% error; A: 0.46 ÷ 0.066

2.1.4. Error en la traducción por cambio de operación (TO)

Consiste en cambiar la operación que se debe realizar para hacer la estimación. En esta investigación, este error suele ir asociado a la sustitución de un decimal por una fracción. En estas situaciones suele interpretarse la fracción como operador, aplicándose al otro dato. Por ejemplo, la sustitución de a ÷ 1/n por a ÷ n, cuando debería hacerse a × n, o la sustitución de a/b ÷ n por (a × n) ÷ b, en lugar de a ÷ (n × b). No se clasifican, dentro de este tipo de error, los cambios de operación estudiados en el apartado anterior (que son deslices más que verdaderos errores). Por ejemplo, en el siguiente cálculo se sustituye 0,25 por ¼, y después, la división por ¼ por la división por 4. Considero en este caso que hay un cambio implícito en la operación, pues al cambiar la *división* por

[294] El cálculo anterior había sido en este caso: 0,46 ÷ 0,066, del mismo tipo que el que hace en el caso siguiente. Ahí hay una explicación plausible para la equivocación.

1/4 por la división por 4, se hace 1/4 del otro dato o (lo que es lo mismo) *multiplicar* el otro dato por 1/4.

Entrevistador: 0.962 ÷ 0.25

Alumno 19: Pues el 0,962 lo redondearía a 1 y el 0,25 lo dejo. Como sé que 0,25 es la cuarta parte de 1 y hay que dividir 1, como si fuera entre 4, yo diría que es 0,25.

E: 0,25; 93,5% error

En el caso propuesto a continuación se cambia ¾ ÷ 0,36 por ¾ de 0,36 (que es lo mismo que ¾ × 0,36). Es, por tanto, un cambio de *división* por *multiplicación* y, por tanto, otro error de traducción (TO).

Entrevistador: 0.747 ÷ 0.35

Alumno 17: 0,74 lo aproximo a 0,75, que serían 3/4 de 0,35. Lo aproximo a 0,36, que entre 4 daría a 0,... A ver. No, no, no, no. Ah, no. A 9. Entonces saldría 0,09. Pero, como son ¾, 9 por 3, que sería 28... 27. O sea, que sería 0,27.

E: 0.27; 87,3% error

Puede verse que este error, cometido por el alumno 17, es persistente, pues en las dos siguientes operaciones utiliza la misma estrategia y comete el mismo tipo de error.

Entrevistador: 0.68 ÷ 0.024

Alumno 17: 0.68 se aproxima a 0,66 que son 2/3. Entonces 24 entre 3. No. A ver... 24 se aproxima a 21. Entonces, hago 21 entre 3 es a 7, como son 2/3, 7 por 2, 14. Sería 0,014.

E: 0.014; 100,0% error

Entrevistador: 0.63 ÷ 0.785

Alumno 17: Es 0,63. Pues aproximo a 0,66, pues lo mismo, 2/3 de 785 que habría que dividirlo entre 3. 780 sería fácilmente divisible. Serían 260. Y 260 entonces por 2 que saldría 520. Cero coma quinientos... Bueno. 0,52.

E: 0.52; 35,2% error

Al igual que en otros errores de traducción, parece que el alumno es capaz de dar un significado a la fracción (como operador) pero no a las operaciones con fracciones. Parece como si el significado de operación implícito en la fracción como operador (hacer una división y una multiplicación) sustituye a la operación de partida. Lo mismo ocurre en el caso siguiente, en el que se sustituye la "división por 0,5" por "hacer la mitad" o "dividir por 2", dado que 0,5 = ½.

Entrevistador: 0.37 ÷ 0.543

Alumno 19: El 0,37 lo redondearía a 0,4. El 0,543 lo redondearía a 0,5. Y sería 0,4 entre 0,5, que sería la mitad. A 0,2, más o menos.

E: 0,2; 70,6% error

2.1.5. Error en la traducción por cambio de orden en los datos (TD)

También, dentro de los errores de traducción, hay ejemplos de errores por invertir los papeles del dividendo y el divisor:

Entrevistador: 86 ÷ 222

Alumno 9: Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

E: 2,2; 467,9% error

Como puede verse, el alumno divide 222 entre 100 en lugar de dividir 100 entre 222. En este caso, la estimación dada es de 2,2 y es el comentario "el periodo no te lo puedo poner" el responsable de que se note que el alumno pensaba poner como resultado $2,\widehat{2}$ (incorrectamente identificado con 2,22).

2.1.6. Error en el sentido de la compensación previa al cálculo (CO)

Este tipo de error consiste en dar a la compensación previa un sentido equivocado. La finalidad de la compensación es la de "corregir" el error producido al sustituir los datos iniciales en la reformulación del problema. En las tareas de multiplicación, si se cambia uno de los datos iniciales por un número mayor, y se desea realizar una compensación previa al cálculo, debe sustituirse el segundo número por otro menor. En las tareas de división, cuando se hace una compensación previa, el dividendo y el divisor deben modificarse en el mismo sentido –aumentando o disminuyendo ambos a la vez. Realizar correctamente las compensaciones supone un conocimiento adecuado sobre el efecto que produce la alteración de los datos en el resultado de una operación. Es importante advertir que solo considero que un alumno ha hecho una compensación cuando en su explicación lo indica explícitamente[295]. Uno de los errores que se han producido es el de utilizar la compensación en la división del mismo modo que se hace en la multiplicación. En las siguientes estimaciones se ha realizado una compensación previa al cálculo, equivocando

[295] Uno de los criterios con los que se ha diseñado la prueba de estimación es el de poder diferenciar cuándo los alumnos utilizan el truncamiento y cuándo se utiliza el redondeo. Observando los datos de los ítems, se ve que en cada ítem hay al menos un número en el que la segunda cifra significativa es mayor o igual que 5, para que se diferencie claramente cuando el alumno está truncando o redondeando al orden de magnitud de la primera cifra significativa.

el sentido de la misma:

Entrevistador: 354 ÷ 88

Alumno 6: Pues aquí sería... Lo compensaría. Este lo subiría a 90 y este lo bajaría a 350.

E: 3.8; 5,5% error

Entrevistador: 85.9 ÷ 3.42

Alumno 9: Esto, pues, sería... Lo podría hacer redondeando a 1 [señalando el 85.9] en este caso. O sea, bueno, o a 90, pero sería más fácilmente 1. Y aquí, como no llega a la mitad, a 3.5, pues lo redondearía a 3. O sea, tiraría, digamos, este por alto y este por bajo para, un poco, compensar.

E: 0,4; 98,4% error

En el primer caso, a pesar del error en la compensación, el alumno ha producido una estimación extraordinariamente precisa (con un 5,5% de error). Sin embargo, se considera que hay un error, por que existe un conocimiento deficiente de la compensación que el alumno lleva a cabo como si estuviera haciendo una multiplicación. En todo caso, el porcentaje de error no ha sido grande, pues los números originales se han sustituido por otros cercanos.

En el segundo caso, el alumno está estimando realmente el cálculo 0,9 ÷ 3,42, incurriendo en la equivocación de calcular con datos diferentes de los propuestos (DI). Sin embargo, y pese a que en este caso ha habido una confusión en los datos, se comete un error en la compensación previa al cálculo al indicar "este por alto y este por bajo para, un poco, compensar". El error consiste de nuevo en aplicar la compensación en la división como si fuese una multiplicación.

2.1.7. Imprecisión[296] en la intensidad de la compensación previa al cálculo (CI)

Al realizar una compensación, se puede fallar en el sentido que se da a la misma, pero también en la intensidad. Se dice que hay una imprecisión en la intensidad cuando se hace una compensación previa, con sentido adecuado, pero el porcentaje de error de la estimación obtenido es mayor del 30%. Esto ocurre cuando la modificación hecha en la aproximación en un operando es mucho mayor que la realizada en el otro operando y la compensación en el resultado. Por ejemplo, si para estimar 2,57 × 0,72, se sustituye 2,57 por 2,5, y 0,72 por 1, modificando el primer factor hacia abajo y el segundo hacia arriba para compensar, se obtiene una estimación de 2,5, con un porcentaje de error[297] del 35,1%. La misma situación se daría al sustituir 96,2 ÷ 6,25 por 100 ÷ 10, para una estimación de 10, con un 35% de error, en caso de que la sustitución de 6,25 por 10 fuese hecha para compensar la primera sustitución. Los errores de este tipo están clasificados dentro de las imprecisiones en la destreza de

[296] Esta categoría se ha añadido por su interés teórico. Hay que advertir, como se explica en el texto, en que se puede considerar una subcategoría de las imprecisiones en la destreza de aproximación. Se trata, muy claramente, de imprecisiones que se dan en la fase de interpretación. Tienen un pequeño matiz diferenciador con respecto a las imprecisiones en las que los alumnos ni siquiera contemplan la posibilidad de compensar. Si se considera la compensación, esta se hace intuitivamente y de un modo mejorable. En otro caso, la destreza de estimación se aplica de forma más mecanizada y no hay reflexión alguna sobre el efecto de sustituir los datos iniciales por aproximaciones. Dado que no se ha encontrado ningún ejemplo de esta categoría en esta investigación (aunque sí aparece en otras investigaciones), no aparecerá en las tablas de resumen.

[297] Para este cálculo, el intervalo de respuesta del 30% de error y de respuesta razonable eran, respectivamente, [1,30, 2,41] y [1,4, 2,4]. Ciertamente, la imprecisión de un 35,1% puede considerarse como 'leve', pero el alumno debería darse cuenta de que una sustitución de 2,57 por 2,5, es muy pequeña en comparación con el cambio de 0,72 por 1. Sería mucho más ajustado, al hacer la compensación previa, sustituir 2,5 por 2, por ejemplo.

aproximación (IA), dado que forman una subcategoría suya, porque en ninguna instancia del tipo IA los alumnos han señalado la intención explícita de compensar.

1.1. Errores en la fase de ejecución

Los errores en la fase de ejecución de una estimación son errores parecidos a los que se producen en tareas de cálculo mental, aunque hay algunas diferencias notables entre estas situaciones (cálculo mental y fase de ejecución). En las tareas de cálculo mental, se supone que se dan datos aptos para el cálculo mental, y que el alumno tiene delante los datos con los que debe operar. Mientras tanto, en las tareas de estimación se recomienda dar datos más complejos, que desanimen de la obtención de un resultado exacto, para fomentar la estimación. Además, cuando el alumno supera la fase de interpretación, y realiza un cálculo mental con los datos simplificados, ya no tiene delante de sí los datos con los que debe realizar el cálculo mental. Estos dos aspectos tienen una importancia considerable en la diferenciación entre los errores en estas dos situaciones[298].

Lo mismo se puede decir del cálculo escrito. Dado que hay alumnos que intentan, al estimar, imitar mentalmente los algoritmos escritos, aparecerán errores en los procesos de estimación similares a los del cálculo escrito.

La mayor parte de los errores en la fase de ejecución están relacionados con el establecimiento del valor posicional del resultado y, dentro de este, con la operación de la coma decimal. Comenzaré exponiendo dos tipos de errores con procedencia distinta a esta, para adentrarnos después en los errores ligados al valor posicional[299].

[298] Volveré sobre este tema en las conclusiones, al comparar los errores hallados aquí con los de trabajos de cálculo mental, como el de Gómez (1995).

[299] Todos los errores de valor posicional tienen un código en el que aparecen las letras PV.

1.1.1. Error en la imitación del algoritmo escrito (IA)

Cuando un alumno se enfrenta a una tarea de estimación, una respuesta típica es intentar imitar el algoritmo escrito, bien sea con los datos originales propuestos o con sustituciones de estos datos. En esta investigación, se han elegido las tareas a propósito para evitar que este enfoque sea apropiado. Cuando un alumno intenta aplicar el algoritmo escrito mentalmente, sin simplificar, se enfrenta a una operación muy compleja que puede favorecer la aparición de errores. Considero que la imitación del algoritmo escrito revela una gran dependencia en el uso de algoritmos, y un conocimiento deficiente o incompleto de los procesos característicos de la estimación. Como se verá en los ejemplos propuestos, los errores en la imitación del algoritmo escrito pueden ser difíciles de detectar, debido a que las descripciones que dan los alumnos de sus procedimientos de cálculo suelen ser incompletos, y a que en ocasiones, cometer un error en el algoritmo, no implica que se produzca una estimación no razonable o imprecisa (con porcentaje de error mayor que el 30%).

Entrevistador: 0,37 ÷ 0,543

Alumno 26: En esta haríamos lo mismo. Quitaríamos la coma y queda 37 entre 54,3. Entonces como es menor pues pondría aquí un 0 y abajo un 0,... y entonces... pues ya podría dividir y entonces... sería 37 entre 5. No. A ver... ... 37 entre 54 y entonces cogemos, 37 entre 5 a 7 por 5, 35 y llevo 2. Serían 20 entre 4 serían 5...

Estimación: 0,75; 9,5% de error.

En este procedimiento, el alumno comienza poniendo “0,” en el cociente para convertir 37 entre 54 en 370 entre 54. Después, para dividir 370 entre 54, intenta imitar el algoritmo escrito, pero comienza dividiendo 37 entre 5, piensa que cabe a 7, y en lugar de multiplicar 7 por 54 y restarlo a 370, multiplica 7 por 5 y lo resta a 37. Después, con el 2 que obtiene al restar, baja el 0 y divide 20 entre 4, para obtener 5, lo que le da un resultado de 0,75 (con un 9,5% de error). El error en la imitación del algoritmo es claro, aunque como estimación 0,75 es bastante precisa.

$$\begin{array}{rrrl|l}
3 & 7 & 0 & & 5\;4 \\ \cline{5-5}
-3 & 5 & & \overleftarrow{7\times 5} & 0,\underset{\uparrow\,7\times 5}{7}\;\underset{\uparrow\,5\times 4}{5} \\ \cline{1-2}
 & 2 & 0 & & \\
 & 2 & 0 & \overleftarrow{5\times 4} & \\ \cline{2-3}
 & & 0 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
3 & 7 & 0 & & 5\;4 \\ \cline{5-5}
-3 & 2 & 4 & & 0,6\;8 \\ \cline{1-3}
 & 4 & 6 & 0 & \\
 & -4 & 3 & 2 & \\ \cline{2-4}
 & & 2 & 8 &
\end{array}$$

Figura 7.2. Ejecución incorrecta (izquierda) y correcta (derecha) del algoritmo.

El siguiente error surge cuando el alumno utiliza como ‘estrategia de estimación’ la imitación del algoritmo escrito. Es un error propio del cálculo escrito, más que de la estimación. El alumno añade un cero en el cociente en medio de la operación de forma indebida. El porcentaje de error es menor del 30%, de modo que la estimación puede considerarse como precisa, pero la actuación del alumno refleja claramente un conocimiento deficiente sobre el algoritmo de la división.

Entrevistador: 36 ÷ 258

Alumno 28: He dividido. [Multiplico] 1 por 258 y luego 360 menos los 258 y sale 102. Y entonces 102 no cabe. Pongo un cero. Entonces sería 1200. No. 102 y un cero serían 1020 entre 258 sería a... no, me paso. Porque 5 por 2 son 10. A 4, más o menos.

E: 0.104; 25,5% error

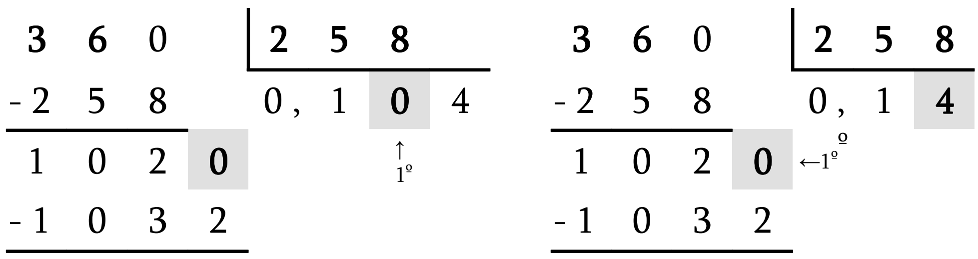


Figura 7.3. Error en el algoritmo de la división.

Evidentemente, la estimación correcta siguiendo la imitación del algoritmo escrito sería 0,14 y no 0,104[300]. Sin embargo, este error conduce a una estimación razonable (con un 25,5% de error) lo cual debe sugerir reflexiones para las conclusiones de este trabajo. Dentro de esta categoría, no considero los errores en el ajuste del valor posicional, estudiados más adelante, en situaciones en que un alumno intenta imitar el algoritmo escrito[301].

Entrevistador: 0,962 ÷ 0,25

Alumno 29: Le quito la coma al 25 corriéndola del 0,962. Se queda 96,2 entre 25. Me parece que da 0, y ahora 2 por 3, 6; 2 por 4, 8; 4 por 5, 20... Ah, 4 por 5, 20... [Inaudible] Me paso... [Escribe 0,3]

E: 0,3; 92,9% error.

[300] Realmente, este error también podría encajar dentro de la categoría de “error en el ajuste del valor posicional”, en el apartado de ‘otros errores’. Puede decirse que el error está en el establecimiento del valor posicional del 4 del cociente, que es de las centésimas en lugar de las milésimas. Sin embargo, lo que llamo en este trabajo “errores en el ajuste del valor posicional” se refiere más bien a la operación de la coma decimal, que suele realizarse como parte independiente de los algoritmos de las operaciones, antes que a la determinación de las cifras que forman parte del número dado como estimación, en el que necesariamente cada cifra (como el 4 del ejemplo) tiene un determinado valor posicional y no otro.

[301] Ni otros errores muy específicos, que también podrían considerarse errores en la imitación del algoritmo, como el de comenzar una división de un número por otro mayor con un '0,0' cuando sólo corresponde un '0,'.

En este caso, el resultado exacto del cálculo es 3,848. El alumno, mediante su imitación del algoritmo escrito, ha determinado correctamente la primera cifra significativa del resultado. El error no ha estado en la determinación de esta cifra, sino en la operación de la coma decimal. La estimación ha sido 0,3 porque, a pesar de haber sustituido la división original 0,962 ÷ 0,25 por la división 96 ÷ 25, el alumno no piensa que ambas divisiones sean equivalentes, sino que debe comenzar poniendo en el cociente de la nueva división “0,” quizá para que el resultado de la división sea del mismo tipo (un decimal que comience por '0,') que los datos.

Entrevistador: 0.747 ÷ 0.35

Alumno 30: Vale. Quito la coma. La corro dos aquí... Me quedaría 74 entre 35. Pues aquí también habría 0,... Cabe a 2... 0,21.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

Alumno 30: Primero he quitado las comas de aquí. Las he corrido dos lugares y quedaría 74 entre 35. Entonces 74 entre 35 he puesto que cabe a 2, porque 2 por 35 son 70. Entonces, he puesto 2 por 5, 10, al 14, 4. Luego 2 por 3, 6 y una 7, 0. Luego bajo el 7. 47 entre 35 a 1. Aquí antes he multiplicado por 2 y luego 1. 0,21.

E: 0.21; 90,2% error.

1.1.2. Error en la recuperación de un hecho numérico (HN)

Los errores en la recuperación de un hecho numérico durante el proceso de producir una estimación, pueden dar lugar a una estimación imprecisa o a una estimación considerada como válida. En los siguientes casos, se presentan ejemplos de estimaciones imprecisas.

Entrevistador: 46×771

Alumno 12: Redondeo esto a 50. 50... 50 por 800 son 56000. Pongo los tres ceros. Multiplico 5 por 8 y pongo los tres ceros.

E: 56000; 57,9% error

En este caso el error se ha producido en la recuperación de un hecho numérico ($5 \times 8 = 56$). En el siguiente se da el mismo tipo de error ($3 \times 1 = 1$).

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno 19: Esto sería, redondeando, a 3 y esto a 0,7, que sería como 1[302]. Pues yo redondearía esto a 3 y esto a 1. Luego sería 1.

E: 0,9; 51,4% error

En los últimos ejemplos, el error se produce en la división. En el primer caso, la cifra de las décimas puede ser perfectamente un 4 pero el alumno piensa que con un tres ya sería demasiado; en el segundo, el alumno decide poner un 4 en lugar de un 8 (o un 7 haciendo claramente una subestimación).

Entrevistador: $86 \div 222$

Alumno 3: Pues aquí, como no da, da 0 en principio coma... y, más o menos 2, creo. Porque si pongo 3 ya me paso. ¿No?

E: 0,2; 48,4% error

Entrevistador: $0.63 \div 0.785$

Alumno 4: Pues, corro la coma tres lugares [en el 0.785] y entonces aquí también lo haría [0.63] pero, como solamente hay dos

[302] Aunque el alumno no lo menciona en su descripción del procedimiento, da una estimación de 0,9 que se interpreta aquí como una compensación final. Dado que los dos redondeos realizados a los datos han supuesto un aumento de los mismos, el alumno hace una compensación final hacia abajo.

[decimales] pues añado un cero. Entonces sería 630 entre 785 pero, como no puedo, pongo el 0, y ahora hago 6300 entre 785 y entonces, más o menos, sería... 4.

E: 0,4; 50,2% error

Como se ve en estos tres ejemplos, la estrategia de estimación empleada es básicamente correcta. El redondeo está bien hecho (salvo en el segundo caso en que se incurre en una pequeña imprecisión), y el ajuste del valor posicional está realizado correctamente en los tres casos. Básicamente, el error está en la recuperación de un hecho numérico, dentro de la fase de cálculo mental del proceso de estimación.

A veces los alumnos cometen un error que corrigen durante el proceso gracias a los procesos metacognitivos descritos en el capítulo anterior. Esta situación puede verse ilustrada en el siguiente ejemplo:

Entrevistador: $0{,}45 \times 7{,}85$

Alumno 10: Siete por 4, 11 y le añado... A ver. 7 por 4, 11. Huy, ¡Qué error! 7 por 4, 28. 28 y tres ceros, de estas tres cifras, serían 28000. Y ahora tengo que quitar, de 28000, uno, dos, tres y cuatro ceros, cuatro posiciones... 2,8.

1.1.3. Error en el conteo de los ceros (PV1) [303]

Son errores que se producen cuando el alumno aplica una estrategia de estimación correcta, empleando una destreza de aproximación y sustituyendo

[303] Las ocho categorías siguientes corresponden a errores en el ajuste del valor posicional que se realiza en la fase de ejecución. Por esta razón, sus códigos (entre paréntesis) comienzan por "PV". Esto no quiere decir que no haya otros errores en los que influya un conocimiento deficiente e incompleto del valor posicional. Por ejemplo, en los errores de sustitución, redondear 0,066 a 0,7 (en lugar de a 0,07) o a 2/3 (en lugar de 2/30) denota también un conocimiento pobre del valor posicional.

los datos iniciales por otros que acaban en uno o varios ceros, pero produce una estimación de un orden de magnitud distinto al del resultado exacto del cálculo debido a una contabilización incorrecta de los ceros.

Entrevistador: 34.1 × 47.2

Alumno 7: Aquí voy a redondear. Lo voy a dejar en 34 por 50. Y me va a quedar 3 por 5, 15. Pues 150.

E: 150; 90,7% error

En este caso, el alumno redondea los datos en dos acciones sucesivas. En primer lugar, pasa de 34,1 × 47,2 a 34 × 50. El primer dato se redondea a las unidades y el segundo a las decenas. A continuación, se produce una segunda aproximación implícita al sustituir 34 por 30. Sin embargo, parece que solo se toma en cuenta, en la contabilidad de los ceros, el cero proveniente de 50, pero no el del 30. En este caso, el fallo en el conteo de los ceros parece tener su origen en una descoordinación en el proceso de aproximaciones sucesivas realizadas con los datos de la operación inicial.

En el caso siguiente, aunque también se produce el mismo proceso de aproximaciones sucesivas, el alumno hace 200 × 70 = 1400, contando dos ceros en lugar de tres. Todos los demás aspectos en la ejecución de la estrategia son correctos.

Entrevistador: 2.57 × 0.72

Alumno 5: Y aquí pues cojo, por ejemplo, 250 por 70 y... O bueno. Por ejemplo, 200 por 70 que serían... 200 por 70, 1400. 1400 y le quito 4... A ver. Serían 1400... Y le quito uno, dos, tres, cuatro. 0,14... ... Bueno pero como... he bajado mucho, puedo poner 0,2.

E: 0,2; 89,2% error

El caso siguiente es muy parecido al anterior (900 × 40 = 3600), salvo por que el alumno indica explícitamente "36 más dos ceros de aquí y uno de aquí serían 3600", lo cual hace más sorprendente el error[304].

Entrevistador: 852 × 0.048

Alumno 1: A ver. Aquí son 900 por 40, que son 9 por 4, 32. No. 9 por 4, 36. 9 por 4, 36. 36 mas dos ceros de aquí y uno de aquí serían 3600. Y, como le tengo que quitar esto, será 3,6.

E: 3,6; 91,2% error

Entrevistador: 96.2 ÷ 6.25

Alumno 1: Aquí serían 100 entre... 100 entre... Paso la coma y serían 1000... Una, dos. Tengo que poner 1000... 10000 y 600. 10000 entre 600. Si lo divido entre 500, lo redondeo a 500 me daría... 10000 entre 500 me daría a 2... A 200.

E: 200; 1199,4% error

En este último caso puede verse como el dividendo tiene 4 ceros y el divisor tiene 2 ceros. El alumno añade dos ceros a la cifra calculada en el cociente (2) posiblemente porque 4 – 2 = 2, sin tener en cuenta que para determinar el 2 del cociente es preciso emplear al menos uno de los ceros del dividendo (10 ÷ 5 = 2).

[304] Sigo evitando emplear el término 'descuido', como se ha hecho en la categoría DI, para estimaciones hechas con datos diferentes de los propuestos. Asumo, desde el principio del trabajo, que las tareas propuestas suponen una gran demanda cognitiva (precisamente para animar a los participantes a estimar, reduciendo la dificultad de los cálculos). A esto se suma que, en la prueba de estimación, cada alumno debe responder a ¡24 tareas de estimación!, y en la entrevista, 12.

1.1.4. Omisión de los ceros en el ajuste del valor posicional (PV2)

Error que consiste en que el alumno quita las comas decimales, sustituye los números por aproximaciones terminadas en uno o varios ceros, opera las cifras significativas y establece el orden de magnitud del resultado ignorando los ceros finales de las aproximaciones empleadas en el cálculo y teniendo en cuenta únicamente el número de cifras decimales de los datos iniciales.

Entrevistador: 2.57 × 0.72

Alumno 29: 300 por 70... 3 por 7 son 21. Uno, dos, tres, cuatro. Sería 0,0021.

E: 0,0021; 99,9% error

Parece que lo correcto sería multiplicar 300 por 70 y, al resultado de 21000, mover el separador decimal cuatro posiciones a la izquierda, para una estimación de 2,1. De nuevo, como en casos anteriores, una evaluación del resultado hubiera conducido al alumno a advertir su error, dado que al multiplicar 0,72 por un número mayor que 1 (como 2,57), hay que obtener un resultado mayor que 0,72, y no una estimación de 0,0021 como en este caso.

Entrevistador: 0.025 × 776

Alumno 29: 0,025 lo... subo a... 30 y 776 lo subo a 800. Sería 800 por 30. 3 por 8, 24. 24... y, como es una multiplicación con decimales, pues sería, cuento los decimales, los números que hay detrás del cero coma, que son tres.

E: 0,024; 99,9% error

Dar, para la operación 0,025 × 776, una estimación de 0,024 supone sostener que, en este caso, multiplicar un número por 776 (o hacerlo 776 veces mayor) no solo no aumenta el número sino que lo disminuye ¡una milésima! Lo mismo puede decirse de la siguiente estimación.

Entrevistador: 852 × 0.048

Alumno 15: Aquí... Yo que sé... Pues esto lo redondeo a 0,05 y entonces 8 por 5 son 40... Y entonces, como son 3 más para allá, entonces son 0,004.

E: 0.004; 100,0% error

El último caso es ligeramente diferente, ya que, de haber utilizado el procedimiento anterior, el alumno hubiera dado una estimación de 0,045.

Entrevistador: 852 × 0.048

Alumno 132: Entonces el resultado... El resultado llevaría tres números después de la coma. Entonces sería... 0,... Entonces esto lo redondeo a 900 y esto a 50. Entonces sería 0,450.

E: 0.45; 98,9% error

En lugar de la estimación de 0,045, se da una estimación de 0,450. Se respeta, como en casos anteriores, que el resultado tenga 3 cifras decimales como en los datos de partida, pero al autor de la estimación le parece más apropiado, en lugar de dividir el resultado por 1000, poner las tres cifras decimales de una forma alternativa, quizá para que el resultado no sea tan ‘bajo’.

1.1.5. Error de falta de recuperación de la coma decimal (PV3)

Es un error que se produce cuando se operan los decimales como si fuesen enteros, apartando la coma decimal, pero no se recupera la misma después de realizar el cálculo. Se utiliza una estrategia básicamente correcta, aplicada de forma incompleta. Este error es complementario con el anterior, que también puede considerarse una estrategia incompleta. Si se realiza una estimación para el cálculo 78,4 × 89,5 ignorando las comas decimales, como se hace en el algoritmo escrito, y posteriormente se sustituyen los datos iniciales por 800 y por 1000, deben tenerse en cuenta, tanto los 5 ceros que suman ambos números multiplicados, como las dos cifras decimales. Si en el tipo de error anterior se olvidaban los 5 ceros, y solo se tenían en cuenta las cifras decimales, en este caso ocurre lo contrario: se tienen en cuenta los ceros, pero no las cifras decimales. En el caso anterior se obtenían subestimaciones ridículas, y en este caso se obtienen estimaciones desmesuradamente grandes.

Entrevistador: 78.4 × 89.5

Alumno 9: Esto es 80 por, ya casi 100. Entonces, se puede hacer así. O bien por otro método, que es 8 por 7, 56. Entonces, sería la estimación y luego se le añadirían los dos ceros. Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto. Se añadirían 4 ceros en este caso.

E: 560000; 7880,8% error

Entrevistador: 0.025 × 776

Alumno 9: Esto es próximo a 1000 por... por 0,03. Sería 1000 por 0,03... A 3000.

E: 3000; 15363,9% error

1.1.6. Error por falta de coordinación entre la destreza de aproximación y las reglas para operar el punto decimal (PV4)

Son errores que se producen cuando el alumno emplea una destreza de aproximación -como el redondeo- eliminando alguna cifra decimal, opera los números como si fuesen enteros, apartando la coma decimal, y después –al colocar la coma decimal- cuenta el número de cifras decimales de los números de partida, sin tener en cuenta que estos números han sido previamente sustituidos por aproximaciones. Este tipo de procedimiento erróneo puede observarse en los siguientes ejemplos:

Entrevistador: 34.1 × 47.2

Alumno 10: Lo redondeo. Esto a 50, el 47 a 50 y 34 a 30. 3 por 5 serían 15. Tomo el 3 y el 5. Y dos ceros, del 4 y del 7, serían 1500. Pero 1500 le tengo que quitar estos dos decimales, con lo cual serían 15.

E: 15; 99,1% error

En el ejemplo, al sustituir la operación 34,1 × 47,2 por 30 × 50 desaparecen las cifras decimales, de modo que no es necesario tenerlas en cuenta en el resto de la operación. Sin embargo, tras obtener el resultado de 1500, el alumno vuelve a contar las cifras decimales, como se hace en el algoritmo escrito, y elimina los dos ceros para una estimación de 15. La misma situación se refleja en las dos siguientes situaciones:

Entrevistador: 0.45 × 7.85

Alumno 30: Esto lo voy a redondear a 50. Y lo voy a multiplicar por 7. 50 por 7, 350. Sería 0,0350, creo.

E: 0.035; 99,0% error; A: 354 dividido por 88

Entrevistador: 852 × 0.048

Alumno 7: Redondeo a 850 y a 0,05 y entonces multiplico 5 por 850 y queda... a ver... 4200. Pero tengo que correr la coma tres lugares y entonces queda 4,2.

E: 4.2; 89,7% error; A: 0.086 dividido por 0.42

Este tipo de error también se puede producir al sustituir un decimal por una fracción:

Entrevistador: 852×0.048

Alumno 17: 0,048 es 0,05, que sería ½. Entonces sería 852. La mitad, 426. Pues saldría 0,426.

E: 0.426; 99,0% error

En este caso se mezclan dos procedimientos erróneos: la sustitución de 0,05 por ½ y la recuperación de las tres posiciones decimales como si estuviera utilizando el algoritmo escrito, sin tener en cuenta que la sustitución realizada ha dado cuenta ya de dos de las tres cifras decimales. El alumno no se da cuenta que al aplicar la destreza de aproximación, ha desaparecido la coma decimal y no tiene por tanto que operarla con posterioridad a la operación con fracciones. En este caso, para que la estimación fuese correcta, se debería sustituir 0,048 por ½ × 1/10, de modo que tras hacer la mitad de 852 se dividiese el resultado por 10, para una estimación de 42,6.

1.1.7. Recuperación impropia de la coma decimal en la división (PV5)

Error que consiste en multiplicar el dividendo y el divisor por la misma potencia de 10, calcular el cociente, y dividirlo por la misma potencia de 10 por la que se ha multiplicado antes. Es un error que se produce solamente en la división. Los alumnos se comportan como si no supiesen que al multiplicar o dividir dividendo y divisor de una división por la misma potencia de 10, el cociente permanece inalterado. Este error aparece en los dos siguientes ejemplos:

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Alumno 19: El 0,46 lo redondearía a 0,5. El 0,066 lo redondearía a 0,07. Y lo dividiría, que sería... 0,50 entre 0,07... 7 por 7, 49. 7 por 8, 56. 0,07, más o menos.

E: 0,07; 99,0% error

Entrevistador: 0.68 ÷ 0.024

Alumno 30: Pues lo mismo. Tengo que quitar la coma y poner aquí, correr tres lugares. Quedaría 680 entre 24. Bueno. Primero cogería el 68 entre 24... Que quedaría 3... No. 3 se me pasaría. Sí. 3 por 25 serían 75. Sí. Se me pasaría. Cabría a 2, mejor. Sería 0,02.

E: 0.02; 99,9% error

El próximo caso es ligeramente distinto a los demás, pues no hay en el realmente una recuperación de la coma decimal. Sin embargo, lo clasifico en esta misma categoría (sin cambiarle el nombre a la misma), pues lo que ocurre en él es que se dividen el dividendo y el divisor de una división por 10 para después 'compensar el cociente' multiplicándolo por 10.

Entrevistador: 354 ÷ 88

Alumno 16: 300 dividido entre 90. Le quito un cero a cada uno y me queda 30 dividido entre 9. 3 por 9, 27 y luego le pongo el 0 que le he quitado a los dos y ya está.

E: 30; 645,8% error

Este es el caso análogo a los anteriores, pues en lugar de multiplicar los datos para luego compensar dividiendo el resultado, se dividen los datos y se compensa multiplicando el resultado. Primero, se produce una simplificación en la división inicial y después una 'compensación' inapropiada en el resultado.

El siguiente y último ejemplo de la categoría es también distinto a los dos primeros casos. En él la 'compensación' no se hace 'tan sistemática' como en los ejemplos iniciales. Los datos iniciales se multiplican ambos por 1000, pero el resultado solo se divide por 10.

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Alumno 5: Corro las tres comas para allá. Uno, dos y tres. Queda 66 y aquí igual. Uno, dos y pongo un cero. O sea que sería 460 entre 66 y 460 entre 66 es lo mismo que 500... ... que sería a... 80. O sea que pondría... 8 por 6, 48. Pues 7 por 6, 42, que ya me cabe aquí. Y... yo creo que habría que poner un cero. Porque al poner aquí un cero, habría que poner un cero.

E: 0,7; 90,0% error

El alumno concluye indicando que "al poner aquí un cero [señalando a los datos iniciales], habría que poner un cero [señalando al resultado]". Parece que el resultado tendría que ser del mismo tipo que los datos: Si se operan décimas (números que comienzan por "0,"), el resultado deben ser décimas también. Algo así como ocurre en la suma y en la resta, en que se suman y restan las décimas con las décimas para obtener décimas. En este sentido, la actuación del alumno parece no seguir una lógica exactamente igual a la de casos anteriores, aunque también se produce (como en ellos) una recuperación impropia de la coma decimal.

Entrevistador: 0.962 ÷ 0.25

Alumno 5: Pues quito la coma dos veces para allá. Ésta también, dos veces para acá. Queda 96,2 entre 25. Entonces... quito otra coma y pongo... un cero. O sea que 0,... Entonces sería, redondeo 1000... ... [Escribe 0,4]

E: 0,4; 89,6% error

En este caso se observa el doble proceso para eliminar la coma decimal de los dos operandos (multiplicar primero ambos por 100 y después por 10). El error viene después, al comenzar la escritura del resultado con un '0,' como pensando que el resultado debe ser del mismo tipo que los datos.

1.1.8. Error de operar la coma decimal en la división como en la multiplicación (PV6)

Este error consiste en el alumno suma el número de cifras decimales del dividendo y del divisor para establecer el número de cifras decimales del cociente. Parece una extrapolación inadecuada del método que se utiliza en la multiplicación para colocar la coma decimal en el resultado. Tratándose de un caso de recuperación impropia de coma decimal, como en el error anterior a este, se distingue claramente por el número de posiciones decimales que se recuperan, que es la suma de las posiciones decimales de los datos iniciales (como se hace en el algoritmo de la multiplicación).

Entrevistador: 0.962 ÷ 0.25

Alumno 12: Redondearía a 1000 el 962. El 25 lo dejo como está. Me daría 962 entre 25, 400 y, con 5 decimales, uno, dos, tres, cuatro y cinco [Escribe 0,0400 y borra los ceros del final].

E: 0,04; 99,0% error

Entrevistador: 0.747 ÷ 0.35

Alumno 1: Este lo redondeo al 800 y este al 40. Entonces son: 8 entre 4 a 2. A 2, que serían, dos ceros de aquí y uno de aquí, serían 1000, 2000 y, como tengo que poner una, dos, tres, cuatro y cinco, serían... 2000,... 0,02.

E: 0.02; 99,1% error

Entrevistador: $0.46 \div 0.066$

Alumno 12: Aproximadamente 46 entre 6 pues... serían... ... Si corro aquí la coma lo dejo en 46 y corro aquí la coma y lo dejo en 6. Entonces sí serían 46 entre 6 aproximadamente a 7 y después tiene uno, dos, tres, cuatro, cinco. 0, uno, dos, tres, cuatro, 7.

E: 0,00007; 100,0% error

Entrevistador: $0.059 \div 0.23$

Alumno 12: Sería 59 entre 230... 59 entre 23, haría aproximadamente 20, o bueno, 30. 3, quiero decir y después tengo uno, dos, tres, cuatro, cinco. 0, uno, dos, tres, cuatro, 3.

E: 0,00003; 100,0% error

1.1.9. Error en la determinación del valor posicional de la primera cifra del cociente (PV7)

Es un error característico de la división de un número por otro menor, que suele estar asociado al uso del algoritmo simplificado[305] de la división. El procedimiento consiste en comenzar la división eliminando las cifras decimales mediante la multiplicación por la unidad seguida de ceros en el dividendo y en el divisor[306]. Después, se calcula la primera cifra del cociente. El error suele venir a continuación, al dejar esta primera cifra del cociente como estimación,

[305] Se recuerda que el 'algoritmo simplificado' es una estrategia correcta de estimación en la que no se utiliza destreza de aproximación. Se produce cuando en una división se utiliza como estrategia una adaptación del algoritmo escrito consistente en determinar la primera cifra del cociente y luego establecer el valor posicional de la misma -abandonando después el algoritmo de la división sin concluir el mismo.

o hacer alguna pequeña modificación a la misma (como añadirle un decimal) sin plantearse adecuadamente cuál es el valor posicional de la misma. Así, este error se sitúa precisamente en la determinación del valor posicional. El error PV7 se diferencia del error PV5 en que, en el PV7, al multiplicar dividendo y divisor por la unidad seguida de ceros, el alumno parece advertir que la división obtenida es equivalente a la anterior, de modo que apenas parece prestar atención a un ajuste posterior del valor posicional. Por el contrario, en el error PV5, hay una operación de la coma decimal, en el sentido contrario de la que se realizaba primero con los datos, o una inclinación a que el resultado de la estimación sea del mismo tipo que los datos (ajustando para ello el valor posicional). Por otro lado, el PV7 se diferencia del error PV1 (cuando este sucede en una división) en que en aquel (PV1) se produce con datos redondeados y hay una regla correcta para determinar el valor posicional, que se aplica mal; en este error, los datos no suelen redondearse y parece que no se aplicara ninguna regla para el ajuste del valor posicional.

En el siguiente ejemplo, el alumno da una estimación de 1,3 para la operación 96,2 ÷ 6,25. Como ocurre en otros muchos errores, aunque en este caso es más evidente, bastaría una evaluación rápida de la estimación (que no suele producirse) para advertir que es más plausible una estimación de 13 para este cálculo que una de 1,3.

Entrevistador: 96.2 ÷ 6.25

Alumno 6: Sería, como hay dos cifras [en 6.25] a la derecha de la coma, lo multiplicaría por 100. Sería 625 y el 96,2 también

[306] Esto a veces se lleva a cabo en un procedimiento de dos pasos. Cuando uno de los datos tiene una cifra decimal y el otro dos, por ejemplo, es típico multiplicar primero dividendo y divisor por 10, para eliminar la cifra decimal de uno de los datos, y después volver a multiplicar por 10 ambos datos para eliminar la cifra decimal que queda en el otro dato. Por ejemplo, 96,2 ÷ 6,25 puede primero convertirse en 962 ÷ 62,5 y después en 9620 ÷ 625.

por 100, sería 9620. 9620 entre 625 sería 1,3 más o menos.

E: 1.3; 91,6% error

Entrevistador: 96.2 ÷ 6.25

Alumno 133: Esta coma, la paso aquí. Aquí son dos pasos. Dos decimales. Paso los mismos al otro lado y quedaría 9620 aquí y aquí 625. Entonces aproximo esta a 10000, sería 10000, y esta a 600. Sería 6 por una es 6, a 10, 4. Bajo el cero. 6 por 6, 36, al 40 me llevo 2 y sería 1,6.

E: 1.6; 89,6% error

Entrevistador: 0.68 ÷ 0.024

Alumno 132: En el divisor corro la coma, multiplico por 1000. Entonces se queda en 24. Esto también lo haría por 1000. Entonces sería 680 entre 24... Entonces... 680... Sería a 2.

E: 2; 92,9% error

El proceso de estimación es prácticamente abandonado al determinar la primera cifra del cociente (como en el último ejemplo). Si se determina una cifra más, llevando más lejos la imitación del algoritmo escrito, no se les da el valor posicional adecuado. En los tres ejemplos presentados, la primera cifra que se calcula pertenece al orden de las unidades.

1.1.10. Error de 0,0 en lugar de 0, en la división (PV8)

Es un error que se produce cuando se comienza una división de un número por otro número mayor escribiendo “0,0” y moviendo un solo lugar la coma decimal en el dividendo. Parece como si los alumnos atribuyesen a los ceros que hay a la izquierda y a la derecha de la coma decimal dos significados distintos. El “0,” significaría “Cuando divido un número por otro número mayor debo comenzar la operación escribiendo '0,' en el cociente". Sin embargo, el segundo cero significaría "cero al cociente y bajo la cifra siguiente". Este tipo de error (bastante habitual en este trabajo) queda ilustrado en los siguientes ejemplos:

Entrevistador: 86 ÷ 222

Alumno 22: 100 entre 200. Subiendo el 86 y bajando el 222. 100 entre 200 es 0,... a ver. 100 entre 200. No cabe. 0,05.

E: 0,05; 87,1% error

En este caso el alumno se plantea la operación 100 entre 200. Comienza diciendo "es 0," pero vuelve después a plantearse la operación 100 entre 200, como si poner "0," al inicio no fuese parte de la operación. Realmente, poner el 0 en el cociente implica multiplicar el dividendo por 10, de modo que, tras el "0,", debería plantearse la operación 1000 entre 200[307].

Entrevistador: 8.85 ÷ 42.6

Alumno 30: Vamos a quitar la coma de 42,6. Corremos un lugar... y... en 8,85 también con lo cual tendríamos 88,5 entre 426 pero como no cabe, ponemos un 0... 0,... tampoco cabe. Pondríamos otro cero y tendríamos 885 entre 426. Entonces sería 0,0... A 2. Sería 0,02. Yo creo.

E: 0.02; 90,4% error

[307] Si el alumno interpretara la división como un reparto, podría comprender perfectamente el significado de cada paso de la operación. Si se reparten 100 euros entre 200 personas, no toca ni siquiera a un euro para cada uno. Se debe entonces convertir 100 euros en 1000 monedas de 10 céntimos (0,1 euros), lo cual permite dar 1000 ÷ 200 = 5 monedas de 10 céntimos o 0,5 euros. Lamentablemente, los alumnos suelen ejecutar las operaciones de forma mecánica sin atender a este tipo de razonamientos. Las reglas del tipo: "cero al cociente y bajo la cifra siguiente" suelen aplicarse sin comprensión, lo que produce este tipo de errores.

Entrevistador: $0.059 \div 0.23$

Alumno 25: Pues aquí, multiplico por 100 la cifra que tengo aquí, o sea, el divisor para que se me quede sin comas y en el otro lado corro la coma dos lugares. O sea, multiplico por 100 también que sería hacer lo mismo. Entonces, se me queda 5,9 entre 23. Puedo redondear a 6 aquí y en el otro lado a 20. 6 entre 20. 0,... 03.

E: 0,03; 88,3% error

Entrevistador: $0.086 \div 0.42$

Alumno 1: Aquí paso la coma aquí, 42, y aquí me quedaría 8,6 por lo que, al pasar la coma, me queda 0,0 y 80 entre 40 a 2.

E: 0.02; 90,2% error

1.2. Errores en la fase de evaluación

Los errores en la fase de evaluación han sido menos frecuentes en este trabajo y más difíciles de localizar. Normalmente, los alumnos no evalúan sus estimaciones, lo que hace que cometan pocos errores en la evaluación. Si acaso, podría decirse que una gran cantidad o la mayoría de errores en este trabajo se han debido a la ¡ausencia de evaluación del proceso y el resultado de las estimaciones! He considerado aquí un error de evaluación, la sustitución de una estimación correcta (precisa o razonable) por otra incorrecta, tras una evidencia de que el alumno haya hecho una evaluación según la cual considera explícitamente la estimación correcta como incorrecta. En este juicio erróneo reside el tipo de error de evaluación estudiado en este trabajo. Un caso claro de este tipo de error es el siguiente:

Entrevistador: 46×771

Alumno 19: Yo redondearía el 46 al 50 y el 771 a 80. ¡Huy a 80, a 800! 5 por 8, 40. [Escribe 40000] ¡Anda! ¡Que pongo un cero de más! ¡Qué bruta soy! [Borra el último cero y deja 4000]

Estimación: 4000.

El alumno realiza correctamente la estimación sustituyendo 46 × 771 por 50 × 800, aplicando en ambos números el redondeo estándar. A partir de aquí, escribe en el ordenador la respuesta correcta de 40000. Después, evalúa su estimación y elimina un cero de la respuesta (error de evaluación, al considerar que la respuesta correcta está mal), incurriendo además en un error en el ajuste del valor posicional. El error en la evaluación se manifiesta en la sustitución de una estimación válida por otra que no lo es.

En el siguiente ejemplo, el alumno decide utilizar el redondeo en el primer factor y el uso de potencias de diez en el segundo. Después cambia estas destrezas por el uso del truncamiento en ambos números. El problema se le produce de nuevo al ajustar el valor posicional:

Entrevistador: 78.4 × 89.5

Alumno 9: Esto es 80 por, ya casi 100. Entonces, se puede hacer así. O bien por otro método, que es 8 por 7, 56. Entonces, sería la estimación y luego se le añadirían los dos ceros. Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto. Se añadirían 4 ceros en este caso.

E: 560000; 7880,8% error

En primer lugar, el alumno ajusta el valor posicional del resultado correctamente al añadir dos ceros (los correspondientes al 70 y al 80, resultado del truncamiento). Sin embargo después evalúa su estimación diciendo: “Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto. Se añadirían 4 ceros en este caso". Es en este acto de evaluación, en que se valora el resultado correcto como incorrecto y se modifica el resultado correcto para producir una estimación no razonable, donde reside el error.

En el siguiente ejemplo, el alumno sustituye la operación 86 ÷ 222 por 9 ÷ 20. Es en esta última operación, en la que se pasa de una solución correcta de 0,4 a una incorrecta de 0,04, donde se comete un error en la evaluación.

Entrevistador: 86 ÷ 222

Alumno 25: Vale. Aquí pues redondeo. A ver. 86 entre 222. Este lo dejo en 200 y aquí redondeo a 90. Sería 90 entre 200 y, como no cabe, pongo 0. Vale. Ah no. Espérate a ver. Sería 90 entre 200. Bueno. A ver. Quito un cero. Sería 9 entre 20. Entonces, como no cabe, 0, bajo un cero, de aquí, o sea, le pongo otro cero al nueve y sería 90 entre 20. Que eso ya sí que me cabe... y sería a 4. A ver. Espérate. Ay. Vale. 9 entre 20, 0,04. Creo. No sé.

E: 0,04; 89,7% error.

Algo similar ocurre en el último ejemplo que presento. El alumno cambia una estimación correcta (0,3) por una incorrecta (0,03). Al evaluar su estimación, comete un error relacionado con la operación de la coma decimal.

Entrevistador: 0.059 ÷ 0.23

Alumno 14: No me acuerdo muy bien de dividir con comas, pero creo que si ya empiezo a poner en el cociente cero coma... Con esto lo que intento hacer es pasar la coma del 0,059 al 0,59. Entonces... Pues ya está. Tengo 0,59 entre 0,23. 0,59 lo paso a 0,60 para redondear y que sea más fácil. Y 0,60 entre 0,20... Lo redondeo hacia abajo... 6 entre 2, 3. Pues 0,3. ¿No?... Bueno, no. No, no. A mí me... Esto es una cifra demasiado grande. Porque la primera es muy pequeña. Entonces doy marcha atrás y digo que es 0,03.

E: 0,03; 88,3% error.

Debe enfatizarse que, en todos los ejemplos de este apartado, se pueden señalar dos errores diferentes: Uno es el error de juicio al considerar una estimación correcta como incorrecta; el segundo error es el error en el ajuste del valor posicional (en los ejemplos de este apartado), que se produce al realizar la segunda estimación, la estimación errónea que sustituye a la correcta. Por ejemplo, cuando en la estimación para la operación 78,4 × 89,5, el alumno da la estimación correcta de 5600 y a continuación dice: "Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto. Se añadirían 4 ceros en este caso", se aprecian dos errores: El error de evaluación al indicar que el resultado correcto se 'queda corto', cuando no es así ("Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto); y el error en el ajuste del valor posicional ("Se añadirían 4 ceros en este caso"), que es un error estudiado en un apartado anterior, con el nombre de "error de falta de recuperación de la coma decimal" (PV3).

1.2.1. Otros errores, imprecisiones, y 'fallos' (OT)

Son los errores, imprecisiones, o fallos, que no se han podido incluir dentro de ninguna de las categorías anteriores[308], han tenido una frecuencia baja[309], y pueden darse en cualquiera de las fases anteriormente estudiadas. Por ejemplo, el caso siguiente es un ejemplo de *estrategia incompleta*[310]. El procedimiento es

[308]Ni tampoco son errores en el ajuste del valor posicional y por esta razón no han sido incluidos en la categoría anterior.

[309]Han aparecido como mucho en dos ocasiones y, a veces, realizados por el mismo alumno, como en los dos ejemplos presentados correspondientes al alumno 14.

[310] Se han visto, en la clasificación de errores realizada, otras tres categorías que pueden considerarse de estrategias incompletas: PV2, PV3 y PV7. Podría haber establecido una única categoría de 'estratregia incompleta' como han hecho otros autores. Sin embargo, en el ejemplo

en principio correcto. Se trata de sustituir 0,72 por 0,75 y después 0,75 por ¾. El alumno multiplica 2,5 por 3 pero luego omite la segunda parte de la estrategia (la división por 4). Este procedimiento, que parece resultado de una 'distracción', resulta evidentemente favorecido por la complejidad del cálculo.

Entrevistador: 2.57×0.72

Alumno 3: Pondría 7,5. 80 Porque he cogido 2,5. Sería por ½ pero lo voy a hacer por ¾ porque, como se acerca a 0,75.

E: 7,5; 305,3% error

Dentro de esta categoría miscelánea, muestro dos ejemplos de error del mismo tipo, cometidos por el mismo alumno. El error se debe a un conocimiento deficiente del efecto que produce multiplicar o dividir por un número menor que uno. La estimación, en ambos casos, se realiza de forma "intuitiva" (sin realizar cálculo alguno). Este error es una extrapolación incorrecta de la regla que afecta a la multiplicación por 1, a todos los números menores que 1[311].

Entrevistador: 0.025×776

Alumno 14: La primera cifra, como no quiero multiplicar con comas y, sobre todo, con cifras que tengan comas y que empiecen por cero, porque me complica... El 0,025 pues no lo voy a cambiar a 1, porque no tiene nada que ver. Es muchísimo

analizado aquí, en que se sustituye un decimal por una fracción, me parece un caso bastante diferente, pues se trata del único error que no se produce en el ajuste del valor posicional o en la operación de la coma decimal.

311 Al igual que en el ejemplo anterior, se podría decir que esta situación denota un conocimiento muy pobre del valor posicional. Sin embargo, a mi juicio, predomina en este procedimiento el hecho de no haberse realizado ninguna operación, ni ajuste de valor posicional operando la coma decimal, sino que se ve claramente como extrapola la propiedad del elemento neutro de la multiplicación a 'otros números pequeños'.

inferior. Es mucho más inferior... Entonces no lo puedo sustituir por 1. Entonces, voy a poner 776 de resultado por que supongo que, multiplicarlo por 0,025 no lo iba a cambiar mucho.

E: 776; 3900,0% error

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Alumno 14: Ahora empieza lo difícil porque no sé dividir con comas. Y, sobre todo, porque no son iguales. Porque uno empieza 0,46 y el otro 0,0. Entonces, ¿Qué es lo que hago?... Pues, como no sé, me imagino que 0,066 es una cifra demasiado pequeña como para que... siendo dividida por 0,46 vaya a modificar mucho el número 0,46. Así que, probablemente, el resultado no sea muy diferente de 0,46 porque si estás dividiendo por una cosa tan pequeña. Así que lo dejo en 0,46.

E: 0,46; 93,4% error

El siguiente ejemplo ya ha sido brevemente comentado al tratar los errores de traducción (TD). El alumno sustituye 86 ÷ 222 por 100 ÷ 200. A continuación, invierte el papel de dividendo y divisor (ahí se encuentra el error de traducción) y convierte el 100 ÷ 200 en 200 ÷ 100, dándose cuenta de que es tan fácil dividir por la unidad seguida de ceros que merece la pena recuperar cifras de los datos iniciales, quedándose con 222 ÷ 100. El error está en identificar el resultado (2,22) con una expresión decimal infinita periódica:

Entrevistador: 86 ÷ 222

Alumno 9: Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

E: 2,2; 467,9% error

Parece bastante normal que este error aparezca en una categoría de "otros errores" debido a que es un error relacionado con las expresiones periódicas infinitas en un trabajo en que no se tratan, ni aparecen directa o explícitamente expresiones de dicho tipo. El alumno ha evocado la expresión periódica al fijarse en su estimación 2,22 (situación en que la expresión no está justificada).

Finalmente, se han encontrado algunos errores en el ajuste del valor posicional que no encajan en ninguna de las categorías antes estudiadas, incluidos en esta categoría por haber sido cometidos una única vez o por un solo alumno.

Entrevistador: 0.086 ÷ 0.42

Alumno 7: A ver. Corro la coma en el divisor dos lugares. O sea, hasta que quite la coma, ¿No? Y me queda 42. Y la corro en el dividendo otros dos lugares y me queda 8,6. 8,6 entre 42 no me cabe. Entonces he puesto '0,' claro, entonces, espérate... Como 8,6 entre 42 no cabe, pues pongo 0, y añado un cero y entonces queda 860 entre 42 y queda entonces 8 entre 4 a 2. 0,2.

E: 0.2; 2,3% error

Este último es un curioso caso de error en el ajuste del valor posicional. Se multiplica 8,6 por 10 añadiendo un cero y quitando la coma, con lo que da 860. Realmente, se está multiplicando por 100 en lugar de por 10. Es una extrapolación incorrecta de la regla para multiplicar por 10 un número natural. Dentro de los números naturales, se multiplica por 10 añadiendo un cero a la derecha; dentro de los decimales, se mueve un lugar la coma a la derecha. Sin embargo, a pesar de este error en la operación de la coma decimal, la estimación (vista únicamente como resultado, sin fijarnos en el proceso) es extraordinaria, pues tiene solo un 2,3% de error[312].

[312] Para comprender el porqué de tan buena estimación con un error tan grave en el ajuste del valor posicional, debe observarse que realmente se producen en el procedimiento del alumno

1.3. Resumen sobre los errores encontrados en este trabajo

Este apartado, correspondiente a la clasificación de los errores en estimación, concluye con la Tabla 7.1, en la que se presenta un resumen de los errores encontrados en este trabajo, con el código correspondiente al error, el nombre del error, la descripción del mismo, y uno o varios ejemplos simplificados, tomados de las transcripciones de las entrevistas realizadas a los participantes.

Tabla 7.1. *Resumen de los errores en estimación*

Código	Error	Descripción	Ejemplo
		Errores en la fase de Interpretación	
SU	Error en la **Su**stitución	Aplicar incorrectamente una destreza de aproximación (redondeo, truncamiento, sustitución por potencias de diez). Adaptar incorrectamente sustituciones (0,5 por ½ y 0,25 por 1/4) a situaciones similares 0,05 por 1/20 o 0,025 por 1/40.	Sustitución de 0,06 por 0,5 Sustitución de 0,025 por ¼ Adaptación incorrecta de las sustituciones (0,5 por ½ y 0,25 por 1/4) a 0,05 o a 0,025.
IA	Imprecisión en la Aproximación	Aplicar correctamente una destreza de aproximación, dando lugar a una estimación imprecisa (error mayor 30%).	Sustituir 2.57 × 0.72 por 3 × 1 Sustituir 96.2 ÷ 6.25 por 100 ÷ 10 Sustituir 0.059 ÷ 0.23 por 0.1 ÷ 0.2
DI	Estimación con datos u operación **Di**ferentes a los propuestos.	Realizar una estimación con alguno de los datos o con la operación diferente de los propuestos.	Sustituir **2.57** × 0.72 por (**60** × 70)/10000, tomando el 2 (del 2.57) por un 0. Sustituir 0.45 **×** 7,85 por 45 **÷** 785.
TO	Error en la Traducción por cambio de Operación.	En una sustitución de un decimal por una fracción, cambio de la operación propuesta, por la aplicación de la fracción, como operador, al otro dato. Sustitución de a ÷ 1/n por a ÷ n Sustitución de a/b ÷ n por (a × n) ÷ b	Sustituir 0.37 ÷ 0.543 por 0,4 ÷ 0,5 y esto por ½ de 0,4 = 0,2. Sustituir 0.63 ÷ 0.785 por 0,66 ÷ 0.780 y esto por (2/3 de 780) ÷ 1000 = 0,52
TD	Error en la Traducción por cambio en el orden de los Datos.	Cambiar, en una división, el papel del dividendo y el divisor.	Hacer 86/222 = 100/222 = 2.22. Se cambian dividendo y divisor para dividir por 100, que es más fácil.
CI	Imprecisión en la intensidad de la Compensación previa.	Realizar una compensación explícita, previa al cálculo, con sentido correcto, dando una estimación imprecisa (error mayor 30%).	Sustituir 2.57 × 0.72 por 3 × 1 = 3, y compensar reduciendo a 2,9. El sentido es correcto; la intensidad insuficiente; la estimación, imprecisa.

dos errores que se compensan. Para ver cuál es el segundo error, debe de nuevo recurrirse a la interpretación de la división como reparto. Si quiero repartir 8,6 euros entre 42 personas, tocan a 0 euros cada persona. Si cambio los euros por décimos de euro (monedas de 10 céntimos) tendré 86 décimos entre 42 personas. Al multiplicar por 10 el 8,6, paso de euros a décimos. Si digo que 8,6 por 10 son 860, tengo 860 décimos para repartir entre 42 personas. Al sustituir 860 por 800 y 42 por 40 para estimar, llego a un resultado de 20 décimos de euro por persona, que son ¡dos euros por persona! El alumno escribe el resultado de la división como 0,2, olvidando que realmente no hay 2 décimas, sino 20 décimas, de modo que el resultado no sería 0,2, sino 2. Este es el segundo error que compensa el primero (8,6 × 10 = 860).

Tabla 7.1. (Continuación) *Resumen de los errores en estimación*

Código	Error	Descripción	Ejemplo
		Errores en la fase de Ejecución	
AL	Error en la imitación del **Al**goritmo escrito.	Error que se produce en la ejecución de la imitación mental del algoritmo escrito de la multiplicación o la división.	Estimar 0,37 ÷ 0,543 Reproduciendo el algoritmo escrito mentalmente como a la derecha. $\begin{array}{rl} 370 & \underline{54} \\ \underline{-35}\overleftarrow{_{7\times5}} & 0,75 \\ 20 & \uparrow_{7\times5}\ \uparrow_{5\times4} \\ \underline{-20}\overleftarrow{_{5\times4}} & \\ 0 & \end{array}$
HN	Error en un **H**echo **N**umérico.	Error en la recuperación de un hecho numérico, sea o no la estimación precisa.	$2.57 \times 0.72 \approx \underline{3 \times 1 = 1}$ $46 \times 771 \approx 50 \times 800 = 56000$ ($\underline{5 \times 8 = 56}$)
IC[313]	**I**mprecisión en la intensidad de la **C**ompensación posterior.	Realizar una compensación explícita, posterior al cálculo, con sentido correcto, dando lugar a una estimación imprecisa (error mayor 30%).	$424 \times 0.76 \approx 424 \times 1 = 424$. Después, se hace una compensación. La estimación final es de 420 (error del 30,34%).
EC	**E**rror en el sentido de la **C**ompensación posterior.	Realizar una compensación explícita, posterior al cálculo, equivocando el sentido de la misma.	$66 \div 0.86 \approx 66 \div 1 = 66$. Después se hace una compensación. La estimación final es 60, cuando debería compensarse 'hacia arriba'.
PV1	Error en el conteo de ceros y posiciones decimales.	Utilizar una destreza de aproximación y una técnica correcta para determinar el valor posicional, equivocándose en el conteo de los ceros o las posiciones decimales en el resultado.	$96.2 \div 6.25 \approx 10000 \div 600 \approx$ $10000 \div 500 =$ **200**. (200 en vez de 20) $852 \times 0.048 \approx 900 \times 40/1000 =$ $= (900 \times 40) \div 1000 =$ **3600** $\div 1000 = 3,6$ (3600 en vez de 36000). El alumno dice '36 y tres ceros', pero pone 2.
PV2	Error de omisión de ceros en el ajuste del valor posicional. (Esp.[314] multiplicación)	Utilizar una técnica de aproximación y omitir, en la determinación del valor posicional del resultado, los ceros provenientes de la aproximación.	$2.57 \times 0.72 \approx (300 \times 70) \div (100 \times 100) =$ $= 3 \times 7 \times$ **1000** $\div 10000 = 0,0021$. Se omiten los 3 ceros provenientes de 300×70.
PV3	Error de falta de recuperación de la coma decimal. (Esp. multiplicación)	Utilizar una técnica de aproximación y omitir, en la determinación del valor posicional del resultado, la división por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones decimales en aproximaciones.	$78.4 \times 89.5 \approx (700 \times 800) \div 100 =$ $= (7 \times 8) \times 10000 \div$ **100** $= 560000$. Se omite la división final por 100.
PV4	Error en coordinación de la aproximación con la coma decimal. (Esp. multiplicación)	Aplicar una destreza de aproximación eliminando cifras decimales. Al final, en el ajuste del valor posicional, se tienen en cuenta las cifras decimales originales.	$34.1 \times 47.2 \approx 30 \times 50 = 1500$. Después, divide por 100, por las 2 cifras decimales, sin advertir que, en el redondeo, han sido eliminadas. La estimación es **15**.
PV5	Error de recuperación impropia de la coma decimal. (Esp. división)	Multiplicar o dividir dividendo y divisor por una potencia de 10, calcular el cociente y dividirlo o multiplicarlo por la misma potencia de 10.	$0.46 \div 0.066 \approx 50 \div 7 = 7$. Ahora se divide por 100, para una estimación de **0,07**.

[313] En el presente trabajo, no se ha encontrado ningún ejemplo perteneciente a las categorías IC o EC. Los ejemplos que figuran en la tabla, en estas dos categorías, se han tomado de De Castro, Castro, y Segovia (2002). Ha parecido oportuno incluirlos por dos razones: en primer lugar, para mostrar un esquema lo más completo posible sobre los errores en estimación; en segundo lugar, para intentar reflejar adecuadamente un hecho llamativo en el presente trabajo como es la baja frecuencia de uso, por parte de los alumnos, de la compensación.

[314] En toda la tabla, la abreviatura 'Esp.' indica que el error es específico de una operación, bien sea de la multiplicación o de la división. Esta especificidad debe utilizarse, durante la codificación de las transcripciones de las entrevistas, como parte de la definición del error.

Tabla 7.1. (Continuación) *Resumen de los errores en estimación*

Código	**Error**	**Descripción**	**Ejemplo**
PV6	Error de operar la coma decimal en la división como en la multiplicación. (Esp. división)	Se dividen los números ignorando las comas decimales y se divide el resultado por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones decimales hay entre los dos números (como al multiplicar).	0.46 ÷ 0.066 ≈ 46 ÷ 6 ≈ 7. Ahora se divide por 10000 porque hay 5 posiciones decimales entre los dos datos, para una estimación de **0,00007**.
PV7	Error en la determinación del valor posicional de la primera cifra del cociente. (Esp. división)	En divisiones en las que no se utiliza destreza de aproximación, se determina la primera cifra distinta de cero del cociente, pero se falla en establecer su valor posicional.	0.68 ÷ 0.024 = 680 ÷ 24 ≈ **2** (En lugar de 20, que sería lo correcto).
PV8	Error de 0,0 en lugar de 0, en la división. (Esp. división)	Empezar la división de un número por otro mayor poniendo '0,0' cuando corresponde solo '0,'. El segundo 0 parece hacer el efecto de 'bajar' la siguiente cifra del dividendo.	86 ÷ 222 ≈ 100 ÷ 200 = **0,05**. (En lugar de 0,5, que sería lo indicado).
		Errores en la fase de Evaluación	
EV	Errores en la **Ev**aluación	Produce una estimación razonable. Después, indica que está mal hecha, lo que implica el *error de evaluación* EV, y la sustituye cometiendo un error.	Hacer 86 ÷ 222 ≈ 90 ÷ 200 = 9 ÷ 20 ≈ 0,4 y *rectificar* (aquí está el error de evaluación EV del anterior proceso) poniendo 9 ÷ 20 ≈ 0,04 (Error PV8).
		Otros errores (pueden darse en cualquier fase)	
OT	**Ot**ros	Errores que no entran en las categorías anteriores.	Hacer 86/222 = 100/222 = 2.22 = $2.\widehat{2}$. En la segunda igualdad hay un error TD. En la tercera, un error OT, en la interpretación de la expresión periódica. Hacer 0.025 × 776 ≈ 776, porque 0.025 no se puede sustituir por 1, pero multiplicar por un número tan pequeño no puede variar mucho el resultado.

En la Figura 7.4 se representan conjuntamente, en una red sistémica de Bliss y otros (1983), el esquema de la Figura 7.1 de procesos de estimación adaptado para el análisis de errores, junto con las diversas categorías de error encontradas en este trabajo.

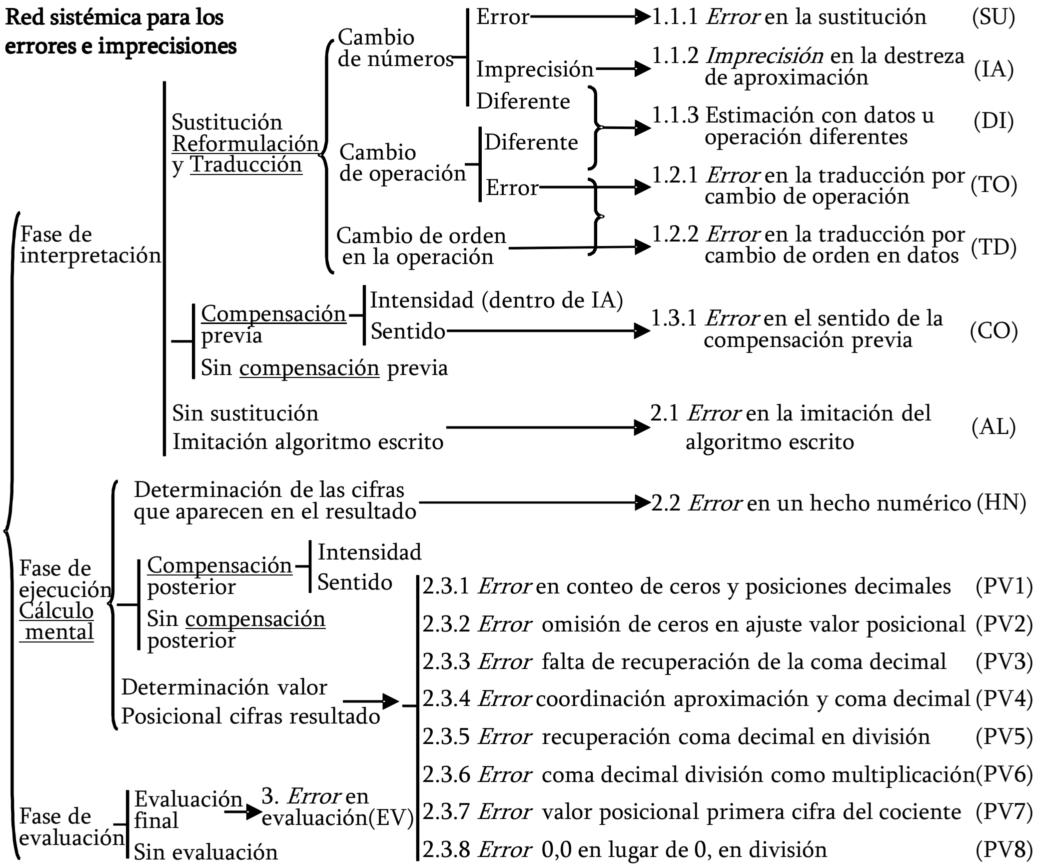


Figura 7.4. Red sistémica para el análisis de errores con categorías de errores.

1.4. Cálculo de κ, como medida de concordancia entre los dos codificadores

Para estudiar la fiabilidad del proceso de codificación, se ha seleccionado aleatoriamente un 30% de las transcripciones de las entrevistas. Este material ha sido codificado independientemente por dos expertos, contando con la Figura 7.4, como esquema resumen de los errores en estimación encontrados en este trabajo. Los dos expertos han dispuesto de una versión no definitiva del capítulo 6 del presente trabajo, en el que se incluyen explicaciones detalladas y ejemplos para cada categoría de error.

Para analizar el material, cada codificador disponía de un archivo en el que, para cada estimación, aparecía la tarea planteada, el alumno que había dado la estimación, la propia estimación, el porcentaje de error de la misma y la tarea anterior que había realizado el alumno. Después, la parte de la transcripción en la que el alumno explica el procedimiento que ha seguido para dar su estimación y la tabla con las categorías de error determinadas en este trabajo. Un ejemplo con todos estos elementos aparece en el siguiente párrafo.

(1) 46 × 771

Alumno9; E: 28000; 21,1% error; A: 0.025 × 776

Esto tiende a 50. Esto a 1000. Entonces sería... así.

O bien, también por 4 por 7, 28, con tres ceros, sería... 28000.

1. Fase de interpretación							2. Fase de Ejecución													3. E
SU	IA	DI	TO	TD	CI[315]	CO	IA	HN	IC	EC	PV1	PV2	PV3	PV4	PV5	PV6	PV7	PV8	OT	EV

Como puede verse en esta situación, no existen exactamente unidades que asignar a diferentes categorías, sino que en un fragmento de transcripción puede determinarse que no hay error, que hay uno, o que hay varios errores. En caso de detectar un error, es aconsejable que el codificador indique en qué parte de la transcripción puede encontrarse dicho error (no es suficiente con marcarlo en la tabla), pues puede darse la situación de que, dentro de un fragmento de transcripción, aparezca más de un error del mismo tipo.

Una categoría adicional, a las que aparecen en la tabla anterior, es la de ausencia de error o imprecisión (indicada con un NE de 'No Error' en la Tabla 7.1). Observar esta categoría es importante por dos razones: En primer lugar, porque los fragmentos de transcripción que constituyen la respuesta de un alumno a una tarea de estimación son las unidades predeterminadas para el análisis sobre las cuales debe indicarse en primer lugar si hay o no hay error o imprecisión. Así, que los dos codificadores señalen que ante una tarea el alumno no ha cometido error o imprecisión será considerado como una

[315] Se recuerda que los errores CI, IC y EC corresponden a diversas variantes de errores de compensación que estaban previstos en los planteamientos teóricos y que aparecen en otras investigaciones, pero han sido finalmente excluidos por que no aparecen en esta investigación, debido a la ausencia que se ha observado de procesos de compensación.

coincidencia. Por otra parte, puede darse la situación de que un codificador señale que en una respuesta hay un error y el otro codificador indique que no. En este caso, habría una discrepancia. Así, por una cuestión de realizar un análisis completo, y que a cada unidad se le asigne al menos un código, se ha optado por incluir el código NE, indicador de ausencia de errores o imprecisiones en la estimación.

Tabla 7.2. *Matriz de confusión para dos codificadores*

	NE	SU	IA	DI	TO	TD	CI	CE	IA	HN	IC	EC	PV1	PV2	PV3	PV4	PV5	PV6	PV7	PV8	OT	E	
NE	43	**2**			**1**								**2**										48
SU	2	7		**1**																			10
IA			6	1																			7
DI				5																			5
TO					6																		6
TD						2																	2
CI																							0
CE								2															2
IA																							0
HN										2													2
IC																							0
EC	**1**																						1
PV1	**1**												2										3
PV2													**1**						**1**				2
PV3															1								1
PV4																1							1
PV5																	4						4
PV6																		1					1
PV7																			1	**1**			2
PV8																				4			4
OT													**2**								1		3
E																						3	3
	47	9	6	7	7	2	0	2	0	2	0	0	7	0	1	1	4	1	2	5	1	3	**107**

En la Tabla 7.2, que representa la matriz de confusión para los dos codificadores, se han marcado en negrita las discrepancias, fuera de la diagonal principal, y las concordancias, con fondo gris, en la diagonal de dicha matriz. Sumando los valores de la diagonal principal, se obtiene un total de 91 acuerdos. El total de discrepancias es de 16, y el de asignaciones a categorías es de 107. En las fórmulas siguientes se refleja el cálculo del porcentaje de acuerdo observado P_o, el porcentaje de acuerdo esperado al azar P_e, y el valor del coeficiente Kappa de Cohen (1960) para dos codificadores:

$$P_o = \frac{91}{107} = 0{,}851$$

$$P_e = \frac{47 \times 48 + 9 \times 10 + 6 \times 7 + \cdots + 1 \times 3 + 3 \times 3}{107^2} = 0{,}223$$

$$\kappa = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e} = \frac{0{,}851 - 0{,}223}{1 - 0{,}223} = 0{,}81$$

El valor obtenido para Kappa, de 0,81, es considerado indicador de una concordancia '*excelente*' (la de mayor grado) por Fleiss[316] (1981)[317] y '*casi perfecta*' por Landis y Koch (1977)[318]. No obstante el alto grado de concordancia, se han modificado ligeramente las definiciones de las categorías de error con el fin de llegar a un acuerdo entre los codificadores acerca de las discrepancias. En este sentido, la Tabla 7.1 facilita la localización, para su posterior análisis, de las discrepancias. En ella se observa, por ejemplo, que hay 6 discrepancias que afectan a la categoría PV1. En tres de los casos, el otro codificador no ha encontrado error; en otros dos casos, ha elegido la categoría OT; y en otro, la categoría PV2. La categoría SU ha tenido 4 discrepancias: Cuatro de ellas han sido con respecto a la categoría NE[319] y otra con la categoría DI. A continuación se muestra y comenta un fragmento de transcripción en el que se ha detectado una discrepancia:

[316] Fleiss, J. L. (1981). *Statistical methods for rates and proportions*. New York: John Wiley.

[317] El texto consultado es el de Kaplan y Saccuzzo (2006, p. 118), que informan del criterio de Fleiss (1981), para el cual, un valor κ mayor de 0,75 supone una concordancia 'excelente', un valor entre 0,40 y 0,75 supone una concordancia 'satisfactoria' (de razonable a buena), y un valor menor que 0,40 será considerado como señal de una concordancia 'mala'.

[318] Landis, J. R., y Koch, G. G. (1977). "The measurement of observer agreement for categorical data". Biometrics, 33(1): 159–174. Nota: Para Landis y Koch, los valores de [0,0.2] indican concordancia ligera, en (0.2,0.4] razonable ('fair'), en (0.4,0.6] moderada, en (0.6,0.8] sustancial, y en (0.8,1] casi perfecta.

[319] Una de ellas es la que se explica con detalle a continuación.

Entrevistador: 8.85 ÷ 42.6

Alumno9: Pues esto sería, redondeando, a 10 y esto sería, redondeando a, como esto tiene un decimal que ya es mayor que 5, podría ser redondeando, ya por alto, a 30. O podría hacer a 10 y, redondeando, a 25. Entonces así sería 2,5.

E: 2,5; 547,8% error; A: 0.059 ÷ 0.23

En este fragmento, se han dado dos concordancias y una discrepancia. La primera concordancia ha consistido en localizar, ambos codificadores, un error de traducción por cambio en el orden de los datos (TD) en las dos últimas líneas, en las que el alumno realiza la operación 10 ÷ 25 = 2,5. En este caso, los codificadores interpretan que el 10 ÷ 25 ha sido sustituido implícitamente por 25 ÷ 10, cambiando el papel de dividendo y divisor de ambos números (el orden, en suma) para dividir por 'la unidad seguida de ceros'.

La segunda concordancia se ha producido en las líneas tercera y cuarta de la transcripción, cuando el alumno dice redondear (el 42,6) a 30, primero, y a 25 después. Ambos codificadores interpretan que se ha ignorado el 4 de la posición de las decenas en el dato de partida. Esta situación entra dentro de la categoría de 'estimar con datos u operación diferentes de los propuestos' (DI). Se ha evitado cuidadosamente pensar en estos *deslices* como 'descuidos' y no se les da consideración de errores en este trabajo. Precisamente por haberse detectado en trabajos previos este tipo de 'desliz', se ha optado por añadir, tras el porcentaje de error de cada estimación, la tarea de estimación anterior, a fin de considerar si ha podido influir en el proceso de estimación actual. En este caso, la tarea anterior fue 0.059 ÷ 0.23, que es una división en la que la posición de las unidades de ambos números está ocupada por el cero. ¿Ha podido influir esto al tomar en el siguiente cálculo el 4 por un 0?

En este segundo acuerdo está la raíz de la discrepancia localizada en este fragmento. Uno de los codificadores ha interpretado que el alumno realiza su estimación con el dato 26 en lugar del 42,6; el otro, que la estimación se lleva a cabo con 2,6 en lugar de 42,6. ¿Qué datos apoyen una y otra hipótesis en el texto? La frase: "Como esto tiene un decimal que ya es mayor que 5", indica que el alumno ha advertido la coma decimal entre el 2 y el 6. Esto apoya que se haya considerado 2,6 en lugar de 42,6. Sin embargo, al hablarse de redondeo a 30 o a 25, parece como si lo que se redondease fuera el 26. Es un problema de matiz en la interpretación en una situación en la que no se puede obtener más información de la que hay.

A partir de estas dos interpretaciones surge la *discrepancia*. Si se parte de que el 42,6 se ha tomado por un 26, y este sustituido por un 25, no hay más errores en la operación. Sin embargo, si se considera que se ha tomado 2,6 en lugar de 42,6, y hay una sustitución por 30 o por 25, habrá que señalar un error de sustitución (SU).

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Este último capítulo está dedicado a las conclusiones e implicaciones. La parte de conclusiones está dividida a su vez en dos partes: conclusiones del estudio cuantitativo y las propias del análisis cualitativo. En las conclusiones de la parte cuantitativa, interesa especialmente comparar los resultados obtenidos con los de las investigaciones que 'sugirieron' el diseño de esta investigación y examinar si las dos decisiones fundamentales del diseño de la prueba de estimación (la distinción entre división A y división B y entre decimales menores que 1 pero mayores que 0,1 y decimales menores que 0,1) han aportado algo importante con respecto a los resultados del estudio piloto (De Castro, 2002).

En la primera parte del estudio cualitativo, se desea mostrar como la visión general sobre las estrategias de estimación y sus componentes (destrezas de aproximación, grado de aproximación, forma de ajustar el valor posicional y forma de operar la coma decimal) y los diferentes niveles de análisis de las estrategias, inspirados en los trabajos de Siegler y Booth (2005) y Gómez (1995a) permiten comparar resultados de diferentes investigaciones sobre estrategias de estimación. En la segunda parte del estudio cualitativo interesa, sobre todo, comparar los resultados de esta investigación con los de otras que han abordado el análisis de errores en estimación o en ámbitos afines, como el del cálculo mental.

El capítulo continúa con dos propuestas detalladas para futuras investigaciones.

Estas propuestas han ido surgiendo y promoviendo reflexiones a lo largo del presente trabajo. En primer lugar, al hilo de la reflexión hecha en el capítulo inicial, de la revisión de la literatura y del análisis de las dificultades semióticas, surge la idea sobre las redes de dificultades y errores en matemáticas, orientada a estudiar las relaciones entre las dificultades y el modo en que están estructuradas, que puede ser uno de los aspectos que dificulte su superación.
Otra investigación que queda propuesta para el futuro es sobre investigación sobre la evaluación de la estimación en cálculo, que surge de las discusiones de términos como razonabilidad, precisión, porcentaje de error, y del análisis individual de los ítems de la prueba de estimación (en el Apéndice E).
Finalmente, el trabajo concluye con implicaciones para la docencia, que está más orientado hacia los decimales (identificados como la mayor causa de dificultad en las tareas de estimación) que hacia la propia estimación.

1. CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS DE DATOS CUANTITATIVOS

En este apartado se valoran los resultados obtenidos en esta investigación comparándolos con los de las investigaciones de Bestgen y otros (1980), Rubenstein (1982, 1985), Goodman (1991), y De Castro (2002). Todos estos resultados aparecen extractados en la Tabla 4.1 del capítulo 4.

1.1. Dificultad de las tareas de estimación según el tipo de operación

En primer lugar, en este trabajo, ha resultado fundamental una distinción que no se había hecho anteriormente en ningún trabajo de estimación: la consideración por separado de las divisiones de un número por otro menor y de aquellas en las que se divide un número por otro mayor (división A y división B, respectivamente). Como se ve en la Tabla 5.12, ha habido una diferencia significativa ($p < 0,01$) entre la puntuación media de las tareas de división A y las de división B. Esta diferencia es la única que ha afectado a la variable 'tipo de operación'. Este resultado ayuda a comprender las diferencias encontradas en los resultados de las investigaciones de Bestgen y otros (1980) y en la de Rubenstein (1985). En ambas investigaciones se estiman los resultados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, y aparecen divisiones de tipo A y B, aunque en ninguna se diferencia explícitamente entre estos dos tipos de división. En los resultados, se advierte que la división y la multiplicación son igual de difíciles en el trabajo de Bestgen y otros (1980) y la división más difícil que la multiplicación en el de Rubenstein (1985), mientras que en el trabajo de Goodman (1991) no se comparan los tipos de operación. Aunque en la primera investigación participan alumnos de magisterio, en la segunda alumnos de 8º grado[320], y en la tercera también participan maestros en formación inicial, no parece que la edad de los alumnos pueda ser la clave para explicar la diferencia de resultados dado que, en ambos casos, los alumnos han estudiado la multiplicación y división con números decimales con bastante antelación a la investigación.

Un análisis detallado de las tareas que aparecen en las pruebas proporciona una información bastante interesante respecto a la dificultad relativa de las divisiones de tipo A y B. En el trabajo de Bestgen y otros se utiliza una prueba de estimación, formada por 60 ítems, de la que no se da información alguna. Sin embargo, sí están disponibles (en publicaciones) las pruebas de estimación empleadas por Goodman (1991), Rubenstein (1985) y De Castro (2002). Las pruebas utilizadas en Goodman (1991) y en De Castro (2002) no sirven para buscar diferencias de dificultad entre los dos tipos de división considerados,

[320] Equivalente a nuestro 2º de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años de edad).

puesto que en ellas prácticamente solo aparecen divisiones de tipo A[321]. La clave está, por tanto, en la investigación de Rubenstein (1985), en la que se utiliza una prueba compuesta por 80 ítems que viene totalmente descrita en un apéndice del trabajo (Rubenstein, 1985, pp. 160-174). Además, en dicho apéndice, se informa sobre los índices de dificultad de cada uno de los ítems de la prueba, lo cual permite valorar la dificultad relativa de los dos tipos de división.

En este estudio se utilizan cuatro formatos diferentes para las tareas de estimación. En los ítems de respuesta abierta, aparecen las multiplicaciones y divisiones que se presentan a continuación. Cada una de ellas viene acompañada por el intervalo de respuesta razonable, utilizado para la evaluación, y el índice de dificultad (porcentaje de participantes que responde correctamente al ítem). El ítem 1 es 0,29 × 23. Su intervalo de respuesta razonable es [6 , 7,5] y el índice de dificultad un 23.9. El ítem 8 es 328 × 8. El intervalo [2400 , 2800] y el índice de dificultad 48.2. El doble de participantes en el trabajo de Rubenstein (1985) responde correctamente a un ítem de multiplicación con naturales que a otro con decimales menores que 1. Si se pasa a la división, el ítem 7 es 634 ÷ 17, el intervalo de respuesta razonable es [30 , 40], y el índice de dificultad 50,8. El ítem 11 es 5,72 ÷ 26, el intervalo de respuesta es [0,2 , 0,25] y el índice de dificultad es 29,4. Hay una diferencia de un 20% de alumnos más en dar una estimación correcta a una división de tipo A que a una de tipo B. La 'noticia positiva' es que estos resultados coinciden plenamente con los obtenidos en este trabajo; la negativa, que no parece del todo oportuno comparar los resultados de ambas investigaciones, dado que solo se cuenta con 4 ítems de cálculo simbólico y respuesta abierta en el trabajo de Rubenstein (1985) por 24 en el presente, y porque en el trabajo de Rubenstein se utiliza un tipo de puntuación que sigue criterios diferentes a los del presente

[321] La única excepción se da en la prueba utilizada en De Castro (2002), el Test de Levine (1982) en la que aparecen nueve divisiones de tipo A y solo una división (el ítem vigésimo) de tipo B.

trabajo. Merece la pena explicar este punto para comprender la dificultad que conlleva la comparación de ambos trabajos. En el trabajo de Rubenstein (1985) se propone para 5,72 ÷ 26, el intervalo de respuesta razonable [0,2 , 0,25]. En este trabajo no se ha utilizado dicho ítem, pero el criterio para hacer los intervalos de respuesta para evaluar la estimación, ha sido partir del intervalo del 30%, [0,15 , 0,29] en este caso (redondeando a las centésimas hacia abajo y hacia arriba respectivamente los extremos) y luego aplicando todas las estrategias que aparecen en la literatura sobre estimación, entre las que estarían la sustitución de 5,72 ÷ 26 por 6 ÷ 20 = 0,3, por un lado, y 5 ÷ 30 = 0,16 por el otro. Combinando estos dos resultados, mi intervalo de respuesta razonable sería [0,15 , 0,3], mucho más 'generoso' que el [0,2 , 0,25] del trabajo de Rubenstein (1985). A la vista de esta diferencia, quizá debería hablarse de 'un intervalo de respuesta razonable según un determinado criterio' más que de un intervalo de respuesta razonable sin más, como si la 'razonabilidad' fuese un término absoluto.

Después de esta reflexión, la conclusión a la que se llega es que en este trabajo es en el único que se ha hecho explícitamente la distinción entre la división A y B (según sea el dividendo mayor o menor que el divisor). Se ha diseñado una prueba específicamente dirigida a hacer la comparación entre estos dos tipos de tareas, intentando controlar las demás variables. El resultado obtenido a este respecto en el trabajo: una diferencia significativa de dificultad entre las divisiones A y B debe tenerse en cuenta para el diseño de futuros trabajos. En trabajos anteriores se distingue siempre entre multiplicación y división, olvidando que hay tipos de división especialmente complejos (los de tipo B), que merecen distinguirse de los otros.

Desde el punto de vista estadístico, se recuerda que la diferencia entre los dos tipos de división fue significativa[322] ($F = 9{,}29$; $p = 0{,}003$; $\eta^2 = 0{,}07$; *Pot.* = 0,86).

[322] Se pueden consultar detalles en la Tabla 6.9 del capítulo 5.

Además, la división B resultó más difícil que la A en los 5 grupos que participaron, y en las dos mitades de la prueba (ítems pares e impares). Además, también resultó más difícil para los números decimales mayores que uno. Conjuntamente, la impresión que proporcionan los datos estadísticos es que los resultados obtenidos sobre los dos tipos de división podrían generalizarse a otros grupos y a otras pruebas de estimación diseñadas como paralelas a la utilizada en la actual investigación.

Sin embargo, en el extremo contrario, otras comparaciones de dificultad entre tareas por el tipo de operación parecen depender fuertemente del curso. En este sentido, llama la atención que, para dos de los grupos de magisterio de educación primaria (el 2 y el 3) la multiplicación haya sido más difícil que la división A para todos los tipos de número[323]. Otro resultado difícil de relacionar con este es que en los dos grupos participantes de magisterio de Educación Infantil, la multiplicación resultó más sencilla que la división B, prácticamente para todos los tipos de número (salvo para los decimales menores que 0,1, en que los promedios son casi coincidentes).

1.2. Dificultad de las tareas de estimación según el tipo de número

Uno de los principales resultados del estudio piloto previo a este trabajo (De Castro, 2002) fue que estimar con números decimales menores que uno era más difícil que estimar con decimales mayores que uno (F = 15,93; p < 0,001; η^2 = 0,23; *Pot.* = 0,86) y que estimar con números naturales (F = 50,27; p < 0,001; η^2 = 0,49; *Pot.* = 1)[324]. A pesar de la claridad con la que se establece

[323] Las interacciones entre tipo de operación y tipo de número han sido muy cambiantes para los diferentes cursos de modo que resulta llamativo cuando un resultado sobre operaciones se cumple para todo tipo de número.

[324] Datos tomados de De Castro (2002, p. 130), de la Tabla 5.4 en la que aparecen las pruebas de contrastes intra-sujetos.

este resultado, la prueba utilizada no había sido diseñada específicamente para realizar esta comparación. Además, no se distinguía entre los dos tipos de división (A y B) y tampoco se distinguía, dentro de los decimales menores que uno, entre los mayores y los menores que 0,1. Tampoco en De Castro (2002) se hace un análisis de errores. Así, en la presente investigación se ha hecho un diseño dirigido completamente a hacer este tipo de comparaciones entre tareas de estimación. Los resultados citados se han visto corroborados aquí, pero como se vio en el capítulo 4, se han encontrado resultados nuevos, que están ahora mejor establecidos y quedan más justificados por el diseño.

En esta investigación, al hacer las comparaciones por pares, con el ajuste de Bonferroni, para los niveles de la variable 'tipo de número' se encontraron diferencias significativas (todas ellas con $p < 0{,}001$) entre los decimales menores que 1 y los naturales y decimales mayores que uno, y también entre los decimales menores que 0,1 y los naturales y decimales mayores que uno. La aportación novedosa de este trabajo con respecto a De Castro (2002) es que se ha encontrado también diferencia significativa ($p = 0{,}049$) entre los decimales menores que 1 pero mayores que 0,1, y los menores que 0,1. Este mismo resultado se ha producido también en las pruebas de contrastes intra-sujetos ($F = 7{,}21$; $p = 0{,}008$; $\eta^2 = 0{,}05$; *Pot.* = 0,76).

Además, como se ha visto en el análisis de errores, hay un error que ha afectado específicamente a los decimales menores que 0,1. La categoría SU (errores en la sustitución) ha tenido un tipo de errores que se producían ante la incapacidad de adaptar sustituciones del tipo 0,5 = 1/2, de decimales por fracciones, a números como 0,05.

Esta mayor dificultad de los ítems con números decimales menores que 0,1 con respecto a los decimales mayores que 0,1 pero menores que 1 se ha dado en todos los cursos y en las dos mitades del test. También se ha producido esta diferencia en las operaciones de multiplicación y división de tipo A. Sólo en las divisiones de tipo B, deja de producirse esta situación, lo que se atribuye a que la mayor dificultad en este tipo de división tiene mayor peso que la distinción entre estos dos tipos de número.

2. VALORACIÓN DEL MODELO DE ESTRATEGIAS

La Tabla 8.1 es una adaptación de la Tabla 6.1 en la que se presentaban los diferentes niveles de generalidad para las estrategias de estimación. En esta nueva tabla se han sustituido las investigaciones que aparecían en la tabla anterior por otras investigaciones sobre estrategias de estimación, incluyendo la actual (De Castro, 2012), con el fin de valorar si la idea, tomada de los trabajos de Siegler y Booth (2005) y de Gómez (1995a) de analizar con distintos niveles de generalidad y que cada nivel esté caracterizado por la decisión que se toma acerca de una o varias variables de proceso (forma de determinar el valor posicional, forma de operar la coma decimal, destreza de aproximación, grado de aproximación) tiene utilidad para comparar diferentes estudios.

En el nivel 0 están los procesos de alto nivel descritos por Reys y otros (1982): Reformulación, traducción y compensación. Estos procesos pueden utilizarse para clasificar estrategias de estimación (De Castro, 2002; De Castro, Segovia y Castro, 2002), o pueden considerarse como 'familias de estrategias' (Siegler y Booth, 2005). Al nivel se le pone un 0, para indicar que la mayoría de autores consultados, en la literatura sobre estimación, no suelen referirse a ellos como estrategias propiamente dichas[325].

En el nivel 1 estarían las estrategias básicas como 'grandes opciones' que se pueden tomar que orientan todo el resto del proceso de estimación. En este

[325] Salvo Gómez (1995a), caso especial por ser su trabajo de cálculo mental, que incluye entre las estrategias de cálculo mental las compensaciones (p. 96). Aunque no se refiera al modelo RTC de Reys y otros (1982), está claro que la idea de compensación en cálculo mental de Gómez (1995a) coincide totalmente con la de la estimación en el modelo RTC.

trabajo he elegido tres: Primeros dígitos, fracciones y algoritmo alternativo. Por ejemplo, el uso de primeros números reduce todo el proceso de estimación a realizar un cálculo mental sencillo, que suele recurrir recuperar hechos numéricos, y a establecer el valor posicional del resultado. Sin embargo, cuando se produce una sustitución por fracciones, frecuentemente el resto de las opciones están muy condicionadas por esta primera elección, de modo que más que redondear o truncar el otro dato, para simplificar el cálculo sin más, se pueden utilizar números compatibles, por ejemplo.

Tabla 8.1. *Diferentes niveles de generalidad para las estrategias de estimación*

Comparación de diferentes modelos de estrategias

Nivel	De Castro (2012)	Levine[326] (1982)	Dowker (1992) Dowker* y otros (1996)	Hanson y Hogan (2000)
0	*Procesos* R,T,C y Estrategias R, RC, RT, RTC, y Sin RTC (De Castro, 2002). Se consideran, pero no se estudian en este trabajo)		* *Las clases 1 y 2* de Dowker y otros (1996) son comparables a los procesos R, T, C.	*Modos generales de estimar:* Reformulación, traducción y compensación
1	*1. Estrategias básicas:* Primeros dígitos, fracciones y algoritmo alternativo	*1. Estrategias* Fracciones, Exponentes, Redondeo de los dos números, Redondeo de un número, Potencias de 10, Números conocidos, Productos parciales incompletos, Proceder como en el algoritmo.	*1.Tipos de estrategia:* Redondear ambos números *Dividen los tipos en *clase 1 y clase 2*	*1. Estrategias* Redondear todos los números a múltiplos de 10, Redondear un número a un múltiplo de 10, Técnica frontal (truncamiento), sustitución de decimal por fracción o porcentaje,...
2	Ejemplo: Primeros dígitos con redondeo de un dato a las decenas, truncamiento de otro a las unidades y coma 1.		*2. Estrategias específicas:* Ejemplo: 145×37 a 140×30, 140×40, 150×30, o 150×40 (Diferentes formas de redondear o truncar)	

En el nivel 2 se toman las 'pequeñas opciones'. Se decide sobre las variables de proceso: destreza de aproximación (redondeo, truncamiento), grado de aproximación (redondear a las decenas, a las unidades, a las décimas), forma de determinar el valor posicional (redondeo EXT o redondeo MND), y forma de operar la coma decimal (con tres formas diferentes determinadas en este

[326] El trabajo de Levine (1982) se publica en el vol. 13 núm. 5 del JRME, mientras que el trabajo de Reys y otros (1982) está en el vol. 13 núm. 2 de la misma revista.

trabajo: coma 1, coma 2, y coma 3). Las decisiones que se toman sobre estas cuatro variables dan lugar a una amplia combinatoria que podría producir una cantidad extensa de estrategias en que se desdoblarían las tres estrategias básicas, si quisiera realizarse un análisis más fino, descendiendo, para ello, a este segundo nivel. Me he limitado a clasificar las estrategias en el nivel 1 -para complementar el trabajo de clasificación que se hizo en De Castro (2002) de clasificación en el nivel 0- y se han propuesto bastantes ejemplos de variantes de las tres estrategias básicas, mostrando ejemplos en que se puede valorar la combinatoria a la que conducen las diferentes opciones de cada una de las variables de proceso reseñadas.

En la Tabla 8.1 aparecen varias investigaciones sobre estrategias de estimación en cálculo. En la investigación de Levine[327] (1982) solo aparece un nivel de análisis en el que se habla de estrategias, como el redondeo de ambos números, la sustitución por fracciones, o el redondeo de uno de los números. Este nivel coincide solo parcialmente con mi nivel 1. En el nivel 1 de este trabajo (al igual que en el de Reys y otros, 1982) aparece la estrategia de 'primeros dígitos', dejando para otro nivel de análisis el tipo de aproximación (redondeo, truncamiento, o su grado). En el trabajo de Dowker (1992) se establecen explícitamente dos niveles: el de los tipos de estrategia, y el de las estrategias específicas. Así, el 'redondeo de ambos números' de Levine (1982) no es una 'estrategia' para Dowker (1992), sino un 'tipo de estrategia' que admite varias 'estrategias específicas' según como se haga este redondeo (ver ejemplos en la Tabla 8.1). En el trabajo de Dowker y otros (1996) hay un cambio interesante.

[327] Levine (1982) es el informe de investigación de Levine (1980). Por fuerza, al elaborar el informe, por necesidad de sintetizar, muchas cuestiones han quedado por el camino. A pesar de que Levine (1982) solo especifica un nivel de análisis, la descripción de las estrategias que se hace en Levine (1980) es muy detallada, y se explican las diferentes 'formas de operar la coma decimal', aunque no se le ponga éste u otro nombre a esta variable de tarea. Así, aunque implícitamente, se puede reconocer en Levine (1980) más de un nivel de análisis.

Siguen considerándose dos niveles, pero diferentes a los de Dowker[328] (1992). Las estrategias específicas parecen dejar de interesar. Hay 'tipos de estrategias' que se pueden considerar de *clase 1* o *clase 2* según su 'naturaleza'. Los tipos de estrategia de *clase 1* suponen la aplicación de técnicas generales a cálculos específicos. Aquí entrarían tipos de estrategias como 'primeros dígitos' o la 'imitación del algoritmo', mientras que la *clase 2* supone un enfoque en que se presta mayor atención a los números particulares que aparecen en el problema para sustituirlos por fracciones, factorizarlos, utilizar sustituciones por 'números conocidos' (números cuyo resultado al operarse sea conocido) o 'compatibles' (en el sentido de sustituir dividendo y divisor por números que tengan relación de múltiplo y divisor)[329]. Las 'clases de tipos de estrategias' de Dowker y otros (1996) admiten cierta comparación con los procesos generales de reformulación y traducción de Reys y otros (1982) dado que los procesos de reformulación mantenían la estructura del problema y los de traducción la cambiaban. Las *clases* de Dowker y otros (1996) se sitúan claramente en el nivel 0 del análisis, sin tener consideración de 'estrategias' y por encima de los 'tipos de estrategias'. Por último, en el trabajo de Hanson y Hogan (2000), se establecen dos niveles: La reformulación, traducción y compensación, llamados 'modos generales de estimar', y las estrategias. El énfasis en el trabajo de Hanson y Hogan (2000) está puesto en aumentar el catálogo de estrategias (de 8 en el trabajo de Levine (1982) a 23 en el suyo) variando las tareas (incluyendo estimación con fracciones y porcentajes). Como ya ha sido comentado en el

[328] Posiblemente, en Dowker (1992) tuviera sentido realizar un análisis muy fino, puesto que todos los participantes eran matemáticos. En una situación así, aparecen múltiples variantes de cada estrategia de las que se hace necesario informar en la investigación.

[329] Esta distinción es similar a la que hace Gómez (1995a) en cálculo mental, dentro de los *artificios*, para diferenciar entre los *artificios de columnas* (reproducción mental de algoritmos escritos aplicables a datos cualesquiera) y las *reglas breves*, que son 'técnicas [...] vinculadas a requisitos particulares de los datos' (p. 99).

análisis de estrategias, Hanson y Hogan (2000) incluyen entre las estrategias la adivinación no educada y la renuncia a resolver. Ciertamente, conocer todos los comportamientos típicos de los participantes ante las tareas de estimación tiene un gran interés. Dentro de estos comportamientos típicos están las estrategias, como modos matemáticamente válidos y eficientes de afrontar estas tareas. Sin embargo, considero que a pesar de que tenga valor, en un trabajo sobre estimación, analizar todos estos tipos de comportamientos, debe reservarse el nombre de estrategias de estimación para el tipo de comportamiento que se ha señalado[330].

3. VALORACIÓN DEL MODELO DE ERRORES EN ESTIMACIÓN EN COMPARACIÓN CON INVESTIGACIONES ANTERIORES

En este apartado voy a comparar los resultados obtenidos en el análisis de errores con los de otras investigaciones sobre errores en estimación y en cálculo mental[331]. Voy a comenzar con el trabajo de Levine[332] (1980).

[330] Este es el criterio que he seguido también, por ejemplo, en el análisis de errores, dentro del cual se recogen errores, imprecisiones y confusiones (del tipo tomar una cosa por otra) como en la categoría DI, "estimar con datos u operación diferentes a los dados", que no son consideradas errores ni imprecisiones.

[331] Dado que, dentro del proceso de estimación, se identifica la fase de ejecución con la realización de un cálculo mental, tiene sentido pensar que algunos de los errores típicos que cometen los alumnos al estimar pueden ser característicos del cálculo mental.

[332] Este trabajo ha sido muy influyente para el mío. En primer lugar, en De Castro (2002) se utiliza la prueba de estimación diseñada por Levine (1980) y con ella obtuve los primeros resultados sobre números decimales menores que uno que me hizo diseñar el test que se ha utilizado en esta investigación.

3.1. Un trabajo pionero sobre errores en estimación: Levine (1980)

El trabajo de Levine[333] (1980) ofrece una clasificación de los errores al estimar. Voy a describir a continuación, una por una, las categorías que propone Levine (1980) para el análisis de errores en estimación[334], buscando similitudes y diferencias con las mías.

1. *Proceso incompleto*. Se da en situaciones en las que el estimador no es capaz de terminar un proceso de estimación iniciado[335]. El alumno encuentra una

[333] Levine (1980) es una referencia fundamental en todo el desarrollo de la presente investigación sobre estimación. En De Castro (2002), De Castro, Castro y Segovia (2002) y De Castro, Segovia y Castro (2002) utilizamos el test de Levine (1980). En De Castro, Segovia y Castro (2002) lo utilizamos para ofrecer una categorización alternativa para los errores. En cierta medida se puede considerar este estudio como una réplica del análisis de errores en Levine (1980). En la presente investigación, he sustituido el test de Levine (1980), pero se han mantenido el tipo de operaciones (multiplicación y división) y el tipo de números (naturales, decimales mayores que uno, y decimales menores que uno). Todas las citas que aparecen en este apartado corresponden al trabajo de Levine (1980). En muchas ocasiones, pondré, junto al fragmento citado, solo el número de página, omitiendo la autora y el año, para evitar ser excesivamente reiterativo.

[334] El trabajo de Levine (1982) es muy conocido y citado en la literatura sobre estimación. Es un informe de investigación tomado de la tesis doctoral Levine (1980). En Levine (1982) se citan de pasada los nombres de las categorías de errores, pero no se describen las mismas ni se ilustran con ejemplos. Dado que Levine (1980) es un trabajo poco accesible, he optado primero por describir sus categorías de error y aportar ejemplos, para poder comparar sus resultados con los míos.

[335] Hay una diferencia importante en el modo en que se plantean las entrevistas en el trabajo de Levine (1980) y en el mío. En la presente investigación, a los alumnos les aparecía el cálculo para el que debían dar su estimación en la pantalla del ordenador y debían escribir obligatoriamente, con el teclado o con el ratón, el resultado de su estimación. De lo contrario, el ordenador no dejaba pasar al siguiente cálculo. Levine (1980), sin embargo, plantea su entrevista oralmente sin ayudas externas (como la pantalla del ordenador). Los alumnos

dificultad en el proceso y abandona este a medias cambiando de estrategia o incluso a veces dando una respuesta al azar. Ejemplos de este error son los siguientes:

Entrevistadora[336]: .76 × .89

Alumno 06: Lo veo como 7/9 [dicho 7 partido por 9].

Entrevistadora: ¿Puedes ponerlo en forma decimal?

Alumno 06: No. Esto me confunde. ¿Puede ser algo así como 0.01? … Me lo he inventado[337].

La primera parte, cuando el alumno da como estimación 7/9, puede pensarse como un proceso de estimación abandonado 'a medias' si se considera que el alumno está obligado a dar su estimación con escritura decimal. Está claro que el alumno tiene dificultad al pasar de la escritura fraccionaria a la escritura decimal. Una vez da su estimación 0.01, el error puede interpretarse como de ajuste del valor posicional. Otros ejemplos son los siguientes (Levine, 1980, p. 82):

pueden dejar un proceso de estimación inconcluso sin dar una estimación. Por esta razón es comprensible que en nuestra investigación apenas haya procesos incompletos, independientemente de que no me parezca oportuno dar a este tipo de procedimientos incompletos, o abandonados sin terminar ante una dificultad, el carácter de errores.

336 He respetado el original en el que no se escribe el cero delante del separador decimal para números menores que uno.

337 En esta investigación he optado por ser prudente ante comentarios del tipo "Me lo he inventado", como el que hace este alumno. Al dar una estimación para el cálculo 0.76 ÷ 0.89, decir 1 como estimación es una respuesta válida. Dado que muchos alumnos al eliminar los decimales en la división, sustituyendo el cálculo 0.76 ÷ 0.89 por 76 ÷ 89 recuperan después los dos decimales en el cálculo (error considerado como una 'recuperación impropia de la coma decimal en la división'), me parece arriesgado aceptar que el alumno haya, como dice, inventado una respuesta así. Más bien, interpreto que el alumno da una respuesta de conveniencia, al no saber explicar cómo ha llegado al resultado.

Entrevistadora: .47 × .26

Alumno 37: Podría ser como ½ × ¼ y eso sería (pausa) $^1/_8$. Así que… No soy muy bueno cambiando las fracciones por decimales. No sé (pausa). 0.80. No suena bien.

Levine (1980) vuelve a clasificar este procedimiento como una “estrategia incompleta”, como un procedimiento inconcluso, cuando en realidad lo que se produce es un error en la conversión de fracción a decimal[338]. Por último, se presenta otro ejemplo clasificado como “estrategia incompleta”.

Entrevistadora: 66 ÷ .86

Alumno 47: … Sería como 6600 ÷ 86 (pausa). Puede ser 1. Uno punto algo. No sé… Me lo he inventado.

Para esta tarea, 100 es una estimación que debería considerarse aceptable[339] para 66 ÷ 0,86. En este caso, la estimación de 1 podría ser un error en la recuperación impropia de la coma decimal del 0,86. En todo caso, igual que en el primer ejemplo correspondiente a este error, no parece que haya un proceso de estimación incompleto, puesto que el alumno produce una estimación de 1, sino otro tipo de error. Los ejemplos extraídos del trabajo de Levine (1980), y sus correspondientes explicaciones, justifican que en la presente investigación no se haya empleado una categoría del tipo “proceso incompleto”. Sí estoy de

[338] Escribir $^1/_8$ = 0,8 o $^1/_8$ = 0,08 es un error habitual. Aparece descrito como tal en la página: http://www.counton.org/resources/misconceptions/pdfs/miscon14.pdf dentro de un listado de ideas equivocadas acerca de las matemáticas (Consulta hecha el 17-7-2009). Tampoco en este caso puede considerarse que haya un proceso abandonado a medias, sino un error en la conversión de la escritura fraccionaria a la escritura decimal.

[339] Tiene un error del 30,30%. En el test de Levine (1980) sería puntuada con un 0 por superar el 30% de error. No obstante, dado que la elección de un 30% es arbitraria, resulta difícil sostener que 100 no sea una estimación razonable para el cálculo.

acuerdo con la autora en que los alumnos al estimar suelen abandonar un procedimiento que consideran difícil por otro que les resulta más fácil, pero no interpreto esta situación como un error sino como un cambio de estrategia que denota flexibilidad por parte del alumno[340]. Además, en este trabajo he tomado la decisión de que siempre que el alumno da una estimación, no se puede decir que el proceso de estimar quede inconcluso, aunque el alumno haga comentarios del tipo "Me lo he inventado" que, como he explicado en un par de ocasiones, no parecen fiables.

2. *Pérdida de pasos intermedios*. Es un error que se produce cuando el alumno no recuerda (o recuerda incorrectamente) alguno de los resultados intermedios alcanzados durante el proceso de producir su estimación. Es un error que aparece frecuentemente (pero no siempre) cuando el alumno utiliza la estrategia de *imitar el algoritmo escrito*. Este error aparece con mucha frecuencia en el trabajo de Levine (lo cometen 47 de los 89 participantes). La autora atribuye este tipo de error a una sobrecarga de la memoria[341]. En este trabajo he definido una categoría de error aproximadamente equivalente a la "pérdida de pasos intermedios", aunque asocio rígidamente este tipo de errores a la estrategia de "imitación del algoritmo escrito". Coincido con la autora en que cuando los alumnos imitan el algoritmo escrito, suelen permanecer bastante tiempo en silencio, con lo que es difícil saber precisamente en qué paso de la operación está el error. Por esta razón, he dado una definición de este tipo de error más amplia, como imitación del algoritmo que conduce a una imprecisión (error mayor al 30%) y que no se debe a un error en la operación

[340] Levine (1980) dice que "los 'procesos incompletos' pueden indicar capacidades del alumno tanto como debilidades" (p. 83). Ciertamente, el alumno reconoce una 'debilidad' al no poder resolver la estimación de una determinada forma, pero a su vez demuestra 'capacidad' para cambiar de estrategia.

[341] La sobrecarga de memoria está reconocida como una causa habitual de errores en matemáticas (Astolfi, 1999, pp. 71-74).

de la coma decimal. Estos procedimientos los considero erróneos porque demuestran una falta de conocimiento de las estrategias de estimación más elementales y, a veces, del propio concepto de estimación que permite aceptar respuestas distintas de la exacta, al contrario que suele ocurrir en la escuela en el ámbito del cálculo escrito.

3. *Estrategia incompleta*. Se trata de un error en el que el alumno "omite una parte esencial de una estrategia de estimación" (p. 87). Es decir, produce una estimación siguiendo una estrategia en principio correcta, pero deja sin efectuar una parte fundamental de la misma. Como ejemplos de este tipo de error, Levine propone situaciones en las que los alumnos sustituyen 51 por ½ o 26 por ¼. Estos errores *no* los considera Levine como *errores en la sustitución* porque da por supuesto que el alumno entiende que la sustitución correcta es $51 \approx {}^{100}/_{2} = 100 \times ½$, y que después opera con ½ y cometiendo el error de cambiar la división por ½ por "hacer la mitad" y después omite la división por 100. Lo mismo ocurre con el ejemplo posterior.

Entrevistadora: 7858 ÷ 51

Alumno 41: Bien. Esto lo dividiría por la mitad. Sale 3426 (p. 88).

Entrevistadora: 824 ÷ 26

Alumno 64: Voy a dividir por 4 porque 26 está cerca de ¼. Así que es, más o menos, 405 (p. 88).

Otro ejemplo que Levine sitúa en esta categoría es el siguiente, en el que el alumno 11 no recupera la coma decimal (esta recuperación es la parte que falta de la estrategia haciéndola incompleta):

Entrevistadora: .47 × .26

Alumno 11: Quito los decimales en ambos [números], así que es 47 × 26… 50 × 25… 125 y un cero, así que 1250 (p. 89).

Levine indica que esta falta en la recuperación de la coma decimal puede deberse a dos causas distintas: puede ser que el alumno omita el ajuste de la coma decimal por olvido o por considerar que dividir por 100 ambos factores produce una multiplicación equivalente. Si es este el caso, se trataría de una operación errónea de la coma decimal en la multiplicación, que imitaría el modo en que se opera en la división, operación en la que sí sería válida la eliminación de la coma en dividendo y divisor al dividir ambos por 100.
Una situación análoga a esta se da en la falta de recuperación de los ceros que se da al sustituir los datos iniciales por otros redondeados:

> Entrevistadora: 145×37
>
> Alumno 11: 37 está cerca de 40. Quito el cero y lo añadiré al final. 5×4 son 20, 0 y me llevo 2, 4×4 son 16, 18, eso hacen 80. Está cerca [el resultado] de 480 (p. 91).

En esta estimación, el alumno sustituye 145×37 por 145×40 y realiza, imitando el algoritmo escrito, 145×4, obteniendo un resultado de 480 en lugar del resultado correcto de 580 (pues se le olvida 'llevarse 1' del 18 para sumarla a las centenas). Aquí hay un error[342] en la imitación del algoritmo escrito (un error de cálculo mental) además de la falta de recuperación del cero.
Para cada ejemplo de estrategia incompleta que aparece en el trabajo de Levine, he encontrado un ejemplo semejante en mi investigación. Sin embargo, desde mi punto de vista, la etiqueta de "estrategia incompleta" puede abarcar situaciones de gran diversidad. Así, los errores que Levine sitúa en esta

[342] Este error no es comentado por Levine, que se centra exclusivamente en la no recuperación del cero. Ocurre que si el alumno hubiera recuperado el cero, para una estimación de 4800, la estimación sería razonable y entraría dentro del intervalo de error del 30% propuesto por Levine para dar una puntuación positiva a una estimación.

categoría, los he distribuido en tres clases diferentes: Errores de sustitución, para las situaciones en que los alumnos no son capaces de extrapolar la sustitución de 0,5 por 1/2 a 50 o a 25 (sustituyendo, en cada caso, por 100/2 o por 100/4 respectivamente); errores en el ajuste del valor posicional, para las situaciones en las que se omite uno de los pasos que hay que dar para operar la coma decimal (como en los errores PV2 y PV3); u otros errores, como sustituir 0,75 por 3/4 y operar con esta fracción multiplicando por 3, y omitiendo la división por 4, como se ve a continuación:

Entrevistador: 2.57 × 0.72

Alumno3: Nada. Sé que tengo que empezar por 0, pero... Le cojo... Si redondeo a 3, no son 3. Pero con menos y eso... Pondría 7,5. Porque he cogido 2,5 sería por ½ pero lo voy a hacer por ¾ porque como se acerca a 0,75.

Estimación: 7,5; 305,3% error.

Esta estrategia incompleta ha aparecido en una única ocasión. La segunda parte de la operación (la división por 4) se omite. Aunque este error pudiese tener el mismo origen que una omisión de una división por 100 en un ajuste del valor posicional, me parece que son dos tipos de situaciones diferentes y por esa razón no las he mezclado en una única categoría.

4. *Error en el significado de una operación*. Son errores basados en una conceptualización deficiente de alguna operación. Se da con frecuencia asociada a la sustitución por fracciones y con la operación de división. Levine indica que "Los participantes mostraron debilidad en la conceptualización de la división por una fracción al igualar '÷ ½' con '½ de' o con '÷ 2'" (p. 92). Este error fue cometido por 20 de 35 participantes que sustituyeron .48 por ½.

En esta investigación, he encontrado en varias ocasiones el mismo error que describe Levine (1980). Es un error previo a la fase de ejecución. Se da en la fase de interpretación. Cualquier nombre del tipo: "error en el *significado* de la operación" o "error en la *interpretación* de la operación" parece adecuado. He elegido llamarlo "error en la traducción", por que me parece que con este nombre se recoge bastante bien la relación de integración del modelo de fases de resolución de problemas (interpretación, ejecución, evaluación) con el modelo RTC (reformulación, traducción, compensación). Por lo demás, considero esta categoría[343] equivalente a la descrita por Levine.

5. *Error en el ajuste del resultado*. Son los errores que en este trabajo he llamado "errores en la compensación[344]". Uno de los errores de los que se informa se da en la compensación final en la división. Este error está basado en la "idea equivocada de que, si todo lo demás permanece igual, cuanto mayor es el divisor, mayor será el cociente". Por ejemplo:

Entrevistadora:	$66 \times .86$
Alumno 14:	… Lo hago… $6600 \div 100$. Sería aproximadamente 64.
Entrevistadora:	¿Por qué decidiste hacerlo más pequeño al final?
Alumno 14:	Porque 86 es más pequeño que 100 (p. 98).

En otros casos, los alumnos piensan que "si el divisor y el dividendo son aumentados, el cociente debe también aumentar" (p. 98) o, al contrario, que si el "al disminuir el divisor y el dividendo, disminuye el cociente" (p. 98). En el primer caso, el alumno 24 dio para $25410 \div 65$ una estimación de 600, al pensar que $2500 \div 50 = 500$ y que tenía que aumentar el resultado porque había disminuido ambos números en la operación inicial (p. 98). En el segundo caso,

[343] Realmente, en el presente trabajo, los errores de traducción se dividen en errores cometidos por cambio de operación, o por cambio en el orden de dividendo y divisor.

[344] A partir de los trabajos del grupo de Reys y colaboradores, al *ajuste del resultado* se le ha dado el nombre de "compensación". El trabajo de tesis de Levine (1980) es anterior a la publicación de los trabajos sobre estimación de Reys y colaboradores (a los que Levine (1980), por tanto, no cita).

el alumno 71 dio una estimación para 546 ÷ 33.5 sustituyendo dicha operación por 500 ÷ 30 y ajustando su estimación inicial de 15 a 16 por haber disminuido los dos datos iniciales.

También hubo alumnos que pensaban que un "aumento en el dividendo compensaba por una disminución en el divisor" (p. 99). Este es un caso de error en la *compensación previa* al cálculo:

> Entrevistadora: 648.9 ÷ 22.4
>
> Alumno 62: … 650 ÷ 20. Que sería (pausa) 325[345]. He añadido 2 al 648.9, aproximadamente 2, para pasar a 650 y he restado 2 al 22.4 aproximadamente para nivelarlo (p. 99).

Levine (1980) propone también ejemplos de *imprecisión en la intensidad de la compensación*: "Resultó evidente que la habilidad de determinar en qué dirección ajustar el resultado no garantiza una buena percepción de cuánto debe ajustarse el resultado" (p. 101). Así, el alumno 39, al estimar el resultado de 648.9 ÷ 22.4, sustituyó la operación inicial por 600 ÷ 20, dio una estimación inicial de 30 y después, realizó una compensación[346] subiendo su estimación inicial hasta ¡65! (p. 101).

Comparando el trabajo de Levine (1980) con el presente trabajo, he optado por establecer cuatro categorías distintas para los errores de compensación[347]: error en el sentido de la compensación previa, en el sentido de la compensación

[345] Además del error en la compensación, se produce un error en el ajuste del valor posicional, pues 650 ÷ 20 son 32,5, no 325 como propone el alumno.

[346] Equivocándose en la dirección, pues la solución exacta de la operación es menor que 30.

[347] Como se ha visto en los ejemplos propuestos del trabajo de Levine (1980), esta autora cita ejemplos de todos los tipos de errores de compensación que he propuesto en la presente investigación. He tratado de elaborar una clasificación más fina que la de Levine (1980), para dar cuenta de la fase en la que se produce la equivocación del alumno y nuestra valoración sobre dicha equivocación (como imprecisión o error).

posterior al cálculo e imprecisión en las compensaciones previas y posteriores al cálculo. La razón de hacerlo así es, por un lado, distinguir los errores producidos en la fase de interpretación (las compensaciones previas) de los correspondientes a la fase de ejecución (las compensaciones posteriores al cálculo) y, por otra parte, señalar la diferencia, que a mi juicio es importante, entre error e imprecisión.

6. *Algoritmo inadecuado*. Se refiere al error que se produce al intentar extrapolar alguna propiedad o procedimiento parcial de un algoritmo a otro. Por ejemplo, varios alumnos aplicaron la forma de operar el punto decimal en la división a la multiplicación, sustituyendo $424 \times .76$ por 42400×76, $64.6 \times .16$ por 646×1.6 y este producto, a su vez por $650 \times 1 = 650$.

En mi investigación, también se ha encontrado este tipo de error. Sin embargo, dado que la parte del procedimiento que se suele extrapolar erróneamente es la operación de la coma decimal, he optado por incluir estos errores dentro de los errores en el ajuste del valor posicional. Por ejemplo, el error tipo PV6 consiste en operar la coma decimal en la división como en la multiplicación, un caso que claramente encaja en el tipo de error llamado por Levine "algoritmo inadecuado".

7. *Error de valor posicional en la aplicación del algoritmo de la multiplicación o la división*. Es un error que se produce en situaciones en que los alumnos realizan la multiplicación o división de números sin tener en cuenta el valor posicional de cada cifra. En algunos casos, se trata de simplificaciones del algoritmo escrito, en las que se omiten algunos pasos del mismo. En otros casos, no se puede considerar así, sino que más bien son algoritmos alternativos simplificados inventados por los alumnos ante la dificultad de imitar mentalmente el algoritmo escrito. Ejemplos de esta categoría de error son los siguientes:

Entrevistadora: 93×18

Alumno 39: … 8×3 son 24, 4 y 2 [que me llevo], 9×8 son 72 y 2 son 74… Así que 744 y 93… 843. (p. 105)

El alumno 39 intenta imitar el algoritmo escrito pero al multiplicar 93×1 (el 1 del 18) no advierte que el 1 corresponde a las decenas y que el producto que debe sumar es 930 en lugar de 93. Al final, también comete un error al sumar $744 + 93$.

Entrevistadora: 824×26

Alumno 39: (pausa) 4844. He utilizado el 6… [He] multiplicado 6 por 824. (p. 106)

Algunos alumnos comienzan el proceso de estimación imitando el algoritmo escrito, comenzando a operar por la derecha en el caso de la multiplicación, y luego dejan la operación a medias ante la dificultad que supone realizar el algoritmo escrito mentalmente. Precisamente la ventaja que tiene el uso de algoritmos alternativos para la multiplicación, en los que se empieza a operar por la izquierda, es que si se abandonan sin terminar, el resultado puede constituir una buena estimación. En este caso no ocurre así, pues al operar solamente 824×6 se comete un error importante al omitir el 20 del segundo factor.

Entrevistadora: $4645 \div 18$

Alumno 39: (pausa) 22. He dividido 46 entre 18 y luego 45 entre 18 (p. 107)

En esta situación, al dividir 46 entre 18 no se tiene en cuenta el valor posicional. Realmente, se está dividiendo 4600 entre 18, de modo que el resultado parcial debería ser 200 y la estimación final 202 en lugar de 22.

En mi trabajo, estos errores entran dentro del tipo "Error en la imitación del algoritmo escrito" (AL), que englobaría tanto esta categoría de Levine como la de "pérdida de pasos intermedios". Pienso que estas categorías de errores deberían unirse, pues puede ser muy difícil distinguir en la práctica entre ambos tipos de errores y, además, pienso que no tiene un gran interés teórico hacerlo: Ambos errores se dan cuando el alumno intenta imitar mentalmente el algoritmo escrito, ante la gran dificultad que esto entraña; ambos errores denotan un desconocimiento del concepto y procesos propios de la estimación; y ambos errores se pueden evitar enseñando al alumno estrategias de estimación.

8. *Error en el redondeo*. En el trabajo de Levine (1980), se admite que varios tipos de redondeo no estándar pueden aplicarse dentro de una estrategia de estimación, de modo que la categoría de errores en el redondeo abarca solamente situaciones en las que el redondeo "refleja claramente un error en el valor posicional" (p. 108). Ejemplos de este tipo de error son el redondeo de 1292,8 a 130; el de 7858 a 1000; el redondeo de 0,76 o 0,86 a 0,1; o el de 0,06 a $^{6}/_{10}$ o a ½.

Esta categoría de error coincide exactamente con la que he llamado "error en la sustitución". El nombre que le he dado parece más adecuado puesto que las 'sustituciones' pueden ser redondeos, truncamientos, uso de potencias de diez, sustituciones por fracciones, por números compatibles, o incluso otro tipo de redondeos no estándar. En cualquier caso, se trata de un error en la sustitución en el que se altera incorrectamente el orden de magnitud de un número.

9. *Error en el orden de magnitud*. Son errores cometidos al determinar el valor posicional del resultado que no pueden clasificarse en categorías anteriores. Cuando se operan números naturales, este error aparece cuando los alumnos aplican destrezas de aproximación y trabajan con números redondeados (p.

109). Por ejemplo, “el alumno 1 dijo que 800 × 20 = 1600, 70 × 90 = 630, y 400 × 50 = 2000. El alumno 71 dijo que 100 × 25 = 250…” (p. 109)

En algunos casos, los alumnos parecen extrapolar la regla para sumar y restar números que acaban en cero a la multiplicación y a la división (operaciones en las que esta regla no funciona). Así como para sumar 700 + 500, se pueden sumar 7 y 5, y después añadir los dos ceros, para obtener un resultado de 1200, algunos alumnos parecen aplicar esta regla, como se ve en los siguientes ejemplos:

Entrevistadora: 79 × 89

Alumno 80: Cerca de 560… Simplemente he multiplicado 7 × 8 y luego he multiplicado otra vez por 10. (p. 110)

Entrevistadora: 4645 ÷ 18

Alumno 35: … 4700 ÷ 20. Quito los dos ceros [quiere decir, un cero del 4700 y otro del 20]. Eso son 470. 2 cabe en 4 dos veces, 2 cabe en 7 tres veces, y me llevo, 2 cabe en 10, 5… 235. Más los dos ceros, 2350. (p. 110)

Entrevistadora: .47 × .26

Alumno 38: Primero me deshago de los decimales… 50 × 30 = 1500, y ahora quito los dos decimales, y eso me daría 15. (p. 113)

Entrevistadora: .47 × .26

Alumno 49: Primero yo quitaría los decimales de aquí. Movería los puntos decimales dos lugares a la derecha. Eso me daría un número natural, 47 × 26. Pero tendría que acordarme, cuando calcule mi respuesta, de retrasar la coma dos espacios (p. 113)

Este es un error que se da tanto en la multiplicación como en la división. En el primer caso, el alumno habla de multiplicar por 10, pero en el segundo se utiliza el lenguaje de "añadir ceros". En los dos últimos ejemplos, aparece el error con números decimales. Este es un error en el que habría que profundizar, como comentaré en las conclusiones. Parece (su efecto es el mismo) que el de una extrapolación, como he advertido antes. Sin embargo, merecería la pena investigar si pueden encontrarse explicaciones alternativas más plausibles.

Otro error dentro de esta categoría, consiste en no coordinar correctamente el proceso de aproximación con la operación de la coma decimal:

Entrevistadora: $.47 \times .26$

Alumno 69: Voy a convertirlo en $.5 \times .25$. 5×25 son 125. Y hay punto, punto, punto, punto [el alumno cuenta las posiciones decimales]. Así que son 0.0125.

Al recuperar la coma decimal, utilizando un procedimiento correcto, el alumno no se da cuenta de que al aplicar la destreza de aproximación, sustituyendo .47 por .5, se ha reducido de 4 a 3 el número de cifras decimales de los factores. En nuestra investigación, he llamado a este error "Error por falta de coordinación entre la destreza de aproximación y las reglas para operar el punto decimal". Considero que, aunque el resultado final refleje una equivocación en el orden de magnitud del resultado, el origen del error es bastante diferente al de los demás, y que, mientras que los demás errores vistos en este apartado son característicos del cálculo mental, este es un error específico de la estimación, y por esta razón merece ser considerado aparte.

Hay un último tipo de error en esta categoría que consiste en que los alumnos, en la división, operan la coma decimal de un modo parecido al del algoritmo de la multiplicación. Es decir, haciendo que al final el "número de dígitos a la derecha del punto decimal en el cociente sea igual al total de los dígitos a la derecha del divisor y el dividendo” (p. 112). Se ve en el ejemplo:

> Entrevistadora: .79 ÷ .89
>
> Alumno 69: … Sería aproximadamente algo así como .002. No, .012. No. 0012. Porque sé que hay cuatro puntos [cifras decimales entre los dos números]. (p. 112)

Esta categoría de Levine (1980) resulta excesivamente amplia y considero oportuno hacer una clasificación más fina. De hecho, en la propia investigación de Levine se establecen claramente varias subcategorías en el análisis de los errores en el orden de magnitud.

En el presente trabajo, hay varios tipos de error de los que he llamado "errores en el ajuste del valor posicional" que entrarían en esta categoría de Levine. Entre ellos, el error en el conteo de los ceros y las posiciones decimales (PV1), el error de falta de coordinación entre la aproximación y la operación de la coma decimal (PV4) o los errores de tipo PV7 o PV8 específicos de la división, que afectan a la determinación del valor posicional de la primera cifra significativa del cociente.

3.1.1. Ausencia de consideración de errores en la fase de evaluación

Por último, para concluir la comparación entre el trabajo de Levine (1980) y el presente, en una decisión parcialmente[348] coincidente con la nuestra, explicada

[348] En este trabajo, al igual que en el de Levine (1980) resulta evidente que una mayoría de los alumnos no evalúan sus estimaciones. No obstante, sí se producen algunos ejemplos reseñables de situaciones en que los alumnos se equivocan al evaluar sus estimaciones, sustituyendo estimaciones correctas por incorrectas. Así, he añadido una clase de errores relativos a la evaluación para recoger este tipo de situaciones.

al presentar mi modelo para el análisis de errores, Levine (1980) *no introduce ninguna categoría de error relativa a la evaluación* del proceso o del resultado[349], aunque hace varios comentarios relativos a la ausencia de evaluación de las estimaciones. Por ejemplo, Levine (1980, p. 93) informa de que el 85% de los participantes, al dar una estimación para una división por un número menor que uno, dieron resultados menores que el dividendo. Esto ocurrió para 139 de las 267 estimaciones para este tipo de operaciones (un 52%). "Aparentemente estos participantes o bien no sabían o bien *no se pararon a pensar* que un divisor menor que 1 debe producir un cociente mayor que el dividendo" (p. 93).

También Levine (1980) añade que en su investigación "los alumnos, por lo general, no parecían detenerse a considerar la razonabilidad de las estimaciones" (p. 88). El siguiente comentario alude, indirectamente, a la falta de evaluación de la razonabilidad del resultado: "Para muchos alumnos [...] parece que la multiplicación por un decimal no tiene un significado más allá del algoritmo que utilizan para calcular la respuesta" (p. 96). En este sentido, para Levine resulta difícil de concebir cómo un alumno puede dar una estimación de 2800000 para el producto $424 \times 0{,}76$.

Comparando globalmente, en lo referente al análisis de errores, el trabajo de Levine (1980) y la presente tesis, debe resaltarse que los ejemplos de errores encontrados en uno y en otro son muy similares. En ocasiones, se puede decir que son iguales. La diferencia entre las dos investigaciones la encontramos en la organización de estos errores dentro de un esquema. Levine (1980) utiliza,

[349] Incluir una categoría de este tipo tiene un indudable interés teórico. Dado que estoy utilizando un modelo para el análisis de errores que tiene en cuenta las fases de interpretación, ejecución y evaluación, los errores de evaluación se integran fácilmente en esta última fase del modelo. En la investigación de Pañellas (2004), como veré en un apartado posterior de este capítulo, sí aparece una categoría de errores por falta de evaluación de la razonabilidad de las estimaciones.

como punto de partida para su análisis de errores, el trabajo de Radatz (1979). En mi caso, he elaborado un modelo para el análisis de errores que parte de los modelos de fases de resolución de problemas y el modelo RTC de Reys y otros (1982). Esta diferencia de modelos conduce a una interpretación diferente de las respuestas de los alumnos, que como he dicho resultan muy parecidas en ambos trabajos. Este parecido tiene la explicación de que en ambos casos las pruebas de estimación están compuestas por el mismo tipo de operaciones (multiplicación y división), planteadas de forma simbólica, con los mismos tipos de números (naturales, decimales mayores que 1, decimales menores que 1 y decimales menores que 0,1).

3.2. Los errores en estimación en Pañellas (2004)

La investigación (Pañellas, 2004) se realiza con alumnos de primero de Educación Secundaria Obligatoria. En la misma, se utiliza un test (el TENC, Test de Estimación en Numeración y Cálculo) que se aplica a una muestra de 19 clases. Posteriormente, se aplica un 'test razonado', resultado de reducir el TENC, que se aplica a 80 alumnos y una entrevista, aplicada a una submuestra de 22 alumnos). En el TENC, compuesto por 73 ítems y desarrollado para la investigación, solo hay dos ítems en los que aparece una multiplicación o una división por un número menor que uno. Son los siguientes[350]:

[350] Ítems 48 y 71 del TENC. En el segundo caso, ítem 71, podría ser problemático de cara a valorar la habilidad de estimar. Pienso que podría haber, para la multiplicación $0{,}25 \times 30$, dos respuestas adecuadas: 7,5 y 7,50, dependiendo del contexto del problema, pues dentro de un contexto de medida 7,5m y 7,50m indicarían precisiones distintas en la medida. En el primer caso, se interpretaría que la medida probablemente esté entre 7,4m y 7,6m, mientras que en el segundo caso, estaría entre 7,49m y 7,51m (Ver Taylor, 1997, p. 9). En todo caso, y más allá de esta discusión, no veo del todo clara la relación de este ítem con la habilidad de estimar, pues en los procesos de aproximación que se dan en la estimación suele ser bastante común la eliminación de las cifras decimales de menor valor posicional. Por ejemplo, en este caso tendría sentido sustituir $0{,}25 \times 30$ por $0{,}3 \times 30$ o por $0{,}2 \times 30$ y hacer después una compensación, si se

En una pastelería podemos comprar:

Cruasán 0,92 €

Paquete de magdalenas 2,76 €

Pastel de crema 14,12 €

Coca de piñones 1,38 €

Coca de bizcocho 1,07 €

¿A qué precio se acerca más?:

48 - Comprar 8 cruasanes.

a. 6 €

b. 7,5 €

c. 9 €

d. 12 €

(Pañellas, 2004, p. 818)

Predice el número de cifras decimales de los productos siguientes:

71 –

0,25 × 30 número de cifras decimales ____

(Pañellas, 2004, p. 822)

Pañellas (2004) encuentra 120 tipos de error para los que ofrece una descripción y propone ejemplos (pp. 578-593). Estos tipos error pueden agruparse en las siguientes 8 categorías:

1. Errores por incomprensión, confusión o falta de significado de los conceptos matemáticos.
2. Errores por extensión incorrecta de reglas o propiedades.

considerase oportuno. Sin embargo, sí me parece oportuno plantear cuántas cifras enteras tiene el resultado, pues en ese caso la repuesta debería ser 'una cifra' y el ítem pondría a prueba el conocimiento de los alumnos del efecto de multiplicar un número por otro menor que 1.

> 3. Errores por la elección de técnicas de cálculo estimativo poco adecuadas a la situación planteada.
> 4. Errores por equivocaciones en los algoritmos de cálculo.
> 5. Errores en el uso de técnicas específicas de cálculo aproximado por aplicarlas sin sentido.
> 6. Errores de desajuste de la respuesta por no captar correctamente el error de estimación.
> 7. Errores por la no percepción de la razonabilidad de los resultados.
> 8. Errores en la interpretación de un texto, por falta de atención o por incomprensión de aquello que se solicita.
>
> (Pañellas, 2004, p. 595)

3.2.1. Análisis de tipos de errores en Pañellas

En este apartado voy a analizar algunos de los 120 tipos de errores que aparecen descritos en Pañellas (2004). Para algunos de los tipos de error analizados, mi perspectiva es diferente a la de Pañellas, de modo que yo no les doy la consideración de errores. Considero de interés confrontar dos visiones diferentes de los errores en estimación. En el contraste, se podrá valorar hasta qué punto resulta difícil aplicar del concepto de "error en matemáticas" en el ámbito de la estimación, así como contribuir a esta delimitación de la aplicación del concepto.

Para empezar, Pañellas (2004) no hace la distinción, que en el presente trabajo es fundamental, entre *error* e *imprecisión* al estimar. Por ejemplo, en el error 72 de este trabajo, vemos:

> 72. - En multiplicaciones de números naturales, aproximar los dos factores en el mismo sentido, sin tener en cuenta el incremento de error que eso supone. Ejemplo: 112 x 29 ≈ 100 x 20 = 2.000 (Pañellas, 2004).

El porcentaje de error, al dar la estimación de 2000 es de un 38,4%. Se puede decir que el redondeo, en este caso, sustituyendo 112×29 por 100×30 para dar una estimación de 3000, que incluye una compensación intermedia, es una estrategia más adecuada para este cálculo. En este caso el porcentaje de error es de un 7,6%. También puede considerarse el resultado como una "imprecisión", siempre admitiendo que el margen del 30% que se admite en muchas investigaciones, como la presente, es totalmente arbitrario. Desde mi punto de vista, la aplicación del truncamiento de los datos, para producir una estrategia con un 38,4% de error, no sería un error en matemáticas, pues no hay un conocimiento deficiente, ni una "idea equivocada", sino más bien una falta de 'afinamiento' en la estimación[351]. Aquí estoy dando por supuesto que en el aprendizaje de la estimación primero se aprenden estrategias como el uso del truncamiento y después se aprende a 'afinar' estas estrategias añadiendo compensaciones intermedias o finales, o truncando el número a las decenas (en vez de a las centenas). En este sentido, aunque la estrategia inicial no sea la idónea, no la considero errónea. Sin embargo, en la revisión sobre el error he destacado el aspecto del error como juicio de valor del profesor en el que se contrasta la producción del alumno con respecto a unos objetivos o expectativas del profesor. Desde este punto de vista, si ha habido un periodo de enseñanza en que se ha tratado el tema de la compensación, dentro de la estimación, es posible que el profesor considere un error la falta de ajuste de la estimación.

[351] En el método para la enseñanza de la estimación de Reys, Bestgen, Trafton, & Zawojewski (1984) para final de Educación Primaria y principio de Secundaria, se propone que primero los niños aprendan a utilizar el truncamiento dejando solo la cifra de mayor valor posicional. Después se plantearán a los niños situaciones en las que es preciso afinar esta primera estimación y, finalmente, se enseña cómo afinar esta primera estimación. Algunas de las actividades de este método que muestran esta secuencia aparecen traducidas en De Castro (2002a, pp. 287-290).

En general, para Pañellas (2004) son erróneas las aplicaciones de estrategias de estimación válidas, cuando en función del contexto existen estrategias que pueden ser consideradas como "más idóneas". Esta es una concepción del error en estimación que difiere de la mía. Voy a ilustrar estas diferencias de concepción, a continuación, con una discusión de algunos errores identificados en la tesis de Pañellas. Por ejemplo, el error 56 aparece descrito de la siguiente manera:

> 56. - En sumas de números decimales, considerar solo la parte entera, es decir, truncar a las unidades, cuándo la parte decimal de cada sumando o de la mayoría se acerca a la unidad.
> Ejemplo: 3,91 + 5,72 + 2,85 = 10; 6,61 + 8,11 + 1,95 = 15.
> (Todas las aproximaciones de los sumandos son por defecto, aumentando el error de la suma). (Pañellas, 2004, p. 585)

En el primer caso, al dar la estimación de 10 para la suma 3,91 + 5,72 + 2,85, se comete un error de un 19,87%, margen de error que sería tomado por válido en cualquier trabajo sobre estimación, en los que es usual admitir hasta un 30% de error para considerar la estimación razonable. La estimación para la suma aparece en el TENC en un contexto de compra, en el que cada número representa el precio de un producto y se pide que se estime la cantidad que debe pagarse en total. Dentro de este contexto, está claro que el truncamiento (eliminando los decimales) no es la estrategia más adecuada. El redondeo, para dar una estimación de 13, produce un error menor (4,17%) y es una estrategia más apropiada para un el contexto de comprar. A partir de aquí, estoy de acuerdo con Pañellas en que tiene interés hablar de estrategias de estimación *no adecuadas*, *adecuadas* y (podría tener sentido hablar de una estrategia) *óptima* para una situación dada. De hecho, esta es la dirección para el trabajo sobre estimación que he sugerido en el apartado sobre la estimación y el valor matemático del control. En lo que no estoy de acuerdo es en calificar como "error" la aplicación correcta de una estrategia comúnmente aceptada (como el truncamiento) y enseñada en clase y que, además, conduce a un resultado no calificable como "imprecisión"[352] (error de 19,87%) desde mi perspectiva.

Tampoco considero, desde mi visión del error en matemáticas, como errores los que aparecen como tipos 67 y 68:

> 67. - Hacer aproximaciones que, por el contexto, no son adecuadas, visto el error que provocan. Ejemplo: La comida te ha costado 11,59 € y has pagado con un billete de 50 €. ¿Cuánto te tienen que devolver aproximadamente? 50 - 11,59 ≈ 50 - 10 = 40. (Al contrario del error descrito en el número 64, el redondeo a las decenas es correcto, pero el resultado se desvía demasiado del exacto, si se tiene en cuenta el requerimiento del ejercicio) (p. 586).
>
> 68. - En multiplicaciones de números naturales, hacer transformaciones adecuadas de los factores (uno o dos) y no compensar el resultado. Ejemplo: $28 \times 12 \approx 28 \times 10 = 280$. Este error lo encontramos, en general, en las otras operaciones, fundamentalmente en aplicar procesos de reformulación, sobre todo truncamiento (p. 587).

Pienso que Pañellas (2004), en el error de tipo 67 está en la línea de los últimos trabajos de Reys y colaboradores sobre el concepto de razonabilidad (Alajmi y Reys, 2007) en los que se defiende que una respuesta puede tener un grado de

[352] Más llamativo todavía puede parecer calificar de "error" por falta de *compensación*, lo que Pañellas tipifica como error con el número 59: "En sumas de números decimales, redondear todos los términos de la suma a las unidades y no ajustar el resultado. Ejemplo: 6,61 + 8,71 + 2,85 7 + 9 + 3 = 19. (Todas las aproximaciones de los sumandos son por exceso, aumentando el error de la suma.)" (p. 585). Esta estrategia tiene en cuenta los decimales (no solo la parte entera del número), produce una estimación con un error del 4,6%, y conduce a una ligera sobrestimación que se ajusta perfectamente a un contexto de compra en que el objetivo de la estimación puede ser saber si se tiene suficiente dinero para efectuar la compra.

precisión muy alto y no por ello ser razonable, y que la razonabilidad se debe examinar en relación al contexto del problema. Tanto en el tipo de error 67 como en el 68 se exige una precisión excesiva, desde mi punto de vista.

Calificar estos procedimientos y resultados como erróneos puede chocar un poco con ideas sobre la estimación como que los problemas de estimación deben aceptar como válidos distintos resultados y diferentes estrategias, o que exigir un exceso de precisión al estimar va en contra del desarrollo de la habilidad de estimar (Reys, 1986).

Otro ejemplo aparece en el tipo de error 80:

> 80. - En divisiones de números naturales, transformar los términos de manera que el dividendo sea múltiplo del divisor, pero escogiendo uno múltiplo que no es el más próximo al dividendo dado, cuando esta sustitución es fácilmente observable.
>
> Ejemplo: 310 ÷ 15 ≈ 360 ÷ 15 = 24, en lugar de 300 ÷ 15 = 20; 1.500 ÷ 28 ≈ 1.800 ÷ 30 = 60 en lugar de 1.500 ÷ 30 = 50. (Pañellas, 2004, p. 588)

En el primer ejemplo, el intervalo de error del 30% sería (14,4, 26,9), de modo que, aunque la estimación de 20 sea mejor que la de 24, además de ser más sencillo el cálculo, ambas estimaciones tienen un grado de precisión aceptable. Solo se podría decir que la segunda proviene de una forma más idónea de aplicar la misma estrategia de estimación (el uso de números compatibles), pero yo no lo calificaría como error. El segundo ejemplo es bastante llamativo, puesto que la estimación dada al sustituir 1.500 ÷ 28 por 1.800 ÷ 30 conduce a una respuesta razonable e incluye una compensación previa al cálculo, mientras que la estrategia propuesta por la autora (1.500 ÷ 30) podría incurrir en uno de los tipos de error propuesto por Pañellas (2004) como “ausencia de compensación”. Básicamente, mi diferencia aquí con Pañellas reside en que yo no califico como erróneas las estimaciones no obtenidas mediante la estrategia idónea, que sería la más adecuada en el contexto práctico. Yo diría que se trata de estrategias y resultados aceptables, aunque mejorables, pero no erróneos.

3.2.2. Análisis de las categorías de error en Pañellas (2004)

Como ya se indica en la introducción de este apartado, los 120 tipos de error en estimación en cálculo descritos en Pañellas (2004) se podían agrupar en 8 categorías que se analizan a continuación. Voy a comenzar por comentar las categorías más o menos equivalentes a las del presente trabajo y a las de Levine (1980) para después pasar a valorar las demás.

> La categoría 1, "errores por incomprensión, confusión o falta de significado de los conceptos matemáticos", incluye aquellos errores que suponen conceptualizaciones equivocadas del sistema de numeración y dificultades en el pensamiento lógico matemático. (p. 595)

Esta categoría 1 incluye errores en la comparación de números decimales, en el conocimiento de los órdenes de unidades de la parte decimal[353], la concepción errónea de un decimal como pareja de enteros, la confusión entre múltiplo y potencia, o la incomprensión del concepto de proporcionalidad (p. 595-596). Esta categoría parece excesivamente heterogénea, pues junto con *errores característicos de los números decimales*, aparecen errores, como la confusión de múltiplo y potencia, y otros que no tienen una relación inmediata con los anteriores. La definición de la categoría utiliza expresiones excesivamente amplias como "incomprensión, confusión o falta de significado de los conceptos matemáticos" o "dificultades en el pensamiento lógico matemático". Estas dos etiquetas podrían utilizarse para casi cualquier cosa dentro del ámbito del error en matemáticas.

[353] Por ejemplo, al confundir "décimas" con "decenas", o "centésimas" con "centenas" por el parecido en la pronunciación.

> La categoría 2, "errores por extensión incorrecta de reglas o propiedades", incluye los errores derivados del uso inadecuado de una regla conocida que se aplica de la misma manera a una situación nueva. Se originan, así, falsas generalizaciones que el estudiante aplica de manera natural. (p. 596)

Ejemplos de esta categoría son la aplicación de la propiedad conmutativa a la resta[354], o aplicaciones incorrectas de la propiedad distributiva en la multiplicación de tres factores, extensiones de reglas de los naturales a los decimales como pensar que el producto siempre es mayor que los factores, aplicar la regla de añadir un cero al final del número, para multiplicar por 10, a un número decimal, pensar que el producto de dos números tiene tantas cifras decimales como cifras hay en suma entre los dos factores, compensar en la multiplicación como en la suma[355] añadiendo a un factor el mismo número que se quita al otro, o aplicación a la multiplicación y la división la regla de sumar o restar números acabados en ceros, confusión entre descomposición aditiva y factorial[356] (p. 596).

En esta segunda categoría que aparecen mezclados errores de muy distinto tipo.

---

[354] Pañellas (2004) pone como ejemplo de aplicación de la propiedad conmutativa a la resta 4.122 – 3.700 ≈ 478. Esto no es exactamente la aplicación de la propiedad conmutativa, ya que el alumno parece hacer: 4.122 – 3.700 = 700 – 122 = 478 (cuando 700 – 122 = 578). No está del todo claro cuál es el procedimiento, pero más que una aplicación de la propiedad distributiva, que supondría un cambio de orden en los dos números, y que debería dar un resultado negativo, parece un error de la familia del error clásico en la resta “quitar siempre el menor del mayor” (ver, por ejemplo, Ashlock, 1998, pp. 104-105). En VanLehn (1990, p. 228) puede consultarse la descripción de este error *menor-del-mayor* con un ejemplo (81-38=37), así como seis variantes del mismo. Un ejemplo de variante es: *menor-del-mayor-excepto-último* (344-177=173).

[355] Este error ya viene descrito en Levine (1980, p. 99) cuando un alumno sustituye 824 × 26 por 825 × 25, indicando que son iguales.

[356] Por ejemplo, un alumno hace: 26 × 18 = 26 × 10 × 8.

Por ejemplo, vuelven a aparecer los errores característicos de los números decimales. Además, se mezclan errores en fases distintas del proceso de estimar: hay errores en la compensación previa y en el uso inadecuado de la propiedad distributiva, ambos previos al cálculo, y otros errores en la fase de ejecución, como el de multiplicar por 10 añadiendo un cero a la derecha, en el caso de los decimales ($4{,}3 \times 10 = 4{,}30$). Se vuelve a ver, como en el caso de la categoría 1, que la categoría 2 es excesivamente heterogénea. Puede ser cierto que la mayoría de los errores descritos en esta categoría sean falsas generalizaciones, pero el tipo de conocimientos matemáticos que se generalizan es excesivamente diverso como para figurar todos en la misma categoría.

> La categoría 3, "errores por la elección de técnicas de cálculo estimativo poco adecuadas a la situación planteada", incluye aquellos errores que provocan respuestas incorrectas, alejadas excesivamente del valor exacto por el uso de una técnica inadecuada de cálculo estimativo, aunque esta técnica se aplique correctamente. (p. 596)

Esta categoría contiene tipos de errores que, desde mi perspectiva, no serían considerados errores, y que se han analizado en la sección anterior. De nuevo se interpreta como errónea la estrategia no idónea en una situación práctica, o una estrategia que puede afinarse o mejorarse. Las estrategias no óptimas no las considero errores en matemáticas especialmente cuando, como dice la definición de la categoría del error, son técnicas específicas de la estimación aplicadas correctamente.

> La categoría 4, "errores por equivocaciones en los algoritmos de cálculo", hace referencia a las equivocaciones que se cometen al efectuar el algoritmo habitual de cálculo en las operaciones aritméticas. (p. 597)

Pañellas (2004) indica que estos errores suelen producirse al intentar realizar un cálculo exacto en lugar de una estimación. Esta categoría coincide básicamente con la que he llamado “error en la imitación del algoritmo escrito” y con la unión de las categorías de Levine (1980) “error de valor posicional en la aplicación del algoritmo de la multiplicación o la división” y “pérdida de pasos intermedios”.

> La categoría 5, "errores en el uso de técnicas específicas de cálculo aproximado por aplicarlas sin sentido", incluye los errores que se producen cuando se aplica una técnica de aproximación numérica y se hace de manera incorrecta la ejecución del proceso correspondiente. (p. 597)

En esta categoría se mezclan los errores en el redondeo con errores en el concepto de estimación, como “hacer el cálculo exacto y después redondear” (p. 598).

> La categoría 6, "errores de desajuste de la respuesta por no captar el error de estimación", incluye aquellos errores que se deben a no hacer compensación del resultado de una operación cuando se han aplicado transformaciones adecuadas de los datos, o bien a efectuar aproximaciones que no comportan el uso de una técnica específica de cálculo estimativo. (p. 598)

Dentro de esta categoría aparecen también los "errores por falta de compensación"[357] analizados en el apartado anterior. Por ejemplo, aparecen

[357] La compensación es un proceso que tiene cierta complejidad. Supone un refinamiento sobre una estrategia inicial en la que se da una reformulación o una traducción. Pienso que, aunque sea apropiado realizar una compensación, la estrategia básica sin compensación debe ser aceptada como válida, aunque sea mejorable.

dentro de esta categoría la:

> Aplicación de procedimientos de reformulación, fundamentalmente truncamiento, cuándo el error que produce esta técnica es demasiado grande, vistas las cantidades que se desprecian, y, por lo tanto, dar un resultado desajustado de una operación aritmética para no compensarlo, aunque la técnica de transformación de datos utilizada sea correcta. (p. 598)

El procedimiento descrito en el párrafo anterior puede conducir, desde mi punto de vista, a veces, a una imprecisión y, otras veces, a una estimación aceptable, aunque no sea la mejor en el contexto del problema.

En esta categoría, Pañellas (2004) incluye también los errores en la compensación previa y posterior al cálculo (errores en la magnitud y en el sentido del ajuste). Estos errores aparecen también en mi trabajo y en el de Levine (1980). También incluye los errores que se deben a aproximaciones en las que no se emplean las destrezas de aproximación habituales (redondeo, truncamiento, etc.).

> La categoría 7, "errores por la no percepción de la razonabilidad de los resultados", incluye errores en la obtención de resultados de operaciones aritméticas o en la determinación de la magnitud de estos resultados. Los errores en los cálculos, que también implican resultados desajustados, suponen la no valoración de la razonabilidad, ya que se dan contradicciones con la misma estructura operacional y con la definición de los términos de esta estructura. (p. 598)

Esta categoría resulta muy interesante desde el punto de vista teórico. Como he dicho al comparar las categorías de errores de esta investigación con las de

Levine (1980), he optado por no incluir una categoría relativa al *error por no evaluar la razonabilidad del resultado*. Sin embargo, la categoría 7 del trabajo de Pañellas (2004) es precisamente esta.

> La categoría 8, "errores en la interpretación de un texto por falta de atención o por incomprensión de aquello que se solicita", incluye los errores que derivan de dificultades asociadas a la falta de comprensión del lenguaje escrito, fundamentalmente por no interpretar el requerimiento.

Este tipo de errores, aún asumiendo que se producen en el ámbito de las matemáticas, no son propios de las matemáticas: "falta de comprensión del lenguaje escrito" o "errores en la interpretación de un texto", no puede considerarse que formen una categoría de errores en la estimación.

Por último, el sistema de categorías de Pañellas (2004) tiene el inconveniente de que las categorías no son mutuamente excluyentes, sino que un error puede pertenecer a varias categorías[358].

> En algunos casos, el mismo error podríamos clasificarlo en dos tipologías diferentes, ya que, por ejemplo, errores en la utilización de técnicas de cálculo aproximado o hacer aproximaciones que no se corresponden con ninguna técnica específica también producen a menudo desajustes de la respuesta (p. 599).

En resumen, comparando globalmente los resultados y el enfoque de Pañellas con el del presente trabajo, pienso que el trabajo de Pañellas (2004) tiene muchas diferencias de enfoque con mi trabajo, en parte debidas a la amplitud

[358] En este párrafo no se está indicando que en un procedimiento puedan concurrir varios errores pues, a continuación, Pañellas (2004) añade: "No hemos considerado los errores sistemáticos múltiples, es decir, aquellos que combinan dos o más errores de los simples que hemos descrito." (p. 599)

de su prueba de estimación (dado que en mi caso el tipo de tareas es muy limitado), en parte debidas también a que la autora pide muchas estimaciones en contextos prácticos. Pienso que se ciñe bastante a la idea de razonabilidad según se expone en el trabajo[359] de Alajmi y Reys (2007), en el sentido de defender que, en un contexto práctico, una estimación puede ser muy precisa, pero no ser razonable. Parece enfocarse el error como falta de razonabilidad en este sentido y, desde mi trabajo, esto lo interpreto como una demanda excesiva de precisión[360].

A continuación, se pasa a comparar los resultados del presente trabajo con otros procedentes de la estimación o también, como se justificará, del ámbito del cálculo mental.

3.3. Errores en estimación versus errores en cálculo mental: El trabajo de Gómez[361] (1995)

A pesar de que el trabajo de Gómez (1995a) es sobre cálculo mental y no sobre estimación, el presente trabajo tiene varios puntos en común con aquel, que hacen que resulte interesante comparar sus resultados. En primer lugar, en el trabajo de Gómez (1995a), se diseña una propuesta didáctica sobre cálculo mental limitada a números naturales, que se experimenta en la formación de profesores. Después, en el postest, aparecen también números decimales con los que no se había trabajado previamente en el pretest, ni en la experiencia con maestros. Tanto en el pretest como en el postest las operaciones son de

[359] A pesar de que este trabajo es posterior, el enfoque de Pañellas (2004) sobre el error lo refleja bastante bien.

[360] Aunque, como he comentado, es bastante diferente estimar en un contexto práctico que ante tareas sin contexto, presentadas de forma simbólica.

[361] Gómez (1995) se refiere aquí, conjuntamente, a la tesis de Bernardo Gómez, publicada en 1995 por la editorial Comares (Gómez, 1995a) y al informe de parte de esta investigación publicado en "Enseñanza de las Ciencias" (Gómez, 1995b).

resta y de multiplicación. La razón por la que los decimales aparecen solo en el postest en el trabajo de Gómez (1995a) es que uno de los objetivos de la investigación es estudiar hasta qué punto los métodos de cálculo mental estudiados con números naturales se transfieren y aplican a situaciones con números decimales.

En el caso de la presente investigación, como se ha explicado en su diseño, una parte de los participantes (2 de los 5 grupos) siguieron un periodo de instrucción sobre estimación. En dicho periodo, la estimación se practicaba en su mayor parte con números naturales. Esto se debía a la estructura del propio curso, en el cual la estimación formaba parte del penúltimo tema del curso, llamado: "Alternativas al cálculo escrito en la Educación Primaria", dedicado al uso de la calculadora, el cálculo mental y la estimación. El último tema del curso estaba dedicado al aprendizaje de los números decimales. Por tanto, aunque por razones diferentes, en ambas investigaciones hubo un periodo de instrucción (en la presente, no seguido por todos los alumnos) en el que se trabaja solo con números naturales y, posteriormente, se realiza una prueba en la que los decimales sí aparecen.

Por otra parte, según el esquema que he utilizado para la estimación, la fase de 'ejecución' consiste básicamente en realizar un cálculo mental con el resultado al que se ha llegado en la fase de interpretación (posiblemente, con los datos iniciales sustituidos por aproximaciones). Así, puede decirse que los errores en la fase de ejecución son errores de cálculo mental, y tiene así sentido compararlos con los errores encontrados en el trabajo de Gómez (1995a). Un pequeño inconveniente para hacer esta comparación es que en la investigación de Gómez (1995a), se utilizan restas y multiplicaciones, y en esta investigación, multiplicaciones y divisiones. De este modo, debe restringirse la comparación a los errores en la fase de ejecución específicos de la multiplicación (PV2 y PV3), o que se se puedan dar en la misma (PV1), y no sean específicos de la estimación (PV4).

Por ejemplo, Gómez (1995b, p. 317) describe el siguiente error. Para calcular $3,4 \times 0,15$, el alumno dice: "He multiplicado 34 por 1,5 y me da 6,0 + 4,5 = 10,5". En esta explicación está implícita la operación $34 \times 1,5 = (30+4) \times 1,5 = 30 \times 1,5 + 4 \times 1,5 = 45 + 6$, que para el alumno es 6,0 + 4,5. Se interpreta aquí que al multiplicar 30 por 1,5 no ha contabilizado el 0 de las unidades. En la presente investigación, este error entra en la categoría PV2 de "error por omisión de los ceros en el ajuste del valor posicional". Ahora bien, hay que advertir que las situaciones son diferentes: Mientras que en la estimación es frecuente que el alumno redondee el dato inicial (por ejemplo, de 34 a 30) y el cero se busca a propósito, en la situación de cálculo mental el cero está implícito, y aunque está claro que aparece en la descomposición de $34 = 30 + 4$, no es un cero buscado. Lo que se busca verdaderamente es poder operar con números de un solo dígito, para reducir el cálculo a hechos numéricos sencillos. En el primer caso se sustituye el 4 por un 0 (al redondear); en el segundo, hay que trabajar con el 4 y con el 0.

Otro error descrito en Gómez (1995b) es el de sustituir $2,4 \times 0,15$ por 240×15 (para al final, después de haber multiplicado ambos factores por 100, dividir el resultado también por 100). Gómez (1995b) interpreta que la sustitución inicial es una extrapolación de un paso de la división a la multiplicación. Aunque en esta investigación no ha aparecido este tipo concreto de error, sí se observa el tipo de error PV6, que consiste en una extrapolación de la forma de operar la coma decimal, de la multiplicación a la división (es decir, la extrapolación 'inversa').

Otro error, señalado como específico de los decimales, aparece descrito en Gómez (1995a). Un alumno hace, en medio de un proceso: $0,6 \times 0,60 = 0,036$. En realidad, si se aplica la regla común para operar la coma decimal en la multiplicación escrita, $6 \times 60 = 360$ y luego se deben poner tres cifras decimales, para un resultado de 0,36 (en lugar del 0,036). Este error[362] es el que he llamado PV2, "error por omisión de ceros en el ajuste del valor posicional".

Gómez (1995b), en "otros tipos de errores" propone "Dato calculado distinto al dado" (p. 175), en que un alumno, ante el cálculo 2,4 × 0,15, realiza realmente el calculo 2,4 × 0,75, confundiendo el 1 por un 7. En esta investigación, he codificado este tipo de situaciones con DI, "Estimación con datos u operación diferentes", y se ha incluido como un tipo de error o imprecisión, aunque no le da consideración de error y en el nombre del tipo no se incluyen, a propósito, los términos 'error' ni 'imprecisión'. Quizá el error reportado por Gómez (1995b) tiene la particularidad de que en él ha podido influir la similitud en de las cifras 1 y 7, aspecto que en el tipo de errores DI, no se da.

En resumen, de los 17 tipos de errores, imprecisiones o fallos que aparecen en este trabajo, dos de ellos (PV2 y DI) aparecen en el trabajo de cálculo mental de Gómez (1995), aunque hay un número mayor de errores en ambos trabajos que denotan una problemática común: la dificultad de manejar los números decimales y, más en general, el valor posicional y las reglas para operar la coma decimal. El hecho de que, en mi investigación, 8 de los 17 tipos de errores se den en el ajuste de la coma decimal, y que solo uno de ellos (PV4) sea específico de la estimación, hace pensar que tendría interés de cara a futuras investigaciones, profundizar en la problemática de la operación de la coma decimal en situaciones de cálculo mental. Sería interesante plantear tareas parecidas a las de mi investigación, pero eliminando la fase de aproximación. Por ejemplo, planteando tareas de cálculo mental del tipo 0,6 ÷ 0,02, en lugar

[362] Gómez (1995a) hace realiza una interpretación ligeramente diferente de la situación. Para él, el error reside en contar la posición correspondiente al 0 de las centésimas (en 0,60) para hacer el ajuste del valor posicional. En la interpretación que se hace aquí, lo que es un error es contar el cero solo como posición decimal y no contarlo al multiplicar 6 × 60, al calcular 0,6 × 0,60 retirando las comas decimales. Operar con 0,60 en lugar de con 0,6 puede tener sentido si se considera el 0,60 como resultado de una medición y no como un número aislado.

de la tarea de estimación 0,68 ÷ 0,024. Es decir, tareas de cálculo mental en las que la única dificultad estribe en el ajuste del valor posicional.

3.4. Errores en estimación y cálculo mental en otras investigaciones

A continuación, me refiero más brevemente a algunos trabajos puntuales de estimación y cálculo mental cuya reflexión sobre los errores parece pertinente de cara a completar la panorámica esbozada en este trabajo sobre el error en la estimación en cálculo.

Bobis (1991) estudia los errores[363] en estimación cometidos por 101 niños[364] de 5º grado tras un periodo de instrucción en estimación de 15 semanas. Los "errores fueron agrupados en siete categorías –valor posicional, hechos básicos, redondeo, operación, cálculo mental, proceso incompleto y compensación" (p. 25). Este listado de errores no resulta muy informativo puesto que las categorías no aparecen definidas. La autora dice haber empleado las categorías de errores establecidas por Levine (1981)[365] para diseñar el test que utiliza en su investigación.

[363] El objetivo principal de la investigación era estudiar la efectividad de un periodo de instrucción en el desarrollo de estrategias de estimación. Se trata de un estudio experimental con grupo experimental y grupo de control, pretest y postest.

[364] En este caso, los "niños" eran todos de sexo masculino, pues la autora utiliza el término "boys" en lugar de "children".

[365] Este trabajo es: Levine, D. R. (1981). Computational estimation ability and the use of estimation strategies among college students. *Dissertations Abstract International, 41*(12), 5013A.

En este trabajo he utilizado como referencia la tesis de Levine (1980). En el resumen sólo aparece la enumeración de los tipos de errores, con las "etiquetas" para cada tipo de error, pero no la descripción de los errores, de modo que del estudio de Bobis (1991) poco se puede deducir para el análisis de errores en estimación, más allá de que parece asumir el modelo de Levine (1980), dado que no se sabe cómo interpreta esta autora el sistema de categorías de Levine (1980) y ofrece una información muy limitada sobre su análisis de errores.

Comparando el trabajo de Bobis (1991) con el mío, varias de sus categorías de error pueden considerarse casi idénticas a las mías: Los errores de *redondeo* (Bobis, 1991) pueden corresponderse con los errores de *sustitución*; los de recuperación incorrecta de hechos numéricos, se dan en ambas investigaciones, al igual que los de *compensación*; los errores de *valor posicional* de Bobis (1991) en mi trabajo se subdividen en ocho tipos diferentes, lo cual es normal si se piensa en que el tipo de tareas planteadas aquí resultan muy propicias para este tipo de error. Algunos errores de cálculo mental de Bobis (1991) pueden corresponder con los que he descrito en el apartado de errores en la imitación del algoritmo escrito. Los errores de *operación* de Bobis (1991) podrían corresponder a los errores de *traducción*. La mayor diferencia entre ambas investigaciones radica en la distinción hecha en mi trabajo entre error e imprecisión, que afecta a varias categorías, y también a la mayor profundidad con la que se aborda el estudio de errores e imprecisiones en mi investigación, debido a que en el trabajo de Bobis (1991) el análisis de errores no era un objetivo prioritario.

Grossnickle (1941) estudia tipos de errores en la división con números decimales. Su objetivo es tratar de determinar las causas de las dificultades en la división con decimales. Como posibles causas se plantea: el procedimiento de la división (se entiende, sin tener en cuenta la colocación del punto decimal), la colocación del punto decimal en el cociente, la colocación del cociente[366] y del punto, o una combinación de las tres alternativas previas (Grossnickle, 1941, p.

[366] Con respecto a la colocación del cociente, hay que explicar que el algoritmo utilizado en Estados Unidos de América tiene diferencias notables en la colocación en comparación al algoritmo tradicional en España. Por ejemplo, para hacer 0.36 ÷ 8 es fundamental elegir correctamente dónde hay que colocar el primer 4 del cociente y saber cuántos ceros hay que añadir, en este caso a la izquierda del 4 y dónde poner el punto decimal. Finalmente, el resultado es de .045.

184). Participan 200 alumnos de cada grado, desde sexto grado a noveno grado [367]. Se encontraron pocos errores en el procedimiento de la división. La mayor fuente de errores demostró ser la colocación del punto decimal, siendo el tipo de división más difícil la de un número natural por un número decimal. El cambio mecánico del punto decimal en la división mediante el uso de 'símbolos de inserción[368]' fue la causa de un gran porcentaje de los errores (Grossnickle, 1941, p. 188).

Resulta muy interesante comparar globalmente los resultados de Grossnickle (1941) con los míos, ya que su investigación (al igual que la de Gómez, 1995), resalta las dificultades que se dan en el ajuste del valor posicional y, en particular, en la operación de la coma decimal. Este tipo de dificultad se produce en el ámbito del cálculo escrito, del cálculo mental, o de la estimación. En particular, en el trabajo de Grossnickle (1941) se atribuyen gran parte de los errores en la colocación del punto decimal, al hecho de que los alumnos

[367] Desde sexto curso de Educación Primaria hasta tercero de ESO en nuestro actual sistema educativo.

[368] He traducido "caret" por "símbolo de inserción". En Estados Unidos, en torno a 1941 era un símbolo muy utilizado (todavía se encuentran muchos ejemplos de su uso) como ayuda para manipular los números decimales. Por ejemplo, el método para escribir un número en notación científica (por ejemplo, 2345) es: Poner un "símbolo de inserción" inmediatamente a la derecha de la primera cifra significativa y escribir el punto decimal (2∧345.); contar las posiciones entre el símbolo y el punto decimal; y escribir el número con el punto decimal en la posición del "símbolo de inserción", multiplicado por 10 elevado al número de posiciones que hay entre el símbolo y el punto decimal (teniendo en cuenta que si el punto está a la izquierda del símbolo, las posiciones contarían como negativas). Así obtenemos: 2.345×10^3.

En la división, el símbolo '∧' se utiliza de la siguiente forma: Si se divide 81.99 entre 0.9, se coloca el símbolo inmediatamente a la derecha de la última cifra del divisor (para eliminar todas las cifras decimales) y después se coloca el símbolo en el dividendo de modo que se dejan el mismo número de cifras entre el punto decimal y el símbolo. Finalmente, el punto decimal del cociente estará justo encima del símbolo del dividendo: 9 1. 10.9∧81.9∧9 utilicen procedimientos mecánicos, desprovistos de significado. Esto enlaza con resultados de investigaciones más recientes, como la de Socas (2007), que indica que una parte importante de los errores "tienen su origen en una ausencia de significado" (p. 49). En la presente investigación, también atribuimos gran parte de los errores (en especial, los del ajuste del valor posicional) al mismo origen, aunque no hemos estudiado el posible origen de los errores.

4. Implicaciones para la investigación

Dentro de las implicaciones de este trabajo para la investigación, se destacan dos temas emergentes del proceso de elaboración del presente estudio y que parecen de interés para futuros estudios: la evaluación de la estimación y las redes de dificultades.

4.1. La evaluación de la estimación

La evaluación de la estimación es un problema abierto, tanto desde el punto de vista docente, como investigador. Se han señalado ya varias dificultades relacionadas con la evaluación al estudiar los errores en estimación. Para empezar, una estimación puede tener un alto grado de *precisión* y haberse producido mediante un procedimiento que contiene un *error*. Esto ocurre, por ejemplo, en los errores en el sentido de la compensación, cuando se da una primera estimación, que posteriormente se intenta ajustar, para compensar la sustitución de los valores iniciales por aproximaciones. Frecuentemente, los ajustes son demasiado pequeños como para convertir una estimación precisa en imprecisa, pero es muy habitual que los ajustes tengan una dirección contraria a la debida, incurriendo en un error que refleja un conocimiento limitado sobre el efecto que produce la alteración de los datos sobre el resultado de una operación (De Castro, 2002). También suelen producirse estimaciones con una gran precisión cuando el alumno emplea la imitación del algoritmo escrito. Cuando en dicha imitación se produce un error importante perteneciente al ámbito del cálculo escrito, a veces no se traduce luego en una estimación imprecisa, por no afectar el error de cálculo a los dígitos de mayor valor posicional.

Por otra parte, la misma idea de *precisión*, en el ámbito de la estimación, es conflictiva. Tomar un porcentaje de error arbitrario, como el 30%, como margen de error admisible, resulta difícil de justificar, a pesar de que dicho porcentaje haya sido elegido en múltiples investigaciones como referencia para distinguir las estimaciones aceptables de las no aceptables. Al final, en la práctica, siempre se encuentran estimaciones con un porcentaje de error muy cercano al 30%, y resulta difícil de justificar por qué se rechazan las que están ligeramente por encima de este margen y se aceptan las que quedan, por poco, dentro del mismo.

La Tabla 8.1 ofrece un resumen tomado del análisis individual de cada uno de los ítems de la prueba de estimación (ver Apéndice E). En dicha tabla aparecen las tareas de estimación, los resultados exactos de los cálculos, redondeados a las milésimas cuando ha sido necesario, los intervalos de respuesta razonable y del 30% de error, y las 'mejores' estimaciones seleccionadas entre las imprecisas. La información de la tabla permite:

1. Ver hasta qué punto los intervalos son idóneos para evaluar un ítem. En caso de que las mejores estimaciones imprecisas estén 'suficientemente lejanas' al intervalo del 30%, este parecerá idóneo para evaluar las estimaciones dadas para dicho ítem. Esto ocurre, por ejemplo, en los ítems 1, 15, 19, 20 y 24. Por ejemplo, si se toma el ítem 24, los intervalos de respuesta razonable y del 30% de error son, respectivamente, [0,15 , 0,25] y [0,14 , 0,26]. Como puede verse (ocurre en todos los ítems del test), el intervalo de respuesta razonable está

incluido en el del 30% de error. Además, los límites de ambos intervalos están muy cercanos, lo cual produce la sensación de que los dos criterios tradicionales para evaluar la estimación resultan prácticamente coincidentes. De hecho, en la aplicación del test no ha habido ninguna estimación que (en este ítem) perteneciese a un intervalo pero no al otro.

Tabla 8.2. *Análisis de estimaciones puntuadas con un cero en la prueba*

Tareas	*Resultado*[369]	*a*	*b*	*Intervalo 30%*	*Intervalo RR*
(1) 46 × 771	35466	9610 (-72,9%)	60000 (69,1%)	[24826,46105]	[28000,46000]
(2) 58 × 244	14152	9524 (-32,7%)	20000 (41,3%)	[9906,18397]	[10000,18000]
(3) 968 ÷ 24	40,333	26 (-35,5%)	53 (31,4%)	[28,2,52,4]	[30,50]
(4) 354 ÷ 88	4,022		6 (49,1%)	[2,69,5,00]	[3,5]
(5) 86 ÷ 222	0,387	0,25 (-35,4%)	0,6 (54,8%)	[0,271,0,503]	[0,3,0,5]
(6) 36 ÷ 258	0,139	0,03 (-78,5%)	0,2 (43,3%)	[0,098,0,181]	[0,1,0,18]
(7) 78,4 × 89,5	7016,8	4800 (-31,5%)	16000 (128%)	[4911,9121]	[5600,9000]
(8) 34,1 × 47,2	1609,52	800 (-50,2%)	2400 (49,1%)	[1126,2092]	[1200,2000]
(9) 85,9 ÷ 3,32	25,116	9,05 (-63,9%)	35 (39,3%)	[18,1,33,6]	[20,33,3]
(10) 96,2 ÷ 6,25	15,392	10 (-35%)	20,5 (33,1%)	[10,77,20,01]	[12,20]
(11) 9,88 ÷ 25,6	0,385	0,25 (-35,2%)	0,556 (44%)	[0,27,0,50]	[0,3,0,5]
(12) 8,85 ÷ 42,6	0,207	0,1 (-51,8%)	0,3 (44,4%)	[0,14,0,27]	[0,16,0,25]
(13) 0,72 × 2,57	1,850	1,23 (-33,5%)	2,42 (30,7%)	[1,30,2,41]	[1,4,2,4]
(14) 0,45 × 7,85	3,532	2 (-43,3%)	5 (41,5%)	[2,47,4,59]	[2,8,4,5]
(15) 0,962 ÷ 0,25	3,848	1,5 (-61%)	31,2 (710,8%)	[2,694,5,002]	[3,5]
(16) 0,747 ÷ 0,35	2,134	1,2 (-43,7%)	2,8 (31,1%)	[1,49,2,77]	[1,5,2,5]
(17) 0,37 ÷ 0,543	0,681	0,4 (-41,2%)	0,9 (32%)	[0,477,0,886]	[0,5,0,8]
(18) 0,63 ÷ 0,785	0,802	0,51 (-36,4%)	1,1 (37%)	[0,56,1,04]	[0,6,1]
(19) 776 × 0,025	19,4	9,004 (-53,5%)	40 (106,1%)	[13,5,25,2]	[14,25]
(20) 852 × 0,048	40,896	20 (-51%)	90 (120%)	[28,62,53,16]	[32,50]
(21) 0,46 ÷ 0,066	6,969	4,6 (-34%)	10 (43,4%)	[4,87,9,06]	[5,9]
(22) 0,68 ÷ 0,024	28,333	17 (-40%)	40 (41,1%)	[19,8,36,8]	[20,35]
(23) 0,059 ÷ 0,23	0,256	0,133 (-48,1%)	0,4 (55,9%)	[0,17,0,33]	[0,2,0,3]
(24) 0,086 ÷ 0,42	0,204	0,1 (-51,1%)	0,36 (75,8%)	[0,14,0,26]	[0,15,0,25]

a es el máximo de las estimaciones menores que el extremo inferior del intervalo del 30%.
b es el mínimo de las estimaciones mayores que el extremo superior del intervalo del 30%.

Si se comprueba cuáles han sido, para este ítem, las mejores estimaciones entre las imprecisas, deben recuperarse, de la Tabla 8.1, las estimaciones de 0,1 (una subestimación con un error del 51,1%) y 0,36 (75,8% de error). El hecho de que los dos intervalos para evaluar casi coincidan, y que no haya estimaciones demasiado cercanas a dichos intervalos que generen dudas sobre su

[369] En esta tabla, 'resultado' quiere decir resultado exacto del cálculo truncado en las milésimas.

aceptabilidad y, por tanto, cuestionen el criterio de evaluación, indica que el criterio de evaluación ha sido bueno para el ítem.

En el extremo contrario hay ítems como el 3, 10, 13, o el 18. Si se toma uno de ellos, el 13 por ejemplo, el intervalo de respuesta razonable es el [1,4 , 2,4] y el del 30% de error es el [1,30 , 2,41]. Resulta que dos estimaciones que se han dado han sido 1,23 (con un 33,5% de error) y 2,42 (con un error del 30,7%). En este caso, resulta claro que los intervalos quedan cuestionados en su idoneidad para evaluar la estimación, dado que la estimación de 2,42, según el sistema de evaluación, merece 0 puntos, cuando una estimación de 2,41 se llevaría 1 punto y una estimación de 2,4 se puede obtener mediante una estrategia comúnmente aceptada (redondeando hacia arriba ambos datos: 0,72 × 2,57 sustituido por 0,8 × 3 = 2,4). En este caso cabría preguntar: ¿Por qué es válido un 30% como margen para evaluar y no se acepta un 30,7%?

Por otra parte, utilizar solo el porcentaje de error (sin límites como el del 30%) conlleva también cierta problemática que ilustraré con un ejemplo. Para estimar el resultado de 0,025 × 776, el Alumno 29 hace:

Entrevistador: 0.025 × 776

Alumno 29: 0,025 lo... subo a... 30 y 776 lo subo a 800. Sería 800 por 30. 3 por 8, 24. 24... y, como es una multiplicación con decimales, pues sería, cuento los decimales, los números que hay detrás del cero coma, que son tres.

Estimación: 0,024; 99,9% error

Para este mismo cálculo, el alumno 9 da la siguiente estimación:

Entrevistador: 0.025 × 776

Alumno 9: Esto es próximo a 1000 por... por 0,03. Sería 1000 por 0,03... a 3000.

Estimación: 3000; 15363,9% error

Para la misma tarea (0.025 × 776), en la que el intervalo de respuesta razonable es el [14 , 25], y el intervalo del 30% de error es [13,5 , 25,2], ambas estimaciones (0,024 y 3000) son igual de 'irrazonables'. Ambas pueden considerarse el resultado de una estrategia incompleta, donde lo único que las diferencia es el paso que falta. Así, para el alumno 29 se omite del proceso la parte en negrita: 0.025 × 776 = (30 × 800) ÷ 1000 = (3 × 8) **×1000** ÷ 1000 = 0,024. Mientras tanto, para el alumno 9 se omite la división final, responsable de recuperar la coma decimal: 0,025 × 776 = 0,03 × 1000 = (3 × 1000) **÷ 100** = 3000. Los dos errores pueden considerarse procesos incompletos, y parecen igual de 'graves'. Sin embargo, desde el punto de vista del porcentaje de error, dado que la primera estimación es una subestimación, su porcentaje de error se mantiene, por definición, siempre por debajo del 100% (es de un 99,9%). Sin embargo, en el otro error, que conduce a una sobrestimación, el porcentaje de error no está limitado, y en este caso se 'dispara' al 15363,9%. Por esta razón, el porcentaje de error no es adecuado para evaluar la precisión de las estimaciones. El porcentaje de error, tomado tal cual, 'castiga severamente' las sobrestimaciones en relación con las subestimaciones.

Las formas habituales de determinar un *intervalo de respuesta razonable*[370], limitado por el mínimo y el máximo de estimaciones producidas mediante estrategias comúnmente aceptadas, tiene también inconvenientes. El más importante de ellos, decidir cuando una estrategia, comúnmente aceptada, es o no adecuada para un cálculo.

Todo lo dicho hasta ahora sobre la evaluación de la estimación, se refiere a la evaluación de tareas de respuesta abierta, en las que solo se tiene en cuenta la estimación en sí, el resultado, pero no el proceso que da lugar a la misma. El

[370] Esta es una alternativa al uso del porcentaje de error para evaluar la estimación.

panorama sobre evaluación de la estimación se enriquece cuando se incluyen otros formatos de respuesta, como los ítems de elección múltiple, o cuando se tiene en cuenta el procedimiento que ha utilizado el estimador, opción que para algunos autores es la única válida para evaluar la estimación.
En este sentido, Schoen (1994), después de varios trabajos dedicados a la evaluación de la estimación, concluye:

> Los métodos alternativos de evaluación, que implican la observación de alumnos o grupos de alumnos según actúan ante una situación problema, parecen prometedores. En estos enfoques, se da a los alumnos o al grupo de alumnos una situación problema apropiada para estimar. Los observadores deben juzgar entonces la actuación de los alumnos o el grupo holísticamente, con la estimación como un componente de la evaluación. (p. 97)

4.2. Las dificultades en estimación y las 'redes de dificultades'

En este trabajo, he estudiado solo un tipo de dificultades asociadas a la estimación: las dificultades semióticas (para ver con detalle estas dificultades, se puede consultar el Apéndice E o De Castro, Castro y Segovia, 2009). Se han encontrado tres tipos de dificultades semióticas:
1. La producción de expresiones que mezclan registros como resultado de una conversión incompleta. Esta dificultad se da, por ejemplo, cuando un alumno sustituye 0,46 ÷ 0,066 por 1/2 ÷ 0,01. Independientemente de que haya un error en la sustitución de 0,066 por 0,01, el problema es que para la división 1/2 ÷ 0,01 no se puede aplicar directamente la regla de la división por potencias de 10, que en este caso consistiría en mover la coma del dividendo dos lugares a la derecha (cuando el dividendo no tiene coma decimal), ni tampoco aplicar directamente el algoritmo de división de fracciones. El alumno ha aplicado una

conversión, con un cambio del registro fraccionario al decimal aplicado solo al dividendo y esto le ha dado lugar a una expresión mixta difícil de manejar sin completar la conversión del divisor, o dar marcha atrás a la del dividendo.

2. La confusión de dividir por una fracción con aplicar dicha fracción como operador al dividendo. Esto se produce cuando el alumno sustituye 100 ÷ 1/5 por 1/5 de 1000 = 200. Parece que, ante una ausencia de significado de dividir por 1/5, se 'elimina' el signo de división y se aplica la fracción 1/5 como operador a 1000.

3. El que he llamado efecto "0,0". Consiste en comenzar cualquier división de un número por otro mayor con 0,0. Parece que el "0," es lo que se debe poner cuando se comienza una división de un número por otro mayor, y que el segundo cero, añadido después de la coma, es el que hay que añadir para "bajar" la siguiente cifra del dividendo.

He llamado "semióticas" a estas dificultades por guardar estrecha relación con los cambios en los registros de representación, o con la atribución de significados a las operaciones o a los pasos que se dan en los algoritmos de las mismas. El análisis de dificultades semióticas puede ser un primer paso prometedor para un estudio más completo que aborde todos los tipos de dificultades asociados a los procesos de estimación. Puede seguirse para ello la línea de los trabajos sobre dificultades de Socas (1997) y Socas (2007). En todo caso, las dificultades que se han encontrado ponen de manifiesto una dificultad global asociada a la estimación: Por un lado, se debe manejar una matemática de precisión (que busca resultados exactos), asociada a una matemática que no es de precisión (que requiere resultados razonablemente próximos al exacto), y una matemática algorítmica (la del cálculo escrito), que choca con una matemática con significado (la de la estimación y el sentido numérico). Esto hace ver que el campo de la estimación es particularmente atractivo para profundizar en el estudio de las dificultades en Matemáticas.

Más allá de las dificultades semióticas, una idea[371] que queda apuntada para futuras investigaciones, sobre las dificultades en matemáticas, es la existencia de "redes de dificultades y errores" en el aprendizaje de las matemáticas. La idea de que la dificultad (y el error) no es algo singular, aislado, sino que más bien las dificultades están unidas y tienen una estructura (una organización) que hace que sean resistentes, se encuentra en Bachelard, así como en autores actuales. Así, Bachelard (1938/1999) indicaba que "El equilibrio de los cuerpos flotantes es objeto de una intuición familiar que es una maraña de errores" (p. 21). En otra obra, más claramente, Bachelard (1940/1993) se refiere a la situación que trato de describir: "…la ignorancia es una trama de errores positivos, tenaces, solidarios. …las tinieblas espirituales poseen una estructura… Los errores no se destruyen uno a uno con facilidad. Están coordinados" (p. 11).

Aunque esta idea no haya sido todavía desarrollada completamente, y aplicada a la Didáctica de las Matemáticas, sí ha sido apuntada por varios autores. Así, Socas (1997) sostiene que las "dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (p. 125). También se encuentra un planteamiento similar en el filósofo americano Rescher (2007), en su estudio sobre el error:

> No solo las acciones individuales, sino los procesos completos de establecimiento de creencias pueden ser erróneos. Precisamente este es el caso de aquellos atrapados en falacias de razonamiento de cualquier tipo. Uno puede equivocarse, por tanto, no solo puntualmente en determinada creencia, acción, o evaluación, sino también en lo que respecta al modo

[371] Pienso que tiene valor apuntar esta idea que, si bien no está directamente relacionada con las dificultades semióticas, objeto de estudio en este trabajo, ha estado presente en todo el desarrollo del mismo.

> general en que procede en estos asuntos. Un individuo inclinado a determinada falacia genérica en la formación de sus creencias puede eventualmente llegar a ver 'el error de esta manera'. Tales errores sistémicos son, por supuesto, más grave porque, al igual que las penas en Shakespeare, 'no llegan solos como espías, sino en batallones' (p. 3)

Pienso, después de haber revisado la literatura sobre el aprendizaje de los números decimales, que uno estos errores sistémicos, a los que se refiere Rescher (2007), basados en "falacias de razonamiento" y que se convierten en surtidores de dificultades y errores, es la aplicación del razonamiento analógico para promover el aprendizaje de los números decimales, partiendo del conocimiento de los números naturales. Este modo analógico de entender los decimales como "números naturales con coma" ha sido duramente criticado por G. Brousseau, N. Brousseau y Warfield (2004):

> Tan pronto como se introduce y explica la manipulación formal de un concepto u operación en una situación particular se apresura a presentar a los alumnos junto con todos los demás usos formalmente similares como "aplicaciones" o incluso "re-etiquetamientos" de la misma idea. Así, tan pronto como se introduce la división en los números naturales se convierte para los maestros en la división, sin importar que las circunstancias y las estructuras están en el "qué" se está usando [dividiendo], e incluso si las propiedades se han modificado drásticamente sin que los alumnos lo hayan advertido…
>
> Pero a nuestro parecer, el procedimiento didáctico de extender de forma "analógica" o "metafórica" el uso del conocimiento carece de valor matemático. ¿Es realmente necesario estafar a los alumnos en este punto? ¿Es realmente necesario hacerles cargar con la responsabilidad de no comprender como idénticos objetos que son en realidad muy diferentes, pero que deseamos confundir? ¿Es realmente necesario declarar que

> aquello que resulta simplemente familiar para nosotros debería ser lógicamente claro para ellos?
> Nosotros pensamos que no. Y por ello quisimos mirar cada uno de los diferentes aspectos matemáticos de los usos que se hacen de las fracciones y los números racionales en el currículo obligatorio, tratando cada uno de ellos como un problema específico (p. 20).

Parafraseando una cita anterior de Bachelard (1938/1999), podría decirse que la "intuición familiar" del número decimal como "número natural con coma" puede conducirnos a una "maraña de errores" al abordar el estudio de los números decimales. El tema de que una intuición pueda ser fuente de errores, ha sido también tratado por Fischbein (1987):

> … las analogías pueden ser la fuente de ideas equivocadas cuando se asumen correspondencias que en realidad no son parte de la correspondencia estructural entre los dos sistemas. A menudo estas ideas equivocadas surgen de una incompatibilidad entre una propiedad formal del sistema modelizado y una propiedad intuitiva de la representación modelizante, que está guiando consciente o tácitamente los procesos cognitivos (p. 142).

Por ejemplo, cuando se buscan materiales manipulativos para comprender mejor los números decimales, suele recomendarse que se reutilicen materiales que ya se empleaban para representar los números naturales como los Bloques aritméticos de base 10 de Dienes, las Regletas de Cuisenaire y los ábacos (Centeno, 1988). En estos casos, el nuevo uso del antiguo material pasa por re-etiquetar lo que antes se llamaban centenas (o decenas en el caso de las Regletas de Cuisenaire) para ahora llamarlo "unidades". Estos materiales solo representan adecuadamente aquellas relaciones comunes a los números naturales y a los decimales (como que al sumar 10 unidades de un orden se obtiene una unidad del orden inmediatamente superior). Sin embargo, dado que todos estos materiales tienen un número de órdenes de unidades finito, ninguno de ellos es adecuado para representar un aspecto matemático como la densidad del conjunto de los números racionales, uno de los aspectos en los que se diferencia este conjunto numérico del de los números naturales. Así, este tipo de materiales surge de la analogía de los números naturales y los decimales y refuerza las dificultades que supone el paso de un conjunto numérico al otro pues, por ejemplo, si se utilizan los Bloques de base 10 de Dienes, con el cubo grande como unidad, se tendría que admitir que el número decimal siguiente de 1,467 es el 1,468, pues no se puede representar con dicho material ningún número entre ambos, al no existir en el material objetos que representen unidades de órdenes inferiores a las centésimas.

Una alternativa, para evitar estos efectos negativos de las representaciones manipulativas, es utilizar la recta numérica como modelo para los números decimales. También hay autores que han diseñado un material específico para los números decimales (que no se utilice para los números naturales). Este es el caso de los Bloques Aritméticos Lineales[372] de Stacey, Helme, Archer y Condon (2001).

Se deja pues apuntada, para futuras investigaciones, esta línea de trabajo de caracterizar las "redes de dificultades", e identificarlas en la práctica, como medio para mejorar la planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula. Considero que las dificultades semióticas que he identificado en este trabajo, constituirán una faceta de dichas redes de

[372] http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/decimals/slimversion/teaching/models/lab.html En esta página pueden verse las características de este material. Dicho material, aún aceptando que suponga una mejora sobre el uso de los Bloques de base 10 de Dienes, tampoco serviría para modelizar la densidad del conjunto de los racionales, algo que sí se puede hacer en una recta numérica.

dificultades. Pienso que el punto de vista del análisis semiótico permite enfocar problemas clásicos de la didáctica de las matemáticas desde un punto de vista novedoso, como ocurre en este caso con el problema de la división por números decimales menores que uno.

5. SUGERENCIAS FINALES E IMPLICACIONES PARA LA DOCENCIA

Empezamos este último apartado con algunos comentarios y sugerencias para abordar, especialmente con los maestros en formación, la problemática tratada en este trabajo. Después pasaremos a las implicaciones de esta investigación para la docencia.

5.1. Sugerencias finales para la docencia

En algunos manuales para la formación de maestros en Didáctica de la Matemática publicados en España (Castro, 2001; Cid, Godino y Batanero, 2003 y Chamorro, 2003) los errores y obstáculos que tienen los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas se convierten en objeto de estudio incorporándose de manera explícita a la teoría y a los problemas de didáctica que deben estudiar los futuros maestros.

También se han hecho esfuerzos importantes por producir materiales prácticos para la formación de maestros que, con formato de "taller de actividades", plantean situaciones y problemas didácticos que invitan a los futuros maestros a reflexionar sobre algún aspecto de las operaciones en el que se suelen plantear dificultades (Ruiz y Rodríguez, 1998, pp. 72-79). Tomando como punto de partida la idea de este "taller sobre la división euclídea" de que los maestros analicen las producciones de los alumnos, se presentan a continuación algunas situaciones que pueden servir para que los maestros estudien contenidos matemáticos, tomando como partida situaciones de clase, cuya comprensión deficiente les ha conducido a cometer errores del tipo de los que he visto en el análisis de errores en tareas de estimación. Para dar cierta unidad a la exposición se ha elegido una situación que hace referencia a la colocación de la coma decimal en la multiplicación y tres situaciones de clase relacionadas con el "resto de una división".

La situación de clase que trata el problema de la colocación de la coma decimal en la multiplicación está tomada del trabajo de Markovits y Even (1999):

> A un alumno se le dijo que 15,24 × 4,5 = 6858, y se le pidió que colocara él la coma decimal. El alumno contestó que la respuesta era 6,858 porque había dos lugares decimales después de la coma decimal en 15,24 y un lugar después de la coma decimal en 4,5 y que juntos hacen tres lugares detrás de la coma decimal en la respuesta. ¿Cómo le responderías?
>
> 1. Yo diría al niño. Has colocado bien la coma decimal y también lo has explicado muy bien.
> 2. Yo pediría al niño que tomara dos números enteros próximos a los números que le han dado y que los multiplicara. Después le pediría que comparara los dos ejercicios y que me dijera qué pensaba que había pasado.
> 3. Yo le diría al niño que la multiplicación de las partes enteras de los números (15 × 4) es 60 de modo que obtenemos más de 60 y el resultado debería ser 68,580. Luego le explicaría que 68,580 es lo mismo que 68,58.
> 4. El niño no sabe multiplicar números decimales. Yo le daría varios ejercicios y le pediría que los resolviera utilizando el algoritmo estándar.
> 5. Yo le diría al niño: "Has utilizado una regla correcta pero tu respuesta no es correcta, por que cuando multiplicas 4 por 5 te queda un cero al final. El cero no aparece en tu respuesta y es por eso por lo que tuviste un fallo en la colocación de la coma decimal. La solución es 68,580.

Esta es una situación que se plantea con maestros en formación al estudiar la multiplicación con decimales. El objetivo era discutir sobre el papel que tienen las reglas que suelen aprenderse de memoria y el sentido numérico. Las respuestas que aparecen en esta versión de la tarea han sido dadas por maestros ante la pregunta inicial en cursos de formación de maestros y han sido ligeramente adaptadas para poner un énfasis mayor en determinados aspectos de interés para el profesor.

Llinares (2003, pp. 11-13) plantea la situación que se da en una clase de matemáticas de sexto de Educación Primaria cuando los alumnos tienen que realizar la operación 7,304 ÷ 23,1. Los alumnos mueven la coma en el dividendo y en el divisor para pasar a la operación 73,04 ÷ 231. Una vez realizada la operación, una alumna pregunta a la maestra dónde se ha equivocado, ya que cree haberlo hecho todo bien pero no le sale la prueba de la división. Esta es una situación que el autor propone para invitar a los futuros maestros a pensar acerca de la relación que hay entre "la manipulación de las comas en el dividendo y el divisor" (p. 13) y el "valor de las unidades en el sistema de numeración posicional" (p. 13).

Lampert (2001, p. 9-28) describe una situación que puede también utilizarse con gran provecho en la formación de maestros. Un grupo de 25 alumnos de quinto de primaria tratan de resolver el siguiente problema:

> Un coche va a 55 millas por hora. Haz un diagrama que muestre dónde estará:
>
> A. Una hora después.
>
> B. Dos horas después.
>
> C. Media hora después.
>
> D. 15 minutos después.

Cuando los alumnos han determinado que el coche habrá recorrido 110 millas en dos horas y 27,5 millas en media hora, se produce un desacuerdo entre los niños. Uno de ellos hace la mitad de 27,5 separando este número en partes para las que conoce la mitad (26 + 1 + 0,5) para obtener un resultado de 13,75 millas. Otra niña vuelve al 55 de partida y lo divide por 4. El cociente de esta división es 13 y el resto es 3. La alumna escribe la solución del problema como 13,3 (confundiendo el resto de la división entera con la primera cifra decimal del cociente).

Otro ejemplo interesante para plantear en clase es el ofrecido por Sharp (1998). Este autor propone una secuencia para el aprendizaje de un algoritmo alternativo para la división de fracciones. Empleando un modelo de medida para la división y la representación de fracciones en forma de sectores circulares, se llega a un algoritmo que consiste, básicamente, en reducir las fracciones que se deben dividir a común denominador y tomar como resultado de la división la fracción que resulta de dividir los numeradores de las fracciones resultantes.

> ...no podemos realizar directamente la división $3/4 \div 1/6$. Podemos, sin embargo, escribir ambas fracciones como doceavos y así convertir el ejercicio dado en otro de aspecto familiar para los niños para el que no tendremos problema en encontrar una solución. Podemos ver que $2/12$ cabe en $9/12$ un total de cuatro veces y media. Por lo tanto, $3/4 \div 1/6$ es equivalente a $9/12 \div 2/12$ y la solución es $4\ 1/12$ (pp. 199).

Algunos maestros en formación, al proponer que realicen operaciones con sectores circulares como esta, dan la solución 4 1/12. Interpretan que la parte que queda por medir (1/12), que es menor que la unidad de medida que considerada (1/6), y que debe ser medida utilizando una fracción de la "unidad de medida" que se utiliza para medir en este problema (1/6) para dar una medición de 1/2 , se puede "incorporar directamente al cociente".

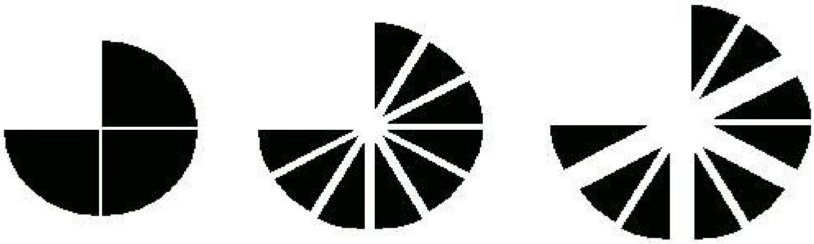


Figura 8.1. Representación de la operación ¾ ÷ 1/6 con sectores circulares.

Este último ejemplo es otra manifestación del mismo problema visto en el ejemplo de Lampert (2001) con niños pequeños en un contexto distinto. Este tipo de situaciones, en las que se trata con contenidos matemáticos propios de la Educación Primaria (y en las que los maestros en formación tienen dificultades parecidas a las que se les plantean a los alumnos de Educación Primaria), resultan muy adecuadas para incluir para la discusión en los cursos de formación de maestros del modo en que se trata en el trabajo de Llinares (2003).

Con respecto al punto anterior (el ejemplo de división con fracciones empleando un modelo de medida), cabe decir de acuerdo con Ma (1999) que el conocimiento pedagógico no puede reemplazar al conocimiento de la materia. En este sentido, señala que en su investigación sobre la comprensión de los maestros sobre conceptos básicos de Educación Primaria:

> La deficiencia en la comprensión de los maestros del significado de la división de fracciones determinó su incapacidad para producir una representación apropiada... Las representaciones que empleaban los maestros con pizzas o tartas mostraban ideas equivocadas... [Como, por ejemplo, que dividir por ½ es hacer la mitad]. Para generar una representación, uno debe saber en primer lugar qué debe representar.

> Durante las entrevistas los maestros propusieron varias ideas pedagógicas para producir representaciones. Desafortunadamente, debido a las deficiencias de su conocimiento de la materia, ninguna de estas ideas les condujo al éxito en la generación de una representación apropiada [para la división de fracciones].

Así, debe tenerse cautela al emplear representaciones manipulativas (como los sectores circulares para las fracciones) y no dar por supuesto que el uso de este tipo de materiales puede, por sí mismo, facilitar una comprensión adecuada de los conceptos que, a veces ingenuamente, se piensa que representan. Además, se debe considerar también que el planteamiento de situaciones de clase, reales o hipotéticas, dentro de actividades diseñadas para la formación de maestros en Didáctica de las Matemáticas debe tener como uno de sus objetivos fundamentales que el alumno pueda "hacer matemáticas" y reflexionar sobre el contenido matemático como primer paso para poder reflexionar después sobre el contenido didáctico.

5.2. Implicaciones para la docencia

En primer lugar, una de las ideas que destacaría de este trabajo para la docencia en Educación Matemática para maestros de educación primaria, y en la formación didáctico-matemática de los maestros de educación secundaria, es que el ámbito de la estimación es perfecto para abordar el tema de la *evaluación en matemáticas*. La evaluación de la estimación es un problema abierto para la investigación. Dentro de la estimación, hay muchos aspectos diferentes que evaluar: la razonabilidad de una estimación, la precisión de la misma, la adecuación de una estrategia para un contexto práctico, el conocimiento de diversas estrategias, etc. Una característica fundamental de la estimación es que sus problemas aceptan distintas respuestas válidas, obtenidas por métodos diferentes. Todavía no está resuelta la cuestión de establecer unos límites para la aceptabilidad de las estimaciones. Los porcentajes de error y los intervalos de respuesta aceptable/razonable han sido los intentos más frecuentes de resolver este problema, aunque todavía no hay un consenso general sobre el uso de ninguno de ellos.

Pienso que el hecho de ser la estimación un campo, dentro de las matemáticas, no conocido por muchos alumnos, incluido en el currículo, y polémico en su evaluación, hace que tenga este especial interés de cara a aprovecharlo para estudiar la evaluación en matemáticas.

En este sentido, en los distintos cursos en que he enseñado estimación y, en particular, dentro del periodo de instrucción sobre estimación de esta tesis, un tipo de actividad que ha "funcionado[373] siempre muy bien" ha sido plantear en gran grupo un problema de estimación. Los alumnos dan estimaciones que el profesor apunta en la pizarra. En cuanto hay dos o tres estimaciones diferentes, los alumnos se animan bastante a participar al ver que, en principio, se acepta cierta variedad de soluciones. Después, el profesor va señalando las estimaciones y pidiendo a los que las han dado que expliquen cómo la han producido. Ya en esta fase, hay alumnos que reconocen haberse equivocado (la estimación se marca) o alumnos que no defienden su estimación (se marca también). Finalmente, se produce una discusión en gran grupo donde se va

[373] "Funcionar bien", en este contexto, quiere decir que ha sido un tipo de actividad con mucha participación en clase, en la que además han participado alumnos que en general participan poco, o alumnos que reconocen ser "malos en matemáticas". Significa también que ha sido una actividad en la que los alumnos han razonado al defender sus estimaciones, se ha trabajado bastante el aspecto de la expresión verbal, y que ha tenido un componente didáctico de aprender unos alumnos los procedimientos de otros. También que ha sido una actividad extremadamente motivadora para algunos alumnos, que no sabían que podían destacar en algún aspecto matemático, y que a partir de ella, han sentido incluso la admiración de sus compañeros, etc. Es un comentario que hago más como profesor que como investigador, pero que aún así me parece una aportación interesante de cara a la docencia en magisterio.

discutiendo qué estimaciones se aceptarían y cuáles no, razonando el porqué de cada caso. Entre los alumnos y el profesor se llega a un intervalo de respuesta razonable más o menos consensuado.

Otro tema que he tratado, al estudiar los errores en la fase de evaluación, es que los estudiantes no suelen evaluar la razonabilidad de sus estimaciones. Esto coincide con resultados de otras investigaciones como la de Levine (1980). En mi trabajo, casi en cada error, podría ponerse otro de "ausencia de evaluación de la razonabilidad de la estimación final". Esta habría sido, sin duda, la categoría con más incidencia. Según he visto en diversos documentos curriculares, al justificar el interés de la investigación, uno de los objetivos de la incorporación de la estimación en el currículo, es su uso para evaluar la razonabilidad de los resultados. El análisis de la razonabilidad de los resultados es un tema transversal en matemáticas, que afecta a todos sus campos, y que debería suponer un cambio en las prácticas de aula. Ante cada tarea matemática, se debería ser capaz de delimitar unos márgenes dentro de los cuales se pueda encontrar el resultado del problema, que nos sirvan para evaluar la razonabilidad del resultado finalmente hallado e incluso, en ocasiones, para orientar el proceso de resolución.

Un tercer aspecto del trabajo del que se extraen implicaciones para la docencia es la amplia problemática detectada en los alumnos de magisterio con el ajuste del valor posicional (y en particular, con la operación de la coma decimal). En este trabajo he encontrado 8 tipos diferentes de errores en el ajuste del valor posicional. El salto de los números naturales a los decimales y, en especial, a los decimales menores que uno, con sus peculiaridades estudiadas en este trabajo, produce serias dificultades en los maestros en formación.

Pienso que la estimación, si se estudia orientada a promover el valor matemático del control, para evaluar la razonabilidad de otros procedimientos, y estrechamente vinculada al sentido numérico, puede ser un ingrediente más (aunque no el único) para la adecuada comprensión de los números decimales. Digo que no el único, pues creo, como he dicho en las sugerencias del apartado anterior, que algunos materiales y recursos didácticos, que se utilizan igualmente (con mínimas adaptaciones) para los números naturales y para los decimales (como los bloques de base 10 o las regletas de Cuisenaire) contribuyen a pensar los decimales como números naturales y plantean, a mi juicio, obstáculos didácticos, más que beneficios, en el estudio de los números decimales.

REFERENCIAS

Abed, A. S. (1985). An evaluation of the suitability of two decimal division quotient estimation techniques for seventh graders, and their effect upon calculation errors. (Doctoral dissertation, The Florida State University, 1985). *Dissertation Abstracts International, 46A*, 1548. (DA8517333).

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 25-61.

Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263-283.

Alajmi, A., & Reys, R. E. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 77–94.

Albertson, A. M. (1996). Computational estimation: A comparison of learning disabled students and controls. *Masters Abstracts International, 34/04*, 1353. (DA1378541)

American Psychological Association[374] (2002). *Manual de estilo de publicaciones de la American Psychological Association* (2ª ed.). México: Manual Moderno.

[374] Esta referencia y la siguiente no están citadas en el texto. A lo largo de todo el trabajo se han utilizado como referencia de estilo, junto con otros documentos que también aparecen en este listado de referencias, que detallan aspectos específicos de las normas APA, como Nicol y Pexman (2007a), sobre elaboración de tablas, y Nicol y Pexman (2007b), sobre presentación de resultados.

American Psychological Association (2010). *Manual de publicaciones de la American Psychological Association* (3ª ed.[375]). México: Manual Moderno.

Anderson, O. D. (1992). Accuracy and precision. *Teaching Statistics, 14*(3), 2-5.

Anguera, M. T. (1995). Metodología cualitativa. En M. T. Anguera, J. Arnau, M. Ato, R. Martínez, J. Pascual & G. Vallejo, *Métodos de investigación en psicología* (pp. 513-522). Madrid: Síntesis.

Antibi, A. (2005). *La constante macabra o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. Madrid: El rompecabezas.

Arce, J., Castrillón, G., y Vega, M. (2002). Construcción histórica del uno y la unidad: perspectivas aritmética y geométrica. *LEMA, 1*(2)[376].

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-meta-cognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction, 9*(2), 137-175.

Ashlock, R. B. (1998). *Error patterns in computation* (7th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Díada.

Ausubel, D. P. (1968/2002). *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Bachelard, G. (1940/1993). *La filosofía del no*. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Bachelard, G. (1938/1999). *La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (22ª ed.). México, DF: Siglo XXI.

Balluerka, N. (1999). *Planificación de la investigación: la validez del diseño.*

[375] Esta es la tercera edición de los Manuales de estilo de la American Psychological Association (APA) por la Editorial Manual Moderno, de México. Realmente, es la traducción de la sexta edición en inglés.

[376]Referencias Disponible en: http://www.scm.org.co/lema/construchistuno.htm

Salamanca: Amarú.

Bana, J., & Dolma, P. (2004). The Relationship between the estimation and computation abilities of year 7 students. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (eds.), *Mathematics Education for the Third Millennium, Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 63-70). Sydney: MERGA.

Baroody, A. J. (1985). Early *addition Estimates: Retrieval or Problem Solving?* Paper presented at the Biennial Meeting of the Society for Research in Child Development (Toronto, Ontario, Canada, April 25-28, 1985).

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 75-112). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Behr, M. J. (1989). Reflections on the conference. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 85-88). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Bell, A. W., & Beeby, T. (1979). *Two approaches to the teaching of decimal multiplication*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129-147.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 434-449.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 399-420.

Benton, S. (1986). A summary of research on teaching and learning estimation. In H. L. Schoen, & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation: 1986 Yearbook* (pp. 16-30). Reston, VA: NCTM.

Ben-Zeev, T., & Star, J. R. (2001). Spurious Correlations in Mathematical Thinking. *Cognition & Instruction, 19*(3), 253-275.

Berry, R. Q., III (1999). Computational estimation skills of eighth-grade students. (Master's thesis, Christopher Newport University, 1998). *Masters Abstracts International, 37/01*, 41. (DA1391427).

Bestgen, B., Reys, R. E., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1980). Effectiveness of systematic instruction on attitudes and computational estimation skills of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(2), 124-136.

Bisanz, J., & LeFevre, J.-A. (1990). Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition. In D. F. Bjorklund (ed.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (pp. 213-244). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bishop, A. (2001). What values do you teach when you teach mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 93-104). London & New York: RoutledgeFalmer.

Bliss, J., Monk, M., & Obgorn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research: A guide to uses of systemic networks*. London & Sydney: Croom Helm.

Bobis, J. (1991). The effect of instruction on the development of computational estimation strategies. *Mathematics Education Research Journal, 3*(1), 17-

29.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology, 41*(6), 189-201.

Borasi, R. (1985). Using errors as springboards for the learning of mathematics: An introduction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 7*(3-4), 1-14.

Borasi, R. (1986). Algebraic explorations of the error $1\cancel{6} / \cancel{6}4 = 1/4$. *Mathematics Teacher, 79*, 246-248.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 2-8.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Bouvier, A., & George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal.

Brame, O. H. (1986). Computational estimation strategies used by high school students of limited computational estimation ability. (Doctoral dissertation, North Texas State University, 1986). *Dissertation Abstracts International, 47A*, 1228. (DA8616027).

Bredekamp, S. (2004). Standards for preschool and kindergarten mathematics education. In D. H. Clements, & J. Sarama (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 77-82). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 1–20.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 281-300.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 3. Rationals and decimals as linear functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(3), 153-176.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2009). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 4. Problem solving, composed mappings and division. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*, 79-118.

Brousseau, N., y Brousseau, G. (1987). *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux: Université de Bordeaux I & IREM de Bordeaux.

Brueckner, L. J. (1928). Analysis of difficulties in decimals. *Elementary School Journal, 29*, 34-41.

Brueckner, L. J., & Grossnickle, F. E. (1953). *Making arithmetic meaningful*. Philadelpia: The John C. Winston Company.

Buchanan, A. D. (1978). *Estimation as an essential mathematical skill (Position paper 39)*. Los Alamitos, CA: Southwest Regional Laboratory for Educational Research and Development. (No. de servicio de reproducción de documentos ERIC ED 167 385)

Buela-Casal, G., y Sierra, J. C. (Dirs.)(1997). *Manual de evaluación psicológica: Fundamentos, técnicas y aplicaciones*. Madrid: Siglo XXI.

Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies y curvilínies. Procediments, recursos i estratègies*. Tesi Doctoral. Bellaterra, Barcelona: Dep. Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals, UAB. http://www.tdx.cesca.es/TDCat-0224103-185956/

Callís, J. y Fiol, M. L. (2003). Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (eds.), *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 161-169). Granada: Universidad de Granada.

Cambridge International Dictionary of English (1995). Cambridge: Cambridge University Press.

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. (1976). Notes from national assessment: Estimation. *Arithmetic Teacher, 23*(4), 296-302.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heineman.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heineman.

Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Case, R. (1989). *El desarrollo intelectual. Del nacimiento a la edad madura*. Barcelona: Paidós.

Case, R., & Sowder, J. (1990). The development of computational estimation: A neo-piagetian analysis. *Cognition and Instruction, 7*(2), 79-104.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de Magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 119-141). Granada: Comares.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers[377] (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: NGA Center & CCSSO.

Chamorro, M. C. (Coord.) (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación.

Chandler, D. G., & Brosnan, P. (1994). Mathematics textbook changes from before to after 1989. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 16*(4), 1-9.

Chien, Y. C. (1990). *The use of self-study material for improving the computational estimation skills of preservice teachers*. Doctoral dissertation. Columbia University.

Clarkson, P. C. (1992). Unknown/careless errors in a mathematical language context: Further investigation. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 14*(4), 3-16.

Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27*(1), 87-102.

Cockburn, A. D. (1999). *Teaching mathematics with insight: Te identification diagnosis and remediation of young children's mathematical errors*. London: Falmer Press.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*.

[377] Disponible en: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf Consulta hecha el 31-8-2011.

Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and psychological measurement, 20*, 37-46.

Cohen, J. (1977). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (Rev. ed.). New York: Academic Press.

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin, 112*(1), 155-159.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Coll, C. (1995). *Psicología y currículum*. Barcelona: Paidós.

Comisión Episcopal de Liturgia (1985). *Ritual de los sacramentos. Textos litúrgicos oficiales* (Volumen preparado por Andrés Pardo). Madrid: Editorial Católica.

Cortés, J. (2001). *Análisis de las estrategias de cálculo estimativo que utilizan estudiantes de 2º de secundaria en Baja California*. Ensenada, Méjico: Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo, Universidad Autónoma de Baja California.

Disponible en: http://eduweb.ens.uabc.mx/egresados/index.html

Cortés, J., Backhoff, E, y Organista, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes del nivel secundaria de Baja California. *Educación Matemática, 16*(1), 149-168.

Cortés, J., Backhoff, E, y Organista, J. (2005). Análisis de estrategias de cálculo estimativo en escolares de secundaria considerados buenos estimadores. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 10*(25), 543-558.

D'Hainaut, L. (1978). *Estimación y redondeo en cálculos numéricos*. México: Trillas.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1998). Smart problem solving: How metacognition helps. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 47-68). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Davidson, J. E., Deuser, R., & Sternberg, R. J. (1996). The role of metacognition in problem solving. In J. Metcalfe, & A. P. Shimamura (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 207-226). Cambridge: MIT Press.

Deaño, M. (1993). *Los conocimientos lógico-matemáticos en la Escuela Infantil: desarrollo, diseño y observación*. Madrid: CEPE.

De Castro[378], C. (2002a). *Influencia del tipo de número en la estimación en cálculo*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

De Castro, C. (2002b). La matemática mental como destreza socialmente útil. En M. C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Coords.), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 143-156). Alicante: Universidad de Alicante.

De Castro, C. (2004). Análisis de errores en estimación con números decimales: Implicaciones para el currículo de la formación de maestros. En C. de Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 1-28). Barcelona: Edebé.

De Castro, C., Castro, E., & Segovia, I. (2002). Influence of number type and analysis of errors in computational estimation tasks. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 201-208). Norwich, UK.

De Castro, C., Castro, E., & Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación*

[378] Algunas de las referencias que aparecen en este apartado, en las que el autor principal es Carlos de Castro, no figuran en el texto de la presente tesis doctoral por ser publicaciones hechas a partir de esta investigación. De Castro (2002a) aparece en todo el texto como De Castro (2002).

Matemática: Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 183-194). A Coruña: Universidade da Coruña.

De Castro, C., Castro, E., y Segovia, I. (2006). Análisis metacognitivo de protocolos en tareas de estimación: Una reflexión sobre el carácter estratégico de los procedimientos de cálculo. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IV*, pp. 25-45.

De Castro, C., Castro, E. Y Segovia, I. (2008). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: un estudio con maestros en formación. *PNA, 2*(4), 191-205.

De Castro, C., Castro, E., y Segovia, I. (2009). Dificultades semióticas en la estimación con números decimales. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, 15-34.

De Castro, C., Segovia, I., y Castro, E. (2002a). An alternative model for the description of computational estimation strategies. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 193-200). Norwich, UK.

De Castro, C., Segovia, I. y Castro, E. (2002b). Un modelo alternativo para la descripción de estrategias de estimación en cálculo. *Indivisa: Boletín de Estudios e Investigación, 3*, 159-65.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6*, 219-243.

De Corte, E., Verschaffel, L., Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 7*(3), 197-216.

De la Torre, S., Mallart, J., Tort, LL., Rajadell, N., Laffitte, R. y Oliver, C. (1994). *Errores y currículo: Tratamiento didáctico de los errores en la enseñanza*. Barcelona: PPU.

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños. Introducción a la práctica del método clínico*. Barcelona: Paidós.

Dickey, J. W. (1934). The value of estimating answers to arithmetic problems and examples. *The Elementary School Journal, 35*(1), 24-31.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 45-55.

Dowker, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition, 3*(2), 141-154.

Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetic development. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 275-302). Hove, UK: Psychology Press.

Dowker, A. (2003). Young children's estimates for addition: The zone of partial knowledge and understanding. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 243-265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic. Implications for psychology, neuroscience and education*. Hove, UK: Psychology Press.

Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harris, L., & Hook, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical Cognition, 2*(2), 113-135.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Edwards, A. (1983). Estimation for numeracy. Numeracy project. Boroko: Administrative College of Papua New Guinea.

Edwards, A. (1984). Computational estimation for numeracy. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 59-73.

Ekenstam, A., & Greger, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(4), 369-384.

Empson, S. B., Levi. L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals*. Portsmouth, NH: Heineman.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). *Protocol analysis: Verbal reports as data*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.

Faulk, C. J. (1962). How well do pupils estimate answers? *Arithmetic Teacher, 9*, 436-440.

Ferrater, J. (1994). *Diccionario de filosofía*. Barcelona: Ariel.

Fesharaki, M. (1978). *A study of the effect of hand-calculators on achievement, estimation and retention of seventh and eighth graders on decimals and percent*. Doctoral dissertation. University of Missouri.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1) 3-17.

Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. In F. E. Weinert and R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp. 21-30). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flores, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1990). Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas de alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México. *Educación Matemática, 2*(1), 30-44.

Floyd, T. (1992). *A comparison of two instructional sequences for the teaching* *of estimation of fractional computation to fifth-grade students*. Doctoral dissertation. University of Missouri-Columbia.

Forrester, M. A., & Pike, C. D. (1998). Learning to estimate in the mathematical classroom: A conversation-analytic approach. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(3), 334-356.

Garofalo, J., & Lester, F. K., Jr. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 163-76.

Ginsburg, H. P., Jacobs, S. F., & López, L. S. (1998). *The teacher's guide to flexible interviewing in the classroom: Learning what children know about math*. Needham Heights: MA: Allyn & Bacon.

Gliner, G. S. (1991). Factors contributing to success in mathematical estimation in preservice teachers: Types of problems and previous mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 595-606.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, B. (1995a). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada: Comares.

Gómez, B. (1995b). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 13*(3), 313-325.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Goodman, T. (1991). Computational estimation skills of pre-service elementary teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*, 259-272.

Gossard, P. N. (1986). Computational estimation in applied nonroutine problem solving. (Doctoral dissertation, Georgia State University-College of Education, 1985). *Dissertation Abstracts International, 46A*, 2606. (DA8521691).

Graeber, A. O., & Tirosh, D. (1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 565-588.

Gray, E. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 551-74.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 111-33.

Gray, E., & Tall, D. (1993). Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching, 142*, 6-10.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-40.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 37-45.

Grimm, L. G., & Yarnold, P. R. (2000). *Reading and understanding more multivariate statistics*. Washington, DC: American Psychological Association.

Grossnickle, F. E. (1941).Types of errors in division of decimals. *The Elementary School Journal, 42*(3), 184-194.

Hall, L. T. (1984). Estimation and approximation-not synonyms. *Mathematics Teacher, 77*(7), 516-517.

Hall, W. D. (1976). *A study of the relationship between estimation and math-*

ematical problem solving among fifth grade students. Doctoral dissertation. University of Illinois.

Hanks, A. L. (2008). *How eighth-grade students estimate with fractions*. Masters Thesis. Provo, UT: Brigham Young University.

Hanson, S. A., & Hogan, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 483-499.

Heinrich, E. J. (1999). Characteristics and skills exhibited by middle school students in performing the task of computational estimation. (Doctoral dissertation, Fordham University, 1998). *Dissertation Abstracts International, 59/07*, 2405A. (DA9839507).

Hendrick, C. (1990). Replications, strict replications, and conceptual replications: Are they important? In J. W. Neuliep (Ed.), *Handbook of replication research in the behavioural and social sciences* (pp. 41-49). Corte Madera, CA: Select Press.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1998). *Metodología de la investigación* (2ª ed.). México, DF: McGraw-Hill.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hilton, P., & Pedersen, J. (1986). Approximation as an arithmetic process. In H. L. Schoen, & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation: 1986 yearbook* (pp. 55-71). Reston, VA: NCTM.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking & Learning, 5*(4), 259-80.

Hogan, T. P., & Parlapiano, C. A. (2008). Personality factors related to quantitative estimation skill: Confirmation and extension. *Psychological Reports, 103*, 189-198.

Hogan, T. P., Wyckoff, L. A., Krebs, P., Jones, W., & Fitzgerald, M. P. (2004). Tolerance for error and computational estimation ability. *Psychological Reports, 94*, 1393-1403.

Hope, J. A., & Sherrill, J. M. (1987). Characteristics of unskilled and skilled mental calculators. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 98-111.

Huber, G. L., Fernández, G., Lorenzo, O., & Herrera, L. (2001). *Análisis de datos cualitativos con AQUAD*[379] *CINCO para Windows*. Madrid: Grupo Editorial Universitario.

Hurley, E. A., Boykin, A. W., & Allen, B. A. (2005). Communal versus individual learning of a math-estimation task: African American children and the culture of learning contexts. *The Journal of Psychology, 139*(6), 513–527.

Ibe, M. D. (1971). *The effects of using estimation in learning a unit of sixth grade mathematics*. Doctoral dissertation. University of Toronto.

Inskeep, J. E., Jr. (1978). Diagnosing computational difficulty in the classroom. In M. N. Suydam, & R. E. Reys (eds.), *Developing computational skills: 1978 yearbook* (pp. 163-76). Reston, VA: NCTM.

Jollife, F. (1999). On approximate calculations. Teaching Statistics, 21(3), 84-87.

Kaplan, R. M., y Saccuzzo, D. P. (2006). *Pruebas psicológicas: Principios, aplicaciones y temas* (6ª ed.). México: Thompson.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kinkade, S. S. (1991). An analysis of the performance of United States eighth-grade classes on estimation and approximation items from the Second In-

[379] El análisis cualitativo de los datos se ha realizado con el programa AQUAD. El manual referenciado no está citado en el texto. Se ha utilizado como libro de consulta.

ternational Mathematics Study (SIMS): A secondary analysis. (Doctoral dissertation, Southern Illinois University at Carbondale, 1990). *Dissertation Abstracts International, 52/05A*, 1673. (DA9129843).

Kluwe, R. H. (1982). Cognitive knowledge and executive control: Metacognition. In D. R. Griffin (Ed.), *Animal mind–Human mind* (pp. 201-224). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Kluwe, R. (1987). Executive decisions and regulation of problem solving behavior. In F. E. Weinert, & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding* (pp. 31-63). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Krueger, L. E. (1972). Perceived numerosity. *Perception & Psychophysics, 11*, 5-9.

Landis, J., & Koch, G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics, 33*, 159-74.

LeFevre, J., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction, 11*(2), 95-132.

Lemaire, P., Arnaud, L., & Lecacheur, M. (2004). Adults' age-related differences in adaptivity of strategy choices: Evidence from computational estimation. *Psychology and Aging, 19*(3), 467-481.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2001). Older and younger adults' strategy use and execution in currency conversion tasks: Insights from French franc to euro and euro to French franc conversions. *Journal of Experimental Psychology-Applied, 7*(3), 195-206.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 82*, 281-304.

Lemaire, P., & Reder, L. (1999). What affects strategy selection in arithmetic?

An example of parity and five effects on product verification. *Memory & Cognition, 22*, 364-382.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. Journal of Experimental Psychology: General, 124, 83-97.

Lemaire, P., Lecacheur, M., & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54*(2), 141-148.

León, O. G. y Montero, I. (1997). *Diseño de investigaciones: Introducción a la lógica de la investigación en psicología y educación* (2ª ed.). Madrid: McGraw-Hill.

Levin, J. (1981). Estimation techniques for arithmetic, everyday math and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 421-434.

Levine, D. R. (1980). *Computational estimation ability and the use of estimation strategies among college students*. Doctoral dissertation. New York University.

Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 350-359.

Liu, F. (2009). Computational estimation performance on whole-number multiplication by third- and fifth-grade Chinese students. *School Science and Mathematics, 109*(6), 325-37.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp. 187-220). Madrid: Pearson Educación.

Luke, C. (1988). The repeated addition model of multiplication and children's performance on mathematical word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 217-226.

Lynchard, B. B. (1989). *The relationship of computational estimation ability* *and selected variables of sixth grade students*. (Doctoral dissertation, Delta State University, 1988). Dissertation Abstracts International, 49A, 1686. (DA8814743).

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MacLeod, K. (1999). *Verbal report validity and children's subtraction*. Doctoral dissertation. University of Alberta.

Markovits, Z. (1987). *Estimation: Research and curriculum development*. Doctoral dissertation. Weizmann Institute of Science.

Markovits, Z., & Even R. (1999). The decimal point situation: A close look at the use of mathematics-classroom-situations in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 15*(6), 653-665.

Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.

Martínez, R. A. (2007). *La investigación en la práctica educativa: Guía metodológica de investigación para el diagnóstico y evaluación en los centros docentes*. Madrid: MEC & CIDE.

Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Buenos Aires: Aique.

Maurer, S. B. (1998). What is an algorithm? What is an answer? In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 yearbook* (pp. 21-31). Reston, VA: NCTM.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Mingus, T. T. Y., & Grassl, R. M. (1998). Algorithmic and recursive thinking: Current beliefs and their implications for the future. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school* *mathematics: 1998 yearbook* (pp. 32-43). Reston, VA: NCTM.

Ministerio de Educación y Ciencia (1982, 15 de abril). Real Decreto 710/1982, de 12 de febrero, por el que se fijan las enseñanzas mínimas para el ciclo medio de la Educación General Básica. *BOE, 90*, pp. 9586-9589.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991, 13 de noviembre). Real Decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE, suplemento del núm. 220*, pp. 3-38.

Morgan, C. (1989). A context for estimation. *Mathematics in School, 18*(3), 16-17.

Morgan, C. (1990). Factors affecting children's strategies and success in estimation. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 265-272). Mexico.

Moser, H. E. (1949). Two procedures for estimating quotient figures when dividing by two-place numbers. *Elementary School Journal, 49(9/10)*, 516-522.

Mottram, R. D. (1996). *A comparative study of computational estimation ability and strategies used in estimation problems*. Doctoral dissertation. University of Colorado.

Movshovitz-Hadar, N., Inbar., S., & Zaslavsky, O. (1987). Sometimes students' errors are our fault. *Mathematics Teacher, 80*, 191-194.

Munakata, M. (2002). *Relationships among estimation ability, attitude toward estimation, category width and gender in students of grades 5-11*. Doctoral Dissertation. Columbia University.

Muñiz, J. (1998). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide.

Murphy, M. R. (1992). Teaching and applying computational estimation skills in grade 8. (Master's thesis, Simon Fraser University, Canada, 1989). *Masters Abstracts International, 30/04*, 986. (DA MM66273).

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Estándares curriculares y* *de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: a quest for coherence*. Reston, VA: NCTM.

Nelson, N. Z. (1966). *The effect of the teaching of estimation on arithmetic achievement in the fourth and sixth grades*. Doctoral Dissertation, Ann Arbor, University.

Newman, R., & Berger, C. (1984). Children's numerical estimation: Flexibility in the use of counting. *Journal of Educational Psychology, 76*, 55-64.

Nicol, A. A. M., & Pexman, P. M. (2007a)[380]. *Cómo crear tablas. Guía práctica.* México, DF: Manual Moderno.

Nicol, A. A. M., & Pexman, P. M. (2007b). *Cómo presentar resultados. Una guía práctica para crear figuras, carteles y presentaciones*. México, DF: Manual Moderno.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Ohlsson, S. (1996). Learning from performance errors. *Psychological Review, 103*(2), 241-62.

Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology, 55*, 169-195.

Pañellas, M. (2004). *L'estimació en numeració i càlcul a primària. Tipificació i categorització d'estratègies, dificultats i errors*. Tesi doctoral inèdita.

[380] Los trabajos Nicol y Pexman (1999 y 2003) no aparecen citados en el texto de la tesis pero han servido de orientación y consulta durante la elaboración del trabajo para la adecuación de los formatos de las tablas y las figuras a los formatos de la American Psychological Association.

Universitat Ramon Llull, Barcelona.

Pañellas, M. (2006). Model per a categoritzar les bones estratègies en estimació en numeració i càlcul emprades pels infants en acabar l'educació primària. Aloma: *Revista de psicologia, ciències de l'educació i de l'esport, 19*, 331-360.

Pardo, A. y Ruiz, M. A. (2001). *SPSS 10.0: Guía para el análisis de datos. Madrid*: Hispanoportuguesa SPSS.
Disponible en: http://www2.uca.es/serv/ai/formacion/spss/Inicio.pdf

Pascual, J. (1995). Diseño de medidas repetidas. En M. T. Anguera, J. Arnau, M. Ato, R. Martínez, J. Pascual & G. Vallejo, *Métodos de investigación en psicología* (pp. 113-136). Madrid: Síntesis.

Pascual, J., Frías, D. y García, F. (1996). *Manual de psicología experimental. Metodología de investigación*. Barcelona: Ariel.

Paull, D. R. (1971). *The ability to estimate in mathematics*. Doctoral dissertation. Columbia University.

Petitto, A. L. (1990). Development of numberline and measurement concepts. *Cognition and Instruction, 7*, 55-78.

Pinchback, C. L. (1991). Types of errors exhibited in a remedial mathematics course. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(2), 53-62.

Polya, G. (1957/1995)[381]. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, DF: Trillas.

Popper, K. R. (1972/2001)[382]. *Conocimiento objetivo: Un enfoque evolucionista*

[381] Decimonovena reimpresión de la primera edición española de 1965. Traducción del libro: Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press. (Disponible en: http://www.4shared.com/file/57759878/3bd90d90/George_Polya__How_To_Solve_It.html?dirPwdVerified=144e67ca). Consulta hecha el 27-08-09. Nota: La primera edición en ingles es de 1945.

[382] El libro es una colección formada por nueve trabajos publicados entre 1961 y 1971. Al ser considerado Popper como un autor 'clásico', mantengo la doble fecha (año de publicación del original/año de edición consultada) en todas las referencias al mismo.

(4ª ed.). Madrid: Tecnos.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-72.

Reehm, S. P. (1994). *A comparison of estimation processes used on numeric and contextual problems*. Doctoral dissertation. University of Missouri-Columbia.

Rescher, N. (2007). *Error: On our predicament when things go wrong*. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh Press.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Flores, A. (1991). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics, 22*(4), 353-375.

Reys, R. E. (1985). Estimation. *Arithmetic Teacher, 32*(6), 37-41.

Reys R. E. (1986). Evaluating computational estimation. In H. L. Schoen, & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation: 1986 yearbook* (pp. 225-238). Reston, VA: NCTM.

Reys, R. E. (1993). Research on computational estimation: What it tells us and some questions that need to be addressed. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 1*, 105-112.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1980). *Identification and characterization of computational estimation processes used by inschool pupils and out-of-school adults*. Washington, DC: National Institute of Education.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 183-201.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Trafton, P. R., & Zawojewski, J. S. (1984a). *Computational estimation instructional materials for the middle grades. Final report*. Washington, DC: National Science Foundation.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Trafton, P. R., & Zawojewski, J. S. (1984b). *Computational estimation instructional materials for the middle grades. Grade 6*. Washington, DC: National Science Foundation.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Trafton, P. R., & Zawojewski, J. S. (1984c). *Computational estimation instructional materials for the middle grades. Grade 7*. Washington, DC: National Science Foundation.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Trafton, P. R., & Zawojewski, J. S. (1984d). *Computational estimation instructional materials for the middle grades. Grade 8*. Washington, DC: National Science Foundation.

Reys, R. E., Nohda, N. (Eds.). (1994). *Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*. Reston, Va: NCTM.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S., & Shimizu, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(1), 39-58.

Reys, R. E., Trafton, P. R., Reys, B. J., & Zawojewski, J. S. (1987). *Computational estimation. Grade 6*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Reys, R. E., & Yang, D. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237.

Reys, R. E., Reys, B. J., Trafton, P. R., & Zawojewski, J. (1985). Activities: Estimating with "nice" numbers. *Mathematics Teacher, 78*(8), 615-25.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). Bogotá & México: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en* *la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/Horsori.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A., y Gómez, P. (2007). Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IX*, 115-135.

Ross, J., & Ross, M. (1986). Fermi problems of how to make the most of what you already know. In H. L. Schoen, & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation: 1986 yearbook* (pp. 175-181). Reston, VA: NCTM.

Rubenstein, R. (1982). *Mathematical variables related to computational estimation*. Doctoral dissertation. Wayne State University.

Rubenstein, R. N. (1985a). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(2), 106-119.

Rubenstein, R. N. (1985b). Developing estimation strategies. *Mathematics Teacher, 78*(2), 112-118.

Rubenstein, R. N. (1987). Estimation and mental computation. Compatible numbers. *Arithmetic Teacher, 34*(9), 24-25.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén.

Ruiz, L. y Rodríguez, J. L. (1997). El análisis didáctico en la formación de profesores. Propuesta de talleres y pruebas de evaluación para las asignaturas de Matemáticas y su Didáctica y Didáctica de las Matemáticas. En C. F. Abraira y A. de Francisco (coords.), *Actas del II simposio sobre el curriculum en la formación de profesores en el área de didáctica de las matemáticas* (pp. 67-82). León: Universidad de León.

Sainz, F. C. (1984). *Diccionario español de sinónimos y antónimos* (8ª edición). Madrid: Aguilar.

Sanfiorenzo, N. R. (1990). A comparison of teaching strategies in computational estimation. (Doctoral dissertation, College for teachers of Vanderbilt University, 1989). *Dissertation Abstracts International, 50/12*, 3880A. (DA9006834).

Santisteban, C. (1990). *Psicometría: Teoría y práctica de la construcción de tests*. Madrid: Norma.

Schoen, H. L. (1987). Estimation and mental computation. Front-End Estimation. *Arithmetic Teacher, 34*(6), 28-29.

Schoen, H. L. (1994). Assessing computational estimation: Research and new directions. In R. E. Reys, & N. Nohda (Eds.), *Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp. 87-97). Reston, Va: NCTM.

Schoen, H. L., & Zweng, M. J. (1986). *Estimation and mental computation: 1986 Yearbook*. Reston, VA: NCTM.

Schoen, H. L., Blume, G., & Hart, E. (1987, April). Measuring computational estimation processes. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Washington, DC.

Schoen, H. L., Blume, G., & Hoover, H. D. (1990). Outcomes and processes on estimation test items in different formats. *Journal of Research in Mathematics Education, 21*(1), 61-73.

Schoen, H. L., Friesen, Ch. D., Jarrett, J. A., & Urbatsch, T. D. (1981). Instruction in estimating solutions of whole number computations. Journal of Research in Mathematics Education, 12(3), 165-178.

Schoenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 345-395). New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FA: Academic Press.

Segovia, I. (1996). La estimacion en medida. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3*(10), 29-42.

Segovia, I. (1986). *Estimación y cálculo aproximado en EGB*. Tesina de licenciatura. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Granada: Comares.

Segovia, I., y Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17, Vol. 7*(1), 499-536.

Segovia, I. y De Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cazares Solórzano* (pp. 213-236). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Sharp, J. (1998). A constructed algorithm for the division of fractions. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 198-203). Reston, VA: NCTM.

Shull, R. M. (1998). *Investigation of the development of number sense in seventh -and eleventh- grade students over a three-year period of time*. Doctoral dissertation. University of Missouri-Columbia.

Siegel, A. W., Goldsmith, L. T., & Madson, C. R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 211-232.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 75*(2), 428-444.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197-212). New York: Psychology Press.

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14*, 237-243.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Sliva, W. M. (1987). *Developing a test of computational estimation ability*. Doctoral dissertation. University of Texas.

Smith, M. L. (1993). *Preservice elementary teachers' conceptual understanding of computational estimation strategies within the operations of addition and subtraction*. Doctoral dissertation. University of Pittsburgh.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona & Horsori.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (p. 19-52). La Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Sowder, J. T. (1984). Computational estimation procedures of school children. *Journal of Educational Research, 77*(6), 332-36.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, Va: NCTM.

Sowder, J. T. (1989). Affective factors and computational estimation ability. In D. B. McLeod, & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 177-191). New York: Springer-Verlag.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A Project of the NCTM* (pp. 371-389). New York: Macmillan Publishing Company.

Sowder, J. T. (1994). Cognitive and metacognitive processes in mental computation and computational estimation. In R. E. Reys, & N. Nohda (Eds.), *Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp. 139-46). Reston, Va: NCTM.

Sowder, J. T., & Wheeler, M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 130-146.

Spooner, M. (2002). *Errors and misconceptions y maths at key stage 2*. London: David Fulton Publishers.

Stacey, K, Helme, S., Archer, S., & Condon, C. (2001). The effect of epistemic fidelity and accessibility on teaching with physical materials: A comparison of two models for teaching decimal numeration. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 199-221.

Star, J. R., Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of experimental child psychology, 102*(4), 408-26.

Star, J.R., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., and Perova, N. (2009). The role of prior knowledge and comparison in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*. doi: 10.1007/s11858-009-0181-9.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and* *mathematics: Intuitive rules*. New York & London: Teachers College Press, Columbia University.

Stillman, G. (2004). Strategies employed by upper secondary students for overcoming or exploiting conditions affecting accessibility of applications tasks. *Mathematics Education Research Journal, 16*(1), 41-70.

Sutherlin, W. N. (1976). *The pocket calculator: Its effect on the acquisition of decimal estimation skills at intermediate grade levels*. Doctoral dissertation. University of Oregon.

Swan, M. (1983a). *Teaching decimal place value: A comparative study of "conflict" and "positive only" approaches*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Swan, M. (1983b). *The meaning and use of decimals: Calculator based diagnostic tests and teaching materials*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 147-165). London & New York: RoutledgeFalmer.

Tall, D., & Razali, M. R. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 24(2), 209-222.

Taylor, J. R. (1997). *An introduction to error analysis: The study of uncertainties in physical measurements* (2nd Ed.). Sausalito: CA: University Science Books.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1996). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Thipkong, S., & Davis, E. J. (1991). Preservice elementary teachers' misconceptions in interpreting and applying decimals. *School Science and Mathematics, 91*(3), 93-99.

Thompson, A. G. (1979). Estimating and approximating. *School Science and Mathematics, 79*(8), 575-580.

Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York: Macmillan Company.

Thorndike, E. L., Cobb, M. V., Orleans, J. S., Symonds, P. M., Wald, E., & Woodyard, E. (1924). *The psychology of algebra*. New York: Macmillan Company.

Threadgill-Sowder, J. (1984). Computational Estimation Procedures of School Children. *Journal of Educational Research, 77*(6) 332-36.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics, 20*(1), 79-96.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher's thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 98-108.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics, 91*(4), 157-163.

Trafton, P. R. (1978). Estimation and mental arithmetic: Important components of computation. In M. N. Suydam, & R. E. Reys (Eds.), *Developing computational skills: 1978 Yearbook* (pp. 196-213). Reston, VA: NCTM.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Estimation. In M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets* (pp. 173-201). Utrech, The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrech University.

VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: The origins of procedural misconceptions*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México, DF:

Trillas.

Visauta, B. (1999). *Análisis estadístico con SPSS para windows. Estadística Básica*. Madrid: McGraw-Hill.

Volkova, T. N. (2005). Characterizing middle school students' thinking in estimation. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 289-296). Melbourne: PME.

Volkova, T. N. (2006a). Characterizing preservice teachers' thinking in computational estimation with regard to whole numbers, fractions, decimals, and percents. Doctoral Dissertation. Illinois State University.

Volkova, T. N. (2006b). An analysis of preservice teachers' estimation strategies within the context of whole numbers, fractions, decimals, and percents. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 354). Prague: PME.

Weinfurt, K. P. (2000). Repeated measures analyses: ANOVA, MANOVA, and HLM. In L. G. Grimm y P. R. Yarnold (eds.), *Reading and understanding more multivariate statistics* (pp. 317-361). Washington, DC: American Psychological Association.

Whalen, M. T. (1989). A comparison of computer assisted instruction to traditional classroom instruction on seventh graders' computational estimation skills. (Doctoral dissertation, Indiana University, 1988). *Dissertation Abstracts International, 49/12*, 3650A. (DA8904969).

Whiteman, F. C. (1989). The role of computer-based instruction in the development of strategies for computational estimation with middle school children. (Doctoral dissertation, Ohio State University, 1988). *Dissertation Abstracts International, 49/09*, 2629A. (DA8824640).

Wyatt, J. W. (1986). *A case-study survey of computational estimation pro-*

cesses and notions of reasonableness among ninth grade students. Doctoral dissertation. University of Missoury-Columbia.

Ximénez, M. C. y San Martín, R. (2000). *Análisis de varianza con medidas repetidas*. Madrid & Salamanca: La Muralla & Hespérides.

Yang, D. (1995). *Number sense performance and strategies possessed by sixth -and eighth- grade students in Taiwan*. Doctoral dissertation. University of Missouri-Columbia.

Yang, D. (2005). Number sense strategies used by 6^{th}-grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31*(3), 317-333.

Yang, D., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, pp. 383-403.

Zan, R. (2000). 'Misconceptions' e difficoltà in matematica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 23*(1), 45-68.

Apéndice A: Tablas de datos de la prueba de estimación

En este apéndice se presentan todas las tablas que contienen los datos de la prueba de estimación. La Tabla A.1 presenta las estimaciones dadas por los 131 alumnos participantes en la investigación. En la columna de la izquierda aparecen los códigos correspondientes a los alumnos. En las demás columnas "e1,…, e24", representan las estimaciones dadas por cada alumno a los ítems del 1 al 24 respectivamente de la prueba de estimación. En la Tabla A.2 aparecen las puntuaciones correspondientes a cada uno de los ítems de la prueba para cada alumno. En ella, p1,…, p24 son las puntuaciones de los ítems 1 al 24. La Tabla A.3 muestra las puntuaciones medias que se han utilizado para el análisis de varianza. Aquí, la columna encabezada por po3n2 representa la puntuación media para los ítems en los que la operación es O_3 (división de un número por otro mayor) y el tipo de número es N_2 (decimales mayores que 1). En la Tabla A.4 figuran los tiempos de respuesta para todos los ítems del test y alumnos participantes. La Tabla A.5 está dedicada a las medias de la variable Tiempo de respuesta que se utilizan en el análisis de varianza con esta variable independiente. Finalmente, en la Tabla A.6 puede verse el orden en que han ido apareciendo los 24 ítems para cada uno de los 131 participantes al realizar la prueba de estimación.

Tabla A.1. *Estimaciones de los estudiantes para las tareas de estimación de la prueba*

	Estimaciones											
Est.	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
1	40000	15000	40	4	0,4	0,2	7200	120	30	17	0,4	0,2
2	35000	15000	40	40	0,44	0,15	7200	1500	29	12	0,04	0,02
3	40000	15000	43	4	0,3	0,1	7200	1500	28,5	16	0,03	0,02
4	40000	12000	5	36	0,07	0,01	7200	1500	30	16	0,4	0,02
5	4000	16000	4,32	40	0,4	0,89	7500	150	30	20,5	4,387	1,2
6	38550	14400	40,3	38	0,4	0,1	6740	0,7	28	16	0,3	0,2
7	28000	12000	40	40	0,39	0,2	720	1700	30	16	0,4	0,2
8	30800	8400	40	4	0,3	0,01	7200	1200	27	16	0,04	0,02
9	28000	12000	50	3	0,4	0,2	570	15000	25	17	0,4	0,02
10	28000	15000	25	4	0,4	0,1	7200	1500	28	3,3	4	0,02
11	3600	10000	4	36	0,43	0,12	72	1200	22	16,1	2,5	0,25
12	35000	15000	40	4	0	0,1	5600	1500	33	600	0,25	0
13	4000	1420	50	40	0,4	0,2	720	150	30	1,3	3	0,85
14	1400	1300	40	40	0,4	0,1	7200	1500	36	20	0,05	0,2
15	40000	15000	38	4	0,4	0,1	7200	0,7	24	18	4	0,2
16	31500	15000	40	50	0,4	0,02	720	175	24	15	0,05	0,2
17	40000	15000	242	4	18000	0,1	7200	1500	30	16	0,025	0,05
18	4000	1200	54,2	24,3	19,7	7,3	72	150,2	0,321	0,00625	3,12	5,43
19	40000	12000	250	95	0,45	0,11	5600	1500	21	16,6	2,5	0,002
20	37500	14400	40	4	0,4	0,14	7200	1500	25	15	0,03	0,02
21	4000	12000	500	3,5	0,4	150	560	1500	30	2,5	0,3	5
22	40000	12000	40	36000	0,0005	0,1	7200	1500	30	16	0,4	0,002
23	40000	12000	50	40	0,4	0,15	720	150	250	160	0,5	440
24	35000	12000	40	4	2	9	7200	1500	30	20	3	4
25	4000	1200	50	3,33	0,45	0,1	7200	1500	30	16,6	0,1	0,32
26	38500	12000	48	4	0,4	0,133	0,88	1700	30	16	0,33	0,22
27	32000	12000	30	40	0,5	0,02	7200	1500	30	16	0	0,2
28	0,065	12000	40	30	0,4	0,13	0,9	0,07	0,1	0,2	0,04	0,02
29	40000	12000	4,3	4,04	0,3	0,101	0,0072	1500	24	0,15	0,3	0,2
30	40000	12000	40	6	0,4	0,1	560	120	30	14	0,4	0,03
31	40000	1200	40	50	0,45	0,12	7200	1500	30	10	0,03	0,1
32	40000	1200	40	4,01	0,16	0,15	7200	1500	340	13,25	260	360
33	40000	1500	4	40	30	10	7200	1500	30	20	3	0,4
34	4000	3172	44	4	0,45	0,1	72,2	1850,2	28,2	16,1	0,4	0,25
35	4000	1800	40	44	0,3	0,1	7200	1500	3	16	0,3	0,2
36	32000	18000	5	50	0,431	20	72	12	26,9	1,6	5,6	2
37	4000	120	20000	50	0,45	9000	540	1500	28	15	0,1	0,24
38	40000	14400	47	400	0,4	0,11	7200	2400	27	10	0,34	0,2
39	45000	14400	0,024	4	0,45	0,133	0,8	0,6	21,2	0,0625	2,56	0,22
40	0,059	1396	4,3333	4,02	0,39	0,13	14,11	15	2,4	15	0,31	0,2
41	40000	12000	50	5	0,4	0,1	7200	1500	30	150	0,3	0,25
42	3006	20000	40,4	4,03	0,4	0,01	8888,22	200,2	25,22	18,1	0,4	0,8
43	60000	14400	5	4	0,4	0,12	7000	1500	30	18	0,4	0,2
44	2726	1494	49	4	2,4	7	1,2	1,5	28,2	1,5	0,3	4
45	28420	10392	4	44	0,38	0,01	7200	1480	28	16	0,35	0,06

Tabla A.1 (Continuación)

Estimaciones de los sujetos para las tareas de estimación de la prueba

	Estimaciones											
Est.	e13	e14	e15	e16	e17	e18	e19	e20	e21	e22	e23	e24
1	1,75	3,2	4	10	0,2	0,8	20	45	10	3,4	0,3	0,2
2	8	3,9	4	22	0,8	1	0,0032	0,21	7	34	0,0002	0,2
3	2,01	4	4	0,2	0,007	0,009	200	426	0,001	2	0,002	0,002
4	0,35	8	0,4	20	0,0002	0,0002	160	900	0,0007	0,002	0,002	0,002
5	210	3500	400	25,43	0,158	1,732	2000	95000	7,33	30	2,56	2,3
6	0,3	4	39	0,2	0,15	0,07	0,231	0,425	0,07	0,02	0,03	0,45
7	140	0,28	42	2,5	0,7	0,9	0,02	0,042	8	30	0,03	0,023
8	0,5	2	0,39	0,24	0,07	0,008	0,02	0,021	0,09	0,6	0,02	0,002
9	2,42	14	4	0,3	25	24	2500	20	40	0,03	0,3	0,2
10	17500	320	250	20	0,1	1	20	4	7	34	0,3	0,2
11	0,0175	0,06	0,04	0,04	0,00008	0,09	0,0014	4,26	0,0008	0,034	0,033	0,00002
12	1,3	4	0,5	0,2	0	0	0	0	0,006	0,34	0	0
13	2,6	4	0,4	1	0,1	1	0,776	0,02	1	0,05	0,03	0,5
14	2,57	8,4	0,4	0,22	0,007	0,09	776	852	0,46	0,68	0,03	0,02
15	3	3,9	4	2,1	0,7	0,9	150	425000	8	24	0,2	0,2
16	4,2	0,03	4,7	1,9	0,02	0,9	1,552	400000000	7,5	27	0,04	0,02
17	1,8	3,9	0,24	2	0,05	0,08	19,4	42,6	7	17	0,03	0,02
18	1,23	4,5	0,043	0,00012	0,02	0,0123	14,2	3,25	0,00015	0,0023	0,00023	0,023
19	3	4,5	0,25	0,17	0,2	0,009	2	450	0,5	0,35	0,03	0,0002
20	1,75	3,2	3,8	2,13	0,7	0,8	19,4	42,5	7,6	28	0,026	0,2
21	3	4	0,5	0	0,08	0,08	0	200	0,5	0,0003	0	0,003
22	3	4	0,25	0,02	0,01	7	0,0024	215	7	34	0,2	0,02
23	0,42	0,4	48	200	0,7	0,1	0,32	48	0,7	0,34	0,3	0,45
24	3	800	40	23	18	63	0,024	0,004	46	0,03	0,23	0,22
25	4,2	8	5	2	0,6	0,0008	1600000	8520	0,035	0,01	0,3	0,36
26	2,1	3,6	0,5	0,25	0,08	0,0075	1,452	426	0,05	0,0035	0,003	0,0025
27	3	4	0,4	0,3	0,8	0,9	1,6	4,5	4,6	0,15	0,03	0,18
28	0,3	0,06	0,04	0,2	0,07	0,09	2	4,8	0,8	0,2	0,02	0,02
29	1400	32	0,38	0,00032	0,0002	0,8	0,0024	4500	6,9	28	0,11	0,201
30	3	0,02	0,9	0,2	0,7	0,09	175	400	0,5	0,03	0,03	0,02
31	3	4	5	0,3	0,1	1	80	90	0,05	50	0,05	0,025
32	0,45	0,425	3,5	1,75	0,075	0,042	0,225	0,032	0,04	0,06	0,002	0,02
33	3	4	4	0,25	0,16	0,15	175	425	0,08	0,34	0,04	0,5
34	1,9	10,35	0,4	0,2	0,08	0,1	80,5	15,32	0,5	0,28	0,02	0,02
35	3	4	0,5	0,2	0,76	0,01	1,6	9	0,5	0,01	0,025	0,02
36	3	40	3,8	0,4	0,68	0,025	776	8,52	0,25	0,05	0,13	0,2
37	2,57	0,4	0,25	3	0,5	0,8	2,4	5	7	3	1	0,2
38	3	8,1	4,1	2	6	9,1	20000	900	5	30	0,3	2
39	2,1	4,5	4	1,7	0,06	0,6	2,4	4,5	7	35	0,3	0,22
40	1,499	3,4	4	2,1	0,18	1,4	19,4	43,6	0,132	2,72	0,236	0,2
41	2,8	3,2	4	2	0,8	0,48	16	45	8,3	35	0,3	0,2
42	3	10,43	0,39	0,25	0,05	0,095	850	900	0,1	0,2	0,002	0,002
43	2,1	3,8	3,9	2,2	0,2	0,9	16	0,1	6	0,35	0,3	0,2
44	3	3,345	3,4	2,1	1,5	3,2	1,52	3,546	69,2	2,8	0,2	47,2
45	0,13	3,75	0,04	2,7	0,06	1,4	0,08	0,03	0,0246	0,0311	1,4	0,02

Tabla A.1 (Continuación)

Estimaciones de los estudiantes para las tareas de estimación de la prueba

	Estimaciones											
Est.	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
46	4000	1800	4,2	40	0,4	0,2	720,2	150,2	60,4	10	0,6	0,4
47	3000	0,25	42	40	0,3	0,1	720	15,5	25	23,5	0,45	0,2
48	36000	15000	3	3,6	0,3	0,1	72,2	5170	29,2	0,016	0,03	0,21
49	40000	12000	40	4	0,5	0,1	720	1500	27	14	0,25	0,05
50	40000	12000	50	36000	0,4	0,1	630000	1500	30	1	0,1	0,2
51	32000	12000	5	5	0,4	0,2	7200	1500	30	15	0,5	0,225
52	40000	17000	40	45	0,5	1,8	7200	150,2	30	12	0,04	0,005
53	8526	9524	53	63	0,009	0,24	458,2	789,3	35	362,458	220	6
54	2400	1464	40	40	0,5	0,012	720	180	30	14	0,4	0,2
55	7710	151520	4,3	4	23	0,7	7110	18,9952	28	17,6	2,5	0,5
56	38500	15000	40	3	0,4	0,1	72	1500	28	16	0,4	0,2
57	35000	14400	40	4	0,4	0,6	7200	1500	28	15	0,4	0,4
58	7030	2935	4,4	4	0,41	0,14	5600	330	27	15	0,4	0,21
59	38500	20400	4	4,4	0,3	0,1	72	160,18	3,45	12	0,043	1,56
60	35420	21000	37	3,9	0,3	0,1	702,5	1700,4	25,6	16,03	0,4	0,2
61	4226	1352	4,2	2030	0,3	0,1	572,2	1526,8	257,18	17,6	0,3	5,98
62	8100	10500	81	4	0,38	0,15	6750	2500	28,5	16	0,25	0,22
63	35000	14750	40,5	4	0,42	0,15	7017	1500	26,1	16,1	2,86	0,2
64	40000	15500	46	7,5	0,28	0,2	6300	1463	30,2	21,1	0,4	0,22
65	3460	14000	42	4	0,4	0,1	700	1400	250	16	0,4	0,2
66	3000	1300	40	4800	0,25	0,12	7200	1500	24,57	17	0,5	0,2
67	3250	15000	40	44,25	0,5	0,106	0,74	4,5	0,025	16	0,5	0,2
68	4955	1464	40,4	4	0,3	0,1	16000	800	1,1	1	3,5	0,2
69	34466	14152	40	4,02	0,38	0,14	7016,8	1700	21,5	15,4	12	0,2
70	35000	15000	4,28	4,1	0,304	0,10008	7200	15,98	28	16	0,4	0,2
71	7000	12000	39	44	0,35	0,1	0,8	0,7	28	16	0,25	0,23
72	3855	12500	40	4	0,6	0,1	7200	1500	6	20	0,25	0,2
73	40000	12000	75	33	0,2	0,1	7200	1500	202	15	0,3	0,02
74	36000	14640	48	3	0,3	0,1	7200	1750	2,8	546	0,3	0,2
75	34466	14761	40	4,2	0,25	0,71	45,58	1609	29	16,1	0,75	0,52
76	40000	150	26	3,25	85	14	81	23	4,02	0,1	74,02	11,8
77	35466	5896	403	4	0,03	0,1	0	16095,2	0	0	0	0
78	38500	14400	48	3,5	0,0004	0,23	7200	1650	30	16,2	0,00024	0,45
79	35000	1250	250	5	1,2	0,25	72	1500	30	23	0,03	0,02
80	30000	11000	400	45	0,04	0,15	7200	1500	30	31	250	0,6
81	4000	18000	40	4	0,45	0,01	720	150	30	16	4	0,2
82	35000	12000	35	3,54	2,8	2,3	723	0,02	23	20	0,5	0,02
83	38500	12000	4,3	3	0,4	0,1	7200	17	30	11,5	0,4	0,2
84	28000	12000	48	45	0,2	0,2	5400	150	28	17	0,3	0,4
85	40000	10000	4	40	0,5	0,1	7200	800	20	20	0,05	0,48
86	40000	12000	500	30	0,65	0,14	7200	1750	30	1666	0,4	0,84
87	31000	3372	4,33	35	0,42	0,11	0,88	20	25,6	16	0,042	0,9
88	3000	1200	44	44	0,4	0,1	560	150	22	31	0,4	0,4
89	35000	12000	60	40	0,4	0,2	6400	1500	3	3	0,4	0,1
90	4000	14500	50	3,5	0,4	0,1	7200	1500	9	60,1	0,4	0,4

Tabla A.1 (Continuación)

Estimaciones de los sujetos para las tareas de estimación de la prueba

	Estimaciones											
Est.	e13	e14	e15	e16	e17	e18	e19	e20	e21	e22	e23	e24
46	3	35	0,33	0,4	0,02	0,01	240,2	45	0,5	0,7	0,3	0,5
47	2500	3,5	0,04	250	0,06	0,083	15,5	5,6	6,5	3,5	0,2	0,25
48	1,4	0,36	0,75	0,29	0,019	0,019	1,9	542	0,001	0,36	0,3	0,023
49	3	4	0,025	2	0,2	1	22,15	45	0,06	27	0,002	0,02
50	21000	8	5	2	20	0,7	0,6	45	8	30	0,3	0,2
51	2	3,2	5	2	0,6	0,7	1,6	4	70	30	0,3	0,2
52	2000	40	0,9	1,2	1,3	1,1	160000	320000	1,4	0,9	0,09	1,1
53	4,5	9	0,52	3,25	0,12	1,8	779	910	0,003	0,008	0,4	0,02
54	17,5	360	4	0,25	0,06	0,6	0,02	4,2	7,5	0,3	0,3	0,04
55	3	8,5	0,3	0,21	0,7	0,92	2328	10,2568	0,15	0,22	0,3	0,02
56	0,17	3,2	4	0,2	0,7	7	14	0,425	6	28	0,24	0,2
57	20	40000	0,4	0,2	0,8	1	200	40	7	30	0,3	0,02
58	3	0,7	4	2	7,4	0,51	980	32	46	200	0,2	0,2
59	151,04	312	1,16	2,01	0,016	0,009	16	42,5	0,16	0,325	0,0017	0,02
60	3	0,006	3,9	2,1	0,8	0,8	20,6	4260000	6,9	40,2	0,002	0,205
61	6,5896	0,004	0,23	1,59	0,05	0,02	825,69	956,459	0,52	2,1	0,2	0,2
62	3,1	4	3,95	2,5	0,3	0,75	22	426	7,5	28	0,4	0,2
63	1,81	3,55	3,8	2,13	0,68	0,8	19,5	17650	6,9	0,36	0,26	0,2
64	2,02	4,445	3,67	2,6	0,35	0,56	3,38	4,558	15,4	29,2	3,2	0,212
65	2	4	4	1,5	0,8	0,9	40	40	9	40	0,3	0,25
66	3,7	0,9	3,88	2,5	0,8	0,8	20	3000	7,5	28,3	0,03	0
67	0,002	0,0036	0,0004	0,28	0,00007	0,8	0,18	0,425	0,00008	0,029	0,00003	0,0002
68	20,66	45	3	0,2	0,06	0,8	24,28	36000	0,6	2,8	2,5	2
69	2	3,6	3,84	20	0,64	0,79	19,4	40,9	7	28,3	0,3	0,2
70	0,35	0,005	0,4	0,2403	0,4	0,803	0,000003	107	0,7	0,35	0,3	0,00023
71	2,1	0,08	3,7	2	0,02	0,8	0,02	400000	7,3	34	0,21	0,21
72	2,7	32	0,3	0,22	0	0	799	899	0,05	0,2	0,01	0,4
73	2,85	5	0,4	0,2	0,2	0,01	780	860	0,024	0,03	0,02	0,02
74	1,82	0,32	4,8	24,9	0,7	0,76	16	42,5	7,1	3,08	0,2	0,0002
75	3	34125	0,75	0,35	0,68	1	9,004	34,086	0,66	0,25	0,05	0,7
76	2,7	3,2	3,4	85	52	41	45	42,5	12	2,9	86	71
77	1,8504	0	0,3	0,213	0,007	0,0090102	0	0	0,6	0,02	0	0
78	2,42	9	0,01	0,6	0,72	1	800	900	0,46	3,04	0,003	0,05
79	3	0,32	1000	0,25	0,012	0,08	200	853	0,042	0,032	0,25	0,0023
80	1,2	6	3	0,002	1	1,2	50	500	0,003	0,003	0,02	0,002
81	2,6	40	40	20	20	9	0,8	0,09	10	70	3	2
82	0,03	8	0,36	0,25	0,0053	0,003	0,235	0,01	0,002	0,031	0,03	0,021
83	3	0,05	3	2	0,12	0,8	0,03	0,04	1,4	3	0,2	0,05
84	3,64	3,5	0,3	0,35	0,09	0,09	0,1	0,01	0	0,64	0,029	0,02
85	3	8	0,28	0,5	0,5	0,1	0,5	0,12	0,02	0,5	1	0,02
86	698	3	1,5	2,8	1	1,4	20000	17825	2,6	1,7	3,2	1,02
87	3	0,08	0,85	0,2	0,06	0,0001	1400000	0,889	1,2	0,002	0,0048	2
88	3	10	0,97	0,8	0,5	0,8	800	40,89	0,5	0,9	0,07	0,02
89	3	0,02	1,02	2	1	0,03	700	0,8	1	2	1	2
90	3	0,07	4,1	2,1	0,3	74,05	20	4250	0,006	0,02	0,4	0,21

Tabla A.1

Estimaciones de los estudiantes para las tareas de estimación de la prueba

	Estimaciones											
Est.	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
91	2800	1000	4	200	0,43	0,18	8100	0,082	68,2	16	4,8	200
92	40000	12000	500	3,3	0,03	0,01	7200	1500	30	1,6	0,3	0,05
93	34900	20100	40	4	3,1	0,105	7000	1588	28	16	0,48	0,2
94	9610	3172	40	45	0,046	0,18	962,74	374	28,3	11,25	2,5	0,0098
95	36000	15000	39	3,9	0,309	0,14	7200	1750	27	15	0,4	0,2
96	32000	10000	4	50	0,4	0,1	6300	1500	3	20	0,5	0,2
97	4500	1800	300	40	0,45	0,3	4800	150000	30	7,33	30	2
98	35000	18000	45	3,5	0,5	0,4	5400	170	30	16,6	0,4	0,2
99	40000	1200	40	4,4	0,4	0,01	0,8	0,01	28,3	11	0,25	0,2
100	38500	14640	3,5	4,01	0,5	0,15	7200	1700	25	15	0,38	0,2
101	40000	15000	40	5	18000	0,104	7200	1700	30	17	0,4	25
102	40000	15000	4	44,01	0,4	0,03	9000	1750	21,33	11,11	4	0,04
103	38500	14000	40	40	0,043	0,18	720	1,7	30	16	0,4	0,3
105	38500	14640	38,7	4,02	0,35	1,4	0,02	1700	25	16	3,96	0,02
106	400	12000	50	45	0,45	0,1	720	150	4	0	0	0,04
107	40000	15000	40	5	0,4	0,5	720	1500	30	16	2,5	0,42
108	375000	15000	43	40	0,45	0,1	7200	3,92	3,2	16	0,5	0,024
104	4406	1250	450	40	0,2	0,8	50	2750,25	29	21	0,2	0,5
109	3210	14152	40,4	4002	0,32	0,125	7020,6	185,25	0,254	0,01	0,38	0,26
110	32000	12000	50	41	0,4	0,23	6300	1500	20	16	0,25	0,4
111	26012	1372	50	34	0,4	0,15	1	1	30	36	0,45	20
112	3855	15000	4,3	4	0,3	0,15	7200	1700	32	16	0,4	360
113	3850	12000	40	4	0,5	0,1	1800	1500	30	16	0,4	0,4
114	32000	12000	50	5	0,5	0,4	7200	1500	20	16	0,3	0,2
115	40000	12000	4,3	4,4	0,4	0,1	7200	1750	30	16	0,4	0,2
116	40000	150000	33	40	0,5	0,1	720	0,6	26	16	0,3	4
117	38500	180000	441	12	16000	5	7200	1500	4	1	300	450
118	375000	125000	34	4	0,4	0,1	7200	1500	30	16	2	0,2
119	3150	11600	40	4,002	0,38	1,5	640	212,8	2,5	1,5	4,5	2,5
120	34500	12500	4,02	33,01	0,33	0,12	50000	3500,2	9,05	9,5	0,92	0,25
121	32466	11152	4,3	4	0,3	0,1	0,9	589652	25	16	0,4	11
122	4500	12000	40	38	0,4	0,01	2,5	15	30	0,127	0,41	0,02
123	5050	2100	50	3	0,3	0,01	720	326	2,5	1,2	0,4	0,019
124	4500	18000	333	40	3333	0,12	72	200	22,2	1,42	33	2,3
125	40556	2000	155	45	26	0,165	640,9	20000	21,5	14,55	0,556	0,0258
126	35000	12000	4,26	4	0,3	0,36	5600	1500	30	1,3	0,025	0,025
127	40000	12000	40	4	0,45	0,2	7200	1500	30	4	0,25	0,2
128	4000	12000	40	40	0,3	0,1	7200	1500	27	16	0,4	0
129	4000	18000	33,3	4,4	0,3	0,4	7200	2000	2,2	14,2	3,3	0,01
130	32000	1200	50	3,7	0,4	0,1	7200	150	30	16,6	0,4	0,2
131	4000	12000	450	55,5	0,4	1,5	72	1500	28,3	15	2,5	0,2

Tabla A.1 (Continuación)

Estimaciones de los sujetos para las tareas de estimación de la prueba

	Estimaciones											
Est.	e13	e14	e15	e16	e17	e18	e19	e20	e21	e22	e23	e24
91	0,14	0,045	0,4	0,27	0,007	0,09	0,014	0,032	0	0,05	0,02	0,041
92	3	4	0,25	0,5	0,2	0,01	0,02	0,045	0,5	0,05	0,02	0,2
93	2,7	3,61	0,3	2	0,8	0,72	2,428	17040	7	35	0,3	0,02
94	0,182	0,05	0,0431	0,249	0,075	0,078	0,71	0,0985	0,024	0,025	0,026	0,021
95	2	3,5	4	2,1	0,6	0,9	15,6	32	7	27	0,3	0,2
96	6	0,05	4	2	1	1	24	40	1	0,3	0,03	0,02
97	21000	4	0,5	0,2	0,004	0,01	0,05	0,9	5	0,03	0,02	0,02
98	3	0,4	5	0,2	1	0,07	16	40	0,3	0,34	0,03	0,2
99	12,5	0,006	4	0,2	0,08	0,08	7,76	31,04	0,12	0,06	0,03	0,02
100	1,35	4	3,8	2,2	0,8	0,7	2,328	40,086	65	29	0,2	0,24
101	5	4	0,25	0,2	0,6	0,048	20	4,2	0,1	0,2	0,0012	0,18
102	5	40	0,25	0,2	0,08	0,07	16	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02
103	3	3,2	4	18	0,8	0,8	20	42,5	7,5	32	0,2	0,4
105	182	40	0,3	2,5	0,08	0,174	72	4200	0	27	0,3	0,456
106	15	4	5	2	0,8	0	16000	0	7,142	0	0,3	0,22
107	1,75	0,015	4	0,2	0,08	0,08	200	32000	0,7	0,2	0,01	0,02
108	0,17	4	0,43	0,22	0,005	0,011	4,5	4,25	0,0012	0,032	0,003	0,023
104	1,2	2	1	1	1,5	1	25	900	1	1	0,5	1
109	0,1954	3,532	0,3	0,2	0,8	0,802	19,4	324,586	0,7	0,28	0,251	0,022
110	1,5	3,2	0,25	0,2	0,9	0,09	46,5	425	0,08	0,3	0,003	0,05
111	2	1	1	1	1	1	700	36114	1	30	1	1
112	2,5	4	4	0,2	0,08	0,08	24	45	6	30	0,25	0,02
113	25,7	8	0,5	0,5	1	0,6	77,6	40,086	0,5	6,8	0,4	0,5
114	2	8	5	3	0,6	5	0,386	0,4	0,1	0,27	0,2	0,5
115	3	4	0,08	0,2	0,006	0,1	16	42,6	0,06	0,2	0,02	0,0002
116	2,1	4	0,3	0,2	1	1	16	90	0,5	0,9	0,3	0,25
117	3	8	1	1	1	1	5,6	1	1	1	1	1
118	0,04	2	0,04	0,02	0,01	0,01	0,18	0,0045	0,07	0,003	0,002	0,002
119	0,5	3,2	0,4	0,2	0,5	0,01	19,4	40,086	0,7	0,3	0,133	0,2
120	25,3	35,35	0,38	0,02	0,006	0,01	1500,2	3,896	0,07	0,065	0,02	0,021
121	3	32325	31,2	2,5	0,7	0,05	0,024	30698	7	0,002	0,2	698552
122	2,204	3,1305	0,0039	0,21	0,007	0,42	1000	2,916	0,0006	0,208	0,001	0,00204
123	2	8	0,75	0,8	0,008	0,8	776,3	842,46	0,002	0,3	0,04	0,002
124	12,7	40,85	4,4	0,2	0,666	700	0,024	0,045	0,69	0,29	0,2	0,18
125	3,51	0,025	0,455	0,559	0,098	0,0555	0,2411	0,0587	0,0669	0,0556	0,00258	0,0025
126	2,5	4	4	0,01	0,2	0,02	700	850	0,45	0,05	0,02	2
127	3	8	4	0,5	0,07	0,08	1	900	0,5	0,7	0,02	0,45
128	2,1	40	0,4	0,2	0,008	0,01	0	400	0,005	0,02	0,03	0,2
129	3	8	1	0,2	0,1	0,7	0,8	90	0,4	1	0,1	0,2
130	3	3,5	4	2	0,6	0,7	20	16000	8	0,35	0,3	0,1
131	3	3,5	0,08	0,4	0,9	0,7	1,52	40	0,04	0,003	0,002	0,002

Tabla A.2. *Puntuaciones de los estudiantes para las tareas de estimación de la prueba*

	Puntuaciones																							
Est.	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
1	2	3	3	3	3	0	3	0	2	2	3	3	3	3	3	0	0	3	3	2	0	0	2	3
2	3	3	3	0	2	3	3	3	2	1	0	0	0	2	3	0	2	1	0	0	3	2	0	3
3	2	3	3	3	1	1	3	3	2	3	0	0	3	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2	2	0	0	0	0	3	3	2	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	2	0	0	3	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0
6	3	3	3	0	3	1	3	0	2	3	1	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	2	3	0	3	0	0	3	2	3	3	3	0	0	0	2	3	2	0	0	2	3	0	0
8	2	0	3	3	1	0	3	1	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	2	1	1	3	0	0	0	3	2	3	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	3
10	1	3	0	3	3	1	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0	3	2	2	3
11	0	1	0	0	2	2	0	1	2	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	3	3	3	3	0	1	1	3	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	1	0	3	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
14	0	0	3	0	3	1	3	3	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	2	3	3	3	3	1	3	0	3	2	0	3	0	2	3	3	3	2	0	0	2	2	1	3
16	2	3	3	0	3	0	0	0	3	3	0	3	0	0	1	2	0	2	0	0	3	3	0	0
17	2	3	0	3	0	1	3	3	2	3	0	0	3	2	0	3	0	0	3	3	3	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
19	2	2	0	0	2	1	1	3	2	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	3
21	0	2	0	2	3	0	0	3	2	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	2	2	3	0	0	1	3	3	2	3	3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	3	2	1	0
23	2	2	1	0	3	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	2	0	0	2	0
24	3	2	3	3	0	0	3	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3
25	0	0	1	2	2	1	3	3	2	3	0	0	0	0	1	3	2	0	0	0	0	0	2	0
26	3	2	2	3	3	3	0	3	2	3	2	3	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	3	2	1	0	1	0	3	3	2	3	0	3	0	2	0	0	2	2	0	0	0	0	0	2
28	0	2	3	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	2	2	0	3	1	1	0	3	3	0	1	3	0	0	0	0	0	3	0	0	3	3	0	3
30	2	2	3	0	3	1	0	0	2	3	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
31	2	0	3	0	2	2	3	3	2	0	0	0	0	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
32	2	0	3	3	0	3	3	3	0	2	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0
33	2	0	0	0	0	0	3	3	2	1	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	3	3	2	1	0	2	2	3	3	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	3	0	1	1	3	3	0	3	1	3	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
36	3	1	0	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0	3
37	0	0	0	0	2	0	0	3	2	3	0	2	0	0	0	0	1	3	0	0	3	0	0	3
38	2	3	2	0	3	1	3	0	3	0	2	3	0	0	3	3	0	0	0	0	1	3	2	0
39	1	3	0	3	2	3	0	0	2	0	0	3	2	1	3	1	0	1	0	0	3	1	2	3
40	0	0	0	3	3	3	0	0	0	3	2	3	2	3	3	3	0	0	3	3	0	0	3	3
41	2	2	1	1	3	1	3	3	2	0	1	1	0	3	3	3	2	0	2	2	2	1	2	3
42	0	0	3	3	3	0	1	0	3	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	3	0	3	3	2	3	3	2	2	3	3	2	3	3	3	0	2	2	0	2	0	2	3
44	0	0	1	3	0	0	0	0	2	0	1	0	0	3	2	3	0	0	0	0	0	0	1	0
45	2	1	0	0	3	0	3	3	2	3	3	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla A.2 (Continuación)

Puntuaciones de los sujetos para las tareas de estimación de la prueba

	Puntuaciones																							
Est.	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
46	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0
47	0	0	3	0	1	1	0	0	3	0	2	3	0	3	0	0	0	0	1	0	3	0	1	1
48	3	3	0	2	1	1	0	0	2	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
49	2	2	3	3	1	1	0	3	3	3	0	0	0	2	0	3	0	1	2	2	0	3	0	0
50	2	2	1	0	3	1	0	3	2	0	0	3	0	0	1	3	0	2	0	2	2	3	2	3
51	3	2	0	1	3	0	3	3	2	3	1	3	3	3	1	3	2	2	0	0	0	3	2	3
52	2	1	3	0	1	0	3	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	3	0	1	0	0	0	2	3	3	3	0	0	3	0	0	1	0	0	3	0	2	0
55	0	0	0	3	0	0	3	0	2	2	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0	2	0
56	3	3	3	1	3	1	0	3	2	3	3	3	0	3	3	0	3	0	1	0	2	3	3	3
57	3	3	3	3	3	0	3	3	2	3	3	0	0	0	0	0	2	1	0	3	3	3	2	0
58	0	0	0	3	3	3	1	0	3	3	3	3	0	0	3	3	0	0	0	1	0	0	1	3
59	3	0	0	3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	2	3	0	0	0	0
60	3	0	3	3	1	1	0	3	3	3	3	3	0	0	3	3	2	3	3	0	3	0	0	3
61	0	0	0	0	1	1	0	3	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3
62	0	1	0	3	3	3	3	0	2	3	0	3	0	2	3	2	0	3	2	0	3	3	0	3
63	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	0	3	0	3	3
64	2	3	2	0	1	0	2	3	1	0	3	3	3	1	3	1	0	0	0	0	0	3	0	3
65	0	3	3	3	3	1	0	2	0	3	3	3	3	2	3	1	2	2	0	3	1	0	2	1
66	0	0	3	0	0	2	3	3	3	2	1	3	0	0	3	2	2	3	3	0	3	3	0	0
67	0	3	3	0	1	1	0	0	0	3	1	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
68	0	0	3	3	1	1	0	0	0	0	0	3	0	0	1	0	0	3	1	0	0	0	0	0
69	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3	0	3	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	2	3
70	3	3	0	3	1	1	3	0	2	3	3	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	0
71	0	2	3	0	3	1	0	0	2	3	0	2	2	0	3	3	0	3	0	0	3	2	2	3
72	0	2	3	3	0	1	3	3	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
73	2	2	0	0	0	1	3	3	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
74	3	3	2	1	1	1	3	3	0	0	1	3	3	0	1	0	3	3	2	3	3	0	1	0
75	3	3	3	3	0	0	0	3	2	3	0	0	0	0	0	0	3	1	0	2	0	0	0	0
76	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0	3	0	0	0	0
77	3	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	3	3	2	2	0	0	3	3	2	3	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0
79	3	0	0	1	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
80	2	1	0	0	0	3	3	3	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
81	0	1	3	3	2	0	0	0	2	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82	3	2	2	2	0	0	0	0	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	3	2	0	1	3	1	3	0	2	1	3	3	0	0	1	3	0	3	0	0	0	0	1	0
84	1	2	2	0	0	0	1	0	2	2	1	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	2	1	0	0	1	1	3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
86	2	2	0	0	0	3	3	3	2	0	3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
87	2	0	0	0	3	1	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	0	0	3	0	3	1	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	1	3	0	3	0	0	0	0
89	3	2	0	0	3	0	3	3	0	0	3	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
90	0	3	1	2	3	1	3	3	0	0	3	0	0	0	3	3	0	0	3	0	0	0	0	3

Tabla A.2 (Continuación)
Puntuaciones de los sujetos para las tareas de estimación de la prueba

	Puntuaciones																							
Est.	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
91	0	0	0	0	2	1	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
92	2	2	0	2	0	0	3	3	2	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
93	3	0	3	3	0	1	3	3	2	3	1	3	0	3	0	3	2	2	0	0	3	1	2	0
94	0	0	3	0	0	1	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	3	3	2	3
96	3	1	0	0	3	1	2	3	0	1	1	3	0	0	3	3	0	1	1	3	0	0	0	0
97	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
98	3	1	2	2	1	0	1	0	2	3	3	3	0	0	1	0	0	0	2	3	0	0	0	3
99	2	0	3	3	3	0	0	0	2	1	0	3	0	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
100	3	3	0	3	1	3	3	3	3	3	3	3	1	2	3	3	2	2	0	3	0	3	1	2
101	2	3	3	1	0	1	3	3	2	2	3	0	0	2	0	0	2	0	3	0	0	0	0	2
102	2	3	0	0	3	0	1	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
103	3	3	3	0	0	1	0	0	2	3	3	0	0	3	3	0	2	3	3	3	3	2	1	0
105	3	3	3	3	3	0	0	3	3	3	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	3	2	0
106	0	2	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	2	0	0	0	3	0	2	3
107	2	3	3	1	3	0	0	3	2	3	0	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
108	0	3	3	0	2	1	3	0	0	3	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
104	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
109	0	3	3	0	2	2	3	0	0	0	3	1	0	3	0	0	2	3	3	0	0	0	3	0
110	3	2	1	0	3	0	2	3	1	3	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
111	1	0	1	0	3	3	0	0	2	0	2	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0
112	0	3	0	3	1	3	3	3	1	3	3	0	0	2	3	0	0	0	1	2	2	3	3	0
113	0	2	3	3	1	1	0	3	2	3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0
114	3	2	1	1	1	0	3	3	1	3	1	3	3	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1	0
115	2	2	0	3	3	1	3	3	2	3	3	3	0	2	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0
116	2	0	2	0	1	1	0	0	3	3	1	0	2	2	0	0	0	1	2	0	0	0	2	1
117	3	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
118	0	0	2	3	3	1	3	3	2	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
119	0	2	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	1	0	3	3	0	0	0	3
120	3	2	0	0	2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
121	3	1	0	3	1	1	0	0	3	3	3	0	0	0	0	2	3	0	0	0	3	0	1	0
122	0	2	3	0	3	0	0	0	2	0	3	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
123	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	3	0	3	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
124	0	1	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	1	2
125	2	0	0	0	0	2	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
126	3	2	0	3	1	0	1	3	2	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
127	2	2	3	3	2	0	3	3	2	0	0	3	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
128	0	2	3	0	1	1	3	3	3	3	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
129	0	1	2	3	1	0	3	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	3
130	3	0	1	3	3	1	3	0	2	3	3	3	0	3	3	3	2	2	3	0	2	0	2	0
131	0	2	0	0	3	0	0	3	2	3	0	3	0	3	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0

Tabla A.3. *Puntuaciones medias empleadas para el análisis de varianza*

	Puntuaciones medias											
Est.	o1n1	o1n2	o1n3	o1n4	o2n1	o2n2	o2n3	o2n4	o3n1	o3n2	o3n3	o3n4
1	2,5	1,5	3	2,5	3	2	1,5	0	1,5	3	1,5	2,5
2	3	3	1	0	1,5	1,5	1,5	2,5	2,5	0	1,5	1,5
3	2,5	3	2,5	0	3	2,5	1,5	0	1	0	0	0
4	2	3	0	0	0	2,5	0	0	0	1,5	0	0
5	1	1,5	0	0	0	1	0	3	1,5	0	0	0
6	3	1,5	1	0	1,5	2,5	0	0	2	2	0	0
7	1,5	1,5	0	0	1,5	2,5	1	2,5	1,5	3	2,5	0
8	1	2	0	0	3	3	0	0	0,5	0	0	0
9	1,5	0	0	0	1	2,5	1,5	0	1,5	1,5	0	2,5
10	2	3	0	1,5	1,5	1	0	2,5	2	0	0,5	2,5
11	0,5	0,5	0	0	0	2,5	0	0	2	0,5	0	0
12	3	2	1,5	0	3	0	0	0	0,5	0	0	0
13	0	0	1	0	0,5	1	0	0	1,5	0	0,5	0
14	0	3	0	0	1,5	0,5	0	0	2	1,5	0	0
15	2,5	1,5	1	0	3	2,5	3	2	2	1,5	2,5	2
16	2,5	0	0	0	1,5	3	1,5	3	1,5	1,5	1	0
17	2,5	3	2,5	3	1,5	2,5	1,5	1,5	0,5	0	0	0
18	0	0	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0
19	2	2	0,5	0	0	2,5	0	0	1,5	0	0	0
20	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	3	1,5
21	1	1,5	1	0	1	1	0	0	1,5	0,5	0	0
22	2	3	1	0	1,5	2,5	0	2,5	0,5	1,5	0	0,5
23	2	0	0	1	0,5	0	0	0	3	0,5	1,5	1
24	2,5	3	0	0	3	1,5	0	0	0	0	0	2,5
25	0	3	0	0	1,5	2,5	2	0	1,5	0	1	1
26	2,5	1,5	2,5	0	2,5	2,5	0	0	3	2,5	0	0
27	2,5	3	1	0	0,5	2,5	0	0	0,5	1,5	2	1
28	1	0	0	0	1,5	0	0	0	3	0	0	0
29	2	1,5	0	0	1,5	1,5	0	3	1	2	1,5	1,5
30	2	0	0	0	1,5	2,5	0	0	2	1,5	1,5	0
31	1	3	1	0	1,5	1	0,5	0	2	0	0,5	0
32	1	3	0	0	3	1	2,5	0	1,5	0	0	0
33	1	3	1	0	0	1,5	1,5	0	0	0	0	0
34	0	1	1,5	0	3	2,5	0	0	1,5	2	0	0
35	0	3	1	0	1,5	1,5	0	0	1	2	1	0
36	2	0	0	0	0	1,5	1,5	0	1	0	1,5	1,5
37	0	1,5	0	0	0	2,5	0	1,5	1	1	2	1,5
38	2,5	1,5	0	0	1	1,5	3	2	2	2,5	0	1
39	2	0	1,5	0	1,5	1	2	2	2,5	1,5	0,5	2,5
40	0	0	2,5	3	1,5	1,5	3	0	3	2,5	0	3
41	2	3	1,5	2	1	1	3	1,5	2	1	1	2,5
42	0	0,5	0	0	3	2,5	0	0	1,5	1,5	0	0
43	1,5	3	2,5	1	1,5	2	3	1	2,5	3	1	2,5
44	0	0	1,5	0	2	1	2,5	0	0	0,5	0	0,5
45	1,5	3	1,5	0	0	2,5	0,5	0	1,5	1,5	0	0

Tabla A.3 (Continuación)

Puntuaciones medias empleadas para el análisis de varianza

	Puntuaciones medias											
Est.	o1n1	o1n2	o1n3	o1n4	o2n1	o2n2	o2n3	o2n4	o3n1	o3n2	o3n3	o3n4
46	0	0	0	1	0	0	0	0	1,5	0	0	1
47	0	0	1,5	0,5	1,5	1,5	0	1,5	1	2,5	0	1
48	3	0	0,5	0	1	1	0	0	1	1,5	0	1
49	2	1,5	1	2	3	3	1,5	1,5	1	0	0,5	0
50	2	1,5	0	1	0,5	1	2	2,5	2	1,5	1	2,5
51	2,5	3	3	0	0,5	2,5	2	1,5	1,5	2	2	2,5
52	1,5	1,5	0	0	1,5	1,5	0	0	0,5	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	1,5	2,5	1,5	1,5	0,5	3	0,5	1
55	0	1,5	0	0	1,5	2	0	0	0	0	2,5	1
56	3	1,5	1,5	0,5	2	2,5	1,5	2,5	2	3	1,5	3
57	3	3	0	1,5	3	2,5	0	3	1,5	1,5	1,5	1
58	0	0,5	0	0,5	1,5	3	3	0	3	3	0	2
59	1,5	0	0	2,5	1,5	0,5	1,5	0	1	0	0	0
60	1,5	1,5	0	1,5	3	3	3	1,5	1	3	2,5	1,5
61	0	1,5	0	0	0	1	0,5	0	1	0,5	0	2
62	0,5	1,5	1	1	1,5	2,5	2,5	3	3	1,5	1,5	1,5
63	3	3	3	1,5	3	3	3	1,5	3	1,5	3	3
64	2,5	2,5	2	0	1	0,5	2	1,5	0,5	3	0	1,5
65	1,5	1	2,5	1,5	3	1,5	2	0,5	2	3	2	1,5
66	0	3	0	1,5	1,5	2,5	2,5	3	1	2	2,5	0
67	1,5	0	0	0	1,5	1,5	0	0	1	2	1,5	0
68	0	0	0	0,5	3	0	0,5	0	1	1,5	1,5	0
69	3	3	3	3	3	2,5	1,5	3	3	1,5	3	2,5
70	3	1,5	0	0	1,5	2,5	0	0	1	3	1,5	1
71	1	0	1	0	1,5	2,5	3	2,5	2	1	1,5	2,5
72	1	3	0	0	3	0,5	0	0	0,5	1,5	0	0
73	2	3	0	0	0	1,5	0	0	0,5	0,5	0	0
74	3	3	1,5	2,5	1,5	0	0,5	1,5	1	2	3	0,5
75	3	1,5	0	1	3	2,5	0	0	0	0	2	0
76	1	0	1,5	1,5	1	0	1	0	0	0	0	0
77	1,5	0	1,5	0	1,5	0	0	0	0,5	0	0	0
78	3	3	0	0	2	2,5	0	0	0	0	2	0
79	1,5	1,5	0	0	0,5	1	0	0	0	0	0	1,5
80	1,5	3	0	0	0	1	0,5	0	1,5	0	0	0
81	0,5	0	0	0	3	2,5	0	0	1	1,5	0	0
82	2,5	0	0	0	2	2	0	0	0	0,5	0	0
83	2,5	1,5	0	0	0,5	1,5	2	0	2	3	1,5	0,5
84	1,5	0,5	1,5	0	1	2	0	0	0	0,5	0	0
85	1,5	1,5	0	0	0	1	0	0	1	0	0,5	0
86	2	3	1	0	0	1	0	0	1,5	1,5	0	0
87	1	0	0	0	0	3	0	0	2	0	0	0
88	0	0	0	1,5	1,5	1	0	0	2	1,5	2	0
89	2,5	3	0	0	0	0	1,5	0	1,5	1,5	0	0
90	1,5	3	0	1,5	1,5	0	3	0	2	1,5	0	1,5

Tabla A.3 (Continuación)
Puntuaciones medias empleadas para el análisis de varianza

	Puntuaciones medias											
Est.	o1n1	o1n2	o1n3	o1n4	o2n1	o2n2	o2n3	o2n4	o3n1	o3n2	o3n3	o3n4
91	0	1	0	0	0	1,5	0	0	1,5	0	0	0
92	2	3	1	0	1	1	0	0	0	0,5	0	1,5
93	1,5	3	1,5	0	3	2,5	1,5	2	0,5	2	2	1
94	0	0	0	0	1,5	1,5	0	0	0,5	0	0	0
95	3	3	3	1,5	3	3	3	3	2	3	2	2,5
96	2	2,5	0	2	0	0,5	3	0	2	2	0,5	0
97	0	0	1	0	0	1	0	0,5	1	0	0	0
98	2	0,5	0	2,5	2	2,5	0,5	0	0,5	3	0	1,5
99	1	0	0	0,5	3	1,5	1,5	0	1,5	1,5	0	0
100	3	3	1,5	1,5	1,5	3	3	1,5	2	3	2	1,5
101	2,5	3	1	1,5	2	2	0	0	0,5	1,5	1	1
102	2,5	2	0	1	0	1,5	0	0	1,5	0	0	0
103	3	0	1,5	3	1,5	2,5	1,5	2,5	0,5	1,5	2,5	0,5
105	3	1,5	0	0	3	3	1	1,5	1,5	0	0	1
106	1	0	1	0	0,5	0	2	1,5	1,5	0	1	2,5
107	2,5	1,5	1,5	0	2	2,5	1,5	0	1,5	0	0	0
108	1,5	1,5	1	0	1,5	1,5	0	0	1,5	0,5	0	0
104	0	0	0	0,5	0	1	0	0	0	0	0,5	0
109	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	0	0	0	2	2	2,5	1,5
110	2,5	2,5	2,5	0	0,5	2	0	0	1,5	0	0	0
111	0,5	0	1,5	0	0,5	1	0	1,5	3	1	0,5	0
112	1,5	3	1	1,5	1,5	2	1,5	2,5	2	1,5	0	1,5
113	1	1,5	0	1,5	3	2,5	0	0	1	1,5	0,5	0
114	2,5	3	1,5	0	1	2	0,5	0	0,5	2	1	0,5
115	2	3	1	2,5	1,5	2,5	0	0	2	3	0	0
116	1	0	2	1	1	3	0	0	1	0,5	0,5	1,5
117	1,5	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0
118	0	3	0	0	2,5	2,5	0	0	2	1,5	0	0
119	1	0	1,5	3	3	0	0	0	1,5	0	0,5	1,5
120	2,5	0	0	0	0	0	0	0	2	0,5	0	0
121	2	0	0	0	1,5	3	1	1,5	1	1,5	1,5	0,5
122	1	0	2	0	1,5	1	0	0	1,5	1,5	0	0
123	0	0	1,5	0	1	0	0	0	0,5	1,5	1,5	0
124	0,5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1,5	1,5
125	1	0	0	0	0	2,5	0	0	1	0	0	0
126	2,5	2	1	0	1,5	1	1,5	0	0,5	0	0	0
127	2	3	0	0	3	1	1,5	0	1	1,5	0	0
128	1	3	1	0	1,5	3	0	0	1	1,5	0	1,5
129	0,5	2	0	0	2,5	1,5	0	0	0,5	0	1	1,5
130	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2,5	3	1	2	3	2	1
131	1	1,5	1,5	1,5	0	2,5	0	0	1,5	1,5	1	0

Tabla A.4. *Tiempos de respuesta en segundos para las tareas de estimación de la prueba*

	Tiempos											
Est.	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	t11	t12
1	39,1	39,2	18,4	70,1	56,2	27,9	26,5	76,0	62,7	153,8	13,6	73,1
2	33,0	34,5	17,9	20,2	56,5	19,8	22,4	39,1	35,5	23,6	32,6	61,8
3	34,7	36,0	119,1	35,6	37,3	56,4	36,2	27,8	58,3	46,8	51,8	63,4
4	26,0	104,7	68,6	83,4	22,1	17,7	56,9	32,2	47,0	74,0	25,3	71,1
5	22,0	151,3	20,1	140,7	52,9	174,4	64,6	30,7	16,1	31,2	82,1	49,3
6	42,1	53,3	145,3	57,3	51,0	37,7	81,6	55,6	38,0	47,7	73,2	53,3
7	33,1	32,1	141,2	52,2	62,8	48,0	26,3	138,6	11,4	42,8	27,8	29,2
8	60,5	115,9	120,8	48,6	168,2	45,5	46,7	40,5	64,5	32,0	136,9	49,0
9	24,3	144,8	43,6	101,7	61,5	15,8	37,9	49,4	89,9	106,3	17,2	81,2
10	18,3	100,2	22,3	55,8	21,0	19,6	29,6	25,0	33,3	23,5	14,0	47,8
11	55,0	35,5	8,0	49,9	44,8	31,3	36,0	16,5	167,5	131,0	57,5	179,1
12	40,4	65,9	54,6	64,5	36,8	87,1	39,8	16,3	19,7	11,9	80,7	13,6
13	64,7	133,9	70,2	61,6	63,6	169,4	62,7	60,4	158,0	85,7	105,7	101,3
14	53,9	51,7	57,2	48,2	41,1	82,2	51,8	50,2	150,9	42,7	24,8	41,5
15	27,6	25,9	15,0	15,5	22,6	56,4	21,8	26,1	24,0	13,9	7,7	10,3
16	22,1	40,6	35,3	95,2	38,4	89,6	32,0	34,3	17,0	15,0	52,1	44,7
17	27,4	30,3	20,4	54,6	16,6	64,3	15,1	19,2	30,9	25,8	41,2	102,8
18	20,8	24,2	31,1	34,2	36,1	125,3	111,2	51,9	93,0	38,9	33,2	18,4
19	18,6	14,3	15,3	60,1	47,5	53,0	18,0	21,8	43,1	29,3	14,9	54,6
20	49,3	46,3	29,2	29,5	11,2	50,3	35,9	20,3	71,3	41,7	24,9	28,2
21	58,0	31,0	32,7	59,3	37,0	32,2	23,9	32,6	33,1	25,0	17,1	34,4
22	29,9	15,8	94,0	30,9	129,0	40,4	40,6	18,2	22,3	131,1	26,7	54,0
23	45,8	22,2	278,6	102,4	48,5	118,1	114,1	38,6	78,8	120,3	64,8	83,2
24	13,3	29,2	22,6	33,4	43,8	64,0	98,7	25,7	18,7	23,7	65,1	75,3
25	36,8	15,0	49,3	116,7	46,2	68,0	65,3	54,3	107,3	116,3	182,6	59,8
26	106,1	22,8	126,4	27,4	58,9	71,2	40,8	57,4	26,5	34,6	38,6	65,5
27	33,9	15,4	22,6	21,8	34,6	86,4	25,6	16,7	30,4	26,0	47,2	33,4
28	16,9	34,9	86,4	62,2	42,0	46,7	17,0	20,5	140,2	51,2	28,0	38,2
29	23,7	43,8	82,9	43,2	33,6	53,2	157,8	50,3	92,4	340,4	214,6	58,8
30	85,9	36,1	59,1	89,0	85,7	114,4	121,6	63,2	25,0	35,8	36,6	190,0
31	28,0	21,7	19,8	33,4	29,1	36,0	45,2	12,0	17,4	9,2	29,8	76,6
32	27,4	22,9	52,4	58,4	48,7	17,8	90,4	46,3	74,8	117,4	35,5	34,8
33	15,5	37,8	16,1	44,5	21,0	51,2	21,3	24,7	12,2	26,0	65,8	56,7
34	39,3	155,7	137,3	89,0	25,0	102,8	23,3	44,6	31,8	48,1	12,2	111,0
35	9,8	11,6	46,4	25,8	44,6	51,8	71,8	24,1	64,2	65,8	19,6	58,6
36	83,5	26,6	103,9	62,5	50,6	26,4	35,3	30,3	160,5	136,0	273,7	57,1
37	15,9	8,9	14,5	19,5	24,1	50,8	11,6	41,4	91,0	27,7	47,0	58,7
38	26,7	52,9	395,4	54,4	119,9	130,9	21,3	25,5	16,5	33,4	255,5	136,0
39	22,6	71,4	34,5	19,2	16,1	29,8	28,5	18,6	29,9	19,2	21,7	137,7
40	36,9	59,3	36,2	62,8	25,2	28,2	109,2	21,8	42,5	115,8	62,6	47,8
41	32,1	53,3	62,0	38,1	27,6	71,0	89,8	83,0	41,0	275,4	74,7	191,2
42	54,3	67,1	41,4	71,1	12,6	56,7	57,2	92,1	64,3	32,1	31,6	76,9
43	121,8	89,8	20,7	76,3	42,2	135,9	33,3	45,7	37,8	134,7	46,6	64,6
44	67,7	92,0	36,4	63,5	49,6	55,1	16,9	11,1	99,7	63,2	49,1	129,7
45	31,7	28,7	19,0	27,1	55,8	43,0	39,3	74,1	214,3	90,2	56,7	289,6

Tabla A.4 (Continuación)

Tiempos de respuesta en segundos para las tareas de estimación de la prueba

	Tiempos											
Est.	t13	t14	t15	t16	t17	t18	t19	t20	t21	t22	t23	t24
1	141,6	34,3	28,5	141,7	22,6	51,6	135,6	46,0	20,5	95,7	55,5	48,6
2	29,6	37,5	12,7	13,8	11,6	10,6	50,9	32,7	25,1	23,9	18,9	30,3
3	74,4	17,6	140,9	59,2	59,2	19,5	72,9	98,9	43,4	59,2	25,4	20,3
4	52,5	32,4	42,1	182,0	49,0	36,3	109,2	10,8	87,7	77,3	51,6	61,1
5	78,7	43,1	21,2	48,6	18,5	43,6	87,6	48,3	21,0	50,9	14,8	12,4
6	40,8	116,1	159,7	20,6	49,2	68,0	138,7	105,0	64,3	127,6	113,9	75,9
7	68,4	44,7	122,6	40,0	24,5	32,0	101,2	43,3	71,6	80,6	42,1	93,3
8	67,4	14,6	165,0	113,0	69,4	49,1	220,8	286,9	293,7	166,3	42,4	81,2
9	94,1	28,6	111,0	165,4	46,2	167,1	66,8	27,7	184,5	111,8	159,6	189,1
10	81,8	61,4	14,5	27,8	55,1	8,7	57,2	100,7	38,8	47,1	46,6	13,3
11	91,5	96,0	44,3	109,4	143,7	52,3	236,6	116,3	153,4	26,6	39,4	41,5
12	69,3	17,5	55,6	49,4	19,8	24,5	61,1	33,7	80,2	48,0	22,6	23,2
13	25,8	83,9	18,9	84,0	51,9	25,7	169,3	14,7	27,7	87,5	72,5	23,2
14	156,1	33,6	257,3	30,5	107,1	30,2	14,1	107,0	53,5	52,3	22,1	54,9
15	7,9	26,7	30,5	30,6	24,0	58,7	122,8	62,9	47,0	12,8	41,3	11,4
16	28,3	41,9	28,8	15,0	17,2	38,8	100,4	120,9	39,2	36,7	13,3	7,7
17	54,1	32,9	57,0	93,9	110,0	180,2	48,4	118,0	83,1	65,5	17,8	24,7
18	38,2	90,3	19,5	42,9	159,3	141,3	60,2	203,8	48,5	45,1	84,9	57,3
19	24,8	11,5	18,9	30,4	18,7	73,2	54,2	29,1	58,7	52,6	22,6	46,0
20	87,6	31,1	17,0	60,6	9,9	42,9	140,4	63,0	51,4	50,3	29,8	16,9
21	9,2	7,0	22,5	9,5	40,3	67,7	11,7	63,1	36,8	37,4	10,2	39,0
22	30,4	18,0	13,8	107,3	114,8	46,4	75,5	72,6	53,2	11,3	43,3	73,8
23	71,0	45,0	107,4	67,5	81,2	66,0	155,4	96,0	77,6	50,6	47,9	78,6
24	35,0	35,9	117,8	48,9	35,8	68,0	71,5	69,6	31,6	81,0	68,7	93,5
25	128,0	82,2	59,3	67,6	69,3	180,8	157,0	137,5	92,5	162,2	225,5	182,2
26	40,5	30,4	72,4	69,4	164,8	143,8	81,9	53,9	159,0	25,4	81,6	84,8
27	23,0	28,1	19,7	13,5	28,6	21,1	42,1	38,9	100,4	95,0	19,7	28,5
28	89,0	41,4	26,6	41,2	26,1	14,2	194,9	60,5	41,6	144,6	33,3	13,0
29	102,1	134,3	202,8	96,3	65,3	143,5	141,3	42,9	264,7	60,4	133,2	24,3
30	28,4	7,8	140,9	50,5	97,7	186,0	323,4	37,0	23,5	48,8	181,6	24,5
31	11,1	9,8	11,7	29,4	21,5	15,3	11,1	24,4	16,0	53,0	29,7	30,0
32	41,7	23,3	11,6	22,0	32,2	15,3	12,0	13,9	12,4	29,0	20,3	17,7
33	10,4	54,8	15,4	51,8	69,5	64,2	60,8	174,8	46,8	86,7	70,1	75,0
34	255,8	169,2	36,2	14,4	22,7	16,1	36,0	470,5	18,6	70,8	35,0	104,2
35	126,5	163,5	32,9	27,7	50,1	40,8	49,0	77,4	65,6	55,9	52,3	86,5
36	78,6	111,0	106,7	57,3	77,5	125,1	21,1	24,6	75,8	208,3	140,2	65,6
37	11,4	80,8	26,8	51,2	57,2	30,0	53,4	26,1	108,6	7,7	27,7	18,5
38	34,2	20,0	12,4	56,2	28,7	44,0	38,4	13,8	11,3	420,8	17,0	178,3
39	36,5	30,2	10,5	55,1	31,8	40,0	24,1	59,5	30,2	35,5	21,1	73,5
40	38,8	15,9	32,7	12,0	10,9	32,1	16,3	15,6	26,2	46,2	52,9	73,1
41	66,1	74,2	38,4	58,5	49,6	91,2	44,4	99,5	104,1	130,6	56,4	74,1
42	42,2	53,3	17,4	33,1	24,9	46,5	55,8	20,7	111,0	69,1	35,1	49,9
43	146,0	52,6	15,7	27,0	41,0	20,1	37,2	203,7	82,3	66,2	58,7	25,2
44	24,6	243,1	56,6	31,0	45,3	81,0	39,4	95,1	93,7	43,2	20,3	114,9
45	61,9	27,8	31,0	27,3	230,7	85,9	164,4	305,3	55,0	232,3	90,1	138,0

Tabla A.4 (Continuación)

Tiempos de respuesta en segundos para las tareas de estimación de la prueba

	Tiempos											
Est.	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	t11	t12
46	33,0	27,9	122,9	43,8	92,2	40,8	60,6	56,2	17,8	79,9	38,3	118,0
47	32,8	12,9	59,2	51,0	127,3	58,8	46,0	36,3	45,6	50,4	38,6	100,8
48	54,7	68,8	11,0	43,7	13,0	7,6	76,3	38,6	50,5	63,7	42,1	39,2
49	21,1	17,9	7,3	13,9	14,3	25,4	12,3	13,4	21,7	32,3	35,1	18,0
50	46,5	39,9	32,5	74,4	30,4	39,4	96,8	75,6	40,3	69,2	31,8	40,2
51	42,1	19,8	29,3	32,7	112,7	26,1	30,7	19,1	20,4	62,3	99,8	82,2
52	18,6	123,4	39,0	22,9	18,7	59,9	46,1	39,3	92,8	32,1	63,1	88,0
53	11,0	20,6	32,7	31,1	38,2	18,8	15,1	14,1	59,3	23,3	39,2	13,1
54	45,1	62,9	34,4	52,8	30,2	62,4	33,9	11,4	25,9	39,6	18,9	29,7
55	381,8	135,4	96,0	39,2	44,8	238,4	234,5	334,8	132,5	218,2	25,7	22,6
56	47,2	47,5	58,8	52,0	44,3	33,1	43,8	31,5	70,0	40,5	23,6	56,8
57	84,9	34,7	85,0	25,2	69,1	30,6	26,9	21,5	31,9	20,2	61,0	41,9
58	179,3	61,3	110,1	69,1	19,9	202,0	58,6	146,0	226,5	68,1	44,8	34,8
59	49,4	91,6	115,6	59,9	122,2	22,3	45,9	115,0	53,4	72,1	47,6	20,3
60	95,7	41,6	37,7	85,0	37,8	42,0	64,9	48,2	74,5	38,1	27,9	14,8
61	83,1	55,3	116,7	68,9	46,7	26,5	47,7	155,7	113,6	45,0	28,6	59,0
62	51,6	52,2	32,5	68,1	43,5	43,1	50,8	112,3	111,5	43,9	14,9	55,4
63	37,3	36,4	22,3	248,8	38,0	25,7	51,6	42,6	43,1	86,1	38,0	45,4
64	90,6	37,1	67,9	114,2	67,6	41,5	41,6	32,7	38,9	53,1	92,2	111,3
65	224,0	163,3	140,5	49,6	61,4	85,2	33,0	97,2	172,7	56,5	71,4	61,4
66	200,1	101,4	28,3	80,8	110,5	64,3	84,3	80,4	41,2	44,3	104,6	153,9
67	186,3	80,8	58,4	80,5	44,5	174,6	25,8	81,3	52,4	151,4	226,5	39,5
68	36,1	47,3	84,8	22,5	22,3	38,3	68,4	61,2	45,7	26,5	60,3	43,7
69	149,4	30,2	20,1	125,1	18,3	16,4	23,0	60,2	104,3	38,1	266,6	49,1
70	47,4	82,6	149,0	90,3	79,0	44,3	45,5	181,3	52,9	27,3	27,8	31,7
71	103,8	32,6	28,0	56,2	17,6	17,9	46,8	13,0	70,1	20,8	71,7	47,1
72	45,3	84,5	81,7	58,4	42,4	52,8	41,2	27,3	80,5	14,5	48,7	53,3
73	34,2	21,0	45,1	59,5	87,4	72,6	72,4	21,1	88,5	226,6	87,1	135,8
74	94,9	116,9	68,0	112,5	81,4	106,7	190,2	64,9	132,0	61,8	68,9	84,5
75	133,3	65,0	119,0	83,9	13,1	69,9	62,1	35,4	36,9	22,1	14,3	28,8
76	38,9	18,1	90,9	59,1	6,5	17,9	5,5	2,8	12,3	35,4	5,7	6,1
77	83,8	18,4	97,3	47,0	326,4	12,6	9,6	259,7	23,5	4,9	5,0	15,4
78	133,6	43,5	57,0	153,8	59,4	15,6	23,7	53,2	22,4	68,8	18,9	12,6
79	69,4	144,8	22,8	24,4	26,1	53,7	24,6	41,3	19,0	62,4	65,3	24,2
80	19,6	13,6	10,5	16,3	12,1	27,6	38,4	14,6	8,9	9,3	7,0	11,1
81	185,0	32,8	56,6	94,5	39,3	21,0	21,6	20,6	20,8	77,1	14,9	57,7
82	214,1	26,5	55,7	21,8	320,4	13,7	93,2	77,8	114,1	19,5	30,4	181,7
83	73,3	88,6	101,4	46,4	39,8	10,5	66,5	105,7	99,7	226,7	55,8	68,8
84	27,8	29,4	113,2	47,2	37,5	33,3	45,0	18,5	142,3	98,1	21,0	84,9
85	53,6	19,6	9,6	57,3	54,0	45,8	45,6	22,6	41,3	64,3	47,4	31,6
86	25,6	55,3	49,4	62,2	64,1	7,2	19,1	31,0	20,3	51,8	36,3	8,6
87	91,8	116,4	114,2	87,9	57,8	76,2	43,0	40,4	84,5	57,9	123,6	37,6
88	110,7	45,8	188,2	123,1	118,2	45,9	74,2	33,5	86,8	48,1	200,5	95,3
89	51,4	37,9	27,7	42,4	46,9	16,1	21,3	22,5	31,2	63,0	54,9	43,2
90	81,9	96,8	100,6	96,5	113,7	111,4	110,5	30,2	37,5	68,5	114,0	164,8

Tabla A.4 (Continuación)
Tiempos de respuesta en segundos para las tareas de estimación de la prueba

	Tiempos											
Est.	t13	t14	t15	t16	t17	t18	t19	t20	t21	t22	t23	t24
46	22,7	136,7	39,7	70,2	105,9	20,2	27,9	100,1	13,5	40,0	48,0	74,1
47	99,0	276,5	149,0	39,1	36,9	102,5	87,0	51,3	116,7	24,9	32,1	59,1
48	42,0	43,1	62,1	13,6	48,2	9,6	62,3	37,8	28,9	98,8	24,9	35,3
49	5,5	13,8	15,4	7,0	11,5	6,6	28,6	57,0	11,2	40,4	22,2	20,8
50	91,8	69,1	51,6	35,7	85,5	78,9	211,6	42,4	39,8	52,1	27,5	66,1
51	46,1	69,4	46,9	31,3	27,8	91,0	88,6	63,9	63,5	36,4	18,5	18,0
52	89,5	45,4	29,0	18,5	10,6	8,6	94,7	99,1	13,7	34,0	17,5	26,5
53	16,0	77,2	28,7	34,9	16,0	18,8	13,7	42,7	44,2	38,2	26,6	20,4
54	53,9	54,7	23,1	37,3	73,3	37,8	75,6	70,5	28,6	56,6	24,1	15,3
55	15,4	26,0	139,4	62,5	305,1	388,8	54,9	678,1	113,5	36,9	15,3	15,1
56	79,3	51,4	47,8	132,8	45,5	53,2	90,1	51,3	100,4	22,8	61,3	25,4
57	14,1	41,8	28,9	28,7	70,7	124,8	239,6	166,2	33,2	160,8	102,9	53,6
58	93,5	80,5	72,1	300,4	230,4	129,1	145,3	72,0	70,9	139,0	52,0	67,3
59	85,8	92,1	24,8	43,6	54,4	65,2	92,7	97,2	29,9	71,1	17,7	59,1
60	26,9	41,5	19,2	22,1	68,1	76,7	63,2	57,6	149,4	74,7	114,7	47,7
61	105,8	29,9	59,7	100,5	41,6	65,1	92,8	138,6	37,1	128,6	83,4	45,5
62	25,9	56,8	19,6	20,5	61,1	57,9	254,6	27,1	22,9	108,9	53,6	94,4
63	36,6	32,1	33,9	67,6	48,9	31,8	49,7	58,1	29,7	71,8	23,5	36,1
64	31,2	247,2	31,4	43,1	114,4	86,1	210,9	77,4	81,0	49,1	76,5	71,7
65	129,6	71,2	91,4	88,0	137,2	55,4	205,2	40,2	84,2	136,8	48,8	132,8
66	214,2	102,3	271,0	64,6	84,9	62,3	80,2	45,6	108,5	84,7	257,5	107,7
67	47,5	28,8	34,2	29,5	28,4	49,4	96,7	91,3	45,2	43,3	85,1	72,3
68	105,1	49,5	40,3	59,8	32,3	17,6	86,9	36,2	60,2	49,1	49,1	44,5
69	26,3	67,9	20,7	147,0	176,4	39,3	25,9	19,3	24,9	37,8	32,3	28,2
70	154,6	64,3	40,8	37,9	51,9	111,8	59,0	88,4	85,6	45,6	23,2	39,8
71	79,3	59,3	68,4	24,7	39,8	52,2	42,6	126,8	31,4	34,5	30,1	93,7
72	149,2	40,8	52,0	65,1	42,7	28,1	66,7	136,8	163,8	27,2	41,8	96,4
73	67,0	32,4	16,5	13,6	30,8	14,8	18,2	16,1	58,2	60,3	9,9	34,0
74	114,9	298,7	130,2	131,1	120,2	73,5	73,7	37,4	235,9	150,4	92,4	147,2
75	16,5	175,0	35,4	34,1	46,3	74,0	225,1	97,6	34,6	17,2	58,9	34,0
76	25,9	64,5	210,4	29,0	5,6	20,7	3,0	133,6	3,3	57,1	4,3	3,5
77	198,0	36,2	13,8	103,5	14,5	260,5	46,6	8,9	14,0	296,4	3,9	2,6
78	51,8	20,3	135,2	18,8	26,9	98,9	42,5	127,9	72,3	161,1	82,6	38,0
79	28,4	11,7	7,0	77,6	14,3	27,5	160,9	23,7	79,0	35,1	19,9	41,0
80	13,6	3,6	20,1	14,5	21,6	13,5	12,7	11,3	27,5	11,5	17,5	17,4
81	13,3	42,2	45,1	49,3	88,6	44,6	81,9	24,2	54,5	68,0	37,3	47,6
82	35,8	125,1	36,6	50,3	63,8	27,0	36,8	384,2	73,7	18,7	31,2	157,3
83	113,0	44,7	46,2	48,5	22,6	147,0	36,3	103,0	70,1	192,3	125,9	42,7
84	138,2	106,7	15,0	16,0	52,7	43,1	28,6	7,6	59,0	52,4	53,8	18,5
85	8,3	6,3	19,3	11,9	11,9	10,0	33,8	12,2	10,7	33,2	60,1	91,8
86	6,8	53,3	7,0	11,6	14,7	5,4	73,5	37,2	16,8	110,0	10,1	144,2
87	9,2	29,2	210,2	23,0	79,5	84,4	178,5	30,2	12,9	76,4	57,1	20,0
88	44,3	52,0	13,6	56,6	5,9	9,5	130,5	73,5	31,6	7,2	11,5	80,3
89	9,8	13,3	20,6	19,9	26,0	19,8	37,8	57,2	46,0	41,0	40,3	27,4
90	44,3	91,9	98,3	45,6	134,8	47,7	132,7	195,8	203,3	14,2	77,6	288,7

Tabla A.4 (Continuación)

Tiempos de respuesta en segundos para las tareas de estimación de la prueba

	Tiempos											
Est.	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	t11	t12
91	88,3	17,7	16,7	24,5	52,9	54,0	55,4	29,3	86,6	119,5	61,6	47,2
92	19,1	28,7	15,7	39,2	17,7	59,5	30,5	23,3	24,2	42,5	18,2	25,6
93	51,5	93,1	28,1	35,0	117,0	43,1	48,4	76,7	82,6	25,3	36,4	43,2
94	176,7	127,3	38,0	41,9	63,5	39,9	64,7	58,2	121,8	23,9	29,9	360,0
95	51,5	95,1	12,1	61,8	48,8	43,5	23,8	116,9	24,4	53,1	57,9	68,6
96	61,6	49,9	9,2	34,5	21,7	135,7	76,0	11,3	37,0	13,5	31,5	126,0
97	21,1	57,4	40,2	38,7	27,8	44,9	84,1	54,8	36,8	72,6	42,0	36,0
98	20,6	25,1	26,5	23,9	15,6	36,8	48,9	25,7	15,2	50,5	37,6	32,4
99	105,0	33,9	15,5	57,8	35,6	77,1	30,0	49,7	125,7	41,7	40,9	75,5
100	47,2	34,3	74,7	50,3	17,8	71,0	23,7	53,8	152,2	186,0	133,0	92,2
101	22,5	64,1	54,8	16,8	34,6	43,6	11,1	43,4	8,7	54,1	36,8	72,1
102	39,4	100,5	64,4	81,6	59,0	74,2	49,4	97,6	114,7	63,5	8,4	25,3
103	25,6	68,0	67,5	46,6	43,5	75,0	158,9	75,6	109,2	44,9	27,4	27,5
105	152,8	169,6	143,1	88,3	99,1	10,7	16,2	65,4	319,6	38,3	181,7	152,5
106	13,8	162,6	57,1	37,5	425,0	59,7	132,7	39,1	64,5	3,1	15,1	13,3
107	34,3	25,5	10,2	19,5	139,2	26,6	38,7	55,8	13,4	20,9	8,8	14,8
108	54,2	96,3	82,5	43,4	38,7	100,1	144,5	143,4	46,8	56,1	97,7	69,5
104	98,3	12,8	80,6	63,8	22,6	6,4	43,5	159,1	57,2	63,7	12,4	4,7
109	125,9	134,7	56,8	139,1	116,2	34,8	148,2	25,3	15,1	89,4	60,5	6,6
110	37,1	16,5	63,8	56,4	107,1	99,0	36,8	21,3	12,6	69,5	33,8	76,5
111	66,5	88,2	73,7	113,7	32,4	69,5	9,7	13,7	17,0	71,4	27,1	26,5
112	51,5	48,9	38,1	43,1	32,9	47,2	104,8	109,7	41,7	35,8	21,3	48,9
113	78,8	28,0	51,1	27,1	146,2	39,8	20,5	99,2	28,2	111,7	29,4	46,8
114	50,0	23,4	37,3	22,3	27,7	24,4	27,9	31,2	46,4	75,3	119,1	25,4
115	30,8	25,3	77,8	80,3	88,0	30,4	68,2	132,2	97,2	46,0	43,0	38,9
116	28,9	53,3	80,8	35,9	57,3	143,7	70,8	51,9	61,9	102,3	41,3	35,6
117	40,2	43,0	99,9	48,1	26,3	14,1	36,4	32,1	29,8	19,5	14,0	30,2
118	29,9	27,7	68,9	30,9	15,3	28,1	15,4	38,2	75,9	36,3	36,4	10,8
119	166,2	24,0	118,9	115,2	76,8	13,4	8,5	78,9	14,0	91,3	44,3	63,6
120	152,1	93,8	43,0	61,5	50,1	15,9	116,1	92,8	68,1	75,5	61,1	16,5
121	170,8	61,8	85,8	42,4	18,9	35,2	56,7	55,1	81,5	50,0	36,7	13,6
122	44,9	39,1	53,7	18,4	41,0	10,9	51,4	34,0	23,8	43,9	99,2	50,5
123	111,0	57,4	21,8	28,5	58,7	36,1	13,9	45,8	50,3	35,4	175,8	49,7
124	106,5	56,9	37,1	117,4	40,4	46,0	36,7	39,8	69,3	67,0	88,4	121,2
125	18,0	40,3	159,0	78,5	52,4	67,0	31,4	16,1	68,4	40,5	23,7	9,2
126	44,7	52,4	51,5	60,1	44,8	25,9	29,5	31,3	33,5	75,5	15,6	13,4
127	57,4	49,4	16,5	17,1	19,7	76,6	27,0	43,4	35,5	49,2	13,5	56,2
128	25,5	43,3	66,3	54,3	47,2	18,2	67,0	26,1	47,1	82,4	45,7	142,2
129	26,8	22,0	50,6	34,8	24,0	15,8	15,5	12,5	41,0	63,8	48,0	24,5
130	23,2	19,2	23,1	87,9	17,8	21,8	19,8	18,8	24,5	45,4	43,0	45,6
131	61,0	23,6	27,4	74,8	52,2	45,9	61,8	33,9	39,7	82,1	105,9	78,7

Tabla A.4 (Continuación)

Tiempos de respuesta en segundos para las tareas de estimación de la prueba

	Tiempos											
Est.	t13	t14	t15	t16	t17	t18	t19	t20	t21	t22	t23	t24
91	61,6	32,0	43,0	32,8	98,5	26,8	132,5	105,7	18,9	91,3	34,1	51,7
92	21,8	11,0	22,7	12,0	90,9	26,3	34,1	47,9	12,1	19,9	19,4	65,4
93	185,9	47,6	86,2	13,8	22,8	57,4	84,7	135,8	30,3	29,8	17,2	120,6
94	89,3	40,0	26,9	189,8	27,5	419,1	282,4	11,6	59,1	5,8	19,4	21,7
95	9,2	36,7	32,3	24,0	24,0	25,5	57,5	73,3	34,6	49,4	101,6	37,2
96	31,9	186,1	36,7	31,8	10,0	15,0	110,7	36,9	99,1	421,5	25,9	247,5
97	28,0	10,8	72,9	45,1	10,7	11,4	15,0	106,9	64,8	54,2	20,3	13,4
98	12,5	29,5	15,9	13,9	44,9	35,8	63,1	127,2	17,6	40,5	41,8	46,4
99	280,0	52,6	25,0	34,4	22,3	108,2	129,2	208,1	53,2	129,4	56,4	15,4
100	111,8	79,0	61,1	33,1	93,0	21,1	82,2	74,2	93,1	74,4	51,2	26,7
101	67,2	29,8	39,4	19,5	49,1	31,7	82,0	66,7	51,6	32,1	37,9	15,4
102	14,1	14,2	48,5	70,2	59,7	123,8	35,9	53,2	80,7	80,1	41,6	22,4
103	27,3	209,1	38,1	87,5	60,7	68,6	106,5	100,2	70,9	60,7	28,4	47,1
105	160,9	40,2	39,8	33,5	69,0	24,4	133,9	100,7	14,6	258,5	40,9	19,6
106	99,9	87,9	87,3	26,0	105,4	3,5	276,6	89,8	465,7	8,5	74,6	45,3
107	49,9	10,4	19,7	11,8	6,1	21,2	28,3	251,6	201,0	23,5	21,1	20,3
108	113,0	58,3	47,2	76,1	77,6	50,9	104,8	160,9	221,6	28,1	128,5	16,2
104	17,9	8,1	14,2	2,0	27,1	3,8	9,4	17,2	4,9	2,4	5,6	6,0
109	75,3	109,3	115,3	48,4	155,8	121,4	174,3	90,9	32,0	93,3	70,3	65,3
110	43,7	52,4	40,1	28,7	32,7	19,5	37,8	44,2	71,5	177,7	43,3	36,9
111	65,4	6,8	3,0	42,6	13,9	15,0	19,7	91,9	3,2	31,6	5,7	53,8
112	14,8	65,5	35,7	40,6	53,0	15,8	66,1	165,3	114,8	132,1	79,9	47,5
113	22,8	18,1	17,5	26,7	39,0	18,1	101,2	88,6	11,6	17,0	110,3	11,5
114	15,0	15,1	51,3	18,0	34,3	67,1	39,6	22,1	50,3	92,8	55,8	70,3
115	13,6	42,0	42,4	14,7	129,3	20,4	21,8	63,1	45,6	6,7	36,3	26,4
116	32,9	95,8	37,3	36,6	13,0	19,3	80,2	32,5	53,4	225,4	39,9	37,1
117	16,8	12,9	11,0	3,8	6,0	6,6	110,5	10,6	6,3	18,4	8,5	4,2
118	60,4	39,8	15,3	76,7	24,2	24,0	107,7	64,8	32,3	15,9	67,0	29,4
119	190,2	163,4	9,2	53,3	14,2	150,6	99,0	257,4	59,8	61,9	81,5	9,3
120	49,6	76,4	64,4	14,4	20,0	20,3	44,7	210,2	79,7	106,7	55,2	21,8
121	17,2	117,4	108,8	37,0	20,4	77,1	139,6	167,6	53,0	58,5	21,1	12,8
122	120,3	199,0	50,7	49,0	33,7	77,1	38,4	131,4	91,0	93,0	35,0	123,8
123	12,8	19,9	22,7	18,8	48,9	8,3	281,9	115,3	35,6	43,9	43,8	35,0
124	36,0	45,1	68,3	54,7	42,5	122,9	35,4	61,2	37,7	40,5	26,0	66,1
125	39,5	19,3	28,3	11,0	16,7	23,7	105,2	9,3	24,6	11,8	10,3	16,8
126	19,1	36,5	14,8	6,7	19,4	6,4	16,3	14,1	87,5	16,4	23,4	16,7
127	26,7	11,1	16,5	22,5	20,3	142,5	18,7	35,6	31,2	59,6	21,1	26,6
128	97,1	32,7	14,0	66,7	121,4	27,8	36,3	178,8	66,6	54,7	123,0	86,5
129	15,5	5,3	24,6	32,4	17,5	89,2	19,7	97,8	112,1	7,1	15,8	30,8
130	7,2	31,0	18,0	13,8	40,2	29,5	70,4	57,4	28,1	70,3	30,1	58,2
131	98,2	24,4	38,6	72,0	22,2	65,2	67,1	193,1	114,6	57,1	116,8	88,6

Tabla A.5. *Medias de los tiempos de respuesta en segundos del análisis de varianza con el tiempo de respuesta como variable dependiente*

	Medias											
Est.	to1n1	to1n2	to1n3	to1n4	to2n1	to2n2	to2n3	to2n4	to3n1	to3n2	to3n3	to3n4
1	39,1	51,3	88,0	90,8	44,3	108,3	85,1	58,1	42,0	43,4	37,1	52,1
2	33,8	30,8	33,5	41,8	19,0	29,6	13,2	24,5	38,1	47,2	11,1	24,6
3	35,3	32,0	46,0	85,9	77,3	52,6	100,0	51,3	46,8	57,6	39,3	22,8
4	65,4	44,5	42,5	60,0	76,0	60,5	112,1	82,5	19,9	48,2	42,6	56,4
5	86,6	47,6	60,9	67,9	80,4	23,6	34,9	35,9	113,7	65,7	31,0	13,6
6	47,7	68,6	78,5	121,9	101,3	42,8	90,2	95,9	44,4	63,3	58,6	94,9
7	32,6	82,4	56,5	72,3	96,7	27,1	81,3	76,1	55,4	28,5	28,2	67,7
8	88,2	43,6	41,0	253,9	84,7	48,2	139,0	230,0	106,9	93,0	59,2	61,8
9	84,5	43,6	61,4	47,2	72,7	98,1	138,2	148,1	38,6	49,2	106,6	174,3
10	59,3	27,3	71,6	79,0	39,0	28,4	21,1	43,0	20,3	30,9	31,9	30,0
11	45,3	26,2	93,7	176,5	29,0	149,3	76,9	90,0	38,1	118,3	98,0	40,4
12	53,2	28,1	43,4	47,4	59,5	15,8	52,5	64,1	61,9	47,1	22,2	22,9
13	99,3	61,5	54,8	92,0	65,9	121,9	51,4	57,6	116,5	103,5	38,8	47,9
14	52,8	51,0	94,9	60,6	52,7	96,8	143,9	52,9	61,7	33,2	68,7	38,5
15	26,8	23,9	17,3	92,8	15,2	18,9	30,6	29,9	39,5	9,0	41,4	26,3
16	31,4	33,1	35,1	110,6	65,3	16,0	21,9	37,9	64,0	48,4	28,0	10,5
17	28,8	17,1	43,5	83,2	37,5	28,3	75,5	74,3	40,4	72,0	145,1	21,2
18	22,5	81,6	64,2	132,0	32,6	65,9	31,2	46,8	80,7	25,8	150,3	71,1
19	16,4	19,9	18,2	41,6	37,7	36,2	24,7	55,7	50,3	34,8	45,9	34,3
20	47,8	28,1	59,4	101,7	29,4	56,5	38,8	50,9	30,7	26,5	26,4	23,4
21	44,5	28,3	8,1	37,4	46,0	29,0	16,0	37,1	34,6	25,7	54,0	24,6
22	22,8	29,4	24,2	74,1	62,4	76,7	60,6	32,2	84,7	40,4	80,6	58,5
23	34,0	76,4	58,0	125,7	190,5	99,6	87,5	64,1	83,3	74,0	73,6	63,3
24	21,2	62,2	35,5	70,5	28,0	21,2	83,3	56,3	53,9	70,2	51,9	81,1
25	25,9	59,8	105,1	147,3	83,0	111,8	63,5	127,4	57,1	121,2	125,1	203,9
26	64,4	49,1	35,4	67,9	76,9	30,6	70,9	92,2	65,1	52,1	154,3	83,2
27	24,7	21,2	25,6	40,5	22,2	28,2	16,6	97,7	60,5	40,3	24,8	24,1
28	25,9	18,7	65,2	127,7	74,3	95,7	33,9	93,1	44,4	33,1	20,2	23,2
29	33,8	104,0	118,2	92,1	63,0	216,4	149,5	162,6	43,4	136,7	104,4	78,7
30	61,0	92,4	18,1	180,2	74,0	30,4	95,7	36,1	100,1	113,3	141,9	103,1
31	24,9	28,6	10,5	17,7	26,6	13,3	20,6	34,5	32,6	53,2	18,4	29,8
32	25,1	68,4	32,5	12,9	55,4	96,1	16,8	20,7	33,3	35,1	23,8	19,0
33	26,6	23,0	32,6	117,8	30,3	19,1	33,6	66,8	36,1	61,3	66,8	72,6
34	97,5	33,9	212,5	253,3	113,2	39,9	25,3	44,7	63,9	61,6	19,4	69,6
35	10,7	47,9	145,0	63,2	36,1	65,0	30,3	60,7	48,2	39,1	45,4	69,4
36	55,0	32,8	94,8	22,9	83,2	148,2	82,0	142,1	38,5	165,4	101,3	102,9
37	12,4	26,5	46,1	39,8	17,0	59,4	39,0	58,1	37,4	52,9	43,6	23,1
38	39,8	23,4	27,1	26,1	224,9	25,0	34,3	216,0	125,4	195,8	36,3	97,7
39	47,0	23,5	33,3	41,8	26,9	24,5	32,8	32,8	22,9	79,7	35,9	47,3
40	48,1	65,5	27,4	15,9	49,5	79,2	22,4	36,2	26,7	55,2	21,5	63,0
41	42,7	86,4	70,1	71,9	50,0	158,2	48,4	117,4	49,3	132,9	70,4	65,3
42	60,7	74,7	47,7	38,2	56,2	48,2	25,2	90,0	34,7	54,2	35,7	42,5
43	105,8	39,5	99,3	120,4	48,5	86,2	21,4	74,2	89,0	55,6	30,6	42,0
44	79,8	14,0	133,8	67,3	50,0	81,4	43,8	68,5	52,4	89,4	63,2	67,6
45	30,2	56,7	44,9	234,8	23,0	152,2	29,2	143,7	49,4	173,2	158,3	114,1

Tabla A.5 (Continuación)

Medias de los tiempos de respuesta en segundos del análisis de varianza con el tiempo de respuesta como variable dependiente

	Medias											
Est.	to1n1	to1n2	to1n3	to1n4	to2n1	to2n2	to2n3	to2n4	to3n1	to3n2	to3n3	to3n4
46	30,4	58,4	79,7	64,0	83,3	48,8	55,0	26,8	66,5	78,2	63,0	61,1
47	22,9	41,2	187,8	69,2	55,1	48,0	94,0	70,8	93,0	69,7	69,7	45,6
48	61,7	57,4	42,6	50,0	27,3	57,1	37,9	63,8	10,3	40,7	28,9	30,1
49	19,5	12,8	9,7	42,8	10,6	27,0	11,2	25,8	19,8	26,5	9,1	21,5
50	43,2	86,2	80,4	127,0	53,4	54,7	43,6	46,0	34,9	36,0	82,2	46,8
51	30,9	24,9	57,7	76,2	31,0	41,4	39,1	50,0	69,4	91,0	59,4	18,3
52	71,0	42,7	67,4	96,9	31,0	62,5	23,7	23,8	39,3	75,5	9,6	22,0
53	15,8	14,6	46,6	28,2	31,9	41,3	31,8	41,2	28,5	26,1	17,4	23,5
54	54,0	22,7	54,3	73,1	43,6	32,7	30,2	42,6	46,3	24,3	55,6	19,7
55	258,6	284,6	20,7	366,5	67,6	175,4	101,0	75,2	141,6	24,1	346,9	15,2
56	47,3	37,7	65,3	70,7	55,4	55,2	90,3	61,6	38,7	40,2	49,4	43,4
57	59,8	24,2	28,0	202,9	55,1	26,0	28,8	97,0	49,8	51,4	97,7	78,2
58	120,3	102,3	87,0	108,7	89,6	147,3	186,3	104,9	110,9	39,8	179,7	59,7
59	70,5	80,5	89,0	95,0	87,7	62,8	34,2	50,5	72,3	33,9	59,8	38,4
60	68,7	56,5	34,2	60,4	61,4	56,3	20,7	112,0	39,9	21,4	72,4	81,2
61	69,2	101,7	67,8	115,7	92,8	79,3	80,1	82,8	36,6	43,8	53,4	64,4
62	51,9	81,5	41,4	140,9	50,3	77,7	20,0	65,9	43,3	35,2	59,5	74,0
63	36,9	47,1	34,4	53,9	135,5	64,6	50,8	50,7	31,9	41,7	40,3	29,8
64	63,9	37,2	139,2	144,2	91,0	46,0	37,2	65,0	54,5	101,7	100,2	74,1
65	193,7	65,1	100,4	122,7	95,0	114,6	89,7	110,5	73,3	66,4	96,3	90,8
66	150,7	82,3	158,3	62,9	54,6	42,7	167,8	96,6	87,4	129,2	73,6	182,6
67	133,6	53,5	38,2	94,0	69,4	101,9	31,9	44,2	109,5	133,0	38,9	78,7
68	41,7	64,8	77,3	61,6	53,6	36,1	50,0	54,6	30,3	52,0	24,9	46,8
69	89,8	41,6	47,1	22,6	72,6	71,2	83,8	31,4	17,4	157,8	107,9	30,3
70	65,0	113,4	109,4	73,7	119,7	40,1	39,4	65,6	61,7	29,8	81,8	31,5
71	68,2	29,9	69,3	84,7	42,1	45,4	46,6	32,9	17,7	59,4	46,0	61,9
72	64,9	34,3	95,0	101,7	70,0	47,5	58,5	95,5	47,6	51,0	35,4	69,1
73	27,6	46,8	49,7	17,1	52,3	157,5	15,0	59,2	80,0	111,4	22,8	22,0
74	105,9	127,5	206,8	55,5	90,3	96,9	130,6	193,2	94,0	76,7	96,8	119,8
75	99,2	48,7	95,8	161,3	101,4	29,5	34,8	25,9	41,5	21,6	60,1	46,5
76	28,5	4,1	45,2	68,3	75,0	23,9	119,7	30,2	12,2	5,9	13,1	3,9
77	51,1	134,7	117,1	27,8	72,2	14,2	58,6	155,2	169,5	10,2	137,5	3,3
78	88,6	38,4	36,1	85,2	105,4	45,6	77,0	116,7	37,5	15,8	62,9	60,3
79	107,1	33,0	20,1	92,3	23,6	40,7	42,3	57,0	39,9	44,8	20,9	30,4
80	16,6	26,5	8,6	12,0	13,4	9,1	17,3	19,5	19,8	9,0	17,6	17,4
81	108,9	21,1	27,7	53,0	75,5	48,9	47,2	61,2	30,2	36,3	66,6	42,5
82	120,3	85,5	80,5	210,5	38,7	66,8	43,5	46,2	167,0	106,0	45,4	94,2
83	81,0	86,1	78,9	69,6	73,9	163,2	47,4	131,2	25,1	62,3	84,8	84,3
84	28,6	31,8	122,4	18,1	80,2	120,2	15,5	55,7	35,4	52,9	47,9	36,1
85	36,6	34,1	7,3	23,0	33,4	52,8	15,6	22,0	49,9	39,5	11,0	76,0
86	40,4	25,0	30,0	55,3	55,8	36,0	9,3	63,4	35,6	22,5	10,1	77,1
87	104,1	41,7	19,2	104,4	101,0	71,2	116,6	44,6	67,0	80,6	82,0	38,5
88	78,2	53,8	48,1	102,0	155,6	67,4	35,1	19,4	82,0	147,9	7,7	45,9
89	44,6	21,9	11,6	47,5	35,0	47,1	20,2	43,5	31,5	49,1	22,9	33,8
90	89,4	70,3	68,1	164,2	98,6	53,0	71,9	108,8	112,5	139,4	91,2	183,1

Tabla A.5 (Continuación)

Medias de los tiempos de respuesta en segundos del análisis de varianza con el tiempo de respuesta como variable dependiente

	Medias											
Est.	to1n1	to1n2	to1n3	to1n4	to2n1	to2n2	to2n3	to2n4	to3n1	to3n2	to3n3	to3n4
91	53,0	42,3	46,8	119,1	20,6	103,0	37,9	55,1	53,4	54,4	62,6	42,9
92	23,9	26,9	16,4	41,0	27,4	33,4	17,4	16,0	38,6	21,9	58,6	42,4
93	72,3	62,6	116,8	110,2	31,6	54,0	50,0	30,0	80,0	39,8	40,1	68,9
94	152,0	61,4	64,6	147,0	40,0	72,8	108,4	32,5	51,7	195,0	223,3	20,6
95	73,3	70,4	23,0	65,4	36,9	38,8	28,1	42,0	46,1	63,2	24,7	69,4
96	55,8	43,7	109,0	73,8	21,8	25,2	34,2	260,3	78,7	78,7	12,5	136,7
97	39,3	69,5	19,4	61,0	39,4	54,7	59,0	59,5	36,3	39,0	11,0	16,9
98	22,9	37,3	21,0	95,1	25,2	32,8	14,9	29,1	26,2	35,0	40,4	44,1
99	69,4	39,9	166,3	168,7	36,7	83,7	29,7	91,3	56,3	58,2	65,3	35,9
100	40,7	38,8	95,4	78,2	62,5	169,1	47,1	83,8	44,4	112,6	57,0	38,9
101	43,3	27,3	48,5	74,4	35,8	31,4	29,4	41,8	39,1	54,4	40,4	26,6
102	70,0	73,5	14,2	44,5	73,0	89,1	59,3	80,4	66,6	16,8	91,8	32,0
103	46,8	117,3	118,2	103,3	57,1	77,0	62,8	65,8	59,3	27,5	64,6	37,8
105	161,2	40,8	100,5	117,3	115,7	178,9	36,6	136,6	54,9	167,1	46,7	30,2
106	88,2	85,9	93,9	183,2	47,3	33,8	56,6	237,1	242,4	14,2	54,5	60,0
107	29,9	47,2	30,1	139,9	14,8	17,1	15,8	112,3	82,9	11,8	13,6	20,7
108	75,2	143,9	85,6	132,8	63,0	51,4	61,6	124,8	69,4	83,6	64,3	72,3
104	55,5	101,3	13,0	13,3	72,2	60,4	8,1	3,7	14,5	8,5	15,4	5,8
109	130,3	86,7	92,3	132,6	97,9	52,3	81,8	62,6	75,5	33,6	138,6	67,8
110	26,8	29,1	48,0	41,0	60,1	41,0	34,4	124,6	103,0	55,2	26,1	40,1
111	77,3	11,7	36,1	55,8	93,7	44,2	22,8	17,4	51,0	26,8	14,5	29,7
112	50,2	107,2	40,1	115,7	40,6	38,7	38,1	123,5	40,0	35,1	34,4	63,7
113	53,4	59,8	20,5	94,9	39,1	70,0	22,1	14,3	93,0	38,1	28,5	60,9
114	36,7	29,6	15,1	30,9	29,8	60,8	34,7	71,6	26,0	72,3	50,7	63,1
115	28,1	100,2	27,8	42,5	79,0	71,6	28,5	26,1	59,2	41,0	74,8	31,4
116	41,1	61,3	64,3	56,4	58,4	82,1	36,9	139,4	100,5	38,5	16,1	38,5
117	41,6	34,2	14,9	60,5	74,0	24,7	7,4	12,3	20,2	22,1	6,3	6,4
118	28,8	26,8	50,1	86,3	49,9	56,1	46,0	24,1	21,7	23,6	24,1	48,2
119	95,1	43,7	176,8	178,2	117,1	52,7	31,2	60,8	45,1	53,9	82,4	45,4
120	123,0	104,5	63,0	127,4	52,2	71,8	39,4	93,2	33,0	38,8	20,2	38,5
121	116,3	55,9	67,3	153,6	64,1	65,8	72,9	55,7	27,0	25,1	48,7	17,0
122	42,0	42,7	159,6	84,9	36,1	33,9	49,9	92,0	25,9	74,8	55,4	79,4
123	84,2	29,8	16,3	198,6	25,1	42,9	20,7	39,8	47,4	112,7	28,6	39,4
124	81,7	38,3	40,5	48,3	77,3	68,2	61,5	39,1	43,2	104,8	82,7	46,1
125	29,2	23,8	29,4	57,2	118,7	54,5	19,6	18,2	59,7	16,5	20,2	13,5
126	48,6	30,4	27,8	15,2	55,8	54,5	10,7	51,9	35,3	14,5	12,9	20,1
127	53,4	35,2	18,9	27,2	16,8	42,4	19,5	45,4	48,2	34,8	81,4	23,9
128	34,4	46,6	64,9	107,5	60,3	64,8	40,3	60,6	32,7	94,0	74,6	104,8
129	24,4	14,0	10,4	58,8	42,7	52,4	28,5	59,6	19,9	36,3	53,3	23,3
130	21,2	19,3	19,1	63,9	55,5	35,0	15,9	49,2	19,8	44,3	34,8	44,2
131	42,3	47,9	61,3	130,1	51,1	60,9	55,3	85,9	49,0	92,3	43,7	102,7

Tabla A.6. *Órdenes en que han aparecido las tareas de estimación a cada sujeto en la prueba de estimación*

	Órdenes																							
Est.	o1	o2	o3	o4	o5	o6	o7	o8	o9	o10	o11	o12	o13	o14	o15	o16	o17	o18	o19	o20	o21	o22	o23	o24
1	14	2	21	8	7	22	3	10	6	1	24	13	5	19	15	4	20	16	18	12	23	17	9	11
2	11	14	1	15	16	7	23	19	3	21	22	12	20	18	10	13	6	2	5	9	8	17	4	24
3	11	22	23	8	15	9	12	2	19	17	16	21	7	10	6	13	18	20	1	4	14	3	5	24
4	18	17	5	8	20	16	9	13	22	19	24	11	1	14	23	4	21	12	10	15	6	2	3	7
5	12	4	16	10	3	19	8	17	11	23	9	21	15	24	2	13	18	7	5	20	6	1	14	22
6	24	16	1	14	20	23	6	15	13	4	3	12	19	7	2	17	8	18	21	11	22	5	10	9
7	8	9	5	2	10	13	7	1	23	21	11	15	20	22	6	24	17	16	12	19	18	14	4	3
8	18	1	5	11	2	24	8	13	14	7	12	20	19	23	9	3	16	4	6	10	15	22	17	21
9	22	11	21	15	6	24	23	17	13	2	20	8	4	19	1	12	16	5	14	18	9	3	10	7
10	22	8	4	3	19	18	2	21	13	10	17	20	11	15	9	23	7	24	1	12	6	16	5	14
11	7	8	17	23	10	13	22	19	3	1	9	6	24	18	16	12	15	11	5	4	14	20	2	21
12	2	24	3	10	4	22	16	9	5	12	21	17	20	19	1	13	14	7	11	8	18	23	15	6
13	9	17	1	4	20	3	8	15	12	11	2	19	18	21	5	23	14	10	16	13	7	6	24	22
14	12	22	6	1	17	11	18	15	2	16	24	5	9	19	3	10	4	23	20	13	21	14	8	7
15	18	14	20	8	4	3	6	17	19	24	21	16	23	2	1	15	12	9	11	10	5	22	7	13
16	7	16	4	1	18	17	9	13	5	2	11	24	21	20	3	8	19	12	15	6	14	10	22	23
17	3	18	21	11	15	13	14	20	19	8	12	10	17	24	7	1	22	6	16	5	23	9	4	2
18	19	15	4	22	9	13	14	11	8	20	3	24	18	16	23	2	6	21	12	10	5	7	1	17
19	19	22	16	17	7	10	5	2	3	11	20	14	8	23	1	15	24	9	4	12	6	13	21	18
20	1	7	20	17	16	19	21	22	6	18	14	5	4	8	24	3	15	12	11	10	2	9	13	23
21	2	10	1	23	20	4	14	21	18	13	17	6	3	5	15	22	9	8	19	12	7	11	24	16
22	22	4	8	12	13	23	3	11	5	24	14	19	1	15	2	7	20	9	21	6	16	10	17	18
23	24	22	20	3	9	19	4	15	21	8	11	7	10	18	2	16	1	17	6	5	12	13	14	23
24	17	5	23	11	2	1	4	19	22	24	6	10	13	16	21	9	12	8	15	7	20	3	18	14
25	14	15	16	6	17	12	5	8	7	23	2	20	13	1	11	9	10	21	22	18	24	4	3	19
26	11	20	10	7	8	23	17	24	16	9	4	21	2	18	14	1	15	13	5	22	19	12	6	3
27	17	16	23	19	8	20	24	10	7	6	3	15	13	1	11	14	12	9	21	4	5	18	2	22
28	10	14	2	17	8	5	9	18	4	24	20	7	12	6	19	22	11	15	23	1	13	3	16	21
29	9	3	19	20	17	22	5	24	15	1	2	13	18	12	4	8	7	11	6	21	23	16	10	14
30	1	6	22	3	12	7	14	11	24	23	21	16	13	17	5	19	9	4	2	20	15	8	10	18
31	8	2	16	20	22	14	21	6	5	7	12	24	9	18	17	10	4	15	13	1	3	19	11	23
32	12	21	9	20	8	15	17	2	4	18	6	1	14	5	10	11	13	22	7	23	19	3	16	24
33	14	1	5	2	15	18	9	4	23	6	3	8	10	7	12	20	16	19	11	21	24	17	13	22
34	9	17	21	8	19	11	12	22	24	13	23	7	6	5	14	2	18	3	15	10	4	20	16	1
35	22	13	19	14	10	6	21	2	7	24	16	11	15	5	9	4	23	12	18	17	1	8	20	3
36	9	12	18	23	20	24	11	17	8	1	5	13	3	22	7	15	10	6	14	19	16	4	2	21
37	15	7	24	4	21	23	9	22	11	12	16	13	2	14	1	5	6	8	18	17	20	10	3	19
38	20	4	7	24	1	5	14	9	15	18	6	2	10	16	13	8	23	12	11	21	19	3	22	17
39	2	24	14	12	16	19	8	7	5	15	13	3	22	1	11	9	20	6	23	21	17	10	18	4
40	8	15	6	20	3	5	14	21	24	13	12	16	10	1	2	4	11	9	19	18	23	22	17	7
41	18	2	21	4	22	9	14	3	12	11	24	15	16	6	5	10	19	1	20	8	17	13	23	7
42	16	19	22	8	14	6	2	17	4	20	13	3	21	15	24	5	11	7	12	18	10	1	9	23
43	11	15	2	5	20	22	4	10	19	6	18	16	13	21	3	8	9	1	23	12	7	14	24	17
44	15	16	19	13	6	2	22	23	5	8	12	7	24	1	21	20	11	3	17	4	10	14	18	9
45	21	23	18	7	13	17	3	12	15	5	24	4	19	6	20	16	10	9	14	8	22	1	2	11

Tabla A.6 (Continuación)

Órdenes en que han aparecido las tareas de estimación a cada sujeto en la prueba de estimación

	Órdenes																							
Est	o1	o2	o3	o4	o5	o6	o7	o8	o9	o10	o11	o12	o13	o14	o15	o16	o17	o18	o19	o20	o21	o22	o23	o24
46	7	2	11	18	9	8	6	10	21	1	24	19	12	5	14	4	15	20	17	16	22	23	3	13
47	19	13	12	24	5	7	6	14	22	2	23	10	16	8	1	20	4	3	9	11	17	18	21	15
48	7	1	21	13	23	24	11	22	4	9	20	16	3	18	2	15	5	6	12	19	17	10	14	8
49	10	13	23	2	21	11	4	15	3	19	5	8	24	16	6	20	7	22	1	14	18	9	17	12
50	3	7	6	1	10	22	16	4	15	13	20	12	5	17	21	23	2	11	9	19	18	24	14	8
51	4	19	23	7	5	14	18	20	13	2	6	12	9	10	24	15	11	8	3	21	1	16	17	22
52	16	1	14	4	23	5	12	6	15	17	19	2	24	20	22	8	7	11	13	9	18	10	21	3
53	23	10	1	4	9	12	17	19	2	18	20	22	15	5	3	24	6	16	21	14	7	8	11	13
54	2	9	3	17	6	23	12	13	19	22	7	16	4	20	10	21	1	14	18	5	24	8	11	15
55	4	15	11	22	20	3	13	12	10	2	21	18	14	19	8	24	1	5	16	6	7	9	17	23
56	7	17	6	15	21	18	8	4	1	19	20	5	24	3	11	2	23	12	16	14	10	22	13	9
57	24	14	10	22	17	7	12	18	20	4	13	9	6	5	16	2	8	19	15	23	3	21	11	1
58	3	11	16	7	20	1	23	10	8	13	24	21	22	5	9	15	2	14	6	18	4	17	19	12
59	19	4	12	13	1	16	11	17	18	6	20	14	9	23	15	24	2	7	3	21	10	5	22	8
60	15	7	22	12	10	4	13	14	11	21	16	19	23	24	9	20	17	18	5	8	6	2	1	3
61	18	13	9	16	19	20	6	4	1	3	22	5	7	23	10	8	17	15	2	21	12	24	11	14
62	6	3	13	18	24	20	4	2	7	9	19	23	10	1	22	12	11	8	17	15	14	5	16	21
63	14	11	22	1	17	10	7	18	15	6	20	5	9	13	23	21	16	4	8	24	12	19	3	2
64	24	14	7	8	17	22	15	10	18	19	3	21	16	6	11	1	13	5	9	20	4	12	23	2
65	17	5	13	22	10	15	14	2	1	8	6	23	4	18	16	9	3	21	24	20	7	11	19	12
66	4	18	8	10	19	11	7	6	3	22	14	13	16	24	20	5	9	2	12	23	21	1	17	15
67	8	15	10	4	17	2	20	11	19	5	1	21	22	13	12	24	18	9	7	16	14	23	3	6
68	5	2	3	20	21	9	16	7	11	6	17	24	12	10	23	15	13	19	14	22	1	8	18	4
69	20	12	17	4	13	11	6	21	19	14	2	5	22	18	8	1	3	16	7	10	23	24	15	9
70	2	19	4	18	13	20	1	11	16	15	21	14	5	6	23	17	7	8	24	10	12	9	22	3
71	9	17	12	23	8	6	24	11	18	20	10	4	1	7	21	16	13	5	15	22	19	14	3	2
72	16	9	19	20	13	11	14	21	3	23	22	12	24	8	18	5	7	6	15	10	1	17	4	2
73	22	15	2	4	12	1	7	24	18	11	13	17	3	23	14	16	8	21	10	9	6	5	20	19
74	22	14	4	20	15	17	6	10	24	12	19	21	2	1	11	13	16	5	7	8	9	23	18	3
75	3	16	22	12	5	9	15	18	10	6	21	7	11	13	20	2	17	1	4	24	19	14	8	23
76	20	4	24	2	6	7	8	16	12	23	19	17	21	3	1	13	9	18	14	22	15	5	10	11
77	7	13	10	20	8	22	23	4	21	12	24	3	6	9	18	5	17	1	11	19	16	2	14	15
78	2	7	8	5	15	22	18	13	20	11	19	23	16	9	4	24	21	1	10	3	14	12	6	17
79	24	4	5	23	7	13	10	15	14	12	21	18	9	16	1	6	17	19	20	2	11	22	3	8
80	1	12	11	5	9	17	18	20	2	3	4	19	14	21	23	13	6	24	7	8	15	16	22	10
81	1	2	20	12	11	9	23	5	22	3	16	8	6	7	19	17	21	15	18	24	4	10	14	13
82	7	18	21	24	1	23	3	16	6	12	15	2	14	19	20	13	8	17	22	5	4	10	11	9
83	14	17	7	19	18	10	6	20	9	1	13	4	16	24	11	2	22	8	23	21	15	12	3	5
84	10	22	5	12	23	20	7	19	11	14	21	13	3	9	24	17	6	2	15	16	1	4	8	18
85	20	24	19	21	2	18	9	6	8	4	12	10	13	15	17	5	14	16	23	22	11	3	1	7
86	18	3	10	7	8	20	6	16	21	22	23	11	15	12	4	13	2	17	24	14	9	5	19	1
87	1	10	5	2	17	19	21	12	4	20	8	15	13	24	11	16	18	3	6	23	14	7	9	22
88	18	7	12	14	8	4	1	20	21	11	2	10	19	22	13	15	23	16	17	9	5	6	24	3
89	4	5	2	18	15	23	21	22	3	7	16	12	11	17	24	6	8	20	14	19	9	1	10	13
90	2	20	9	4	3	7	15	18	24	22	6	1	14	21	10	16	17	5	8	13	12	23	19	11

Tabla A.6 (Continuación)

Órdenes en que han aparecido las tareas de estimación a cada sujeto en la prueba de estimación

	Órdenes																							
Est.	o1	o2	o3	o4	o5	o6	o7	o8	o9	o10	o11	o12	o13	o14	o15	o16	o17	o18	o19	o20	o21	o22	o23	o24
91	12	21	16	20	2	5	11	22	15	14	23	7	6	24	4	17	9	18	1	3	19	13	10	8
92	23	2	7	20	11	18	10	4	17	14	22	16	8	15	13	9	5	12	19	6	24	21	3	1
93	15	14	2	1	12	18	20	17	9	8	7	4	3	19	13	23	24	11	6	10	21	16	22	5
94	2	12	13	23	15	11	21	19	9	18	10	1	16	14	17	6	22	3	4	20	5	24	7	8
95	13	4	23	16	8	7	21	2	14	9	5	11	19	18	1	24	17	15	3	10	20	12	6	22
96	20	13	17	16	19	5	3	4	7	14	15	6	18	23	1	12	22	21	9	24	11	8	10	2
97	19	3	4	12	20	6	1	21	17	7	23	24	11	18	13	5	14	16	9	2	8	10	15	22
98	12	7	19	15	8	9	1	24	18	4	3	5	16	21	22	17	2	11	20	14	23	6	13	10
99	3	5	4	12	11	13	22	19	9	21	8	17	1	18	20	6	10	7	24	15	23	2	14	16
100	5	10	17	20	22	24	19	7	8	3	4	16	13	1	15	9	2	18	12	14	23	11	6	21
101	8	7	11	4	1	21	22	16	17	10	19	18	6	12	20	13	2	24	9	15	14	3	23	5
102	18	16	23	8	12	7	5	9	4	13	20	14	24	22	1	10	6	11	19	21	2	3	15	17
103	23	18	14	11	2	17	16	19	24	7	9	1	12	20	4	15	13	22	10	5	3	6	21	8
105	3	5	13	4	12	18	17	10	15	22	8	14	2	23	19	11	6	20	9	21	16	1	7	24
106	19	1	7	23	3	9	4	14	15	24	22	20	10	8	16	12	11	21	2	17	6	18	5	13
107	9	3	19	14	11	15	2	5	22	16	10	17	18	23	4	12	20	7	8	13	1	21	24	6
108	21	20	22	11	12	13	7	6	23	19	10	16	8	24	4	3	15	9	18	5	2	17	1	14
104	17	21	1	7	13	23	20	18	5	4	12	24	3	9	10	11	19	14	22	2	16	8	15	6
109	19	4	5	11	6	20	7	22	24	8	13	23	21	15	2	16	1	9	12	18	17	3	10	14
110	2	4	3	23	7	8	17	22	6	24	19	10	21	15	5	9	13	18	12	1	11	16	20	14
111	18	14	3	11	19	8	23	20	12	7	13	10	6	24	22	15	4	5	2	17	16	9	21	1
112	3	24	14	5	15	17	2	6	7	8	23	1	16	18	21	9	4	19	20	11	10	12	22	13
113	18	4	20	13	11	23	17	1	14	6	16	12	22	2	3	15	9	21	7	24	19	8	5	10
114	7	15	22	17	5	3	18	21	13	6	1	23	11	24	12	20	10	9	14	19	8	4	16	2
115	20	6	4	19	5	14	2	1	8	3	13	7	10	21	15	22	9	17	24	11	16	23	18	12
116	21	6	19	10	20	13	11	17	16	18	14	5	12	23	3	9	7	2	4	15	8	24	22	1
117	7	24	11	21	19	22	4	1	23	14	5	3	16	17	20	8	9	10	15	12	6	2	13	18
118	18	17	21	19	11	9	16	2	20	1	4	15	22	6	5	3	8	13	7	12	24	23	10	14
119	4	23	1	12	15	21	17	13	22	7	10	16	3	6	18	24	20	2	9	8	11	5	14	19
120	1	4	21	6	8	13	11	17	23	18	3	9	22	2	24	5	20	10	7	16	19	12	14	15
121	16	15	1	6	22	21	19	11	10	12	3	18	23	7	9	14	20	2	4	5	13	8	24	17
122	17	2	4	5	8	19	10	23	3	21	20	1	9	22	16	14	12	24	7	6	15	11	18	13
123	5	23	17	13	10	11	22	16	20	14	3	21	6	12	18	24	8	19	2	4	15	9	1	7
124	16	3	22	1	17	24	14	15	21	20	12	5	8	4	13	11	10	2	19	6	7	18	23	9
125	12	4	13	21	15	2	6	18	1	3	5	20	10	24	7	14	23	8	11	16	17	9	19	22
126	2	5	17	19	16	8	4	9	7	11	18	15	13	22	23	12	6	14	21	10	1	20	3	24
127	2	14	21	4	15	12	23	11	3	6	13	5	19	1	16	9	22	18	7	8	17	20	24	10
128	6	16	5	17	8	21	4	24	7	15	19	3	11	22	23	10	14	20	18	13	2	1	9	12
129	2	9	16	20	11	15	13	24	3	7	8	14	18	22	6	12	19	5	21	4	1	10	23	17
130	13	23	17	6	5	19	12	10	8	18	4	20	21	1	11	9	16	15	3	24	22	2	14	7
131	2	3	22	20	21	23	15	17	16	9	11	18	4	12	7	5	24	10	19	1	8	14	6	13

Apéndice B: Programas de las asignaturas

A continuación, se presentan los programas de dos asignaturas: Matemáticas y su Didáctica I y Matemáticas y su Didáctica II. En la primera asignatura es en la que se da el periodo de instrucción sobre estimación. Es la asignatura que estaban estudiando los alumnos pertenecientes al Curso 1, y que habían estudiado los alumnos del Curso 2 dos años atrás. Los alumnos del Curso 2 estaban estudiando Matemáticas y su Didáctica II. Considero que los programas contienen información de interés para contextualizar el periodo de instrucción sobre estimación y para comprender la relación que se produce en el curso entre dicho periodo de instrucción y el tema dedicado al número racional[383].

[383] El tema de estimación es anterior al estudio sobre el número racional y su didáctica. Durante la mayor parte del periodo de enseñanza de la estimación, se trabaja con números naturales. Sin embargo, en la prueba de estimación aparecen números decimales de varios tipos. Hay que destacar que, pese a que la instrucción se realiza únicamente con números naturales, en la prueba de estimación los números naturales resultan igual de difíciles que los números decimales mayores que uno. El objetivo didáctico (no de investigación) que se dio a la prueba de estimación con números decimales, dentro del curso, justo al final de la instrucción sobre estimación y antes de comenzar el estudio de los racionales, era que los alumnos tuviesen una experiencia de las dificultades que suponen los números decimales y los errores que se producen en su estudio.

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA I

CURSO: PRIMERO SEMESTRE: 2º

CARÁCTER: TRONCAL

CRÉDITOS: 6

DEPARTAMENTO: EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

DESCRIPTORES:

Conocimiento de las Matemáticas. Contenidos, recursos didácticos y materiales para el aprendizaje de las Matemáticas.

OBJETIVOS:

Consolidar la formación matemática necesaria que permita dominar los contenidos matemáticos básicos que configuran el currículo de la Educación Primaria.

Conocer los obstáculos, dificultades y errores que se producen en el aprendizaje de las Matemáticas.

Conocer los medios, materiales y recursos usuales en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Adquirir destrezas en el empleo de instrumentos, técnicas y material didáctico en el área de Matemáticas.

Capacitar al futuro profesor para realizar propuestas didácticas a partir del currículo base de Matemáticas en Educación Primaria.

Conocer algunos de los principios básicos de la Didáctica de la Matemática.

TEMARIO:

BLOQUE TEMÁTICO 1: CÁLCULO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

- Problemas aritméticos de estructura aditiva: clasificación
- Estrategias infantiles de resolución de problemas: la modelización, el

conteo y el uso de hechos básicos

- Problemas de estructura multiplicativa: clasificación
- Estrategias infantiles de resolución de problemas de estructura multiplicativa
- El dominio de las combinaciones básicas. Estrategias de cálculo mental.
- El uso de materiales didácticos

BLOQUE TEMÁTICO 2: EL APRENDIZAJE DE LOS ALGORITMOS DE CÁLCULO

- Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del sistema de numeración decimal
- Modelización de algoritmos. Fundamento del uso de los materiales estructurados
- Los algoritmos alternativos. Algoritmos inventados. Algoritmos históricos
- La enseñanza y el aprendizaje del cálculo con comprensión

BLOQUE TEMÁTICO 3: ALTERNATIVAS AL CÁLCULO ESCRITO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

- La calculadora como instrumento didáctico en Educación Primaria
- Actividades y problemas con la calculadora
- Estimación en cálculo: Estrategias de estimación
- Evaluación de la estimación en cálculo

BLOQUE TEMÁTICO 4: EL NÚMERO RACIONAL

- El aprendizaje de los números racionales con comprensión
- Diversas interpretaciones de las fracciones. Representación de fracciones. Operaciones con fracciones
- Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las fracciones y los

decimales

BIBLIOGRAFÍA:

BLOQUE TEMÁTICO 1:

BRISSIAUD, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid: Visor.

CARRILLO, D., SAA, Mª. D., Y SÁNCHEZ, E. (1989). *El aprendizaje del número y las regletas de Cuisenaire*. Murcia: Universidad de Murcia.

GIMÉNEZ, J., Y GIRONDO, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.

GÓMEZ, B. (1993). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

KAMII, C. K. (1993). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

KAMII, C. K. (1992). *Reinventando la aritmética II*. Madrid: Visor.

KAMII, C. K. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

BLOQUE TEMÁTICO 2:

CENTENO, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

LLINARES, S., Y SÁNCHEZ, Mª. V. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

BLOQUE TEMÁTICO 3:

CARPENTER, T., FENNEMA, E., FRANKE, M., LEVI, L., Y EMPSON, S. (1999). *Las Matemáticas que hacen los niños. Enseñanza de enfoque cognitivo*. Portsmouth, NH: Heinemann.

PUIG, L., Y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

BLOQUE TEMÁTICO 4:

FIELKER, D. S. (1986). *Usando las calculadoras con niños de 10 años*. Valencia: Generalitat Valenciana.

SEGOVIA, I., CASTRO, E., CASTRO, E., RICO, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

UDINA, F. (1992). *Aritmética y calculadoras*. Madrid: Síntesis.

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

DICKSON, L., BROWN, M., GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor & MEC.

NORTES, A. (1993). *Matemáticas y su didáctica*. Murcia: Tema-DM.

ORTON, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Morata-MEC.

MATERIALES DIDÁCTICOS

CASCALLANA, M. T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: AULA XXI & Santillana.

GRUPO CERO. (1996). *Matemáticas para la Educación Primaria* (4 v.). Madrid: MEC & Edelvives.

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA II

CURSO: TERCERO SEMESTRE: 2º

CARÁCTER: OBLIGATORIA

CRÉDITOS: 5

DEPARTAMENTO: EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

DESCRIPTORES:

Conocimiento de las Matemáticas. Contenidos, recursos didácticos y materiales para el aprendizaje de las Matemáticas. Desarrollo de los conceptos matemáticos básicos.

OBJETIVOS:

Consolidar la formación matemática necesaria para dominar los contenidos matemáticos básicos que configuran el currículo de la Educación Primaria.

Conocer los medios, materiales y recursos usuales en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Conocer el desarrollo de los conceptos matemáticos propios de la Educación Primaria.

Conocer los obstáculos, dificultades y errores que se producen en el aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Adquirir destrezas en el empleo de instrumentos, técnicas y material didáctico en el área de Matemáticas.

Capacitar al futuro profesor para realizar propuestas didácticas a partir del currículo base de Matemáticas en Educación Primaria.

Conocer algunos de los principios básicos de la Didáctica de las Matemáticas

TEMARIO:

BLOQUE TEMÁTICO 1. DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA (2.4 CRÉDITOS)

- Las figuras planas: propiedades. Los elementos y sus relaciones
- Transformaciones geométricas. Tipos de transformaciones. Las isometrías: simetrías, giros y traslaciones. Aspectos didácticos de las transformaciones geométricas
- Clasificación de las figuras planas. Los polígonos. Triángulos y cuadriláteros
- Instrumentos de dibujo para la exploración de las formas geométricas
- El desarrollo de los conceptos espaciales en el niño
- Área y perímetro. Composición y descomposición de figuras
- Representación del espacio. Sistemas de referencia
- Investigación en geometría con el ordenador
- Resolución de problemas geométricos. Composición y descomposición de figuras planas
- Conceptos figurales. El desarrollo de la "visión espacial". Conocimiento de los cuerpos geométricos a través de su construcción y manipulación.

BLOQUE TEMÁTICO 2. LA MEDIDA (1.3 CRÉDITOS)

- Principios para la enseñanza de la medición en Educación Primaria
- Desarrollo de las nociones de magnitud y medida en el niño
- Aspectos didácticos de las magnitudes y su medida

BLOQUE TEMÁTICO 3. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (1.3 CRÉDITOS)

- Análisis exploratorio de datos: Conceptos básicos
- Fenómenos aleatorios. Noción de probabilidad. Desarrollo psicológico de

la intuición probabilística en el niño. Errores y dificultades en la comprensión de las nociones estocásticas elementales

- Aspectos didácticos de la estadística y la probabilidad

BIBLIOGRAFÍA:

ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. (1991). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

ALSINA, C., PÉREZ, R. y RUIZ, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid. Síntesis.

CARPENTER, T., FENNEMA, E., FRANKE, M., LEVI, L., y EMPSON, S. (1999). *Las matemáticas que hacen los niños: La enseñanza de las Matemáticas desde un enfoque cognitivo*. Portsmouth, NH: Heinemann.

CARPENTER, T. P. y LEHRER, R. (1999). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con comprensión. En E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19–32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

CASTRO, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

CHAMORRO, C. Y BELMONTE, J. M. (1994). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.

CHEVALLARD, Y., GASCÓN, J. y BOSCH, M. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE Universitat de Barcelona & Horsori.

DICKSON, L., BROWN, M. y GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor & MEC.

ELFERS, J. (1993). *El tangram: Juego de formas chino*. Barcelona: Labor.

GUILLEN, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.

GUTIÉRREZ, A. y FERNÁNDEZ, A. (1985). *Actividades con el geoplano para* *la EGB*. Valencia: Universidad de Valencia.

INSKEEP, J. E., JR. (1976). La enseñanza de la medida en la Educación Primaria. En NCTM (Ed.), *Measurement in School Mathematics* (pp. 60–86). Reston, VA: NCTM.

ISAACS, A. C. y CARROLL, W. M. (1999). Estrategias para la enseñanza de los hechos básicos. *Teaching Children Mathematics, 5*(9), 508-515.

GODINO, J. y BATANERO, C. (1991). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

MARTÍNEZ, A. y RIVAYA, F. (1989). *Una metodología activa y lúdica para el aprendizaje de la geometría*. Madrid: Síntesis.

NORTES, A. (1995). *Encuestas y precios*. Madrid: Síntesis.

OLMO, M. A., MORENO, M. F. y GIL, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Apéndice C: Tablas de datos de la entrevista

El Apéndice C muestra todos los datos correspondientes a las estimaciones, los tiempos de respuesta, y el orden de los ítems, en la administración de la entrevista. Se complementa con el Apéndice D, que ofrece las transcripciones de las entrevistas. En cada tabla, en la columna de la izquierda, Figura El código correspondiente a cada alumno. En todas las tablas, en la columna encabezada por i_k aparecen representadas las estimaciones dadas por los distintos alumnos entrevistados para el ítem número k, de la prueba de estimación. Análogamente, t_k encabeza los tiempos de respuesta de los alumnos ante el ítem k-ésimo de la prueba.

Tabla C.1. *Estimaciones de los alumnos en los ítems empleados en la entrevista: Ítems impares*

	Estimaciones											
Alum.	i_1	i_3	i_5	i_7	i_9	i_{11}	i_{13}	i_{15}	i_{17}	i_{19}	i_{21}	i_{23}
3	40000	40	0,2	7200	28,5	0,225	7,5	0,25	0,01	0,00003	0,00005	0,0002
5	40000	40	0,5	7200	21,5	4	0,2	0,4	0,72	25	0,7	0,3
9	28000	25	2,2	560000	0,4	2,5	3	0,25	0,6	3000	0	0,3
12	56000	50	0,5	8000	30	0,4	2	0,04	100	200	0,00007	0,00003
14	36000	48	0,43	7200	28	0,4	2,57	0,5	0,0037	776	0,46	0,03
19	4000	250	0,43	7200	18	0,25	0,9	0,25	0,2	2,66	0,07	0,003
20	40000	40	0,4	7200	26	0,4	1,4	3,8	0,7	19,4	7	0,26
22	40000	50	0,05	7200	28	0,4	2,5	0,25	10	200	6	0,03
25	40000	50	0,04	7200	20	0,5	0,042	5	0,6	240	71,1	0,03
26	40000	50	0,4	7200	30	0,33	3	0,5	0,75	400	7,6	0,5
29	40000	50	0,3	7200	23	0,3	0,0021	0,3	0,6	0,024	6	0,2

Las Tablas C.1 y C.2 contienen las estimaciones dadas por los alumnos durante las entrevistas. De los 26 alumnos que realizaron la entrevista, 11 la hicieron contestando a los ítems impares, y los otros 15 a los ítems pares[384].

Tabla C.2. *Estimaciones de los alumnos en los ítems empleados en la entrevista: Ítems pares*

	Estimaciones											
Alum.	i_2	i_4	i_6	i_8	i_{10}	i_{12}	i_{14}	i_{16}	i_{18}	i_{20}	i_{22}	i_{24}
1	12000	50	0,018	15	200	0,02	0,005	0,02	0,09	3,6	30	0,02
2	1200	3,54	0,1	1500	12	0,2	4	2	0,09	36	34	0,2
4	12000	3	0,1	1500	10	0,2	4	2,1	0,4	45	350	0,2
6	14400	3,8	0,12	1500	1,3	0,2	3,43	2,8	0,9	4,25	2,3	0,2
7	12000	5	0,1	150	16	0,22	4	2	0,9	4,2	3	0,2
10	12000	4	0,1	15	10	0,2	2,8	2	0,9	45	30	0,2
15	15000	4	0,1	1500	9	0,2	3,6	2	0,9	0,004	26	0,2
16	18000	30	0,15	1500	16	0,2	3,7	2	0,9	45	27	0,2
17	12000	4	0,14	1500	16	0,2	4	0,27	0,52	0,426	0,014	0,2
27	12000	4	0,15	1500	16	0,2	3,5	2	0,8	0,4	28	0,02
28	12000	4	0,104	1500	12	0,02	4	2	0,8	40	2	0,2
30	12000	5	0,1	1500	11,2	0,02	0,035	0,21	0,08	45	0,02	0,02
32	1200	4	0,1	12000	1	0,02	0,0028	2,1	0,8	32000	30,2	0,2
132	12000	4	0,1	1500	1,6	0,2	0,36	2	0,9	0,45	2	0,2
133	15000	3	0,02	1500	1,6	0,02	0,032	2	0,07	45	0,03	0,02

Tabla C.3. *Tiempos de respuesta en segundos para los ítems impares empleados en la entrevista*

	Tiempos de respuesta											
	t_1	t_3	t_5	t_7	t_9	t_{11}	t_{13}	t_{15}	t_{17}	t_{19}	t_{21}	t_{23}
3	24,3	26,3	30,1	29,2	44,1	84,3	118,6	24,5	84,0	47,3	86,9	53,8
5	28,1	124,8	72,7	32,0	84,8	40,6	68,6	67,1	67,0	17,6	153,9	36,1
9	27,2	45,9	77,6	71,3	98,6	53,8	24,3	127,8	35,8	60,2	137,2	75,6
12	57,8	82,4	20,0	21,6	16,5	36,1	53,9	46,3	137,2	42,6	102,4	57,5
14	125,6	127,0	144,5	35,3	123,1	82,8	27,0	117,7	84,9	51,9	55,6	115,4
19	22,9	17,6	30,0	24,8	29,4	38,6	24,3	20,8	27,9	97,5	46,6	37,4
20	33,2	32,1	20,9	16,3	45,3	63,7	46,4	23,4	16,5	17,1	39,6	19,3
22	44,7	39,2	41,8	72,3	40,9	77,0	23,1	86,1	46,6	26,9	36,3	69,1
25	22,1	14,9	68,6	39,6	42,0	40,4	60,7	37,8	53,2	118,4	94,5	83,3
26	22,1	20,0	66,1	19,3	16,8	25,9	12,3	29,2	130,3	71,7	65,2	59,6
29	31,1	54,8	29,4	83,3	100,7	130,7	61,6	43,0	57,0	124,7	79,7	36,4

Las Tablas C.3 y C.4 muestran los tiempos de respuesta que emplearon los

[384] De los 33 alumnos que estaban citados para la entrevista, 16 fueron asignados al azar al grupo en que se utilizarían los ítems impares para la entrevista, y 17 al grupo en que se emplearían los ítems pares. Como se puede ver en las tablas, finalmente se presentaron 11 (de 16) alumnos al primer grupo y 15 (de 17) al segundo.

participantes para dar sus estimaciones durante las entrevistas.

Tabla C.4. *Tiempos de respuesta en segundos para los ítems pares empleados en la entrevista*

	Tiempos de respuesta											
Alum.	t_2	t_4	t_6	t_8	t_{10}	t_{12}	t_{14}	t_{16}	t_{18}	t_{20}	t_{22}	t_{24}
1	16,6	15,5	22,6	20,7	48,6	17,5	25,9	34,0	22,9	29,0	26,2	14,7
2	43,8	21,7	32,6	49,5	22,3	28,3	93,7	13,8	49,5	98,4	62,4	28,0
4	20,7	12,2	22,7	55,3	28,3	99,5	64,6	137,7	110,6	46,4	69,6	63,2
6	24,5	90,7	62,5	20,1	58,0	42,1	28,9	40,3	43,1	44,7	36,7	35,2
7	30,3	12,2	42,6	21,7	28,3	43,0	40,3	38,1	39,3	49,8	41,1	97,3
10	22,4	69,6	42,7	32,6	31,6	43,8	51,9	21,0	21,6	36,3	44,8	34,1
15	28,6	19,0	21,0	19,2	36,2	18,0	18,7	10,2	19,2	42,2	27,7	12,7
16	14,6	49,4	28,6	21,0	28,0	47,1	29,8	17,3	40,5	25,6	53,0	20,7
17	22,3	50,9	36,0	20,2	23,4	39,8	14,6	66,1	34,9	34,9	50,4	34,1
27	20,3	18,9	74,6	19,3	33,8	155,9	31,4	22,4	35,4	86,1	48,6	47,9
28	24,2	38,0	114,2	32,4	112,0	53,7	62,6	24,9	47,7	35,1	41,6	70,5
30	27,0	114,2	121,6	29,9	118,2	89,9	73,8	99,4	96,9	56,5	69,5	36,6
32	25,8	128,9	8,1	27,1	61,2	93,8	54,4	104,0	31,4	139,1	57,5	27,8
132	36,2	29,5	20,3	30,5	101,7	54,2	221,9	33,0	77,4	65,0	60,0	34,1
133	41,3	18,5	58,7	33,6	158,3	70,3	61,4	90,6	99,2	81,5	65,1	104,3

Tabla C.5. *Orden de administración de los ítems impares empleados en la entrevista*

	Orden de los ítems											
Alum.	o_1	o_3	o_5	o_7	o_9	o_{11}	o_{13}	o_{15}	o_{17}	o_{19}	o_{21}	o_{23}
3	10	8	4	7	3	12	9	1	2	11	5	6
5	4	3	8	7	9	10	2	5	11	12	6	1
9	12	10	8	5	2	4	6	1	7	11	9	3
12	9	11	12	5	10	8	7	4	1	6	2	3
14	12	6	2	7	1	9	5	10	4	8	3	11
19	12	1	10	9	2	11	3	7	4	6	8	5
20	1	5	8	11	6	7	9	10	4	3	12	2
22	11	7	12	9	1	10	3	2	5	8	4	6
25	2	10	8	12	9	6	11	5	4	3	7	1
26	9	10	7	5	6	4	8	12	2	3	1	11
29	12	4	7	6	9	1	5	10	8	11	3	2

En las Tablas C.5 y C.6 aparecen los órdenes en que aparecieron los ítems de la prueba durante la entrevista para cada uno de los participantes. Se recuerda que el orden era aleatorio. En esta situación, parecía interesante registrar el orden en que aparecía cada uno de los ítems con el fin de poder valorar si determinadas confusiones que sufren los alumnos al producir sus estimaciones, como por ejemplo hacer una multiplicación cuando realmente se indica una división, están influenciados por el tipo de ítem que se le han presentado al alumno con anterioridad.

Tabla C.6. *Orden de administración de los ítems pares empleados en la entrevista*

	Orden de los ítems											
Alum.	o_2	o_4	o_6	o_8	o_{10}	o_{12}	o_{14}	o_{16}	o_{18}	o_{20}	o_{22}	o_{24}
1	5	12	9	10	2	7	4	1	11	8	3	6
2	1	10	7	3	4	2	5	11	9	6	8	12
4	7	5	9	1	3	11	4	10	2	8	12	6
6	8	6	12	9	10	3	1	11	2	7	4	5
7	10	9	11	4	5	6	2	1	12	8	3	7
10	6	10	4	1	2	5	3	12	8	7	11	9
15	3	7	1	8	11	2	5	10	4	6	9	12
16	11	5	7	6	12	8	2	10	4	9	1	3
17	10	4	7	1	6	11	12	5	3	8	2	9
27	4	1	12	2	8	5	10	3	11	9	7	6
28	3	11	6	4	12	5	2	7	8	10	9	1
30	3	5	2	11	12	1	6	7	9	4	10	8
32	2	3	11	8	6	1	4	10	7	12	5	9
132	2	7	9	6	10	5	3	8	1	11	4	12
133	9	12	7	2	11	4	1	6	10	5	3	8

APÉNDICE D: TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS

Este apéndice contiene la transcripción íntegra de las entrevistas realizadas a los participantes en la investigación. El Apéndice C es complementario de este, pues ofrece los datos correspondientes a las estimaciones, tiempos de respuesta y orden de aparición de los ítems en la entrevista.

1. TRANSCRIPCIÓN

Alumno 9

(1) 46×771; Estimación: 28000

Esto tiende a 50. Esto a 1000. Entonces sería... Así, o bien, también por 4 por 7, 28, con tres ceros, sería... 28000.

(2) $968 \div 24$; Estimación: 25

Esto tiende casi a 1000 y esto a 25. O sea, ¼. Pues la estimación... la daría... a ver... vamos a ver... 25.

(3) $86 \div 222$; Estimación: 2,2

Esto está cerca de 200 y 200 es una parte, o sea, ¼ de 1000. Lo puedo ver de esa manera. O sea, 1/5, perdón, que diga. Bueno ya no sé, ya me he liado. Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 560000

Esto es 80 por, ya casi 100. Entonces, se puede hacer así, o bien por otro método, que es 8 por 7, 56. Entonces, sería la estimación y luego se le añadirían los dos ceros. Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto. Se añadirían 4 ceros en este caso.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 0,4

Esto, pues, sería... Lo podría hacer redondeando a 1 [señalando el 9 de 85.9] en este caso. O sea, bueno, o a 90, pero sería más fácilmente 1 y aquí, como no llega a la mitad, a 3,5 pues lo redondearía a 3. O sea, tiraría, digamos, este por alto y este por bajo para, un poco, compensar. Y sería, pues,... sería... 1 entre 3. Lo que pasa es que así me cuesta también un poco. Se podría hacer 0,4 la estimación.

Entrevistador: ¿De dónde sale?

Esto sería como aproximar a 1 y esto, como no llega a la mitad, lo dejaría en tres. Sería 1 entre 3. Y de 1 entre 3 sale.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 2,5

Pues esto sería, redondeando, a 10 y esto sería, redondeando, a, como esto tiene un decimal que ya es mayor que 5, podría ser redondeando ya por alto, a 30. O podría hacer a 10 y, redondeando, a 25. Entonces así sería 2,5.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 3

Ahora esto es casi... Esto es como si... Esto tiende a, se acerca mucho a 1 y esto a 3. Entonces sería 1 por 3, tendiendo por lo alto, que es 3.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,25

Aquí redondearía esto, como está más cerca de la unidad, que es 1 en este caso, lo redondearía y haría una división aproximada entre 0,25. Entonces sería 1 entre 0,25... Sería restar dos comas... Es que aquí ya me he liado. El problema es que lo veo un poco abstracto. Pero sería eso. O sea, redondear a 1 y dividirlo entre 0,25, que podría ser también entre ¼. Pues 1 entre ¼. 0,25.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,6

Esto se puede poner como ½. 0,3 entre ½, que sería 0,6. O sea, no exacto.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 3000

Esto es próximo a 1000 por... por 0,03. Sería 1000 por 0,03, a 3000.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 0

Esto es 1/2. Tiende a ½. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse ½ entre 0,01 y sería... ... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay... Esto, ½, lo podría ver de esta manera, como 0,5 dividido entre 0,01. Entonces sería... ¿Puedo pasar a otro?

Entrevistador: No

... Me he bloqueado. [El sujeto se ve incapaz de dar una estimación. Se da al cero -que no es el resultado de una estimación- para poder pasar al siguiente cálculo]

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,3

Esto sería... Aquí yo no sé si se podría aplicar lo de la mitad de la mitad. Esto es como 0,050 que es la mitad de 0,5, puede ser. Se podría ver desde ese punto de vista. Esto podría ser 0,6 entre 0,2. Daría 0,03.

Alumno 19

(1) 46 × 771; Estimación: 4000

Yo redondearía el 46 al 50 y el 771 a 80. Huy a 80, a 800. 5 por 8, 40. [Escribe 40000] ¡Anda! ¡Que pongo un cero de más! ¡Qué bruta soy! [Borra el último cero y deja 4000]

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 250

250 por que, redondeando sería 968 lo redondearía a 1000 y 24 a 25 y sería como dividir entre la cuarta parte.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,43

Pues son 86 lo redondearía a 90. 222 a 200. Sería, más o menos,... Cero al cociente y bajo la cifra siguiente. [Escribe el 0,43]. Más o menos sería así.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

78,4 lo redondearía a 80 y el 89,5 a 90. 8 por 9, 9 por 8, Ay. 8 por 9, 72. Sería 72 más dos ceros.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 18

Aquí redondearía a 86, que redondearía a 90 y aquí lo redondearía a 3, que lo redondearía a 5. 90 entre 5, 18. Si no he dividido mal.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,25

El 9,88 lo redondearía a 10 y el 25,6 a 25. Como, sería más o menos, como ir calculando la cuarta parte de 10. Sería como si fuera 2,5. Solamente que más bajo. Yo creo que sería 0,25. Porque, como 25 es más grande que 9, y he calculado como si fuera 0,25 pues tengo que correr la coma dos sitios a la izquierda.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 0,9

Esto sería, redondeando, a 3 y esto a 0,7, que sería como 1. Pues yo redondearía esto a 3 y esto a 1. Luego sería 1. Bueno, algo menos que 1, 0,9. ¡Rayos! Porque sé que he calculado por lo alto, tendré que bajar un poco.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,25

Pues el 0,962 lo redondearía a 1 y el 0,25 lo dejo. Como sé que 0,25 es la cuarta parte de 1 y hay que dividir 1, como si fuera entre 4, yo diría que es 0,25.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,2

El 0,37 lo redondearía a 0,4. El 0,543 lo redondearía a 0,5. Y sería 0,4 entre 0,5, que sería la mitad. A 0,2, más o menos.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 2,66

776 lo redondearía a 800. Lo multiplico por 100 a ambos lados. Ay, un segundito. Lo estoy multiplicando. Es que, como no voy tomando nota, se me olvidan luego los números. Pues, multiplicando daría 266 que tendría que correr la coma.

Entrevistador: ¿Multiplicando que?

A ver. 0,025 lo redondeo a 0,03 y 776 lo redondeo a 800. Multiplico por 100 a ambos lados, para que me sea más fácil el cálculo y, calculando a ojo, más o menos, son 266 que sé que tengo que correr la coma dos puestos a la izquierda. Sería 2,66.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 0,07

El 0,46 lo redondearía a 0,5. El 0,066 lo redondearía a 0,07. Y lo dividiría, que sería... 0,50 entre 0,07... 7 por 7, 49. 7 por 8, 56. 0,07, más o menos.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,003

El 0,059 lo redondearía a 0,06 porque está muy cerquita y el 0,23 lo redondearía a cero con... a 0,2. 0,06 lo multiplicaría por 100 a ambos lados. Sería 3. Y como tengo que correr uno, dos, tres, tres sitios, sería 0,003.

Alumno 20

(1) 46 × 771; Estimación: 40000

Voy a redondear a 800 por 50 que son 4000, 40000.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 40

Veo que son los dos divisibles por 8. Entonces voy a reducir esta división. Voy a hacer los números más pequeños. Me queda 121 entre 3. Que son 120 entre 3, son 40. Aproximadamente 40.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,4

Cabe a 0. 0, Añado un cero aquí 860 entre 222. 4 por 222 son 888, pues casi se acerca. Un poquito menos de 0,4 será.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

Ahora utilizo 80 por 90, que va a ser menos, pero estos números, por ejemplo, para mí son más complicados. Entonces 80 por 90 son 7200.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 26

Corro la coma dos a la derecha en el divisor, dos a la derecha en el dividendo, 8590 entre 342. Van a ser, va a salir 8 entre 3, 2. 2 por 34, 68, hasta el 85 veo que me faltan bastantes. Entonces el siguiente número va a ser bastante grande. Unos 27... Bueno, menos. No. 16. ¿Qué he dicho? 26. Perdona.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,4

Corro la coma en el divisor uno a la derecha. En el dividendo lo mismo. 98,8 entre 256 que es 0, corro la siguiente coma 988 entre 256. Yo creo que casi va a ser 4 porque 1000 entre 250 son 4. Pues aproximadamente 0,4.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 1,4

Esto multiplico. Voy a utilizar este número como 250. Este número como 0,75. 250 por 0,75 es como multiplicar 250 por ¾. 250 entre 4. Bueno, voy a hacer primero por 3 son 750. Entre 4 son un poco menos de 140. Y tengo que quitar dos comas. O sea, 1,4.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 3,8

Corro la coma dos a la derecha, dos a la derecha. 96,2 entre 25. Pues son 3 por 25, 75. A 96 van 21. Y un 2. 212 entre 25 son algo más de 8. Entonces me quedo con 3,8.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,7

Corro la coma tres a la derecha en el divisor. Tres a la derecha en el dividendo. 370 entre 543, 0,7.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 19,4

Divido 776 entre 4, que son 194, multiplico por 100, 19400 y quito tres ceros. 19,4.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 7

Divido. Quito tres comas. O sea. Corro la coma tres lugares y aquí lo mismo. 460 entre 66 me va a dar a... 7 aproximadamente. A ver. 7 por 6, 42... Justo. 4. ¿Qué te he dicho? 7. ¿No?

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,26

Corro la coma dos a la derecha en el divisor. La corro en el dividendo dos. Me queda 5,9 entre 23. Que es cero coma dos seis.

Alumno 22

(1) 46 × 771; Estimación: 40000

50 por 800. 8 por 5, 40. O sea. Redondeo el 46 a 50. El 771 a 800 y sería 50 por 8. 8 por 5, 40... y ahora, 8 por 5, 40 y ahora le pongo un cero del 50 y dos ceros del 800. Sí.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 50

Esta, pues 1000 entre 20. 10 entre 2, 5... [Escribe 50] A ver. 1000 entre 20. Quito un cero del 20 y sería 100 entre 2, 50... y... ya está. 50 por 20... Ya está.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,05

100 entre 200. Subiendo el 86 y bajando el 222. 100 entre 200 es 0,... a ver. 100 entre 200. No cabe. 0,05.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

Muevo la coma los dos. Sería... o, no. 800 por 900. 9 por 8, 72. 800 por 900 son dos ceros. ¿Tanto? Esto me parece absurdo. No. Mejor. A ver. Es que esto es una tontería. Mejor 80 por 90. Eso. 8 por 9, 72. 80 por 90. Y dos ceros. [Escribe 7200]. Así.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 28

Pues, en esta, haría 86 entre 3 y quito los decimales. 2 por 3, 6... 28 creo. Sí.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,4

256... 98,8. Este sería como 10 entre 25. 0, 10 entre 25. 0,... ... A ver. 10 entre 25 no se puede. 0,4.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 2,5

Pues, esto, lo más fácil, a lo mejor, sería... Este le dejo 2,5 por 1. 2,5.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,25

Esto se acerca mucho a 1. Entonces, 1 entre 0,25 pues 0,25. ¿No?

Entrevistador: ¿Cómo lo haces?

Pues porque 1 entre... es que 0,25 es como... Ah, no. Claro, claro. 1 entre... ... Es que esto. O sea, 1 entre 0,25 es un cálculo muy fácil pero... no sé si son 4. 1 entre 0,25 pero tampoco sé lo que hago. O si no, lo puedo hacer... Muevo dos a la derecha y muevo dos a la derecha 6.2 entre 25. 0,... Yo creo que es 0,25.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 10

A ver. 37 entre 4,3... 37 entre 4,3... O sea, entre 4 lo voy a hacer mejor. Y 40 entre 4, por ejemplo, 10. Pero es que, o sea, yo lo que no entiendo muy bien. A lo mejor debería estar poniendo algún cero. Si yo este lo tengo dos, ya lo he pasado y este me he quedado con un decimal 4,3, como este ya está entero, ya no tengo por qué poner ceros, ¿No?

(10) 0,025 × 776; Estimación: 200

Uno, dos,... Ah, no. Este no tiene nada. Pues, esto, 776, la mitad. Bueno. Lo voy a redondear a 800. La mitad sería 400 y la mitad de 400, 200.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 6

Muevo dos. 46 entre 6,6. 7... A ver. Muevo dos... 46 entre 6,6... ... Pues 6.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,03

Uno y dos. 5,9 entre 23. Entonces pongo 0,... 5,9... pongo otro... Mira. Muevo la coma dos y me queda 5,9 entre 23. Entonces, como eso no se puede, pues 0, pongo 5,9. Entonces la muevo otra vez y ya serían 59 entre 23. Y 59 lo redondeo a 60 y 23 a 20 y 60 entre 20 pues 3.

Alumno 25

(1) 46 × 771; Estimación: 40000

Pues aquí, 46 lo puedo redondear a 50 y 771 lo redondeo a 800. Entonces multiplico 5 por 8, 40 mas tres ceros.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 50

Pues aquí serían 1000 entre 20. Que serían 100 entre 2, 50. Vale.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,04

Vale. Aquí pues redondeo. A ver. 86 entre 222. Este lo dejo en 200 y aquí redondeo a 90. Sería 90 entre 200 y, como no cabe, pongo 0, vale. Ah no. Espérate a ver. Sería 90 entre 200. Bueno. A ver. Quito un cero. Sería 9 entre 20. Entonces, como no cabe, 0, bajo un cero, de aquí, o sea, le pongo otro cero al nueve y sería 90 entre 20. Que eso ya sí que me cabe... y sería a 4. A ver. Espérate. Ay. Vale. 9 entre 20, 0,04, creo. No sé.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

Aquí puedo redondear 78,4 redondeo a 80 y 89,5 redondeo a 90. Entonces sería... 9 por 8, 72 mas dos ceros. Así. A ver. Espérate... No, no, no, no, no. A ver. 80 por 90. Sí. 7200.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 20

Y aquí multiplico por 100, en este lado, y corro la coma dos lugares. Aquí hago lo mismo. No. Mejor. Multiplico por 10. Corro la coma un lugar y me quedan 34,2 entre... Ah bueno. Espérate. 85,9 entre 3,42. Vale. Pues esto puede ser 80 entre 4. Vale. 80 entre 4 que sería 20.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,5

Aquí corro la coma un lugar y me queda 256 lo multiplico por 10 y aquí multiplico por 10 también y me queda 98,8. Entonces redondeo aquí y me queda 100... a ver. 100 entre... 200, por ejemplo. Y entonces pues me quedaría 1 entre 2. ¿No? Sí. Como no cabe, sería 0,5. ¿No? Sí.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 0,042

Y luego aquí. Corro la coma otros dos... No. Subo los números que hay al otro lado de la coma. Entonces son 4. O sea que sería por 10^{-4} el número que me quede luego para multiplicar. Entonces multiplico esto, que serían... 57 que puedo redondear a 60 y esto lo redondeo a 70. O sea, que son 6 por 7, 42. 42... Vale. 6 por 7, 42. Y luego, uno, dos, tres y cuatro. Entonces serían 0,042. A ver. Uno, dos, tres y cuatro... No. Me falta un cero. Así. Uno, dos, tres... No. [Escribe 0,042].

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 5

Luego aquí corro la coma otros dos lugares del 25 y aquí otros dos lugares. O sea, multiplico por 100 en un lado y multiplico por 100 en el otro. Queda 96 entre 25. Que es lo mismo decir 100 entre 30 si quiero. Sí, bueno y puede quedar pero, para redondear mejor, pongo aquí 100 y aquí 20. Y así me queda mejor la cifra. Entonces sería 10 entre 2, a 5.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,6

Corro la coma. Multiplico aquí por 100 o, bueno, por... sí. A ver. Multiplico por 100 y serían 54 y aquí serían 37. Bueno, Multiplico por 1000. Corro la coma tres lugares y corro la coma otros tres lugares y me quedan 370 entre 543. O sea que sería lo mismo. 400 entre... puedo aproximar a 600 si quiero y entonces, luego sería, 4 entre 6. Sería 0,... 0,6.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 240

Cuento las cifras que tengo al otro lado de la coma. Son 3. Y multiplico aquí, puedo redondear a 800. Multiplico 800 por 30, por ejemplo, que serían 3 por 8, 24. 24 mas... Vale. Sería 30 por 800. 3 por 8, 24 mas, 24 mas... cuatro ceros. No. Espérate a ver. 20... vale. Serían 20000 mas. Y entonces ahora sería 0,0020000. O sea. Sería... a ver. Un, dos, tres. Un segundo. Un, dos, tres... No. A ver. Vale. Esto daría uno, dos, tres... a ver. No. 0,002. Creo. A ver. 2 por 8. Ah no. 3 por 8, 24. A ver. Un segundo. Vale. A ver. 3 por 8, 24. 24 mas... serían 24000. Y luego estos tres ceros. Entonces son... un, dos. Vale pues son 240.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 71,1

Vale. Aquí multiplico aquí, a ver, uno, dos... Corro la coma tres lugares y multiplico por 1000. Y entonces me quedaría 66 entre... o sea, 460 entre 66. Y aquí, para redondear, pues a ver. Para dejarlo así... Puede ser 400 o 500 entre... a ver. 66 puede ir a 70 o... Bueno, mejor, sí, bueno. A 500 entre... entre... 70. ¿No? Sí. Entonces me queda 50 entre 7, que son: 1 por 7 [inaudible] 49. Vale.

Pues sería a 7... A ver [inaudible], 71,... No. A ver... 7,1. No. Espera. A ver. 50 entre 7 a... 7 por 7, 49... Sí. 71 coma algo, coma... 1.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,03

Pues aquí, multiplico por 100 la cifra que tengo aquí, o sea, el divisor. Para que se me quede sin comas y en el otro lado corro la coma dos lugares. O sea, multiplico por 100 también que sería hacer lo mismo. Entonces, se me queda 5,9 entre 23. Puedo redondear a 6 aquí y en el otro lado a 20. 6 entre 20. 0,... 03.

Alumno 26

(1) 46 × 771; Estimación: 40000

46 lo voy a estimar de momento a 50 y este a 800. Entonces 5 por 8, 40 con tres ceros, 40000.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 50

968 lo estimamos a 1000 y, entonces, el 24 lo voy a estimar a 20. Entonces 1000 entre 20 me quedan 50. Justo.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,4

Vamos a poner aquí el 86 a 90 y el 222 en 200. Entonces, como el 90 es menor, pues ponemos 0, y ponemos un cero a 90. Entonces ahora 900 entre 200. 9 entre 2 a 4 por 2, 8. [inaudible] 900 entre 200 puedo quitar los dos ceros y me queda 9 entre 2. Es a 4 por 2, 8 a 9, 1. Luego bajaría el cero y sería coma 5. Lo que pasa que, como tenemos aquí el 0,4 tendríamos aquí otra coma y sería más lío. Lo vamos a dejar así.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

Esto pues el 78,4 lo estimo a 80 y el 89,5 a 90. O sea que 80 por 90 te quedan 72, 7200.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 30

85,9 lo vamos a estimar a 86. Lo vamos a estimar a 90 y este a 3. 90 entre 3 a 30.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,33

9.88 lo estimo a 10 y esto lo estimo a 30. 10 entre 30 es 1/3 que queda 0,333. Pongo 0,33.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 3

Pues este lo voy a estimar el 2,57 a 3 y esto a 1. Pues 3 por 1, 3.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,5

952 lo vamos a estimar a 0,1 y esto, el 0,25 es... Lo puedo hacer entre 0,2 y entonces me da 0,5.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,75

En esta haríamos lo mismo. Quitaríamos la coma y queda 37 entre 54,3. Entonces como es menor pues pondría aquí un 0 y abajo un 0,... y entonces... pues ya podría dividir y entonces... sería 37 entre 5. No. A ver... ... 37 entre 54 y entonces cogemos, 37 entre 5 a 7 por 5, 35 y llevo 2. Serían 20 entre 4 serían 5 y luego... Tengo aquí un tres... Vamos a hacer 37 entre 54. Ponemos un cero y entonces sería más fácil. Ahora sí sería 37 entre 5 a 7 por 5, 35, serían 2... Sería 0,... hemos dicho... 0,75.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 400

Yo aquí, 0,25. 776 a 800 y este pues a... Yo qué sé... a 0,25. A 0,25 por ejemplo. 0,25 por 800 quedaría la mitad, más o menos. 400. No sé. 800... 40... Sí, te queda 400. ¿No?

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 7,6

Bueno. Vamos a ver. Pues yo aquí... correría la coma aquí hasta 46 y aquí también y me quedaría... 46 entre 6,6 y entonces, pues entonces... pues sería 46 entre 6. 7 por 6, 42 y me llevaría 4. Y luego bajo el cero y sería 40 entre 6, a 6 por 6, 36 y queda 7,6.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,5

Pues esta la vamos a estimar a 0,60 y luego lo voy a dejar en 0,1 y este en 0,2. Es 0,1 entre 0,2. Pues también da 0, y entonces aquí, le pones un 0 al 1 entonces 10 entre 2, 5. Entonces aquí... Entonces te queda... claro. Corres la coma [inaudible] ... 0,5. Te queda 1 entre 2, 0,5.

Alumno 12

(1) 46 × 771; Estimación: 56000

Redondeo esto a 50. Esto lo dejo en... bueno, en... 800. Entonces... a ver, a ver qué lío. 50... 50 por 800 son 56000. Pongo los tres ceros. Multiplico 5 por 8 y pongo los tres ceros.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 50

Esto redondeo a 1000. 1000 entre... Esto lo redondeo a 25... y... a ver... sí, ¿no? A ver, un momento... No. ¿Qué estoy haciendo? Un momento... ... Estoy un poco espesita. A ver... [Escribe 50].

(3) $86 \div 222$; Estimación: 0,5

Redondeo el 86 a 100 y el 222 a 200. Me quedaría 0,5.

(4) $78{,}4 \times 89{,}5$; Estimación: 8000

Redondeo esto a 80 y esto a 100. Entonces 80 por 100 son 8000.

(5) $85{,}9 \div 3{,}42$; Estimación: 30

Lo paso, el 85, a 90 que es divisor, que se puede dividir por 3 y me quedan 30.

(6) $9{,}88 \div 25{,}6$; Estimación: 0,4

Esto lo redondeo a 10. Quedaría 10 entre 25 que serían... 0,25. Ah, no, no, no. 0,4.

(7) $2{,}57 \times 0{,}72$; Estimación: 2

A ver. Pongo aproximadamente 2. Redondeo esto a 1. Entonces me daría 2,5 y, como sé que es algo menos, pues pongo aproximadamente 2.

(8) $0{,}962 \div 0{,}25$; Estimación: 0,04

Redondearía a 1000 el 962. El 25 lo dejo como está. Me daría 962 entre 25, 400 y, con 5 decimales, uno, dos, tres, cuatro y cinco [Escribe 0,0400 y borra los ceros del final]. Sí.

(9) $0{,}37 \div 0{,}543$; Estimación: 100

Tendría que hacer 37000 entre 543. Entonces redondeo a 40000 entre 500 que son, a ver 2000. Un momento... Sería 2000 por 500... ¿200? Yo es que me desconcentro con todo. No, no, no. ¡Qué estoy haciendo! Sería... Sería 37000, 40000 entre 500. No sé. 40000 entre 500 sería... 400 entre 5... 400 entre 5 serían aproximadamente 100. Pues así.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 200

Sería 776 partido por 4. Lo redondeo a 800. 800 entre 4, 200. Ay, 20. A ver. ¿Cómo he hecho? 800 entre 4, 20 por 4, 80. No. 200. Sí.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 0,00007

Aproximadamente 46 entre 6 pues... serían... ... Si corro aquí la coma lo dejo en 46 y corro aquí la coma y lo dejo en 6. Entonces sí serían 46 entre 6 aproximadamente a 7 y después tiene uno, dos, tres, cuatro, cinco. 0, uno, dos, tres, cuatro, 7.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,00003

Sería 59 entre 230... 59 entre 23, haría aproximadamente 20, o bueno, 30. 3, quiero decir y después tengo uno, dos, tres, cuatro, cinco. 0, uno, dos, tres, cuatro, 3.

Alumno 3

(1) 46 × 771; Estimación: 40000

Aquí he cogido 800 por 50.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 40

Aquí he puesto 1000 y lo he hecho entre 25. Y como hay 4 cada 100, 4 por 10, 40.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,2

Pues aquí, como no da, da 0 en principio,... y, más o menos, 2, creo. Porque si pongo 3 ya me paso, ¿No?

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

Aquí he puesto 90 por 80. Pongo 9 por 8, 72. Le añado los dos ceros...

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 28,5

Aquí lo voy a redondear, 86 entre 3. Uno hacia arriba y otro hacia abajo. Y... a 28,5 o por ahí, dará. Porque si pongo a 90 entre 3 daría a 30 y, como es 86, le quito un poquito a cada uno y me queda eso.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,225

[Inaudible] Da 225 y, cojo los tres decimales que hay... 0,225.

Entrevistador: ¿De dónde ha salido eso?

Porque he puesto 25 por 9, 225. 225, como hay tres decimales, he corrido la coma...

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 7,5

Nada. Sé que tengo que empezar por 0, pero... Le cojo... Si redondeo a 3, no son 3. Pero con menos y eso... Pondría 7,5. Porque he cogido 2,5 sería por ½ pero lo voy a hacer por ¼ porque como se acerca a 0,75.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,25

He cogido 1 entre 0,25 y me da 0,25.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,01

... Me estoy confundiendo. A ver... Estoy para coger los lugares, los ceros, los voy a correr pero no... Aquí estoy bajando otro cero porque aquí no me da. Entonces le bajo otro cero. No me da, si no. [Escribe 0,01] Y luego ya, así. ¿No?

(10) 0,025 × 776; Estimación: 0,00003

Cojo los tres decimales y los pongo primero y luego, como no me da, pongo otro. Me sale 2500 entre 775 y como con 4 me paso, he puesto un 3.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 0,00005

Pues cojo y cuento los ceros desde la coma... El 0,46 entre el 0,066 como no da pues le tengo que ir añadiendo ceros hasta que... hasta que pueda dar para el resultado... He puesto un 5.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,0002

Cojo el 0 y cojo tres decimales, hasta que me dé.

Alumno 29

(1) 46 × 771; Estimación: 40000

Como estimamos, pues sería... a 50 por 800. 8 por 5 son 40. ¿No? Sí. 8 por 5 son 40. Uno, dos y tres. ¿40000? Sí, ¿Verdad? 8 por 5 son 40. Sí. Es 40000.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 50

24... Por 4, 16...

Entrevistador: Estás haciendo una estimación.

Sería 900 entre 20. Pero, y si lo puedo dividir, ¿No lo divido?

Entrevistador: Estás haciendo una estimación. No un cálculo escrito, ni un cálculo exacto.

Pues 1000 entre 20 a... 50.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,3

0, porque no entra. 86 entre 222 sería 860 entre 222. 860 entre 222. 4 por 2, 8...

Me pasaría. A 3.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

Esto sería 800 por 900. 9 por 8 son 72. Cero coma... Ah, no. Porque redondeas. Redondeabas 80 por 90 y claro, se quedaba en 72. Y hacías así [escribe dos ceros] y valía esto. Me parece que sí, ¿No? Porque eran las comas iguales, ¿No?... Mira que... Es que no lo sé. Yo dudo mucho. 800 por 900. 80 por 90... 80 por 90... Pongo el 72 y... Es que no sé si es 720 o 7200. 80 por 90 se añadirían los dos ceros. [Escribe 7200]

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 23

Para quitarle la coma al 85,9 le corro una al 3,42. Sería 859 entre 34,2. Para quitarle la coma al 34,2 añado un cero al 859 y sería 8590 entre 342. ¿No? Sí. Yo creo que sí... Porque es mejor si le quito todas las comas a la operación. ¿No?

Entrevistador: Hazlo como te parezca mejor.

8590 entre 342 sería... 3 por 2, 6. Me paso. Un 2. 2 por 2, 4; 5, 6, 7, 8, 9; al 9, 4. 2 por 4, 8; 9 [inaudible] y me llevo una. 2 por 3, 6; Sería 1, 1, 4, 0. 1140 entre 342. 3 por 3, 9. Yo creo que sí. Pongo 23. Da igual.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,3

Puedo quitarle la coma a 25,6. Se la quito y le corro una al 98,8. Y... 98,8 entre 25,6... entre 256... Estoy nula, ¿Eh?... Sería... pues a 0,... Es que no puede ser cero coma... A ver... Le quito a 256 la coma y le corro una y se queda 98,8 entre 256. Y me quedado ahí. 256... Claro, porque digo cero coma porque el 98,8 tiene el cero coma, pero no puede ser cero coma porque no puede ser el 98,8 entre el 256 cero coma. No sé. Vale. Sí. 0, y divido 98,8 entre 256, 2 por 3, 6. 2 por 4, 8. [inaudible] 4 por 5, 20 y me llevo 2. Me paso. Sería 0,3.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 0,0021

300 por 70... 3 por 7 son 21... A, bueno. Que este es... 300 por 70... 3 por 7 son 21. Uno, dos, tres, cuatro. Sería 0,0021. 300 por 70, 3 por 7, 21. Es que no sé. Uno, dos, tres y cuatro. Como no sea esto... Da igual.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,3

Le quito la coma al 25 corriéndola del 0,962. Se queda 96,2 entre 25. Me parece que da 0, y ahora 2 por 3, 6; 2 por 4, 8; 4 por 5, 20... Ah, 4 por 5, 20... [inaudible] me paso... [Escribe 0,3]

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,6

Para quitarle la coma al 37, le borro dos al 54 y se quedaría 54,3... Bueno, 37 entre 54,3. Y como... para quitarle la coma al 54,3 le añado un cero a 37. Sería 370 entre 54,3 [sic] y, como no entra, sería 0, 3700 entre 54,3 [sic]. 3700 entre 54,3... pues al 6 o al 7... Al 6.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 0,024

0,025 lo... subo a... 30 y 776 lo subo a 800. Sería 800 por 30. 3 por 8, 24. 24... y, como es una multiplicación con decimales, pues sería, cuento los decimales, los números que hay detrás del cero coma, que son tres. A ver. Esto es un lío. No sé. 800 por 20... No. 800 por 30. 8 por 3, 24. Será así. Sería... 0,024. Porque cuento los números que hay detrás del cero coma. Entonces cuento el 4 como 1, el 2 como 2, el cero como el 3. Entonces pongo el 0,024. Que no sé si será eso... Espérate a ver. Es que me parece muy raro que sea eso... ... 800 por 30. 3 por 8 son 24. Yo que sé. Es que yo creo que eso está mal... Vale. [Deja el 0,024 como estimación y pasa al siguiente cálculo]

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 6

Esto se quedaría 46 entre 6,6. 46 entre 6,6 y, para quitarle la coma al 6,6, le añado un cero al 46. Quedaría 460 entre 66. Que sería 6 por 6, 36; 6 por 7, 42; 6 por 8, 48. No puede ser. 7 por 6, 42, a 50... 7 y me llevo 5. Entonces me paso. Sería al 6. Al 6... Dependiendo de luego lo que sobrara. ¿Hace falta que me aproxime mucho?

Entrevistador: Estás haciendo una estimación.

Esta bien, ¿No? 460 entre 66 al 7, ¿No? 6 por 7, 42, al 50 [inaudible] Me he pasado. Si me paso por uno, ¿Pongo 7 o 6?

Entrevistador: Lo que quieras.

Vale.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,2

Pues igual. Para quitarle la coma al 0,23 le corro dos a la derecha al 0,059 y se me quedaría entre 5,9. 5,9 entre 23, si antes no me he equivocado, Sería 0, 59 entre 23 como cabe, sería 2 por 1 es 2, 2 por 2, 4; 2 por 3, 6. Sería... a 2.

Alumno 5

(1) 46 × 771; Estimación: 40000

50 por 800. Pues 8 por 5, 40 y ahora 4 (ceros añadidos al 40).

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 40

Haría 1000 entre 25, que sería a 4... No, que sería a 40... ... ... Ya sé que esta es muy fácil pero... 1000 entre 25... Ah, bueno, no. Esto sería... a 750 ¿No?... ... Sí. Sería 40 ¿No? Bueno. Vale. Lo dejo así.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,5

Pues esto es como... 86 es más pequeño que 222 pues seguro que saldría cero coma algo. Y entonces podría decir que son 90 entre 200. Quito el 0 del 90, y se me queda en 9, y quito el 0 del 200 y se me queda en 9 entre 20 que son... ... pues... 9 entre 20 no entra... pues a 0,5. Es que no sé calcularlo.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

Pues esto lo redondeo a 80 y esto a 90. Entonces son 9 por 8... 56... No. Sí... 9 por 8 son 72. 72 por... [Escribe 7200]. Eso.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 21,5

Esta coma. Quito la coma y se queda 342 y aquí igual, lo pongo dos veces. Uno, y se me quedaría 8590 entre 342. Que son 8500 entre 300... 50... 8500 entre 300. Pues eso es 8500 entre 300... ... pues a... 3 por 2, 6; porque si pongo un tres... No. [Escribe 21,5]

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 4

Y esto son 10 entre 25. A ver. Son, quito la coma para allá y son 250 y aquí igual. Y son 98,8, 250, que son 1000 entre 250, que son... a 4... a 4.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 0,2

Y aquí pues cojo, por ejemplo, 250 por 70 y... O bueno. Por ejemplo, 200 por 70 que serían... 200 por 70, 1400. 1400 y le quito 4... A ver. Serían 1400... y le quito uno, dos, tres, cuatro. 0,14... ... Bueno pero como... he bajado mucho, puedo poner 0,2.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,4

Pues quito la coma dos veces para allá. Esta también dos veces para acá. Queda 96,2 entre 25. Entonces... quito otra coma y pongo... un cero. O sea que 0,...

Entonces sería, redondeo 1000... ... [Escribe 0,4]

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,72

Uno, dos y tres. Uno, dos y tres. 300. Bueno, 400... entre 500 pues a... 370 entre 550... 400 entre 500... a uno con algo, ¿No?... 400 entre 500 serían 4 entre 5... pues a 0. A cero coma mucho... Ah, pero tengo que contar... a 0,72.

(10) 0,025 × 776; Estimación: 25

Este sería por 1000. 0,025 por 1000. Pues si lo multiplico por mil, uno, dos,... [Escribe 25]

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 0,7

Corro las tres comas para allá. Uno, dos y tres. Queda 66 y aquí igual. Uno, dos y pongo un cero. O sea que sería 460 entre 66 y 460 entre 66 es lo mismo que 500... ... que sería a... 80. O sea que pondría... 8 por 6, 48. Pues 7 por 6, 42, que ya me cabe aquí. Y... yo creo que habría que poner un cero. Porque al poner aquí un cero, habría que poner un cero. O bueno. No estoy segura si es un cero aquí... Yo creo que sí. Es que no estoy segura de si es con el cero o no.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,3

Aquí, por ejemplo, corro la coma, la corro dos veces para allá y aquí también. Y... se me queda 5,9 entre 23. Pues corro otra vez la coma y pongo 0,... Se me queda 59 entre 23 que puede ser 60 entre 20 y me sale a 3.

Alumno 14

(1) 46 × 771; Estimación: 36000

46 por 780, o por 770... Sigue siendo demasiado difícil para hacerlo

mentalmente. Así que hago, por un lado, 460 lo voy a redondear un poco a 450. 771 hacia 800. Entonces, 45 por 8... 8 por 5, 45... No. 8 por 5, 5 por 8... 40. A ver. Otra vez. 45 por 800. 45 por 800... 8 por 5,... 8 por 5, 40 y me llevo 4. Y 8 por 4... 32 y 4, 36. 36, el cero que tenía aquí y dos más, de que es por 800. Ya está.

(2) 968 ÷ 24; Estimación: 48

Puedo redondear a 960 entre 20. Porque así tacho los ceros y se me queda en 96 entre 2. También podría hacer 970... Bueno, sí. Voy a hacer eso para que el redondeo sea más exacto hago 970, este para arriba y el 24 hacia abajo. 20. 970 entre 20, 97 entre 2. 97 entre 2. 2 por 4, 8 y una se baja 16. 2 por 8, 16. 48. 48, ¿Verdad? Bueno. Eso... Porque, habíamos quedado en que era 970... entre 20... 97 entre 2... 97 entre 2. 97 entre 2, 2 por 4, 8; a 9, 1... 17. 17 entre 2... 2 por 5, 10; 2 por 6, 12; 2 por 7, 14; 2 por 8... Pues sí. Luego quedaría uno de resto pero pasamos del resto.

(3) 86 ÷ 222; Estimación: 0,43

86... pues 86. Como este tiene dos cifras y el otro tres, le sumo un cero. 860... y lo que me dé tiene que empezar por cero coma. Entonces ahora, habiendo puesto cero coma en el resultado, puedo operar con 860 entre 222... Lo que voy a hacer es, primero dejarlo a 860, y 222 lo voy a redondear a 200... A 200. ¿No?... ¿O no?... Bueno, sí. No. A ver. Voy a intentarlo 860 entre 220. Así los dos acaban en cero, los tacho, y me quedo con 86 entre 22. Pero 86 y 22 ya es muy complicado. Así que lo dejo... lo dejo en qué... En 86 entre 20. 86 entre 20, me imagino la división... la de toda la vida, y digo: 2 por 1, 2; 2 por 2, 4; 2 por 3, 6 y 2 por 4, 8. Y 2 por 3, 6. 43. 0,43.

(4) 78,4 × 89,5; Estimación: 7200

78,4 ya directamente lo paso a 80... y el 89,5 a 90. 80 por 90. 9 por 8... 72. 72 y dos ceros. Vale.

(5) 85,9 ÷ 3,42; Estimación: 28

El 85,9 lo redondeo a 86 para que sea más fácil... Y 86, 86 lo podría dividir entre 3,42 y entonces tendría que ponerle dos ceros para quitar la coma y que se convirtiera en 342. Y eso, mentalmente, es muy difícil. Así que voy a hacer 86 entre 3 porque, al fin y al cabo, es estimación. 86 entre 3. 3 por 1, 3; 3 por 2, 6; 3 por 3, 9. 2. Del 6 al 2, del 6 al 8, 2. Y 6. 26 entre 3. 3 por 1, 3; 3 por 2, 6; 3 por 3, 9; 3 por 4, 12; 3 por 5, 15;[inaudible] 3 por 7, 21; 3 por 8, 24. 24. 8. O sea, 28... Si, claro. Y si en lugar de haberme imaginado la división. Lo hubiera hecho a ojo,... pues también hubiera sido muy fácil y no me hubiera complicado todo lo que lo he hecho. Porque sé dividir 86 en tres partes. Pero bueno, es tarde.

(6) 9,88 ÷ 25,6; Estimación: 0,4

Me parece que, si pongo un cero de resultado, eso quiere decir que bajo la coma. O sea, que en lugar de 9,88, puedo poner 98,8. Y a mí me da que eso lo hago, si pongo un cero coma en el resultado. Entonces yo sigo así. Y 98,8 entre 25,6... Vamos a redondear. Claro. Y 98,8 ya directamente ¿a qué pasa? A 100. Y 100 entre 25. 100 entre 25. 2 por 5... 5 por 4... a ver. 100 entre 25. 25 mas 25, 50, 75 y 100. 4. 100 tiene 4 veinticincos. Porque 4 por 5, 20; 4 por 2, 8 y 2, 10. Vale.

(7) 2,57 × 0,72; Estimación: 2,57

Vale... Como es una estimación y no quiero multiplicar con ceros y con comas, voy a multiplicar 2,57 por 1 porque es mucho más fácil y porque se va a quedar igual, el 2,57.

(8) 0,962 ÷ 0,25; Estimación: 0,5

El 0,962 lo podría redondear hacia 1000 pero no quiero operar con tantos ceros. Prefiero, a lo mejor, redondearlo a 900. Bueno, no. El 0,62 lo redondeo a cero coma mil y el 0,25 a 0,20 y así tacho algún cero. Entonces cero coma mil se queda en cero coma cien y, el otro, entre 2. Entre 0,2. Entonces, el resultado 0,50, claro. Porque si he dicho que se queda en cero coma cien... cero coma cincuenta. ¿No?

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

0,962 lo voy a redondear a cero coma mil. Entre 0,20. El cero coma veinte lo redondeo hacia abajo, para que tenga un cero... y, en la división, pues quitarle un cero de cada lado. ¿No? Entonces, el primer divisor se queda en cero coma cien y el segundo en 0,2. Y 100 entre 2 son 50. El resultado es 0,50.

(9) 0,37 ÷ 0,543; Estimación: 0,0037

Este es todavía más difícil. Porque, como no me acuerdo de dividir con decimales, pues dividir un número pequeño con decimales entre uno mucho más grande es todavía más difícil... Entonces... ... Entonces me imagino que va a empezar por 0,0 y no sé si otro cero... Yo creo que sí. Y es que no sé. Así que voy a poner un número cualquiera. El mismo. [Escribe 0.0037]

(10) 0,025 × 776; Estimación: 776

La primera cifra, como no quiero multiplicar con comas y, sobre todo, con cifras que tengan comas y que empiecen por cero, porque me complica... El 0,025 pues no lo voy a cambiar a 1, porque no tiene nada que ver. Es muchísimo inferior. Es mucho más inferior... Entonces no lo puedo sustituir por 1. Entonces, voy a poner 776 de resultado por que supongo que, multiplicarlo por 0,025 no lo iba a cambiar mucho.

(11) 0,46 ÷ 0,066; Estimación: 0,46

Ahora empieza lo difícil porque no sé dividir con comas. Y, sobre todo, porque no son iguales. Porque uno empieza 0,46 y el otro 0,0. Entonces, ¿Qué es lo que hago?... Pues, como no sé, me imagino que 0,066 es una cifra demasiado pequeña como para que... siendo dividida por 0,46 vaya a modificar mucho el número 0,46. Así que, probablemente, el resultado no sea muy diferente de 0,46 porque si estás dividiendo por una cosa tan pequeña... Así que lo dejo en 0,46.

(12) 0,059 ÷ 0,23; Estimación: 0,03

Esto es otra vez una cantidad muy pequeña que empieza por cero coma cero, entre otra que empieza con 0,2. O sea que esto... No me acuerdo muy bien de dividir con comas pero creo que si ya empiezo a poner en el cociente cero coma... con esto lo que intento hacer es pasar la coma del 0,059 al 0,59. Entonces... Pues ya está. Tengo 0,59 entre 0,23. 0,59 lo paso a 0,60 para redondear y que sea más fácil. Y 0,60 entre 0,20... lo redondeo hacia abajo... 6 entre 2, 3. Pues 0,3. ¿No?... Bueno, no. No, no. A mí me... Esto es una cifra demasiado grande. Porque la primera es muy pequeña. Entonces doy marcha atrás y digo que es 0,03.

Alumno 2

(1) 58 × 244; Estimación: 1200

Pues esto [58] lo he redondeado a 60 y el 244 a 200. Entonces, 6 por 2 pues 12 y 1200.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 3,54

El 88 lo redondeo a 100 pues... 3,54.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,1

36, como no se puede dividir entre 258, 0, y luego pues... 1, más o menos.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

34.1 lo redondeo a 30 y 47.2 a 50. Tres por cinco, 15. Mil quinientos.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 12

96,2 lo he redondeado a 100 y entre 6,25 que lo redondeo a 6 pues 12.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

Lo he redondeado a 0,2 [el resultado] porque, el cero coma pues como 8 no se puede dividir entre 42, salto un lugar [el punto decimal] y 88 entre 42 pues a 2 más o menos.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 4

0,45 lo... bueno. He puesto 0, porque no cabe. Entonces pongo 0,0 para que sea 45... Vale, nada. He dividido.

0.45 lo redondeo a 0,5 que es ½. Y lo multiplico por... no sé. A ver... Bueno, sí. Un medio y por eso [7.85] pues... 4 más o menos.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2

Los multiplico por 100 y me daría 74,7 entre 35 que es 2 más o menos.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,09

0,63 lo multiplico por 100 y me da 63. Luego, 0,785 lo multiplico por 100 y me da 78,5. Entonces me quedo con 63 entre 78. Quito el ,5. Y... pues el 9 porque...

no, vale. Sí, nueve porque es casi... No es uno, porque no llega, pero casi.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 36

Bueno. Esto [852] lo redondeo a 800... a 900, por 4, 36 pero ahora 1, 2, 3, pues 36.

A ver esto [852] lo he redondeado a 900 y luego 0,048 cojo el cuatro, aunque podría haber cogido el 5. Bueno ya... y, pues 9 por 4, 36 y daría más pero con los decimales se queda así.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 34

Esto sería el 0,68 lo multiplico por 100 y sería 68. Y el 0,024 lo multiplico por 100 y me daría 2,4. Entonces sería 68 entre 2,4 y... pues 68 entre 2, bueno, sí, o 70 entre 2 [son] 35. Bueno, es fácil de hacer así que 34.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

Esto es igual. Los multiplico por 100. Sería 8,6 entre 42. Entonces, como no cabe... 0,... Y ahora sería 86 entre 42 que es 2 más o menos.

Alumno 4

(1) 58 × 244; Estimación: 12000

Aquí redondeo a 200 por 60. Entonces 2 por 6, 12 y pongo 3 ceros. 12000.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 3

Sería 300 dividido entre 100 igual a 3.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,1

Como no cabe, pues pongo primero el cero y sigue sin caber... bueno, y añado un cero. Entonces ahora sí cabría.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

Voy a hacer, lo voy a redondear, voy a poner 40 por 50, que serían 2000, porque primero multiplico. No. Voy a hacer 30 por 50. Es 5 por 3, 15 y luego le añado dos ceros, que serían 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 10

Aquí lo redondeo. Sería 100 dividido entre 10... Sí, que sería igual a 10.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

Aquí lo redondeo, más o menos, a 9 y aquí a 40 pero no me cabe. Entonces, corro la coma de lugar y aquí también. Se me quedaría en 88 entre 426. Entonces, lo correría otro lugar y pondría... Ah, no. A ver. Si la corro un lugar se queda en 426 y aquí en 88,5. Entonces, si añado aquí... entonces es 88,5... Me cabe más o menos a dos. 0,2.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 4

Aquí multiplicaría 8 por... 8 por 5, que serían 40 y luego le añadiría tres ceros, que sería 40000. Y luego tengo que correr la coma... y sería igual a 4 porque la corro [la coma] cuatro lugares y como hay cuatro ceros.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2,1

Aquí corro la coma dos lugares. Y aquí también. Entonces se me queda en 74,7 entre 35. Entonces se me queda... a dos. Bueno... se me quedaría... porque 2 por 5 son diez y me llevo una. Dos por tres, seis y una siete, setenta. Entonces sí. Entonces sería 2... le pondría la coma... sería 1.

Entrevistador: Explícalo.

74,7 entre 35. Entonces lo he multiplicado por 2. Me daba 70. He puesto la coma, luego he bajado el 4 porque del 70 a 74 van 4 y se me queda en 47. Entonces 35 por una me quedaría...

(9) $0,63 \div 0,785$; Estimación: 0,4

Pues, corro la coma tres lugares [en el 0.785] y entonces aquí también lo haría [0.63] pero, como solamente hay dos [decimales] pues añado un cero. Entonces sería 630 entre 785 pero, como no puedo, pongo el 0, y ahora hago 6300 entre 785 y entonces, más o menos, sería... 4, más o menos, pero...

(10) $852 \times 0,048$; Estimación: 45

Aquí lo redondeo a 900 y aquí a 50. Se me quedaría en 45 porque quito las tres posiciones, porque había tres ceros.

(11) $0,68 \div 0,024$; Estimación: 350

Sería 680 entre 24... por que cambio la coma tres lugares y aquí [en el 0.68] solo hay dos así que añadiría un cero. Entonces 680 entre 24. Pero si los redondeo sería 700 entre 20. Entonces 700 entre 20 a... 350.

(12) $0,086 \div 0,42$; Estimación: 0,2

Corro la coma dos lugares y aquí también. Entonces me quedaría 8,6 entre 42 y, como no puedo, corro la coma otro lugar y me quedaría 86 entre 42. Entonces ahora... Se me quedaría en 0,... [cabe] a 2. Dos por dos... a 2.

Alumno 6

(1) 58×244; Estimación: 14400

Pondría 60 por 240. 24 por 6 es, 24 y me llevo 2, 144 y dos ceros más.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 3,8

Pues aquí sería... Lo compensaría. Este lo subiría a 90 y este lo bajaría a 350. Sería 350 entre 90 que sería 35 entre 90 a 8... 35 entre 9 sería a 3, (27, 8, 84, 84... a 9. 81, 3... [dice varios números entre dientes]) Si, sería así. Bueno, a 4 casi. Me he liado. 350 entre 9 sería a 3, me llevo 8. 3,8.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,12

Pues 40 entre… Primero ya voy poniendo el 0. 0,… 35 entre… 260 también podría ser. 35 entre 260… 0,… 0,1…

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

Esto lo podría multiplicar 34 por 47… 30 por 50 podría ser. Y eso es 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 1,3

Sería, como hay dos cifras [en 6.25] a la derecha de la coma, lo multiplicaría por 100. Sería 625 y el 96,2 también por 100, sería 9620. 9620 entre 625 sería 1,3 más o menos.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

Aquí lo haría, cogería esta parte, el 8, y lo dividiría. No, espera. A ver... 42.6 por 10 sería 420. Entonces también lo tendría que pasar aquí. Sería 88,5 entre 420. Como no se puede sería 0, 885 entre 426. Y eso tiende a ser 2 con algo.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 3,43

0.45 pues... lo paso... Esto es 0,5 que sería la mitad al multiplicarlo por esto [7.85] y sería 3,43, creo.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2,8

Ahora es una división. 0,35 por 100 sería 35 y 0,747 lo multiplicaría por 100 también. Sería 74,7. Entonces, eso da… 74,7 entre 35 sería 2,… 2,8 más o menos.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,9

Pondría, como aquí [en el 0.785] hay tres números detrás del cero este, multiplicaría por 1000 esto, sería 785 y aquí esto lo multiplicaría también por 1000 y sería 6300. Se pasaría... serían 1, 2 y 3. No. 630. Sería 0, y como no se puede, 6300 sería. Entonces eso puede ser... 0,8. No, 0,9 porque es 63 y 7 por 9, 63.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 4,25

Es una multiplicación. Multiplico por un lado 852 por 48 que sería 850 por 5, por ejemplo, y serían… 85 por 5, 25 y me llevo 2. 425. Serían 425 más un cero, pero como hay tres cifras aquí [en 0.048], pues tengo que correr la coma hacia la izquierda, 4,250.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 2,3

Esto sería 0,024 por 1000 porque hay tres números después de la coma, a la derecha, y sería 24 y el 0,68 también lo tengo que multiplicar por 1000 y serían 680 entre 24 que sería... 3 o 2 con algo. 2,3 más o menos.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

Esto es 0,42 por 100 que da 42 y el 0,086 lo tengo que multiplicar también por 100. Pues me daría 8,6 entre 42 pero, como no se puede, pongo el cero ya. 0,... 86 entre 42 a 2. 0,2.

Alumno 7

(1) 58×244; Estimación: 12000

Esto lo voy a redondear a 60 y yo creo que ya está, porque lo voy a dejar en 6 por 2, 12 y añado los 3 ceros, 12000.

(2) $354 \div 88$; Estimación: 5

Lo voy a redondear a 300. No, a ver. Lo voy a redondear a 400 y 40 entre 8 a 5.

(3) $36 \div 258$; Estimación: 0,1

36 entre 258 no cabe. Añado un cero. Entonces a 0,... Tengo que añadir, me queda 360 entre 258. Queda 0,1 porque 3 entre 2, a 1.

(4) $34,1 \times 47,2$; Estimación: 150

Aquí voy a redondear. Lo voy a dejar en 34 por 50. Y me va a quedar 3 por 5, 15 pues 150.

(5) $96,2 \div 6,25$; Estimación: 16

Aquí voy a redondear a 96 y a 6 y me va a quedar... 96 entre 6 a 16.

(6) $8,85 \div 42,6$; Estimación: 0,22

Voy a redondear. No. Voy a correr la coma. Y me va a quedar 0,... O sea, queda 88,5 entre 426. Tengo que correr la coma otro lugar y son 8850 entre... pues va a quedar 0,22.

(7) $0,45 \times 7,85$; Estimación: 4

Aquí [en el 7.85] voy a redondear a 8 y a 0,50 y me va a quedar... pues me va a quedar 4.

(8) $0{,}747 \div 0{,}35$; Estimación: 2

Voy a correr la coma, tanto del dividendo, como del divisor. Voy a correrla dos lugares y va a quedar 74 entre 35. Voy a redondear a 70 y me va a quedar 2.

(9) $0{,}63 \div 0{,}785$; Estimación: 0,9

Voy a correr la coma del divisor, para quitarla, tres lugares y en el dividendo y me queda en 630 entre 785 que, como no cabe, va a quedar en 6300 entre 785. 63 entre 7 a 9.

(10) $852 \times 0{,}048$; Estimación: 4,2

A ver. Y esto. Esto es muy complicado. Redondeo a 850 y a 0,05 y entonces multiplico 5 por 850 y queda... a ver... 4200. Pero tengo que correr la coma tres lugares y entonces queda 4,2.

(11) $0{,}68 \div 0{,}024$; Estimación: 3

Aquí voy a correr la coma tres lugares en el divisor y me va a quedar 680 entre 24 que va a ser... pues... lo voy a dejar en 3. Porque voy a hacer 6 entre 2, a 3.

(12) $0{,}086 \div 0{,}42$; Estimación: 0,2

Aquí también voy a correr la coma dos lugares en el divisor y me queda 8,6 entre 42 que no cabe y es 0,... tengo que correr la coma otro lugar 0, son 860 entre 42. No, espera. Me he equivocado. No, bien. 860. Y es 8 entre 4 a 2.

Entrevistador: Explícalo otra vez.

A ver. Corro la coma en el divisor dos lugares. O sea, hasta que quite la coma, ¿No? Y me queda 42. Y la corro en el dividendo otros dos lugares y me queda 8,6. 8,6 entre 42 no me cabe. Entonces he puesto 0, claro, entonces, espérate... Como 8,6 entre 42 no cabe, pues pongo 0, y añado un cero y entonces queda

860 entre 42 y queda entonces 8 entre 4 a 2. 0,2.

Alumno 16

(1) 58 × 244; Estimación: 18000

60 por 3, 6 por 3, 18. 60 por 300. 6 por 3, 18. Dos ceros y uno son tres. 18 y 3 ceros. Vale.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 30

Sería 400, 300 dividido entre 9, 90... 300 dividido entre 90. 3 con... 3... A ver. 30.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

¿Cómo lo he hecho? 300 dividido entre 90. Le quito un cero a cada uno y me queda 30 dividido entre 9. 3 por 9, 27 y luego le pongo el 0 que le he quitado a los dos y ya está.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,15

36 dividido... sería... no entra. 0, 360... 0,15.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

36 dividido entre 258, pues pongo un cero, no entra de primera entonces pongo un 0, bajo un cero en 360, ya me entra una vez. Luego me sale unas 100, pues más o menos la mitad.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

He redondeado directamente estos números de aquí. 30 por 50. 5 por 3, 15 y dos ceros, 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 16

962 dividido... No. 9620 dividido 625. 9620 dividido 625. Son 500. 2, a 9. 9 por 2, 18. Bajo el 2, más o menos... 16. Bien. Ay, lo podía haber hecho... Bueno.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

8,85 dividido entre 42,6 me quedaría en 885 dividido entre 4260. 0,2. Porque se me quedaría en 8850 dividido entre 426... No, no es 0,2. 8850 dividido entre 426. 426 son 500. Dos veces 500 son 1000. 8. 8 por 2, 16. No,... Es imposible... Sé que es 0, pero no [inaudible].

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 3,7

Como es 0,45 pues lo redondeo a 0,50 y la mitad, pues de 7,85 son 3,5. 3,7.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2

Eso sería 747 dividido entre 350 que me da 2... 2.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,9

0,63 dividido entre 0,785 serían 63 dividido entre 78,5. 630 dividido entre 785. Sería 0, 6300 dividido entre 785. 0,8 o 0,7. A ver. 7 por 8..., 7 por 9... 0,9. Vale.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 45

Esto lo redondeo a 900 por 50. Son 9 por 5, 900 por 50, 9 por 5, 45 mas tres ceros, que son 45000. Si le corro tres comas será 45.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 27

0,68 entre 0,024 pues moviendo las comas hacia la derecha quedaría 680 dividido entre 24. Entonces, si cogemos 680 dividido entre 24, 68 dividido entre 24, más o menos, son 3. 25 son 4, 6 por 4, 24. 24, 25, 27. ¿Vale? Porque 24 mas 1 es 25 y entra 4 veces en 100. Como son 6 veces 100, son 6 por 4, 24 mas

3, que ha salido del 80. 24 mas 3, 27.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

Serían 86 dividido entre 420. 0,... 86, 860 dividido entre 420. 0,2.

Alumno 15

(1) 58 × 244; Estimación: 15000

58 lo redondeo a 60 y lo otro a 25. Y 25 por 6 son 150 y dos ceros que me quedaban.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 4

354 entre 88. 88 lo redondeo a 100 y este a 400. Son 4.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,1

A ver. 0, primero, porque no cabe. Luego son 360 entre 258, pues 1.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

Eso a... 30 por 50, más o menos. Y 3 por 5 son 15, 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 9

Corro la coma dos para allá y son 9620 entre 625. Lo redondeo a 500 y eso a 950. No sé. 2, más o menos... No, a ver... dos para allá y ese dos para acá, 625 entre 9620. 9.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

Esta corro la coma para allá uno, 426 y aquí otro. 88 entre 426 no cabe. 0, 885 entre 426 a 2.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 3,6

Aquí esto es como si multiplicases por 0,5. Lo redondeo a 0,5 y es dividir. Entonces 3. 3,6.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2

Corro la coma para allá dos, y aquí dos y son 74 entre 35 a 2.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,9

Esa corro la coma tres para allá y ahí otros tres y da 630 entre 785 no cabe. 0, y son 6300 entre 785 pues 9.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 0,004

Aquí... Yo que sé... Pues esto lo redondeo a 0,05 y entonces 8 por 5 son 40... y entonces, como son 3 más para allá, entonces son 0,004. No... Sí.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 26

Esa corro la coma tres para allá. 680 entre 24 pues... 24, 4 por 6 son 24. A ver. Tres para allá y tres para allá... 4 por 6, 24. 26, más o menos.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

Corro esa dos para allá y esta dos. 8 entre 42 no cabe. 0, 80 entre 42 a 2. Vale. Ya está.

Alumno 28

(1) 58 × 244; Estimación: 12000

58 lo redondeo a 60. 244 a 200. 6 por 2, 12. Un cero de 60 y dos... 12000. 6 por

2, 12 y tres ceros.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 4

354 entre 88. Pues a 4... 4... ... a 4.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,104

36 entre 258... no cabe. Serían 360 entre 258. Sería como... a 1... ...

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

Pues he dividido 1 por 258 y luego 360 menos los 258 y sale 102. Y entonces 102 no cabe. Pongo un cero. Entonces sería 1200. No. 102 y un cero serían 1020 entre 258 sería a... no, me paso. Porque 5 por 2 son 10. A 4, más o menos.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

Multiplico por 10. Serían 341 por 472. 341 lo voy a redondear a 300 y 472 a 500. 5 por 3, 15 y cuatro ceros y le quito dos por las comas. 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 12

Multiplico por 100. 9620 entre 625 pues... a ver. 9620 entre 625... 9 entre 6 pues a 1. Entonces serían... No, a ver. 962. Sí. Entonces sería 962 menos 625, entonces sería 337. No. Sería un 2. No. Sería 7, 4 y 3. A ver, un momento... Sería 300... a 12... a 12.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,02

Multiplico por 100 los dos números. Sería 885 entre 4260. Sería 0, 800, 900. 0, 885 entre 4260... a 2. No. No cabe tampoco. [Añade un cero después de la coma]. Ahora sería a 2. Y ¿Sigo sacando más? Pues así.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 4

Pues esto sería 450. No. 45 por 785. He quitado por 100 los dos. Voy a redondear 45 a 4, bueno, a 50, lo redondeo y esto a 800 y, como 5 por 8 son 40, pues sería 40 y tres ceros y son cuatro comas. Sería 4.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2

Multiplico por 1000. Sería 747 entre 350. Entonces sería a... a 2, más o menos... A 2.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,8

Multiplico por 1000. 630 entre 785. No cabe. Sería 6300 entre 785 que sería 6300. A 8, más o menos, porque 63 entre 7...

(10) 852 × 0,048; Estimación: 40

Multiplico 852 por 48 que multiplico 800 por 50. 8 por 5, 40. El cero del 50 y otros dos de 800... y serían 3 decimales, a 40.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 2

Multiplico por 1000. 680 entre 24. 680 entre 24. A ver, no voy a saber hacer una normal. 680, a 3 por 4... ... No. A 2.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

Para quitar esta coma y esta lo que hago es correr, multiplicar por 1000 y aquí también. Entonces sería 86 entre 420... y sería 0, porque no cabe, y ahora pues 86 entre, 860 entre 420, pues sería a 2, más o menos.

Alumno 132

(1) 58 × 244; Estimación: 12000

Pues redondeo los números. Entonces sería 60 por 200... Entonces sería... ... sería 12, 12000.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 4

354 entre 88. Pues aquí redondearía... Sería 4.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,1

Como 36 entre 258 no cabe, sería 0, añado un cero al dividendo. Entonces sería 360 entre 258, 0,1.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

34.1... Pues aquí redondearía a 30 y 50. Entonces 30 por 50. Pongo dos ceros...

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 1,6

El divisor lo corro dos lugares para que desaparezca la coma. Entonces se queda en 625 y el dividendo también lo tengo que correr dos lugares. Se quedaría en 9620. Entonces 9620 entre 625... que sería... 1,6.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

Sería 9620 entre 625. Entonces, he cogido el 9 y lo he dividido entre 6, que es a 1. Entonces sería luego 36 entre 6, que sería 6. Entonces, más o menos, sería 1,6.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

En el divisor, corro la coma un lugar. Entonces se queda en 426 y en el divisor corro la coma también un lugar. Entonces se queda en 88.5 entre 426. Entonces 800... a ver. 88.5 no cabe entre 426 y sería 0,... Ahora sería 885 entre 426... que sería 1. A ver, 885 entre 426, a ver... No. A 2.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 0,36

A ver. Hay, después de la coma, tanto en uno como en otro, hay dos cifras. Entonces después de la coma serían cuatro cifras... Sería... 0... ... ... Ay... 0,... ... Redondearía 45. No. A ver... 50 y aquí sería a 90. Entonces sería 9 por 5, 45... ... ¿Puedo pasar al siguiente?

Entrevistador: No. Explica qué intentas hacer.

Quiero redondear después de la coma. Sé que después de la coma, en el resultado, va a haber cuatro lugares... A ver. Esto lo redondearía a 8... ... Sería... Es que he hecho 0,45 por 8 pero entonces, si hago eso, habría después de la coma solo dos números, por que sería 0,45 por 8 que he redondeado estimando.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2

El divisor, que es 0.35, lo correría dos lugares y se te queda en 35 y el dividendo se queda en 74,4. Entonces 74,7 entre 35... que sería... Sí, 2.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,9

Pues a ver. Como en el divisor hay tres cifras corro la coma tres lugares. Entonces se queda en 785. En el dividendo hago lo mismo. Entonces se quedaría en 630 porque tengo que correr los mismos lugares, los mismos números. Entonces sería 630 entre 785. Entonces sería 0,... Como 630 entre 785 no cabe pues sería 0,... entonces añadiría un cero. Serían 6300 entre 785. Entonces sería 0,9.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 0,45

Entonces el resultado... El resultado llevaría tres números después de la coma. Entonces sería... 0,... Entonces esto lo redondeo a 900 y esto a 50. Entonces sería 0,450

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 2

En el divisor corro la coma, multiplico por 1000. Entonces se queda en 24. Esto también lo haría por 1000. Entonces sería 680 entre 24... Entonces... 680... Sería a 2.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

El divisor es 0,42, lo correría dos lugares. Entonces se quedaría en 42 y el dividendo lo tengo también que correr dos lugares entonces se quedaría en 8,6. 8,6 entre 42. No se puede. O sea, no cabe. Entonces sería 0, ahora sería 86 entre 42. Sería 0,2.

Alumno 32

(1) 58 × 244; Estimación: 1200

A ver. 58 por 244. Pues redondeo, subo este a 60 y... este, por ejemplo, hago 60 por 20, 1200.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 4

Luego 354 entre 88 pues, a ver. 354 a ver. 8 por 4, 32 al 4, 2 me llevo 3... A 3, más o menos... O sea, no. A ver. 354 entre 88. Pues, para redondear subo a 355. Bueno, 355 y este lo subo a 90. Bueno, bajo a 350, ¿vale? Y subo el 88 a 90. Entonces, 350 entre 90 [inaudible] 360 entre 90... por 4, 36. Me paso. Tres y pico... ... ... por 4, 36. 40. 40 no, 4.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,1

0, a 1, más o menos.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 12000

Redondeo a 34. O sea. Me olvido de los decimales aquí y los multiplico. 4 por 3, 12, 12, 1200, 12000.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 1

Multiplico por 10 aquí, para quitar la coma. Entonces aquí también por 10 y me queda 962 entre 62,5. 962 entre 62... Redondeo a 96, me olvido de las comas y 96 entre 62, no me da 2, entonces a 1 coma... 1 coma... ... Lo dejo así.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,02

Aquí primero voy a multiplicar 42,6 por 10 para quitar el decimal. Entonces aquí muevo un decimal también [incomprensible] y sale 88,5 entre 426. Entonces, a 0, bajo la coma. Otra vez cero porque 88,5 entre 426 me da cero, no se puede, y entonces tengo que bajar el 5. 885 entre 426 me daría 2, aproximadamente.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 0,0028

Aquí multiplico normal. O sea. 4 por 7. Aquí multiplico 7 por 4, 28 y cuento los decimales que tengo a la derecha de cada uno. Entonces 1, 2, 3, 4. Entonces 28, 1, 2, 3, 4. Ay no pero que... pongo encima... vale. 28. Entonces cuento que hay cuatro ceros. 0,... 0,0028.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2,1

Multiplico para quitarle los decimales. 74,7 entre 35. Me daría 2. 2,... A ver. 2,... 74,7 entre 35. 2,... 2,... 0,747 por 100, 74,7 entre 35. Esto lo redondeo a 75 y esto 35 lo dejo. Entonces 75 entre 35, más o menos, a 2 sería 70, pues... 2,... 2,... 1.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,8

Multiplico ambos por 100 para que sea igual la división, que nos dé igual el resultado. 63 entre 78,5 no me cabe. Pongo un cero. Bajo el 630 entre 78,5 y me da... a 8, aproximadamente.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 32000

Multiplico 8 por 5, 40. Bueno. Multiplico 85 por 50. Entonces, eso me da 8 por 5, 40, 400... [inaudible]... ... Multiplico normal, o sea, redondeo. 850 por 0,50. O sea, subo el 0,048 a 0,050. Entonces multiplico el 50 por 85. No, por 90. Es que... Espera. Al final me he hecho un lío. Aquí redondeo entonces. 90, en vez de 85 y aquí el 0,048 subo a 50... ... Bueno, pues entonces voy a dejarlo, más o menos voy a hacer 8 por 4, 32 y luego voy a contar los decimales que hay detrás de la coma. Entonces, como hay 3, pues 32000.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 30,2

Aquí multiplico por cien los dos. Entonces aquí dejo 68 y aquí 2,4. Entonces 68 y 2,4 pues... 30... 68 entre 2 sería..., 70 entre, bueno, redondeo. Entonces, hago, cuando pongo el decimal, 70 entre 2, que me da 35 coma... y las comas que..., y me queda una coma. A ver. Multiplico por 100, ¿vale? 0,68 por 100 y ahora esto por 100, que me da 2,4. 68 entre 2,4 pues me da 30,2, más o menos.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

Aquí, dividir otra vez. Pues multiplico otra vez aquí para quitarle el decimal el 0,42 multiplico por 100 y me queda 8,6 entre 42. No me cabe. O sea, es cero. 86 entre 42, 84... a 2 sí me cabe.

Alumno 17

(1) 58 × 244; Estimación: 12000

Lo aproximo a 6. Sería 6 por 2… Sí. 12 y le ponemos 3 ceros más.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 4

88 se acerca mucho a 90 y 90, para buscar un múltiplo de 9, 354… Llevo muy mal la tabla del nueve. Se puede aproximar a 360. y entonces sería 360 entre 90. Bueno, 36 entre 9 que daría a 4.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,14

Pues, como 36 no se puede dividir, lo que hago es: añadiría aquí un cero y sería 0, y ahora 360 entre 258. Uno. Quedan unos 100. Entonces no da. Bajo otro cero. Pues sería… 0,14.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

Vale. Pues aquí entonces… redondeo 34,1 a 30 y 47,2 a 50. Entonces hago 5 por 3, 15 y le pongo dos ceros. Sería 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 16

Hago 96 entre 6, que daría a 16.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

Pues hago lo mismo. Quito la coma. Sería 88,5 entre 426. Da cero. Vuelvo a mover. 885 entre 426. Es justo la mitad. A 2.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 4

0,45 es prácticamente 0,5, lo cual es un medio. 7,85 es prácticamente 4. O sea, 8. La mitad, pues serían 4.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 0,27

Aquí 0,35... no, vale, no. Ah. 0,74 lo aproximo a 0,75, que serían tres cuartos de 0,35. Lo aproximo a 0,36, que entre 4 daría a 0,... a ver. No, no, no, no. Ah, no. A 9. Entonces saldría 0,09. Pero, como son ¾, 9 por 3, que sería 28... 27. O sea, que sería 0,27.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,52

Aquí lo mismo. Es 0,63. Pues aproximo a 0,66, pues lo mismo, 2/3 de 785 que habría que dividirlo entre 3. 780 sería fácilmente divisible. Serían 260 y 260 entonces por 2 que saldría 520. 0, quinientos... Bueno. 0,52.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 0,426

0,048 es 0,05, que sería ½. Entonces sería 852. La mitad, 426. Pues saldría 0,426.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 0,014

0.68 se aproxima a 0,66 que son 2/3. Entonces 24 entre 3. No. A ver... 24 se aproxima a 21. Entonces, hago 21 entre 3 es a 7, como son 2/3, 7 por 2, 14. Sería 0,014.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

A ver. Esto se aproxima a 0,0... No. Bueno. A ver. Quito esta coma. Entonces sería 42 y desplazo esta. 8,6 entre 42. Daría 0. Bajo el... Muevo la coma. Sería 86 entre 42 pues 0,2.

Alumno 27

(1) 58 × 244; Estimación: 12000

58 por 244. 6 por 2, 12 con tres ceros.

(2) $354 \div 88$; Estimación: 4

A ver. 90 por 4 serían 360.

(3) $36 \div 258$; Estimación: 0,15

Sería 0 con... 36 entre 25... a 1 y algo alto. He hecho 36 entre 258. Entonces no coge. Entonces le he puesto el 0. 360 sería a 1. 258 no hay dos veces. A 1 con algo, no sé. 25 y 25, 50. 1,5.

(4) $34{,}1 \times 47{,}2$; Estimación: 1500

30 por 50 serían, 3 por 5, 15 y dos ceros.

(5) $96{,}2 \div 6{,}25$; Estimación: 16

6 por 15 serían 90 mas otro 6, 96. Sería 16.

(6) $8{,}85 \div 42{,}6$; Estimación: 0,2

En principio no coge. Es obvio. Lo saco y serían 885 entre 4260. Entonces 0,... Si le quito otro. A ver ahora cómo hago yo esto. 8... no vale. 88... sería a 2. 0,2. Creo que es 0,2.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

0,2... 42 entre 0,2 sería como multiplicarlo por 2. Ah no. Entonces no puede ser. No. Es que no sé cómo lo he hecho. Lo he puesto porque... no lo sé, no lo sé. Es que yo esto siempre lo hago con lápiz. No coge. Lo cambiaría otra vez la coma. Es que, no, no, no, no, no. No sé cómo hacerlo. Yo pondría 0,2. No lo sé. Lo voy a poner pero no creo que sea así.

(7) $0{,}45 \times 7{,}85$; Estimación: 3,5

0.45 por 7... por 8... 5 por 7, 35. 35... 350... y le quito dos 3,5.

(8) $0{,}747 \div 0{,}35$; Estimación: 2

747 entre 35. 35 es casi la mitad, así que 2.

(9) $0{,}63 \div 0{,}785$; Estimación: 0,8

Sería 630 entre 785. Sería 0 con bastante. 0,8.

(10) $852 \times 0{,}048$; Estimación: 0,4

152. 152000 entre 48. 8 entre 4 a 2... Ah, no. Que es por. Me he hecho un lío. A ver. 8 por 4, 32. 8 por 5, 40. 40 con... Sí. 8 por 5, 40 con dos ceros, y luego le tengo que quitar tres. Sería a 0,4.

(11) $0{,}68 \div 0{,}024$; Estimación: 28

680 entre 24. 24 [inaudible] 25. 680 entre 24. 24 por 4, 100 por 7, 28. Yo creo que son 28.

(12) $0{,}086 \div 0{,}42$; Estimación: 0,02

Sería... saco los tres ceros... 86 entre 42. 86 entre 420 sería. Sería... ese no coge. Le quitaría los ceros al principio. Entonces me quedaba: 86 no coge. Le quito otro cero. Entonces luego ya 8 entre eso a 2. 0,02.

Alumno 10

(1) 58×244; Estimación: 12000

sto es parecido a 60 por 200. Lo puedo hacer así. 60 por 200. 6 por 2, 12 y añado tres ceros.

(2) $354 \div 88$; Estimación: 4

Pues esto lo pasaría, 35 lo haría 36 y 88 como 90. 360 entre 90 sería igual a 36 entre 9 que sería 9 por 4... No... 9 por... No. Pues, a ver, a ver. Este lo pasaría a 40. 35 lo redondearía a 40, 400 entre... Me estoy haciendo un lío. 35 entre 8. Ah, pues sí. Lo había hecho bien. 36 entre 90 sería a 4. 9 por 4, 36. 360... Tacho los dos ceros y, a 4.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,1

Pues como no cabe, tengo que añadir un cero. 0. Como no cabe, 0 y añado otro cero... Me he hecho un pequeño lío. A ver. Como aquí no me cabe, como no puedo dividir 36 entre 258, pongo 0 y bajo un cero en 60. Y así, a simple vista, veo que puedo poner un 1 porque si pusiera un 2 se pasaría.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 15

Lo redondeo. Esto a 50, el 47 a 50 y 34 a 30. 3 por 5 serían 15. Tomo el 3 y el 5. 15 y dos ceros, del 4 y del 7, serían 1500. Pero 1500 le tengo que quitar estos dos decimales, con lo cual serían 15.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 10

96. Pues esto, le quito las dos comas de 6,25 y, en el otro lado, le añado un cero. Sería 9620 entre 625. Y cojo un 1 porque no me da para hacer 2, porque el doble de 6 sería 12, entonces se pasa. Cojo un 1 y un cero que tengo que añadir de aquí, 10.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,2

Pues paso... quito las comas, con lo cual en la izquierda, en el divisor, tengo que añadir un cero. Serían 885 entre 4260. Como no lo puedo dividir, tengo que poner un cero. Y ahora serían 885... le añado, bajo otro cero aquí y serían 8850 entre 426, que sería, más o menos, dividiendo 8 entre 4, a 2. 0,2.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 2,8

Siete por 4, 11 y le añado... A ver. 7 por 4, 11. Uy, ¡Qué error! 7 por 4, 28. 28 y tres ceros, de estas tres cifras, serían 28000. Y ahora tengo que quitar, de 28000, uno, dos, tres y cuatro ceros, cuatro posiciones... 2,8.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2

747 entre 35... Sería como 74,7 entre 35. 7 entre 3, a 2.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,9

Quito las comas y tengo que añadir un cero en el divisor. Como el dividendo es menor que el divisor pongo 0, y serían 63 entre 7 que serían, más o menos, a 9. Aunque creo que me paso un poco.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 45

Pues 800... No. Puedo redondear a 900 y este a 50. 9 por 5, 45. 9 por 5, 45. Le añado uno, dos y tres ceros... que serían 45000. y ahora le quito estos tres decimales, 45000, con lo cual se quedaría en 45.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 30

Pues esto sería, en vez de 24, 25... y 68 lo pasaría a 70. No. A ver... Lo voy a hacer, quito las comas primero y me queda 680 entre 24. 6 entre 2 a 3 y, como tengo que añadir un cero, pues, de 680,... 30.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,2

Si corro las dos comas, me quedaría 8,6. Entonces, 8,6 entre 42. Con lo cual tengo que poner un cero, porque es un número más pequeño. 0, y ya me queda 86, bajo el 6, 86 entre 42. Pues es, más o menos, a 2.

Alumno 133

(1) 58 × 244; Estimación: 15000

Multiplico esto... 58 por 244... O sea. Sería 60 por... O sea. 300 dividido, multiplicado por 50. 5 por 3, 15. Uno, dos y tres. 15000.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 3

Pues esto lo estimo a 100 y esto a 300. 300 entre 100, a 3.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,02

A ver... División. 36... 0, como aquí no hay... tengo que poner un cero, otro cero y son, sería 360, a 400... dividido... 400... 400 dividido entre 300. No. Voy a dividir 400 dividido entre 200 a 2. 0,02 y pico. No sé.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

¿Puedo hacer truncamiento aquí, verdad? Bueno. Pues voy a quitar el 2 y el 1. Entonces multiplicaría 30 por 50. 15. 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 1,6

Una, dos. Una... y dos. O sea. Serían 9620 dividido entre 625. O sea, 10000 dividido entre 600... Pues a... ... 0,... O sea. Lo que he hecho es cambiar esta coma aquí y aquí. O sea. Caben dos. Uno y dos. [inaudible] Ah, entonces no. Si no, quedarían 9600, o sea, 9620 dividido entre 625. Se me va a quedar en 10000 entre 600... [inaudible]... Creo que es así... No... 1,... qué mareo. ¡Qué mareo tengo!... No hago más, ¿Eh?

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

Esta coma la paso aquí. Aquí son dos pasos. Dos decimales. Paso los mismos al otro lado y quedaría 9620 aquí y aquí 625. Entonces aproximo esta a 10000, sería 10000, y esta a 600. Sería 6 por una es 6, a 10, 4. Bajo el cero. 6 por 6, 36, al 40 me llevo 2 y sería 1,6.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,02

A ver. Otra división. Tengo que quitar este cero. Quito uno. Entonces quedaría aquí 88,5 dividido entre 426. Tengo que quitar este cero. O sea, 0,0... Entonces sería 900... a 2.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

A ver. Esta coma la retiro una aquí y me queda uno. Esta la tengo que pasar. 88,5 entre 426. Como aquí no puede haber comas, quito otra... Sería 0,0 y quedaría 885 dividido entre 426 que, esto lo redondeo. Sería 900 y esto 400. A 2 con algo.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 0,032

O sea. Están los decimales. Yo tengo que quitar... los decimales. Quito esta coma y habría uno y dos. Entonces pasaría a uno y dos. Entonces quedaría 45 multiplicado por 785. Como 45 es pequeño, se añadiría aquí un cero entonces en el resultado. Sería 0,0... 40 por 700, entonces sería 0,032... No sé. Yo creo que está mal.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 2

Este decimal lo paso aquí. Aquí me quedan dos. Aquí sería 74,7 dividido entre 35 que va a ser, pues a... O sea, sería 74 a 70 y aquí lo dejaría en 30... quedaría un 3, creo. A ver. Yo aquí lo que he hecho. Esta coma la he pasado para dejar un número entero. Paso dos comas. Aquí la tengo que pasar también. Una, dos, y da 74,7 dividido entre 35. No es un 3. Es un 2. Me he equivocado. Sería 2 coma algo. 2 coma... Está mal seguro.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,07

Paso la coma. Uno, dos, tres. Uno, dos, tres. 630 dividido entre 785. Como es pequeño pongo 0,0. Entonces ya sería 6300 entre 785. Sería 6000 dividido. O sea. 60000 dividido entre 8... No. Entre 7... A ver. Lo repito. Cambio la coma. Uno, dos y tres. Entonces cojo la coma, 0,63 uno, dos y tres. Entonces aquí debería haber un cero. Son 630 dividido entre 785. Se añade otro cero. Son 6300 dividido entre 785. Entonces ahora redondeamos. A 800. O sea, 8. 60 dividido entre 8 a 7.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 45

Multiplicación. 48... 50 lo multiplico por 850. Quedaría... Ah no. Tengo que quitar... Ah, no. Sí está bien. 50 por 900. No. Sí. 45. Sería 45, uno, dos y tres. O sea. Sería 45000. Como tengo que quitar los decimales, uno, dos, tres... quedaría 45. ¿No?

852 estima pues arriba, que sería 900. Y aquí este 48 subiría a 50. 9 por 5, 45. Le tengo que sumar uno, dos y tres. O sea, sería 45000. Como esto tiene aquí el decimal, uno, dos, tres. Le quito esos decimales a un, dos, tres y me queda 45.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 0,03

A ver. División. Tenemos que quitar esta coma. Entonces la retiramos una, dos y tres. Y luego tenemos que pasar esta las tres que he quitado del otro. Dos y ahora aquí un cero. Entonces sería 680 dividido entre 24. Entonces la división sería 0,... 0 porque le hemos puesto un cero aquí, y ahora a redondear... Aquí sería 70 dividido entre 24... entre 20... Sí. Pondría 70 aquí, y aquí un 20 y aproximadamente nos quedaría, pongo un 3. A ver. Me he liado. 70. 3 por 2, 6. Sí.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,03

Cambio la coma aquí. Uno y dos. Entonces tengo que quitarla aquí. Uno y dos. Me queda 8,6 dividido entre 42... A ver. ¡Qué mareo de números tengo!... Me he quedado en blanco... Como 8,6 es menor que 42, pongo 0, bajaría el 6. 86 lo dividiría entre 42 [inaudible]... 8,6 dividido entre 42. Entonces debo de cambiar aquí la coma, debo poner otro cero. O sea, 0,0 y sería 86 dividido entre 42. Entonces al dividirlo, quedaría aquí 90 y aquí 40 pues... 2 con algo, creo...

Alumno 1

(1) 58 × 244; Estimación: 12000

50. Bueno, 60 por... redondeo a 60. Aquí redondeo a 200 y son 6 por 2, 12. Uno, dos, tres. Añado tres ceros.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 50

Esto serían 300, 400 entre... o sea, 400 entre 8. 40 entre 8 a 5. 50.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,018

Y ahora esto serían 0,0 y serían 360... a ver. 36 entre 2... 36 entre dos cabe a 15, 18.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 15

Aquí haría 30 por 50, que son 3 por 5, 15. 15 y un cero y otro cero serían 1500. 1500 y, al quitar los dos ceros, quedan 15.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 200

Aquí serían 100 entre... 100 entre... paso la coma y serían 1000... una, dos. Tengo que poner 1000... 10000 y 600. 10000 entre 600. Si lo divido entre 500, lo redondeo a 500 me daría... 10000 entre 500 me daría a 2... a 200.

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,02

Aquí paso un lugar. Aquí paso otro. Entonces, al pasar el otro, tengo que poner 0,0 y sería 800 entre 400, a 2.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 0,005

Aquí pasa la coma dos lugares y aquí otros dos. 45 entre 785. Como no me cabe, tengo que poner dos ceros aquí, o sea, que serían 0,00... 0,00 y aquí sería, me quedaría... 4000 entre 800, que serían 40 entre 8, a 5.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 0,02

Pues aquí, este lo redondeo al 700 y este al... No. Este lo redondeo al 800 y este al 40. Entonces son: 8 entre 4 a 2. A 2, que serían, dos ceros de aquí y uno de aquí, serían 1000, 2000 y, como tengo que poner una, dos, tres, cuatro y cinco, serían... 2000,... 0,02.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,09

Aquí paso la coma aquí. Me quedaría 70 y... Bueno. Paso aquí y me quedan 630 entre 785 que no me cabe. O sea, que 0,0 y serían 6000, o sea, 63 entre 7 a 9.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 3,6

A ver. Aquí son 900 por 40, que son 9 por 4, 32. No. 9 por 4, 36. 9 por 4, 36. 36 mas dos ceros de aquí y uno de aquí serían 3600. Y, como le tengo que quitar esto, será 3,6

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 30

Quito la coma de aquí y serían 2,4 y aquí 68. Como tengo que quitar otra más serían... 24 entre 680 que divido 600 entre 20, que me da 30.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,02

Aquí paso la coma aquí, 42, y aquí me quedaría 8,6 por lo que, al pasar la coma, me queda 0,0 y 80 entre 40 a 2.

Alumno 30

(1) 58 × 244; Estimación: 12000

Multiplicación. A ver. Voy a poner por un lado 60 y por el otro 200. Entonces multiplico 6 por 2, 12, mas tres ceros sería 12000. 6 por 2, 12, con tres ceros 12000. Sí.

(2) 354 ÷ 88; Estimación: 5

Esto voy a hacer 360... ... Bueno. Voy a poner un 4. 354 entre 88 he puesto que... No, no, a 4 no. A 5. 5 por 8, 40 al 4, 4... Ah, no sé. Voy a poner un 5.

(3) 36 ÷ 258; Estimación: 0,1

Pondríamos un cero. Se lo pondríamos luego al 36. 360 entre 258. Entonces sería 0,... 0,1... ... No sé. Yo 0,1 pondría, pero yo creo que es poco resultado.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

No, pues he puesto, como no cabe, he puesto al 36 un cero, y luego en el... en el este, en el... Ahora no se cómo se llama. He puesto 0, y luego como... he puesto a 1. 0,1. Porque a dos no cabe. Porque se pasaría. Entonces, he hecho la operación y tal y en el resto me ha dado... No sé lo que me ha dado en el resto. No sabría hacer más de 0,1, mentalmente.

(4) 34,1 × 47,2; Estimación: 1500

Este lo bajo a 30 y este lo subo a 50. Por lo tanto 3 por 5, 15 y dos ceros 1500.

(5) 96,2 ÷ 6,25; Estimación: 11,2

Este casi se puede hacer directamente... A ver, espera. 96 lo voy a poner como 100 y lo voy a dividir 100 entre 6. 100 entre 6. Bueno, 100 entre 5 es a 20, entre 6... Ya no sé ni lo que hago. Es que sé que es 11 coma algo pero... 11,2 por ejemplo. Bueno. Lo voy a poner pero...

(6) 8,85 ÷ 42,6; Estimación: 0,02

Vamos a quitar la coma de 42,6. Corremos un lugar... y... en 8,85 también con lo cual tendríamos 88,5 entre 426 pero como no cabe, ponemos un 0... 0,... tampoco cabe. Pondríamos otro cero y tendríamos 885 entre 426. Entonces sería 0,0... a 2. Sería 0,02. Yo creo.

(7) 0,45 × 7,85; Estimación: 0,035

Esto lo voy a redondear a 50. Y lo voy a multiplicar por 7. 50 por 7, 350. 4 sería 0,0350, creo.

(8) 0,747 ÷ 0,35; Estimación: 0,21

... Cómo se nota que no soy de ciencias, ¿Eh? Vale. Quito la coma. La corro dos aquí... me quedaría 74 entre 35. Pues aquí también habría 0,... Cabe a 2... 0,21.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

Primero he quitado las comas de aquí. Las he corrido dos lugares y quedaría 74 entre 35. Entonces 74 entre 35 he puesto que cabe a 2 porque 2 por 35 son 70. Entonces he puesto 2 por 5, 10, al 14, 4. Luego 2 por 3, 6 y una 7, 0. Luego bajo el 7. 47 entre 35 a 1. Aquí antes he multiplicado por 2 y luego 1. 0,21. A ver si estoy aquí todo ilusionado explicándolo y luego está mal.

(9) 0,63 ÷ 0,785; Estimación: 0,08

Aquí lo mismo. Corro la coma tres lugares, por lo tanto aquí me quedaría 630. 0,... 630 no cabe. Pongo otro cero y aquí te quedaría 6300 entre 785. 0,0 6300 entre 700. 6 por 7... No me sé la tabla del 7... 7 por 8, 56. 9 por 7, 63. Pero bueno, se pasa. 0,08 pondría.

Entrevistador: ¿Cómo lo has hecho?

Otra vez. Estos tres lo paso aquí. Sería 630 entre 785. Como no me cabe, pongo otro cero. Entonces ya tengo 0,0 algo. Ahora para dividir 630. No. 6300 entre 785 lo multiplico por 8, por que por 9 ya se me pasa. Entonces pondría 0,08. Vaya cacaos mentales me estoy haciendo.

(10) 852 × 0,048; Estimación: 45

Esto lo voy a subir a 900 y esto lo paso a 50. Entonces multiplico 900 por 50 que sería: 9 por 5, 45. 45 y tres ceros 45000. Ahora al 45000 corro la coma tres lugares y me quedaría 45. Creo. 45 a secas.

(11) 0,68 ÷ 0,024; Estimación: 0,02

Pues lo mismo. Tengo que quitar la coma y poner aquí, correr tres lugares. Quedaría 680 entre 24. Bueno. Primero cogería el 68 entre 24... que quedaría 3... No. 3 se me pasaría. Sí. 3 por 25 serían 75. Sí. Se me pasaría. Cabría a 2, mejor. Sería 0,02... 0,02, creo.

(12) 0,086 ÷ 0,42; Estimación: 0,02

Corro las dos comas hacia allá y luego tenemos... Entonces sería 0,0... Bajo el 6 y sería 86 entre 42, cabe a 2. 0,02.

APÉNDICE E: ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LOS ÍTEMS DE LA PRUEBA DE ESTIMACIÓN

El presente apéndice E esta dedicado al análisis de las respuestas de los alumnos a cada una de las tareas de la prueba de estimación. Se asume en el análisis que, aunque pueda haber indicios en las estimaciones que señalen a una posible estrategia para abordar la estimación, no puede tenerse seguridad del procedimiento utilizado por cada alumno para realizar su estimación. No obstante, el análisis previo de los ítems, junto con las respuestas dadas por los alumnos, y el análisis de los errores que se ha realizado en este trabajo, puede proporcionar una información de interés para la elaboración de nuevas hipótesis de trabajo para futuras investigaciones. Así, en este apéndice comienza cada ítem con su correspondiente análisis previo, seguido de una figura en la que aparecen las estimaciones dadas por los participantes y las frecuencias de cada estimación, finalizando con una breve reflexión sugerida por la confrontación de estas informaciones sobre el resultado de la aplicación del test. En especial, hay interés en valorar hasta qué punto, para cada ítem, los dos intervalos diseñados para la evaluación arrojan resultados equivalentes o no. También quiero utilizar la información que dan figuras y tablas para reflexionar sobre la adecuación de los respectivos intervalos para evaluar las tareas de estimación. Esto se hará, en cada ítem, examinando la estimación mayor que queda por debajo del intervalo del 30% de error y la estimación menor que queda por encima de dicho intervalo. En algunas ocasiones, comentaré también algunas estimaciones que se hayan dado con frecuencia alta, cercanas al intervalo de respuesta del 30% de error.

Uno de los aspectos que se puede observar en las estimaciones es el intento de calcular la respuesta exacta, en lugar de estimar. En la Figura E.1 puede verse que solo un alumno ha dado como estimación la respuesta exacta (46 × 771 = 35466), mientras que otros dos han dado como estimación 34466, y otro 32466, lo que parecen también intentos de calcular respuestas exactas.

Tabla E.1. *Análisis previo del ítem 1*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(1) 46 × 771	40 × 700	Truncamiento	28000	1	[24826,46105] [28000,46000]
	40 × 3/4 ×1000	Fracciones	30000	2	
	40 × 800	Redondeo + comp.	32000	3	
	50 × 700	Redondeo + comp.	35000	3	
	50 × 800	Redondeo	40000	2	
	100/2 de 800	Fracciones	40000	2	
	46 × 1000	Potencias de 10	46000	1	
	50 × 1000	P. de 10 y redondeo	50000	0	

Las estimaciones más frecuentes han sido 40000 (31 veces) que parece provenir de 50 × 800, aplicando el redondeo, y 35000 (11 veces) que parece resultado de un redondeo con compensación previa 50 × 700, seguido de 38500, que podría salir de 50 × 770. Es curioso que solo 4 alumnos haya dado la estimación de 28000, truncando los números de partida. El que haya 14 alumnos que hayan dado 4000 como estimación es muestra clara de la gran incidencia de los errores en el ajuste del valor posicional. En este caso, errores en el conteo de los ceros. Al multiplicar 50 × 800 se multiplica 5 × 8 y se añaden 3 ceros al resultado. Parece que bastantes alumnos no han tenido en cuenta el 'nuevo' cero que se produce al multiplicar 5 por 8.

Las dos estimaciones imprecisas más cercanas (por debajo y encima) del intervalo del 30% de error han sido 9610 (con un porcentaje de error de 72,9%) y 60000 (69,1%). Estas dos estimaciones están bastante separadas porcentualmente de las estimaciones dadas como aceptables en este ítem. Esto es indicador, en parte, de que el intervalo de respuesta razonable, determinado por los resultados del truncamiento de ambos números al dígito de mayor valor posicional y el redondeo hacia arriba de ambos números, es bastante adecuado para evaluar tareas sencillas de multiplicación. Por otra parte, solo la estimación 26012 pertenece al intervalo del 30% de error, pero no al intervalo de respuesta aceptable construido con estimaciones. Esto se debe a que 26012 es menor que 28000 = 40 × 700, resultado obtenido por truncamiento.

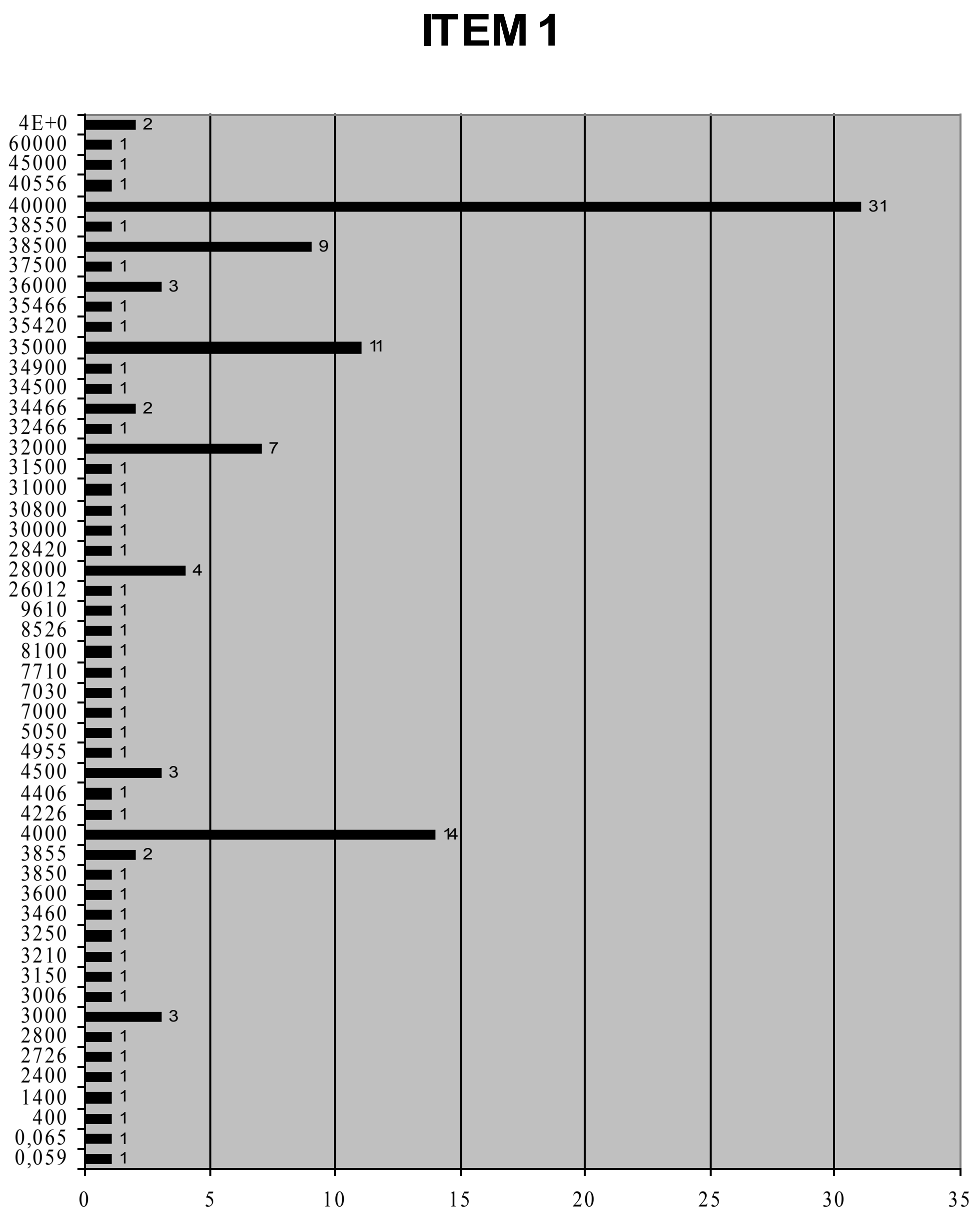


Figura E.1. Estimaciones para el ítem 1.

En el ítem 2, hay dos alumnos que han realizado mentalmente el cálculo exacto ($58 \times 244 = 14152$). Hay 35 participantes que han dado la estimación de 12000, probablemente sustituyendo el cálculo inicial por 60×200 (aunque también podría ser de 50×240). También ha sido muy frecuente la estimación 15000 (¿50×300?). Dentro de las estimaciones imprecisas, que han obtenido una puntuación de cero, he encontrado 7 alumnos con una estimación de 1200, que parece claramente tratarse de un error en el ajuste del valor posicional. La estimación 0,25 encaja bastante bien con una confusión en la operación, pues $50 \div 200 = 0{,}25$.

Tabla E.2. *Análisis previo del ítem 2*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(2) 58 × 244	50 × 200	Truncamiento	10000	1	[9906,18397] [10000,18000]
	55 × 200	N. compatibles	11000	1	
	60 × 200	Redondeo	12000	2	
	100/2 × 250	Fracciones	12500	2	
	60 × 1000/4	Fracciones	15000	3	
	50 × 300	Redondeo + comp.	15000	3	
	55 × 300	N. compatibles	16500	2	
	60 × 300	Redondeo h. arriba	18000	1	

Las estimaciones imprecisas más cercanas al intervalo del 30%, han sido 9524 (con un 32,7% de error) y 20000 (con un 43,7%). Es este un caso curioso, pues un 32,7% de error está demasiado próximo al 30% habitual para no destacar de nuevo la arbitrariedad del uso de un porcentaje cualquiera. Además, la estimación queda demasiado cerca de 10000, resultado de truncar los dos números a 50 y 200 respectivamente, estimación premiada con un punto con el sistema de puntuación elegido.

En el ítem 3, 13 participantes han dado una estimación de 50 (probablemente, resultado de sustituir $968 \div 24$ por $1000 \div 20$). Otros 37, han dado una estimación de 40, que puede ser resultado de sustituir $968 \div 24$ por $1000 \div 25$ o, seguramente, de realizar una versión simplificada del algoritmo escrito, como puede verse más adelante, en el algoritmo correspondiente a este cálculo.

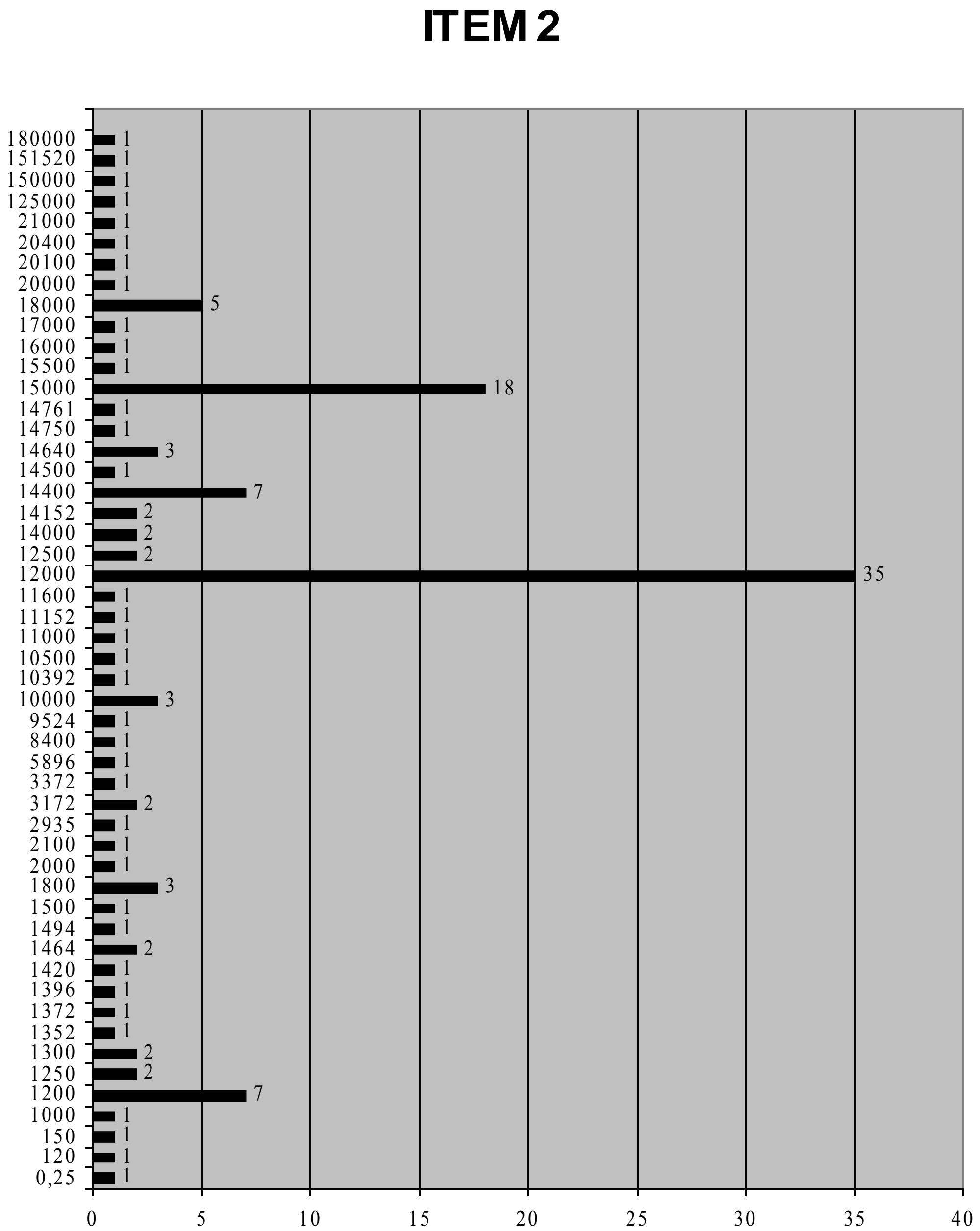


Figura E.2. Estimaciones para el ítem 2.

Ha habido un solo alumno que parece haber intentado realizar el algoritmo escrito mentalmente, dando una estimación de 40,3, en una situación en la que no tiene mucho sentido dar cifras decimales ($968 \div 24 = 40,\widehat{3}$).

Dentro de los errores, destacan aquellos en los que los participantes han dado estimaciones de 4,3 (6 alumnos), 4,32, 4,33, o 4,333. Se trata de un error 'heredado' del cálculo escrito, como puede verse a la derecha de la reproducción del algoritmo escrito.

Tabla E.3. *Análisis previo del ítem 3*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	900 ÷ 30	N. compatibles	30	1	
	960 ÷ 30	N. compatibles	32	1	
	1000 ÷ 30	Redondeo + comp.	33,3	2	
	900 ÷ 100/4	Fracciones	36	2	
(3) 968 ÷ 24	900 ÷ 25	N. compatibles	36	2	[28,2,52,4]
	1000 ÷ 100/4	Fracciones	40	3	[30,50]
	1000 ÷ 25	N. compatibles	40	3	
	900 ÷ 20	Truncamiento	45	2	
	960 ÷ 20	Truncamiento	48	2	
	1000 ÷ 20	Redondeo	50	1	

Al realizar el algoritmo, al 'bajar el 8', corresponde añadir un cero en el cociente. Hay alumnos que pueden dar ahí por concluida la operación, sin añadir el cero. Este es un error típico del cálculo escrito. En este caso, el cero añadido al 8 puede significar poner una primera cifra decimal en el cociente, como se ve a la derecha.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 9 & 6 & 8 & & 2\ 4 \\ \cline{6-6}
- & 9 & 6 & & & 4\ 0,\ 3 \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 & 8 & 0 & \\
 & & - & 7 & 2 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 8 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 9 & 6 & 8 & & 2\ 4 \\ \cline{6-6}
- & 9 & 6 & & & 4\ ,3 \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 & 8 & 0 & \quad\uparrow \\
 & & - & 7 & 2 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 8 &
\end{array}
$$

Figura E.3. Ejecuciones correcta e incorrecta del algoritmo de 968 ÷ 24

También, en algunos casos aislados, el conocimiento de los errores habituales estudiados, permite conjeturar cuál puede ser el procedimiento seguido al estimar. Por ejemplo, la estimación 968 ÷ 24 = 242 parece provenir de una sustitución del cálculo inicial por 968 ÷ 100/4. De aquí, una división de 968 ÷ 4 conduce a la 'estimación' de 242, incluyendo errores de traducción (al dividir en vez de multiplicar por 4) y de ajuste del valor posicional, al no tener en cuenta el 100.

La respuesta de 500 como estimación, puede ser un error de valor posicional provocado por la eliminación de un cero al hacer 1000/2, en lugar de 1000/20.

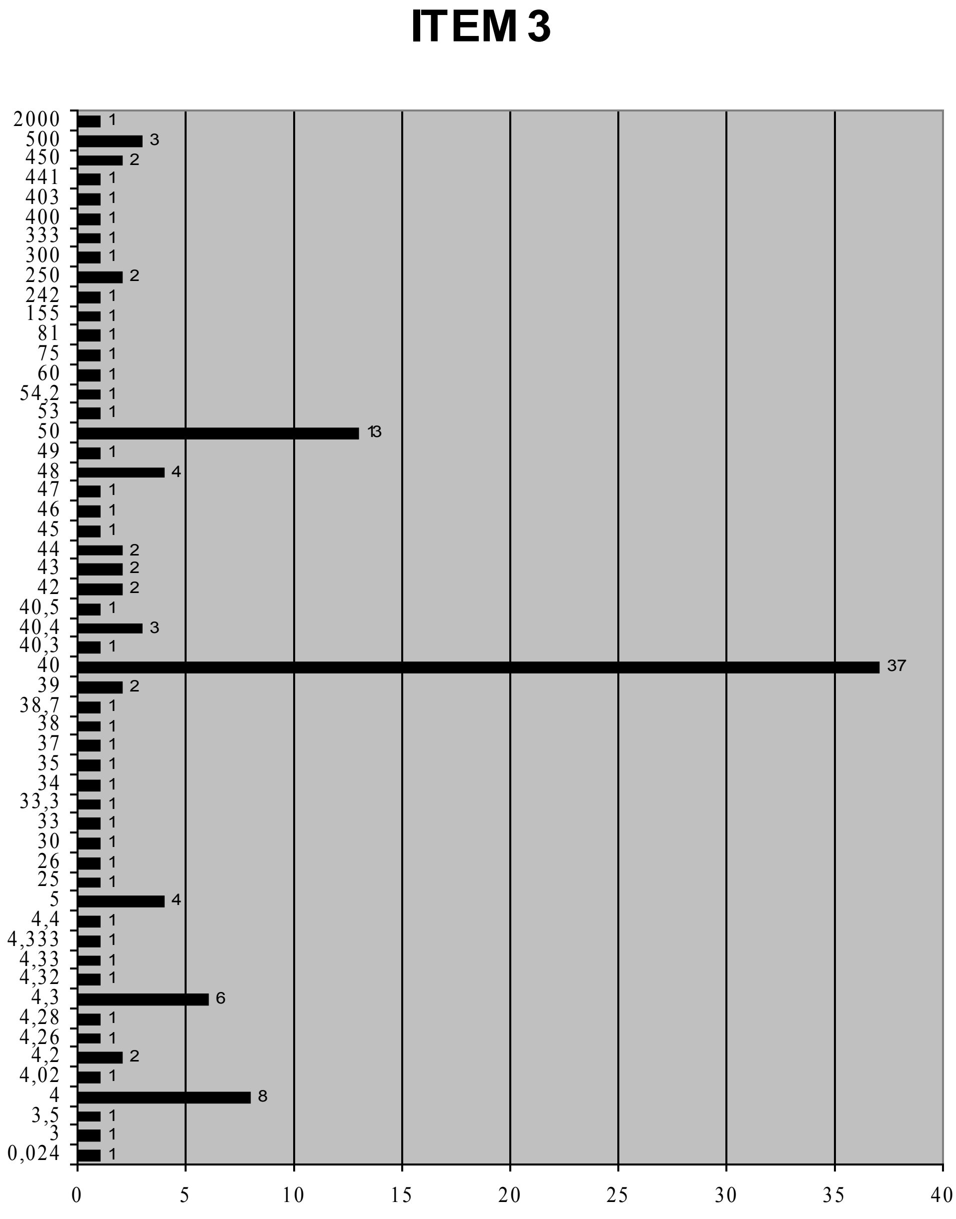


Figura E.4. Estimaciones para el ítem 3.

En la Tabla E.4, aparece el análisis previo del ítem 4. De acuerdo con las expectativas que cabe derivar de la misma, la estimación de 4 ha sido la más frecuente (se ha dado en 32 ocasiones). También se ve que ha sido muy habitual (en 20 casos) el error de recuperar el cero para dar una estimación de

40, en lugar de la correcta de 4. Las estimaciones de 41 hasta 55,5 (hasta un total de 19 que sumar a los 20 citados) parecen reflejar un mismo tipo de error. Esto da una idea de lo frecuentes que han sido los errores en el ajuste del valor posicional.

Tabla E.4. *Análisis previo del ítem 4*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	300 ÷ 100	N. compatibles	3	1	
	300 ÷ 90	Truncamiento	3,3	2	
	354 ÷ 100	Potencias de 10	3,54	2	
	360 ÷ 90	N. compatibles	4	3	
(4) 354 ÷ 88	300 ÷ 300/4	Fracciones	4	3	[2,69,5,00] [3,5]
	320 ÷ 80	N. compatibles	4	3	
	400 ÷ 100	Redondeo + comp.	4	3	
	400 ÷ 90	Redondeo	4,4	3	
	400 ÷ 80	N. compatibles	5	1	

Ha habido tres participantes que han dado una estimación de 4,02, innecesariamente próxima al resultado exacto del cálculo ($354 \div 88 = 4{,}02\overline{27}$). Como se ve en la reproducción correcta del algoritmo y en la que contiene un error, en la parte derecha, parece que un alumno ha incurrido en un error propio del cálculo escrito incluyendo un cero de más en el cociente. Este es un caso muy interesante, pues refleja un error importante en cálculo escrito que da lugar a una estimación de una precisión extraordinaria.

	3	5	4			8	8			
-	3	5	2			4,	0	2		
	0	0	2	0	0					
		-	1	7	6					
				2	4					

	3	5	4			8	8			
-	3	5	2			4,	0	0	2	
	0	0	2	0	0		↑			
		-	1	7	6					
				2	4					

Figura E.5. Algoritmos correcto e incorrecto para 354 ÷ 88

La estimación de 6 (con un error del 49,1%) ha sido la mejor entre las imprecisas (puntuadas con un 0). Aunque no puede saberse cuál es el procedimiento que ha conducido a dicha estimación, puede imaginarse a un alumno sustituyendo 354 ÷ 88 por 360 ÷ 60 para aplicar la estrategia de uso de números compatibles. En el caso hipotético de que el alumno haya hecho esto: ¿Es esta una opción descabellada? Este ejemplo, junto a muchos otros discutidos en este apéndice merecen una reflexión atenta de cara a intentar diferenciar los conceptos de precisión y razonabilidad por estrategias.

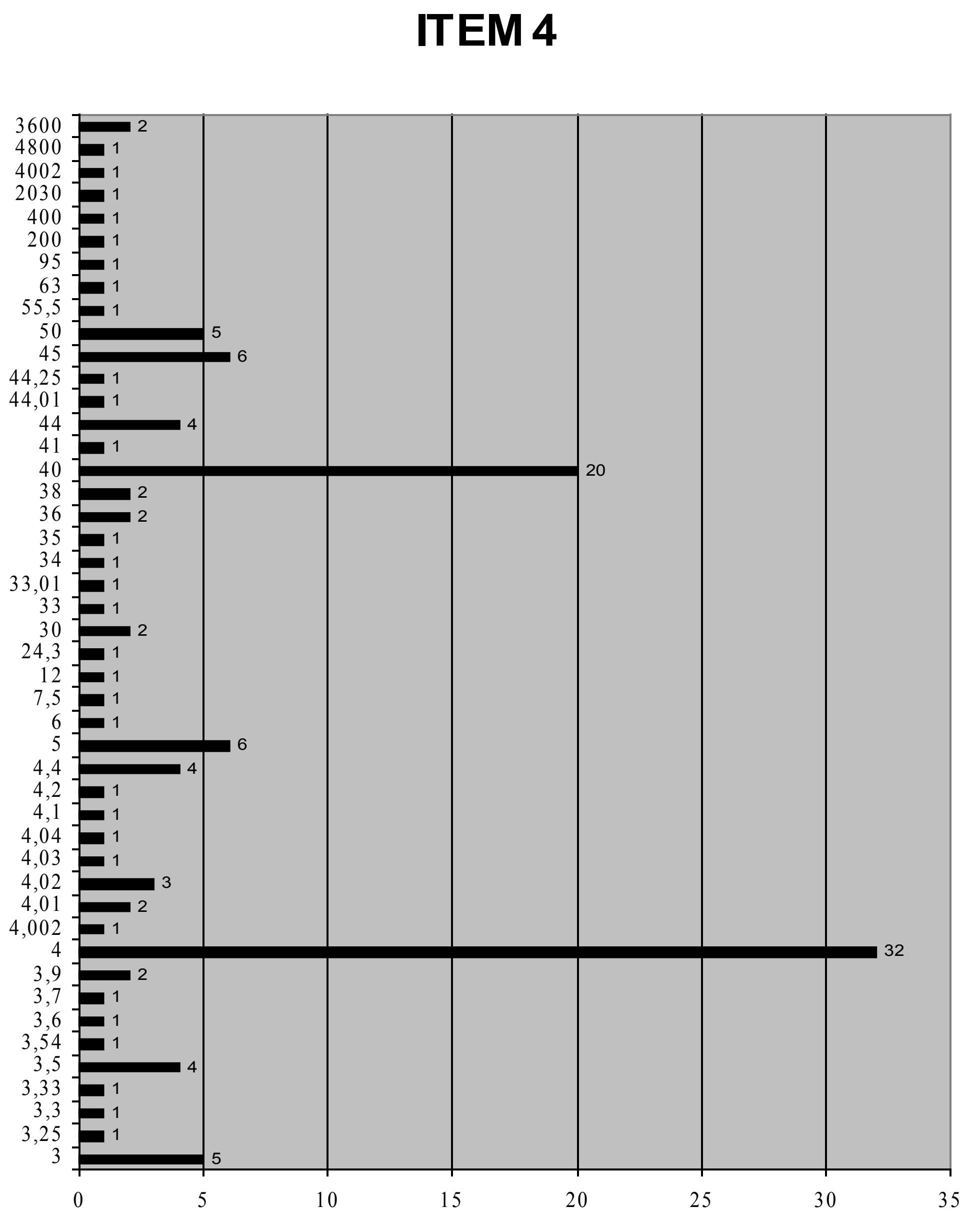


Figura E.6. Estimaciones para el ítem 4.

Tabla E.5. *Análisis previo del ítem 5*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(5) 86 ÷ 222	75 ÷ 300	N. compatibles	0,25	0	[0,271,0,503] [0,3,0,5]
	90 ÷ 300	N. compatibles	0,3	1	
	80 ÷ 1000/4	Fracciones	0,32	2	
	100 ÷ 300	N. compatibles	0,33	2	
	90 ÷ 1000/4	Fracciones	0,36	3	
	80 ÷ 200	Truncamiento	0,4	3	
	100 ÷ 250	N. compatibles	0,4	3	
	86 ÷ 200	Truncamiento o red.	0,43	2	
	90 ÷ 200	Redondeo	0,45	2	
	100 ÷ 200	N. compatibles	0,5	1	

En el ítem 5, hay 4 alumnos que han dado una estimación de 0,38, coincidente con el resultado exacto en las dos primeras cifras decimales. Parece que se ha intentado en dichos casos de imitar el algoritmo escrito que figura a continuación.

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
 & \mathbf{8} & \mathbf{6} & 0 & & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \cline{6-8}
- & 6 & 6 & 6 & & 0, & 3 & 8 \\ \cline{2-4}
 & 1 & 9 & 4 & 0 & & & \\
 & 1 & 7 & 7 & 6 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 1 & 6 & 4 & & &
\end{array}
$$

Figura E.7. Algoritmo de 86 ÷ 222.

Las estimaciones de 0,03 parecen provenir de un error típico de cálculo escrito que ya se ha comentado en otros casos. Es el del doble 0: uno por dividir un número por otro mayor y el otro para bajar una nueva cifra en el cociente. Esta duplicación del cero es un error bastante habitual, ya comentado en el capítulo dedicado al análisis de errores.

Las dos estimaciones imprecisas más cercanas al intervalo del 30% de error han sido 0,25 (la han dado 2 participantes, con un 35,4% de error) y 0,6 (54,8%). Curiosamente, la estimación de 0,25 estaba prevista en el análisis previo del ítem (Tabla E.5) como resultado de sustituir el cálculo inicial por 75 ÷ 300, aunque esta estrategia era considerada como inadecuada y merecedora de 0 puntos.

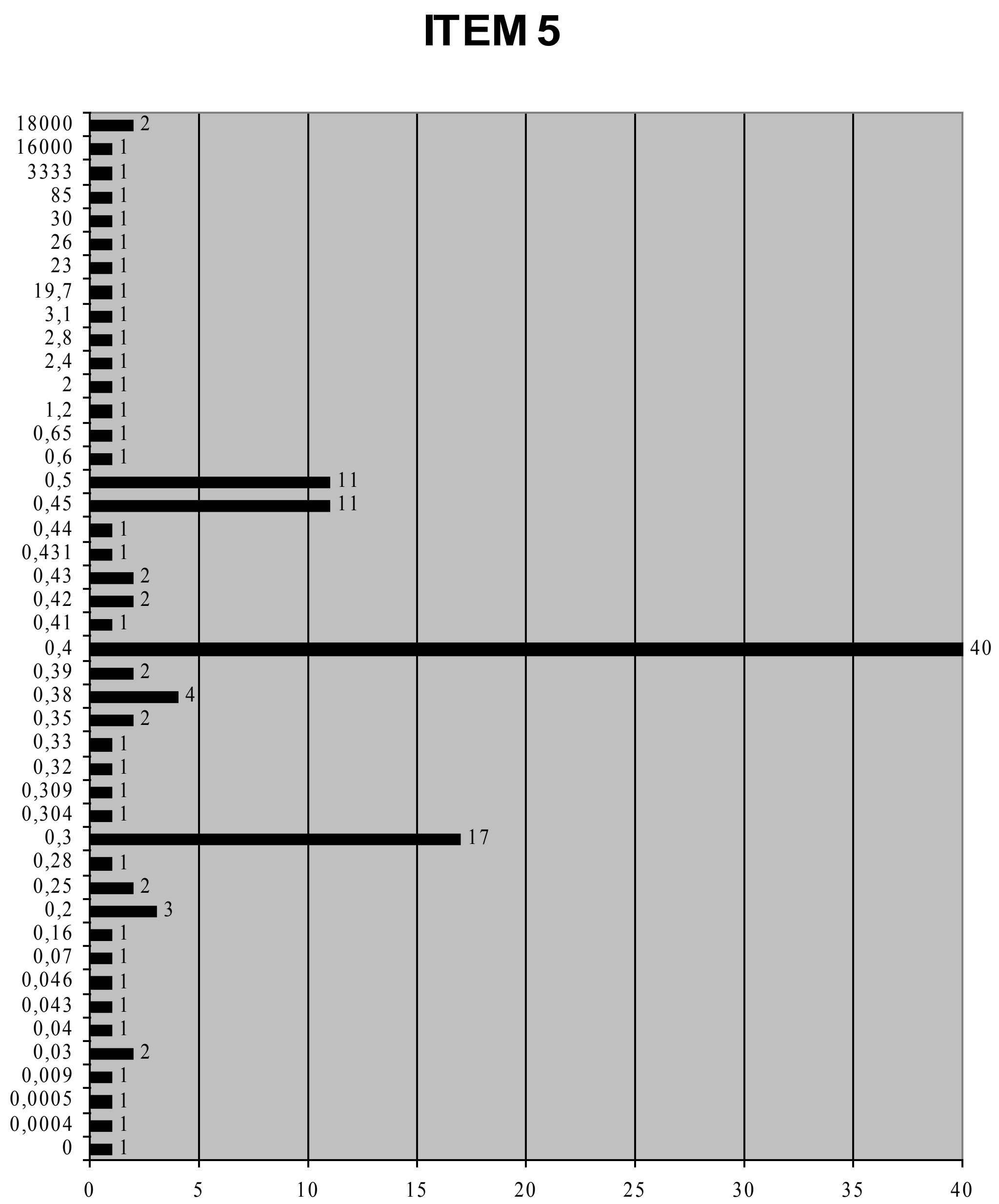


Figura E.8. Estimaciones para el ítem 5.

En el ítem 6, hay dos alumnos que han dado 0,13 (la respuesta exacta era aproximadamente 0,139) como estimación, posiblemente imitando el algoritmo escrito. Las 'mejores' estimaciones imprecisas han sido 0,03 (con un 78,5% de error) y 0,2 (43,3%). La estimación de 0,2 ha sido dada por 10 alumnos y podría provenir de aplicar la sustitución por números compatibles, cambiando

$36 \div 258$ por $40 \div 200$. En todo caso, no se trata de una gran imprecisión. Ha habido también un alumno que ha dado una estimación de 9000, que parece haber sido resultado de hacer $36 \times 258 \approx 30 \times 300 = 9000$, cambiando la división propuesta por una multiplicación.

Tabla E.6. *Análisis previo del ítem 6*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(6) $36 \div 258$	$30 \div 300$	N. compatibles	0,1	1	[0,098,0,181]
	$36 \div 300$	N. compatibles	0,12	2	[0,1,0,18]
	$40 \div 300$	Redondeo	0,13	3	
	$30 \div 1000/4$	Fracciones	0,13	3	
	$35 \div 1000/4$	Fracciones	0,14	3	
	$30 \div 200$	Truncamiento	0,15	3	
	$40 \div 1000/4$	Fracciones	0,16	2	
	$36 \div 200$	N. compatibles	0,18	1	

	3	6	0		2	5	8
-	2	5	8		0,	1	3
	1	0	2	0			
-		7	7	4			
		2	4	6			

Figura E.9. Algoritmo de $36 \div 258$.

E el apartado 5.3 del capítulo 4, titulado 'Análisis individual de los ítems de la prueba de estimación', se ve que entre el ítem 5 y el 6, diseñados para ser paralelos, ha habido una diferencia considerable. ¿A qué se debe esta diferencia? Si se observan las estimaciones dadas por los alumnos y sus correspondientes puntuaciones, se encontrará una posible explicación. En el ítem 5, a los 17 alumnos que dieron una estimación de 0,3, les correspondió 1 punto; a los 40 que estimaron el resultado como 0,4, 3 puntos; y a los 11 que dieron como estimación 0,5, 1 punto. Sin embargo, en el ítem 6, a los 42 alumnos que dieron una estimación de 0,1, les correspondió 1 punto, y para obtener una puntuación mayor, ¡había que dar una estimación con centésimas! Esto indica que hay una variable que no se ha tenido en cuenta en el diseño de la investigación (el valor posicional mínimo a determinar en la estimación para obtener puntuación máxima) y que es importante tener en cuenta para que los ítems sean verdaderamente paralelos.

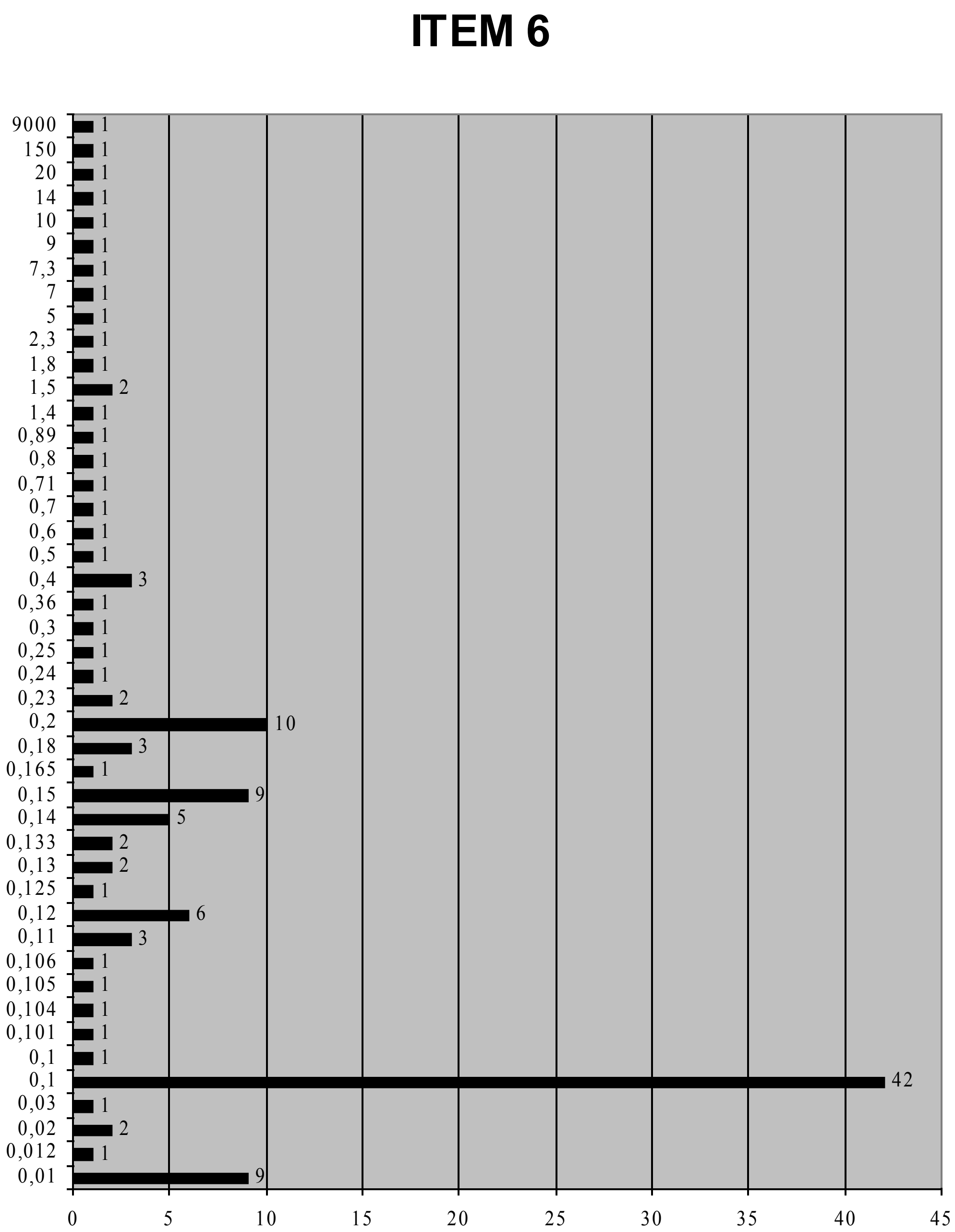


Figura E.10. Estimaciones para el ítem 6.

Tabla E.7. *Análisis previo del ítem 7*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	70 × 80	Truncamiento	5600	1	
	100 × 3/4 × 80	Fracciones	6000	2	
	70 × 90	Redondeo + comp.	6300	2	
	80 × 80	Redondeo + comp.	6400	3	[4911,9121]
(7) 78,4 × 89,5	80 × 90	Redondeo	7200	3	[5600,9000]
	78,4 × 100	Potencias de 10	7840	2	
	100 × 89,2	Potencias de 10	8920	1	
	100 × 90	Potencias de 10	9000	1	
	100 × 100	Potencias de 10	10000	0	

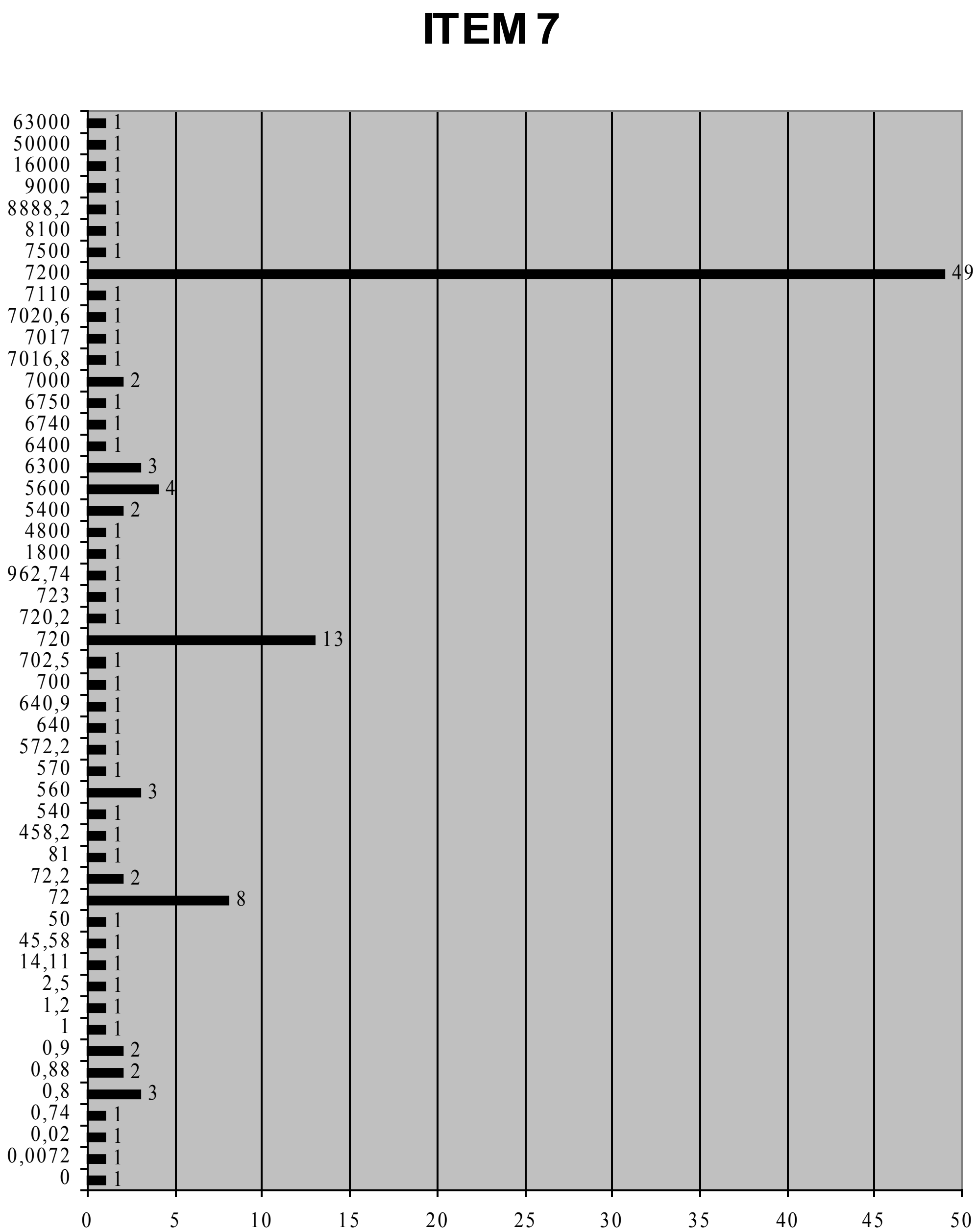


Figura E.11. Estimaciones para el ítem 7.

En el ítem 7, 49 alumnos han utilizado el redondeo: $78{,}4 \times 89{,}5 \approx 80 \times 90 = 7200$. Se han dado errores muy claros de ajuste en el valor posicional. Por ejemplo, 13 alumnos han dado una estimación de 720, y otros 8 de 72. Este tipo de errores se pone de manifiesto en muchas más estimaciones, como 560 (del truncamiento a 70×80) o 63000 (del redondeo con compensación a 70×90) o 0,0072.

Las estimaciones imprecisas más cercanas al intervalo del 30% han sido 4800 (con un 31,5% de error), que podría resultar de un error en la recuperación de un hecho numérico ($7 \times 8 = 48$, que parece tomado de $6 \times 8 = 48$), y 16000 (128% de error).

Sólo un alumno ha dado la respuesta exacta del cálculo (7016,8), lo que parece un buen indicador de que la tarea estaba bien diseñada para 'desanimar' a los que desean realizar cálculos exactos en lugar de estimar.

Tabla E.8. *Análisis previo del ítem 8*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(8) $34{,}1 \times 47{,}2$	30×40	Truncamiento	1200	1	[1126,2092] [1200,2000]
	35×40	N. compatibles	1400	2	
	30×50	Redondeo	1500	3	
	40×40	Redondeo + comp.	1600	3	
	$34 \times 100/2$	Fracciones	1700	3	
	40×45	N. compatibles	1800	2	
	40×50	Redondeo h. arriba	2000	1	

En el ítem 8, 47 alumnos han utilizado el redondeo a las decenas $34{,}1 \times 47{,}2 \approx 30 \times 50 = 1500$. Como se vio en el análisis de la forma de operar la coma decimal, algunos de estos participantes han preferido la alternativa de eliminar primero la coma decimal, haciendo: $34{,}1 \times 47{,}2 = (341 \times 472) \div 100 \approx (300 \times 500) \div 100 = 150000 \div 100 = 1500$. Al igual que en el ítem anterior, se adivinan muchos indicios de errores en el ajuste del valor posicional en estimaciones como 150 (dada por 8 alumnos), 150,2 (por 3), o 15 (2 alumnos).

Hay 3 alumnos que han dado una estimación de 0,7 que parece provenir de haber intentado dividir en lugar de multiplicar, pues 34,7 ÷ 47,2 ≈ 0,7. Sólo un alumno ha dado la estimación de 1609, coincidente salvo en las cifras decimales con el resultado exacto del cálculo. Las 'mejores' estimaciones, entre las imprecisas han sido 800 (con un error del 50,2%) y 2400 (49,1% de error).

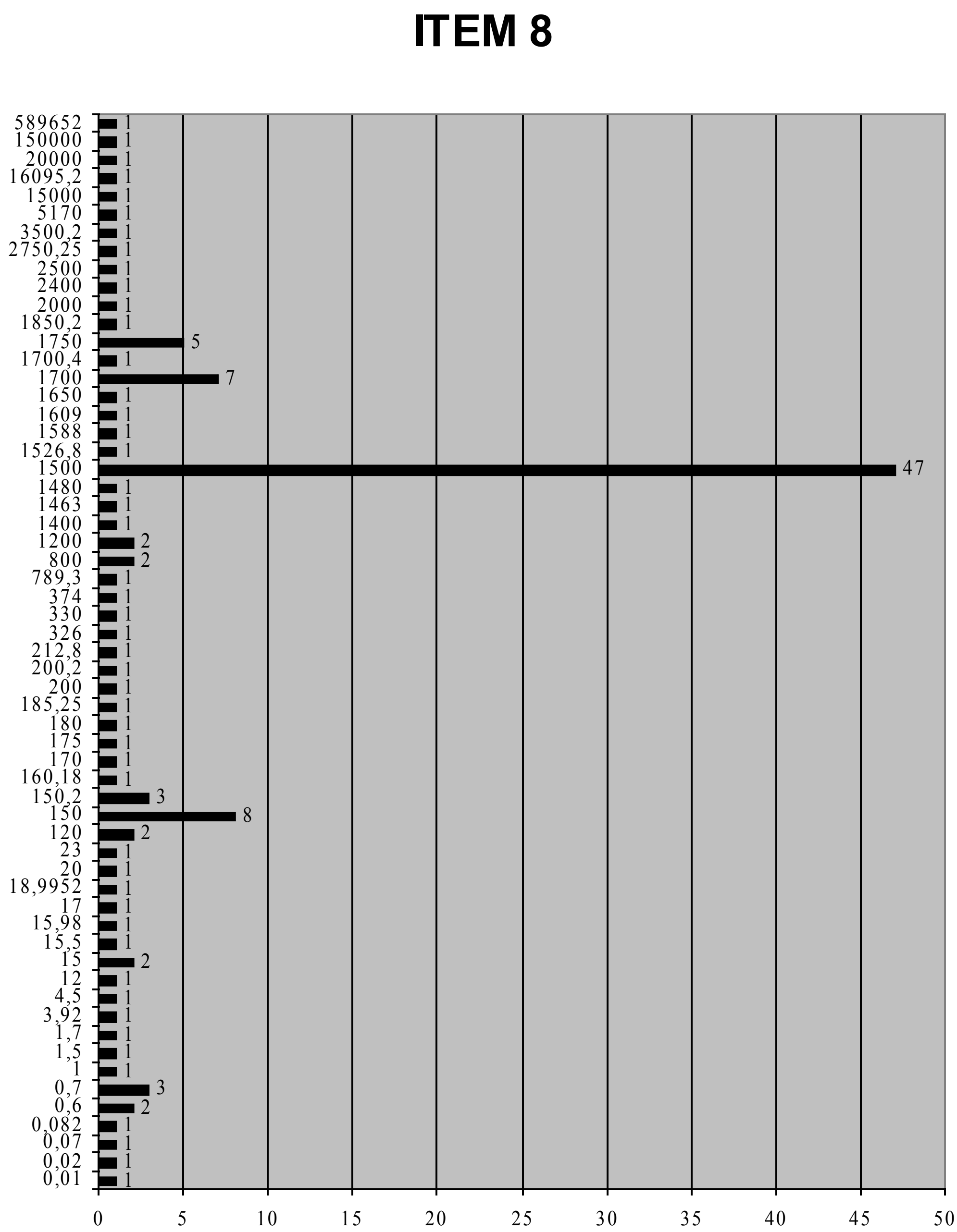


Figura E.12. Estimaciones para el ítem 8.

Tabla E.9. *Análisis previo del ítem 9*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(9) 85,9 ÷ 3,32	80 ÷ 4	N. compatibles	20	1	[18,1,33,6] [20,33,3]
	84 ÷ 4	N. compatibles	21	2	
	88 ÷ 4	N. compatibles	22	2	
	90 ÷ 4	Redondeo + comp.	22,5	2	
	80 ÷ 10/3	Fracciones	24	3	
	100 ÷ 4	Potencias de 10	25	3	
	75 ÷ 3	N. compatibles	25	3	
	80 ÷ 3	Truncamiento	26	3	
	90 ÷ 10/3	Fracciones	27	3	
	84 ÷ 3	N. compatibles	28	3	
	90 ÷ 3	Redondeo	30	2	
	100 ÷ 3	N. compatibles	33,3	1	

En el ítem 9, 41 alumnos han dado una estimación de 30 que parece resultado de hacer 85,9 ÷ 3,32 ≈ 90 ÷ 3 = 30. Once alumnos (11) han dado una estimación de 28, que puede resultar de imitar el algoritmo escrito con los datos truncados a las unidades (85 ÷ 3)[385]. Las estimaciones mejores, entre las imprecisas, han sido 9,05 (con un 63,9% de error) y 35 (39,3%). La imitación del algoritmo escrito (Figura E.13) lleva a un resultado de 25 (6 alumnos).

	8	5,	9	0	3,	3	2
-	6	6	4		2	5	
	1	9	5	0			
-	1	6	6	0			
		2	9	0			

Figura E.13. Algoritmo de 85,9 ÷ 3,32.

Como en casos anteriores, hay bastantes ejemplos que sugieren errores en el ajuste del valor posicional: estimaciones de 250 (2 alumnos), 2,5 (2 alumnos), o 3 (3 alumnos).

[385] En la visión retrospectiva de este trabajo de investigación, puede considerarse una pequeña deficiencia, que afecta al análisis previo de los ítems, no haber considerado la aplicación del algoritmo simplificado a los datos de partida y a los datos redondeados. Como se ve en el ítem 9, en estos 11 alumnos que han dado una estimación de 28, parece más plausible como estrategia la imitación del algoritmo que la sustitución por 84 ÷ 3, sugerida en el análisis previo.

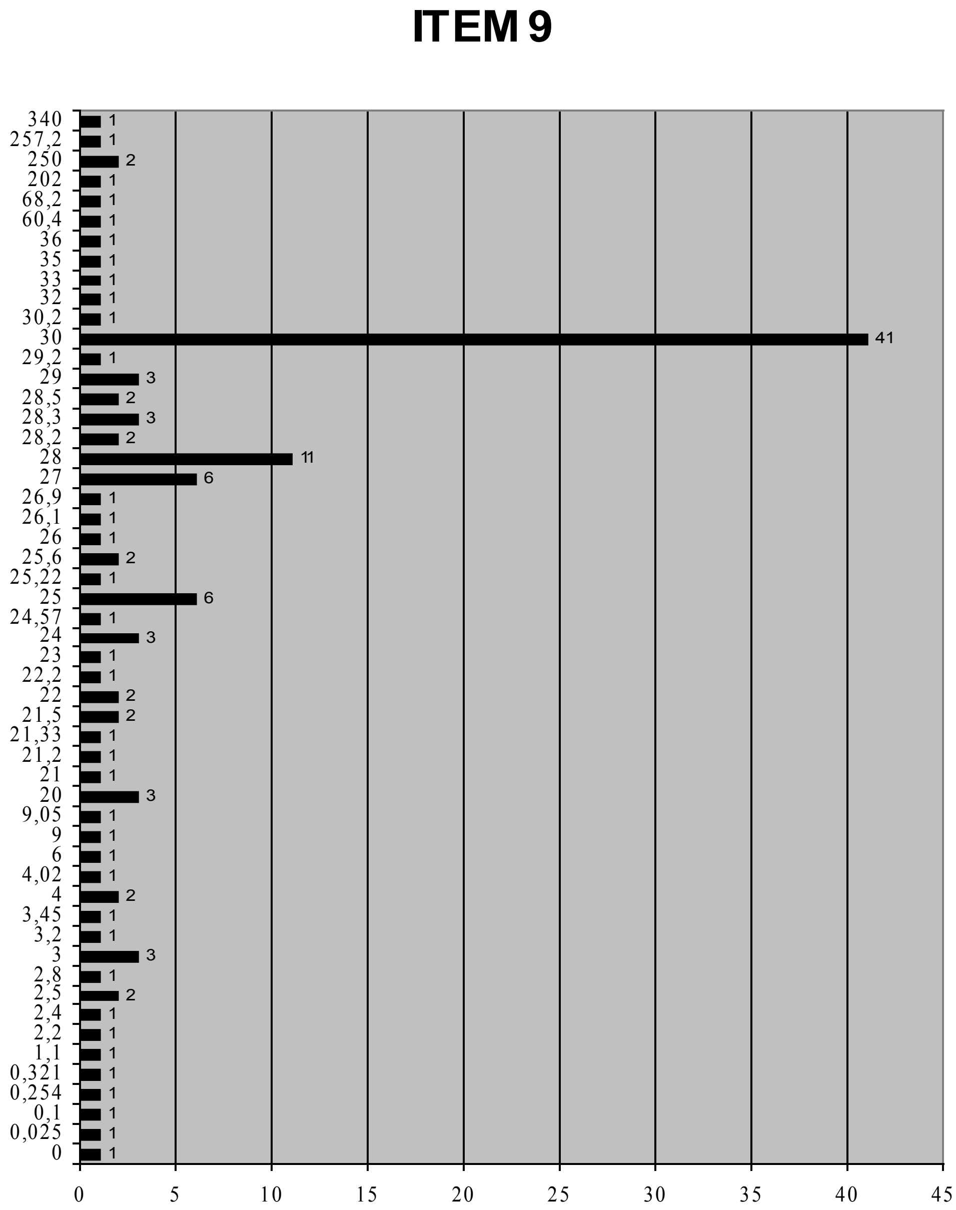


Figura E.14. Estimaciones para el ítem 9.

Tabla E.10. *Análisis previo del ítem 10*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	90 ÷ 7	Redondeo	12	1	
	100 ÷ 8	N. compatibles	12,5	2	
	91 ÷ 7	N. compatibles	13	2	
	90 ÷ 20/3	Fracciones	13,5	2	
(10) 96,2 ÷ 6,25	90 ÷ 6	Truncamiento	15	3	[10,77,20,01] [12,20]
	96 ÷ 6	N. compatibles	16	3	
	100 ÷ 6	Redondeo	16,5	3	
	90 ÷ 5	N. compatibles	18	2	
	100 ÷ 5	N. compatibles	20	1	

	9	**6,**	**2**	0		**6,**	**2**	**5**
-	6	2	5			1	5,	3
	3	3	7	0				
-	3	1	2	5				
		2	4	5	0			
	-	1	8	7	5			
			5	7	5			

Figura E.15. Algoritmo de 96,2 ÷ 6,25.

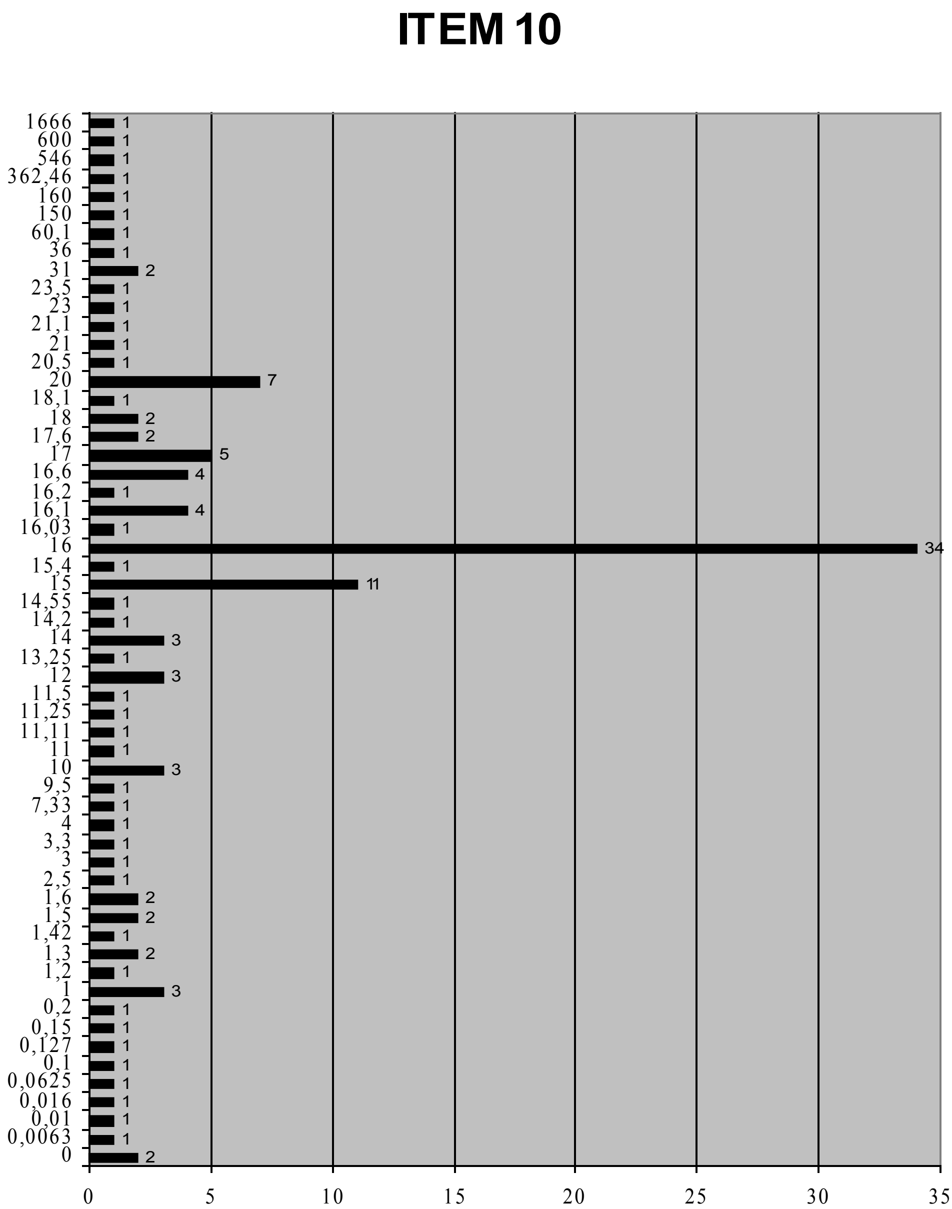


Figura E.16. Estimaciones para el ítem 10.

En el ítem 10, 34 alumnos han dado una estimación de 16, que parece resultado de aplicar el algoritmo simplificado a 96 ÷ 6, mientras que otros 11 alumnos han dado el resultado de 15 (90 ÷ 6 o imitando el algoritmo -Figura E.15- con los datos iniciales).

Hay 3 alumnos que han dado una estimación de 10, que puede ser resultado de sustituir el cálculo inicial de 96,2 ÷ 6,25, por 90 ÷ 9, aplicando la sustitución por números compatibles, o por 100 ÷ 10, utilizando la sustitución por potencias de 10. En todo caso, esta estimación es imprecisa (con un 35% de error). También ha habido estimaciones como 20,5 (33,1% de error) consideradas como imprecisas por un pequeño margen.

Como en ítems anteriores, de nuevo hay casos claros de errores en el ajuste del valor posicional. Estimaciones como 1,6 (2 alumnos), 1,5 (2 alumnos), 1 (3 alumnos) o 150 y 160 (un alumno cada una) son indicadoras de este error.

Tabla E.11. *Análisis previo del ítem 11*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	9 ÷ 30	N. compatibles	0,3	1	
	10 ÷ 30	Redondeo	0,33	2	
	9 ÷ 100/4	Fracciones	0,36	3	
(11) 9,88 ÷ 25,6	100 ÷ 250	N. compatibles	0,4	3	[0,27,0,50] [0,3,0,5]
	10 ÷ 100/4	Fracciones	0,4	3	
	9 ÷ 20	Truncamiento	0,45	2	
	10 ÷ 20	N. compatibles	0,5	1	

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 9, & 8 & 8 & 0 & & 2\ 5,\ 6\ 0 \\ \cline{7-7}
- & 7 & 6 & 8 & 0 & & 0,\ 3\ 8 \\ \cline{2-5}
 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
- & 2 & 0 & 4 & 8 & 0 & \\ \cline{2-6}
 & & 1 & 5 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

Figura E.17. Algoritmo de 9,88 ÷ 25,6.

En el ítem 11, la estimación más frecuente ha sido 0,4 (33 alumnos). Siete alumnos han dado la estimación de 0,5 (quizá por la sustitución por 10 ÷ 20) y otros 13 han dado el resultado de 0,3. El redondeo de ambos datos conduce a 10 ÷ 30 = 0,33 (un alumno). Ocho alumnos han dado 0,25 como estimación. Por un lado, el porcentaje de error es pequeño (35,2%), pero dicha estimación parece el resultado de un error importante (de tipo TD, traducción por cambio en el orden de los datos), al sustituir 10 ÷ 25 por 25 ÷ 10.

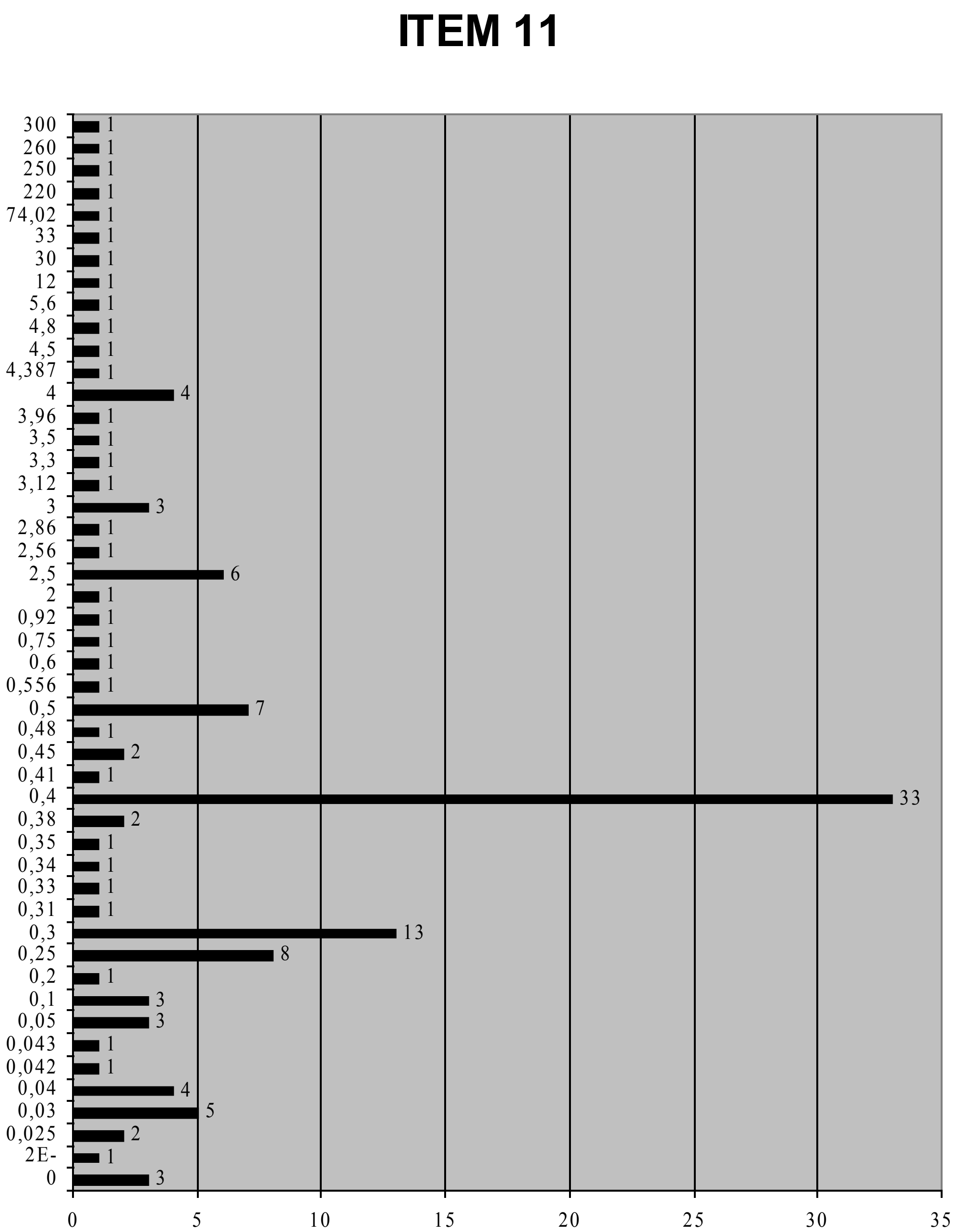


Figura E.18. Estimaciones para el ítem 11.

De nuevo hay estimaciones que indican que los alumnos han abordado una operación diferente a la propuesta. Por ejemplo, la estimación de 300, parece claramente un redondeo de 9,88 ÷ 25,6 a 10 × 30, cambiando división por multiplicación.

Tabla E.12. *Análisis previo del ítem 12*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(12) 8,85 ÷ 42,6	8 ÷ 100/2	Fracciones	0,16	1	[0,14,0,27] [0,16,0,25]
	9 ÷ 50	Redondeo	0,18	2	
	9 ÷ 100/2	Fracciones	0,18	2	
	8 ÷ 40	Truncamiento	0,2	3	
	9 ÷ 45	N. compatibles	0,2	3	
	10 ÷ 50	N. compatibles	0,2	3	
	8,8 ÷ 40	N. compatibles	0,22	3	
	10 ÷ 40	N. compatibles	0,25	1	

	8,	8	5	0			4	2,	6	0
-	8	5	2	0			0,	2	0	7
		3	3	0	0	0				
	-	2	9	8	2	0				
			3	1	8	0				

Figura E.19. Algoritmo de 8,85 ÷ 42,6.

Para el ítem 12, el intervalo de respuesta aceptable es el [0.14, 0.27]. Como se aprecia en la Figura E.20, hay un alumno que ha dado la estimación 0,3 (44,4% de error), y 8 que han dado 0,4 como estimación, con un error todavía mayor. Los dos alumnos que han dado estimaciones de 0,1 han tenido un error en la misma del 51,8%.

Cuarenta alumnos han dado una estimación de 0,2, que puede provenir de la sustitución por 8 ÷ 40 o por 10 ÷ 50, o de la imitación del algoritmo escrito. Ha habido 13 alumnos que han dado una estimación de 0,02, que parece un error de tipo '0,0'. Llama la atención esto, pues supone que uno de cada cinco alumnos que ha determinado el 2 como primera cifra significativa del resultado no ha sido capaz después de ajustar adecuadamente el valor posicional.

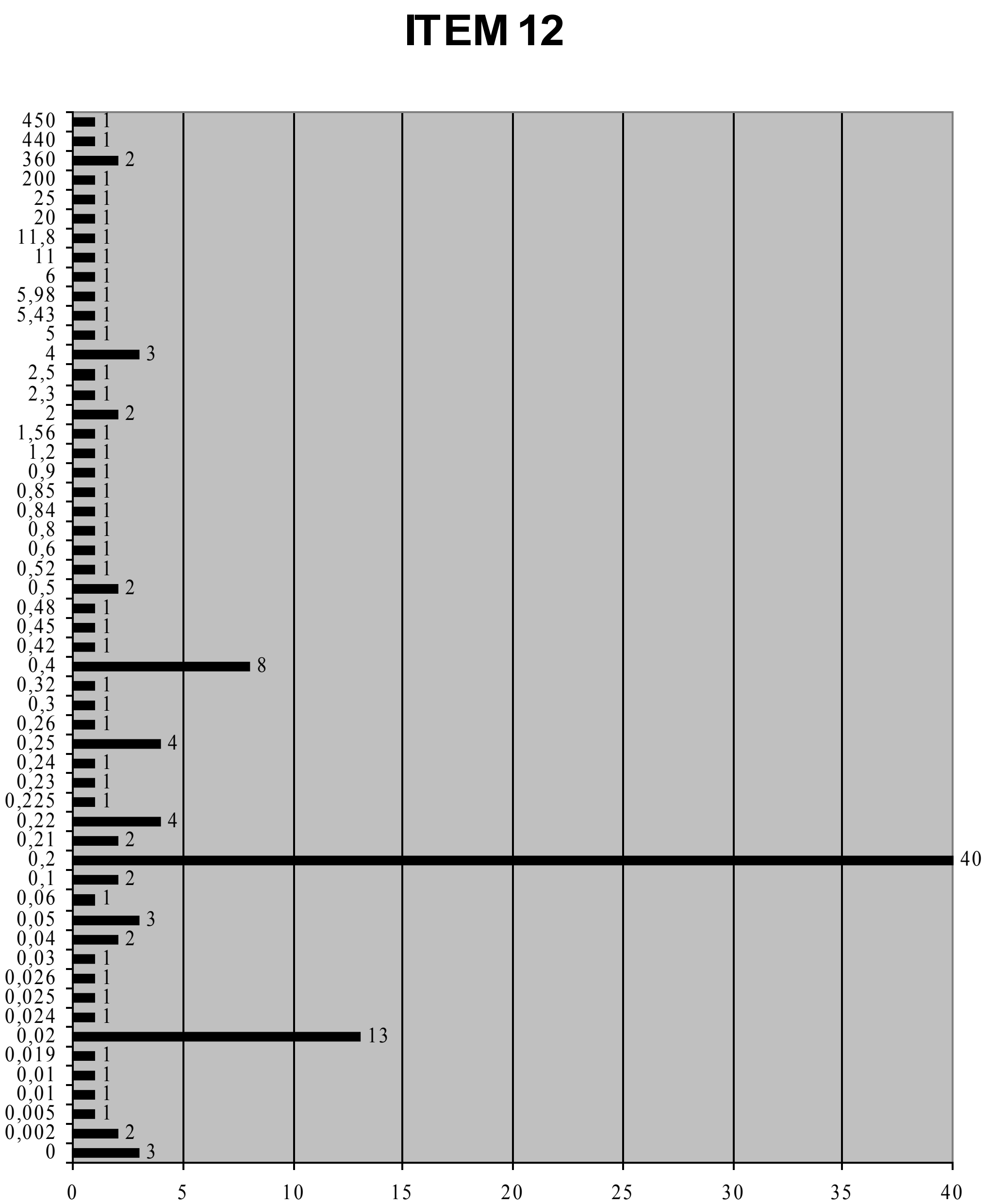


Figura E.20. Estimaciones para el ítem 12.

El ítem 13 ha resultado verdaderamente singular, dentro del conjunto de los ítems de la prueba. Es el único caso en que la respuesta más frecuente dada por los participantes es una estimación imprecisa. La sustitución de 0,72 × 2,57 por 1 × 3, para dar una estimación de 3, ha sido empleada por ¡37 alumnos! Esta estimación cae fuera del intervalo de respuesta razonable y fuera también del intervalo del 30% de error (ver Tabla E.13).

Tabla E.13. *Análisis previo del ítem 13*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(13) $0,72 \times 2,57$	$0,7 \times 2$	Truncamiento	1,4	1	[1,30,2,41] [1,4,2,4]
	$3/4 \times 2$	Fracciones	1,5	2	
	$0,8 \times 2$	Redondeo + comp.	1,6	2	
	$0,7 \times 2,5$	N. compatibles	1,75	3	
	1×2	N. compatibles + comp.	2	3	
	$0,8 \times 2,5$	N. compatibles	2	3	
	$0,8 \times 10/4$	Fracciones	2	3	
	$0,7 \times 3$	Redondeo	2,1	2	
	$3/4 \times 3$	Fracciones	2,25	1	
	$0,8 \times 3$	Redondeo h. arriba	2,4	1	
	$1 \times 2,57$	Potencias de 10	2,57	0	

En el análisis previo del ítem (Tabla E.13), incluso la estimación de 2,57, proveniente de la sustitución de 0,72 por potencias de 10, estaba considerada como merecedora de una puntuación de 0 por imprecisa.

Las sustituciones de $0,72 \times 2,57$ por 1×2 (7 alumnos han dado la estimación de 2) que parece incluir una compensación previa, y 2,1, que debe provenir de sustituir por $0,7 \times 3$ (estimación dada por 6 alumnos), han sido procedimientos mucho menos utilizados que el comentado antes.

Las dos estimaciones imprecisas más cercanas al intervalo del 30% de error han sido 1,23 (con un 33,5% de error) y 2,42 (30,7% de error). En este último caso, el margen por el que se considera la estimación imprecisa es mínimo. El redondeo hacia arriba de los dos factores conduce a $0,8 \times 3 = 2,4$, y el extremo superior del intervalo del 30% de error ha sido 2,41. Se trata sin duda de un caso extremo en el que no es fácil justificar que la estimación merezca 0 en el sistema de puntuación.

Hay dos alumnos que han dado una estimación de 21000. El análisis de errores hace pensar que estos alumnos han cometido el error de no recuperar la coma decimal (habitual en la multiplicación), al sustituir $0,72 \times 2,57$ por $70/100 \times 200/100 = 70 \times 200 \div 10000$. Al no hacer la última división, que recupera la coma decimal, el resultado queda en 21000. El análisis individual de los ítems no permite determinar cuál es el proceso que ha llevado a la estimación, pero permite hacer conjeturas basadas en los análisis previos de estrategias y errores.

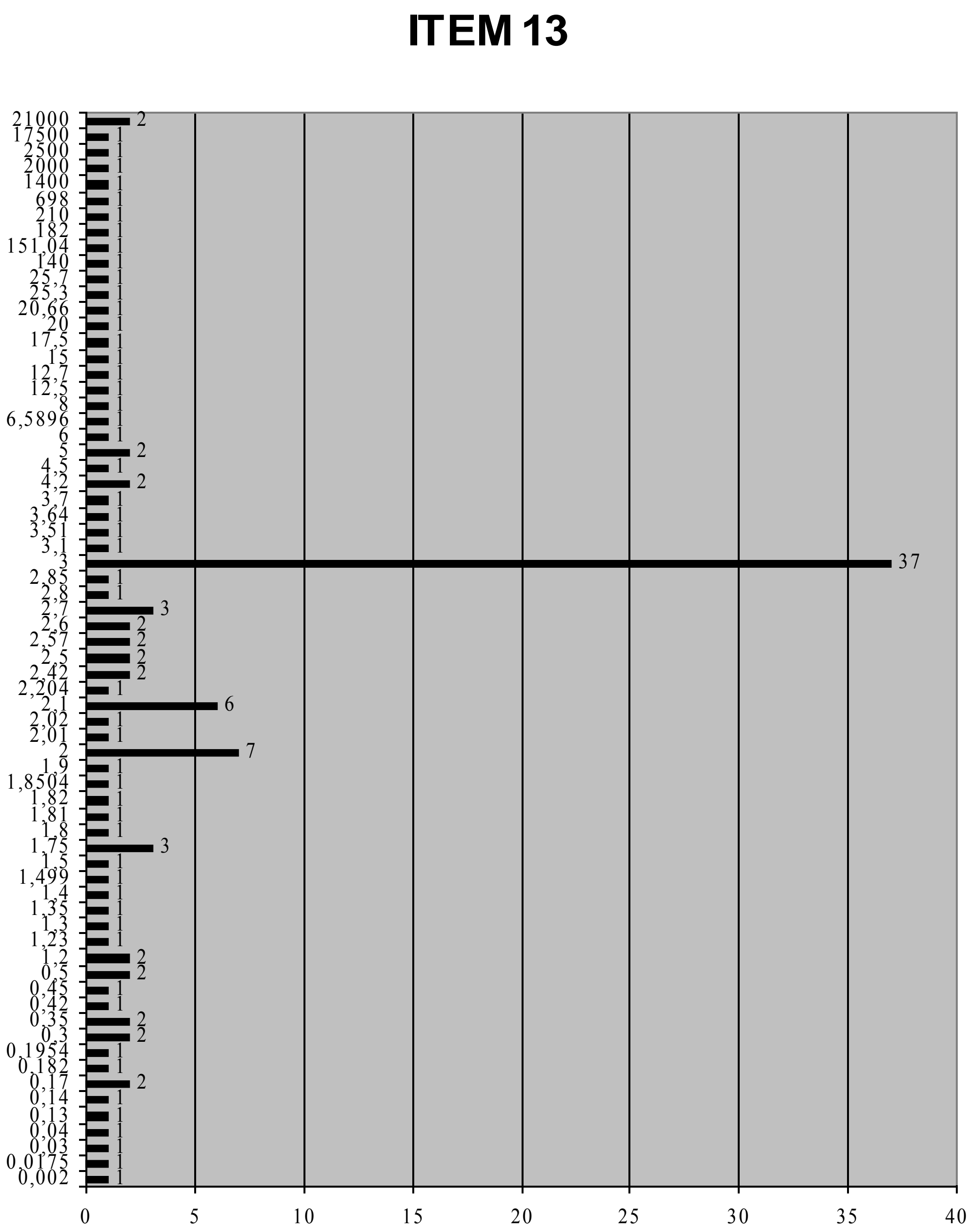


Figura E.21. Estimaciones para el ítem 13.

Tabla E.14. *Análisis previo del ítem 14*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(14) 0,45 × 7,85	0,4 × 7	Truncamiento	2,8	1	[2,47,4,59] [2,8,4,5]
	0,4 × 7,5	N. compatibles	3	2	
	0,4 × 8	Redondeo + comp.	3,2	3	
	0,5 × 7	Redondeo + comp.	3,5	3	
	0,45 × 8	N. compatibles	3,6	3	
	0,5 × 8	Redondeo	4	2	
	0,45 × 10	Potencias de 10	4,5	1	
	0,5 × 10	P. de 10 y redondeo	5	0	

En el ítem 14, la estimación más frecuente ha sido 4 (23 alumnos). Seguramente sale del redondeo estándar de 0,45 × 7,85 a 0,5 × 8. Hay bastantes estimaciones indicadoras de errores en el ajuste del valor posicional como los 6 alumnos que han dado la estimación de 40 o los 3 que han dado 0,4.

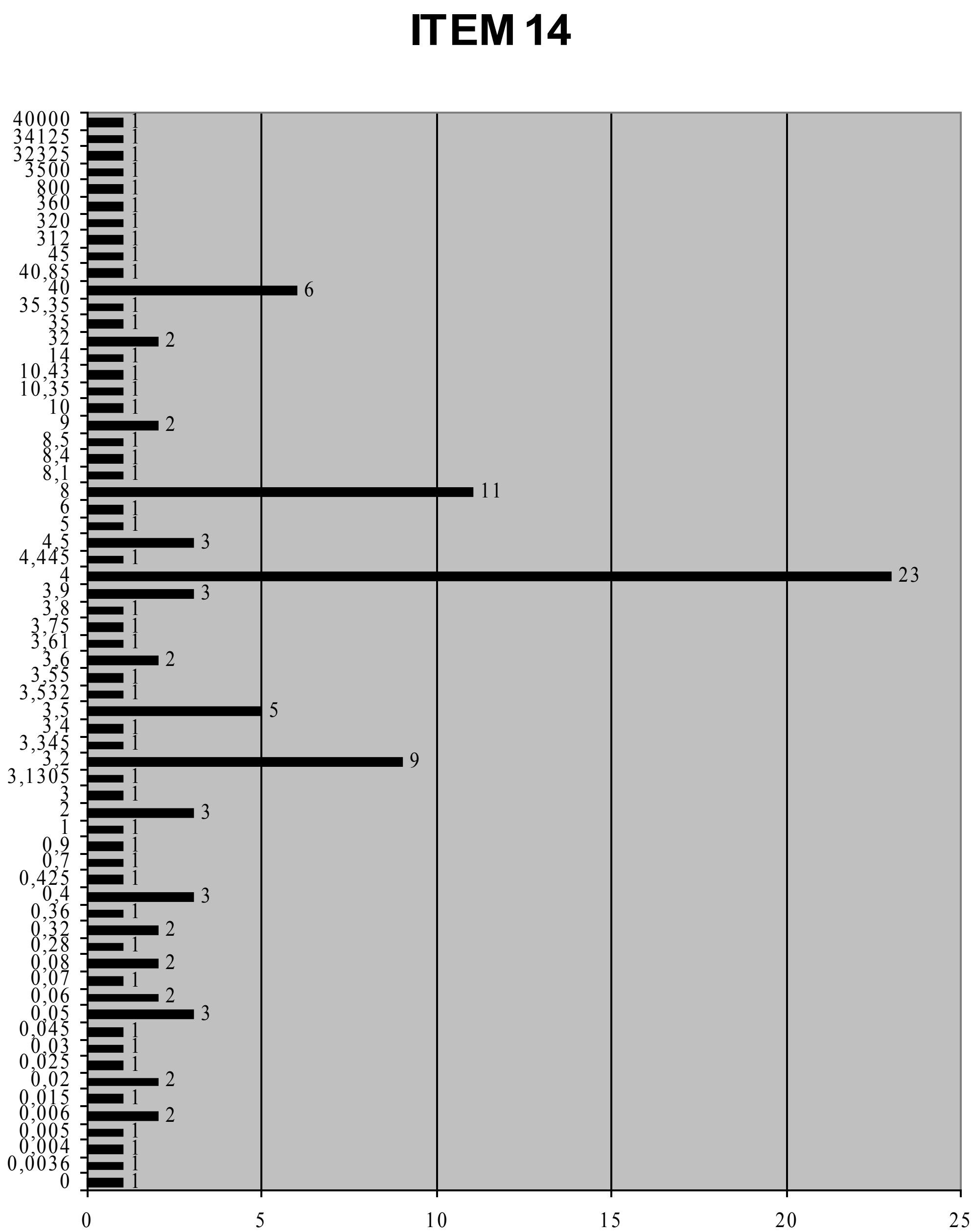


Figura E.22. Estimaciones para el ítem 14.

En el ítem 14, la estimación más frecuente ha sido 4 (23 alumnos). Seguramente sale del redondeo estándar de 0,45 × 7,85 a 0,5 × 8. Hay bastantes

estimaciones indicadoras de errores en el ajuste del valor posicional como los 6 alumnos que han dado la estimación de 40 o los 3 que han dado 0,4.

Las 'mejores' estimaciones, entre las imprecisas, han sido 2 (con un 43,3% de error) y 5 (41,5%). Esta última estimación estaba prevista en el análisis previo del ítem como resultado de sustituir 0,45 × 7,85 por 0,5 × 10. En este caso, la sustitución por 0,45 × 10 = 4,5 estaba considerada como una estrategia válida que marcaba el límite del intervalo de respuesta aceptable (ver Tabla E.14).

Tabla E.15. *Análisis previo del ítem 15*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	0,9 ÷ 0,3	N. compatibles	3	1	
	1 ÷ 0,3	Redondeo	3,3	2	
	0,9 ÷ 1/4	Fracciones	3,6	3	
(15) 0,962 ÷ 0,25	1 ÷ 0,25	N. compatibles	4	3	[2,694,5,002] [3,5]
	1 ÷ 1/4	Fracciones	4	3	
	0,9 ÷ 0,2	Truncamiento	4,5	2	
	1 ÷ 0,2	N. compatibles	5	1	

En el ítem 15, la estimación más frecuente ha sido 4 (22 alumnos), aunque justo la mitad (11 alumnos) han dado una estimación de 0,4, incluyendo un error en el ajuste del valor posicional. En esta línea, también ha habido estimaciones de 40 (2 alumnos), 0,04 (5 alumnos) o 0,0004 (1 alumno).

Ha habido un alumno que ha dado como estimación 3,84, indicador de imitación del algoritmo escrito (ver Figura E.23). En este ítem, no hay ejemplos de estimaciones imprecisas muy próximas al intervalo del 30% de error. La estimación de 1,5 tiene un 61% de error y la de 31,2, un 710,8%.

```
  0, 9 6 2      | 0, 2 5 0
   - 7 5 0        3, 8 4
     2 1 2 0
   - 2 0 0 0
       1 2 0 0
     - 1 0 0 0
         2 0 0
```

Figura E.23. Algoritmo de 0,962 ÷ 0,25.

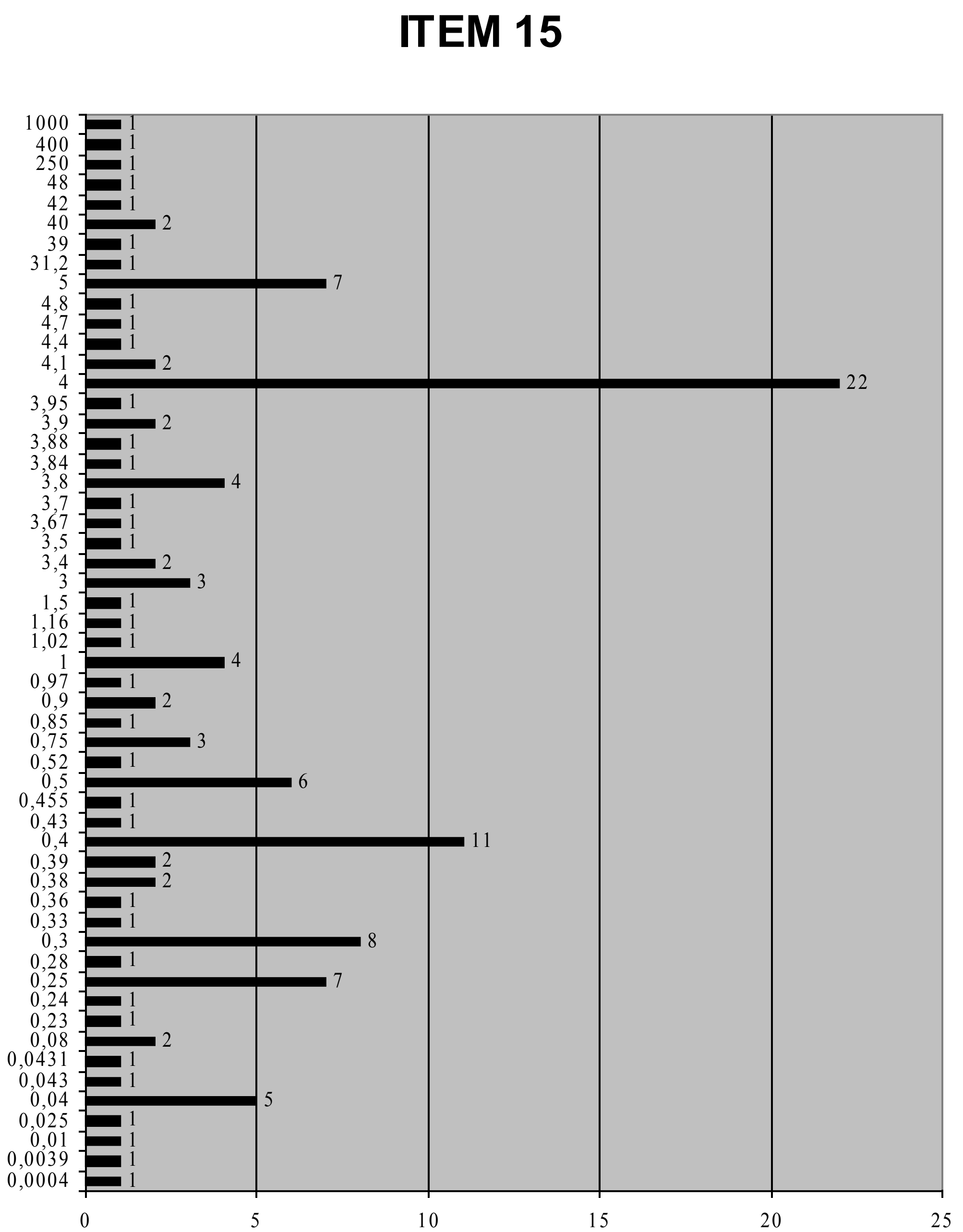


Figura E.24. Estimaciones para el ítem 15.

En el ítem 16, se ha producido también una situación sorprendente. Quince alumnos han dado una estimación de 2. Esta estimación estaba prevista como resultado de una sustitución por 0,7 ÷ 0,35 o por 0,8 ÷ 0,4. En este contexto, ha habido 27 alumnos que han dado una estimación de 0,2. Se trata de un error típico de recuperación impropia de la coma decimal. Parece como si el resultado tuviera que ser del mismo tipo que los datos. Este tipo de error se ha comentado en el capítulo 6. Lo que resulta verdaderamente infrecuente es que el error se produzca con mucha mayor frecuencia que la estrategia correcta (27 casos de error por 15 correctos). Parece como si la norma fuese el error y la excepción la aplicación correcta del ajuste del valor posicional. Otros claros errores de ajuste del valor posicional han sido las estimaciones de 200 (1 alumno), 0,02 (3 alumnos) y 0,002 (1 alumno).

Tabla E.16. *Análisis previo del ítem 16*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(16) 0,747 ÷ 0,35	0,7 ÷ 1/2	N. compatibles	1,4	0	[1,49,2,77] [1,5,2,5]
	0,6 ÷ 0,4	N. compatibles	1,5	1	
	0,7 ÷ 0,4	Redondeo	1,75	2	
	0,7 ÷ 0,35	N. compatibles	2	3	
	0,8 ÷ 0,4	N. compatibles	2	3	
	0,7 ÷ 1/3	Fracciones	2,1	3	
	0,7 ÷ 0,3	Truncamiento	2,3	3	
	0,8 ÷ 1/3	Fracciones	2,4	2	
	0,75 ÷ 0,3	N. compatibles	2,5	2	
	1 ÷ 0,4	N. compatibles	2,5	2	
	1 ÷ 1/3	Fracciones	3	0	
	0,9 ÷ 0,3	N. compatibles	3	0	

0,	7	4	7			0,	3	5	0
-	7	0	0			2,	1	3	
		4	7	0					
	-	3	5	0					
		1	2	0	0				
	-	1	0	5	0				
			1	5	0				

Figura E.25. Algoritmo de 0,747 ÷ 0,35.

Las estimaciones mejores entre las imprecisas han sido 1,2 (con un 43,7% de error) y 2,8 (31,1% de error). En la Tabla E.16, se aprecia que el límite del intervalo del 30% lo marca el 2,77, y que estaban previstas, aunque valoradas con 0 puntos, estimaciones hasta 3. De nuevo, hay una estimación que pone a prueba, y ayuda a reflexionar sobre, los criterios adoptados para decidir cuándo una estimación es imprecisa.

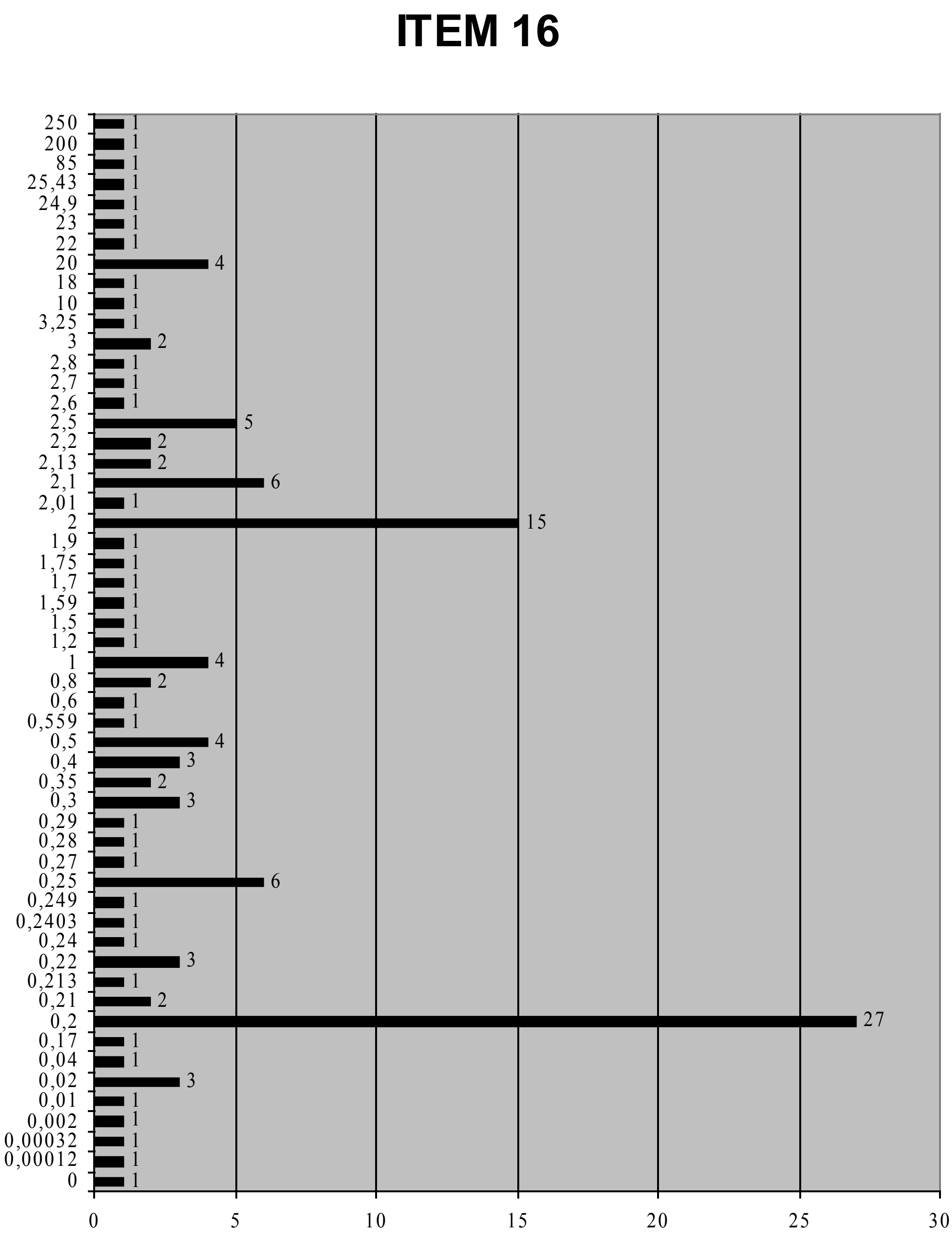


Figura E.26. Estimaciones para el ítem 16.

Tabla E.17. Análisis previo del ítem 17

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	0,3 ÷ 0,6	N. compatibles	0,5	1	
	0,3 ÷ 10/2	Fracciones	0,6	2	
	0,3 ÷ 0,5	Truncamiento	0,6	2	
	0,36 ÷ 0,6	N. compatibles	0,6	2	[0,477,0,886]
(17) 0,37 ÷ 0,543	1/3 ÷ 1/2	Fracciones	0,66	3	[0,5,0,8]
	0,4 ÷ 0,6	Redondeo + comp.	0,66	3	
	0,35 ÷ 0,5	N. compatibles	0,7	3	
	0,4 ÷ 10/2	Fracciones	0,8	2	
	0,4 ÷ 0,5	Redondeo	0,8	2	

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
0, & 3 & 7 & 0 & 0 & & 0, & 5 & 4 & 3 \\ \cline{7-10}
- & 3 & 2 & 5 & 8 & & 0, & 6 & 8 & \\ \cline{2-5}
 & & 4 & 4 & 2 & 0 & & & & \\
 & - & 4 & 3 & 4 & 4 & & & & \\ \cline{3-6}
 & & 0 & 0 & 7 & 6 & & & &
\end{array}
$$

Figura E.27. Algoritmo de 0,37 ÷ 0,543.

En el ítem 17, se han dado gran cantidad de errores en el ajuste del valor posicional. Hay 38 estimaciones en el intervalo de respuesta razonable [0,5 , 0,8] y 22 estimaciones en el intervalo [0,05 , 0,08] que parecen indicadoras del error de comenzar la división de un número por otro mayor con '0,0'. Algunas estimaciones dadas por los participantes no tienen una explicación clara, pero han tenido una frecuencia 'alta'. Nueve alumnos han dado la estimación de 1 (¿Sustituyendo por 0,5 ÷ 0,5?); otros siete han dado 0,2 como estimación.

Dentro de las estimaciones imprecisas, un alumno ha dado la estimación de 0,4 (con un 41,2% de error). Dos alumnos han dado la estimación de 0,9 (con un 32% de error). Esta estimación respeta bastante bien el conocimiento del efecto relativo de los operandos sobre el resultado de la operación. En efecto 0,37 ÷ 0,543 debe ser menor que 1, pues 0,543 es mayor que 0,37 y, a su vez, debe ser mayor que 0,37, al ser 0,543 menor que 1. La estimación de 0,9 pertenece al intervalo (0,37 , 1), aunque no pertenece al intervalo de respuesta razonable [0,5 , 0,8], algo más exigente.

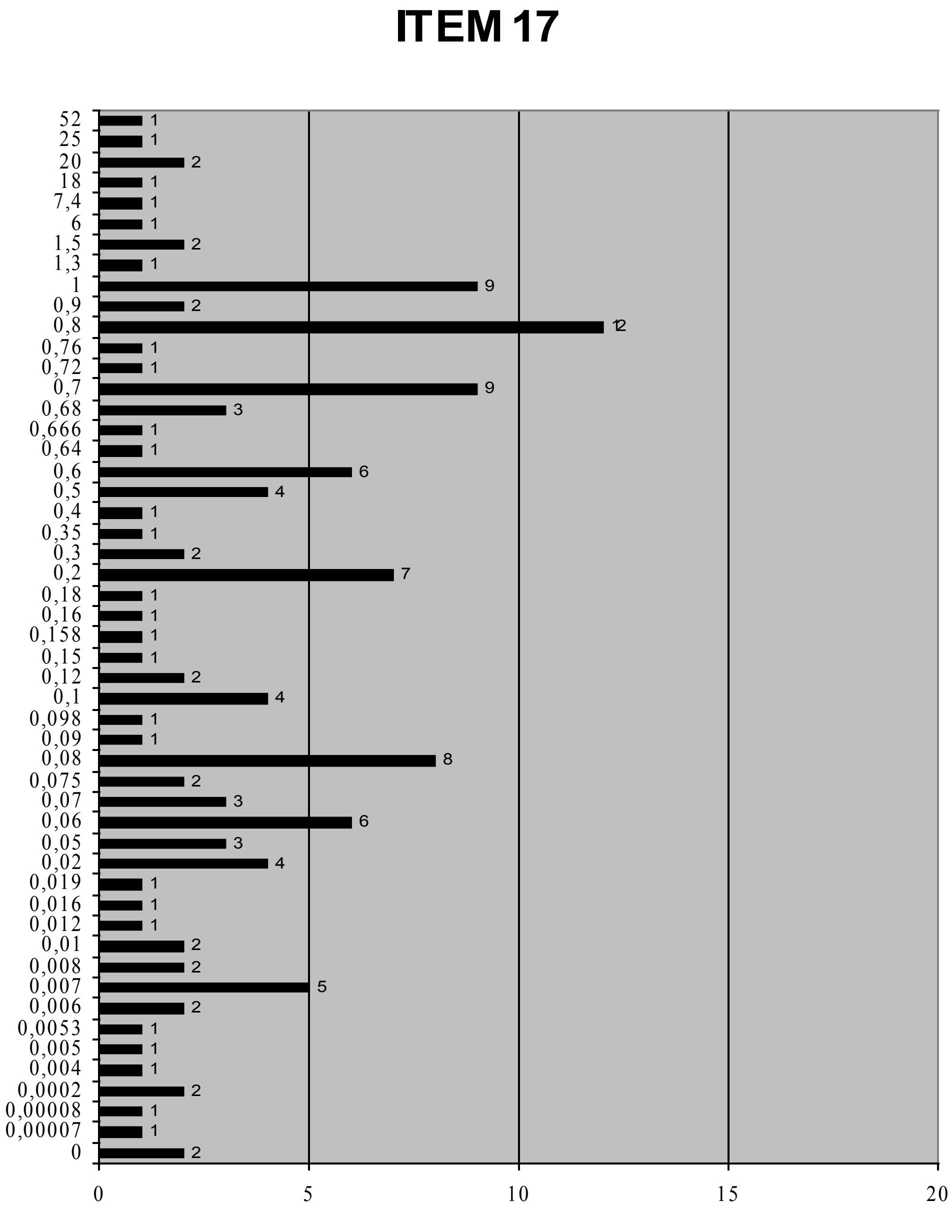


Figura E.28. Estimaciones para el ítem 17.

Tabla E.18. *Análisis previo del ítem 18*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(18) 0,63 ÷ 0,785	0,5 ÷ 1	N. compatibles	0,5	0	[0,56 , 1,04] [0,6 , 1]
	0,6 ÷ 1	Potencias de 10	0,6	1	
	0,7 ÷ 1	P. de 10 + comp.	0,7	2	
	0,6 ÷ 0,7	Truncamiento o red.	0,8	3	
	0,7 ÷ 0,8	Redondeo + comp.	0,8	3	
	0,64 ÷ 0,8	N. compatibles	0,8	3	
	0,6 ÷ 3/4	Fracciones	0,8	3	
	0,63 ÷ 0,7	N. compatibles	0,9	2	
	0,7 ÷ 0,7	N. compatibles	1	1	

0,	**6**	**3**	0	0			0,	**7**	**8**	**5**
-	6	2	8	0			0,	8	0	2
			2	0	0	0				
		-	1	5	7	0				
				4	3	0				

Figura E.29. Algoritmo de 0,63 ÷ 0,785.

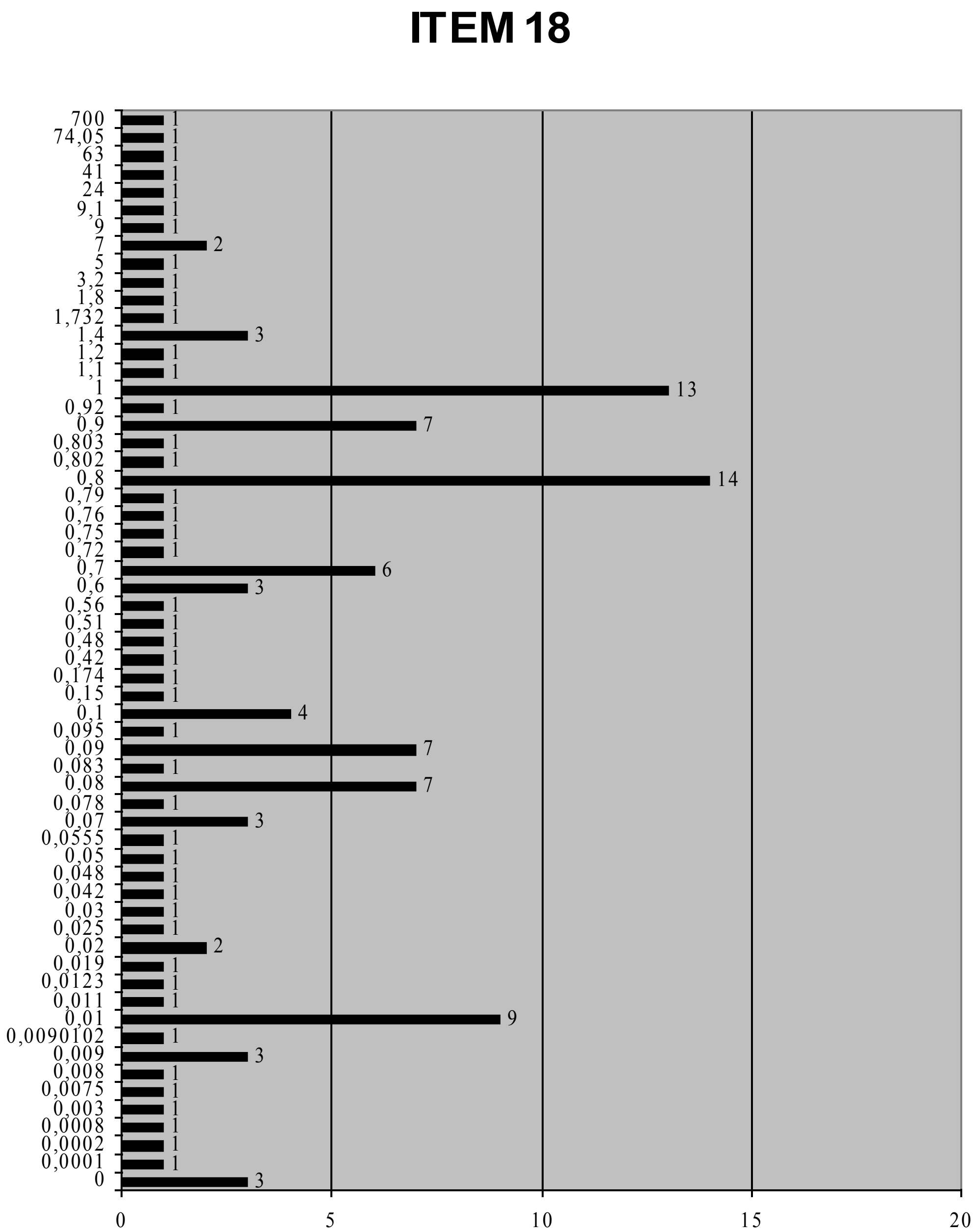


Figura E.30. Estimaciones para el ítem 18.

En el ítem 18 se ha dado una situación parecida a la del ítem 17. Esto es razonable, dado que ambos fueron diseñados como ítems paralelos. Así, se han dado 50 estimaciones dentro del intervalo de respuesta razonable [0,6 , 1], 24 en el intervalo [0,06 , 0,1], 15 estimaciones más en el intervalo [0,006, 0,001], y 4 en el intervalo [6 , 10]. Dentro de los resultados llaman la atención los 9 alumnos que han dado la estimación de 0,01. Por cada estimación razonable, al menos otra estimación incurre en un error al ajustar el valor posicional.

La estimación mayor entre las menores del intervalo del 30% ha sido 0,51 (con un 36,4% de error) y la menor entre las mayores 1,1 (37% de error). Al contrario que en el ítem anterior, a pesar de la proximidad en porcentaje de estas estimaciones al 30% elegido como límite arbitrario para decidir la precisión de las estimaciones, las estimaciones de 0,51 y 1,1 no respetan el conocimiento adecuado del efecto de los operandos sobre el resultado, pues una estimación para 0,63 ÷ 0,785 debería pertenecer al intervalo (0,63 , 1), que coincide prácticamente con el intervalo de respuesta razonable [0,6 , 1].

Tabla E.19. *Análisis previo del ítem 19*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(19) 776 × 0,025	700 × 0,02	Truncamiento	14	1	[13,5,25,2] [14,25]
	800 × 0,02	Redondeo + comp.	16	2	
	700 × 1/40	Fracciones	17,5	3	
	¾ × 1000 × 0,024	Fracciones	18	3	
	800 × 1/40	Fracciones	20	3	
	700 × 0,03	Redondeo + comp.	21	3	
	800 × 0,03	Redondeo	24	1	
	1000 × 0,025	Potencias de 10	25	1	

El ítem 19 ha resultado (junto al 13) el más complicado de todos. Sólo ha habido 33 estimaciones razonables y con la precisión esperada. Las estimaciones imprecisas son menores que 9,004 (con un 53,5% de error) o mayores que 40 (106,1% de error), lo que indica que los intervalos están bastante bien fijados para evaluar las estimaciones. Ninguna estimación se ha dado con una frecuencia superior a 8. Siendo 20 una estimación esperada y sencilla de obtener (como 800 × 1/40), 4 alumnos han dado una estimación de 200; otros 2 alumnos, la estimación de 2; y 5 más, una estimación de 0,02.

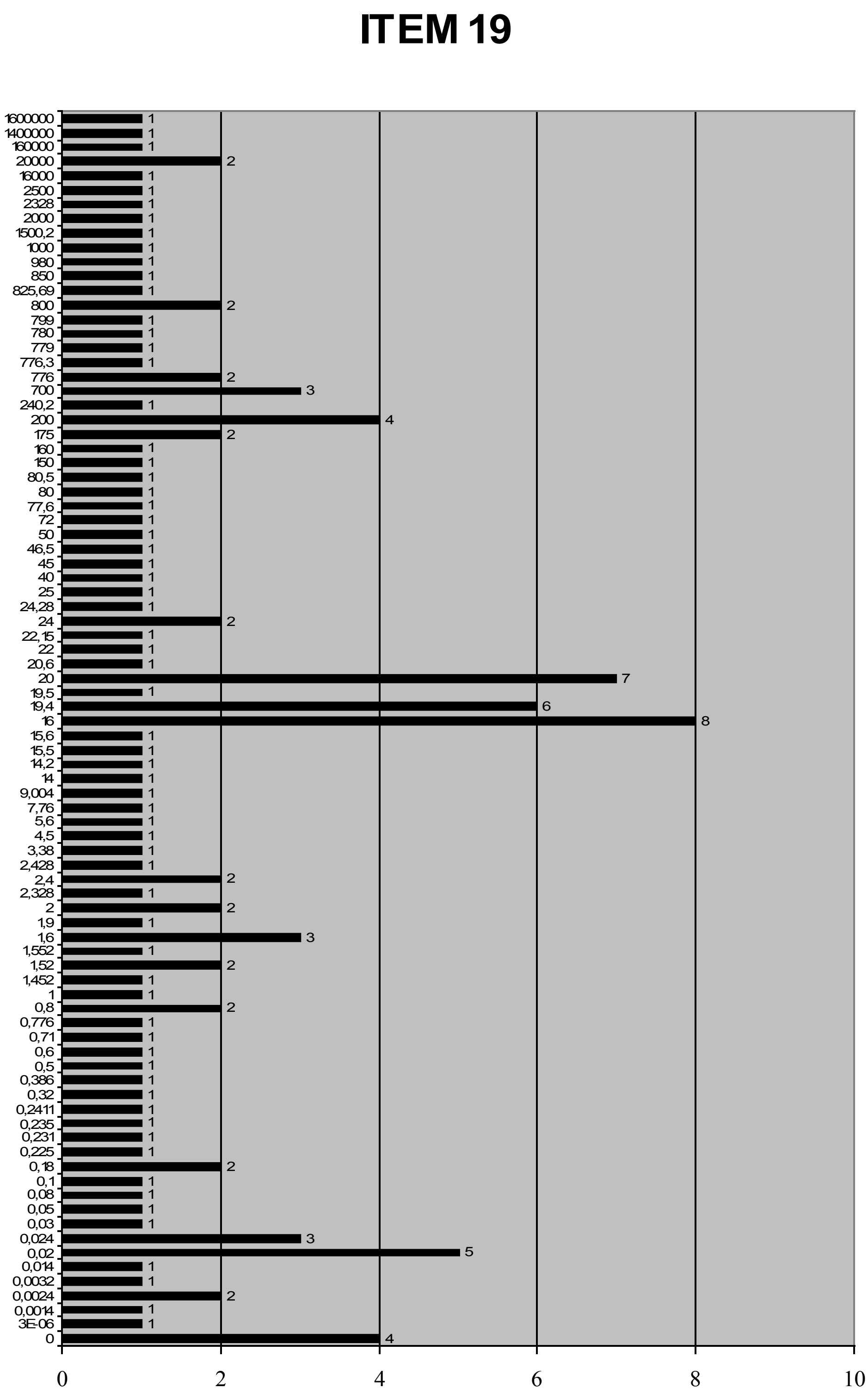


Figura E.31. Estimaciones para el ítem 19.

En el ítem 19 ha habido 6 alumnos que han calculado el resultado exacto (19,4) en lugar de estimar. Reescribiendo 776 × 0,025 como (800 - 24) ÷ (4 × 10), y esto, a su vez, como 800 ÷ (4 × 10) - 24 ÷ (4 × 10), es relativamente fácil llegar mediante un cálculo mental al resultado exacto.

Llama la atención la ausencia de evaluación de los alumnos sobre sus estimaciones. Dado que 1000 > 776 > 100, es evidente, sin afinar mucho, que el resultado de la estimación debería estar entre 2,5 y 25. Sin embargo, solo ha habido 38 estimaciones dentro de este intervalo.

Tabla E.20. *Análisis previo del ítem 20*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(20) 852 × 0,048	800 × 0,04	Truncamiento	32	1	[28,62,53,16] [32,50]
	900 × 0,04	Redondeo + comp.	36	2	
	800 × 0,05	Redondeo + comp.	40	3	
	850 × 1/20	Fracciones	42,5	3	
	860 × 1/20	Fracciones	43	3	
	900 × 0,05	Redondeo	45	2	
	1000 × 0,049	Potencias de 10	49	2	
	1000 × 0,05	P. de 10 + redondeo	50	1	

En el ítem 20 los resultados han sido notablemente parecidos al ítem 19. La estimación con una frecuencia mayor es 900 (6 alumnos), una estimación claramente errónea, y 45 (otros 6 alumnos), esta vez sí una estimación razonable. Al igual que en el ítem anterior, muy pocos alumnos (37) han dado una estimación dentro del intervalo [4,8 , 48] que resultaría de sustituir 852 por 100 y por 1000 respectivamente. Y solo 28 alumnos han dado estimaciones válidas (pertenecientes al intervalo de respuesta razonable y al del 30% de error). No ha habido respuestas exactas. Las mejores estimaciones, entre las imprecisas, han sido 20 (51% de error) y 90 (120% de error).

En el ítem 21, 3 alumnos han dado una estimación de 6,9, pareciendo imitar el algoritmo escrito. Sólo 36 alumnos han dado estimaciones válidas (razonables y dentro del intervalo del 30% de error). Entre ellas, la más frecuente ha sido 7, que parece resultado del algoritmo simplificado aplicado a 0,46 ÷ 0,06.

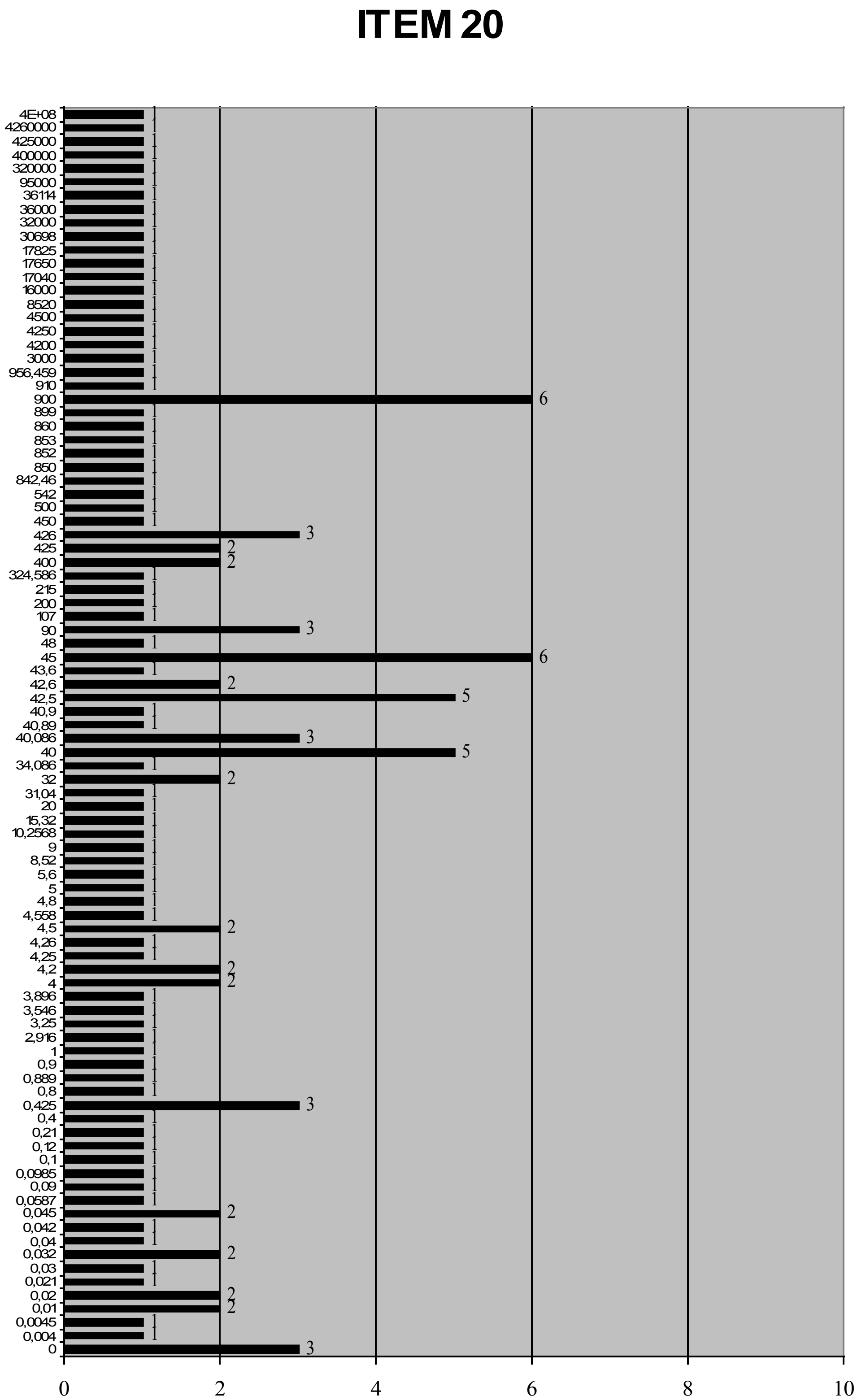


Figura E.32. Estimaciones para el ítem 20.

Tabla E.21. *Análisis previo del ítem 21*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(21) 0,46 ÷ 0,066	0,4 ÷ 0,1	Potencias de 10	4	0	[4,87,9,06] [5,9]
	0,4 ÷ 0,08	N. compatibles	5	1	
	0,4 ÷ 0,06	Truncamiento	6 o 6,6	2 o 3	
	0,42 ÷ 0,06	N. compatibles	7	3	
	0,5 ÷ 0,07	Redondeo	7	3	
	1/2 ÷ 2/30	Fracciones	7,5	3	
	0,48 ÷ 0,06	N. compatibles	8	2	
	0,4 ÷ 1/20	Fracciones	8	2	
	0,45 ÷ 0,05	N. compatibles	9	1	
	0,5 ÷ 0,05	N. compatibles	10	0	

```
0, 4 6 0       | 0, 0 6 6
 - 3 9 6       |-----------
   -----         6, 9 6
   0 6 4 0
   - 5 9 4
     -----
       4 6 0
     - 3 9 6
       -----
       0 6 4
```

Figura E.33. Algoritmo de 0,46 ÷ 0,066.

Las mejores, entre las estimaciones imprecisas, han sido 4,6 (con un 34% de error) y 10 (43,4% de error, dada por 2 alumnos). Resulta interesante que, en el análisis previo, estimaciones como 4 y 10 fuesen consideradas como situaciones 'límite', merecedoras de 0 puntos: La primera (4), como resultado de sustituir 0,46 ÷ 0,066 por 0,4 ÷ 0,1; la segunda (10), por 0,5 ÷ 0,05. En ambos casos no hay un error, sino una imprecisión, según la he definido, y que incluso hablar de 'imprecisión' no resulta del todo satisfactorio (por establecerse esta de un modo arbitrario).

Casos llamativos en este ítem 21 han sido la estimación de 1 (6 alumnos), que parece sumar a la imprecisión en la aproximación un error en el ajuste del valor posicional, o la estimación de 0,5 (11 alumnos). Si la estimación más frecuente ha sido 7, ejemplos de errores de ajuste en el valor posicional han sido 70 (1 alumno), 0,7 (5 alumnos), 0,07 (3 alumnos), o 0,0007 (1 alumno).

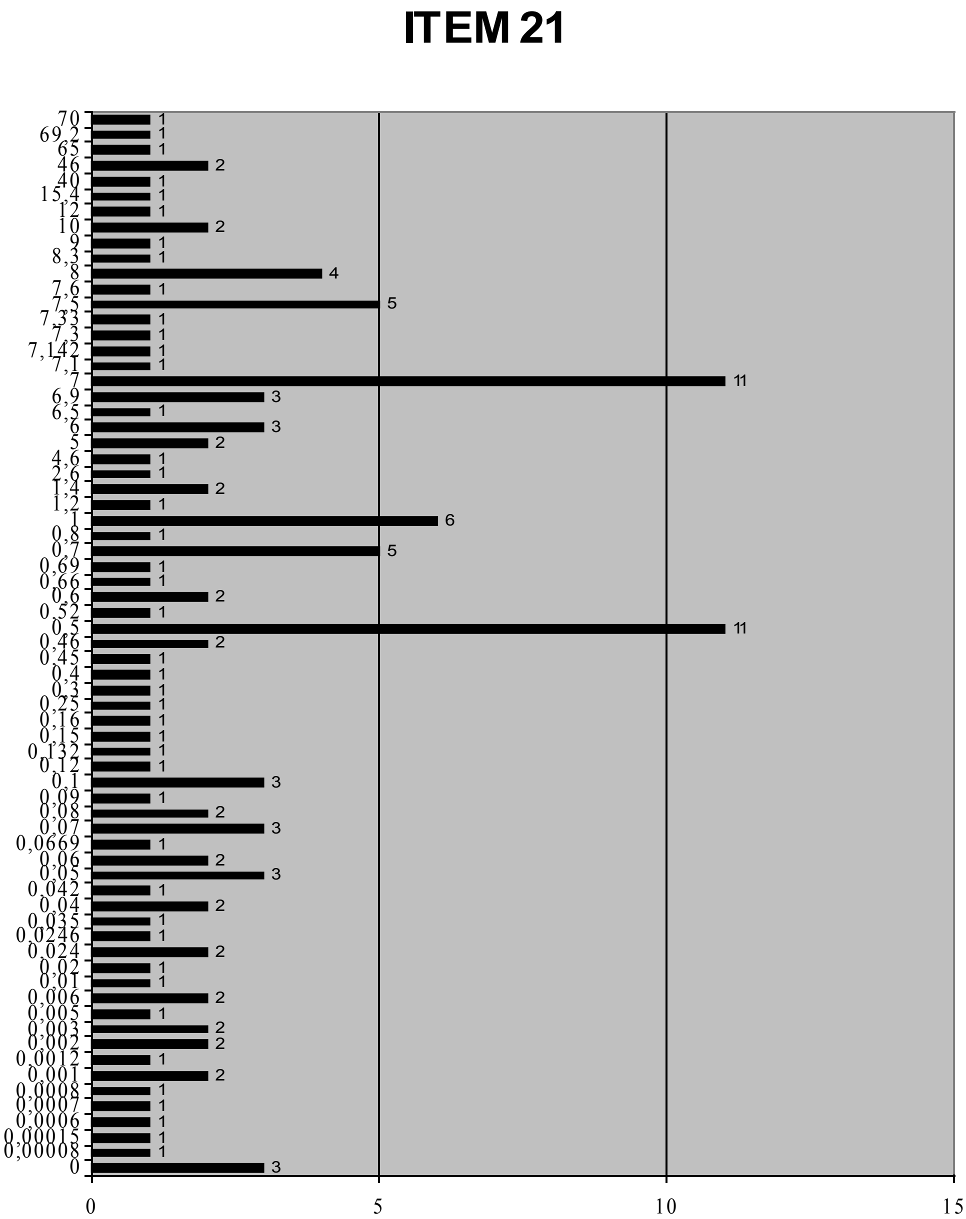


Figura E.34. Estimaciones para el ítem 21.

Tabla E.22. *Análisis previo del ítem 22*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(22) 0,68 ÷ 0,024	0,6 ÷ 0,03	N. compatibles	20	1	[19,8,36,8] [20,35]
	0,5 ÷ 1/40	Fracciones	20	1	
	0,6 ÷ 1/40	Fracciones	24	2	
	0,5 ÷ 0,02	N. compatibles	25	2	
	0,7 ÷ 1/40	Fracciones	28	3	
	0,6 ÷ 0,02	Truncamiento	30	3	
	0,66 ÷ 0,022	N. compatibles	30	3	
	0,75 ÷ 0,025	N. compatibles	30	3	
	0,7 ÷ 0,02	Redondeo	35	1	
	0,8 ÷ 0,02	N. compatibles	40	0	

0,	6	8	0		0, 0 2 4
-	4	8			2 8, 3
	2	0	0		
-	1	9	2		
	0	0	8	0	
		-	7	2	
			0	8	

Figura E.35. Algoritmo de 0,68 ÷ 0,024.

En el ítem 22, ha habido 29 estimaciones válidas (razonables y precisas). Todas ellas están en el intervalo de respuesta razonable [20 , 35]. Para dar una idea de la cantidad de errores en el ajuste del valor posicional que ha habido como respuesta a este ítem, se han producido 10 estimaciones en el intervalo [2 , 3,5], 27 estimaciones en [0,2 , 0,35], otras 17 estimaciones en [0,02 , 0,035] y 7 más en el intervalo [0,002 , 0,0035] (ver Figura E.36).

La estimación más frecuente ha sido 30 (8 alumnos), probablemente sustituyendo 0,68 ÷ 0,024 por 0,6 ÷ 0,02. También 34 parece salir de 0,68 ÷ 0,02. Esta sustitución parece haber dado lugar a una estimación de 3,4, 4 estimaciones de 0,34, y otra de 0,034.

Las estimaciones que quedan inmediatamente fuera de los límites de la precisión establecida son 17 (con un 40% de error) y 40 (con un 41,1%). La estimación de 40 estaba prevista en el análisis previo como resultado de sustituir, usando números compatibles, por 0,8 ÷ 0,02. Fuera de los intervalos citados en párrafos anteriores, las estimaciones que más han llamado la atención han sido 1 (3 alumnos) y 0,05 (5 alumnos).

ITEM 22

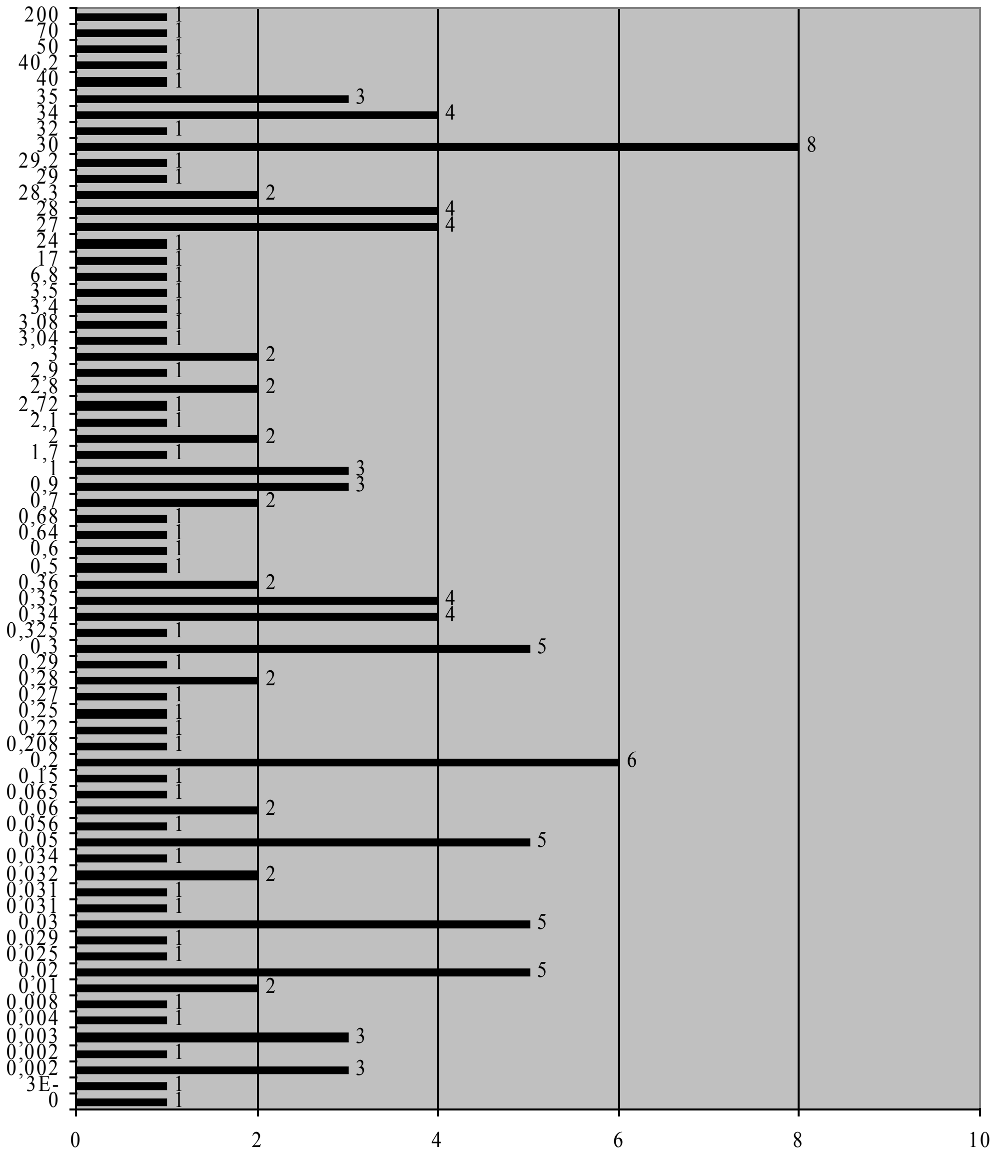


Figura E.36. Estimaciones para el ítem 22.

Tabla E.23. *Análisis previo del ítem 23*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(23) 0,059 ÷ 0,23	0,06 ÷ 0,3	Redondeo	0,2	2	[0,17,0,33] [0,2,0,3]
	0,05 ÷ 0,25	N. compatibles	0,2	2	
	0,05 ÷ 1/4	Fracciones	0,2	2	
	0,06 ÷ 1/4	Fracciones	0,24	3	
	0,05 ÷ 0,2	Truncamiento	0,25	3	
	0,06 ÷ 0,2	N. compatibles	0,3	1	

0,	0		5	9	0		0,	2	3	0
		-	4	6	0		0,	2	5	
			1	3	0	0				
		-	1	1	5	0				
				1	5	0				

Figura E.37. Algoritmo de 0,059 ÷ 0,23.

En el ítem 23, la estimaciones más frecuentes han sido 0,3 (25 alumnos), probablemente de sustituir por 0,06 ÷ 0,2, y 0,2 (13 alumnos), que podría venir de cambiar los datos iniciales por 0,5 ÷ 0,25 o de imitar el algoritmo escrito.

Entre las estimaciones imprecisas, las que 'marcan el límite' son 0,133 (con un 48,1% de error) y 0,4 (55,9% de error, dada por 4 alumnos). Entre lo que parecen errores en el ajuste del valor posicional, si el intervalo de respuesta razonable era el [0,2 , 0,3], y en él ha habido 46 estimaciones, llaman la atención las 31 estimaciones en el intervalo [0,02 , 0,03], o las 13 en el [0,002 , 0,003]. Cinco alumnos han dado una estimación de 1, lo cual sorprende puesto que dividendo y divisor son bastante diferentes.

Finalmente, el ítem 24 sigue en la línea marcada por muchos de los ítems precedentes. Los errores en el ajuste del valor posicional parecen superar en número a las estimaciones razonables. Si en el intervalo de respuesta razonable [0,15 , 0,25] hay 38 estimaciones, en el intervalo [0,015 , 0,025] hay 35, y en el intervalo [0,0015 , 0,0025] hay 12. En este sentido, la estimación más frecuente para este cálculo ha sido 0,02 (26 alumnos), incluyendo un error de ajuste de valor posicional, en lugar de su homóloga correcta de 0,2 (25 alumnos).

Las 'mejores' estimaciones imprecisas han sido 0,1 (51,1% de error) y 0,36 (con un 75,8% de error). En este caso, ambas bastante lejanas en porcentaje al 30%, aunque 0,1 había sido una estimación prevista como resultado de sustituir los datos iniciales por 0,05 ÷ 0,5.

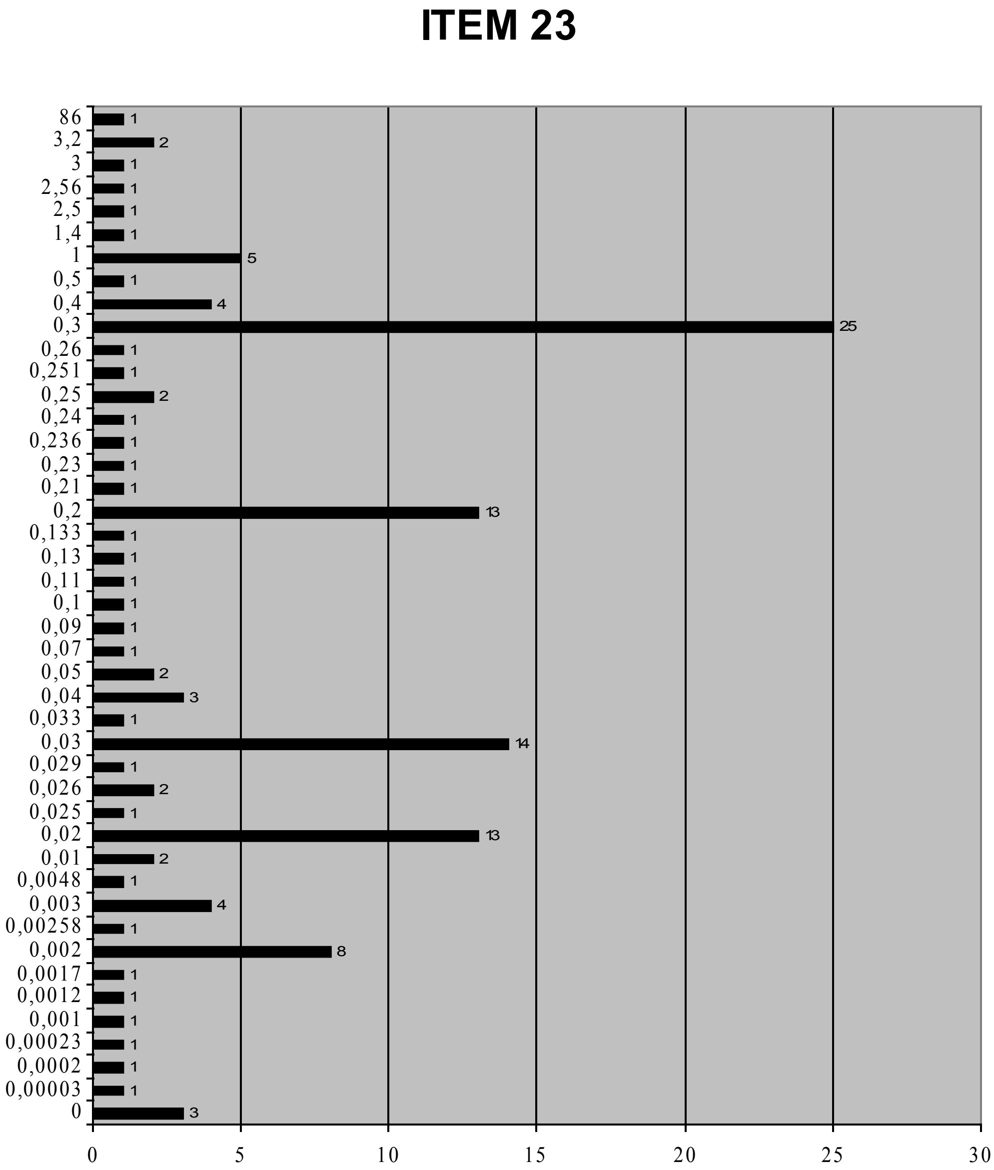


Figura E.38. Estimaciones para el ítem 23.

Tabla E.24. *Análisis previo del ítem 24*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	0,05 ÷ 0,5	N. compatibles	0,1	0	
	0,075 ÷ 1/2	Fracciones	0,15	1	
	0,08 ÷ 1/2	Fracciones	0,16	1	
	0,09 ÷ 1/2	Fracciones	0,18	2	
(24) 0,086 ÷ 0,42	0,08 ÷ 0,4	Truncamiento	0,2	3	[0,14,0,26]
	0,1 ÷ 0,5	N. compatibles	0,2	3	[0,15,0,25]
	0,084 ÷ 0,4	N. compatibles	0,21	3	
	0,09 ÷ 0,4	N. compatibles	0,225	2	
	0,1 ÷ 0,4	N. compatibles	0,25	1	
	0,1 ÷ 1/3	Fracciones	0,3	0	

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
0, & 0 & 8 & 6 & 0 & & & 0,\ 4\ 2\ 0 \\
 & - & 8 & 4 & 0 & & & 0,\ 2\ 0\ 4 \\
 & & & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & - & 1 & 6 & 8 & 0 & \\
 & & & & 3 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

Figura E.39. Algoritmo de 0,086 ÷ 0,42.

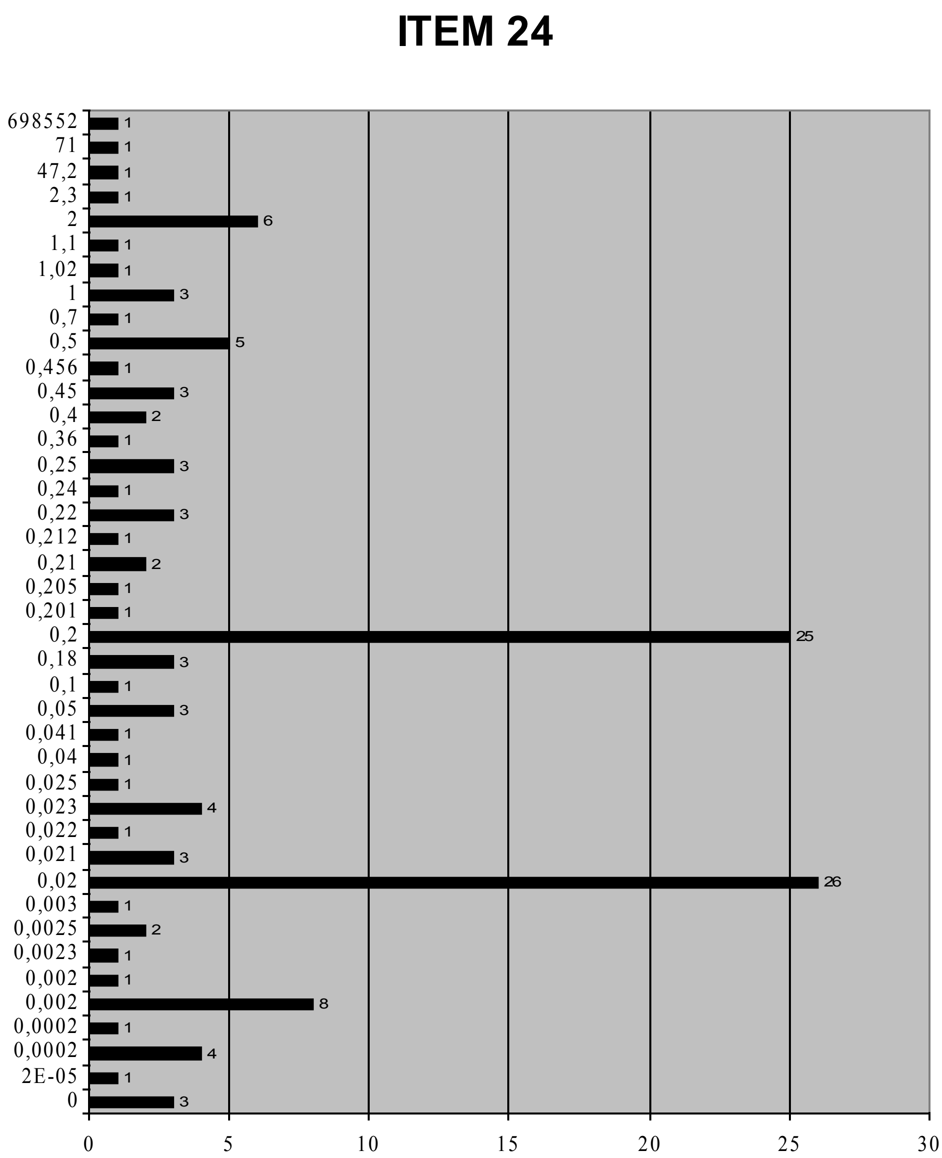


Figura E.40. Estimaciones para el ítem 24.

APÉNDICE F: ANÁLISIS DE DIFICULTADES SEMIÓTICAS

El análisis de dificultades semióticas tiene, en este trabajo, un carácter complementario a la reflexión sobre los errores. Por una parte, desde el punto de vista teórico, se planteaba el objetivo de diferenciar dos ideas muy cercanas como son la de error y dificultad. Por otra parte, después de hacer un estudio completo sobre los errores en estimación, y de haber hecho la distinción teórica señalada, parecía oportuno estudiar con detalle algún tipo de dificultad, para ilustrar mejor la diferencia entre error y dificultad. Dentro del tema de las dificultades, se ha optado por las dificultades semióticas, porque que ofrecen un punto de vista complementario para algunos errores ya descritos en la literatura. Así ocurre con el error de sustituir la división de un número por un medio por hacer la mitad de dicho número. Queda fuera del alcance de esta investigación, abordar globalmente el problema de las dificultades en estimación.

Comienzo este punto explicando los aspectos semióticos de los procesos de estimación. Continuaré con un ejemplo de análisis semiótico de un fragmento de transcripción, tomado de De Castro, Castro y Segovia (2002), que sugirió el interés de abordar el análisis de aspectos semióticos. Concluiré este apartado con el propio análisis de las dificultades semióticas que se han encontrado en este trabajo.

1.1. Aspectos semióticos de los procesos de estimación

Un sistema de representación[386] es "un sistema de reglas (i) para identificar o crear caracteres[387], (ii) para operar con ellos, y (iii) para determinar relaciones entre ellos (especialmente, relaciones de equivalencia)" (Kaput, 1992, p. 523). Los 'caracteres' pueden ser letras, palabras, números, diagramas, gráficos, Regletas de Cuisenaire, o cualquier tipo de objetos o marcas, mientras que las operaciones con ellos pueden ser manipulaciones físicas con los objetos, pero también transformaciones con sistemas de notación algebraica. En todo caso, las operaciones y relaciones realizadas con estos caracteres siguen unas reglas sintácticas que determinan, no siempre explícitamente, lo que está permitido hacer (Kaput, 1992).

Para Kaput (1992) hay cuatro tipos principales de actividades matemáticas que se realizan en la escuela, desde el punto de vista de los sistemas de representación. Para los propósitos de nuestra investigación, citaré las dos primeras: 1) Transformaciones restringidas dentro de un determinado sistema de representación; y 2) Transformaciones entre diferentes sistemas de representación (p. 524).

Duval (1999) utiliza el término 'registro semiótico de representación' (en adelante, 'registro', por simplicidad) en un sentido muy similar al empleado por Kaput (1992) para los 'sistemas de representación'. Para Duval (1999, 2006) hay dos tipos fundamentales de transformaciones que pueden aplicarse a una representación semiótica: 1) el *tratamiento*, que es una transformación que produce otra representación en el mismo registro; y 2) la *conversión*, o

[386] En este trabajo, sigo la definición de Kaput (1992) que primero utiliza la expresión "sistema de notación", para después expresar que es equivalente a "sistema de representación". Aquí, he preferido utilizar desde el principio "sistema de representación" por considerarla una expresión de uso más frecuente en la literatura.

[387] Donde se debe entender 'caracteres' en el sentido más amplio de 'signos'.

transformación de una representación en otra, que supone un cambio de registro. Hay una equivalencia aproximada entre los términos empleados por Duval (1999 y 2006): registro, tratamiento y conversión, y los utilizados por Kaput (1992): sistemas de representación, transformaciones dentro de un sistema de representación y transformaciones entre sistemas de representación respectivamente[388].

En este trabajo aparecen (explícita o implícitamente) *seis* registros (sistemas de representación) diferentes para los números y las operaciones que se plantean para la estimación: la escritura decimal[389], el lenguaje natural, la escritura fraccionaria, la escritura con porcentajes, la escritura con exponentes y las escrituras de algoritmos[390]. Dado que las tareas se presentan a los alumnos empleando siempre la *escritura decimal* y que en las entrevistas solo se ha utilizado el *lenguaje natural*, éstos son los únicos registros que aparecen

---

388 En adelante, utilizaré la terminología de Duval (1999 y 2006). Aunque en el contexto de este trabajo parezca equivalente utilizar el modelo de Duval o el de Kaput, en el marco global de la investigación de la que este trabajo forma parte, el marco teórico de Duval (1999) me parece más rico. Por ejemplo, para Duval (1999) "la dificultad de una conversión depende del grado de congruencia entre las representaciones" (p. 51). La congruencia entre representaciones depende de que se cumplan los siguientes tres criterios: correspondencia semántica entre unidades significantes, univocidad semántica terminal, y mismo orden de aprehensión de las unidades en ambas representaciones. En el modelo de Kaput (1992), y en otros trabajos de este autor, no he encontrado elementos teóricos explicativos equivalentes a la congruencia entre representaciones y sus criterios, que me parecen importantes para explicar fenómenos relativos a las dificultades semióticas que experimentan los alumnos al estimar.

389 Me refiero con *escritura decimal*, término empleado por (Duval, 1999) a la notación horizontal estándar que se utiliza en la escritura aritmética, con números decimales.

390 Cada algoritmo utiliza un sistema de representación distinto (véase la Figura 2 para varios algoritmos de la división). Por ejemplo, en los algoritmos de la resta, el algoritmo de restar pidiendo prestado incluye signos – como el tachado de las cifras del minuendo, cuando deben transformarse en diez unidades de orden inferior – que no se utilizan en el algoritmo de restar llevando.

explícitamente en el trabajo. Por tanto, parece necesario justificar la inclusión de los otros cuatro registros. La *escritura fraccionaria* y la *escritura con porcentajes* fueron utilizadas en el periodo de instrucción[391]. En particular, se realizó la secuencia de actividades de Rubenstein (1985), en la que se practica la estimación con fracciones y porcentajes. La *escritura con exponentes* solo apareció implícitamente en una ocasión, en el procedimiento empleado por una alumna que, al dar una estimación para el cálculo 2,57 × 0,72, indicaba: "Subo los números que hay al otro lado de la coma. Entonces son cuatro [cifras decimales]. O sea, que sería por diez a la menos cuatro [10^{-4}] el número que me quede luego para multiplicar." Por otra parte, muchos alumnos recurren a la imitación del algoritmo escrito cuando se les pide dar una estimación. Esto hace que también aparezcan indirectamente, al ser evocados por los alumnos los *registros de los algoritmos escritos de las operaciones*. En la Figura 2 aparecen tres algoritmos distintos (de izquierda a derecha el español, inglés y holandés) para la división 133 ÷ 6. Estos algoritmos constituyen *registros* o sistemas de representación distintos de la escritura decimal, por ejemplo, pues son sistemas que utilizan la posición espacial de forma distinta a como se hace en la escritura decimal y tiene sus propias reglas sintácticas[392]. Dado que las

[391] La escritura fraccionaria aparece también 'evocada' por los alumnos en las transcripciones, a través de sus conversiones al lenguaje natural. Por ejemplo, cuando un alumno transforma 40 ÷ 0,5 en "cuarenta dividido por un medio", antes se produce la sustitución de 0,5 por ½, de modo que está presente en las transformaciones que hace el sujeto la escritura fraccionaria.

[392] Por ejemplo, Diego, al dar una estimación para la operación 0,962 ÷ 0,25, realiza mentalmente una imitación perfecta del algoritmo escrito de la división: "Corro la coma dos a la derecha, dos a la derecha. 96,2 entre 25. Pues son 3 por 25, 75. A 96 van 21. Y un 2. 212 entre 25 son algo más de 8. Entonces me quedo con 3,8." Dado que está estimando, deja la división sin terminar. La estimación es 3,8 y el resultado exacto es 3,848. Para ser más precisos, habría que aclarar que los alumnos no utilizan el *registro de algoritmo escrito* sino una *imagen mental de este registro*, lo que dificulta notablemente la manipulación de expresiones en este registro.

escrituras con exponentes y con porcentajes fueron testimoniales y no tuvieron incidencia significativa en el trabajo, voy a analizar los aspectos semióticos de la estimación restringiéndome a los otros cuatro registros mencionados.

```
 1 3 3 | 6             2 2      6 | 1 3 3
- 1 2    2 2        6 ) 1 3 3      1 2 0 - | 2 0 ×
   1 3               - 1 2           1 3   |
 - 1 2                  1 3          1 2 - |   2 ×
     1                - 1 2            1   | 2 2
                          1
```

Figura 7.1. Registros de algoritmos

1.2. Un ejemplo de análisis semiótico

Al revisar las transcripciones del trabajo de investigación De Castro (2002), advertí que examinarlas desde un punto de vista semiótico, analizando los distintos registros empleados, las conversiones y tratamientos, podía proporcionarnos una información valiosa para complementar el análisis realizado entonces sobre estrategias y errores. Por ejemplo: un alumno, al dar una estimación para el resultado de 943 ÷ 0,48, decía: "Y eso [dividido] entre la mitad. O sea, [dividido] por la mitad vamos. Novecientos treinta y cuatro. La mitad, pues... cuatrocientos cincuenta y algo" (De Castro, 2002, p. 252). La Figura 3 esquematiza mi interpretación del citado fragmento, que se detalla a continuación.

La expresión "a ÷ b" puede leerse "a dividido por b" o "a dividido entre b". La fracción ½ suele leerse, dependiendo del contexto, como "un medio" o "la mitad". La opción de leer ½ como "la mitad" suele aceptarse cuando la fracción está en primer lugar en una multiplicación. Por ejemplo, ½ × 4 se puede leer como "la mitad de cuatro". Sin embargo, no es adecuado leer "÷ ½" como "dividido por la mitad".

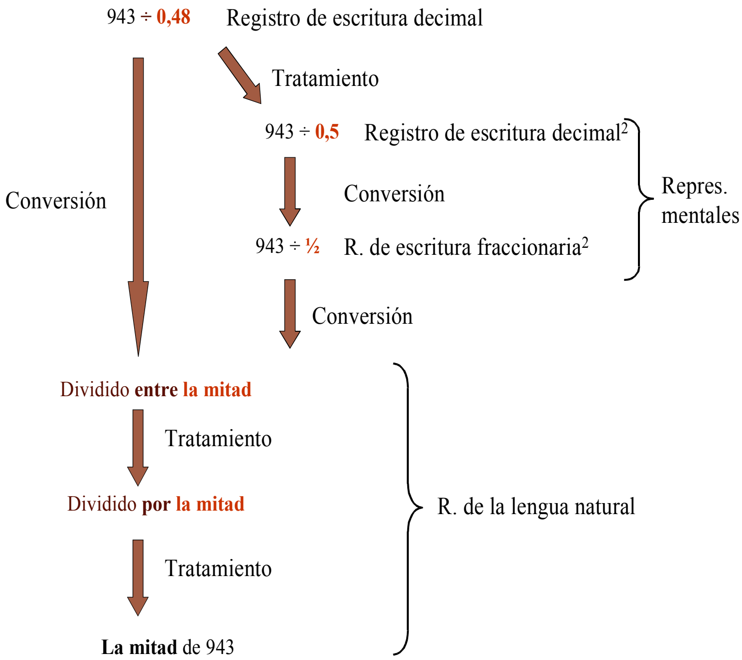


Figura 7.2. Análisis semiótico de un fragmento de transcripción de De Castro y otros (2002)

En el Diccionario de la Lengua Española[393], en las dos primeras acepciones de la palabra "mitad", aparece: "Cada una de las dos partes iguales en que se divide un todo" y "Parte que en una cosa equidista de sus extremos". En esta segunda acepción, puede interpretarse la "mitad", por ejemplo, como el eje de simetría de una figura. Por ejemplo, doblar un mantel por la mitad es doblarlo por uno de sus dos ejes de simetría (si el mantel es rectangular). Al doblar un mantel por la mitad, se divide en dos partes iguales. Así, en el lenguaje corriente, "dividir una cantidad por la mitad" podría interpretarse como "dividirla por dos" o a hacer la mitad de la misma.

Esta y otras tentativas de análisis realizadas sobre las transcripciones de las entrevistas de De Castro (2002) me alentaron a adoptar, como uno de los objetivos en el marco global de la investigación, el análisis de las dificultades semióticas en los procesos de estimación, entendiendo estas dificultades, de forma restringida, como aquellas que se producen al realizar tratamientos y

[393] http://buscon.rae.es/draeI/

conversiones en los sistemas de representación citados como intervinientes en procesos de estimación en los párrafos anteriores.

1.3. Resultados del análisis de dificultades semióticas

Se han encontrado tres tipos de dificultades semióticas. Algunas están muy próximas, y se pueden interpretar como causantes (o contribuyentes parcialmente), de errores estudiados y descritos en apartados anteriores de este capítulo.

1.3.1. Dificultad semiótica 1: Producción de expresiones que mezclan registros como resultado de una conversión incompleta

Un primer ejemplo de dificultad semiótica se encuentra claramente en el Alumno 9, cuando intenta dar una estimación para el cálculo 86 ÷ 222.

> Alumno 9: Esto está cerca de 200 y 200 es una parte, o sea, ¼ de 1000. Lo puedo ver de esa manera. O sea, 1/5, perdón, que diga. Bueno ya no sé, ya me he liado. Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

El Alumno 9 sustituye 222 por 200 y después 200 por 1/5 de 1000, lo que supone una *conversión*, al introducir el registro de la escritura fraccionaria. Esto produce la dificultad de tener que calcular el resultado de la expresión 100 ÷ (1/5 de 1000) en el que se produce una mezcla de registros. Esta operación, para la que no hay un *tratamiento* inmediato, resulta más complicada que volver atrás, deshaciendo la conversión de 200 por 1/5 de 1000 y haciendo 100 ÷ 200. Al final, El Alumno 9 invierte los papeles de dividendo y divisor y realiza la operación 222 ÷ 100 = 2,22, resultado que dicho alumno interpreta como $2,\widehat{2}$, incurriendo en un error en el significado de la expresión periódica. Poco después, El Alumno 9 vuelve a experimentar el mismo tipo de dificultad al intentar estimar el resultado de 0,46 ÷ 0,066.

> Alumno 9: Esto [señalando a 0,46] es 1/2. Tiende a ½. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse ½ entre 0,01 y sería... ... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay...

El alumno pasa de la expresión 0,46 ÷ 0,066 a 0,5 ÷ 0,01, lo cual es un tratamiento que incluye un error en el redondeo, pues 0,066 debería redondearse a 0,07 o a 0,1 si se utiliza la sustitución por potencias de 10. Posteriormente, hay una conversión parcial[394] en el paso 0,5 ÷ 0,01 a ½ ÷ 0,01. En este momento, la conversión produce una dificultad semiótica, pues no es sencillo realizar la operación a la que se ha llegado. El alumno puede completar la conversión, sustituyendo 0,01 por 1/100, y aplicar un *tratamiento*, pero decide dar marcha atrás, volviendo a la operación 0,5 ÷ 0,01 y deshaciendo la conversión. La conversión, si no se aplica a todos los signos de la representación de partida, da lugar a expresiones que mezclan la escritura decimal con la fraccionaria, impidiendo aplicar a las mismas los algoritmos propios de los decimales o los de las fracciones (tratamientos en los registros decimal o fraccionario). Duval (1999) afirma de este tipo de representaciones *mixtas* (que mezclan registros) que, “desde un punto de vista semiótico, su empleo solo puede conducir a impases didácticos” (p. 133).

[394] Conversión parcial, pues la transformación no conduce a una expresión que pertenezca al registro de la escritura fraccionaria sino a una expresión *mixta* (Duval, 1999, p. 133), en la que algunos signos pertenecen al registro de la escritura decimal y otros al de la escritura fraccionaria. Es a esta expresión mixta a la que no se le puede aplicar ningún tratamiento.

1.3.2. Dificultad semiótica 2: Confusión de "dividir un número por una fracción" con "aplicar la fracción como operador al número"

Otro tipo de dificultad semiótica es la confusión de "dividir por ½" con "hacer la mitad" o "dividir por ¼" con "dividir por 4" (o hacer 'la mitad de la mitad'). En general, esta dificultad consiste en confundir la división de un número por una fracción con la aplicación de dicha fracción al número. Incluso, se llega, en algunos casos, a la sustitución de la operación de división con aplicar cualquiera de los dos operandos, sustituidos por una fracción, como operadores al otro número. Por ejemplo, el Alumno 9, al estimar el resultado de la división 968 ÷ 24, dice:

> Alumno 9: Esto tiende casi a 1000 y esto a 25. O sea, ¼. Pues la estimación... la daría... a ver... vamos a ver... 25.

Tras cometer un error en la conversión, sustituyendo 25 por ¼, divide 1000 por 4 (cuyo resultado es 250) y acaba cometiendo un error en el ajuste del valor posicional para dar un resultado de 25. El Alumno 19, al estimar 968 ÷ 24, indica:

> Alumno 19: 250. Por que, redondeando, sería 968. Lo redondearía a 1000 y 24 a 25 y sería como dividir entre la cuarta parte.

La secuencia es la siguiente: 968 ÷ 24 → 1000 ÷ 25 → 1000 ÷ ¼ → 1000 ÷ 4 = 250. Es decir, igual que en el caso anterior pero sin errar en el ajuste del valor posicional. El Alumno 17 sigue el siguiente procedimiento:

> Alumno 17: 0,74 lo aproximo a 0,75, que serían tres cuartos de 0,35. Lo

aproximo a 0,36 [...]. O sea, que sería 0,27.

Este es un ejemplo interesante de cómo la división desaparece por completo y el número 0,75, convertido en la fracción ¾, se aplica como operador al otro número (el 0,36).

$0{,}747 \div 0{,}35 \rightarrow 0{,}75 \div 0{,}35 \rightarrow \frac{3}{4}$ de $0{,}36 \rightarrow 0{,}27$

El mismo número racional puede expresarse como fracción ¾ o como decimal 0,75. Mientras que como decimal, es más fácil percibirlo como número, como fracción puede apreciarse más como operador que como número. Por ejemplo, la fracción ½ sugiere más "hacer la mitad" o "dividir por dos" que verlo como un valor estático o un punto sobre la recta. En nuestra interpretación, la representación como fracción tiene una connotación más dinámica, de operador, de operación aritmética que puede "arrastrar" o sustituir (como hace en los ejemplos antes planteados) la operación principal de división que había que realizar.

La confusión de "dividir por ½" con "hacer la mitad" es un problema conocido que ha sido descrito en otros trabajos. Por ejemplo, Ma (1999) realiza una investigación con una muestra de 95 maestros en ejercicio (72 chinos y 23 americanos). El objetivo principal del estudio era analizar la comprensión de los maestros en ejercicio sobre contenidos básicos del currículo de Educación Primaria. Uno de los contenidos elegidos por la investigadora fue la división de fracciones. Para ello, propuso a los maestros que resolvieran la operación 1¾ ÷ ½, explicando si el procedimiento tenía sentido para ellos y justificándolo. Después se les pedía que enunciaran un problema que pudiese resolverse efectuando la operación antes propuesta. Al analizar los enunciados dados por los maestros, los maestros de Estados Unidos mostraron las siguientes ideas equivocadas acerca de la división de fracciones (Ma, 1999, pp. 64-65):

1. Confusión de la división por ½ con la división por 2.

2. Confusión de la división por ½ con la multiplicación por ½ (con hacer la mitad).

Por ejemplo, en el primer caso, los maestros planteaban un problema de repartir una tarta y tres cuartos entre dos personas.

En este trabajo, apunto que esta dificultad aparecida en mi trabajo al igual que en el de Ma[395] (1999), tiene origen semiótico. Incluso, esta dificultad de interpretar las fracciones como números puede rastrearse en la historia, como se aprecia en el texto de Arce, Castrillón y Vega (2002):

> El único problema es que en la práctica estas [las fracciones] no eran reconocidas como números, pero esto no significaba que no las conocieran y pudieran manejarlas. El estatus de los números racionales no constituye propiamente un descubrimiento, a pesar de la importancia que le acordaron Stevin y Viète en sus trabajos. De lo que se trata es de remitir el concepto de número, a algo que no es múltiplo de la unidad.

1.3.3. Dificultad semiótica 3: Particularización del significado de un paso del algoritmo de la división

La siguiente dificultad se produce con mucha frecuencia en situaciones en las que hay que dividir un número por otro mayor. Por ejemplo, el Alumno 1, al estimar 36 ÷ 258, dice:

> Alumno 1: Y ahora esto serían 0,0 y serían 360... A ver. 36 entre 2... 36 entre dos cabe a 15, 18.

Y el Alumno 30, ante la tarea 8,85 ÷ 42,6, comenta:

[395] Desde un punto de vista semiótico, la tarea que propone Ma (1999) es una conversión de expresiones del registro fraccionario al registro de la lengua natural.

> Alumno 30: Vamos a quitar la coma de 42,6. Corremos un lugar... y... en 8,85 también con lo cual tendríamos 88,5 entre 426 pero como no cabe, ponemos un 0... 0,... tampoco cabe. Pondríamos otro cero y tendríamos 885 entre 426. Entonces sería 0,0... a 2. Sería 0,02. Yo creo.

En ambos casos, se produce una duplicación del cero inicial. Parece atribuirse un significado distinto al 0 que se baja antes de la coma ("cero coma") en divisiones de un número por otro mayor y al "cero al cociente". Es lo que he llamado el efecto "0,0". Aquí hay probablemente un problema de razonamiento lógico en el que intervienen decisivamente las formulaciones en el lenguaje ordinario del algoritmo escrito de la división (lo cual constituye una conversión). Hay una serie de reglas como: "Cuando se divide un número por otro mayor, debe comenzarse poniendo '0,' en el cociente", y otra que diría: "cuando la cantidad a dividir es menor que el divisor, se pone un cero en el cociente y se baja la cifra siguiente". Hay que plantearse el porqué de esta dificultad. Por una parte, parece que el 0, está fuera de la operación, es previo, y es global (se pone antes de entrar a operar). Por otra, el cero al cociente está totalmente inmerso en la operación y que afecta a un paso parcial dentro de la misma. Por otra parte, las reglas tienen formulaciones distintas en un caso y en otro y se aplican siempre en momentos distintos. Una, la de colocación del cero inicial con la coma, parece específica de las situaciones en las que hay que dividir un número por otro mayor, mientras que el "cero al cociente" aparece durante la operación en todo tipo de divisiones. Los alumnos parecen no darse cuenta de que el '0,', que se coloca al iniciar la división de un número por otro mayor, es el cero al cociente habitual de la división, que implica bajar la cifra siguiente del dividendo, y que el hecho de que se adopte la regla de comenzar siempre la división de un número por otro mayor, se debe a que en esta situación siempre es necesario 'bajar una o varias cifras' y la primera cifra que se ponga en el cociente corresponderá a las unidades (por esto siempre el 0 va con una coma, que indica precisamente que el 0 corresponde al valor posicional de las unidades). Parece como si al bajar el primer cero, el significado de este paso se particularizase, para significar solo que se divide un número por otro mayor. Esta dificultad conduce a errores que han sido descritos en De Castro (2004) y en De Castro, Castro y Segovia (2008).