UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN ESPAÑA EN LOS SIGLOS XVIII Y XIX

TESIS DOCTORAL

ALEXANDER MAZ MACHADO

Granada, 2005

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN ESPAÑA EN LOS SIGLOS XVIII Y XIX

Tesis Doctoral que presenta
D. Alexander Maz Machado

Bajo la Dirección del Doctor:
Dr. D. Luis Rico Romero

Granada, 2005

A Ana María, quien ha transformado mi vida, haciéndola cada día más feliz.

A mi familia, Ruth, Leonardo y Ramiro quienes siempre me han apoyado y comprendido en todo, incluso en la locura de dejar familia, empleo y amigos por hacer realidad un sueño.

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Alexander Maz Machado
D.L.: Gr. 492 - 2005
ISBN: 84-338-3296-4

Esta investigación ha sido realizada dentro del grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación de la Conserjería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.

AGRADECIMIENTOS

La elaboración de una tesis doctoral es un proceso el cual puede llevarse a buen término gracias a la colaboración, participación, aportación y apoyo de una serie de instituciones y personas, tanto del ámbito académico como afectivo. Por tal razón, quiero expresar mis agradecimientos a cada uno de estos colectivos:

A la Agencia Española de Cooperación Internacional (AECI), organismo que otorgó la beca que permitió parte de mi dedicación a este proyecto (1998-2001).

A la Universidad de Granada, institución que financió, a través del Vicerrectorado de Investigaciones, parte de mi estancia para realizar este proyecto (2002).

A la Universidad de Córdoba, que facilitó infraestructura logística durante la parte final de esta tesis.

A Luis Rico Romero, por sus enseñanzas y por encaminar mis primeros pasos en el mundo de la investigación; por soportar con paciencia mis fallos y dilaciones durante estos años. Y especialmente, por brindarme su amistad y confianza.

A los miembros del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, por su apoyo y colaboración.

A los miembros del Grupo de Investigación: Pensamiento Numérico y Algebraico, por sus aportaciones y su disposición cuando requería de su colaboración en diversas etapas del trabajo.

A Manuel Torralbo Rodríguez por el constante apoyo y animo brindado, especialmente en aquellos momentos en los que flaqueaba el deseo y la motivación para concluir esta empresa.

A todos aquellos amigos que en mi lejana y añorada Ibagué me animaron y convencieron de esta aventura.

TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO 4

CAPITULO 5

CAPÍTULO 1

Marco teórico

PRESENTACIÓN

En la práctica cotidiana de la enseñanza de las matemáticas, los docentes encuentran temas y conceptos que presentan cierta resistencia o dificultad a los alumnos para llegar a una comprensión, interpretación y utilización correctas; uno de estos conceptos es el de número negativo. Los números negativos han llamado la atención de los investigadores en Educación Matemática dado que, durante el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, los profesores encuentran dificultades manifiestas en los alumnos para su comprensión. Estas dificultades no sólo se aprecian en el ámbito escolar, también a lo largo de la historia se han detectado obstáculos en la conceptualización, interpretación y empleo de estos números. Por estas y otras razones, que se presentan en esta memoria, serán los números negativos el objeto de estudio en la presente investigación.

El primer cometido es presentar el marco teórico en el cual se ha realizado esta investigación, de manera que pueda comprenderse cómo los distintos elementos que la forman se articulan de manera lógica para darle sentido dentro de la investigación en Educación Matemática.

Este capítulo se organiza en torno a algunos aspectos principales con los que se relaciona la investigación. En el primer apartado se ofrece un punto de vista general sobre la dimensión cultural y social del conocimiento científico, haciendo énfasis en la historia de la matemática como herramienta utilizada en la investigación epistemológica.

El segundo apartado rata de la investigación histórica desde la Educación

Matemática, indicando el auge que tanto en publicaciones como en estudios está alcanzando; hacemos mención de trabajos recientes y de la opinión de algunos autores acerca de la importancia de la historia de las matemáticas en la enseñanza.

El tercer apartado está dedicado a los números negativos desde la perspectiva de su desarrollo histórico a lo largo de los siglos XVIII y XIX en Europa, para lo cual se presenta una corta reseña de autores y textos.

En un cuarto apartado, se resumen algunas de las investigaciones hechas en los últimos veinte años relativas a aspectos históricos o epistemológicos sobre los negativos.

En el quinto apartado se estudian los números naturales relativos, un constructo matemático planteado por González Marí (1995), como puente o eslabón presente en el proceso de ampliación del campo numérico natural al entero, el cual tiene papel destacado en esta investigación.

Los libros de texto como objetos de investigación en Educación y más concretamente en Educación Matemática están tratados en el apartado sexto, dado que forman la población a estudiar en este trabajo.

Identificar, describir y destacar la importancia de la investigación histórica en educación y en la Educación Matemática es el propósito del apartado séptimo, por cuanto esta investigación tiene una componente histórica en su desarrollo.

El apartado octavo pone de manifiesto que el sólo análisis histórico no es suficiente para conocer el desarrollo de un conocimiento, sino que se requiere de otras herramientas, una de ellas es el método histórico crítico.

En el apartado noveno se explica la segunda técnica que se utilizará en el desarrollo de esta investigación: el análisis de contenido con sus distintas componentes, incluyendo el análisis conceptual. Mostraremos la perspectiva adoptada por el grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico.

Los propósitos que se pretenden alcanzar en esta investigación sobre los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX son presentados en el apartado décimo; en el apartado undécimo, se plantean una serie de interrogantes de la investigación.

Finalmente, en el apartado duodécimo se ubica la investigación en tres campos generales: Epistemología y Didáctica de las Matemáticas; desarrollo de conceptos en Matemáticas; e Historia de las Matemáticas.

1.1 Conocimiento científico y cultural

La admiración que suscita la ciencia hace pensar en ella como una actividad técnica perfecta, intocable y en continuo progreso, olvidando que no es producto de una sucesión lineal de descubrimientos e invenciones, sino que como afirma Serres (1991; p. 13):

> *"[...] corre y fluctúa sobre una red múltiple y compleja de caminos encabalgados y entrecruzados en nudos, cúspides o encrucijadas, intercambiadores en los que se bifurcan una o varias veces. Una multiplicidad de tiempos diferentes, de capitales, de hombres en acuerdo o en conflicto, de máquinas y objetos, de previsiones y azares imprevistos componen un tejido fluctuante que representa de manera fiel la historia múltiple de las ciencias."*

Es evidente que la investigación científica no es una aventura individual, sino una actividad humana colectiva. Esta multiplicidad de circunstancias hace que la ciencia tenga mayor o menor importancia según los intereses que siga una sociedad dada, pero cada una, ciencia y sociedad, influyen de manera recíproca en la otra. Es decir, la ciencia se desarrolla en ambientes sociales favorables a ella y, a su vez, los progresos en la ciencia elevan el nivel técnico, intelectual o especulativo de la sociedad. El conocimiento de la historia de la ciencia permite mostrar que ésta no es inmutable, sino contingente y evita su dogmatización como verdad acabada e indiscutible.

Las tendencias actuales abogan por una enseñanza de las matemáticas –y de las ciencias, en general- basada en su historia y epistemología mediante un acercamiento a sus contextos sociales, históricos, filosóficos, éticos y tecnológicos (Matthews, 1992). Esto ha llevado a que se utilice más el concepto de *"emergencia"* de Foucault para *"encontrar bajo el aspecto de un carácter, o de un concepto, la proliferación de sucesos a través de los cuales (gracias a los cuales, contra los cuales) se ha formado."* (Citado por Lizcano, 1993; p. 23), que el término "*origen*", para indicar el surgimiento de una idea o concepto científico en un momento histórico determinado, lo cual enfatiza el carácter social del conocimiento científico. Esta creciente perspectiva social en el estudio de la ciencia ha originado diversos enfoques (Lizcano, 1993): el relativismo naturalista de Bloor, el marxista de Restivo, los idealistas representados por Colerus y el análisis anarquizante del último Wittgenstein.

El saber científico se difunde en la sociedad a través de la educación que, como es sabido, es un proceso social. En consecuencia, la Educación Matemática asume esta misma condición (Bishop, 1999) pues, su núcleo, las matemáticas, no son producto de una sola sociedad, cultura o época determinada, sino que son el resultado de la aportación de una amplia y variada base cultural a lo largo de su historia. Es desde esta perspectiva social y cultural del conocimiento desde donde encauzamos la investigación sobre el desarrollo de los números negativos en España en un periodo histórico determinado.

1.2 Historia e Investigación en Educación Matemática

Las matemáticas surgieron a medida que las necesidades de la vida diaria requirieron de técnicas y soluciones a situaciones cotidianas, en primer término, y a dar respuesta y organizar complejas necesidades sociales cuando el avance de la técnica alcanzó cierto nivel; de esta forma el desarrollo de las matemáticas hace parte y se integra en el progreso social (Bernal, 1979; Chapelon, 1976). La crítica de Lakatos (1987) indica que:

> *"La historia de la matemática ha sido distorsionada por filosofías falsas aún más de lo que lo ha sido la historia de la ciencia. Dicha historia todavía es considerada por muchos como una acumulación de verdades eternas; las teorías o los falsos teoremas falsos son desterrados al oscuro limbo de la prehistoria o se los archiva como lamentables errores que sólo tienen interés para los coleccionistas de curiosidades."* (pp. 67-68).

Continúa afirmando que *"los esfuerzos por salvar la autoridad de los gigantes del pasado, otorgándoles una apariencia moderna fulgurante, ha ido más allá de lo que cabría imaginarse"* (p. 68), con lo cual la historia de las matemáticas se presenta maquillada, ofreciendo un panorama armonioso y cordial de su desarrollo; esto, aunado a la presentación de los conocimientos matemáticos en la enseñanza de manera sintetizada alrededor de núcleos de contenido, ha llevado a una organización curricular que no toma en consideración el desarrollo histórico de las ideas y conceptos matemáticos, llegando a dar una imagen de ellos como algo siempre formalizado y estático. Sin embargo, el conocimiento de ese desarrollo tiene interés didáctico, ya que permite identificar el proceso de construcción de los conceptos matemáticos y reconocer e interpretar algunas de las dificultades que presentan los alumnos sobre determinados conceptos al relacionarlas con su evolución histórica.

La Educación Matemática también se ocupa de la historia de las matemáticas. Algunos autores indican que la historia de las matemáticas muestra el proceso mediante el cual los conceptos y estructuras adquieren el sentido que actualmente poseen y, por ello, tiene utilidad particularmente en la enseñanza como un organizador que aporta significado al conocimiento matemático (Rico, 1997), para mostrar su dimensión cultural y social (Bishop, 1999; Grugnetti,1991; Radford, 2001), en la contextualización de conceptos (Sierra, 2000), como elemento de interdisciplinariedad curricular (Maz, 1999), para uso didáctico en la enseñanza de las matemáticas (Radford, 1996) y para incrementar la motivación en el aprendizaje (Fauvel, 1991) entre otros aspectos.

Cada vez tiene mayor aceptación en la comunidad de educadores matemáticos la perspectiva histórica en matemáticas, ya que *"nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de* *muchos siglos, por motivaciones muy distintas"* (De Guzmán, 2001; p. 8).

Furingetti (1997) indica que la historia de las matemáticas y la Educación Matemática deben interactuar de manera que los resultados de la investigación histórica incidan en el proceso de enseñanza, facilitando al profesor argumentos, estrategias y teorías para implementar en clase (Fig. 1), de esta forma se fomenta el interés y la compresión de los alumnos hacia las matemáticas.

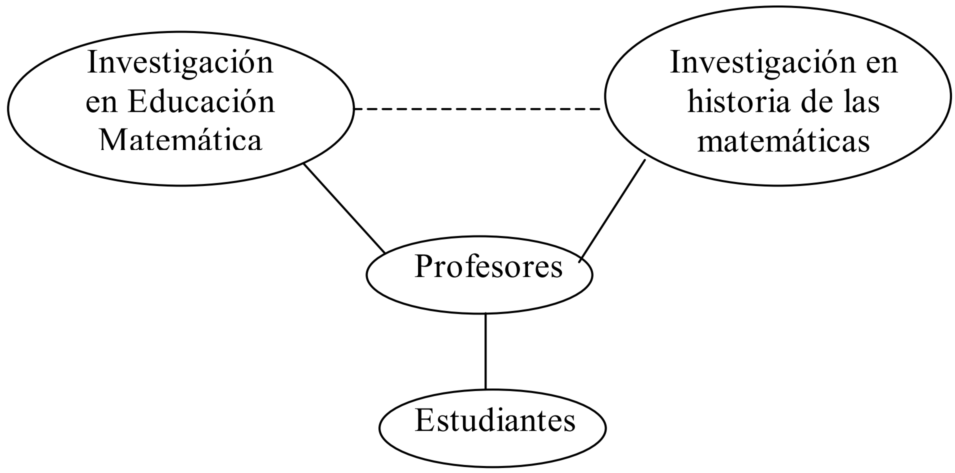


Figura 1.

A nivel internacional son frecuentes las investigaciones y publicaciones sobre la historia de las matemáticas en Educación Matemática (e.g. Arcavi, 1991; Barrow-Green, 1998; Ernest, 1998; Fauvel, 1991; Katz, 1997; Schubring, 1987, 1993, etc.) así como monográficos de revistas (*Plot* Nº 60, 1991; *For the learning of mathematics* Vol 11, Nº 2, 1991; *Mathematics in School*, 27.4, 1998), congresos (e. g. *History and epistemology in mathematics education*. First European Summer University Proceedings. Montpellier, 1993), y el reciente ICMI Study: *History in Mathematics Education* (Fauvel y Van Maanen, 2000), etc. En España, la investigación en Educación Matemática dedica un apartado a la historia de las matemáticas como lo reflejan los trabajos de Gómez (2000, 2001), González (2002), Hormigón (1991), Maz (1999, 2000), Sierra (1990, 2000), Sierra, González y López (1999) y Vea (1995,1996) entre otros; sin embargo se echa en falta la realización de congresos y eventos sobre esta temática y más aún cuando en la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) figura un grupo de investigación en historia de la Educación Matemática.

Tomando en consideración a Wussing (1998) quién sostiene que sin la historia de los conceptos, de los problemas y de disciplinas matemáticas especiales, el cuadro de desarrollo de la matemática quedaría incompleto, puesto que todo conocimiento o idea matemática se ha gestado en una situación histórico-social concreta, consideramos que esta necesidad e interés por la historia y el desarrollo de los conceptos avala en cierta medida la pertinencia de la investigación que realizaremos sobre los números negativos, más aún si creemos que *"el conocimiento de la propia historia es uno de los estímulos más fuertes* *para consolidar la propia identidad"* (Rico y Sierra, 1994; p. 100); es evidente que, en España, la Educación Matemática se empieza a consolidar tal como lo refleja el estudio de Torralbo (2001).

1.3 Revisión histórica de los números negativos

1.3.1 Antecedentes

Algunos autores afirman que las dificultades de los alumnos para comprender y operar con los números negativos tan sólo reflejan las etapas del desarrollo histórico de los números negativos (Glaeser, 1981; González Marí, 1995) de tal manera que se hace necesario conocer un poco sobre su historia. Como afirma Gómez: *"Conocer la evolución histórica de los sistemas de numeración y saber las razones que provocaron los cambios y el abandono de unos sistemas por otros, contribuye a dar sentido a los conocimientos previos o ya adquiridos"* (1993; p. 13). Al respecto es claro que el propósito fundamental de la historia es el *"estudio general del cambio a través del tiempo, esto es altamente relevante no únicamente para las matemáticas que estudiamos a diario, sino para la comunicación de las matemáticas a todos los niveles"* (Rogers, 1993; p. 107).

El concepto de número negativo, como el concepto de número en general, está vinculado con las nociones de cantidad y de magnitud, desde los comienzos en Grecia de la matemática deductiva. Aristóteles señala en *Metafísica* (edición de 1998) que:

> *"Se dice que posee cantidad lo que es divisible en partes internas, cada una de las cuales –sean dos o más de dos- son por naturaleza algo uno, y algo determinado. Una pluralidad es una cantidad si es numerable, y también lo es una magnitud si es mensurable"* (Met. 1020a, 7-11).

> *"Medida es, pues, aquello mediante lo cual se conoce la cantidad. Y la cantidad, en tanto que cantidad, se conoce o mediante lo uno o mediante el número. Ahora bien, todo número se conoce mediante lo uno, luego toda cantidad, en tanto que cantidad, se conoce mediante lo uno, y aquello mediante lo cual se conocen primeramente las cantidades es la unidad misma. Y por eso la unidad es principio del número en tanto que número"* (Met. 1052b, 20-25).

Pero quizás la aportación más interesante, desde nuestra perspectiva, es el análisis al que Aristóteles somete la noción de cantidad en relación con los opuestos "más" y "menos", en el libro *Categorías* (Aristóteles, edición de 1999):

> *"…Además la cantidad no tiene ningún contrario […] a no ser que alguien diga que lo mucho es lo contrario de lo poco o que lo grande es lo contrario de lo pequeño. Ninguna de estas cosas es, sin embargo, una cantidad sino un relativo; en efecto, no se dice de nada que es grande o pequeño en sí mismo, sino con referencia a otra cosa distinta"* (Cat. 5, 11-20).

"La contrariedad parece pertenecer sobre todo a la cantidad en el caso del lugar; en efecto, se suele considerar el arriba como contrario del abajo, queriendo decir mediante "abajo" la región próxima al centro, puesto que la distancia máxima es la que se da entre el centro y los confines del mundo. Y es probablemente este último de donde se deriva la definición de los demás contrarios, puesto que se definen como contrarias aquellas cosas del mismo género que guardan la máxima distancia entre sí. No parece que la cantidad admita el más y el menos" (Cat. 6, 12-20).

"Lo que sobre todo es peculiar de la cantidad es que se diga de ella tanto que es igual como que es desigual. Efectivamente, de cada una de las cantidades que hemos hablado se dice tanto que son iguales como que son desiguales" (Cat. 6, 26-28).

Lo interesante de estos párrafos es que dictaminan que las cantidades no tienen contrarios; la única interpretación que hace Aristóteles de los contrarios es admitirlos como nociones relativas, que en el caso de las distancias resuelve tomando un punto – "el centro"- como origen absoluto. Establece así que *la cantidad no admite el más y el menos* y que lo peculiar de la cantidad es que se diga de ella tanto que es igual como que es desigual.

Esta noción de cantidad se mantiene básicamente hasta los comienzos de la revolución científica. Si la noción de número se sostiene sobre la de cantidad, como afirma Gonzáles Marí (1995) y nosotros aceptamos, el predominio del pensamiento de Aristóteles permite entender cómo las nociones de número negativo sufrieron una incomprensión tan fuerte a lo largo de estos siglos.

A continuación presentamos una breve reseña histórica de los números negativos centrada en su desarrollo en Europa a partir del siglo XVII, a través de las obras de algunos de los más reconocidos matemáticos de la época; la consideración de los negativos a partir de esta época se debe a que es en este período cuando se empiezan a dar las circunstancias para su comprensión, definición precisa y se realizan intentos por dotarles de estructura formal, es decir, cuando se produce —en términos de Foucault— la *"emergencia"* de los negativos como números enteros. Aunque reconocemos la importancia de los trabajos de Diofanto, Brahmagupta, Baskara, Mahāvira, o el libro *Jiu Zhang Suanshu* de la cultura china, no se incluyen porque no se ubican dentro del período histórico que se investiga en el presente estudio (para una visión histórica más amplia en el tiempo ver Bell, 1999; Collette, 1985; Gheversghese, 1996; González Marí et al. 1990; Lizcano, 1993; Martzloff 1997; Smith, 1958).

1.3.2 Negativos en el siglo XVII

Para los empiristas la cantidad es una medida de los fenómenos; el conocimiento empírico exacto de las cosas particulares es relevante para el conocimiento de lo general. El saber de las cosas naturales para Galileo es verdadero porque las consecuencias que se obtienen de las leyes naturales son empíricamente comprobables, se cumplen de hecho.

En el siglo XVII son conocidos la mayoría de los datos sobre los negativos que son necesarios para establecer la estructura de los números enteros. Sin embargo las distintas nociones, fenómenos, conceptos y propiedades no están suficientemente depurados y no se presentan articulados en una estructura coherente. No es hasta el siglo XIX cuando se formaliza el concepto y queda reflejado en los libros de texto. Nos proponemos hacer explícita la emergencia del actual concepto de número negativo y, por tanto, de la constitución de la estructura de los números enteros, mediante su presencia en libros de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX, partiendo del dominio técnico alcanzado en el siglo XVII.

Históricamente la aparición de los números negativos es mucho más tardía que la de los naturales, fraccionarios e irracionales, pasando por etapas que van desde el rechazo, admisión con cautela, hasta su legitimización.

Al final del siglo XVI Simon Stevin (1548-1620) publicó *L´Arithmetique* (1585) obra que tuvo gran influencia en los autores del XVII (Smith, 1958). Recogiendo una tradición renacentista Stevin acepta los números negativos como raíces y coeficientes, utilizándolos como herramientas de cálculo. En álgebra, Stevin proporciona reglas relativas a las ecuaciones: *"interpretación tanto de las raíces negativas como las raíces positivas de la ecuación obtenida al sustituir x por (–x); adición de (–b) a a, en lugar de la sustracción de b de a y generalización de esta idea con vistas a la solución de ecuaciones"* (Collette, 1985; p. 301).

Albert Girard (1595-1632), en su *Invention nouvelle en algèbre* (1629), fue el primero que acepta la existencia de raíces negativas como solución de ecuaciones algebraicas. Así, se pregunta ¿por qué esas soluciones imposibles? Y escribe *"je résponds pour trois choses, pour la certitude de la règle genérale, et qu´il n´y a point d´autres solutions, et pour son utilité."* (citado por Dhombres et al., 1987; p. 108); además indica que lo negativo en geometría significa una regresión (Collette, 1985). Apreciamos aquí una consideración de los negativos como valores algebraicos, cuyo significado no tiene por qué estar vinculado a una magnitud física; estos números se usan como distintos de las cantidades aritméticas.

Descartes establece que todos los predicados de las cosas físicas pueden reducirse al de extensión; la extensión es la única propiedad esencial de lo corporal. Su programa de investigación está basado en la exactitud cuantitativa. La categoría de cantidad es la de sustancia corporal, por ello reemplaza la pregunta *¿qué es?* por la de *¿qué extensión tiene?* sostiene la equiparación de la matemática con la física, y fija su matemática en la doctrina de las magnitudes. Por eso, Descartes, al no encontrar cantidades negativas en física no encuentra sentido a los números negativos, que surgen dentro del álgebra, a los que llama falsos.

En su *Géométrie* (1637), Descartes (1596-1650) desarrolla la perspectiva algebraica, si bien continúa condicionado por el razonamiento aritmético cuando considera que son *sensatas y verdaderas raíces* aquéllas que son positivas, y que *las raíces negativas son falsas.* A las raíces menores que 0 Descartes las llama *raices falsas*, y ese es el sentido con que utiliza la denominación. Descartes dota de significado a las raices negativas de una ecuación mediante su geometría analítica, como valores situados a la izquierda del origen de coordenadas. De este modo, al transformar las ecuaciones mediante un cambio de origen, evita las soluciones negativas contrarias a la intuición aritmética. Sin embargo –una vez justificada su legitimidad- hace uso directo de ellas tal y como se aprecia en su enunciado de la regla de los signos *“Pueden existir tantas raíces verdaderas (esto es, positivas) como el número de cambios de los signos + y –, tantas falsas (esto es, negativas) como veces se hallen consecutivamente dos signos + o dos signos –”* (La Geometría, 1637/1981; pp. 341-342).

John Wallis (1616-1703) en su *De Álgebra Tractatus* (1693) acepta los negativos con todas sus consecuencias, e incluso da reglas para operar con potencias de exponentes negativos. Fue uno de los primeros matemáticos en reconocer la importancia de la generalización de exponentes para incluir así los números negativos, fraccionarios, positivos y, en general, los enteros (Smith, 1958).

1.3.3 Conflictos en el siglo XVIII

Durante el siglo XVIII, los matemáticos continuan reflexionando acerca de las cantidades negativas. D´Alambert (1717-1783), en su artículo *Negatif* de la *Enciclopedia* (1751) expresa sus reservas respecto a las cantidades negativas, entre otras razones porque considera que la complejidad del concepto presenta dificultades no resueltas, o no suficientemente aclaradas. Una de estas dificultades consiste en establecer que su valor es menor que cero: *“Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c’est avançer une chose qui ne se peut pas concevoir”* (*L’Enciclopedie*, p. 299). Otra de las dificultades señaladas se presenta cuando se toma como cantidad negativa una cantidad positiva, pero *en una falsa posición* respecto del cálculo, ya que se presentan como sumandos en vez de como sustraendos. De ahí concluye que no se pueden aceptar las cantidades negativas de manera aislada, pues éstas deben definirse siempre en relación con las cantidades positivas. En este sistema conjunto que reclama D’Alambert, tienen sentido las reglas de los signos para las operaciones.

También afirma el significado real de las soluciones negativas de las ecuaciones, debido a que *“ces racines reviennent positives par de légers changemens dans la solution”* (p. 300). La discusión que hace sobre los modos de interpretar ángulos negativos es interesante, ya que no es usual en los libros de álgebra que hemos analizado en este estudio.

En la discusión sobre la relación de orden D'Alambert expresa cierta confusión, propia de la época, ya que establece que el paso del positivo al negativo se hace siempre pasando por cero o por infinito, y esto lo justifica estudiando los modos en que cambia el signo de una función analítica, que se puede producir bien mediante un corte con el eje de abcisas o bien mediante el paso por una asíntota vertical de orden impar. La relación de orden entre cantidades positivas y negativas muestra para este autor una de sus limitaciones.

Kant (1724-1804) publica en 1763 un ensayo, *Las magnitudes negativas*, en donde reconoce las dificultades del concepto analizado:

> *"El concepto de las magnitudes negativas ha estado largo tiempo en uso en las matemáticas, donde ha gozado de gran prestigio. No obstante, la idea que de él se hacían la mayoría y las explicaciones que daban, son extrañas y contradictorias, si bien no se derivó de ahí incorrección alguna en su aplicación, debido a que las reglas especiales sustituyeron a la definición y aseguraron el uso."* (Kant, 1763/ 1992, p. 120).

Kant comienza por establecer dos tipos de oposición: la lógica, basada en el principio de contradicción, y la real, en la que dos predicados se oponen, el uno suprime lo que ha sido puesto por el otro pero la consecuencia es algo inteligible. El cero es la nada, que en un caso es la negación lógica de una afirmación, mientras que en el otro es resultado de una carencia o ausencia, derivada de la oposición de predicados. La confusión entre estos dos significados de cero da lugar a algunas contradiciones y justifica el rechazo a que la cantidades negativas *sean menores que nada.*

La ejemplificación que hace Kant del segundo tipo de oposición, que es el que considera correcto para las cantidades negativas, viene dada mediante ejemplos de haberes y deudas, de avances y retrocesos, de subidas y bajadas, entre otros. Podemos denominar *fenoménico* a este tipo de oposición, ya que mediante esta noción Kant va a caracterizar las magnitudes negativas, es decir, las familias de fenómenos que pueden quedar descritas por esta noción.

Después de analizar diversas interpretaciones, Kant establece el sentido matemático de magnitud negativa:

> *"Una magnitud es negativa en relación a otra en la medida en que no puede ser captada junto con ella más que mediante la oposición. Es decir, en cuanto que la una quita a la otra una cantidad igual a ella. Esta es sin duda una relación de oposición […] Por eso no se puede llamar una magnitud propia y simplemente negativa, sino que hay que decir que (+a) y (–a) son el uno la magnitud negativa del otro. […] Esta denominación conjunta designa siempre únicamente la relación de oposición entre determinadas cosas, sin lo cual dicho concepto desaparece."* (Kant, 1763, p. 174/ 1992; pp.125-

126).

Asimismo acepta la existencia autónoma de estas cantidades y señala dos principios para caracterizar aquellos fenómenos en que se presenta una oposición real que fundamenta el hablar de cantidades negativas. El primer principio establece que "*en toda oposición real ambos predicados deben ser positivos, pero de suerte que en su conexión supriman mutuamente las consecuencias en el mismo sujeto […] Hay cosas de las que una es calificada de negativa de la otra y son ambas positivas consideradas por sí mismas, y, sin embargo, unidas en un mismo sujeto, su consecuencia es cero*" (p. 128). El segundo principio es recíproco del primero y establece que *"siempre que existe un fundamento positivo y la consecuencia, sin embargo, es cero, hay una oposición real, es decir, que ese fundamento está en conexión con otro fundamento positivo, que es la negativa del primero"* (p. 130).

Con estos dos principios Kant realiza la fundamentación fenoménica de las magnitudes negativas y estudia, a partir de ellos, el sentido del orden y de las operaciones entre cantidades negativas y positivas, que expresa de manera simbólica. Esta fundamentación es de carácter relativo y permite por vez primera el estudio matemático de los enteros, superando el bloqueo derivado del planteamiento de Aristóteles, que se había mantenido durante mas de dos milenios.

El análisis fenomenológico de Kant sobre las magnitudes negativas no da lugar a un uso formal inmediato, que derive en un significado algebraico de estos números. De este modo el planteamiento matemático choca en algún caso con su postura filosófica, como cuando indica que 0-A es imposible en sentido filosófico *"porque de la nada no se puede extraer jamás algo positivo"*, y prosigue: *"A+0-A sigue siendo A-A, y, por tanto, el cero es totalmente superfluo. La idea que aquí se deriva, de que las magnitudes negativas serían menos que nada, es, pues, vana y sin sentido"* (p. 129). En general, Kant diferencia la utilidad y sentido matemático de las cantidades negativas respecto a su interpretación filosófica. Mientras consigue establecer una fundamentación fenoménica para la aritmética de los negativos –magnitudes negativas o números relativos- no ocurre igual con la fundamentación algebraica, que da por supuesta sin entrar a analizar posibles contradicciones.

Igualmente trata de introducir en este trabajo precisión matemática en nuevos fenómenos con la noción de magnitud negativa que establece, como es el caso de la noción física de impenetrabilidad, la noción de aversión de la psicología, las de error y vicio de la filosofía moral, o las de frío y calor de la ciencia natural.

Más adelante, en *Crítica de la Razón Pura*, Kant (1781/1997) establece el concepto moderno de cantidad con dos nociones fundamentales:

Primera: la noción de cantidad es un puro concepto del entendimiento, los objetos la experiencia son cuantificables y es, precisamente, la categoría de cantidad la que posibilita la forma matemática:

> *"Todos los fenómenos son cantidades continuas, en general, tanto en su intuición al ser cantidades extensivas, como también en su simple percepción, como cantidades extensivas"* (CRP, B 203-204).

Segunda: la noción de cantidad es un concepto de comparación; la magnitud es una determinación relacional. La cantidad como acto sintético se constituye en tres momentos: unidad, pluralidad y totalidad (CRP, A 80, B 106).

Sólo puede hablarse de una magnitud determinada cuando están establecidas la unidad y su multiplicidad. En este caso, la cantidad viene dada por una relación que se establece por comparación.

El tratamiento de Kant proporciona respetabilidad a las cantidades negativas que, a partir de esta época, clarifican su base conceptual y ayudan a precisar el significado matemático de los números negativos.

Euler (1707-1783), en *Vollständige Anleitung zur Álgebra* (1770), acepta las cantidades negativas y justifica su construcción de forma análoga a los positivos, sólo que, en lugar de incrementos, utiliza sustracciones sucesivas de unidades: *"But if, instead of continuing this series by successive aditions, we continued it in the opposite direction, by perpetually substracting unity we should have the following series of negative numbers: 0,-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10, and so on to infinity"* (Euler, 1840; p. 5); además los considera números enteros y define la regla de los signos; también considera su existencia como entidades independientes. Euler se propone una justificación algebraica formal de los números negativos basada en procedimientos aritméticos. Euler comprende la naturaleza abstracta de los números negativos; pero aun no dispone del aparato y de la estructura algebraica moderna para formalizarlos axiomáticamente, como actualmente se les acepta.

Pero no todos los autores tienen la lucidez y precisión de Euler ni la finura de análisis de Kant. Planteamientos contradictorios respecto a las cantidades negativas se encuentran en fecha tan avanzada como 1797, en el *Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras* publicado por Lacroix, traducido al castellano y reeditado varias veces en la primera mitad del siglo XIX, que tuvo amplia difusión e influencia entre los matemáticos españoles de esta época.

Así, en el Tomo II del *Curso* dedicado al Álgebra, y en su quinta edición en castellano de 1837, Lacroix vuelve a los planteamientos de D'Alambert, con mayor radicalidad:

> *"Recapitulando cuanto hemos expuesto tocante á las que llamamos cantidades negativas, diremos que en realidad son una expresiones absurdas*

de los resultados de sustracciones impracticables; que como tales son indicios seguros de alguna incompatibilidad que hay en la propuesta de la cuestión, de la cual hayan dimanado; por consiguiente nos dan á conocer que no es posible resolver la cuestión sin que antes se rectifique alguna de sus condiciones haciendo sustractiva alguna cantidad que antes se habia supuesto aditiva, ó al contrario; y últimamente, que se puede venir en conocimiento del modo de ejecutar esta rectificación considerando á las expresiones realmente absurdas –6; –8; –a; –b; &c., como si fuesen verdaderos símbolos de cantidades y haciendo uso de las reglas anteriormente establecidas de los signos en las operaciones que nos propongamos ejecutar con aquellas expresiones" (p. 137).

Ideas similares, que muestran la ambigüedad e, incluso, la confusión con la que se consideran las cantidades negativas, persisten bastante avanzado el siglo XIX a través de las obras reimpresas del mismo Lacroix, Bezout y Bourdon entre otros (Schubring, 1986).

1.3.4 Formalización de los enteros

Carnot (1753-1823) plantea, en *Geométrie de position* (1803), una geometría de posición, mediante la cual reinterpreta las cuestiones algebraicas relacionadas con cantidades negativas en términos de correlaciones entre líneas de sentidos contrarios. Indica que, para conseguir realmente una cantidad negativa aislada, sería necesario "atrincherarse" un concepto eficaz de cero como cantidad, para así poder quitar algo de nada; escribió que admitir la cantidad al sentido contrario del positivo traerían consigo: *"Une multitude de paradoxes, ou plutôt d´absurdités palpables, par exemple –3 serait moindre que 2, cepedant* $(-3)^2$ *serait plus grand que* $(2)^2$*; c´est-à-dire qu´entre ces deux quantités inégales 2 et –3, le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu´on peut se former de la quantité."* (Geométrie de position, 1803, citado por Dhombres et al., 1987; pp. 111-112), por tanto indica *"Je dirais que la géométrie de position est celle où la notion des quantités positives et négatives isolées, est suple par celle des quantités directes et inverses"* (Carnot, 1803; p. xxxiv, citado por Schubring, 1986, p. 14).

Laplace (1749-1827) intenta justificar la regla de los signos desde un plano formal (González Marí et al., 1990), desde la coherencia de las operaciones (Dhombres et al., 1987), esto también es pretendido por matemáticos de renombre como Cauchy y MacLaurin, entre otros.

Lacroix, en la obra mencionada, explica asÍ los motivos para la aceptación de los negativos, no sin dejar de subrayar el rechazo que suponen:

"Luego que se observó que la aplicación de las reglas de los signos á estas cantidades absurdas procedentes de cuestiones imposibles producía resultados verdaderos, fueron miradas aquellas expresiones como una cierta especie de verdaderas cantidades; se las designó con el nombre de

> *cantidades negativas; se las sometió á todas las operaciones de cálculo; y se dijo que si la soluciones negativas indicaban un error en la propuesta de la cuestión, el Álgebra las corregía" (Tomo II, p. 133).*

Finalmente, es Herman Hankel (1839-1873) quien reconoce y legitimiza los números negativos como entidades independientes con una estructura algebraica propia, en su obra *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867), otorgándoles estatus de números enteros. Hankel afirmaba que las leyes de composición no son propiedades de los números, sino que estas leyes, que se establecen por definición, crean el correspondiente campo numérico (Wussing, 1998); así que, apoyándose en la ley de composición interna y las leyes de cálculo, estableció el principio de permanencia de las leyes formales, que dice:

> *"Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der aritmética universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einader auch gleich bleiden, wenn die Zeichen authöre, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen"* (Hankel, 1867; p. 11).

Esta construcción del sistema numérico tiene un carácter genético, pues parte de la ampliación de un campo numérico a otro y, en cada ampliación, las leyes válidas en uno se trasladan también al nuevo campo ampliado; de esta forma las leyes y operaciones válidas para las cantidades positivas también lo son para las negativas.

1.3.5 Balance

Este breve recorrido histórico, siguiendo el desarrollo de los números negativos, brinda una idea general de lo difícil que ha sido su comprensión y, en palabras de Schubring (1986), constituyen un ejemplo instructivo en los procesos de desarrollo de los conceptos matemáticos. En el sentido de Bachelard, podemos apreciar un auténtico proceso de emergencia, donde las nociones aritméticas y algebraicas de negatividad confluyen hacia un concepto integrador de número entero, involucrado en una serie de avances y retrocesos, con actitudes que dan lugar a conflictos, sostenido por una revisión y reinterpretación permanente aunque poco coordinada de nociones básicas y acompañado de una depuración desigual de conceptos, que tardan en fijarse sobre una estructura.

El proceso de respuesta conjunta a las necesidades de estructura formal y al tratamiento de la diversidad de fenómenos, resolución de problemas cotidianos y aplicaciones prácticas toma casi tres siglos. Y no se concluye hasta que se produce una nueva interpretación de la noción de cantidad, que proporciona significado a las cantidades negativas.

En este estudio nos centramos en constatar este proceso de emergencia en algunos textos españoles de matemáticas publicados en los siglos XVIII y XIX.

Se reconocen las siguientes actitudes de conflicto hacia las cantidades negativas durante este periodo:

- **Rechazo:** en un colectivo de matemáticos europeos de la época reseñada hay un rechazo hacia los números negativos, más o menos matizado; no se plantea su justificación desde el punto de vista matemático; se evitan sistemáticamente las respuestas negativas, utilizando para ello artilugios algorítmicos.

- **Ambigüedad en el uso del signo menos (–):** como consecuencia del abandono del álgebra retórica y su correspondiente simbolización, surge entre los matemáticos una ambigüedad en cuanto al uso del símbolo (–), al no diferenciar con precisión entre el indicador de la sustracción y la señal del número negativo.

- **Doble significado:** cuando se pretende diferenciar el uso aritmético del algebraico, señalando la falta de sentido de los negativos como cantidades aritméticas, o su posible reinterpretación, pero aceptando estos números como resultados de operaciones algebraicas.

- **Aceptación sin reservas:** una vez interpretadas correctamente las nociones de cantidad, cantidad negativa y magnitud.

Algunas de estas actitudes quedan reflejadas en el texto de Kant antes reseñado, relativo a las dificultades del concepto y la certeza de las reglas para las operaciones con negativos. También los juicios de Lacroix: *"considerando á las expresiones realmente absurdas […] como si fuesen verdaderos símbolos de cantidades..", "fueron miradas aquellas expresiones como una cierta especie de veraderas cantidades.."*, muestran el carácter poco científico y la emotividad de las valoraciones que los matemáticos hacen sobre estos conceptos.

También se han identificado ideas que proporcionan significado a los negativos (o *negatividad*), algunas de la cuales se habían categorizado durante la investigación realizada para el trabajo de la suficiencia investigadora (Maz, 2000):

- **Cantidades adjetivadas:** hay incapacidad para demostrar el surgimiento de las cantidades negativas o justificar situaciones numéricas concretas. Se deja a la conveniencia de quien manipula, las cantidades para determinar la cualidad de positiva o negativa. Estas indican el sentido en que deben considerarse las cantidades.

- **Cantidades falsas, absurdas o ficticias:** esta consideración surge de la reflexión ¿cómo pueden tener existencia unas cantidades que son menores que cero? ¿cómo, luego de quitar todo aquello susceptible de quitarse, se pueda aún sustraer algo mas? Esta idea se debe a la consideración de cero como lo mismo que nada. Esto lleva a decir que son menores que nada. Distinguimos aquí dos posiciones históricas distintas.

- Primera, la de Descartes y los autores que desarrollan la geometría analítica, que tratan de hacer compatible las soluciones de una ecuación con su representación geométrica. Una vez que han justificado la existencia de soluciones negativas mediante un cambio de origen, interpretan los valores negativos como raíces a la izquierda de 0, a los que llaman "*falsos*" o "*menores que nada*" y con los que, a continuación, trabajan.

- Segunda, la de autores como D'Alambert, Lacroix o Carnot, que encuentran dificultades en la relación de orden y tratan de desarrollar la geometría -y las matemáticas- sin valores negativos, ya que los consideran *absurdos* y *carentes de sentido*.

- **Resultado de operaciones y cálculos aritméticos:** las cantidades negativas aparecen a partir de algoritmos para resolver problemas y, cuando surgen estas cantidades negativas, se recurre a la reinterpretación de los resultados para dar sentido a tales soluciones. Por tanto, los negativos eran un indicador de que se había hecho una interpretación inadecuada en el planteamiento del problema. No se reconoce sentido a las cantidades negativas. Lacroix se sitúa en esta posición una vez que ha dejado constancia de su rechazo filosófico.

- **Magnitudes negativas:** se presentan cuando se reconoce el carácter relacional de cantidades positivas y negativas para algunas magnitudes, a partir de un tratamiento aritmético. Se establece el sentido y existencia real de las cantidades negativas, pero siempre en relación con las cantidades positivas correspondientes.

- **Entidades de naturaleza dual (aritmética-algebraica):** hay una consideración de que las cantidades negativas surgen de sustracciones donde el minuendo es menor que el sustraendo. Cuando las operaciones se realizan en la aritmética, las cantidades que se utilizan son consideradas como opuestas, mientras que, cuando se producen bajo las leyes formales propias del álgebra, utilizan los números enteros. Este es el tratamiento que encontramos en Euler para justificar la aparición de los negativos.

- **Estatus algebraico:** hay consideraciones acerca de que el tratamiento de las cantidades negativas está asociado al álgebra. Algunos matemáticos (como hacen Laplace, Hankel y, en cierto modo, Euler) piensan que las operaciones algebraicas (entre números enteros) tienen sentido, como la suma y la resta aritméticas (entre naturales); estas circunstancias les llevan a postular que las cantidades negativas están sometidas a reglas y leyes como los otros conjuntos numéricos.

1.4 Investigación

Los números enteros, en el sistema educativo, son enseñados como ampliación del conjunto de los números naturales, y se hace uso de ellos desde el comienzo de la educación secundaria en forma casi cotidiana. Durante sus estudios los alumnos realizan incontables operaciones y cálculos con los enteros de manera frecuente y, aparentemente, sin grandes dificultades. Sin embargo, esto último no siempre es así, pues un subconjunto de los enteros, los números negativos, son un escollo que causa tropiezos, genera dudas, agobio, contradicción y conflictos a gran número de estudiantes de todos los niveles educativos, tal como revelan las investigaciones sobre el aprendizaje de los negativos (Bruno, 1997; Bruno et al., 1997; González Marí, 1995; Hayes, 1996; Hefendehl-Heberker, 1991; Iriarte et al., 1991 y Streefland, 1996, entre otras).

Algunos de estos estudios han demostrado que dichas dificultades de comprensión se remontan a la aparición misma de los números negativos y han continuado a lo largo de la historia (Bruno, 1990; Gallardo, 1994; Glaeser, 1981; González Marí, 1995; Lizcano, 1993; Maz 2000; Schubring, 1986, 1987, 1988, 1993), y dado que los números negativos constituyen un ejemplo para los procesos de desarrollo de los conceptos en matemáticas, es pertinente examinar qué dice la investigación histórica y epistemológica en Educación Matemática sobre los números enteros y, en particular, sobre los negativos.

La revisión de antecedentes y búsqueda de investigaciones previas se realizó consultando:

a) La base de datos **ERIC** hasta enero del 2002 con los descriptores, *negative numbers, mathematics epistemology*, y *mathematics history*.

b) La base de datos MathDi del Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (**ZDM**) hasta enero de 2002, mediante los descriptores: *negative numbers, negative numbers and history, negative numbers and epistemology.*

c) La base de datos de tesis doctorales españolas TESEO de 1976 a 2001 con los descriptores: *Historia* and matem*, matem* and epistem*, numer* and negativ*.*

d) La base de datos MathSciNet de la American Mathematical Society hasta enero de 2002, con los descriptores: *negative numbers, mathematics history.*

e) Consultas periódicas a revistas especializadas en Educación Matemática a través del acceso electrónico brindado por la Biblioteca General de la Universidad de Granada.

A continuación reseñamos algunas de las investigaciones halladas y consideradas de interés para este estudio.

1.4.1. El estudio de Glaeser

Sin lugar a dudas, una las investigaciones de mayor importancia es la realizada por Glaeser (1981); en ese estudio se utiliza un análisis de contenidos de textos antiguos y se examina el paso de los números negativos a los números enteros, con la intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos. Glaeser cita y analiza a algunos famosos y relevantes autores matemáticos que: *"insisten constantemente en el carácter dinámico del número positivo, unido notablemente a las actividades de medida. Pero esos mismos matemáticos prueban las dificultades de adoptar la misma actitud con respecto a los números relativos".*

Los autores son: Diofanto, Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, D´Alambert, Carnot, Laplace, Cauchy y Hankel. Glaeser sostiene que fueron seis los obstáculos que hubo que superar por parte de los matemáticos para la aceptación de los números negativos. Este es el listado que postula:

- ***Obstáculo 1.*** Ineptitud para manipular las cantidades negativas aisladas.
- ***Obstáculo 2.*** Dificultad para dar un sentido a las cantidades negativas aisladas.
- ***Obstáculo 3.*** Dificultad para unificar la recta numérica.
- ***Obstáculo 4.*** La ambigüedad de los dos ceros.
- ***Obstáculo 5.*** Estancamiento en el estadio de las operaciones concretas (en oposición al estadio de las operaciones formales).
- ***Obstáculo 6.*** Ausencia de un modelo unificado: se manifiesta cuando los matemáticos fracasan en el deseo de hacer funcionar un buen modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar el dominio multiplicativo, dentro del mismo modelo.

En su estudio, Glaeser analizó los textos de diez autores representativos, de distintas épocas, e identificó la presencia de los obstáculos epistemológicos antes enunciados. La tabla siguiente presenta un resumen de este análisis.

Tabla 1.1 Obstáculos epistemológicos identificados por Glaesser.

Autores	**Obstáculo 1** No se manipulan cantidades negativas	**Obstáculo 2** No se da sentido a cantidades negativas	**Obstáculo 3** No se unifica la recta numérica	**Obstáculo 4** La ambigüedad de los dos ceros	**Obstáculo 5** Se estancan en las operaciones concretas	**Obstáculo 6** Ausencia de un modelo unificador
Diofanto	–					
Stevin	+	–	–	–	–	–
Descartes	+	?	–	?		
McLaurin	+	+	–	–	+	+
Euler	+	+	+	?	–	–
D´Alambert	+	–	–	–	–	–
Carnot	+	–	–	–	–	–
Laplace	+	+	+	?	–	?
Cauchy	+	+	–	–	+	?
Hankel	+	+	+	+	+	+

Los signos + ó – indican cuáles de los autores han superado o no, el obstáculo y los puntos de interrogación son aquellos donde Glaeser no halló suficiente ilustración. Tomado: Glaeser 1981.

Con este trabajo, Glaeser llamó la atención nuevamente sobre los estudios epistemológicos utilizando un método histórico-crítico y, sobre todo, dio inicio a una serie de investigaciones sobre los números negativos, pues este trabajo fue punto de referencia obligado en trabajos posteriores del tema.

1.4.2. Los estudios de Schubring

Schubring (1986) realiza una investigación sobre los procesos de desarrollo de los conceptos matemáticos en la cual toma como concepto de referencia los números negativos. En este trabajo se exponen los resultados de un estudio histórico sobre los negativos donde analiza textos matemáticos franceses y alemanes, y precisa algunas categorías para estudiar los obstáculos que se encuentran en la aceptación y formalización de los números negativos; estas categorías son:

A. *Obstáculos internos a las matemáticas:* están relacionados con las dificultades para definir y distinguir adecuadamente los conceptos de cantidad, magnitud y número como conceptos fundamentales e independientes.

B. *Obstáculos epistemológicos*: tienen que ver con la transmisión del conocimiento científico e indica dos corrientes: una epistemología sustancialista u ontológica *"selon laquelle les concepts sont justifiés par une réduction à des êtres auxquels on accorde une existence comme à celle du monde physique"* (Schubring, 1986; p. 23) y una epistemología sistémica *"où l'existence est justifiée par la cohérence du champ conceptuel, les* *concepts ne devant satisfaire qu'á des conditions internes aux mathématiques"* (Schubring, 1986; p. 24); una u otra opción pueden ser responsables de algunas de las rupturas en el ámbito de los números negativos.

C. A*rquitectura de las matemáticas*: alude a la importancia que se concede en cada época a determinadas ramas de la matemática, especialmente al álgebra y la geometría; el hecho de tener ambas igual importancia favorece la noción de cantidad en detrimento de procesos de diferenciación entre número y cantidad.

De igual manera, el estudio presenta unos indicios sobre las dependencias manifiestas entre los contextos culturales de cada país y las epistemologías favorables o desfavorables a ciertos desarrollos científicos.

Schubring (1993) conecta lo histórico con lo epistemológico en otro trabajo en el cual aborda las diversas consideraciones del número negativo en distintas culturas; analiza a Bhaskara, Chuquet, Leonardo de Pisa, Cardano, Arnauld, Prestet, Reyneau, y D´Alambert; indica que:

> *"Une des dimensions mathématiques sous-jacente à l´émergence du concep du nombre négatif est la transition de la notion de quantité (et de grandeur) comme concept fondamental de toutes les mathématiques à la notion de nombre, qui est aussi fondamentale, mais restreinte à l´algèbre. Cependant, cette différenciation et spécialisation impliquent aussi une applicabilité restreinte des concepts –une perte qui n´a pas été accepté par tous, en particulier en ce qui concerne l´enseignement. Une telle acceptation dépend donc des conjonctures des valeurs sociales, culturelles et philosophiques."* (p. 443).

El estudio deja en claro la importancia de los conceptos de cantidad y número en la comprensión y aceptación del número negativo a lo largo de su desarrollo histórico; de igual forma intenta mostrar de qué manera factores externos a la propia matemática, tales como la sociedad, el pensamiento filosófico imperante y la cultura, condicionan o influyen en la aceptación o no de los números negativos por parte de los matemáticos.

1.4.3. El estudio de Lizcano

Lizcano (1993) realiza un estudio comparativo entre la matemática china y la griega, incidiendo en el desarrollo de los números, a la vez que analiza las causas de la aparición de la negatividad en la cultura china y su tardía aparición y uso en las matemáticas de occidente. Enfatiza especialmente en las componentes sociológicas y en los usos cotidianos que intervienen en la construcción de los conceptos. De acuerdo con su planteamiento, la componente filosófica de un grupo social facilita o dificulta la apropiación de nuevos conceptos; entre ellos, algunos matemáticos como el del número negativo.

A modo de ejemplo, Lizcano indica que, para la cultura china, los valores morales y filosóficos relativos al bien y al mal son vistos como opuestos entre sí, y la unión de ellos representa la armonía espiritual; de tal forma, ellos podían considerar la existencia del cero, pues venía a ser un concepto no asociado a cantidades, valores o medidas, sino a aspectos de equilibrio, en coherencia con sus convicciones filosóficas. Por el contrario, en la cultura occidental, el pensamiento matemático cuyo origen se remonta a la filosofía griega, se vio influenciado por su entorno cultural y filosófico. El ser/no-ser de Parménides, que domina el pensamiento clásico, obliga a los números a situarse en sólo uno de los lados; es claro entonces que los números, al ser considerados como multitud de unidades o, en términos de Euclídes (reedición de 1994), *"una pluralidad compuesta de unidades"* o como medida de algo, sólo pueden ser positivos (Lizcano, 1993). Por tanto, los números negativos o la *negatividad* (según Lizcano) quedan bloqueados para su construcción o conocimiento en la cultura griega y con ello en occidente hasta bien entrado el segundo milenio.

El trabajo de Lizcano es una clara muestra de que la investigación epistemológica de los números enteros (particularmente de los negativos) está estrechamente ligada a la investigación histórica y sociológica, investigación esta que precisa de la epistemología genética como una teoría amplia capaz de proporcionar un auténtico criterio alternativo sobre el fundamento del conocimiento científico, como mostraremos en el apartado 1.7.

1.4.4. El estudio de González Marí

El trabajo de González Marí (1995) en parte escudriña en el pasado las primeras señales de los números negativos, al realizar un estudio histórico y epistemológico de la matemática y de los números enteros. Realiza una serie de reflexiones sobre la historia, enseñanza y fenomenología de los números naturales y enteros, llevando a cabo para ello un estudio de los conceptos que intervienen en la construcción de los números enteros, postulando la existencia de otro conjunto de números a medio camino entre los números naturales y los números enteros; esta asignación de lugar es sólo didáctica y cognitiva. A este conjunto de números los llama números naturales relativos, en los cuales los negativos tienen una interpretación diferente a la de **Z** (esta idea se ampliará en el apartado 1.5).

González Marí pone de manifiesto la existencia de dos vías para la ampliación de los números naturales, que denomina:

- Vía cantidad-medida natural, a través de las aplicaciones concretas.

- Vía aritmética-algebraica y formal, a través de las ecuaciones, de las propiedades y de la necesidad de nuevos números.

Estas dos vías de acceso han coexistido durante mucho tiempo; la primera predominó sobre la segunda durante la mayor parte del tiempo (críticas constantes a los números absurdos, falsos, a las cantidades menores que nada, etc.), mientras que la segunda ha sido la que ha prevalecido desde la formalización de los números enteros. En el Apartado 1.5 presentamos estas ideas con mayor detalle.

Nuestra investigación es deudora del monumental estudio de González Marí, por varios motivos:

1. Por mostrar la profundidad y complejidad de los conceptos implicados en el concepto de número negativo.
2. Por evidenciar la importancia didáctica de los números negativos y las dificultades especiales de su aprendizaje.
3. Por la hipótesis de la coexistencia de los naturales relativos junto con los números enteros en las matemáticas escolares, vehiculada por los libros de texto
4. Por destacar la importancia de la noción de cantidad en la construcción de los negativos.

Estas cuestiones han sido un estímulo intelectual permanente, en las que hemos querido profundizar desde la perspectiva de un estudio histórico crítico de libros de texto de los siglos XVIII y XIX, como vemos en esta memoria.

1.4.5. El estudio de Gallardo

Gallardo (1994) llevó a cabo un estudio histórico-crítico de los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones:

- Trató de hallar explicaciones de la incidencia de los negativos en el proceso de enseñanza de la resolución de ecuaciones.

- Realizó un análisis del aspecto conceptual de los números negativos en su evolución histórica, abarcando fundamentalmente los siglos XII al XV.

- Estudió antecedentes de las culturas china, griega, hindú y árabe. El análisis lo realizó mediante la revisión de capítulos de textos antiguos de matemáticas que presentaban alguna evidencia del estatus del número negativo en los problemas y las ecuaciones.

- Examinó los distintos niveles de lenguaje, los métodos y estrategias utilizadas para la resolución de problemas algebraicos.

- Estableció que ha existido: *"una larga trayectoria histórica de "evitamiento" y "reconocimiento de los números negativos en el contexto de las ecuaciones algebraicas"*.

- Enfatizó que la problemática de los números negativos no está ubicada en un lugar particular de la historia, sino que: *"los términos sustractivos, las leyes de los signos, así como ciertos elementos necesarios para la operatividad con números negativos aparecen desde épocas remotas en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas"*.

- Expresó que: *"los conceptos opuestos de ganancia y pérdida, propiedad y deuda, futuro y pasado, venta y compra son interpretaciones adecuadas para positivos y negativos"*.

1.4.6. El estudio de Ribeiro

Ribeiro (1997) analizó las soluciones dadas tanto por Freudhental como por Dienes al problema que surge con la ley de los signos en la multiplicación de números negativos, complementadas con la teoría de equilibración de las estructuras cognitivas de Piaget y con el desarrollo histórico.

A partir de la reflexión epistemológica que realiza, reduce la discusión didáctica sobre la construcción de enteros a cuatro problemas mayores y justifica la reducción de muchos problemas epistemológicos a la solución de estos cuatro:

1. ¿Cómo tomar el más grande del más pequeño? 3–5 =...
2. ¿Cómo sustraer un negativo? – (–39) =...
3. Lo que hace el menos... ¿algo malo? ¿(–3)X...?
4. ¿Por qué el menos multiplicado por menos iguala a más? (–2) (–3) =...?

1.4.7. Otros estudios

En un trabajo nuestro previo (Maz, 2000), estudiamos la evolución en la conceptualización del número entero en España en los siglos XVIII y XIX, a través del análisis de libros de texto, encontrando cierta relación entre la noción de número y cantidad manifestada por los autores, con el tratamiento y la presentación que realizaban de las cantidades negativas en los textos.

Como balance de las investigaciones que hemos presentado, podemos constatar la influencia de la investigación epistemológica de Glaeser en la mayoría de autores que hemos indicado; el estudio de este autor ha orientado el camino a seguir en estos trabajos, los cuales se basan en la consideración de características históricas o epistemológicas. También destacamos tanto la metodología como los procedimientos que Schubring y Glaeser utilizan para llevar a cabo un análisis epistemológico mediante el análisis de textos antiguos de matemáticas.

En nuestro estudio tomamos y matizamos la orientación metodológica de estos autores. Analizamos los contenidos matemáticos de los textos de un determinado período de la historia, puntualizando el tipo de texto y autor, caracterizándolo de acuerdo a nuestros propósitos. Nos centramos prioritariamente en el estudio de la evolución histórica de los números enteros en un país, España, y en período concreto, los siglos XVIII y XIX.

Como hemos explicado, de estas investigaciones surgen explicaciones sobre la evolución de los negativos, que van desde los conocidos obstáculos de Glaeser hasta las interpretaciones sociales y culturales de Lizcano y Schubring, pasando por la conjetura de los números naturales relativos de González Marí. Los números naturales relativos (**N$_r$**), que abarcan números positivos y negativos, pero cuya estructura y relación de orden son distintas a las de **Z**, son objeto de referencia propio de este trabajo.

1.5 Números naturales relativos

El profesor González Marí, en su trabajo de tesis doctoral (González Marí, 1995), realiza una identificación en el campo aditivo de los diferentes tipos de cantidades, números y medidas discretas y las relaciones que se establecen entre ellas. Argumenta y pone de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de la totalidad de las situaciones y problemas de dicho campo aditivo. También postula y establece, con base en argumentos epistemológicos, cognitivos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que vienen a cubrir las carencias detectadas y se propone definirlos. A estos números los llama ***números naturales relativos*** (**N$_r$**). Formula cinco diferencias lógico-estructurales de tipo ordinal y algebraico entre los números naturales relativos y los números enteros, las cuales presentaremos a continuación. Finalmente, explica algunos obstáculos y dificultades detectados en el estudio didáctico de los números enteros en el sistema escolar, debidas a las diferencias establecidas

1.5.1 Las diferencias entre los enteros y los naturales relativos

Tabla 1.2 Diferencias lógico-estructurales entre número entero y número relativo.

	Estructura entera ($\mathbb{Z}$) (números enteros ordinarios con la estructura de grupo abeliano y ordenado para la suma)	**Estructura relativa ($\mathbb{N}_r$) (números naturales relativos)**
D1	a) Orden total.	a) Orden parcial (natural doble con inversión en la región negativa).
D2	b) Sin primer elemento.	b) Con primer elemento.
D3	c) Continuidad de medidas al cruzar el cero.	c) Discontinuidad de medidas, (no tiene sentido cruzar el cero).
D4	d) Cero único.	d) Cero doble (dos elementos nulos para la adición).
D5	e) Composición aditiva: adición entera.	e) Composición aditiva: adición natural y anulación-compensación.

(González Marí, 1995. p. 235). La columna D es agregada por el autor de esta investigación.

A continuación se resumen cada una de las cinco diferencias ordinales y algebraicas (explicadas más ampliamente en González Marí, 1995):

D1. Orden total-orden parcial

- Se dan atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones; son números relativos el "*ganar*", "*perder*", "*peor*" y "*mejor*".

- Hay una comparación-valoración global de las regiones; la asignación es arbitraria, en los $\mathbf{N_r}$ "*ganar es mejor que perder*" y "*subir no es mejor que bajar*".

- Se da una comparación (orden) de medidas con valores numéricos negativos (hay una inversión en el orden entre **Z** y $\mathbf{N_r}$). En $\mathbf{N_r}$ "*no es mayor el valor absoluto*".

Hay una comparación (orden) de medidas con valores numéricos de diferente signo o región; por ejemplo: se dice que deber 10 euros es más que deber 5 euros. En $\mathbf{N_r}$ hay indeterminación, independencia o ausencia de términos que den sentido a las comparaciones.

D2. Sin primer elemento-con primer elemento

- La naturaleza de los números y de las situaciones se refiere a significados concretos. En $\mathbf{N_r}$ existe un límite inferior, no tiene sentido algo inferior a cero, pues éste se utiliza como cantidad natural; por ejemplo una persona puede disminuir su deuda sólo hasta cero, pues a partir de allí no será una deuda, sino una ganancia o ahorro, por tanto no tiene sentido cruzar el cero en el sentido numérico de las deudas, pero sí, en el efecto real.

- En la representación, el número con signo debe ir acompañado explicita o implícitamente de alguna información sobre el tipo de dualidad y sobre el significado de los signos; la simbolización matemática es superflua o inexistente para $\mathbf{N_r}$. Es difícil hallar expresiones alternativas que no cambien el sentido de la frase. Hay redundancia entre adjetivación y signo en $\mathbf{N_r}$, por ejemplo, "*Juan ha ganado +3 canicas*" o "*he bajado –4 escalones*" .

D3. Continuidad de medidas-discontinuidad de medidas

- No es posible o no tiene sentido comparar de forma sencilla valores de signo contrario; sí es posible entre valores del mismo signo, por ejemplo, "*entre perder 3 y perder 4, hay una diferencia de 1*".

D4. Cero único-cero doble

- Se manifiesta en el lenguaje y en la dificultad de manipular coherentemente las situaciones que se basan en estos aspectos. "*Si* *hablamos de no ganar (ganar 0) y de no perder (perder 0), ¿podemos hablar de una temperatura positiva 0 (0 grados sobre 0) y de una temperatura negativa 0 (0 grados bajo cero)?”.*

D5. Adición entera-adición natural y anulación-compensación

- Las diferencias se deducen de la naturaleza de las definiciones que se encuentran relacionadas con el tipo de estructura ordinal (simple y homogénea en el caso de la suma de enteros y compuesta y homogénea en el caso de $\mathbf{N_r}$). Un número positivo y uno negativo con el mismo valor absoluto se anulan.

Finalmente, Gonzálerz Marí, utilizando una escala de diferencial semántico, llega a comprobar empíricamente la presencia en sujetos escolarizados de la primera de las cinco diferencias anteriores. Los sujetos que formaron parte del estudio mostraron que asignan distintos sentidos cuando interpretan y responden de manera diferente cuestiones similares sobre ambos tipos de números.

Sin embargo, González Marí no verifica sus hipótesis a partir de textos históricos y no precisa cuáles son las ideas que históricamente han sostenido los diferentes conceptos, el tratamiento de las diferencias enumeradas en distintas épocas ni los contextos con que se presentan. Este es precisamente el punto de partida de este trabajo de investigación: la falsación de las hipótesis de González Marí mediante un estudio histórico.

1.5.2 Números relativos en el ámbito escolar

Como se ha indicado, González Marí (1995) ha postulado la existencia y el interés didáctico del conjunto de los números naturales relativos y ha postulado cinco características con las que establece la diferencia entre la estructura aditiva de los números naturales relativos ($\mathbf{N}_r$) y la estructura aditiva de los números enteros (**Z**). También establece que son diferentes los contextos y situaciones (tópicos fenomenológicos) que se utilizan para ejemplificar estas dos estructuras numéricas, llegando a distinguir entre situaciones relativas y situaciones enteras. Estas situaciones relativas adquieren significado, aparecen o se ponen en *funcionamiento* mediante la presencia de una estructura dual de medidas discretas formada por dos series independientes y opuestas una a la otra. Por ejemplo, cuando se trabaja con ganancias y pérdidas.

Las conjeturas de González Marí, sobre la existencia de un conjunto numérico (números naturales relativos $\mathbf{N}_r$) entre los números naturales (**N**) y los números enteros (**Z**), le llevan a decir que el concepto que transmiten las matemáticas escolares cuando se enseñan los números negativos corresponde a los números naturales relativos ($\mathbf{N}_r$) y no de los números enteros (**Z**), al menos en el curso de su presentación e introducción. En ocasiones hay una simultaneidad de ambos conceptos, que se desplazan progresivamente de $\mathbf{N}_r$ a

Z.

También entiende el autor que se produce una confusión entre ambas estructuras numéricas que plantea serias dificultades de aprendizaje. Esta confusión se sostiene por la identidad de notación para los números naturales relativos ($\mathbf{N}_r$) y los números enteros (**Z**) y por una tradición escolar de enseñanza de los números negativos. Indica que la estructura natural relativa, aunque de utilización cotidiana y familiar, no es explícita y tampoco se encuentra formalizada. A diferencia de lo que ocurre con otros conceptos numéricos (racionales, decimales, reales) en los que parte de su complejidad es debida a la presencia simultánea de diversos sistemas de representación para el mismo concepto, en el caso de los números enteros ocurre lo contrario. Hay una notación simbólica predominante –la derivada del sistema decimal de numeración, junto con los signos más y menos- pero, al contrario que otros casos, González Marí sostiene que hay más de un concepto bajo este sistema de representación. De hecho, los números naturales relativos perviven en los manuales escolares y libros de divulgación actuales junto con los enteros, y con su misma notación; no así en los libros de matemática formal.

1.6 Libros de texto

La comunidad de educadores matemáticos reconoce la importancia que ha tenido el libro de texto en la enseñanza y, en particular, en la de nuestra área disciplinar; el informe Cockroft (1985) indicaba que *"los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula"* (p. 114) y quizás esto ha generado un interés en España por investigar los textos de matemáticas en diversos niveles educativos (eg. Ortiz, 1998, Gómez, 2001; Maz, 2000; Sanz, 1995; Sierra et al, 1999).

Selander (1995) planteó: ¿Por qué puede ser hoy interesante para investigadores y profesores indagar sobre los libros de texto? Esta crucial pregunta amerita reflexionar un poco sobre la investigación centrada en libros de texto, y más especialmente en nuestra disciplina, las matemáticas, por dos razones. En primer término, sabido es que en toda sociedad es primordial la transmisión de su cultura; y han sido los libros textos uno de los principales instrumentos que han colectivizado la cultura y contribuido a la difusión de los conocimientos (García & Beas, 1995), transmitiendo información con alguna intencionalidad. En segundo término, se tiene que en la construcción de conceptos en el conocimiento científico y particularmente en el matemático, el lenguaje asume un importante papel mediador, donde su referente es el lenguaje textual, pues es en el texto donde *"efectivamente se producen las matemáticas"* (Lizcano 1993; p. 30) con lo cual cobra importancia epistemológica el análisis de los libros de texto de matemáticas.

Este tipo de investigación en la historia de los conceptos desde una perspectiva social de las matemáticas, como la que pretendemos llevar a cabo, requiere de técnicas y modelos propios de la historiografía de las ciencias; Schubring (1989) propone realizar la investigación histórica en Educación Matemática siguiendo un patrón de análisis histórico de textos en tres dimensiones:

- Una primera dimensión consiste en analizar los cambios en varias ediciones de un mismo texto.
- La segunda dimensión consiste en encontrar cambios correspondientes en otros libros pertenecientes a la misma época.
- La tercera dimensión relata el cambio en el libro de texto, de los cambios en el contexto o entorno: por ejemplo, cambios en los documentos ministeriales, debates didácticos, evolución de los materiales, cambios epistemológicos, etc.

Como afirma Reed (1995), la utilidad de analizar el texto matemático está en que hace posible argumentar sobre algunos problemas que enfrentan a los filósofos de las matemáticas, permitiendo mostrar una dimensión de pensamiento alterna que encamine a su posible solución.

Es evidente que el análisis de textos escolares en cualquiera de los niveles educativos, arroja no sólo información sobre el contenido de los conocimientos, sino que también lo hace sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales. Estos factores favorecen la elección hecha para llevar a cabo nuestra investigación con textos, por la variedad y riqueza de información que contienen.

1.7 Investigación histórica

La investigación histórica en educación es una labor útil y actual. Fox (1980) indica que la investigación histórica está caracterizada por tratar de aclarar problemas de interés actual mediante un estudio intensivo de materiales ya existentes. Manifiesta que el aspecto más frecuente e importante de este tipo de investigación es la reinterpretación de los acontecimientos a la luz de las nuevas técnicas e informaciones; pues, el investigador debe tener: *"la flexibilidad suficiente para ir en contra de los planteamientos vigentes y ser capaz de descubrir una nueva relación, explicación o intuición, si existe en los datos"* (p. 459).

Para Cohen y Manion (1990) es la ubicación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados. Podemos afirmar que la investigación histórica es una actividad científica, pues adscribe el rigor y los principios de la investigación científica. El pasado *"no sólo incluye hechos y acontecimientos, sino también estructuras y procesos, sincronías y diacronías de distinta naturaleza y espesor"* (Viñao, 1997, p. 27).

También se ha definido la investigación histórica como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan a preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas, tendencias, y, en nuestro caso, aspectos relacionados con educación (Gall et al, 1996). Asimismo, expresan que la investigación histórica en educación difiere de otros tipos de investigación educativa en que, en aquélla, el historiador descubre información a través de la búsqueda de fuentes históricas tales como textos, diarios, documentos oficiales, y reliquias. En la investigación histórica, la evidencia o las fuentes están disponibles antes de que el historiador formule una tesis, seleccione un tópico y designe un plan de investigación. Los investigadores utilizan los métodos históricos para comprender el presente a la luz de los eventos del pasado.

La investigación histórica es pertinente para los objetivos de este trabajo, ya que, como indican Van Dalen y Meyer (1981, p. 200), en este tipo de investigaciones *"se reúnen, examinan, seleccionan, verifican y clasifican los hechos de acuerdo con normas especificas y se esfuerzan por interpretarlos de manera adecuada y presentarlos en exposición capaces de resistir el examen crítico"* asimismo enfatizan que la investigación histórica moderna *"representa una búsqueda crítica de la verdad"* (p. 200).

Se considera que, en el tratamiento histórico de un tópico, el investigador realiza ciertas actividades comunes a todo trabajo de investigación; sin embargo, la naturaleza particular de su disciplina le exige el empleo de técnicas específicas (Van Dalen & Meyer, 1981).

La investigación sobre aspectos epistemológicos e históricos en Educación Matemática ha tomado gran auge en los últimos años tal como lo reflejan las investigaciones ya reseñadas. Se pretende continuar nuestro estudio histórico-epistemológico, tratando de profundizar tanto en los análisis como en la contextualización científico-académica de la época, teniendo en cuenta:

a) Aportaciones y la opinión de los investigadores (Fox, 1980; Van Dalen & Meyer, 1981; Cohen & Manion, 1990) sobre la importancia de la investigación histórica y más aún en educación (Tiana, 1988; Gall et al, 1996) y en particular en Educación Matemática (Fernández Cano, 1995; Brito & Cardoso, 1997; Filloy, 1999; Sierra, 2000; Deniss 2000).

b) La investigación realizada sobre el tratamiento dado a los números negativos por los autores de textos en España durante los siglos XVIII y XIX (Maz, 2000).

Serán analizados libros de texto, pues son un excelente material para trabajar temas históricos porque, entre otras causas permiten establecer no sólo las intenciones del contenido, sino las relaciones del autor con el medio académico, cultural y su propio conocimiento matemático a través de la variación de los conceptos en textos de diversos autores en una misma época o las variaciones en la obra de un mismo autor a lo largo de diferentes impresiones, como plantea Schubring (1987).

Las investigaciones históricas y epistemológicas en educación matemática, utilizando como sujetos de estudio textos de matemáticas, no son pocas. Los investigadores van adaptando los nuevos métodos de análisis para tales propósitos (e.g. Glaeser, 1981; Schubring, 1986, 1987, 1988; Swetz 1993; Sierra et al, 1999; Maz 2000; Gómez, 2001). Se debe tener en cuenta que no se pretende analizar los textos con las ideas, estructuras y definiciones actuales de número entero, sino que se hará teniendo en cuenta el momento histórico y las ideas imperantes en la época.

1.8 La investigación histórico-epistemológica

Una de las formas de comprender el conocimiento del presente es efectuando revisiones y análisis del pasado (Blanché, 1973), pues los textos históricos son un buen recurso para el análisis de las nociones y principios que dieron origen a determinados conocimientos científicos y, en particular, a los conocimientos matemáticos. Sin embargo, la sola descripción de hechos y acontecimientos, que envolvieron al desarrollo de un determinado conocimiento, no aportaría resultados de valor epistemológico para dicho saber; al respecto, Piaget (1979) afirma que *"el simple relato de descubrimientos no interesa directamente a la epistemología"* (p. 97).

Si el interés es epistemológico, debemos tener claro qué es la epistemología; pues bien, consideramos la epistemología como la disciplina que estudia la ciencia, entendida ésta en su doble aspecto de actividad (la investigación, la docencia, la aplicación práctica) y de producto de esa actividad (el conocimiento científico); para Piaget (1979), la epistemología es *"el estudio de la constitución de los conocimientos válidos"* (p.15); de tal manera, las orientaciones epistemológicas son distintas formas de encarar el estudio de la ciencia; la reflexión epistemológica sobre un determinado conocimiento surge *"porque ciertas crisis o conflictos se producen como consecuencia de la marcha interna de las construcciones deductivas o de la interpretación de los datos experimentales"* (Piaget, 1979; p. 15).

Se debe entonces recurrir a técnicas que permitan una reconstrucción del conocimiento en términos de su evolución; por tanto, se hace necesario *"someter a una crítica retroactiva los conceptos, métodos o principios utilizados hasta allí, a fin de determinar su valor epistemológico"* (Piaget, 1979; p. 64). La epistemología utiliza diversos métodos para reflexionar sobre los procesos de construcción y validación del conocimiento científico. Piaget (1979, pp. 63-64) agrupa estos métodos en tres grandes categorías: métodos de análisis directo, de análisis formalizante y genéticos. Los métodos de análisis directo son aquellos que *"en* *presencia de un nuevo cuerpo de doctrinas científicas, intentan por simple análisis reflexivo hacer surgir las condiciones de conocimiento que están en juego en tales acontecimientos”*, los análisis formalizantes difieren de los directos en que agregan al *“conocimiento un examen de las condiciones de formalización”*; finalmente, la categoría de métodos genéticos, *“que tratan de comprender los procesos del conocimiento científico en función de su desarrollo o de su formación”*.

El propósito de esta investigación —se ampliará esto en el apartado 1.10— es realizar un estudio histórico y epistemológico del número negativo, indagando en su evolución y consolidación como objeto matemático formal en los libros de texto publicados en España durante un periodo determinado, de tal forma que, si consideramos lo expresado por Piaget (1979) acerca de que en los métodos de análisis genético se toman en consideración los procesos del conocimiento en términos de los distintos estados de desarrollo, no cabe duda que la metodología a emplear en nuestro estudio no puede ser sino que ésta.

Ahora debemos conocer cuáles son los métodos que se agrupan bajo esta denominación de genéticos para optar por uno de ellos como herramienta en esta investigación. El mismo Piaget (1979; p. 64) indica que los métodos de la epistemología agrupados en los métodos genéticos se pueden considerar bajo dos grandes variedades de ellos: la epistemología genética y el método histórico-crítico.

La epistemología genética, la que por medio de *“una combinación de análisis psicogenéticos y de formalización de las estructuras intenta alcanzar las condiciones psicológicas de la formación de los conocimientos elementales y coordinar estos resultados con el estudio de las condiciones de formalización”* (p. 64). Este tipo de metodología no la utilizaremos en nuestra investigación.

El método histórico-crítico, que *“extiende felizmente los métodos de análisis directo, remontándose desde el examen de un cuerpo de doctrinas actuales hasta el estudio de su formación; pero que, al acentuar la importancia del desarrollo histórico, descuida con frecuencia las consideraciones de formalización”* (p. 64).

La utilización en nuestro estudio del análisis histórico-crítico permitirá mostrar las ideas y significados utilizados en su momento por los autores de textos en relación con el contexto y las ideas de la época o de épocas anteriores; por otra parte, será provechoso para la investigación el hecho que el método histórico-crítico utiliza la historia, teniendo en cuenta las partes respectivas de la deducción y de la experiencia en el momento de la constitución de un principio, la naturaleza particular de las deducciones y en todos los problemas de la invención o del descubrimiento, permitiendo *“vincular el presente con un pasado colmado de riquezas a menudo olvidadas, que lo esclarece y en parte explica gracias al examen de los estadios sucesivos del desarrollo de un pensamiento colectivo”* (Piaget, 1975, p. 34).

Pretendemos por tanto establecer qué ideas, conceptos y corrientes de pensamiento influyeron en los autores al expresar la noción de cantidad negativa en los textos, y qué significado preciso asignaban a tales ideas y conceptos. De este modo será posible detectar los cambios en su presentación y admisión en España a lo largo de estos dos siglos que se estudian. También tendremos en cuenta consideraciones de formalización, que estudiaremos mediante el análisis de las diferencias establecidas por González Marí (1995) entre naturales relativos y enteros en los autores seleccionados.

La técnica histórico-crítica aplicada a los textos en estudio junto con su análisis formal contribuyen a establecer el significado de los conceptos utilizados en cada momento.

Por tanto, una investigación histórico-epistemológica permite evidenciar la evolución de un concepto así como las dificultades asociadas a él y observar la manera en que fueron superadas, que es precisamente lo que nos interesa en este estudio sobre el desarrollo del concepto de número negativo en los libros de texto publicados en España.

Las técnicas histórico-críticas son de uso frecuente en el análisis conceptual. Rico (2001) entiende que el análisis conceptual es un método no empírico que, a partir de descripciones, definiciones o listas extensivas, entre otros contenidos documentales, examina en detalle la diversidad de significados y las posibles conexiones entre los términos de cada campo conceptual; además de que *"contextualiza la definición dentro del área en que se inserta"* (p. 186), posibilita eliminar aquellas posibles inconsistencias debidas a una imprecisión en la utilización de los significados de los conceptos. Los resultados de un análisis histórico-crítico tienen por finalidad proporcionar precisión conceptual.

Turegano (1994) opina que el auge, en los últimos años, de acudir a los métodos genéticos, tiene su origen en el deseo de disminuir el excesivo carácter lógico deductivo en las matemáticas; cita a Lakatos como un ejemplo de aplicación del análisis epistemológico no a las matemáticas formalizadas, sino a las matemáticas informales. De otra parte, Filloy (1999, p. 154) destaca el interés didáctico del método de investigación histórico-crítico expresando que:

> *"El nuevo acercamiento consiste en realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el método histórico-crítico, y después poner a prueba los hallazgos teóricos en los Sistemas Educativos, para después de esta experimentación, volver, a base de resultados prácticos, a tener una nueva visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos".*

De tal forma la historia y la epistemología se encuentran en la historia de las ideas y en particular cuando se aplican los métodos histórico-críticos, los cuales, en Educación Matemática, vienen siendo utilizados para identificar y describir problemas concernientes a la emergencia de los conflictos por la evolución de los conceptos, al choque de éstos con los conocimientos ya establecidos y aceptados en situaciones derivadas de la implantación de nuevos currículos, entre otros aspectos. Todo lo expuesto pone de manifiesto la pertinencia del método histórico crítico para efectuar nuestra investigación sobre el número negativo.

1.9 Análisis de contenido

El análisis de contenido hace parte de los métodos modernos de las técnicas documentales y se desarrolló especialmente en Norteamérica dentro de las *communications research* de la Psicología Social (Visauta, 1989). Se centra en las ideas que se expresan y reflejan en un texto dado; por ello se utiliza en muchos casos como complemento a la investigación histórica. Cohen y Manion (1989, p. 93) indican que: *"la técnica del análisis de contenido puede aplicarse a aspectos seleccionados de la investigación histórica en educación"* y, más particularmente, agregan luego: *"Otro empleo que viene rápidamente a la imaginación sería un examen del contenido de los libros de texto en diferentes puntos de la historia"*.

De las varias acepciones que recoge Cea (1996, p. 34), tomamos la que se acentúa en el *"análisis reflexivo de documentos"* dirigido *"no tanto a la descripción, como a la comprensión de los significados latentes, y a la verificación en el análisis cualitativo"*.

Visauta (1989) resalta el hecho de ser un método sistemático y objetivo en el sentido de que puede ser reproducido por otros investigadores, y además, en él pueden cifrarse de manera numérica los resultados; es decir, de manera cuantitativa.

Bardin (1986; p. 32) define el análisis de contenido como:

> *"un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones, tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/ recepción (variables inferidas) de estos mensajes"*.

El hecho de realizar inferencias en este método de análisis, obliga al investigador a poseer un bagaje de conocimientos superior a las fuentes que son objeto de estudio, dado que en el "*nivel latente*" del análisis de contenido se intenta obtener una base para conocer algo sobre las intenciones del autor del texto que se analiza (Fox, 1981).

De forma general, el análisis de contenido es *"una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto"* (Krippendorff, 1990; p.28); este aspecto de inferencias en el contexto es adecuado para la investigación que realizaremos sobre los números negativos en un momento especifico de tiempo y en un lugar.

Cuando se trabaja en Educación Matemática y se estudian libros de texto, hay que considerar que los textos que se estudian y analizan son documentos didácticos y que, por tanto, el análisis de contenido ha de realizarse sobre la naturaleza didáctica de los documentos. Desde esta perspectiva, subrayamos que los textos no son documentos exclusivamente formales, sino que necesitan transmitir una pluralidad de significados para la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001). Es por ello por lo que el análisis de contenido debe contemplar esos diversos significados para ponerlo de manifiesto en toda su riqueza. La presentación del análisis de contenido de un libro de texto debe estar acompañada por los focos en que dicho análisis se centra y los criterios que van a utilizarse.

El análisis de contenido es uno de los métodos empleados frecuentemente para la investigación en Educación Matemática (Véase Fernández Cano y Rico, 1992). En diversas investigaciones se afirma que se ha realizado un análisis de contenido; sin embargo no se indica en qué ha consistido ese análisis ni se explicita cuáles son los aspectos sobre los que se centró el análisis ni cuáles son las categorías que se han considerado para ello. La mayoría de estas investigaciones sólo toman en consideración significados formales del concepto mediante un simple recuento de la unidad básica de análisis (palabra, en la mayoría de los casos) y su posterior agrupamiento en categorías.

El Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), utiliza con regularidad y de manera sistemática el análisis de contenido cuando estudia los tópicos de la matemática escolar y trabaja sobre documentos didácticos (Gómez, 2002; p. 263): *"En el análisis de contenido se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados (…) de las matemáticas escolares y tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico)".* El análisis de contenido de un texto escolar de matemáticas se diversifica, pues, en tres tipos de análisis, según los significados antes mencionados: el que estudia la propia estructura matemática considerada; en este caso un análisis de la estructura matemática es determinante; el que considera los diversos sistemas de representación utilizados para expresar dichos conceptos; y el que realiza el análisis fenomenológico de los conceptos estudiados, junto con los procesos de modelización en que tales conceptos se implican. Esta es la perspectiva que nosotros adoptamos para el análisis de contenido con el que efectuaremos esta investigación.

En el trabajo mencionado, Gómez (2002) detalla las referencias consideradas para el análisis de contenido:

Estructura conceptual: Se considera como tal todas aquellas descripciones de los conceptos y las interrelaciones entre ellos, así como la estructura matemática que les justifican. Sobresalens técnicas para el análisis de esta estructura conceptual: la representación en mapas conceptuales y la organización en sistemas de representación.

Sistemas de representación: Los sistemas de representación manifiestan diversas facetas de un mismo concepto matemático; esta descripción en sistemas de representación permite identificar y delimitar las subestructuras matemáticas que conforman la estructura matemática presentada.

Análisis fenomenológico: Algunas de las estructuras matemáticas pueden modelizar fenómenos sociales, naturales y matemáticos, de tal forma que, en el análisis fenomenológico, se identifican las características del fenómeno que son relevantes y se relacionan con elementos y propiedades de la estructura matemática en una o más de sus representaciones.

Otros autores, como Sierra et al. (1999), utilizan el análisis de contenido para el estudio de textos de matemáticas, considerando la secuenciación de contenidos, las definiciones según el tipo y papel que juegan en el texto, los ejemplos y ejercicios, las representaciones gráficas y simbólicas, finalmente atienden a los aspectos materiales que determinan la presentación del concepto.

A continuación presentamos una tabla que, de acuerdo a Fernández Cano (2003), pretende brindar una distinción metodológica entre el análisis conceptual y el análisis de contenido.

Tabla 1.3 Distinción metodológica entre análisis conceptual y de contenido

	Análisis conceptual	**Análisis de contenido**
Unidad central de indagación.	Término, concepto (i.e. currículo, número negativo.	Un texto, discurso o comunicación.
Sentido.	Externo al concepto.	Interno al texto (dentro del texto).
Unidades básicas de análisis.	Acepciones/definiciones del término.	Unidades menores de discurso (i.e. palabra-termino, verbo-adjetivo, palabra-frase.)
Nivel de análisis.	Único.	Continuo: Manifiesto ----------- latente
Técnicas propias.	Método del ejemplo/contraejemplo. Lenguaje evocativo y uso de analogías. Reflexión de estructuración e interpretación de la red noseológica (significados del concepto).	Delimitación de la unidad básica. Establecimiento de categorías. Interrelación de categorías. Adscripción de unidades a categorías. Interpretación de categorías: nivel manifiesto y latente.
Disciplina en que opera.	Filosofía, Epistemología, Historia de la ciencia.	Lingüística, Psicología, Sociología, Didáctica, etc.
Fin primordial.	Fundamentar y clarificar términos y conceptos.	Estudiar textos.

Secuenciación.	Longitudinal: relevancia del devenir histórico.	Transversal: relevancia de la ampliación del discurso.
Función auxiliar al método científico general.	Definir términos. Clasificación de teorías. Validación de constructos.	Técnica de recogida de datos. Técnica de análisis de datos.

1.10 Propósito de la investigación

El propósito inicial de este trabajo es el de realizar un estudio del concepto de número negativo en los libros de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX y establecer la presencia y difusión de las ideas matemáticas en que se sustenta, su elaboración y transmisión en la España de la época. Se pretende una aproximación y observación de la vida científica española de estos siglos al estudiar la evolución de estos conceptos en los documentos escritos. Para realizar este trabajo hemos optado por llevar a cabo un estudio histórico epistemológico del número negativo en los siglos XVIII y XIX, por tratarse de un concepto relevante en este período de transición anterior a la formalización de los números enteros. Pretendemos así identificar la presencia de las ideas científicas y educativas predominantes en este período en el tratamiento y desarrollo de este concepto y, mediante un estudio de textos publicados en España en tal época, detectar la evolución y los conflictos subyacentes a la aceptación de los negativos como objeto matemático y como objeto de enseñanza.

Para llevar a cabo este trabajo realizaremos una revisión y selección de autores y textos de matemáticas de la época, en los que el concepto de número negativo tiene una presencia destacada. Cada uno de los autores lo ubicaremos en su época y lo relacionaremos con las escuelas e instituciones en las que se construye y difunde el conocimiento científico. Nos proponemos también poner de manifiesto la dimensión social de la construcción del conocimiento científico y el carácter contingente, activo y cambiante de las nociones matemáticas. De este modo, esperamos proporcionar una cierta visión del desarrollo matemático en la España de estos dos siglos y los esfuerzos realizados por algunas personas e instituciones por alcanzar los niveles europeos en este ámbito, mediante la difusión de nuevas ideas filosóficas educativas (Fernández Sanz, 2002). Esta revisión brinda un acercamiento al tratamiento dado a los números negativos, pretendiendo categorizar las formas en qué los escritores de textos españoles abordaron dichos números en esos años de irrupción de los números negativos en el ámbito matemático europeo, ubicando a cada autor y su obra en las ideas científicas y filosóficas de la época.

En cada uno de los textos seleccionados haremos un análisis conceptual exhaustivo de la noción de número negativo, que trataremos de conectar y fundamentar en las nociones filosóficas y científicas de la época y ubicarlas en la corriente de ideas matemáticas del momento. Para llevar a cabo este análisis crítico se tienen en cuenta las nociones básicas de número, cantidad y medida utilizadas. El análisis histórico-crítico se completará con el análisis de contenido que abarca la estructura matemática, los fenómenos elegidos para sustentar el concepto, los sistemas de representación utilizados y los problemas que se tratan a partir de la modelización de cuestiones con los nuevos conceptos elaborados. Nuestro estudio utilizará este análisis como herramienta destacada, dada las bondades que como técnica ofrece y que hemos explicado en el apartado anterior.

El papel de las instituciones educativas, la actividad docente desempeñada por los autores estudiados y las funciones didácticas reconocibles en los textos analizados son otro de los aspectos de interés en este estudio, sobre el cual nos proponemos aportar conocimiento fundado.

Un segundo objetivo que se pretende en esta investigación consiste en contrastar la conjetura de González Marí (1995) en estos manuales. En nuestro trabajo de investigación (Maz, 2000), hecho en el programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, bienio 1998-2000, ya realizamos una primera aproximación a las hipótesis de González Marí que aportaron evidencias suficientes sobre el interés y pertinencia del estudio que ahora nos proponemos continuar.

Utilizando el análisis histórico-crítico pretendemos contrastar la hipótesis de González Mari (1995) con la evidencia histórica presente en los libros de texto de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX.

1.11 Interrogantes que se plantean

La argumentación anteriormente expuesta conduce a plantear los siguientes interrogantes:

- ¿Qué tratamiento recibían en España los números negativos en los siglos XVIII y XIX? ¿Cómo se lleva a cabo su construcción?

- ¿Se puede realizar una caracterización conceptual de las nociones de número, cantidad y cantidad negativa en los siglos XVIII y XIX en España a partir de los textos de matemáticas seleccionados?

- ¿Cuáles eran los contextos con los que se presentan los números negativos en los textos en este período? ¿Qué fenómenos justifican la introducción de los números negativos?

- ¿Cuál era la estructura algebraica en la que los autores sostienen los números negativos en los textos de los siglos XVIII y XIX?

- ¿Existe uniformidad en la estructura algebraica que los autores de texto utilizan en los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX?

- ¿Cómo se representan los números negativos en los libros seleccionados?
- ¿Qué problemas se abordan con los números negativos en los libros estudiados? ¿Qué nociones se modelizan con este concepto?
- ¿Qué funciones didácticas se hacen perceptibles desde el análisis realizado de libros de los siglos XVIII y XIX?
- La contextualización más amplia y precisa del entorno social, científico y académico de este periodo histórico en España ¿permite una mejor caracterización de los textos estudiados?

A partir de estas preguntas, plantearemos nuestras hipótesis y objetivos, los cuales se enunciarán en el capitulo 3.

1.12 Campo de investigación

Esta investigación se sitúa en el área de Didáctica de la Matemática, en la línea que estudia el Pensamiento Numérico y Algebraico. Esta línea de investigación considera que el lenguaje facilita los procesos de pensamiento así como que el lenguaje simbólico de las matemáticas ayuda y facilita avanzar en el desarrollo del pensamiento numérico (Reid, 1998). En Andalucía, el Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico (FQM 193),* del Plan Andaluz de Investigación, lo integran investigadores pertenecientes a las universidades de Granada, Málaga, Almería y Córdoba; dentro de sus actividades investigadoras el grupo desarrolla:

> *"una línea de indagación y estudio en Didáctica de la Matemática sobre los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y utilización de conceptos numéricos, algebraicos y analíticos, tanto en el medio escolar como en el medio social. El campo general en que se desenvuelve la investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas, algebraicas y del análisis"* (Rico et al, 1998, p. 282).

Este grupo se sustenta de manera conceptual en siete grandes ámbitos (PNA, 2002):

> *1º Entiende la construcción del conocimiento matemático como un fenómeno social y cultural, cuya importancia para la sociedad tecnológica actual es determinante; tiene en cuenta que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; considera críticamente el conocimiento matemático y las acciones comunicativas mediante las que se transmite.*
>
> *2º Su campo de reflexión comienza en la aritmética escolar y las nociones básicas de número, avanza por los sistemas numéricos superiores (enteros,*

racionales y decimales) y continúa con el estudio sistemático de las relaciones y estructuras numéricas, la teoría de números, el inicio del álgebra, los procesos infinitos que dan lugar al sistema de los números reales y los conceptos básicos del análisis. Denominamos conocimiento numérico a este modo de priorizar y caracterizar determinadas ramas de la matemática mediante el uso de las herramientas conceptuales que llamamos estructuras numéricas.

3º Concebimos la investigación como indagación sistemática con fines epistémicos y entendemos que la investigación en educación matemática debe sostenerse en la reflexión permanente sobre los problemas de la práctica escolar.

4º Consideramos el carácter sistémico de cualquier plan de formación en matemáticas dentro del sistema educativo, por ello la valoración del currículo como un plan operativo con diferentes niveles de reflexión e implementación es uno de los rasgos definitorios de nuestra línea de trabajo. La preocupación por los problemas que aparecen al considerar la evaluación escolar en matemáticas merecen una especial consideración.

5º El estudio de las competencias cognitivas que sostienen un dominio significativo de las estructuras numéricas, de su desarrollo y mejora, junto con el diagnóstico y tratamiento de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares sobre estas estructuras, proporcionan una fundamentación psicológica a nuestras investigaciones.

6º La tensión entre las familias de problemas que dan lugar al conocimiento matemático, los sistemas de signos utilizados para representar conceptos y procedimientos, y los procesos de modelización con los cuales es posible abordar simbólicamente tales problemas, constituye un núcleo de reflexión, trabajo y estudio para este grupo de investigación.

7º La formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas y el aumento de la autonomía intelectual y profesional del educador matemático se consideran objetivos prioritarios para este grupo de investigación.

Los tópicos que ha trabajado el grupo de Investigación Pensamiento Numérico han sido:

- La cognición numérica.
- Las bases filosóficas y epistemológicas del concepto de número.
- El desarrollo histórico de los sistemas numéricos.
- La aritmética escolar.
- Los sistemas numéricos superiores.
- Las relaciones numéricas y las secuencias de números.
- Los procesos infinitos.
- La cienciometría aplicada a la investigación en Educación Matemática.

Este trabajo se integra en particular en el aspecto que atiende a la naturaleza, características y evolución de los conceptos, siguiendo dos de los tópicos trabajados por el grupo: bases filosóficas y epistemológicas del concepto de número y desarrollo histórico de los sistemas numéricos; abarca estos tres campos:

- **Epistemología y Didáctica de la Matemática:** la epistemología trata de los fundamentos y los métodos del conocimiento científico; nuestro interés en este estudio está relacionado con la naturaleza y evolución de los conceptos de número, número natural y número entero. Pretendemos por tanto describir y analizar la evolución de tales conceptos para determinar qué aspectos influyeron en la conceptualización del número entero en la época así como buscar evidencias, si las hay, de los números naturales relativos en los libros de texto en tal período histórico.

- ***Desarrollo de conceptos en Matemáticas***: las matemáticas son una ciencia dinámica y como tal evoluciona constantemente; como consecuencia de esto, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas han ido cambiando a lo largo de la historia, por tal razón interesa de manera particular el desarrollo y evolución de la estructura numérica de los números enteros, puesto que tales cambios se verán reflejados en los manuales de la época. Asimismo trataremos de determinar si la estructura aditiva que González Marí atribuye a los números naturales relativos ($\mathbf{N_r}$) está presente en la evolución del concepto de número entero.

- ***Historia de las Matemáticas*:** como se ha indicado en el Apartado 1.2, la historia de las matemáticas ha cobrado gran importancia tanto en investigación como en la enseñanza de las matemáticas, de tal forma que, profundizar en la reconstrucción de la evolución y difusión de los números negativos en una sociedad y período histórico determinado, reconociendo las ideas filosóficas y culturales que influyeron en ello, e identificando las situaciones asociadas a los números enteros en tales contextos, aportará elementos que servirán para comparar y comprender los momentos históricos en el desarrollo de otros conceptos matemáticos.

CAPÍTULO 2: Contexto Histórico, Científico y Educativo en los Siglos XVIII Y XIX

PRESENTACIÓN

Pretendemos en este trabajo poner de manifiesto el tratamiento que recibe el concepto de número negativo durante los siglos XVIII y XIX en los libros de texto españoles de matemáticas de enseñanza superior y, con ello, abordar una serie de cuestiones, esencialmente didácticas, derivadas de la enseñanza de este concepto en proceso de construcción formal durante la época. No es objeto de esta investigación hacer una revisión e interpretación de las principales ideas científicas y educativas que se presentan en la sociedad española de estos siglos, ni siquiera por lo que se refiere al ámbito más restringido de las matemáticas.

El concepto de número negativo —concepto de número entero, decimos en la actualidad— se basaba en la teoría de ecuaciones elementales, sus técnicas de solución y la aceptación formal de las soluciones negativas, que eran aspectos ampliamente asumidos en el mundo matemático del siglo XVIII (Montucla, Tomo II). En el apartado 1.3 de esta memoria hemos visto que, en la época en cuyo estudio nos centramos, aún había controversias como la de D'Alambert en *L'Encyclopedie,* o nociones deficientemente establecidas, como la de *magnitudes negativas*, revisada por Kant. No obstante, el concepto de número negativo no necesitaba de nuevos y sofisticados fundamentos o de desarrollos técnicos complejos, como podía ser el caso del estudio analítico de las funciones, las nociones de límite o continuidad para el cálculo y el análisis matemático, para su formalización.

La conceptualización precisa de los números negativos necesitaba de un conocimiento matemático sólido y un pensamiento algebraico profundo, de una finura conceptual al alcance de especialistas con una formación matemática convencional elaborada. Era necesario detectar las ideas fundamentales, diferenciar las nociones de número y de cantidad, destacar los aspectos estructurales por medio de las relaciones, operaciones y propiedades de los números enteros, priorizar sus aspectos formales, y caracterizar el campo de fenómenos y problemas en los que se aplica este concepto. Se trata de un concepto que requiere esencialmente de una visión abstracta y formal de la noción de número, que incluye las propiedades formales de las operaciones y del orden. Este concepto estaba prácticamente elaborado en la época de la que nos ocupamos, pero pendiente de su formalización definitiva. En la obra de Euler *Elementos de Álgebra*, publicada por primera vez en 1770, encontramos las condiciones formales de los enteros expresadas con el lenguaje de la época, pero no es hasta 1867 cuando Hankel presenta explícitamente los enunciados que definen la estructura este conjunto numérico.

Mientras, durante los siglos XVIII y XIX principalmente, los enteros tienen una presencia en los libros de texto de matemáticas azarosa y conflictiva, debido a una tensión en su caracterización insuficiente o deficiente o bien, como postula González Marí, debido a la confusión permanente por su identificación con los números enteros relativos. Por eso el estudio de los números negativos y de su tratamiento muestra que los problemas de la transmisión del conocimiento matemático no concluyen cuando los conceptos han sido adecuadamente formalizados por los grandes expertos, sino que, más bien parece que es en ese momento cuando comienza una fase esencial de su tratamiento didáctico consistente en llevar a cabo un trabajo sistemático de comunicación para hacer asequibles las nuevas nociones al mayor número posible de ciudadanos. Este proceso, de un alto nivel de complejidad debido a las distintas nociones y conceptos que están en su base y a sus diversas y posibles fundamentaciones, no es secuencial ni, necesariamente, posterior a la formalización definitiva. Se trata de procesos menos simples que los que algunos autores han sostenido, pero que se pueden describir y caracterizar con términos precisos.

El estudio del tratamiento de los números enteros en España en los siglos XVIII y XIX es un ejemplo paradigmático que permite estudiar los problemas que presenta la incorporación de una nueva noción, el concepto de número negativo, para su enseñanza en el nivel superior de matemáticas y analizar las dificultades que se derivan de la construcción del conocimiento didáctico relacionado.

Las cuestiones didácticas que se propone abordar este estudio, como ya se ha dicho, son:

1º Mostrar mediante el análisis histórico-crítico las nociones de número, cantidad, cantidad negativa, orden y operación que intervienen y conviven en las distintas construcciones de los número negativos estudiadas.

2º Realizar un análisis del tratamiento didáctico de los números negativos en los libros de texto españoles de los siglos XVIII y XIX, destacando las conexiones entre fenómenos, conceptos, modelos y problemas

3º Contrastar las hipótesis de González Marí sobre suplantación de los enteros por los naturales relativos e ilustrarlas con ejemplos de los libros de texto de los siglos XVIII y XIX.

Para llevar a cabo estas tareas, nos parece conveniente presentar un panorama general en el que ubicar los libros de texto y los autores seleccionados, que contemple los contextos social, cultural y científico de los siglos XVIII y XIX.

El balance que presentamos a continuación se hace con el propósito de proporcionar claves del periodo histórico estudiado, destacando sus dimensiones cultural, científica y educativa. Autores y referencias muestran la enorme cantidad y variedad de bibliografía disponible sobre la ciencia y la cultura en la España de los siglos XVIII y XIX, época de gran dinamismo y de contrastes considerables. Hemos hecho un resumen de aquellos aspectos que resultan más significativos para este trabajo. No hemos pretendido realizar un recorrido exhaustivo por estos dos siglos, cosa que queda fuera de nuestra intención. Con esta narración tratamos de ubicar a los autores y sus ideas matemáticas en el contexto filosófico y científico de su sociedad y de su época. La selección de datos, instituciones, corrientes intelectuales y movimientos filosóficos ha sido nuestra, y está hecha con la finalidad de enmarcar a los autores y obras que estudiamos, con el propósito de analizarlos y entenderlos en su momento histórico. Esperamos que este marco histórico resumido responda a los objetivos del estudio.

Comenzamos con una revisión de los acontecimientos sociales, políticos, científicos y educativos que pueden incidir de una manera directa o indirecta en nuestro objeto de estudio.

2.1 Contexto Social

La llegada del siglo XVIII encuentra a España sumergida en violentas disputas por la extinción de la dinastía de los Austrias y la llamada Guerra de Sucesión a la corona. Felipe V, el primer rey de la nueva dinastía de los Borbones, tiene un largo reinado durante el cual se preocupa por incorporar al reino artistas, médicos y arquitectos extranjeros vinculados con la cultura ilustrada francesa, que orientan a la nueva administración. Después del reinado de su hermano Fernando VI (1746-1759), inicia Carlos III en 1759 el suyo, acentuando el carácter público de la función del Estado. La burocracia adquiere en este periodo una gran importancia destacando por su orientación laica. En los diferentes gobiernos de Carlos III hubo una predisposición a nombrar militares para desempeñar cargos públicos.

Durante los Austrias y la primera mitad del siglo XVIII, la Compañía de Jesús había adquirido mucho poder dentro del reino, y tenía un papel hegemónico en la educación de las clases privilegiadas del reino (Arenzana, 1987; Fernández, 1996; Vernet, 1998), aumentando con ello su influencia política. Además, mantenían disputas ideológicas con los pensadores ilustrados; estaban enfrentados a los dominicos, jansenistas, escolapios, regalistas y obispos, entre otros. Finalmente entraron en enfrentamientos con el gobierno de Carlos III, pues su existencia reñía con el poder real. Pero esta situación no sólo se presentaba en España, sino en casi todos las monarquías ilustradas de Europa; de esta manera, el marqués de Pombal los expulsa de Portugal en 1755 y, poco más tarde, en 1764 sucedía lo propio en Francia; en España, esto sucede el 2 de abril de 1767. Finalmente, en 1773, el papa Clemente XIV, por medio del breve *Dominus ac Redemptor*, declara extinguida la Compañía de Jesús.

En 1814 Pio VII restablece la Compañía en la iglesia, y en 1815 se readmite en España la Compañía de Jesús.

Durante el reinado de Carlos III (1759-1788), la influencia política del primer ministro Floridablanca mantuvo a España al margen de conflictos internacionales. Carlos III realizó una profunda reorganización en la administración de la nación, reformó su agricultura e introdujo las últimas novedades en la arquitectura y construcción siguiendo los patrones adoptados en Nápoles, donde había sido rey. Es en este momento cuando Madrid adquiere una mayor importancia y se convierte en una ciudad moderna mediante una serie de mejoras urbanas.

Aunque existía una resistencia considerable a la introducción de nuevas ideas en los niveles sociales más bajos, los intelectuales del país eran receptivos a los conceptos de la Ilustración difundidos por la Enciclopedia de Diderot y D'Alambert (1751-1765), la sociedad demanda la introducción de nuevos conocimientos y la incorporación de innovaciones técnicas y novedades. Se producen tertulias donde se reúnen clérigos, propietarios, nobles, científicos, militares, artesanos, agremiados y profesionales, donde se discuten los nuevos problemas del saber. España empieza a formar arquitectos, ingenieros, geógrafos y naturalistas. Más tarde, las ideas democráticas engendradas por la Revolución Francesa iban a llegar a España, aunque no iban a ser adoptadas por las clases políticas y dirigentes.

Al final del reinado de Carlos III y durante el reinado de Carlos IV (1788-1808) se produce una pérdida de dinamismo político, esto lo refleja de manera crítica Goya en sus cuadros. Debido a la Revolución Francesa se produce un cierre de fronteras. Después de un breve período de forzada alianza con Francia, que culminó con la derrota de la flota franco-española en Trafalgar (1805) ante los británicos, las tropas de Napoleón invadieron España. En esos momentos se produce un gran desarrollo de las colonias americanas. Las familias burguesas criollas locales, al no obtener mayor participación en el gobierno de los virreinatos y tener diferencias económicas y comerciales con el gobierno de Madrid, deciden levantarse en armas y proclamar su independencia como repúblicas, constituyéndose nuevas naciones (1810-1822).

La situación política en España durante el amplio periodo que hemos denominado Romántico (1808-1874) fue muy compleja, por las grandes transformaciones ocurridas, complicadas por la variedad de hechos y eventos que se sucedieron. Benito Pérez Galdós (1843-1920), en sus *Episodios Nacionales,* ha retratado magistralmente la situación política y social de este periodo. En el comienzo del mismo se pasó de la ocupación francesa con imposición de un rey extranjero, a un periodo de guerra civil y a una etapa posterior de absolutismo total con Fernando VII. La convocatoria en Cádiz de Cortes Constituyentes dio lugar a un enorme desarrollo de ideas políticas y sociales renovadoras, revolucionarias para el sentir de la época. La presencia de tropas extranjeras sitiando la ciudad y la prisión del rey legítimo por las fuerzas de ocupación incrementaron los sentimientos liberales de los congresistas.

En los años que transcurren desde la invasión francesa hasta la vuelta de Fernando VII de su destierro en Francia (1808-1814), el país experimenta enormes convulsiones políticas y sociales. La nueva situación política parecía inmanejable, la crisis derivada de la independencia de las nuevas repúblicas americanas, la falta de partidos políticos con base social sólida y las contradicciones internas de la sociedad española merman la vuelta a la estabilidad, defraudando finalmente las esperanzas de renovación social. Durante el trienio constitucional (1820-1823) las ideas liberales tuvieron un pequeño momento de desarrollo, para caer luego y ser perseguidas por la monarquía casi hasta la muerte de Fernando VII, ocurrida en 1833.

La regencia de la reina Maria Cristina de Borbón (1833-1840) y la sublevación de los reaccionarios, encabezados por el pretendiente D. Carlos, dieron cabida a los liberales en el gobierno. Isabel II (1833-1868) alternó gobiernos liberales con progresistas. La política española del reinado de Isabel II fue muy agitada, con participación de los militares en los momentos claves, bien para apoyar a un gobernante o bien para derrocarle. Las guerras civiles, llamadas también guerras carlistas, que transcurren en el norte de la península, se van circunscribiendo cada vez más a los territorios vasco y navarro. Estas guerras tienen una base política regresiva y reaccionaria, y se cierran con armisticios y acuerdos políticos no respetados por las bases clericales del carlismo. El reinado de Isabel II concluye con su destronamiento (1868), promovido por los mismos generales que la habían apoyado con anterioridad. Esta acción es seguida por un intento de implantar una nueva dinastía en la persona de Amadeo de Saboya (1871-1873); después de la breve instauración de una República Federal, la situación derivó en una inestabilidad política que concluye con la restauración de los borbones en 1875.

El periodo de la restauración viene definido por una racionalización y normalización de la vida política con una nueva constitución, la configuración de partidos políticos estables y los comienzos de la monarquía parlamentaria en el reinado de Alfonso XII (1875-1885) y la regencia de su viuda Mª Cristina (1885-1901). Un acontecimiento que marcó profundamente la situación política española al finalizar el siglo fue la guerra de independencia de Cuba (1895–1898) con el hundimiento de la escuadra española en Santiago de Cuba y la derrota frente a Estados Unidos, que se apropia de Puerto Rico y otras posesiones españolas. A esto hay que sumar el inicio de la insurrección en Filipinas, la cual concluye con su transformación en colonia americana. La pérdida de las últimas colonias en América y Asia permitió un impulso en el desarrollo interno de la península, fortalecido por la repatriación de capitales.

Esta manifiesta inestabilidad política tuvo repercusiones en los aspectos educativos, científicos y académicos, que nos interesan.

2.2. Primera renovación: Escolásticos y Novatores.

Como revisión previa a la época que nos ocupa, hemos de recordar que durante el siglo XVII prevalecía en el mundo intelectual y universitario la filosofía escolástica, en la que dominaba la enseñanza de las doctrinas de Aristóteles, conectada con las respectivas doctrinas religiosas; pero ya en las ultimas décadas de ese siglo y las primeras del siglo XVIII surge una corriente de pensamiento contraria a las ideas aristotélicas. Los partidarios de estas ideas son conocidos como los *novatores*; ellos llevan a cabo una ruptura con las posiciones escolásticas tradicionales y realizan la adaptación a un pensamiento de carácter científico (Arenzana, 1987).

En la tradición europea que surge en el Renacimiento y procede de la Revolución Científica se identifican filósofos y científicos; filosofía y ciencia se consideran facetas de una misma actividad intelectual. Los nuevos pensadores, estos *novatores,* son quienes inician en España el largo proceso de separación entre unos y otros. El cambio de pensamiento que promueven los *novatores* tropieza y choca con la escolástica dominante, la cual representa ideológicamente a los sectores más conservadores de la iglesia católica (Abellán, 1981). Estos pensadores, con el apoyo de algunos clérigos, realizan una irrupción de la sociedad laica en la investigación filosófica y científica de la época, compitiendo y amenazando el predominio religioso que en ambos campos se daba en la sociedad española de finales del XVII y comienzos del XVIII.

Las polémicas entre los escolásticos, que llevaban la discusión al campo religioso, y los *novatores* que la llevaban al terreno científico, se reflejan en la física. Frente a la física antigua que era claramente cualitativa, toma impulso en esta época la nueva física que es cuantitativa y de carácter experimental, basada en conocimientos matemáticos, que los escolásticos por lo general no tenían (Arenzana, 1987). Los grupos más importantes de *novatores* surgen en Valencia, Sevilla y Zaragoza. Hacia 1686 destacan en Valencia las reuniones en casa de Baltasar de Íñigo de una *Academia de Matemáticas*, en la que participan Corachan y Tosca (Moreno, 2002).

Los primeros procesos de desarrollo *novator* se desarrollan en Valencia, sobre todo a través de la obra y el magisterio de Gregorio Mayans y Siscar (1699-1781), su preocupación es la de combinar e integrar el racionalismo crítico de la Europa moderna con la cultura humanística (y erasmista) del siglo XVI español en el intento de activar un retorno de lo que había sido el humanismo cristiano. Esta situación se explica por el consistente interés hacia la temática religiosa, hacia una historiografía sobre todo eclesiástica y hacia un resurgimiento de la filología hebrea y griega. Mayans fue, sin duda, la figura cultural más significativa de este movimiento de renovación del pensamiento español del siglo XVIII, incluso porque tanto en el campo histórico como en el retórico-filológico se empeñó en afrontar una temática propiamente hispánica y laica, y no sólo clásico-eclesiástica. Mayans fue maestro de Cerdá, Pérez Bayer, así como también de Piquer.

Una novedad significativa de los *novatores* es que escribían sus textos en castellano, dejando de lado el latín, que era el lenguaje de los científicos e instruidos de la época, como también lo era de los escolásticos. Los *novatores* justificaban la utilización del castellano para divulgar la filosofía y el conocimiento y para generalizar la enseñanza al común de la gente.

Sin embargo, estos cambios de mentalidad y pensamiento tan sólo afectaban a reducidos círculos y niveles intelectuales y sociales progresistas de la época (Abellán, 1981); así surgieron las tertulias como principales focos de difusión de la nueva filosofía de pensamiento.

Las innovaciones de corte filosófico y científico se producían al margen de las universidades, en las cuales la escolástica hallaba refugio. Los nuevos pensadores, los *novatores,* empezaron a introducirse en la sociedad y la cultura española a través de las tertulias, sociedades académicas y otras instituciones, que generalmente se hallaban protegidas o financiadas por algunos hombres acaudalados; de esta forma, los nuevos saberes y corrientes de pensamiento que surgían en Europa se difundían entre los intelectuales y algunos sectores tanto de la nobleza como de la burguesía.

Los *novatores* se afilian al cartesianismo, gassendismo, sensualismo, maignanismo, eclecticismo, escepticismo etc.; en general pretendían una revalorización de otras corrientes filosóficas distintas del aristotelismo. Defendían un planteamiento científico de los problemas de la física, frente a la mentalidad metafísica imperante.

El movimiento novator originó una dialéctica *"´tradicionalidad´/ ´modernidad´ [...] en el área de las ciencias físicas, matemáticas y astronómicas; [...] en las ciencias médicas, químicas y biológicas con ciertas interferencias o correspondencias entre sí"* (Capitán Díaz, 1991, p. 687).

Surgieron diversos textos que abogaban en favor de las tesis de los *novatores*; entre ellas, tenemos el *Compendium Philosophiae* de Tosca, el cual propició su consulta en ámbitos escolares y culturales. Tal como afirma Navarro Brotons (citado por Capitán Díaz, 1991, p. 691), *"El Compendium puede inscribirse dentro del proceso de renovación progresiva de la enseñanza de la filosofía natural que tuvo lugar en Europa desde la segunda mitad del siglo XVII, bajo la influencia del cartesianismo y de la física prenewtoniana"*.

Se puede afirmar que lo que llevó a la iniciativa de algunos nobles y religiosos a promover revisiones y cambios filosóficos sobre el pensamiento dominante a finales del siglo XVII fueron los síntomas esparcidos de una toma de conciencia acerca de la diferencia de nivel cultural entre España y Europa, así como el deseo de subsanar carencias a través de la adquisición de un libre espíritu crítico que afirmara la razón contra la autoridad,

2.3 Contexto político y filosófico

Son muchos los autores (e.g., Arenzana, 1987; Vernet, 1998; Peralta, 1999) que indican el estado de decadencia de la ciencia en España en la primera mitad del siglo XVIII, así como también que el sentimiento de frustración, que existía desde la España de los últimos Austrias, aún pervivía en los primeros años del reinado Borbón.

Como se ha mencionado, la llegada de la dinastía borbónica prácticamente coincide con el inicio del siglo XVIII. Este es el siglo en el que triunfan las ideas modernas y el antiguo régimen empieza a desmoronarse. Se puede caracterizar al siglo XVIII, en lo político y cultural, por:

- En lo político: el despotismo ilustrado
- En lo intelectual y cultural: la ilustración

El siglo XVIII es conocido como el siglo de las luces o el siglo de la ilustración; la consigna era: *"hay que ilustrar al pueblo y por tanto el siglo XVIII es el siglo pedagógico y didáctico por excelencia"* (Llopis & Carrasco, 1983, p. 17); sin embargo, el desarrollo y avance de estos ideales tuvieron un punto de ruptura con la revolución francesa en 1789. Veamos algunos aspectos de este periodo.

2.3.1. Despotismo Ilustrado

A partir de la paz de Westfalia en 1648 surge en Holanda e Inglaterra un *liberalismo* tanto político como económico; se produce un afán por difundir estas nuevas ideas que proclaman la absoluta independencia del Estado con la Iglesia en sus organizaciones y funciones. De esta manera se permite y abona el terreno ideológico para que, entre otras cosas, afloren las publicaciones y lleguen al común de la gente.

Como consecuencia de la influencia ejercida por los pensadores ilustrados de la época (Descartes en el tránsito del barroco a la ilustración, Montesquieu, Diderot, Rousseau, Newton, Leibniz, Voltaire, Locke y Hume, entre otros), los reyes europeos les invitan, acogen y protegen e intentan poner en práctica sus ideas de que la cultura cambiaría al pueblo haciendo mejores ciudadanos.

Los reyes absolutos del siglo XVIII en Europa (los llamados *déspotas ilustrados*, Luis XIV, Federico II de Prusia, María Teresa de Austria, Carlos III de España, por mencionar algunos) toman de la Ilustración lo que les conviene y, apoyándose en ella, introducen en la administración de sus estados una serie de reformas y mejoras importantes. Así, por ejemplo, suprimen los restos que aún quedaban de feudalismo. La sociedad también fue objeto de intentos de reforma, aunque tímidos y poco significativos. La nobleza mantuvo casi todo sus privilegios y siguió en los puestos de control del ejército y la Administración. El poder se concentró progresivamente en un menor número de nobles. La alta nobleza se distanció del poder político activo.

Todo esto estaba enmarcado en unos planteamientos filantrópicos, de unas buenas intenciones por acercar y hermanar a los hombres. Sin embargo, las reformas de toda índole: políticas, jurídicas, culturales etc. se ponían en práctica desde el poder establecido, a instancias de los contenidos y actitudes de los pensadores de la época. Es decir, era una Ilustración de corte estatal. Además, rechazaban lo que es más importante para la Ilustración: la libertad política. Por eso, la burguesía ilustrada, que al principio apoya la reforma de los reyes, cuando ve que éstos no conceden lo más importante, la libertad, se vuelve contra el absolutismo, lo que da lugar a que estallen revoluciones. El máximo exponente del despotismo ilustrado en España fue Carlos III.

2.3.2 La Ilustración

La Ilustración es un pensamiento crítico y reformista que identifica y caracteriza el movimiento que aconteció en algunos países europeos (especialmente en Inglaterra, Francia, Alemania, Italia y España) en lo político, económico, social, científico y filosófico. Proclama el predominio de la razón sobre la naturaleza y la legitimidad de las actuaciones basadas en la razón, como único medio para alcanzar el progreso y bienestar de las gentes. Se inicia con la obra de Descartes a comienzos del siglo XVII; experimenta una gran expansión a finales de ese siglo, entre 1685 y 1690, coincidiendo con la publicación de los *Principios* de Newton y las obras de Hume, Locke y Leibniz; y alcanza su culminación entre 1781 y 1789, época de publicación de la *Crítica de la razón pura* y la *Crítica de la razón práctica* de Kant y los comienzos de la Revolución Francesa (Capitán Díaz, 1991; MEC, 1979).

En España ya había unas bases procedentes del movimiento de los novatores, que se ha comentado. También el espíritu de la ilustración fue en gran medida consecuencia del siglo de las luces francés y la influencia ejercida por la *Enciclopedia* de D´Alambert y Diderot. Esto produjo fenómenos como el "extranjerismo" y "la heterodoxia", es decir, surgieron dos polos contrapuestos asociados a lo español y lo europeo: lo nacional y lo extranjero, lo patriótico y lo foráneo (Capitán Díaz, 1991).

Fue a partir del reinado de Carlos III cuando se aprecia la influencia de los ilustrados franceses; sin embargo, algunos ilustrados españoles suponían que ya se había alcanzado el tope máximo del conocimiento, tal como afirmaba Juan Andrés en 1788 (citado por Vernet 1998, p. 134): *"La acústica ya no admite más investigaciones y tantos escritos de sonido y de música han dicho más de lo que requiere la materia"*. Estas actitudes no permitían una fácil introducción de las reformas ilustradas en las ciencias.

El entusiasmo por los descubrimientos naturales y todo aquello que se le relacionara invadió a los nobles y la burguesía. Es así como en Europa se ponen de moda los gabinetes, colecciones de ciencias naturales y aparatos e instrumentos experimentales. Los monarcas gustaban de adquirir estas colecciones llamadas genéricamente *gabinetes*.

Otro aspecto que caracterizó a la popularización del fenómeno ilustrado fue la construcción de jardines botánicos, y España no fue ajena a ello; se crean jardines botánicos en distintos lugares del reino; la mayoría de ellos, como consecuencia de las expediciones científicas.

En Barcelona se funda la *Real Academia de Ciencias Naturales y Artes*, que fue inaugurada el 18 de enero de 1764, y la *Academia de Nobles Artes* de Madrid, en 1774.

Para un mayor conocimiento sobre la Ilustración y el despotismo ilustrado en España durante el siglo XVIII se pueden consultar obras especializadas sobre el tema como las de Sánchez Agesta (1953), Mestre (1976), Abellán (1981), Álvarez de Miranda (1992), entre otras.

2.4 Los jesuitas en España

2.4.1 La influencia de los jesuitas

El ejercicio de la enseñanza, a través de las lecciones en las cátedras, fue desde los primeros años uno de los principales ministerios de la Compañía de Jesús y contribuyó a coordinar los objetivos y actuaciones de otros muchos trabajos de los jesuitas.

"Los jesuitas descubrieron que la enseñanza era una de las "palabras" más

privilegiadas para "emplearse en la defensa y propagación de la fe" […] La identificación entre formación, saber, virtud y estudio tenía mucho que ver con el sentido de servicio que empezaron a otorgar los jesuitas a la enseñanza, dentro de un discurso claramente humanista. Sus lecciones aportaban a la cosa pública buenos sacerdotes, buenos funcionarios y gobernantes, buenos ciudadanos en definitiva" (Burrieza, 2004; pp.107-109).

Otra característica notable de la Compañía de Jesús durante el período de su primera fundación (1540-1773) era la implicación de sus miembros en las ciencias. Las razones de este interés por el estudio científico se pueden encontrar en la propia naturaleza y misión de la orden. Ignacio de Loyola consideraba la adquisición del conocimiento y del funcionamiento del trabajo mundano como tareas espirituales provechosas, lo que fomentó en la Compañía una mentalidad comprensiva y orientada al estudio científico.

En España, la Compañía de Jesús destacó en la ciencia y, especialmente, en el campo de la educación. En el momento de su expulsión del reino en 1767, los jesuitas poseían 105 colegios y 12 seminarios; en ultramar tenían 83 colegios y 19 seminarios. La influencia jesuita se extendió también en el campo universitario. En muchas universidades contaron con cátedras de teología suarista (así llamadas porque enseñaban el modelo teológico del jesuita Suárez). Su labor fue notable también en la Universidad Literaria de Cervera, la cual trataremos luego.

Es a partir del siglo XVII cuando la Compañía prácticamente monopoliza la enseñanza secundaria, desplazando de esta labor a los dominicos y las pocas escuelas municipales. Los jesuitas percibieron pronto que su misión eclesial y social debía partir de la enseñanza o, mejor, de la educación. Avanzado el siglo XVIII la educación y la enseñanza se habían centrado en la de la *gramática*, que así se denominaban los estudios que equivaldrían a nuestra actual secundaria o pre-universitaria (Egido, 2004). Al parecer, el éxito de los jesuitas en la enseñanza en las universidades fue debido a la desmesurada proporción entre los alumnos que estudiaban con ellos y los escasos matriculados en la universidad, así como en los acuerdos que desde el siglo XVI se habían establecido entre jesuitas y universidades para impartir docencia. De esta forma los alumnos se preparaban fuera de las Universidades, para después someterse a examen en ellas y obtener así el grado con mayor facilidad, en virtud de su mejor preparación. Los jesuitas ofrecían una serie de conocimientos auxiliares, y la preparación para avanzar en la sociedad, más allá de los conocimientos que eran requeridos por las instituciones educativas (Maz & Rico, 2004). Esto facilitó la captación de las oligarquías municipales. Los colegios con facultades de Filosofía o de Teología van imponiéndose a las grandes universidades, donde también van introduciéndose estas disciplinas. Por tanto, la Compañía de Jesús expande su influencia en la sociedad española a través de la educación; prueba de la influencia jesuita en España la brinda el ministro Roda (citado por Menendez y Pelayo, 1963, p. 166), *"por un cristal de sus anteojos no veía más que jesuitas y por el* *otro colegiados"*. Sin embargo, mediado el siglo XVIII, el prestigio de la Compañía se va perdiendo.

Los estudios de San Isidro comienzan en 1625 y son estudios sobre las artes liberales que se imparten en el Colegio Imperial de la Compañía de Jesús en Madrid. El Colegio Imperial impartía enseñanzas básicas a estudiantes hasta los catorce años. Los estudios de San Isidro eran estudios mayores e incluían las matemáticas junto con otras ciencias.

Con la llegada de la dinastía de los Borbones se dota de más medios a las instituciones que tenían el encargo de enseñanza de las matemáticas y se fundan otras nuevas, como los Seminarios de Nobles, que confieren a los jesuitas la educación de la nobleza. Concluida la Guerra de Sucesión se establecen en Madrid, Barcelona, Calatayud y Valencia. Con esto el poder de su enseñanza no se restringe a las clases burguesas sino que se extiende también a la nobleza.

El Seminario de Nobles de Madrid es el pionero, erigido por Felipe V en 1716 y anejo al Colegio Imperial. Los Reales Estudios de San Isidro, junto con el Seminario de Nobles, continúan la enseñanza de la matemática hasta 1767, año en que son expulsados los jesuitas, y se mantienen en su nueva época, iniciada por Carlos III, desde 1770 hasta 1816.

Los Reales Estudios de San Isidro tienen entre sus cátedras una de matemáticas; entre sus profesores estuvieron Pedro de Ulloa, Thomas Cerda desde 1764 a 1767 y Verdejo en 1794 (Garma, 2002)

2.4.2 Expulsión de los Jesuitas

La Compañía de Jesús es muy atacada en el reinado de Carlos III porque se identificó a jesuitas y colegiales como enemigos políticos del gobierno y el rey. El 2 de abril de 1767 se ordenó el extrañamiento de los jesuitas que residían en España y sus posesiones en ultramar. Esto provocó la necesidad de reorganizar la enseñanza, que prácticamente había estado en sus manos durante casi dos siglos. Un estudio detallado del proceso que lleva a los jesuitas desde el poder a la extinción puede encontrarse en Egido (2004).

La expulsión fue consecuencia de la pugna entre el poder político y social; entre la Compañía de Jesús y la Corona borbónica; también los jesuitas habían conseguido la enemistad del resto de las órdenes religiosas, principalmente por odios de escuelas teológicas que se disputaban el monopolio de la verdad filosófica, teológica o moral, lo cual contribuye a su caída. El decreto de expulsión se justifica entre otras cosas porque el sistema de la Compañía de Jesús era incompatible con la monarquía española y las *perniciosas doctrinas de los jesuitas*. Entre los argumentos utilizados, el gobierno culpó a los jesuitas de la decadencia en la enseñanza de las primeras letras; así que, tras su expulsión distribuyó las posesiones que tenia la Compañía en el reino de España. Los edificios, en su mayoría, fueron destinados a aulas y habitaciones de maestros de primeras letras; algunos colegios fueron cedidos, como el Colegio de Vergara el cual se entregó a la Sociedad Bascongada de Amigos del País; el Seminario de Nobles de Valencia pasó a ser regido por el Arzobispado; a los colegios de Palma de Mallorca, Granada y Sevilla se trasladaron las universidades.

En el momento de su expulsión los jesuitas tenían una enorme influencia. No sólo controlaban la enseñanza, sino que además contaban con voluminosas y ricas bibliotecas, donde reposaban los libros más actuales de la época así como algunas reliquias y pinturas de gran valor artístico. Las colecciones de las bibliotecas fueron incorporada a las distinta universidades, lográndose de esta manera que estuvieran al alcance de los estudiantes y del común de las gentes.

Martínez Shaw (1996) indica que la eclosión de la ilustración española empieza realmente en 1767 con la expulsión de los jesuitas y la llegada al poder del conde de Aranda (Pedro Pablo Abarca de Bolea, 1719-1798) acelerando los programas de reformas en todos los campos.

Como consecuencia de la expulsión, en el campo de la educación se privó de profesores a más de un centenar de colegios, creándose un vacío pedagógico difícil de solucionar a corto plazo, con severas consecuencias. No obstante, la rápida reacción del gobierno evitó que éstas fuesen irremediables. Convocó oposiciones a las cátedras y a las plazas de gramática, dotándolas con los bienes confiscados de los jesuitas. Una claúsula impedía que los nuevos «beneficiados» fueran eclesiásticos, lo que contribuyó al proceso de laicización de la educación. De otra parte, con la expulsión de los jesuitas se hace necesaria la formación de profesores de matemáticas laicos, desmonopolizando de esta manera el conocimiento científico.

2.5 El pensamiento Crítico de Feijoo.

Fray Benito Feijoo y Montenegro nace en Casdemiro (Orense) en 1676 y muere en 1764. Ingresó en la comunidad Benedictina en 1690 en el Monasterio de San Juan de Samos. Cursó estudios de Filosofía en los Colegios de San Salvador, en Lerez, y de San Juan del Poyo y, de Teología en el Colegio de San Vicente de Salamanca, y de San Pedro de Eslonza. Se licenció en Teología y luego se doctoró. Toda su vida posterior la pasó en Oviedo.

En 1725, a los cincuenta años de edad comienza la publicación sistemática de ensayos filosóficos sobre las más variadas materias; según él, para el desengaño de errores comunes. De entre estas obras podemos mencionar *El Teatro crítico universal (1726-1740), Justa repulsa de inicuas acusaciones* (1749) y las *Cartas eruditas y curiosas*; sus obras lograron una difusión insospechada, en España y América.

Los libros de Feijoo reflexionan sobre la cultura, la enseñanza y los adelantos de la ciencia en esa época. Se inspiran en el anhelo de enseñar al pueblo y sacarle de su ignorancia así como también con el propósito de indicar, a los gobernantes y pensadores, las deficiencias de conocimientos que tenía la sociedad, y de esa manera impulsar iniciativas y reformas encaminadas a suplir estas necesidades.

Feijoo, con su vocación pedagógica, pretende poner a España al mismo nivel cultural y científico que los demás países europeos; pregona el debilitamiento de los valores políticos, morales, religiosos, etc. e imputa esta situación al bajo nivel cultural y a la indiferencia de las instituciones encargadas de estos aspectos.

Las fuentes extranjeras que inspiraron a Feijoo fueron francesas e inglesas; estas últimas las leía a través de sus versiones francesas o latinas, de tal forma, entre sus lecturas, estuvieron las obras de Montaigne, Gassendi, Descartes, Bossuet, Bayle, Voltaire, Legendre, Locke, Stanley, Bacon, Newton, etc. (Capitán Díaz, 1991). Con ciertas limitaciones se sentía atraído por el empirismo de Bacon, pero se identificaba más con el sentido científico de Newton por el método experimental diseñado en los *Principios*. Consideraba que los pocos y lentos progresos de las ciencias, en España respecto al resto de Europa, se debían en gran medida al abuso de la escolástica como filosofía imperante en la enseñanza.

Feijoo establece dos relaciones para determinar los criterios de verdad, el primero es *autoridad/fe*; para él *"son conceptos que se implican recíprocamente: la fe afianza la autoridad y ésta es razón de ser y creer en alguien o algo"* (Capitán Díaz, 1991, p. 710), el segundo, la relación *razón/experiencia;* para él, el verdadero método científico es aquél que incluye tanto la razón como la experiencia, porque son raciocinios, son falibles y se deben servir no solo de los sentidos para el adecuado éxito de la experimentación, sino que deben aportar reflexión y juicio.

2.6 Enseñanza en la Ilustración

2.6.1 Las primeras letras en la Ilustración

Felipe V, en 1743, concede a los maestros de primeras letras aprobados por la Hermandad de San Casiano iguales prerrogativas y exenciones de que gozaban los maestros de las Artes Liberales. Después con la expulsión de los jesuitas se dictan rigurosas normas para ejercer como maestro, siendo necesario, entre otras cosas, presentar la credencial de haber aprobado en doctrina cristiana y recibir la conformidad de la Hermandad de San Casiano. La Hermandad queda extinguida en 1780, encargándose entonces el Colegio Académico del Noble Arte de Primeras Letras de la formación de los maestros. Como se ha mencionado el vacío dejado en la enseñanza por los jesuitas, lo suple el gobierno creando plazas de maestros por oposición o méritos de las dejadas vacantes. La preocupación del gobierno la justifica el alto grado de analfabetismo de la población que conllevaba un bajo nivel cultural, afectando así el desarrollo de las ciencias y técnicas, lo cual hace que se produzca un fomento de la escolarización durante la década de 1780.

Sin embargo, la enseñanza de las primeras letras no era el objetivo preferente del gobierno ilustrado; aunque eran frecuentes y continuas las expresiones públicas y políticas del estado y los ilustrados sobre la importancia de la educación, eran otras instituciones o sociedades (económicas o culturales) quienes finalmente asumían los retos y compromisos de llevar la enseñanza, cultura y ciencia al pueblo. Los gobiernos ilustrados también fueron desmontando poco a poco los Colegios Mayores que en principio dirigían los jesuitas.

2.6.2 La enseñanza universitaria

La clase dominante propugnaba un saber de corte medieval, mientras que la floreciente burguesía se inclinaba más por una ciencia pragmática, que ayudase al desarrollo de las artes, agricultura y el comercio (Arenzana, 1987). Afirma Vernet (1998) que, en la primera parte del siglo XVIII, los españoles tuvieron conciencia de la incapacidad de las universidades existentes para actualizarse en los avances de la ciencia, que ocurrían más allá de sus fronteras.

La enseñanza de la matemática con los Austria estuvo asociada a las universidades casi en exclusiva, con carácter de ciencia aplicada. Los Borbones la convierten en cuestión fundamental para la enseñanza y formación de ingenieros y, posteriormente, en la enseñanza de Artes y Filosofía en las universidades. Al comienzo de la nueva etapa la enseñanza de la matemática la orientan los jesuitas, que lideran las nuevas instituciones o adaptan las antiguas a los nuevos criterios. El gobierno de los Borbones tiene un funcionamiento administrativo centralizado. Las universidades tradicionales se mantienen pero disminuyen sus privilegios. Los jesuitas se hacen cargo de las enseñanzas científicas en los centros que controlan.

La Ilustración supuso un enorme impulso de crítica y revisión para las universidades en el siglo XVIII, principalmente por los esfuerzos por introducir la ciencia empírica moderna. La reforma de las enseñanzas fue una constante del pensamiento pragmático y racional. En esta época se avanza en la destrucción del sistema gremial y comienza la formación de cuerpos técnicos y profesionales. Escuelas y Facultades asumen el control del ejercicio profesional.

Las universidades españolas del siglo XVIII se encontraban en un estado casi medieval y eran de carácter eclesiástico. Esto lo evidencian, entre otros, Fray Benito Jerónimo Feijoo en una carta titulada *Causas del atraso que se padece en España en orden a las ciencias naturales*; y el Marqués de la Ensenada, quien en 1748 se lo comunica así al rey Fernando VI. Las deficiencias de las universidades tenían que ver con la enseñanza memorística, textos anticuados e interés primordial por disciplinas como derecho, teología y filosofía, en detrimento de las matemáticas y las ciencias (Peralta, 1999).

A principios del siglo XVIII las universidades están dominadas por cuestiones y pleitos relacionados con privilegios, protocolos y discusiones, sobre problemas religiosos o filosóficos. Asuntos científicos, como las matemáticas, tienen escasa consideración. La creación por Felipe V de la Universidad de Cervera trata de paliar estas carencias en el Principado de Cataluña, pero no ocurre así en las universidades castellanas.

2.6.3. La Universidad de Cervera

Dentro de este movimiento de renovación, la Universidad de Cervera brindó su aportación al respecto. Fundada en 1717, fue un intento de cambio a nivel institucional, especialmente a través de la Facultad de Artes y las cátedras impartidas por los jesuitas (Capitán Díaz, 1991). La figura de José Finestres fue la que aglutinó en torno suyo el movimiento. La novedad administrativa de esta universidad era que dependía directamente de la corona para su financiación; en sus estatutos preveía un profesorado cualificado, planes de estudio racionales y una apertura a las corrientes científicas que imperaban en Europa.

Fue en el segundo tercio del siglo XVIII cuando esta universidad alcanzó su mayor dimensión impulsora de la actividad científica; estado que duró hasta la expulsión de la comunidad jesuita del territorio español en 1767. A partir de ese momento, la universidad pierde parte de su prestigio científico al quedar mermada, pues la mayor parte de sus profesores emigraron a Italia.

Un ejemplo de la actividad de difusión del conocimiento que se llevaba a cabo en la Universidad de Cervera fue Thomas Cerdá, quien ejerció en ella la enseñanza de las matemáticas y escribió sobre la aplicación de las ciencias a las artes militares.

2.6.4. La Universidad de Salamanca

Los principales cambios universitarios se producen en el reinado de Carlos III y comienzan con la expulsión de la Compañía de Jesús en 1767. Los edificios junto con los libros, instrumentos y colecciones permanecen en España y se emplean para fines docentes. La reforma de la universidad comienza por la de Salamanca, y se inicia con los Colegios Mayores. La cédula de 1771 propone impulsar un plan de estudios general, que se concreta en planes individuales. Las reformas de los Colegios abarca multitud de aspectos de la vida universitaria de la época, cuestiones de disciplina y de moral, limitación en el número de años de estancia, administración, becas y rentas. También se regula la forma de oposición, el voto de los colegiales, el modo y metodología de trabajo en el aula. Estas normas se precisan por Real Decreto en 1777. Además de los cambios institucionales se produce un cambio en los contenidos. La universidad pasa al control de la corona mediante cambios en las formas docentes, promulgación de nuevos planes y nombramiento de profesores. El nombramiento de catedráticos pasa al Consejo de Castilla, que trata de controlar el bajo nivel de los responsables de algunas materias.

Caso emblemático es el que presenta Diego Torres de Villarroel, personaje pintoresco quien llegó a ser catedrático de matemáticas en la Universidad de Salamanca desde 1726 hasta su jubilación en 1752. El carácter variopinto y excéntrico de los conocimientos de Torres, se manifiesta en sus publicaciones dedicadas a "*hacer pronósticos*", como él mismo describe en su autobiografía. También su arbitrariedad y nepotismo explican el que no hubiese matemáticas en Salamanca hasta el último tercio del siglo XVIII. De hecho, entre 1685 y 1760 no hubo alumnos matriculados en la cátedra de matemáticas de Salamanca, y hay que esperar a 1775 para encontrar 16 alumnos matriculados. La reforma de los planes de estudios de esta universidad en 1771, impulsados por Carlos III tratan de paliar, entre otras deficiencias, las carencias en la enseñanza de las matemáticas. La incorporación a la cátedra de Juan Justo García en 1774 tiene que llevarse a cabo en aplicación de las nuevas normas de nombramiento de catedráticos, debido al escándalo que suponía la propuesta de un sobrino de Torres como catedrático, cuya ignorancia matemática era manifiesta; esta medidas contribuyen a establecer un nivel básico de conocimientos en la materia (Garma, 2002).

En 1785 había dos cátedras de matemáticas en Salamanca, una en Santiago y otra en Oviedo. La reforma del plan de estudios de la Universidad de Salamanca de 1807 marca la transformación de las universidades españolas a finales del periodo Ilustrado; este plan, que afectaba a todas las universidades, tiene dificultades para su puesta en práctica, por causa de la guerra contra la invasión francesa. Los libros de Benito Bails y Juan Justo García destacan como libros comunes y modernos para la ciencia.

Los distintos gobiernos de los monarcas borbones, en parte conscientes de estos hechos, procuran estimular la difusión de la ciencia, así mismo intentan elevar el nivel de los centros docentes y, aunando al deseo de institucionalizar las nuevas corrientes de pensamiento que recorrían Europa, promueven la creación y fundación de innumerables instituciones, bibliotecas y Academias. El apoyo que se dio a la ciencia en el siglo XVIII fue uno de los principales logros de este siglo; se realizan los mayores esfuerzos por proporcionar una organización moderna al quehacer científico y técnico. La política científica de la nueva dinastía trata de establecer diferencias importantes con las de sus predecesores.

2.7 Institucionalización de las ciencias ilustradas

Como se ha mencionado, la difusión de la ciencia y el pensamiento ilustrado se llevó a cabo fuera de las universidades; esto, ligado a las consecuencias de la expulsión de los jesuitas, da lugar a una reforma de la educación; sin embargo surgen unas instituciones que se erigen como abanderadas de la difusión de los conocimientos científicos; son las Academias Militares y las Sociedades Económicas de Amigos del País.

2.7.1 Las Academias militares

La creación de Academias, Colegios y Escuelas de formación científica y profesional en el Ejercito y en la Armada, estuvo provocada por las necesidades y exigencias de carácter militar, que urgían tanto para la defensa del reino como para proteger y defender las colonias de ultramar. Se requería en estas instituciones a ingenieros que orientaran una formación acorde con los adelantos de la ciencia y la técnica; por tal razón se fundaron nuevas instituciones militares y se dotó a las ya existentes de nuevas cátedras y laboratorios. En 1720 se reabre la Academia Militar de Matemáticas la cual fue un gran aporte para el establecimiento de un cuerpo de ingenieros militares; la Academia de Artillería de Segovia desarrolló una ingente actividad en el campo de la química. Así mismo la Escuela de Guardamarinas se traslada a San Fernando; en sus enseñanzas se introduce tanto la física como las matemáticas.

En la Academia Militar, los estudios se centran en el aprendizaje de las matemáticas (aritmética, álgebra, geometría especulativa y práctica, trigonometría, mecánica y perspectiva), y su aplicación en las artes militares (artillería, fortificaciones, geodesia, etc.). Algunas academias militares de esta época son precursoras de las actuales ingenierías civiles.

Tras el régimen absolutista de Fernando VII y acabada la guerra civil, se plantean diversas reformas que producen cambios en la formación y competencias de los profesionales de la ingeniería civil y militar. Para el caso de la ingeniería militar se aprueba en el año 1839 un nuevo plan de estudios, a partir de las propuestas de Fernando García San Pedro. El reglamento de la academia amplia los contenidos científicos con una atención especial al apartado teórico y a la práctica experimental de la física y la química así como la renovación de los estudios de fortificación (Muro, 2002).

Las innovaciones educativas están presentes en estas Academias; ello se refleja en la fundación del Real Instituto Militar Pestalozziano en 1807. En las academias militares están vinculados matemáticos de renombre, como directores (e.g., Bails), profesores (e.g., Feliu), miembros del cuerpo militar (e.g., Odriozola), y especialmente como autores de textos tanto para las propias academias como para la enseñanza de las matemáticas en general, con lo cual eran estos los lugares donde se instauran en primer término las novedades y adelantos matemáticos de la época.

2.7.2 Las Sociedades Económicas de Amigos del País

Se puede afirmar que las causas que motivaron el surgimiento de estas sociedades en España fueron: el despotismo ilustrado, el ideario de los ilustrados y la política económica borbónica (López Torrijo, 1991).

La tertulia del Conde de Peñaflorida da lugar a la Sociedad Bascongada, que fomenta la química y la minería. Campomanes ampara esta idea, que impulsa las Sociedades Económicas de Amigos del País, con un papel similar al de las academias provinciales francesas, que se proponen desarrollar el saber y la riqueza. Las Sociedades se interesan por los saberes prácticos, pero también se preocupan por las aplicaciones útiles de disciplinas teóricas, incluidas las matemáticas.

Las actividades de las sociedades están dirigidas a estimular los adelantos y mejoras en agricultura y en otros ramos de la industria; están orientadas a plasmar las aspiraciones económicas de una parte de los grupos sociales. Allí eran debatidos programas y reformas económicas. Entre otras actividades, llevan a cabo labores de enseñanza como puede apreciarse en los estatutos de muchas de ellas. Sin embargo, esta enseñanza está dirigida a la educación de los niños nobles, como indica Campomanes (1723-1802) en su discurso sobre el fomento de la industria.

Algo que caracteriza a estas sociedades fue su estructura uniforme, de manera que casi no se perciben diferencias entre las muchas que se crean. Como afirma López Torrijo (1991, p. 21):

> *"[...] las sociedades Económicas fueron para España agentes activos del progreso, principalmente en el terreno económico y en el educativo. Las reformas que llevaron a cabo pueden parecer, vistas desde ahora, sencillas o pretenciosas, pero, en su momento fueron francamente novedosas y progresistas"*

Así las sociedades Económicas de Amigos del País son instituciones sin poder efectivo pero cargadas de una alta influencia de ideas ilustradas; obran con una mezcla de intenciones y propuestas de desarrollo y progreso en el campo económico y en el educativo.

Las Sociedades Económicas tenían relaciones con los vecinos europeos; Moreno (1988) indica que por ellas pasaron personalidades de la importancia de Ruelle, Black, Llande, Morveau, Lapplace, etc.; además en casi todas ellas se dispone de la Enciclopedia, los libros de los enciclopedistas y los teóricos de las ciencias de la época.

En general, podemos afirmar que las Sociedades Económicas fueron un buen instrumento para el amparo y difusión de las ideas ilustradas y, sobre todo, al estar diseminadas por todo el territorio español, son focos de difusión de las nuevas ideas y del espíritu reformador del siglo; permiten acercar los avances científicos a lugares alejados de Madrid o Barcelona. Intentan remediar no sólo el estancamiento social y económico, sino también el aislamiento cultural. Los miembros de las Sociedades, con las tertulias y los debates, así como con lecturas de obras casi siempre foráneas, adquieren conocimientos. Mediante la fundación de escuelas primarias y con la enseñanza profesional, dan un nuevo impulso a la educación, permitiendo un relevo en la enseñanza brindada hasta el momento por la Compañía de Jesús. Estas sociedades han sido objeto de amplios y profundos estudios, los cuales no corresponde tratar aquí (e.g., Arenzana, 1987; Capitán Díaz, 1991; Moreno 1998, etc.).

2.8 Periodo Romántico

Durante las tres primeras décadas del siglo XIX, España pasó por la ocupación y el dominio francés, la invasión de ejércitos ingleses y portugueses aliados para la expulsión de los franceses y por la independencia de sus colonias americanas; gozó de un breve periodo de expansión de las ideas liberales y estuvo sometida a un férreo control absolutista. Esta enorme inestabilidad política tuvo repercusiones en lo social, económico, cultural y científico. Hemos elegido llamar periodo Romántico al comprendido entre 1814 y 1875, por entender que los sentimientos e ideas románticas son un rasgo común a todos estos años. En el periodo Romántico, el aspecto científico es igual de irregular que el político. Inicialmente los hombres de ciencia son marginados con el retorno de Fernando VII al trono. Luego, en el trienio constitucional (1820-1823), intentan asumir protagonismo y dinamizar la ciencia en España; pero, con la caída del régimen liberal, la mayoría se exilia, y con ello se estanca el desarrollo científico.

Con el triunfo de las ideas liberales, a partir de 1833 regresan al país los exiliados y empiezan a ocupar cargos de responsabilidad en la administración pública; estos académicos se hallan con un ambiente más propicio para fomentar la creación de sociedades, institutos y escuelas técnicas. Estos generan una leve mejoría en la actualización de los conocimientos científicos y un aumento de las traducciones de las obras extranjeras.

La procedencia de los exiliados que se reintegran a la patria y los contactos que habían establecido en el extranjero determinan su orientación intelectual y política; en muchos casos sirve, además, para la creación de grupos de intelectuales que, a través de sus ideas, pretenden mejorar y transformar la sociedad española a lo largo de todo el siglo XIX. A continuación veremos algunos de estos influyentes grupos.

2.8.1 Los afrancesados

Se llamó afrancesados a aquellos que aceptan la renuncia de Carlos IV y de Fernando VII. Estos "*afrancesados*", pese a ser considerados popularmente como "*renegados*" y "*traidores*", eran en realidad políticos e intelectuales de espíritu liberal, que creían ver, en la venida de las tropas de Napoleón, la ocasión de que penetrasen las ideas renovadoras de la Revolución Francesa en una

España atrasada y reprimida. Los componentes de este grupo proceden de los ilustrados del siglo XVIII y pertenecen a las más altas capas de la sociedad; se sienten atraídos por el prestigio de Napoleón porque había consolidado la revolución o porque había restaurado el orden (nobleza y clero).

Se ponía así de manifiesto un claro rechazo al antiguo régimen. Entre las figuras españolas afrancesadas destacamos a Sebastián Miñano, Félix José Reynoso y Joaquín Mª Sotelo. Como eran partidarios del rey José Bonaparte, se les conocía también como *josefinos*.

La inmensa mayoría del pueblo no estaba de acuerdo con esta actitud por lo que los afrancesados eran tachados de traidores; aunque en la actualidad, muchos historiadores están de acuerdo en aceptar su buena fe. El número de afrancesados que se expatriaron al terminar la guerra de la Independencia fue de unos doce mil. Algunos de ellos regresan cuando en 1823 se restaura el Absolutismo gracias al apoyo que el ejército francés prestó a Fernando VII con los *cien mil hijos de San Luis*.

La ideología de los afrancesados, al enlazar con la de los ilustrados, les llevó a defender una monarquía autoritaria capaz de realizar las reformas y, al mismo tiempo, evitar la alternativa revolucionaria. Esta concepción tienen los decretos que promulgó Napoleón tras la ocupación de Madrid en 1808 y que se referían a la supresión del régimen señorial y de la Inquisición, a la reducción del número de conventos y al traslado de las aduanas a las fronteras así como los proyectos de reforma del Código Civil y de la administración y la eliminación de las tierras en manos muertas.

Las razones que explican la ayuda de los afrancesados a José Bonaparte son variadas. Algunos están convencidos de la necesidad de una reforma política y social en España, la cual, en esos momentos evitaría excesos revolucionarios. Por otra parte la tradición secular de la alianza con Francia en relación a la hegemonía británica en los mares coloniales y el deseo de evitar la guerra con Napoleón anima también a estos hombres, por conveniencia nacional, a apoyar al nuevo rey. Además, la Constitución de Bayona, proclamada en julio de 1808, les ofreció suficientes garantías en relación a un probable “despotismo” que habían sufrido durante el reinado de Carlos IV.

2.8.2 Los jovellanistas

Un importante grupo de intelectuales opuestos al gobierno de Napoleón recibieron el nombre de jovellanistas porque siguieron las doctrinas de Gaspar Melchor de Jovellanos (1744-1811), el gran pensador de la Ilustración española, muerto en plena guerra de la Independencia. Aunque este grupo no aceptó las renuncias de Bayona, coincide con los afrancesados en proclamar la necesidad de reformas en el seno del Estado. Los jovellanistas consideran que una nación es un concepto histórico, en la cual cada generación debe tener en cuenta la labor de la anterior, que para serlo debe contar con una constitución, que recoja las leyes tradicionales; los jovellanistas constituyen una vía intermedia entre los absolutistas y liberales puesto que defienden una soberanía compartida, un sistema bicameral tipo británico y eran partidarios, no de una Constitución, sino de renovar las viejas leyes de los reinos españoles. Como modelo de sistema político toman el de Gran Bretaña y consideran la necesidad de independencia del poder judicial y la intervención de las Cortes en el gobierno y en la labor legislativa (Fernández Sarasola, 2002).

Fernández Sanz (1996, p. 25) afirma que en el pensamiento de Jovellanos, están latentes el reformismo y la utopía: "*la creencia en la idea de progreso indefinido. Así, lo utópico no es algo añadido o un recurso meramente literario, sino la culminación de su actitud ilustrada*".

Los ideales utópicos de Jovellanos se conseguirían partiendo de lo que cada nación había adelantado ya, a través de la evolución y la ilustración de los hombres, de tal forma era claro para él que la felicidad no se conseguía de golpe y de forma inmediata, sino de forma progresiva como ocurre en la naturaleza (Fernández Sanz, 1996). En suma, Jovellanos fue un hombre atento a las grandes transformaciones que experimentaba el mundo a su alrededor y quienes seguían su doctrina pretendían llevar esas transformaciones al reino.

2.8.3 Los liberales

La filosofía de Locke fue rescatada y enriquecida por la Ilustración francesa, y, de forma destacable, por Voltaire, el cual insistía en que el Estado era superior a la Iglesia; pedía: la tolerancia para todas las religiones; abolición de la censura; un castigo más humano para los criminales; y una organización política sólida que se guiara sólo por leyes dirigidas contra las fuerzas opuestas al progreso social y a las libertades individuales. Para Voltaire, al igual que para Diderot, el Estado es un mecanismo para la creación de felicidad y un instrumento activo diseñado para controlar a una nobleza y una Iglesia muy poderosas. Ambos consideran estas instituciones como los fundamentos del sistema político del Antiguo Régimen, dedicadas al mantenimiento de las antiguas formas de poder. En España y Latinoamérica a comienzos del siglo XIX se generaliza entre los pensadores y políticos ilustrados una poderosa corriente de opinión liberal. La propia palabra *liberal* aplicada a cuestiones políticas y de partido se utiliza por vez primera en las sesiones de las Cortes de Cádiz y sirvió para caracterizar a uno de los grupos allí presentes, que mayor oposición presentó a los defensores del Antiguo Régimen.

La cuestión de cómo deben estar constituidas las Cortes es uno de los puntos que separa a los jovellanistas de los liberales; éstos, partidarios del liberalismo económico y político, defienden la cámara única. Como los jovellanistas, los liberales pertenecen a la intelectualidad y a la burguesía media, pero están más influidos por la ideología de la Revolución Francesa. No marginan totalmente las tradiciones políticas hispánicas, pero consideran imprescindible recoger las bases de la reforma en una Constitución escrita.

Las ideas liberales habían penetrado en España procedentes de Francia, en los últimos años del siglo XVIII y primeros del XIX, pese a la censura oficial. No obstante, fue la guerra la que brindó la oportunidad a quienes las defendían de expandirlas más allá del limitado círculo en que habían arraigado. El ambiente revolucionario de Cádiz permitió que el ideario liberal pudiera concretarse en la Constitución de 1812.

Los liberales de comienzos del siglo XIX creen en la felicidad como aspiración de todos los hombres, en el progreso material y en la libertad individual. Defienden la aspiración a la riqueza y la propiedad privada individual y libre como derecho fundamental de los hombres y como elemento que diferencia socialmente a los individuos. Para que todos puedan concurrir libremente en la búsqueda de la riqueza, consideran necesario que existan unas reglas que garanticen dicha libertad; estas son: las leyes del mercado y la libre concurrencia de la oferta y la demanda. También ven necesario que exista una situación legal que garantice a todos las mismas posibilidades iniciales de acceso a los cargos y al poder político. De ahí la insistencia en los derechos del individuo y el frecuente olvido de los derechos sociales o colectivos. Los liberales postulan un régimen político libre y parlamentario, en oposición al absolutismo monárquico.

Hernanz y Medrano (1990) califican al matemático granadino José Mariano Vallejo y Ortega como un liberal ilustrado, que se comprometió con los ideales liberales durante la guerra de la independencia y durante su participación en las Cortes de Cádiz; postura que mantuvo a lo largo de su vida política, lo cual le llevó a ocupar destacados cargos de responsabilidad; pero también a su destierro.

2.9 Escuelas y planteamientos filosóficos

Durante el siglo XVIII, en España se refleja la influencia de las corrientes de pensamiento originadas a partir de la segunda mitad del siglo XVII; el XIX fue fecundo en planteamientos filosóficos y confrontaciones entre los partidarios de las distintas corrientes que llegan del resto de Europa, fomentadas en parte por la mayor facilidad de acceso a obras y publicaciones extranjeras. El Positivismo, Neokantismo y Krausismo originan profundos debates en la sociedad y en los círculos académicos españoles. En muchas ocasiones, esto llevó al desarrollo de políticas, instituciones y de nuevas opciones para la difusión de la ciencia y la cultura a través de propuestas educativas y de formación. Además de su interés intelectual intrínseco, el conocimiento de estas escuelas filosóficas es importante en este trabajo porque, a partir de ellas, se mantuvieron posturas distintas y, a veces, contrapuestas sobre los conceptos de cantidad, número y medida. También se preocupan por los fenómenos que sustentaban la noción de negatividad, que fue objeto de debate filosófico en estos años y a quienes autores tan significativos como Kant y D'Alambert dedicaron reflexiones específicas, ya consideradas en el Apartado 1.3 de esta memoria. La interpretación de las obras y autores que analizamos no puede hacerse al margen de los fundamentos filosóficos que los sustentan. Por eso el interés de su descripción detallada y de su ubicación en la sociedad intelectual española del siglo XIX.

2.9.1 Racionalismo

La razón se considera la única base del saber. Este hecho favorecerá el desarrollo del pensamiento científico. Bajo este principio fundamental de la Ilustración, era la razón el criterio de verdad para la creencia y el saber. El racionalismo del siglo XVII tenía a la razón como un principio deducido apriorísticamente que actuaba sobre los hechos para imprimirles la verdad. En la visión ilustrada del XVIII, la razón procede de los hechos a los principios; se entiende la razón como una actitud epistemológica que integra la experiencia y como una norma para la acción moral y social.

El racionalismo critica al pensamiento filosófico medieval, que sustentaba al escolasticismo universitario, por que:

- Reconocía como valedero y decisivo el llamado *criterio de autoridad*, es decir, admitía que lo dicho por ciertas autoridades –la Biblia, la Iglesia, Aristóteles- era verdad por el sólo hecho de que tales autoridades lo afirmasen.
- Se sostenía sobre planteamientos verbalistas, centrados en discusiones terminológicas o con solo vocablos o distinciones verbales para resolver los problemas.
- Abusaba de manera permanente de argumentos basados en un exceso de silogismos por parte de la ciencia y la filosofía escolástica.

Dentro del racionalismo surge una corriente llamada criticismo, en la cual el ilustrado aspira a someter a crítica racional todo el conocimiento anterior. La razón tiene su fuerza en el carácter analizador de los hechos, es decir, a través de la experiencia se analizan los acontecimientos.

Fue Fray Benito Feijoo el máximo representante del racionalismo español durante el siglo XVIII. Dice el padre Venancio Carro (1929) que el racionalismo español en el siglo XIX estuvo también representado por de Giner de los Ríos, Pi y Margall, Salmerón, Azcárate, Arnau e Ibáñez (autor de una Metafísica) y, el krausista Sanz del Río.

2.9.2 Empirismo

Frente a cualquier forma de imposición intelectual que pretenda estar en posesión de la verdad, los ilustrados contraponen su fe en la experimentación para poder conocer el mundo y conseguir el progreso. El pensamiento ilustrado se apoya sobre la terna: razón, naturaleza y experiencia. Así, se aplica la razón a todo tipo de verdad, sea ésta de conocimiento o religiosa. Además, para que sea admitida una verdad, ésta, como condición necesaria, debe ser sometida o comprobada mediante la experiencia.

El empirismo supone una crítica a los racionalistas bajo el supuesto de que la razón tiene carácter ilimitado e incluso el propio proceso racional puede producir cualquier tipo de conclusión. La razón por sí misma no tiene fundamento y funciona a partir de supuestos. Por tanto, sólo se consideran válidos los conocimientos adquiridos mediante la experiencia.

Los principales representantes de esta corriente filosófica son: Bacon, Hobbes, Newton, Locke, y Hume. De ellos, Bacon y Newton trabajaron preferentemente en el campo de las ciencias naturales.

La limitación del empirismo consiste en sobrevalorar metafísicamente el papel de la experiencia a la vez que subestima el de las abstracciones y teorías científicas de la cognición; esto es, negar el papel activo y la independencia relativa del pensar (Rosental & Ludin, 1965).

En España enarbolan la bandera empirista Esteban Arteaga, José García Noriega, Juan Zambrana y Felipe Fernando O'Conry (1726-87) (Méndez Bejarano, 1927).

2.9.3 Kantismo

La doctrina racionalista kantiana trata de explicar cuáles son las condiciones objetivas que posibilitan nuestro conocimiento, y sostiene que éste se basa en dos fuentes: la *sensibilidad*, que es pasiva y tan sólo recibe impresiones del exterior (las ideas simples de Locke), y el *entendimiento*, que es activo y produce espontáneamente ciertos conceptos e ideas sin que éstos sean derivados de experiencia alguna.

Diferencia fundamental entre las tesis de Kant (1724-1804) y el empirismo es que, en este último, todos los conceptos provienen de la experiencia; mientras que, para Kant, el entendimiento posee conceptos que no provienen de la experiencia, sino que la configuran, así tan solo tengan aplicación válida dentro de ella (Navarro & Calvo, 1988).

Las condiciones intelectuales del conocimiento, es decir, el conocimiento intelectual para Kant podría resumirse así:

- La función de comprender o entender se realiza mediante conceptos.
- Se distinguen dos tipos de conceptos distintos: los empíricos y los puros o categorías.
- Los conceptos puros son condiciones trascendentales y totalmente necesarias para el conocimiento de los fenómenos.
- Los conocimientos puros o categorías son vacíos, por lo que deben

llenarse con datos provenientes del conocimiento sensible.

Como hemos señalado en el Apartado 1.3.3, Kant considera la cantidad como una de las categorías principales, aquella que permite estructurar matemáticamente los aspectos cuantificables de la experiencia. La aportación de las ideas de Kant al desarrollo de las matemáticas de finales del XVIII y comienzos de XIX es reconocida como importante. En nuestro caso lo hemos visto con su estudio de las magnitudes negativas.

Sobre la difusión de Kant en España, algunos autores coinciden en señalar que su recepción en el siglo XIX fue, además de tardía, débil y esporádica; Albares (1996, p. 31) señala que la introducción y el acceso a la filosofía de Kant en España puede sintetizarse en estas ideas:

> *"1) Kant es conocido de nombre y lo más que se tiene de su filosofía, al menos en la primera mitad de siglo, son meros testimonios, por lo que muy bien puede concluirse que es prácticamente desconocida;*
> *2) El conocimiento que se tiene de la filosofía de Kant no es directo, sino a través de obras francesas;*
> *3) Aun cuando, especialmente en el último tercio de siglo, exista algún pensador kantiano, se pone en duda que a sus ideas filosóficas se les pueda apellidar de kantianas en sentido estricto".*

El influjo kantiano en España se había notado a través de traducciones hechas por Renoivier y Tissot. Entre las décadas de 1850 y 1870, la presencia de las doctrinas de Kant en el sector escolar era mínima como lo prueba que tan sólo existían el *Curso completo de filosofía* de Tissot y traducido por Núñez de Arenas, el *Curso de Psicología y Lógica* de José María Rey y Heredia y Pedro Felipe Monlau; los *Elementos de ética o tratado de filosofía moral*, *Elementos de lógica* y *Teoría trascendental de las cantidades imaginarias,* todos ellos de José María Rey y Heredia (Capitan Díaz, 2000). Menéndez y Pelayo (citado por Méndez Bejarano, 1927) considera que esta última obra era la más original que el movimiento kantiano había producido en suelo español.

Refiriéndose al surgimiento de una corriente de neo-kantismo en España, afirma Méndez Bejarano (1927, p. 456) *"no tenía el neo-kantismo otro valor que el de un puente por donde los krausistas poco convencidos pudiesen derivar al positivismo"*; así mismo, el kantismo se acercó a los laboratorios estrechando el contacto entre la filosofía y la ciencia experimental, originando una corriente llamada neo-kantista, distinta del neo-kantismo.

2.9.4 Positivismo

El término positivismo fue utilizado por primera vez por el filósofo y matemático francés del siglo XIX Auguste Comte (1798-1857), pero algunos de los conceptos positivistas se remontan al filósofo británico David Hume, al filósofo francés Saint-Simon y al filósofo alemán Immanuel Kant. Comte intentó llevar al estado positivo el estudio de la humanidad colectiva, es decir, convertirlo en ciencia positiva.

El positivismo consiste en no admitir como válidos científicamente otros conocimientos que los que proceden de la experiencia, rechazando, por tanto, toda noción “a priori” y todo concepto universal y absoluto. El hecho es la única realidad científica, y la experiencia y la inducción, los métodos exclusivos de la ciencia. Por su lado negativo, el positivismo es negación de todo ideal, de los principios absolutos y necesarios de la razón, es decir, de la metafísica. Considerado como sistema religioso, el positivismo es el culto de la humanidad como ser total y simple o singular.

En términos generales, el positivismo es:

- Una filosofía de la historia.
- Una teoría metafísica de la realidad, entendida con caracteres tan originales y tan nuevos como el de ser social, histórica y relativa.
- Una disciplina filosófica entera: la ciencia de la sociedad.

Por lo tanto, el positivismo consiste en una epistemología que plantea la naturaleza empírica del conocimiento; en una teoría que enlaza ese conocimiento al desarrollo intelectual del individuo y de la sociedad, y en un plan para aplicar los métodos de la ciencia al estudio de las relaciones sociales. Intenta reemplazar, en nombre del progreso, la religión y la metafísica con los procedimientos empíricos de la ciencia moderna.

Afirma Méndez Bejarano (1927) que en España se dieron varias direcciones filosóficas de corte positivista:

- *El transformismo* representado por Antonio Machado y Núñez, Rafael García Álvarez y Manuel Medina Ramos.

- *El positivismo de Comte*, representado por el sacerdote Félix Varela Morales, José Segundo Flórez, Andrés Poey y Aguirre.

- *El Spencerianismo*, representado por Carlos Cortezo, Luis Simarro y Lacabra y Francisco María Tubino.

2.9.5 Krausismo

Filosofía de Karl Christian Friederich Krause (1753-1835), el cual reclamaba la verdadera interpretación de Kant. Krause se sitúa en el contexto del idealismo alemán; parte de un análisis subjetivo de los contenidos de la conciencia a través del cual el mundo se le revela como un sistema. La preocupación por la ciencia es una constante entre sus seguidores.

El krausismo es un racionalismo armónico, una doctrina que potencia al máximo la misión de la razón universal como poder capaz de armonizar en una síntesis superior. Hay una creencia en el progreso moral de la humanidad (Abellán, 1984). Tuvo su influjo decisivo en España de 1860 a 1870. Esta filosofía alcanzó gran difusión en universidades e institutos de provincias, todo ello como consecuencia de la difusión hecha desde la Universidad Central de Madrid.

Uno de los pilares del Krausismo era la afirmación de la perfectibilidad moral del hombre y de la sociedad. Dentro del ideario krausista se concede importancia a conceptos tales como libertad, responsabilidad, autonomía espiritual, tolerancia, respeto, etc. El krausismo pregona contra el escolasticismo y el tradicionalismo político, social y educativo.

El liberalismo político y económico fue uno de los elementos fundamentales del Krausismo español, el cual tenía *"como divisa la defensa de las libertades en los ámbitos intelectual, político, económico, religioso...como determinantes de la dignidad del hombre"* (Capitán Díaz, 2000).

Los más destacados seguidores en España fueron entre otros: Gumersindo de Azcárate, Julián Sanz del Río, Francisco Giner de los Ríos y Fernando de Castro. Según Méndez Bejarano (1927), el aporte de Sanz del Rio *"[...] consistió en un sincero entusiasmo por la ciencia, una honradez científica a toda prueba y el mérito de haber atraído a la filosofía la juventud de su tiempo, enseñándola a pensar con método y pureza de intención."* y Giner de los Rios *"es el pedagogo de la escuela, y por más que su sistema educativo no pueda adaptarse por guía perfecta a la actual modalidad social, ni su ideal concierne con las vulgares ideas acerca del bien y la misión humana, no ha dejado de señalar el procedimiento para hacer hombre"*. Así, es en la educación donde se palpa de manera más notable la influencia del Krausismo, como en la legislación sobre la enseñanza en 1869 (Abellan, 1984), también se refleja en el Discurso de la apertura del curso 1868-1869 leído por Fernando de Castro al tomar posesión como rector de la Universidad Central. Esta influencia se refleja en la Universidad con la aplicación de tres principios: libertad de la ciencia, inviolabilidad del magisterio y descentralización administrativa. El desarrollo de la educación femenina está ligado a los ideales krausistas y al empuje de sus seguidores, lo que llevó a la creación de algunas instituciones.

2.9.6 Catolicismo liberal español

El liberalismo católico fue una corriente política del siglo XIX, la cual representa en España la búsqueda por el progreso de la sociedad; en muchos casos, mediante el desarrollo de la educación; esto venía a significar un choque con la Iglesia de la época aferrada a lo contrario por miedo a perder su poder e influencia en la sociedad, cosa que ya había acontecido a la Compañía de Jesús en el siglo XVIII con su expulsión.

Los principios del catolicismo liberal (Chacón, 1996) están en asumir la crítica y el rechazo de las posiciones ultramontanas por motivo de:

1. La falta de libertad de conciencia religiosa.
2. La falta de justicia en la Iglesia Romana.
3. El Vaticano I con la infalibilidad del Papa, que la mayoría de los intelectuales no admite.

La situación política en Italia, ocupada por el proceso de su unificación, llevó a la desaparición del Estado Pontificio y del poder temporal del Papa. Estos hechos coinciden con un estancamiento y regresión intelectual que caracterizan la posición de la iglesia católica en el siglo XIX. La encíclica *Quanta cura* y el *Syllabus* de Pío IX, en 1864, suponen una intolerancia incomprensible, ya que condenan el catolicismo liberal y representan la cerrazón de la Iglesia en sí misma frente a todo *adelanto científico o progreso intelectual,* según condena la proposición 80 del referido *Syllabus.* El Concilio Vaticano I en 1870 contribuye a incrementar este distanciamiento de la sociedad civil y a reforzar este malestar general con la declaración de la infalibilidad del Papa, frente a los movimientos filosóficos imperantes por entonces: positivismo, materialismo, idealismo alemán, anticlericalismo francés y del catolicismo liberal con Lamennais, Montalembert en los Congresos de Malinas (Chacón, 1996).

Los neocatólicos y los ultramontanos pretenden utilizar la religión como si fuese un partido político, para de esta manera tener el favor social y mantener sus privilegios. Indica Chacón (1996, p. 37) que *“El peor de ellos fue D. Marcelino Menéndez Pelayo, que consideramos fue el culpable de que se le condenase a D. Fernando [de Castro] a un ostracismo histórico, haciendo que no se investigase debidamente”*.

Fernando de Castro realiza viajes al extranjero, donde pudo apreciar la libertad y comprensión en que viven los católicos, los ortodoxos, los judíos y los protestantes. La encíclica *Quanta Cura* y el *Syllabus,* con su proposición 80 que condenaba a toda ciencia y progreso humano, determinaron que entrase en crisis espiritual y adoptase posiciones avanzadas de orientación liberal. Por esta postura liberal recibió múltiples ataques en la prensa neocatólica y en la Universidad. Su deseo constante fue la separación de los poderes de la Iglesia y el Estado, y la libertad en todos los órdenes.

2.10 Educación y enseñanza en el siglo XIX

Desde el primer tercio del siglo, la educación es objeto de legislación por parte de la Administración; en 1813 se publica en Cádiz el *Informe de la Junta creada por la Regencia para proponer los medios de proceder al arreglo de los diversos ramos de Instrucción Pública*, más conocido como *Informe Quintana*. Durante el trienio liberal esta separación se evidencia en las Actas de Cabildo entre 1820 a 1823 y con el Reglamento de 1821 donde se recogen las ideas del informe Quintana. La educación alcanza tal protagonismo en la vida real, que llega a tener dedicada en exclusividad a este asunto una comisión municipal denominada *Educación y establecimientos de instrucción y ciencia*. Se separan de esta forma los asuntos educativos de los benéficos que anteriormente figuraban en la Comisión de *Escuelas y Establecimientos Piadosos*. Posteriormente se vuelven a unir en la *Comisión* de *Beneficencia e Instrucción Pública*.

De forma general los nuevos conocimientos científicos llegan a España a partir de 1835 gracias a las subvenciones que el Estado otorga a ciertos personajes para realizar estudios en el extranjero y, en menor medida, a los científicos extranjeros que residieron temporalmente en España (Vernet, 1998).

El estado liberal de Isabel II pretende establecer un sistema educativo con un control gubernamental y centralista. Sucesivos gobiernos legislan sobre la educación primaria. Así ocurre con el *Plan de Instrucción Primaria* en 1838 y la ley de *Claudio Moyano* en 1857, esta última regula todos los niveles educativos en España. Estas leyes clasifican las escuelas en elementales y superiores; en ellas se establecen dos títulos distintos de maestro: elemental y superior. El *Plan de Instrucción Primaria* preveía la creación de Escuelas Normales en toda España; de tal forma que en 1839 se crea la Escuela Normal Central, luego se siguen creando en todas las provincias (Carrillo, 1996).

A lo largo de este periodo fueron reiteradas las ocasiones en que se regula la enseñanza primaria; y se hace patente el celo en el control de los centros universitarios. Las sucesivas reformas están relacionadas con la intención de acentuar los aspectos utilitarios de la enseñanza. Después de muchas propuestas y leyes que no se llevan a la práctica o no se consolidan, es con la *Ley Moyano* con la que se llega a un momento culminante en la regulación de la educación en los niveles primarios y secundarios. Es claro que, todas la reformas del sistema educativo efectuadas por los gobiernos liberales se orientan al apoyo del desarrollo económico de la emergente sociedad burguesa (Vera, 1995).

De esta época es también el discurso pronunciado por D. Acisclo Fernández Vallín y Bustillo en 1857, con motivo de recibir la investidura de Doctor en la Facultad de Filosofía, titulado: *"El estudio de las matemáticas es el más general y necesario como organizador de las ciencias y auxiliar de las demás ciencias."*.

Mediante el decreto del 2 de junio de 1873 se pretende dar un sentido moderno a las facultades universitarias, diferenciándolas por su contenido específico (Moreno, 1988). De la Facultad de Ciencias se originan tres nuevas titulaciones: Matemáticas, Física y Química e Historia Natural. Una de las innovaciones que aparecen es la creación de asignaturas obligatorias y optativas (Trigueros, 1996).

Las libertades otorgadas durante el sexenio democrático permiten que las bases de la educación y la cultura establecidas durante este periodo puedan continuar desarrollándose durante la Restauración. Este ambiente propicio hizo que el krausismo impulsara la educación de la mujer. Los krausistas progresan en el planteamiento de ideas sobre la metodología de la ciencia y lo plasman en diversos documentos, entre los que destaca especialmente el trabajo *Sobre el concepto y división de la matemática. Introducción a las bases para un sistema filosófico de la matemática*, publicado en 1876 (Peralta, 1999).

La libertad de enseñanza y la autonomía universitaria fueron aspectos de gran importancia que fomentan e impulsan la discusión y el debate académico en todos los órdenes en las distintas instituciones culturales. Este ambiente hizo surgir el deseo de tener instituciones de enseñanza al margen de la universidad oficial basadas en las ideas democráticas; de esta manera, se funda en 1876 la *Institución Libre de Enseñanza*.

En particular se suscitan debates relacionados con la enseñanza de las matemáticas; por una parte se discute la utilidad de esta disciplina, por otra parte, hay una rivalidad entre las Facultades de Ciencias y las Escuelas de Ingenieros sobre su enseñanza (Peralta, 1999).

Las matemáticas y su enseñanza en la secundaria se beneficiaron con el Plan de estudios del 16 de septiembre de 1894, pues se dividía esta segunda enseñanza en dos partes: unos estudios de carácter general con una duración de cuatro años y unos estudios preparatorios con una duración de dos años, fomentando una profundización en las ciencias en general (Vea, 1995).

2.11 Matemáticas

Estos dos siglos XVIII y XIX fueron uno de los periodos de mayor riqueza y fecundidad en el desarrollo de las matemáticas en Europa. Por ejemplo, los matemáticos europeos del siglo XVIII discuten y ensayan muchos procedimientos para fundamentar el análisis infinitesimal. Este proceso de construcción y conceptualización se reveló claramente en los años veinte del siglo XIX, sobre todo en los trabajos de Agustín-Luis Cauchy y en sus conferencias, que fueron publicadas en: *Curso de análisis* (1821), *Resumen de conferencias sobre el cálculo de infinitesimales* (1823) y *Conferencias sobre aplicaciones del análisis a la geometría* (dos tomos 1826,1828).

El descubrimiento en los años 1820-1830 por Lobachevski, Bolyai y Gauss de los hechos fundamentales de la geometría hiperbólica no euclideana y la búsqueda de sus interpretaciones en los años 1860-1870, provocaron en el sistema de las ciencias geométricas, transformaciones de carácter revolucionario. El sistema de disciplinas que forman parte del análisis matemático sufre en sus fundamentos una muy profunda reconstrucción sobre la base de la creada teoría de límites y la teoría del número real. Junto a este desarrollo del análisis matemático clásico, se separan de él disciplinas matemáticas independientes: la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría de funciones de variable real y la teoría de funciones de variable compleja.

En álgebra hay que tener en cuenta los trabajos de Abel y Galois sobre la resolución de ecuaciones algebraicas en radicales. Ellos promueven a un primer lugar, en el álgebra, una serie de conceptos generales muy abstractos, entre los cuales merece el primer lugar el concepto de grupo. El concepto de número entero es el último que se establece formalmente, lo cual hace Hankel en 1867. En la obra de Euler, *Elementos de Álgebra*, escrita en 1770, encontramos las condiciones formales de los enteros expresadas con el lenguaje de la época. Por ello subrayamos que el concepto de número entero estaba construido en la época de la que nos ocupamos, pero tuvieron que transcurrir casi 100 años para su definitiva formalización.

Gracias al movimiento ilustrado, las ciencias, y con ellas las matemáticas, salen de los reductos cerrados de los investigadores y se difunden en círculos más amplios de personas interesadas por el conocimiento fundado y, en algunos casos, se popularizan y pasan a ser parte del dominio público. Pero sin lugar a dudas, los dos aspectos más destacados para las matemáticas y su difusión en España en esta época, tienen que ver: en primer lugar, con la flexibilidad de la censura hacia los textos matemáticos, lo cual permite que las obras científicas de esta área lleguen más fácilmente a España; en segundo lugar, con la publicación de los textos en castellano, dejando ya de lado las publicaciones en latín, lengua reservada desde hacía mucho tiempo sólo a la nobleza, al clero y a los eruditos.

2.11.1 Las Matemáticas españolas: la universidad

Durante el reinado de Fernando VII se produce una disminución en la actividad científica considerable, que luego se intenta subsanar adoptando e importando el modelo científico francés, justamente cuando la hegemonía científica francesa empezaba a ser desplazada y sustituida por los avances científicos que se producían en Alemania, por lo que continúa rezagada con respecto al ámbito científico europeo. Se intenta copiar el modelo francés de educación orientada a las ciencias aplicadas, para dar un gran impulso a las escuelas de ingenieros en detrimento de las facultades de ciencias. Esta situación se justifica con el argumento de que los ingenieros dotarían al país de aplicaciones prácticas, que ayudarían a la industrialización y al desarrollo, tan necesarios tras de la emancipación de las colonias americanas. Pero la opción elegida implicó falta de promoción para la ciencia básica, en favor de la ciencia aplicada que, dadas las condiciones, siempre tuvo una dependencia intelectual de ideas y producciones extranjeras.

Como afirman Peset et al. (1978), uno de los aspectos que permiten conocer los cambios en la enseñanza superior en la España del XIX es la evolución del profesorado en la Universidad. Esto se evidencia en el escalafón de Catedráticos de Universidad. El primer listado data de 1851; aunque, como en esta fecha no existían aún las Facultades de Ciencias, las asignaturas de matemáticas eran impartidas en la Facultad de Filosofía. Pues bien, en ese listado tan sólo figuran dos catedráticos de matemáticas: Francisco Travesedo y Juan Cortázar. En el nuevo escalafón del año 1859, sólo figura Cortázar, al jubilarse Travesedo.

Como se puede apreciar, algunas de las figuras destacadas de la matemática española se hallaban alejadas de los ámbitos universitarios, tal es el caso de Benito Bails, José Mariano Vallejo, Juan de Odriozola, José Maria Rey y Heredia y Jacinto Feliu. Esto se debe en gran medida a la falta de interés del gobierno para dotar las plazas de profesores de matemáticas, así como a lo inservible de los mecanismos utilizados para proveerlas (Peset et al, 1978).

Hacia el final del siglo XIX *"mientras que en Italia se estaban sentando las bases del cálculo tensorial, que constituiría el fundamento matemático para la teoría de la relatividad de Einstein, mientras que se estudiaban ya las geometrías riemannianas y estaba apareciendo la topología (analysis situs), aquí, salvo contadas excepciones, se continuaba con la Geometría de muchos siglos atrás"* (Martínez Naveria, 1998; *http://topologia.geomet.uv.es/naveira/DISCURSO.html*); este retraso prevaleció aún en los primeros años del siglo XX. Es evidente que, durante ciertas etapas de la historia española, los poderes públicos olvidan tomar iniciativas para superar el retraso científico; entre ellas, el apoyo a la ciencia básica y al desarrollo de los estudios matemáticos, lo que supuso un gravísimo daño para España (Martínez Naveira, 1998).

A finales del siglo XIX los estudios de matemáticas sólo se podían cursar en España en tres universidades: Barcelona, Madrid y Zaragoza.

2.11.2 Producción de textos matemáticos en España

Muchos historiadores llaman al siglo XVIII el siglo de los traductores ya que en gran medida los esfuerzos se dirigen a traducir las obras científicas que se producen continuamente en los países vecinos. Los textos matemáticos tienen como destinatarios estudiantes y profesores de las Academias Militares, Seminarios y Colegios Religiosos. Así ocurre con los textos escritos por autores españoles, como ejemplo tenemos las obras de Pedro de Ulloa, Juan Ulloa, Vicente Tosca, Jorge Juan, Thomas Cerda, Benito Bails y Juan Justo García.

En general, podemos decir que la segunda mitad del siglo XVIII en España se caracteriza por el incremento en la publicación de textos matemáticos. Las innovaciones en el conocimiento matemático español que se producen son debidas en su mayoría a la formación obtenida en el extranjero por académicos que viajan a realizar estudios (e.g. Cerdá, Ciscar, Bails, etc.).

Sin embargo, en el siglo XIX las mencionadas escuelas de ingenieros requieren de profesores con grandes conocimientos matemáticos para asegurar una enseñanza de gran calidad en estos centros. Aunque los matemáticos que imparten docencia en ellas no realizan aportaciones a la matemática en sí misma, sí realizan un gran aporte a su enseñanza, pues elaboran completísimos textos y manuales de matemáticas, oxigenando de esta forma la bibliografía matemática española, lo que permitió el abandono de las obras de Bails, Ciscar y Jorge Juan, entre otros.

La figura matemática destacada del primer tercio del siglo XIX es, sin lugar a dudas, José Mariano Vallejo, quien no sólo publica obras de gran importancia, si no que también orienta todos sus esfuerzos desde la Administración en mejorar la calidad de la enseñanza (Vernet, 1989; Hernanz, y Medrano, 1990; Gentil, 1999). Pero, exceptuando las obras de Vallejo, de gran calidad y valor tanto matemático como pedagógico, las primeras décadas del siglo XIX se caracterizan por la escasa producción de nuevos textos de matemáticas por autores españoles. Esta carencia se intenta compensar importando o traduciendo obras, especialmente francesas (por ejemplo las de Lacroix, Briot o Cirodde entre otras). Sin embargo, este panorama empezó a cambiar a partir del segundo tercio del siglo, en parte por la labor de los profesores de las Escuelas de Ingenieros que hemos comentado.

Otro hecho importante de la primera mitad del siglo XIX es el esfuerzo para introducir y establecer el sistema métrico decimal en España. Se habían realizado varios intentos para unificar las medidas del reino, pero una tras otro fracasaban. El auge y apoyo recibido por distintas naciones al sistema métrico decimal implantado en la vecina Francia apuntaba a que éste debía ser el apropiado para utilizarlo el reino español; sin embargo, es sólo bajo el reinado de Isabel II cuando se introduce por la ley de 19 de julio de 1849. Su implantación no fue nada fácil; ésto se evidencia tras las distintas prórrogas que se dieron a dicha ley. Finalmente es el decreto de 14 de febrero de 1879 el que la hace obligatoria. A partir de esta ley, surgen manuales dedicados a enseñar el sistema métrico decimal; otros manuales generales de aritmética incluyen un capítulo dedicado a ello. Al parecer hay conciencia de la importancia para el desarrollo tecnológico y comercial que conlleva la unificación de pesos y medidas en el territorio español con el sistema utilizado por sus países vecinos.

En 1851 en el concurso de textos para la segunda enseñanza, fueron aprobados los siguientes: *Elementos de Matemáticas, Tratado de Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría* y *Topografía* de Cortázar, *Curso completo de matemáticas* de Odriozola, *Tratado elemental de matemáticas* de Vallejo. Llama la atención el caso de Cortázar como autor de textos de gran calidad, dada la acogida que tenían; a modo de ejemplo vemos que su tratado de Aritmética tuvo su 1ª edición en 1846 y se llegó hasta la 45ª edición en 1923; su tratado de Trigonometría, cuya 1ª edición es de 1848 y la 24ª edición fue del 1925. Esta permanencia es un indicador de que sus textos tenían cierta calidad y ofrecían una enseñanza comprensible de contenidos necesarios y básicos, pero también muestra los escasos esfuerzos innovadores de la administración educativa y el escaso interés profesional por las nuevas ideas.

En este periodo Romántico surgen muchos autores de manuales matemáticos; entre ellos: José Ponce de León (1799-1852), Francisco Trevesedo (1786-1861), José de Odriozola y Onativa (1785-1864), Alberto Lista (1775-1848), Acisclo Fernández Vallín, José Maria Rey y Heredia, Juan Cortázar, José Oriol y Bernadet (1811-1860), Antonio Guillén y de Suárez (1807-1861), Pedro Manuel Navarro, Agustín Gómez de Santa María, Jacinto Feliú de la Peña, José Maria Fernández y Cardín, Felipe Picatoste y Rodríguez, Bernardino Sánchez Vidal, Ambrosio Moya de la Torre y Luciano Navarro e Izquierdo. Son traducidas las obras de Silvestre F. Lacroix, Carlos Augusto Briot, P. L. Cirodde y Pedro Luis Mª Bourdon; se continúan reeditando las obras de Gabriel Ciscar y Juan Justo García aunque ya, en menor medida. Algunos otros matemáticos españoles de principio de la época fueron: Pérez del Rivero, Alemany, Hinojosa, y Sánchez Cerquero. Vea (1995) destaca la aportación del libro de texto de matemáticas tanto en la divulgación del conocimiento como en la modernización de la educación.

En el ultimo tercio del siglo XIX, los autores más destacados de textos matemáticos son: Manuel Benítez y Parodí, Miguel Ortega y Sala, Antonio Terry y Rivas, Eugenio de Angulo, Jacinto Ros, Carlos Botello del Castillo, Manuel Burillo de Santiago, Luis García González, Marcelino Gavillán y Reyes, Antonio de Iturralbe, Tomás Mallo López, Santiago Moreno, José Ceruelo y Obispo, Eusebio Sánchez Ramos, Ramón de Bajo e Ibáñez, y Teodoro Sabrás y Causapé. Como se aprecia, este siglo es muy abundante en autores españoles de textos matemáticos.

Peset et al. (1978) realizan un análisis comparativo entre algunos textos matemáticos españoles y franceses del siglo XIX; en él hallan que, en los textos de segunda enseñanza, los temas están tratados casi exhaustivamente en ambos y no había apenas diferencias; pero, en los de enseñanza superior, sí hay diferencias significativas. Al comparar el texto *Teoría algebraica elemental de las cantidades que varían por incrementos positivos o negativos de sus variables componentes, o sea, Cálculo diferencial e integral* de García San Pedro editado en Madrid en 1828, con el texto *Elementos de Cálculo diferencial e integral* de Jean-Louis Boucharlat, traducido por G. del Campo de la cuarta edición francesa y publicado en Madrid en 1830, concluyen que el texto de San Pedro es especulador e inútil, mientras que el texto francés es didáctico y breve. Cuando comparan el *Tratado de Álgebra Elemental* de Cortazar con los *Elementos de Álgebra* de Bourdon, opinan que el texto español, aunque sigue el modelo francés, se centra en casos particulares alejándose de resolver la generalidad de los problemas, así mismo, indican que el primero es esquemático y falto de coherencia, mientras que el francés es deductivo, donde cada parte es consecuencia de la anterior.

Todo esto nos lleva a determinar que, aunque los autores de textos matemáticos españoles tienen conocimientos al mismo nivel que los franceses, hay diferencias apreciables en función del método utilizado para presentar los contenidos, es decir, la diferencia es de naturaleza didáctico- pedagógica.

Tal como se ha indicado, el interés por la difusión de las matemáticas no estuvo a la par con la construcción de nuevos conocimientos matemáticos por parte de los matemáticos españoles de la época; quienes, aunque están al tanto de los últimos avances, no producen nuevos conocimientos.

Uno de los rasgos más significativos del sistema educativo español es la implementación de la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos (primaria, secundaria y universidad), a través de una legislación para todo el territorio nacional, con unos conocimientos matemáticos comunes para todos los alumnos. Estas directrices fueron incorporando los nuevos conocimientos matemáticos en los libros de textos, dirigidos a un *público* escolar definido según el nivel educativo que se pretendía cursar.

En la segunda mitad del siglo XIX destacan personajes como José Echegaray, ingeniero, académico, político y ministro, quien aporta ideas renovadoras en geometría y física matemática. También sobresalen Eduardo Torroja Caballé, Juan Jacobo Durán Loriga y Eulogio Jiménez.

Merece mención la participación de matemáticos españoles en conferencias y organismos internacionales, como es el caso de Zoel García de Galdeano y Yanguas quien es, sin lugar a dudas, la personalidad matemática más destacada de este periodo y, al que se le deben grandes esfuerzos para conseguir la modernización de las matemáticas españolas. Fue un fecundo autor de textos y artículos y fundador en 1891, de la primera revista de Matemáticas de España: *El progreso matemático.*

2.12 Balance

Nada de lo referido es ajeno para el correcto uso e interpretación de las fuentes de datos utilizadas en nuestro estudio: los textos de matemáticas. El periodo histórico contemplado se ha presentado en unas etapas diferenciadas, que muestran un visión de conjunto y proporcionan cierta lógica al transcurso de los dos siglos considerados, al menos desde los intereses del trabajo que nos ocupa, y que desarrollan las conclusiones provisionales del estudio piloto ya realizado (Maz, 2000). Las reflexiones llevadas a cabo tienen por finalidad servir de referencia y ayudar en el análisis de los textos que sostienen esta investigación.

Los autores de los textos que consideramos en este estudio tienen una significación intelectual, política y social específica en el momento histórico en el que llevan a cabo su trabajo; están implicados en instituciones culturales, académicas y educativas; se encuentran comprometidos con un sistema de ideas predominante en su época y participan de la producción y transmisión de nuevas teorías matemáticas, que quedan reflejadas en las obras de las que son autores.

Al comenzar el capítulo nos planteamos algunas cuestiones, entre las que están: mostrar, mediante el análisis histórico-crítico, las distintas nociones de número, cantidad, cantidad negativa, orden y operación que intervienen y conviven en las distintas construcciones de los número negativos, y realizar un análisis del tratamiento didáctico de los números negativos en los libros de texto españoles de los siglos XVIII y XIX, destacando las conexiones entre fenómenos, conceptos, modelos y problemas. Es claro que sin un conocimiento de las ideas y de la cultura de la época, de sus organizaciones intelectuales, no es posible hacer tales interpretaciones.

Es por esto por lo que nos ha parecido esencial para el desarrollo de este trabajo y para la correcta comprensión de cada uno de los textos analizados, la caracterización social, política, institucional, filosófica, educativa, intelectual y matemática de los autores considerados y de la época en la que realizaron su obra. Para ello es para lo que hemos realizado una revisión del contexto histórico, científico y educativo en la España de los siglos XVIII y XIX, que queda reflejado en este capítulo.

CAPITULO 3: Diseño de la Investigación

PRESENTACIÓN

Es un hecho que en la actualidad las ciencias sociales y humanas, entre las que se encuentran las ciencias de la educación, a las cuales pertenece la Educación Matemática, han llevado a cabo procesos de interrelación mediante los cuales métodos y conceptos desarrollados en una de las áreas de conocimiento son aplicados en otras. Esto ocurre especialmente en las disciplinas educativas; y se produce porque la educación es un campo multidisciplinar, y cada disciplina trae al campo general de estudio sus teorías e incluso sus métodos específicos. De este modo, la Educación Matemática es concebible *"como un sector del campo disciplinar determinado por la educación general: una zona en la que precipita la matemática, como disciplina directriz, más que otras muchas disciplinas <partenaires>"* (Fernández Cano, 1995; p. 51).

Dentro de las propuestas metodológicas no empíricas a las que se recurre para la investigación en Educación Matemática están, por una parte, los métodos históricos, dado que su *"interés por el pasado puede permitirnos que no repitamos errores pretéritos"* (Fernández Cano, 1995; p. 61) y, por otro lado, el análisis del contenido.

Por lo tanto, es pertinente hablar de la aplicación de diversos métodos al estudio histórico; pues, como afirma Tiana (1988), las técnicas y modos concretos de actuar varían considerablemente en función de los objetivos del estudio, de su especificidad y de la restricción del ámbito de la investigación.

Tomando en consideración que la investigación descriptiva *"trata de describir un conjunto concreto de fenómenos en un momento determinado"* (Fox, 1981; p. 477) el estudio aquí presentado se enmarca en estos métodos de investigación descriptivos (Bisquerra, 1989; Cohen y Manion, 1989; Fox, 1981; Van Dalen y Meyer, 1981) y, específicamente, en la investigación histórica, puesto que ésta *“es un tipo especial de investigación descriptiva. Utiliza fundamentalmente metodología cualitativa”* (Bisquerra, 1989; p. 65) y *“caracteriza a la investigación orientada hacia el pasado que trata de aclarar un problema de interés actual mediante un estudio intensivo de materiales ya existentes”* (Fox, 1981; p. 459). En consecuencia, a los interrogantes que plantea esta investigación, sobre la evolución del concepto de número negativo en una época histórica determinada a través del análisis de textos de matemáticas antiguos, es claro que la metodología y método escogidos deben ser los adecuados para realizar este tipo de estudios.

Tomando como modelo las fases propuestas por Ruiz Berrio (1997) para realizar una investigación histórica, éstas se han matizado y adaptado para el presente estudio, y son:

1. Planteamiento de la investigación.
2. Tipo de investigación.
3. Objetivos
4. Hipótesis.
5. Selección de las fuentes documentales.
6. Criterios para el análisis de la documentación.
7. Interpretación de los hallazgos.
8. Construcción de la síntesis explicativa.

Como afirman Van Dalen y Meyer (1981), no siempre estas etapas en el proceso de investigación son independientes unas de otras, o deben ser consideradas como fases sucesivas inmutables, puesto que se realizan muchos ciclos o bucles a medida que aparece nueva información o documentación. A continuación se presenta el desarrollo de los seis primeros pasos.

3.1 Planteamiento de la investigación

3.1.1 Ciencia y matemáticas en España en los siglos XVIII y XIX

Como hemos visto en el Apartado 1.3, con anterioridad a la formalización de los números enteros (**Z**) en el siglo XIX, la confusión entre los números naturales relativos ($\mathbf{N}_r$) y los números enteros (**Z**) se podía detectar en las publicaciones de matemáticos profesionales. Glaeser (1981) selecciona algunos matemáticos relevantes y muestra qué tipos de limitaciones tenían en su conceptualización de los números negativos (Apartado 1.4.1).

A finales del siglo XVIII, en Europa el conocimiento científico se había desarrollado extraordinariamente. Surgen los nombres de Lavoisier, Ritcher, Coulomb y Celsius entre otros muchos. Se enuncian leyes en química y física; junto a ellas también florece la matemática de la mano de Euler, Lagrange, D´Alambert, Monge, por citar sólo unos cuantos. Mientras tanto, el atraso de las matemáticas españolas se debía, entre otras causas, al pobre estado en que se encontraban las universidades: aún de tipo medieval y de carácter eclesiástico. Esto lo evidencia Fray Benito Jerónimo Feijoo en la carta titulada *Causas del atraso que se padece en España en orden a las ciencias naturales*, y el Marqués de la Ensenada quien, en 1748, se lo expresa al rey Fernando VI. Como hemos visto en el Apartado 2.6 las deficiencias de las universidades tenían que ver con la enseñanza memorística, textos anticuados e interés primordial por disciplinas como derecho, teología y filosofía en detrimento de las matemáticas y las ciencias (Peralta, 1999).

Esta situación de bloqueo y de decadencia científica en España, que se arrastraba desde finales del siglo XVI, según hemos detallado en el Apartado 2.2, la ilustra ampliamente Arenzana (1987), indicando que el momento de cambio debió esperar a la aparición de los “novatores” a finales del siglo XVII y a la penetración de corrientes antiaristotélicas desde Francia e Italia durante esos años.

A comienzos del siglo XVIII se fundan en España dos instituciones: la Academia de Artillería de Barcelona (1736) y el Seminario de Nobles de Madrid (1716), que prepararon el resurgimiento de la matemática española, Apartado 2.4.1. Entre tanto, el Colegio Imperial sólo presenta una serie de nombres de tercer orden (Vernet, 1998), como Manuel de Campos, Pedro Fresneda, Carlos Reguera, Juan Ubingen y Gaspar Álvarez.

La incorporación de España al movimiento científico internacional tiene un momento culminante en la colaboración de España con Francia en la medición del meridiano que pasa por Dunquerque y Barcelona, la participación de Gabriel Císcar en la reuniones para instaurar el sistema métrico decimal y la incorporación de matemáticos, astrónomos y cartógrafos en la expedición al Perú para realizar mediciones en el Ecuador y Perú (1748). Destacan, al final del siglo XVIII, Jorge Juan, Gabriel Císcar y Benito Bails. Se empieza a difundir en estos años el cálculo y las matemáticas que desarrollan los matemáticos franceses. Prolifera la redacción de libros y la actualización de conocimientos.

El siglo XIX llega con la revolución industrial y los adelantos conseguidos, entre otros, por Pasteur, Mendel, Nobel, Young, Ampère en biología, química y física. Las matemáticas encauzan todos sus esfuerzos hacia la obtención de una generalización y fundamentación. Muchas ideas y conceptos no están totalmente definidos y aún se recurre a la intuición. Los números complejos, imaginarios, negativos y las geometrías no euclídeas son objeto de rigurosos estudios. Surgen figuras de la talla de Gauss, Cauchy, Steiner, Riemann, Hankel, Frege y Peano, por mencionar algunos.

En España se traducen los textos de Lacroix, Briot y Bourdon. Se continúan utilizando los textos de Bails hasta bastante entrado el siglo XIX. Surgen matemáticos como Alberto Lista, Mariano Vallejo, Juan Cortázar, Acisclo

Fernández Vallín y Bustillo, Jacinto Feliú, Zoel García de Galdeano, y Juan Justo García, entre otros, los cuales escribieron y tradujeron textos tanto de divulgación matemática como de enseñanza.

Vemos que los siglos XVIII y XIX son una etapa de transición para la consolidación del concepto de número entero. Así, hemos visto en el Apartado 1.3.3 que Euler, en sus *Elements of álgebra* (1770), domina la estructura aditiva de los enteros; pero no es hasta 1867 cuando el alemán Herman Hankel, en su obra *Teoría del sistema de los números complejos,* señala que la condición para construir una aritmética universal no es considerar a los números como magnitudes intuitivas geométricas, sino como estructuras intelectuales (Argüelles, 1989), formalizando la estructura del conjunto **Z** por medio del principio de permanencia de las leyes formales. Con este concepto enunció cómo en toda ampliación del concepto de número deben conservarse las leyes formales (conmutativa, asociativa, etc.) de las operaciones aritméticas (Hankel, 1867).

En el capítulo 2 hemos mostrado de manera amplia el entorno social, científico y educativo de la época en España.

3.1.2 Nociones de número y de cantidad

En una investigación previa (Maz, 2000; Maz & Rico, 2001), se identifican diversas nociones del concepto de número y del concepto de cantidad así como variadas consideraciones sobre la noción de cantidad positiva y cantidad negativa en libros escritos por autores españoles durante los siglos XVIII y XIX.

Así, detectamos en el estudio piloto cuatro nociones distintas de número:

> *"**Noción euclidea**, que corresponde a la segunda definición del libro séptimo de los Elementos: 'Número es una pluralidad compuesta de unidades', en la que la agrupación de unidades u objetos discretos genera el número.*
>
> ***Número como relación**, donde los números son las relaciones que se establecen entre una cantidad con otra o varias cantidades. Newton enuncia que un número es 'una relación abstracta de una cantidad cualesquiera a otra de la misma especie que se toma como unidad'. Esta noción incluye la relación entre magnitudes continuas.*
>
> ***Objeto algebraico**. En este caso el número es un ente que pertenece a un sistema formal y que está sometido a unas reglas; el número hace parte de una estructura algebraica.*
>
> ***Cardinal o preconjuntista**, donde el número denota una colección de objetos o hechos de una misma naturaleza reunidos en un conjunto"* (Maz, 2000; pp. 192-193).

Igualmente, encontramos en los autores analizados en el estudio piloto (Maz, 2000; pp.194-195) y en el estudio realizado en el Apartado 1.3.1, cinco nociones distintas de cantidad:

*“**Aristotélica**: cantidad es aquello de lo que se dice tanto que es igual como que es desigual; se dice que posee cantidad lo que es divisible en partes internas, unas y determinadas, es decir, lo que se puede medir o contar.*

***Empirista**: la cantidad expresa relación entre magnitudes y debe tener correspondencia empírica. Se identifica la noción de cantidad con la de magnitud física.*

***Fenoménica:** Se trata de la noción planteada por Kant cuando realiza la fundamentación fenoménica de las magnitudes negativas. Esta fundamentación tiene carácter relativo y permite el estudio matemático de los negativos mediante los números naturales relativos.*

***Euleriana:** Expresa que cantidad es todo lo que es suceptible de aumento o disminución. Por influencia de las ideas de Kant, incluye tanto las magnitudes extensivas como las intensivas. Tiene amplia difusión en los siglos XVIII y XIX.*

***Positivista**: surge a partir de la crítica de la noción anterior. Esta noción asume sólo las cantidades extensivas, que son comparables de modo preciso con las de su misma especie. Comte, en Filosofía Positivista, plantea esta crítica y actualización de la noción de cantidad”.*

Nos proponemos revisar parcialmente estas nociones, de acuerdo con el nuevo estudio de autores realizado.

En el Apartado 1.3.2 vimos las nociones de cantidad negativa detectadas en los matemáticos de esta época, que ya habíamos reconocido en el estudio piloto (Maz, 2000; pp. 197-198):

*“**Cantidades adjetivadas:** Se deja a la conveniencia de quien manipula las cantidades para determinar su cualidad de positiva o negativa. Indican el sentido en que deben considerarse las cantidades.*

***Cantidades falsas:** cuando sirven para justificar la existencia de soluciones negativas en una ecuación, interpretan los valores negativos como raíces a la izquierda de 0, a los que llaman “falsos” o “menores que nada”.*

***Cantidades absurdas:** rechazan su existencia y no se proponen encontrar significado a estas cantidades ¿Cómo pueden tener existencia unas cantidades que son menores que cero? ¿Cómo, luego de quitar todo aquello susceptible de quitarse, se pueda aún sustraer algo más?*

***Resultado de operaciones y cálculos aritméticos:** las cantidades negativas surgen a partir de algoritmos para resolver problemas y, cuando aparecen estas cantidades negativas, se recurre a la reinterpretación de los resultados para dar sentido a tales soluciones.*

***Magnitudes negativas:** se presentan cuando se reconoce el carácter relacional de cantidades positivas y negativas para algunas magnitudes, a partir de un tratamiento aritmético. Se establece la existencia real de las* *cantidades negativas en relación con las cantidades positivas correspondientes.*

Entidades de naturaleza dual (aritmética-algebraica): *las cantidades negativas surgen de sustracciones donde el minuendo es menor que el sustraendo. Con las operaciones aritméticas las cantidades se consideran opuestas, mientras que bajo las leyes formales propias del álgebra surgen los números enteros.*

Estatus algebraico: *se considera que el tratamiento de las cantidades negativas está asociado al álgebra."*

Se encontraron tres tipos diferentes de representaciones: Numéricas, Gráficas y Algebraicas (Maz, 2000; pp. 199-200).

También se identificaron cuatro tipos de relaciones de orden en las cantidades negativas (Maz, 2000; pp. 203-204):

1. Orden en las cantidades negativas respecto a cero.
2. Orden en las cantidades negativas sin tomar en consideración a cero.
3. Orden en las cantidades positivas y negativas, pero sin establecer comparaciones entre ellas.
4. Orden total de los enteros.

Con respecto a la caracterización de los números naturales relativos con las diferencias lógico-formales entre **Z** y $\mathbf{N_r}$ de González Marí, presentadas en Apartado 1.5 de esta memoria, se halló evidencia total de la presencia de los números naturales relativos en algunos textos (e.g., *Elementos matemáticos* de Pedro de Ulloa), mientras que en otros no detectamos ninguna de las diferencias mencionadas (e.g., *Tratado elemental de matemáticas. Tomo II. Álgebra*, de Jacinto Feliú). Es decir, durante los siglos XVIII y XIX observamos la presencia en libros de texto de matemáticas españoles de los conceptos de número natural relativo y de número entero, con ocasión de presentar y estudiar los números negativos.

Nos proponemos en esta investigación revisar y actualizar los resultados del estudio piloto relativos a los conceptos, relaciones e identificaciones mencionados.

3.1.3 Períodos históricos

Con el propósito de realizar una adecuada contextualización científico-académica, se han establecido cuatro períodos históricos diferentes, cada uno de los cuales tiene interés social, político e intelectual. Asimismo estos períodos servirán para seleccionar y agrupar los textos en forma equilibrada para su estudio. Estos períodos son:

- **PERIODO 1:** Consolidación de los primeros Borbones en España (1700 - 1767). Periodo de influencia jesuita.

- **PERIODO 2:** Desde Carlos III a la restauración de Fernando VII (1768 - 1814). Periodo de la Ilustración.

- **PERIODO 3:** Desde la restauración de Fernando VII hasta la Primera República (1815 - 1874). Periodo Romántico.

- **PERIODO 4:** Desde el fin del sexenio democrático hasta el inicio del siglo XX (1875 - 1900). Periodo de la Restauración.

Los hallazgos anteriores y la posibilidad de analizar un mayor número de textos por cada uno de los cuatro periodos históricos escogidos nos condujo a una serie de interrogantes, ya planteados en el Apartado 1.11 de esta memoria.

3.1.4 Problema de investigación

Como se ha manifestado en el Apartado 1.10, en este estudio interesa conocer cuál fue la presencia y difusión del concepto de número negativo y qué tratamiento tuvo en los manuales de aritmética y álgebra utilizados en España durante los siglos XVIII y XIX e identificar qué ideas matemáticas de la época lo sustentaban, dada la importancia de este momento histórico en la aceptación de los números negativos y en la formalización de los enteros como estructura numérica, tal como se ha puesto de manifiesto en el Capítulo 1, en el Apartado 1.3, y que hemos recordado en el Apartado 3.1.1. Es claro que ese conocimiento no se produce de manera aislada, sino que está influenciado por el contexto social y académico de la época en España, por ello se hace necesaria su descripción, como se ha indicado en el Capítulo 2. Este tema tiene importancia por cuanto continúa una línea que se abrió dentro del grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, a raíz de la tesis doctoral *El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos* realizada por José Luis González Marí (1995).

La caracterización de los números negativos en los libros de texto se llevará a cabo mediante un análisis de dichos libros relativo a los conceptos de número, cantidad, cantidad negativa, relación de orden y operaciones entre números. Dicho análisis se realizará mediante análisis conceptual de las nociones básicas junto con un análisis de contenido relativo al estudio de propiedades de la estructura presentada, de los sistemas de representación utilizados, de los fenómenos que sustentan las cantidades negativas, los problemas que se plantean y resuelven y las aplicaciones que tienen en cada caso.

Para establecer cuál fue el conocimiento que tuvieron los matemáticos españoles sobre los números negativos, vamos a utilizar también las cinco diferencias lógico-formales, tanto ordinales como algebraicas (Apartado 1.5.1) que plantea González Marí (1995) así como el uso que se hace de las situaciones relativas y de las situaciones enteras para presentar estos conceptos y dotarles de significado. Así mismo, podremos evaluar la mencionada conjetura de González Marí (1995), verificando la presencia de los números naturales relativos (**N**$_r$) en los manuales españoles de matemáticas de los siglos XVIII y XIX y poniendo a prueba la utilidad de los criterios y diferencias de González Marí para llevar a cabo un estudio de tipo histórico crítico sobre el número negativo.

Con carácter complementario trataremos de identificar, cuando ello sea posible, la presencia de los Obstáculos epistemológicos de Glaeser (Apartado 1.4.1) y de los Obstáculos de Schubring (Apartado 1.4.2) en los autores objeto de este estudio.

Los aspectos generales a los que nuestro estudio pretende responder son:

¿Las variadas ideas sobre negatividad, número negativo o cantidad negativa en los manuales españoles de matemáticas de los siglos XVIII y XIX presentan indicios de la presencia de los números naturales relativos?

¿Cuáles son las propiedades de la estructura algebraica que sustenta a los números negativos en cada manual de matemáticas de estos años?

¿Cuáles son las características de las situaciones que sirven para introducir y justificar los números negativos?

Para responder a estos interrogantes nos proponemos realizar un análisis conceptual y de contenido del tratamiento dado a los números negativos en los libros de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. Consideramos que el análisis de contenido basado en la estructura conceptual, el análisis fenomenológico, los sistemas de representación y los procesos de modelización para la resolución de problemas, junto con la aplicación de las técnicas del análisis histórico-crítico, permiten caracterizar la evolución del concepto de número relativo hacia el concepto de número entero.

Se investigará sobre una selección de manuales y tratados de matemáticas redactados por matemáticos españoles de estos dos siglos y que tuvieron gran difusión y utilización en la enseñanza española de la época. Trataremos de determinar el tipo de número negativo que se presenta y transmite y el planteamiento didáctico que hacen los distintos autores al explicar el concepto de número negativo en cada uno de los libros que se analiza. De este modo dispondremos de indicadores para establecer el conocimiento matemático y didáctico en el campo del álgebra y de las estructuras numéricas de los autores de textos matemáticos españoles de esta época.

3.2 Objetivos

Esta investigación pretende abordar algunas de las perspectivas que se dejaron abiertas y planteadas en la memoria de tercer ciclo (Maz, 2000). Aquí, proponemos los siguientes objetivos generales de investigación:

- **O1**: Caracterizar el entorno social, cultural, científico y académico en que se ubican los matemáticos españoles autores de libros de texto en los siglos XVIII y XIX.
- **O2:** Establecer el tratamiento dado a los números negativos en textos publicados en España durante los siglos XVIII y XIX, mediante su análisis conceptual y de contenido.
- **O3:** Falsar la conjetura de González Marí sobre la presencia de dos estructuras formales para presentar el concepto de número negativo en los libros de texto de matemáticas con manuales de estos siglos.

El primer objetivo se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

- **$O1_1$:** Identificar los presupuestos sociales, políticos e institucionales de cada uno de los autores estudiados, que los ubican en su época.
- **$O1_2$:** Identificar los presupuestos filosóficos, intelectuales, educativos y matemáticos de cada uno de los autores estudiados.
- **$O1_3$:** Identificar documentos, textos y autores que influyeron en los autores españoles de textos matemáticos de este periodo.

El segundo objetivo se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

- **$O2_1$**: Caracterizar el tratamiento y desarrollo de los conceptos de cantidad, cantidad negativa, número y número entero en España, mediante un análisis conceptual basado en técnicas histórico-críticas.
- **$O2_2$**: Caracterizar la estructura algebraica establecida para los números negativos en cada autor.
- **$O2_3$**: Identificar los fenómenos, contextos y situaciones utilizados para presentar las cantidades y números negativos en los textos en este período.
- **$O2_4$**: Identificar y enumerar los tipos de representaciones utilizadas.
- **$O2_5$**: Caracterizar los problemas y procesos de modelización manejados en las aplicaciones de los diferentes conceptos de número negativo, detectados en los textos analizados.

El tercer objetivo se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

- **$O3_1$**: Establecer las diferencias lógico-formales entre los números enteros y los números naturales relativos, de acuerdo con los hallazgos obtenidos en caracterizaciones hechas en investigaciones previas.

- **$O3_2$**: Establecer el tipo de estructura algebraica y estructura de orden utilizada para los números negativos en los libros de matemáticas en España en los siglos XVIII y XIX.

3.3 Tipo de Investigación

Tanto lo expresado en el marco teórico, como la revisión de la literatura hecha sobre metodología de la investigación (Bisquerra, 1989; Cohen y Manion, 1989; Fox, 1981; Gall et al, 1996; Van Dalen y Meyer, 1981) nos han llevado a considerar que el modelo de investigación histórico-epistemológica es el adecuado para abordar el problema (Apartados 1.7 y 1.8). Utilizaremos dos métodos: uno es el análisis histórico-crítico (Apartado 1.8) y el otro es el análisis de contenido (Apartado 1.9).

El desarrollo de este apartado permite determinar qué fuentes serán las más adecuadas para realizar la investigación.

3.3.1 Análisis histórico-crítico

Como se ha explicado en el Apartado 1.8, el análisis histórico-crítico estudia la evolución del conocimiento científico en sus aspectos históricos, conceptuales y culturales y se convierte en uno de los métodos, quizá el más característico, de la epistemología genética; por tal razón, utilizaremos esta técnica para analizar el significado de los conceptos que aparecen en los libros de texto españoles seleccionados para el estudio, estableciendo sus referencias principales.

Este análisis permite interpretar los fundamentos filosóficos de los contenidos y sirve para entender las ideas y conceptos matemáticos que se presentan; de este modo se podrán relacionar los contenidos con las ideas matemáticas de la época y conectarlos con los movimientos educativos, las corrientes políticas y, en general, con el contexto español de la época. Para ello se utilizará la información del Capítulo 2 asociándola con el análisis que se realiza en los Capítulos 4, 5, 6 y 7 por medio de los criterios que se establecen en el Apartado 3.6.

3.3.2 Análisis de contenido

Como se ha explicado en el apartado 1.9, el análisis de contenido en esta investigación se centra en las ideas que se expresan y reflejan en un texto dado teniendo en cuenta su carácter didáctico, por ello se utiliza en muchos casos como complemento a la investigación histórica.

Nosotros realizaremos un análisis de contenido fijando la atención en los aspectos relacionados con la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación utilizados para los números negativos; trataremos, de, a partir de este triple análisis, identificar y comprender los diferentes significados asignados a los negativos para su tratamiento didáctico en el periodo histórico comprendido entre los siglos XVIII y XIX en España. Tomaremos en consideración las estrategias recomendadas por Gómez (2002) y Sierra (1999) explicadas en el marco teórico, para llevar a cabo un análisis de contenido (ver apartado 1.9).

En esta investigación, la importancia y complementariedad del análisis de contenido con el método histórico-critico tiene validez si consideramos lo que Piaget (1975) opina: *"el método histórico-crítico no basta para todo"* pues *"descuida con frecuencia las consideraciones de formalización"* (Piaget, 1979); de tal forma que, si realizásemos tan sólo el análisis crítico, obtendríamos una asociación entre los conceptos matemáticos (los números enteros) respecto a las ideas científicas y culturales de la época; pero esto no arrojaría claridad sobre el tratamiento didáctico de los conceptos, sus significados e interrelación con otros conceptos, así es que se hace necesario utilizar un segundo método para el aspecto epistemológico y didáctico, siendo este método el análisis de contenido, enfatizando en el estudio qué conceptos se manejaban, cuáles procedimientos se utilizaban, qué modos de representación se tomaban, cuál era la fenomenología presente que les dotaba de significado y cuáles los problemas para cuya solución se presentaban y aplicaban los conceptos estudiados.

3.3.3 Objetivos del estudio histórico de textos

El uso original de textos como material histórico para obtener nuevos puntos de vista sobre los problemas, situaciones y ambientes intelectuales que llevaron a la génesis de conceptos matemáticos, enfocando su estudio como alternativa para comprender algunas situaciones educativas actuales a la luz de esos hallazgos, ha tomado gran auge entre la comunidad de investigadores en Educación Matemática (e.g. Dennis, 2000; Fauvel & van Maanen, 2000; Freudenthal, 1987; Friedelmeyer, 1998; Gallardo, 1994; Gómez, 2001).

Por tanto, como afirma Schubring (1987), los libros de texto estimulan el estudio del contexto social, del conocimiento escolar y del funcionamiento del sistema para la transmisión del conocimiento.

También es manifiesta la importancia de tal estudio de textos cuando lo que se pretende es interpretar fenómenos didácticos que tienen relación con los procesos de enseñanza-aprendizaje. Estos fenómenos pueden estar asociados por ejemplo, con representaciones, concepciones o aplicaciones, entre otros.

Por las razones expuestas, así como por lo explicado en el Apartado 1.6, en esta investigación utilizamos como población de estudio textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. En el Apartado 3.5 explicamos más ampliamente este aspecto.

3.3.4. Otras características del estudio

Para realizar la clasificación de la modalidad de la investigación y situación con respecto a los paradigmas convencionales, utilizaremos la clasificación que propone Bisquerra (1989; pp. 64-68), la cual presentamos a continuación:

Según el *proceso formal* utilizamos el razonamiento hipotético deductivo.

Según el grado de *abstracción* se trata de una investigación básica, ya que por el momento no pretende establecer aplicaciones prácticas que puedan deducirse del estudio.

Según la *naturaleza de los datos* es una investigación cualitativa, dado que todos los datos son filtrados por los criterios del investigador.

Según la *manipulación de variables* es una investigación descriptiva. No se manipula ninguna variable.

Según la *dimensión cronológica* es una investigación histórica. Describe fenómenos que acontecieron en el pasado, las fuentes documentales de este estudio son libros de texto.

Según los *objetivos* se pretende describir y explicar la situación sometida a estudio.

Según las *fuentes*, se trata de una investigación bibliográfica, pues hay una búsqueda, recopilación, organización, valoración y crítica sobre un concepto.

Pero, a su vez, se trata de una investigación metodológica, ya que presenta una cierta manera de integrar dos métodos descriptivos para abordar una investigación histórica en educación sobre un tópico específico de matemáticas.

3.4 Hipótesis

Toda investigación debe estar “dirigida” o encauzada por unas presunciones explicativas de los fenómenos a estudiar; de esta manera podemos comprender la afirmación de Aróstegui (1994; p. 326) en cuanto a que *“sin una teoría orientadora es posible investigar la historia, pero difícilmente se la podrá explicar”*, y agrega *“sin la construcción de hipótesis no es posible dar cuenta al final de una investigación de las razones por las que una situación histórica es como es”*. Además, la construcción de las hipótesis tiene estrecha relación con la formulación de las preguntas. En concordancia con los interrogantes planteados en el Apartado 1.11 de esta tesis, las presunciones explicativas de los fenómenos a estudiar, que orientan esta investigación, quedan establecidas mediante las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1: En el concepto de número que utilizan los autores se detecta una transición que va de presentar los números negativos asociados a nociones de cantidad procedentes de fenómenos y situaciones reales a presentarlos asociados con fenómenos y situaciones formales.

Hipótesis 2: La estructura algebraica utilizada en este periodo en los textos transcurre entre la estructura de adición de anulación-compensación de los números naturales relativos y la estructura aditiva convencional de los números enteros.

Hipótesis 3: La estructura de orden utilizada en los textos transcurre entre el orden de los números naturales relativos y el orden de los números enteros.

Podemos clasificar las hipótesis planteadas como factográficas (¿Qué ocurrió?) y explicativas (¿Por qué ocurrió?). Las hipótesis factográficas son formuladas en la lectura de la información de la fuente y también son planteadas al realizar la crítica interna. Las hipótesis explicativas son las que explican los hechos y pueden llegar a establecer leyes (Ruiz Berrío, 1997).

3.5 Selección de las fuentes documentales

Aceptamos como definición de fuentes históricas la dada por Tuñon de Lara, (citado por Ruiz Berrío, 1997; pp. 177-178) *“se puede entender como fuentes todo <<documento, testimonio o simple objeto que sin haber sufrido ninguna reelaboración, sirve para transmitir un conocimiento total o parcial de hechos pasados>>”.*

Se decidió entonces seleccionar *fuentes primarias*, siendo estas todos aquellos documentos elaborados por los participantes en los hechos; en nuestro caso serán los libros de texto originales de estos dos siglos.

3.5.1 Localización de fuentes

En consideración al problema de investigación y los interrogantes planteados (Apartado 1.11), a los objetivos definidos (Apartado 3.2) y las hipótesis establecidas (Apartado 3.4), procedimos a realizar una búsqueda de fuentes documentales primarias.

Se realizó la búsqueda de textos en:

- Biblioteca del Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.
- Biblioteca General de la Universidad de Granada.
- Biblioteca del Departamento de Matemáticas de la Universidad de

León.
- Biblioteca personal del Dr. D. Luis Rico Romero.
- Biblioteca personal del Dr. D. Bernardo Gómez Afonso.

En total fueron revisados 65 textos; algunos de los autores, cuyas obras fueron consultadas son:

Pedro de Ulloa	Benito Bails
Jacinto Feliu	José Mariano Vallejo
Manuel Poy y Comes	Felipe Picatoste y Rodríguez
Juan Cortázar	Silvestre Francisco Lacroix
Manuel Calderón Jiménez	Luis Adalid Costa
Carlos Augusto Briot	Joaquín de Avendaño
Gabriel Ciscar	José María Rey y Heredia
Thomas Cerdá	Ramón de Bajo é Ibáñez
Bourdon	Diego Terrero
Juan Justo García	José de Odriozola
Bernardino Sánchez Vidal	Francisco Verdejo González
Alberto Lista	Anastasio Prieto
P. L. Cirodde	Zoel García de Galdeano
Acisclo Fernández Vallín y Bustillo	Vicente Tosca
Luís Octavio de Toledo	Pablo Gasco y Ramiro
Agustín Gómez Santa María	

3.5.2 Criterios para la selección inicial de textos

Se tomaron en consideración cuatro criterios para efectuar una primera selección de los textos de matemáticas para el estudio:

- Que estuvieran disponibles. Así la muestra sería intencional y por conveniencia.

- Que los textos fuesen ediciones originales y en español.

- Que los textos hubieran sido publicados entre 1700 y 1902 en España.

- Que el nivel al que estuvieran dirigidos fuese de enseñanza secundaria o superior.

Una primera revisión dejó seleccionada una lista inicial de 20 textos. Se establecieron nuevos criterios para reducir dicho listado con el propósito de afinar los análisis y realizar un estudio piloto. Estos criterios fueron:

- Que los contenidos y ejemplos no se repitieran en varios textos si estos eran de un mismo autor.

- La relevancia de los autores en la época.
- La trascendencia o influencia de los textos en la época
- Que quedase, al menos, un texto por cada periodo de tiempo seleccionado.

Para el primer criterio se revisaron inicialmente todos los textos seleccionados y se realizó un primer análisis, determinando algunos contenidos de interés para el estudio. A partir de este primer análisis se hallaron reiteraciones en contenidos y ejemplos en varios de los textos, en razón de que algunos autores simplemente resumían parte de sus obras principales y las adaptaban a otros textos más sencillos, utilizando los mismos ejemplos y presentaciones de los contenidos, por lo cual se suprimieron del listado los de más reciente publicación en los que se presentaba este hecho.

También se observó que ciertos textos que aparecían como textos independientes, son tomos que hacen parte del cuerpo de una obra global amplia, como por ejemplo los *Elementos* de Bails o el *Tratado* de Vallejo, por lo que se agruparon como un solo texto.

El proceso seguido para satisfacer los anteriores criterios, requirió de la consulta de manuales especializados para establecer la relevancia de los autores y la trascendencia de los textos (Enciclopedia Universal Ilustrada, 1929; López Piñero 1969; Peset, et al 1978; López Piñero et al., 1986; Arenzana, 1987; Sánchez Ron, 1988; Vea, 1995). Finalmente, se llevó a cabo una verificación con expertos en el área para conocer si se habían omitido autores de relevancia u obras de gran trascendencia e importancia en la época.

3.5.3 Textos seleccionados para el estudio piloto

- **Texto nº 1.** ULLOA, P. (1706). *Elementos matemáticos*. Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.
- **Texto nº 2.** CERDÁ, T. (1758). *Liciones de Mathematica, o Elementos generales de arithmetica, y algebra para el uso de la clase*. Tomo primero. Barcelona: Francisco Suriá, Impresor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad.
- **Texto nº 3.** BAILS, B. (1779). *Elementos de Matemática*. Tomos I. y II. Madrid: D. Joaquín Ibarra, Impresor de la cámara de S.M.
- **Texto nº 4.** LACROIX, S. F. (1840). *Curso completo elemental de matemáticas puras, compuesto en frances.* Tomo II. Quinta edición. Traducido por José Rebollo Morales. Madrid: Imprenta Nacional.
- **Texto nº 5.** VALLEJO, J. M. (1841). *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo I. Cuarta edición. Madrid: Imprenta Garrasayaza
- **Texto nº 6.** VALLEJO, J. M. (1840). *Compendio de matemáticas puras y mistas*. Tomos I. y II. edición. Madrid: Imprenta Garrasayaza.

- **Texto nº 7.** FELIU, J. (1847). *Tratado elemental de Matemáticas. Para uso del colegio general militar*. Tomo II Algebra. Madrid: Imprenta de José M. Gómez Colon y compañía.
- **Texto nº 8.** REY Y HEREDIA, J. M. (1865). *Teoría transcendental de las Cantidades Imaginarias*. Madrid: Imprenta Nacional.
- **Texto nº 9.** BRIOT, C. A. (1880). *Lecciones de álgebra elemental y superior*. Traducido por C. Sebastian y B. Portuondo. Madrid: Imprenta de la Vda. e hijo de D. E. Aguado.
- **Texto nº 10.** CORTÁZAR, D. J. (1892). *Tratado de Algebra elemental*. Trigésima primera edición. Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

El estudio piloto permitió poner a prueba las parrillas elaboradas para la sistematización y organización de la información, las cuales se explican en el Apartado 3.6; los resultados de este estudio se registraron en la memoria de tercer ciclo (Maz, 2000).

3.5.4 Textos seleccionados para el estudio final

Una vez hecho el estudio piloto, se determinaron cuatro periodos cronológicos para la selección de los textos, tomando como base la búsqueda hecha (ver Maz, 2000).

Asimismo, con el propósito de ampliar el conocimiento y comprensión del periodo histórico estudiado en lo que atañe a la ciencia y la matemática, se revisaron las ediciones de la *Revista de Occidente* (de 1998 a 2000, del número 200 al 247), *El Basilisco* (de 1978 a 2001, del número 1 al 29), *Revista Llull* (de 1996 a 2000, volúmenes 19,20,21,22 y 23), las *Actas de los congresos de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, la colección *Historia de España* de la serie Historia 16 (números 18 a 24). También se revisaron los contenidos de la pagina Web del proyecto de Filosofía en Español (http://www.filosofía.org/pcero.html); se llevaron a cabo diversas búsquedas en la base de datos del Instituto de Historia de la Ciencia y Documentación López Piñero (http://161.111.141.93/hcien/frame_campos.htm), con los descriptores *matemáticas, números, textos, matemáticas y filosofía, matemáticas e historia, liberalismo y España.*

Finalmente, para ubicar el texto y el autor en un determinado periodo se considero la fecha de publicación de la primera edición; los textos y autores seleccionados para realizar la investigación en cada periodo son:

1. **PRIMER PERIODO:** Consolidación de los primeros Borbones en España (1700–1767). Periodo de influencia jesuita.

    - *Pedro de Ulloa* (1706). *Elementos Mathematicos.* Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.

- *Thomas Vicente Tosca* (1727). *Compendio Matemático.* Tomo II. Segunda edición corregida y enmendada. Madrid: Imprenta de Antonio Marín.
- *Thomas Cerdá* (1758). *Liciones de Mathematica, o Elementos Generales de Arithmetica y Algebra para el uso de la clase.* Tomos I y II. Barcelona: Francisco Suriá, Impresor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad.

2. **SEGUNDO PERIODO:** Desde Carlos III a la restauración de Fernando VII (1768–1814). Periodo de la Ilustración.

- *Benito Bails* (1772). *Elementos de Matemática.* Tomos I y II. Primera edición. Madrid: D. Joaquín Ibarra. Impresor de la cámara de S.M.
- *Juan Justo García* (1782). *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría*. Quarta edición (1814). Tomo primero. Salamanca: Imprenta de D. Vicente Blanco.
- *Francisco Verdejo González* (1794). *Compendio de Matemáticas puras y mixtas*. Tomo primero. Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.
- *José Mariano Vallejo* (1813). *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo I. *La Aritmética y álgebra*. Segunda edición (1813). Madrid: Imprenta Garrasayaza.

3. **TERCER PERIODO:** Desde la restauración de Fernando VII hasta la primera república (1815-1874). Periodo Romántico.

- *José de Odriozola* (1844). *Curso completo de Matemáticas puras.* Tomo I reformado. *Aritmética y Álgebra elemental*. Tercera edición. Madrid: Imprenta de los señores viuda de Jordán é hijos.
- *Jacinto Feliu* (1847). *Tratado elemental de matemáticas. Para el uso del Colegio General Militar*. Tomo II. *Álgebra*. Madrid: Imprenta de D. José M. Gómez Colón y Compañía.
- *Acisclo Fernández Vallín y Bustillo* (1857). *Elementos de Matemáticas. Aritmética y Álgebra. Geometría, Trigonometría y Nociones de Topografía*. Nueva edición estereotípica (1863). Madrid: Imprenta de la Viuda de Hernando y Compañía.
- *Joaquín Maria Fernández y Cardín* (1858). *Elementos de matemáticas. Algebra* Decimocuarta edición notablemente mejorada (1884). Madrid: Imprenta de la viuda e hija de Fuentenebro.
- *José María Rey y Heredia* (1865). *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias.* Madrid: Imprenta Nacional.

4. **CUARTO PERIODO:** Desde el fin del sexenio democrático hasta inicio del siglo XX (1875–1902). Periodo de la Restauración.

- *Zoel García de Galdeano y Yanguas* (1883). *Tratado de Álgebra. Tratado Elemental.* Parte primera. Madrid: Imprenta de Gregorio Juste.
- *Luís Octavio de Toledo y Zulueta* (1900). *Elementos de aritmética universal*. *Calculatoria.* Madrid: Imprenta de Fortanet.

En el periodo histórico que se estudia, Vea (1995) identifica 67 autores de textos matemáticos y López Piñero et al. (1986), a 32. Comparando el número de autores referenciado por estos investigadores con los seleccionados, vemos que 12 de ellos aparecen entre los indicados por Vea y 11 por López Piñero et al.

3.6 Criterios para el análisis de la documentación

Una vez localizadas las fuentes, se procedió a realizar las fichas bibliográficas respectivas para cada texto siguiendo las pautas de Gutiérrez y Maz (2001).

Como indican Fox (1980), Cohen & Manion (1990) y Ruiz Berrío (1997), en toda investigación de corte histórico se deben realizar una crítica interna y una crítica externa.

El control de la crítica externa de esta investigación se llevó a cabo mediante la verificación de la autenticidad (ediciones originales) de los documentos y procediendo a confirmar la fecha de edición, procurando tener acceso a las más antiguas, de la misma forma como se realizó el estudio piloto (Maz, 2000).

Para la crítica interna se llevó a cabo el análisis elaborando una serie de parrillas que permiten establecer lo que el autor plantea; realizamos la ubicación de cada uno de los autores en su época, caracterizando a cada uno de los textos utilizando elementos de bibliometría e identificando los contenidos relacionados con el concepto a estudiar, tratando de que tales parrillas permitan establecer criterios de relación; así mismo, se pretendió que la información obtenida a través de fichas, campos y parrillas diseñadas fuera lo más precisa y veraz posible. De esta manera hemos controlado, tanto la crítica externa como la interna.

Las categorías de análisis fueron establecidas para llevar a cabo el trabajo piloto. Una vez validada la utilidad, fiabilidad y conveniencia de estas, se utilizaron para el estudio final de los textos.

Una vez seleccionados los textos y hecho el listado final de ellos, era necesario fijar unos criterios para realizar tanto el análisis de contenido, como el análisis histórico-crítico. Al ser ésta una investigación de carácter descriptivo y cualitativo, no se definieron variables independientes; por tanto, se determinaron tres focos de interés para caracterizar los textos:

- Autor

- Estructura de la obra.
- Contenido sobre los números negativos.

Con el propósito de llevar a cabo una adecuada sistematización del trabajo, se definieron los campos en que organizar la información obtenida. Estos campos corresponden a cada uno de los focos de atención.

Para el estudio del autor hemos definido ocho campos, los cuales hemos denominado genéricamente, *Caracterización de Autor*. Cada campo lo llamaremos con la denominación genérica anterior acompañada de un numeral. De este modo, tendremos: Caracterización del Autor 1, Caracterización del Autor 2...., hasta Caracterización del Autor 8. Para referirnos a ellos utilizaremos la codificación simplificada. Los identificaremos ordinalmente con la forma **CAn** (Es decir, **CA1**, **CA2**,......, **CA8**) y de esta manera lo seguiremos referenciando.

Igualmente, para analizar la estructura de la obra se han definido unos campos de caracterización, los cuales hemos agrupado en dos categorías genéricas a las que hemos denominado, *Caracterización General de la Obra* y *Caracterización del Contenido de la Obra*. Los campos que integran cada una de estas dos categorías las designamos con las iniciales de la denominación genérica respectiva, acompañada de un numeral. De esta manera, a los campos pertenecientes a cada grupo genérico, los identificaremos en adelante como **CGOn** (esto es, **CGO1**, **CGO2**, ..., **CGO9**) al primero y **CCOn** (**CCO1**, **CCO2**,...., **CCO6**) al segundo.

Para el contenido sobre los números negativos hemos definido trece campos de caracterización, los cual hemos llamado genéricamente, *Tratamiento Sobre los Números Negativos.* Estos campos, de ahora en adelante, los identificaremos ordinalmente con las iniciales del campo genérico acompañado de un numeral, como **TSNn** (es decir, **TSN1**, **TSN2**,......., **TSN13**) y así los referenciaremos.

3. 6.1 Caracterización del autor

En este apartado se pretende caracterizar brevemente el contexto histórico y científico de la época en que cada autor se formó y desarrolló su obra, con especial atención al estado de la disciplina matemática, para identificar posibles influencias en su formación y desempeño en el área de las matemáticas. Utilizaremos la denominación de campos al igual que venimos haciendo. Veamos los campos elegidos para la caracterización del autor:

CA1: Fecha y lugar de nacimiento/ fallecimiento:

Ubicación de dónde y cuándo nació y murió el autor. Este campo ubica a cada autor en uno de los periodos contemplados (en ocasiones en dos). Permite así conocer el contexto social, cultural y político en que vivió, lo que ayuda a interpretar la caracterización ideológica y política del autor.

CA2: Principal lugar de estudios (si procede):

Instituciones donde realizó sus estudios principales. Este campo ayuda a caracterizar el contexto científico y filosófico del autor, para así interpretar sus posicionamientos intelectuales.

CA3: Otros centros de formación donde cursó estudios:

Aquellos centros académicos de renombre donde amplió o perfeccionó su formación matemática. Igualmente, este campo permite caracterizar las ideas científicas y filosóficas del autor y ayuda a interpretar sus posicionamientos intelectuales.

CA4: Lugares donde ejerció su profesión relacionada con las matemáticas y pertenencia a estamentos, grupos o instituciones:

Se hace mención de los centros de educación donde llevó a cabo su actividad matemática. Este campo completa la caracterización científica y filosófica del autor; también contribuye a interpretar su posición intelectual e institucional sobre la educación.

CA5: Relación con personas significativas en el campo de las matemáticas (si procede):

Se mencionan aquellos individuos que por su bagaje matemático influyeron de alguna manera en los autores por las relaciones que establecieron con ellos. Este campo ayuda a explicar la posición científica del autor sobre las matemáticas y sobre la educación.

CA6: Obras publicadas:

Mención de las obras más importantes publicadas por los autores. Este campo ubica al autor como matemático y como educador.

CA7: Otra información relevante:

Referimos aquí aquella otra información que es relevante sobre el autor aunque no tenga relación con su labor como autor de textos. Este campo incluye cualquier información útil para completar las caracterizaciones anteriores.

CA8: Referencias bibliográficas:

Indicación bibliográfica donde se puede ampliar la información sobre el autor tratado o/y sobre su obra.

Tabla 3.4 Parrilla para la caracterización del autor

Campo	Autor
CA1 Fecha y lugar de nacimiento o fallecimiento	
CA2 Principal lugar de estudios (si procede)	
CA3 Otros centros donde cursó estudios	
CA4 Lugares donde ejerció su profesión relacionada con las matemáticas	
CA5 Relación con personas significativas para las matemáticas (si procede o consta)	
CA6 Obras publicadas	
CA7 Otra información relevante	
CA8 Referencias bibliográficas	

3.6.2 Caracterización de la estructura de la obra

Pretendemos obtener una visión global de la estructura de cada obra o documento, lo cual permitirá identificar peculiaridades o variaciones en la presentación de los contenidos matemáticos con el paso de los años.

Las dos categorías genéricas antes definidas para este foco de atención apuntan a dos aspectos. Los campos de la primera categoría tienen que ver con la información general del texto; son los campos que van desde **CGO1** hasta **CGO8**. Los campos de la segunda categoría tienen que ver con una parte más específicamente relacionada con el contenido sobre ideas y conceptos básicos en la matemática; son los campos que van desde **CCO1** hasta **CCO6**. Veamos los campos elegidos para caracterizar la obra:

CGO1: Edición, año, ciudad, editorial o imprenta:

Se indica el año de edición, lugar e impresor, con el propósito de situarla correctamente en el momento histórico que apareció publicada

CGO2: Año de la primera edición:

Pretendemos determinar la fecha de publicación de la primera edición de cada texto; cuando sea posible, determinarla con precisión, sino, la más probable según algunos investigadores, para contextualizar el texto en la época. Este campo permite ubicar temporalmente la edición analizada con la primera, pues podría explicar posibles cambios en la presentación y uso de los conceptos.

CGO3: Extensión y estructura:

Aquí el número de páginas de la obra, la forma como está dividido el texto: introducción, prólogo, capítulos, notas, apéndices, etc., y la distribución e identificación de sus contenidos.

CGO4: Objetivo(s) general(es) de la obra:

Se indican los objetivos, intenciones o deseos explícitos que señala el autor así como algunas opiniones contrastadas que hayan dado algunos investigadores de reconocido prestigio en el tema.

CGO5: Autores en los que se basa y otras influencias:

Todos aquellos autores a los que se hace referencia en el texto; indicando aquellos de los que copiaron partes de sus obras así como de los que tomaron ideas y que los autores expresan en la introducción o en el desarrollo del texto. Este campo brinda además una idea acerca de cuáles son los autores de mayor impacto en la época y los textos que orientan los métodos de exposición de los contenidos matemáticos.

CCO1: Noción de número utilizada:

Aquí, las ideas de número que utilizan los autores y las que hacen explícitas en el texto. Este campo pretende obtener información que permita más adelante una comprensión e interpretación del concepto de número negativo que se utiliza en el mismo texto y ayudar a su análisis histórico-crítico.

CCO2: Idea de cantidad:

Aquí, las ideas de cantidad y definiciones de cantidad que presentan los autores de los textos, bien sea de manera explicita o deducidas a partir de la lectura y del desarrollo de los contenido en el texto y ayudar a su análisis histórico-crítico.

CCO3: Noción de número natural:

Ubicación y trascripción de las definiciones que presentan los autores sobre el número natural, por ser éste el conjunto numérico que se amplía para la formalización de los enteros, y ayudar al análisis histórico-crítico.

CCO4: Consideración de cantidades generales, incógnita y ecuación:

Identificación de si los autores hicieron uso de las cantidades generales, es decir, si, al plantear ejercicios o problemas, las posibles soluciones están referidas a valores numéricos específicos o a valores cualesquiera que satisfacen las condiciones del enunciado; de ser así, ver de qué manera las consideraron como objetos sometidos a reglas. Además se pretende identificar si hicieron uso de la noción de incógnita y ecuación, identificando el modo en que las consideraron.

CCO5: Ubicación de los números negativos en el texto:

Las partes o la ubicación en el texto donde se tratan los números negativos en forma explícita, cuando esto sucede.

CCO6: Otros tipos de números utilizados:

En este campo pretendemos recoger los demás números que se presentan y utilizan en los textos, así se tiene una idea del grado de complejidad y alcance pretendido por el autor.

CGO6: Valoración global e influencia de la obra:

Indicación de qué manera el texto ejerció algún tipo de influencia en el currículo de matemáticas de su época, o en otros autores. Asumimos en este apartado las valoraciones que sobre estos textos han realizado los autores e investigadores de renombre en el tema. Este campo indica la relevancia dada a la obra por la comunidad académica.

CGO7: Observaciones:

Aspectos relacionados con los números negativos que llaman la atención del texto, pero que no son considerados bajo ninguno de los anteriores campos.

Tabla 3.5 Parrilla para la caracterización de la estructura del texto.

Campo	Texto
CGO1 Edición, año, ciudad, editorial o imprenta	
CGO2 Año de la primera edición	
CGO3 Extensión y estructura interna	
CGO4 Objetivo(s) general(es)	
CGO5 Autores en que se basa e influencias	
CCO1 Noción de número utilizada y conceptos relacionados	
CCO2 Idea de cantidad	
CCO3 Noción de número natural	
CCO4 Consideración de cantidades generales, incógnita y ecuación.	
CCO5 Ubicación de los números negativos en el texto	
CCO6 Otros tipos de números tratados	
CGO6 Valoración global e influencia de la obra	
CGO7 Observaciones generales	

3.6.3 Caracterización de los números negativos

Se pretende sistematizar la información hallada en los texto, concerniente a los números negativos: presentación, operaciones, ejemplos, naturaleza, etc.; esto permitirá apreciar los diversos tratamientos por los que optan los autores para los números negativos, así como cambios en la estructura conceptual, fenómenos y contextos, sistemas de representación, problemas y uso como modelos de las estructuras numéricas dentro de los cuatro períodos definidos en el apartado 3.1.2 en el espacio temporal comprendido entre 1700 y 1900. Asimismo, realizar un estudio en forma horizontal de cada campo de la Tabla 5, determinar si hay variaciones en las situaciones utilizadas para ejemplificar el concepto, las consideraciones sobre el estatus del número negativo, etc.

Los campos determinados y agrupados bajo el nombre genérico de *Tratamiento Sobre los Números Negativos*, son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -:
La aparición e indicaciones que da el autor sobre qué son y para qué se usan estos símbolos. El contenido de este campo corresponde a los sistemas de representación.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas:
La forma de introducir por primera vez estas cantidades en el texto. El contenido de este campo corresponde a la fenomenología del concepto.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas:
La interpretación que el autor o autores hacen sobre el origen de estos objetos matemáticos. El contenido de este campo corresponde a la fenomenología del concepto o a los procesos de modelización en que está implicado.

TSN4: Justificación de las cantidades negativas:
Este campo está muy relacionado con el anterior; se trata de conocer los argumentos que se utilizan para razonar su necesidad o justificar su aparición, junto con las formas de construcción de tales cantidades. El contenido de este campo corresponde a los procesos de modelización que implican al concepto.

TSN5: Cantidades negativas como menores que cero:
Se pretende ubicar las referencias utilizadas para expresar cantidades negativas como algo que es menor que cualquier cantidad positiva, e incluso que cero, asumiéndolo como “nada” o ausencia total de algo. El contenido de este campo corresponde a la fenomenología del concepto y a la resolución de problemas.

TSN6: Ejemplificación de las cantidades negativas:
Todos aquellos ejemplos que los autores utilizan para mostrar la idea de cantidad negativa. El contenido de este campo corresponde a la fenomenología del concepto o a los procesos de modelización en que está implicado, así como a los sistemas de representación utilizados.

TSN7: Simplificación de signos y ley de los signos:
La manera de que los autores indican en qué altera o afecta un signo al anteceder a otro, tanto en la suma como en la multiplicación. El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual y los sistemas de representación.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa:

Las referencias hechas para distinguir los valores de una cantidad negativa en lo nominal y cómo es diferente a su valor absoluto. El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual de esta noción.

TSN9: Orden entre cantidades negativas:

Las consideraciones que los autores hacen para determinar cuándo o cómo se sabe si una cantidad negativa es mayor o menor que otra. Se especificará si la justificación se hace para cantidades o números. El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual de esta noción o bien a los sistemas de representación implicados.

TSN10: Operaciones y utilización de negativos:

Las operaciones efectuadas con cantidades negativas en los textos así como las diferentes situaciones y usos que se hacen de ellos. Se especificará si la justificación se hace para cantidades o para números. Son también aquellas situaciones en las que se recurre a los negativos para utilizarlos en situaciones variadas no relacionadas explícitamente con ellos. El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual de esta noción.

TSN11: Interpretación de los resultados:

Las reflexiones que el autor realiza ante la obtención de cantidades negativas como resultado de una operación o planteamiento de una situación. El contenido de este campo corresponde a la resolución de problemas que implican a este concepto.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas:

Las explicaciones que ofrecen los autores al mostrar para qué sirven y el beneficio que se obtiene al hacer uso de las cantidades negativas, para dar sentido a algunas situaciones. El contenido de este campo corresponde a los procesos de modelización o a la resolución de problemas que implican a este concepto.

TSN13: Otros:

Párrafos de interés que no corresponden a algún campo anterior, pero que puedan brindar idea sobre aspectos de la modelización, representación o fenomenológica asociada a los números negativos.

Tabla 3.6 Parrilla para la Caracterización del contenido sobre los números negativos.

Campo	Texto
TSN1 Significado y presentación de los signos + y -	
TSN2 Presentación de las cantidades negativas	
TSN3 Naturaleza de las cantidades negativas	
TSN4 Justificación de la aparición de las cantidades	
TSN5 Cantidades negativas como menores que nada	
TSN6 Ejemplificación de cantidades negativas	
TSN7 Regla de los signos	
TSN8 Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa	
TSN.9 Orden en las cantidades negativas	
TSN10 Operaciones y utilización de las cantidades	
TSN11 Interpretación de los resultados negativos	
TSN12 Utilidad de las cantidades negativas	
TSN13 Otros	

3.6.4 Esquema y procedimiento para realizar los análisis

Para realizar el análisis de cada uno de los autores y textos seleccionados, se procederá de acuerdo al siguiente esquema:

1. ***Titulo del texto***

2. ***Autor:*** se presenta la información obtenida a través de los campos genéricos, **CA*n***.:
   - ***Contexto social, cultural y político:*** se indica el momento histórico y social en que vivió el autor, destacándose la situación política española en ese momento.

   - ***Posición filosófica y científica:*** este apartado pretende brindar una visión acerca de las corrientes de pensamiento desde las que el autor asume su desempeño científico. Este aspecto se tratará en aquellos autores en los que tanto las fuentes biográficas como bibliográficas arrojen información que permita tal caracterización.

   - ***Posición intelectual y educativa*:** En este apartado se recoge el punto de vista del autor en relación con la enseñanza y el entorno académico de su época.

3. ***Caracterización del texto*:** aquí se ubica la información obtenida que responda al criterio de cada uno de los campos que componen los dos grupos genéricos **CGO*n*** y **CCO*n***.

4. ***Tratamiento dado a los negativos*:** en este epígrafe se copiarán

textualmente los párrafos que respondan a los criterios de los campos que componen el grupo genérico *Caracterización del Tratamiento Sobre los Números Negativos*, **TSN*n***. Además, se realizarán comentarios a los párrafos, según se estime conveniente, para resaltar o aclarar ideas.

5. ***Análisis***

- ***Análisis conceptual mediante una revisión histórico-crítica*****:** Se realiza un análisis histórico-crítico a partir de la información obtenida en los campos definidos. Los tres aspectos sometidos a este análisis son los conceptos de número, cantidad, y cantidades positivas y negativas. Para ello hemos considerado que algunos campos enfocan estos aspectos por lo que ponemos especial atención en los siguientes aspectos y campos para cada concepto:

  a) Número: se buscará la relación entre el concepto de número presente en los textos y las definiciones de número utilizadas por los matemáticos de renombre en Europa (**CCO3**).

  b) Cantidad: pretendemos establecer la noción de cantidad aceptada por cada autor en esta época, asociándola con las definiciones dadas por los matemáticos de renombre europeo (**CCO2**).

  c) Cantidad positiva y cantidad negativa: el interés está en identificar la justificación dada a los números negativos y las reflexiones que originan en los autores. **CCO1, CCO2, CCO3, TSN2**, **TSN3**, **TSN5** y **TSN6**. Este apartado permite cotejar las categorías establecidas en la memoria de tercer ciclo (Maz 2000) en una muestra más amplia de textos y autores.

- ***Análisis básico de contenido*****:** Realizamos un análisis de contenido de acuerdo a como se definió este método en los apartados 1.8 y 3.3.3; se tomaron en consideración los aspectos relacionados con algunos conceptos básicos: los signos +/–, menor que nada, incógnita y ecuación. Además, se consideró la fenomenología y justificación, la estructura de orden, la estructura algebraica y el uso algebraico.

  Los campos a los que se prestó mayor atención para cada uno de los temas fueron: Estructura conceptual, Sistemas de representación, Fenomenología, Modelización y Resolución de problemas.

  a) *Conceptos básicos*
    - Signos +/–: **TSN1** y **TSN7**.
    - Menor que nada: **TSN5**.
    - Incógnita: **CCO4**, **TSN10** y **TSN12**.
    - Ecuación: **CCO4**, **CCO7**, **TSN6** y **TSN10**.

b) *Fenomenología/Justificación*: **TSN2**, **TSN3**, **TSN4** y **TSN6**.
c) *Estructura de orden*: **TSN8** y **TSN9**.
d) *Uso y estructura algebraica*: **TSN7, TSN10**, **TSN11** y **TSN12**.

- ***Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r***

Tomando como referencia el análisis histórico-crítico y el análisis conceptual, pretendemos identificar los tratamientos que se dan a los números negativos como números naturales relativos y verificar si dichos tratamientos pueden ser caracterizados mediante las diferencias lógico-formales establecidas por González Marí, entre los números enteros y los números naturales relativos. Asumimos que algunos campos se relacionan más específicamente con las diferencias señaladas en la tabla nº 2 del Apartado 1.5.1. A continuación presentamos los que se consideraron regularmente para cada una de las diferencias:

- D1. Orden total/Orden parcial: **TSN8**, **TSN6** y **TSN9**.

- D2. Sin primer elemento/Con primer elemento: **TSN3**, **TSN4** y **TSN6**.

- D3. Continuidad de medidas al cruzar el cero/Discontinuidad de medidas: **TSN5**, **TSN6** y **TSN11**.

- D4. Cero único/cero doble: **TSN2**, **TSN5** y **TSN6**.

- D5. Composición aditiva: adición entera/composición aditiva: adición natural y compensación-anulación: **TSN6**, **TSN7** y **TSN10**.

Esquema y procedimiento para realizar los análisis

- **Título del texto**
- **Autor**
  - **Contexto social, cultural y político**
  - **Posición filosófica y científica**
  - **Posición intelectual y educativa**
  - → **CA*n***
- **Caracterización del texto** → **CGO*n* y CCO*n***
- **Tratamiento dado a los negativos** → **TSN*n***
- **Análisis**
  - **Conceptual mediante una revisión histórico-crítica**
    - **Número** → **CCO1, CCO3**
    - **Cantidad** → **CCO2, CCO4**
    - **Cantidad Positiva y negativa** → **CCO1, CCO2, CCO3, TSN2, TSN3 y TSN4**
  - **Análisis básico de contenido**
    - **Conceptos básicos** → **TSN1, TSN5, TSN6, TSN7, TSN10, TSN12 y TSN13, TSN6**
    - **Fenomenología** → **TSN2, TSN3, TSN4 y TSN6**
    - **Estructura de orden** → **TSN8 y TSN9**
    - **Uso y estructura algebraica** → **TSN7 y TSN10, TSN11, TSN12 y TSN13**
    - **Números naturales relativos** → **CCO1, CCO2, CCO3 y TSN*n***

CAPITULO 4
Periodo de Influencia Jesuita (1700-1767)

4.1. Caracterización general

El periodo histórico que hemos reseñado es el que da inicio a la nueva dinastía de los Borbones en el reino español. Sus características principales se han comentado en el Capítulo II; de éstas destacamos el atraso académico y el estado medieval de la mayoría de universidades españolas, la incorporación de médicos y científicos extranjeros a la corte, el avance de las ideas filosóficas y renovadoras de la ciencia impulsadas por los novatores, el predominio e influencia de la Compañía de Jesús en la enseñanza de las clases nobles, el auge y fomento a la fundación de academias e instituciones científicas y la organización y patrocinio de expediciones científicas al nuevo mundo.

Desde la perspectiva intelectual y académica que nos ocupa, conviene subrayar el genuino esfuerzo de los nuevos monarcas por modernizar la sociedad española y agilizar su sistema político y administrativo. En el plano intelectual y educativo hay una enorme preocupación por introducir en España las nuevas ideas ilustradas y los conocimientos derivados de la revolución científica así como por renovar el sistema de enseñanza, principalmente en las universidades. Los tres primeros reyes de la nueva dinastía son monarcas ilustrados que aspiran al progreso intelectual y material de sus nuevos reinos, para lo cual emprenden un ambicioso programa de actuaciones, con la renovación o creación de instituciones educativas y científicas que integren al país en el Siglo de las Luces y le hagan participar de la vida intelectual europea, que lideran los intelectuales franceses durante estos años. El despotismo ilustrado y los enormes esfuerzos por la renovación configuran el estilo de los gobiernos de

Felipe V, Fernando VI y Carlos III. La superación del atraso intelectual y económico, el rechazo del oscurantismo y la superstición mediante la defensa de la razón son el núcleo de su programa político.

Esta época es la etapa de crecimiento y desarrollo de la Ilustración en España y en toda Europa; aún no ha comenzado la oposición y crítica a las consecuencias de la revolución social que desatan las nuevas ideas, que se inicia con la independencia de las colonias inglesas en América para constituir los Estados Unidos y se incrementa con la Revolución Francesa. Esta época es de aceptación y apoyo a la difusión de las nuevas ideas y conocimientos. Todavía no se ha iniciado la reacción ni hay persecución por la difusión de las doctrinas ilustradas, incluidas las teorías científicas más generales, como la matemática.

La divulgación de los avances de la ciencia y las matemáticas durante esta época se apoya en el trabajo individual de personajes con un claro sentido humanístico, empeñados en mostrar los beneficios científicos y sociales que se desprenden de la aplicación de los progresos que se dan por toda Europa; estos esfuerzos se plasman en obras como las de Jorge Juan, Feijoo, Tosca, Corachán, y Cerdá.

4.2 Contexto Institucional

La nueva dinastía gobernante apuesta por la fundación de la Universidad de Cervera como ejemplo de enseñanza y administración universitaria, dotándola de recursos económicos y humanos de excelente calidad académica; de igual forma apoya la fundación de academias, sociedades, jardines botánicos; asimismo compra y recopila “gabinetes”, todo esto con el propósito de que sirvan como canales de difusión de la ciencia en España.

Los tres autores elegidos para nuestro estudio caracterizan a la clase intelectual, que proviene del antiguo régimen en el caso de los dos primeros, y que está comprometida con los deseos de renovación y cambio intelectual.

Estos autores abrazaron el sacerdocio como modelo de vida, recibiendo desde su juventud una educación eclesiástica fundamentada en los clásicos griegos; esta formación se refleja en sus textos con el seguimiento casi puntual de estos autores, como es el caso de los elementos de Euclides para la aritmética y la geometría.

Son sacerdotes que trabajan en instituciones educativas dedicadas a la formación de jóvenes cadetes y nobles o en la Universidad. Dos de ellos son jesuitas, lo cual pone de manifiesto el compromiso de la Compañía de Jesús, y de los sectores más avanzados del clero, con la nueva dinastía.

Nuestros autores se encuentran comprometidos con los esfuerzos por actualizar los conocimientos de su época y a ello contribuyen con la publicación de sus libros en castellano, en los que tratan de introducir los últimos avances y descubrimientos de las disciplinas científicas que abordan.

Fueron universidades y colegios imperiales las instituciones de educación superior en las que desempeñaron su actividad matemática, especialmente orientada a actividades de docencia; la principal finalidad de los textos que escriben tiene como propósito la enseñanza en sus respectivas instituciones.

Las matemáticas se convierten en cuestión fundamental para la enseñanza durante estos años. La denuncia de Feijoo en 1745 sobre el atraso considerable de España en las ciencias muestra la preocupación socialmente percibida de la importancia fundamental de su estudio, cultivo y desarrollo. Los jesuitas, conocedores de la vida intelectual europea, inspiran y dirigen estas enseñanzas, orientan las nuevas instituciones —como ocurre con la Universidad de Cervera— y adaptan las antiguas. El estudio de las matemáticas se propone como fundamento para la enseñanza de las artes y la filosofía en las universidades, y como aplicación en la construcción y en la ingeniería civil o militar (Garma, 2000, p. 311).

4.3 Ideas matemáticas

Durante este período, las matemáticas se les presentan a los hombres de ciencia como una actividad atrayente y retadora de su lógica, raciocinio y conocimiento, arrastrando hacia sus dominios a personajes ilustres como Newton, Lebniz, D´Alambert, Condorcet, Goldbach y Riccati, por mencional algunos; Montucla, autor matemático de la época, escribe en su *Histoire des Mathématiques* (1789) que desde el siglo XVI hasta mediados del XVII se da un desarrollo importante de la teoría de ecuaciones en forma puramente algebraica a través de los trabajos de Descartes, Kersey, Hugo de Omerique, Rolle, Halley, L´Hôpital, Maclaurin y Clairaut, entre otros; Klein (2002) afirma que el aspecto más destacado durante las mismas fechas es el desarrollo del concepto de función.

De las reseñas consultadas sobre los autores y textos en los años comprendidos entre 1700 y 1767 hechas por López Piñero et al. (1983) y Menéndez Pelayo (1954), hemos concluido que por esa época trabajan en España unos 18 matemáticos, los cuales publican 28 textos aproximadamente, de ellos, 13 son de aritmética y/o álgebra y los restantes se distribuyen en geometría, trigonometría, tablas logarítmicas y aplicaciones astronómicas de las matemáticas. Las cifras no son muy elevadas, pero indican una presencia institucional de la disciplina apreciable y un mercado de lectores en aumento, interesados por actualizar el dominio de esta disciplina. El análisis de tres textos es una muestra representativa de los 13 publicados sobre aritmética y/o álgebra durante este periodo.

Más importante que la estadística de la producciones es su calidad. En los textos de Ulloa y Tosca se hace una introducción a la Geometría Analítica de Descartes, siendo los primero autores españoles que incluyen un tratamiento de estos conceptos, con un atraso de más de 75 años, y lo difunden en castellano. No puede entenderse este desconocimiento sino por razones de las luchas políticas y religiosas del siglo XVII, que la nueva dinastía trata de remontar desde sus comienzos. A finales del periodo, los trabajos de Cerdá ponen de manifiesto el enorme avance realizado, ya que este autor incorpora en sus trabajos ideas de Newton, Leibniz y Euler.

Garma (1988, p. 105-110) muestra el tratamiento que hace Cerdá del Cálculo Infinitesimal en su obra, a partir de las *Licciones*. La distancia entre la obra de Euler y su difusión por Cerdá se ha reducido a 10 años. La influencia de otros autores es reconocida en las introducciones de cada obra. La revisión de los textos muestra que los conocimientos matemáticos de estos tres autores no estaban muy desfasados respecto de la producción científica del momento.

4.4 Elementos matemáticos. (1706).

4.4.1 *Autor*

Pedro de Ulloa: (*n*. en Madrid, 1663; *m*. en Madrid, 1721) (**CA1**). Este jesuita, fue catedrático de matemáticas en los Reales Estudios del Colegio Imperial de Madrid y del Consejo Supremo de las Indias (**CA4**).

Vivió la transición dinástica y los cambios políticos y sociales de la época en España. Asistió al crecimiento en la influencia de las posiciones ilustradas. Su introducción a la obra de Descartes muestra su conocimiento de la filosofía racionalista y su familiaridad con los avances matemáticos del siglo XVII (**CA7**). También muestra su aprecio por la geometría analítica, de la que hizo una versión divulgativa en castellano. Sólo conoció al primer rey Borbón, Felipe V; por tanto, no llegó a conocer la expulsión de los jesuitas.

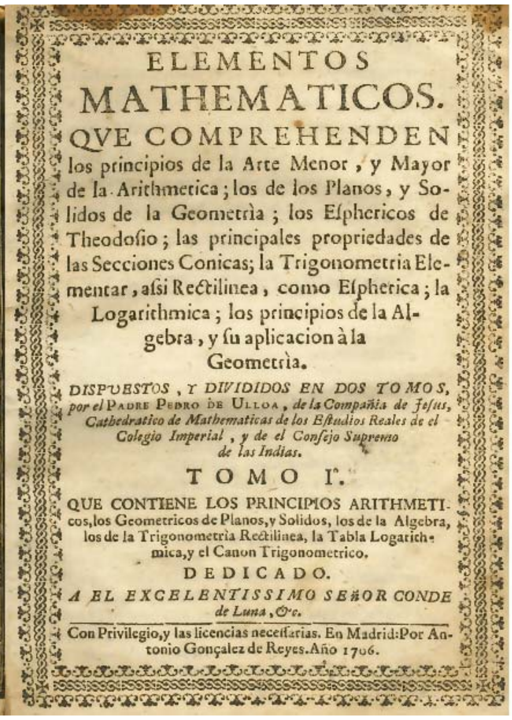
Su vida transcurrió durante los años de debate entre escolásticos y novatores. Aunque estaba un tanto alejado de los centros de desarrollo de las ideas de los novatores —Valencia, Sevilla y Zaragoza—, al ser jesuita tenía acceso a las voluminosas bibliotecas de la Compañía de Jesús y, de esta manera, a los textos y documentos en los que se plasmaban tal pensamiento. Quizá sea esa una de las razones por la cual decide publicar sus *Elementos* en castellano y no en latín como era la costumbre en los círculos académicos de la época. No hemos encontrado datos biográficos que lo vinculen a los novatores, pero su trabajo como matemático y su conocimiento de la obra de Descartes evidencian su preferencia o simpatía por el movimiento novator (**CA7**).

En 1706 publicó *Elementos Matemáticos*, el cual es el primer texto conocido y publicado en España en el que se trata brevemente la geometría analítica de Descartes. También escribió *Música universal o principios universales de la música,* en 1717 (**CA6**).

La información sobre Ulloa y su obra se halla en Lopez Piñero et al. (1983) (**CA8**).

4.4.2 Caracterización del texto

Elementos Mathematicos. Tomo I. (1706). Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor (**CGO1**, **CGO2**).



ELEMENTOS MATHEMATICOS. QVE COMPREHENDEN los principios de la Arte Menor, y Mayor de la Arithmetica; los de los Planos, y Solidos de la Geometrìa; los Esphericos de Theodosio; las principales propriedades de las Secciones Conicas; la Trigonometria Elementar, assi Rectilinea, como Espherica; la Logarithmica; los principios de la Algebra, y su aplicacion à la Geometrìa.

DISPUESTOS, Y DIVIDIDOS EN DOS TOMOS, por el Padre Pedro de Ulloa, de la Compañia de Jesus, Cathedratico de Mathematicas de los Estudios Reales de el Colegio Imperial, y de el Consejo Supremo de las Indias.

TOMO I.

QUE CONTIENE LOS PRINCIPIOS ARITHMETICOS, los Geometricos de Planos, y Solidos, los de la Algebra, los de la Trigonometrìa Rectilinea, la Tabla Logarithmica, y el Canon Trigonometrico.

DEDICADO.

A EL EXCELENTISSIMO SEÑOR CONDE de Luna, &c.

Con Privilegio, y las licencias necessarias. En Madrid: Por Antonio Gonçalez de Reyes. Año 1706.

El libro esta dedicado a D. Antonio Francisco Vigil de Quiñónez Pimentel y Zúñiga, Conde de Luna; consta de 320 páginas y un anexo de otras 85 con las tablas de logaritmos y trigonométricas. Lo componen una introducción y dos partes. El planteamiento general que Ulloa hizo de sus *Elementos* dividía la obra en cuatro partes; en la primera de ellas trata de la razón y potencia de la cantidad, la segunda es sobre las proposiciones elementales de Euclides, la tercera se refiere a los "*Esphericos*" de Theodosio y la cuarta parte, se refiere a las secciones cónicas (**CGO3**).

El primer tomo contiene la primera y cuarta parte, a las que Ulloa llama lo más "*útil*" de los libros 7º, 8º, 9º y 10º de Euclides a los que agrega nuevos contenidos. La segunda parte presenta el contenido de los libros 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 11º y 12º de Euclides (**CGO3**).

La influencia de Euclides es permanente, desde la elección del título, la elección de los contenidos y las nociones básicas en que se fundamenta, como vamos a subrayar.

Al inicio del texto, Ulloa define lo que él considera el objeto de las matemáticas: *"es todo aquello que puede medirfe, y contarfe".* Asimismo explica la diferencia entre cantidad, magnitud y número.

Cantidad: *"todo lo que se puede medir y contar es cantidad inteligible"* (**CCO2**).

Magnitud es: *"una cantidad, cuyas partes eſtan continuadas ó unidas, aunque sea con union, ó continuacion imaginaria"* (p. 4).

Número es: *"una cantidad cuyas partes eſtan diſcontinuadas aunque sea con imaginaria deſunion, ò diſcontinuacion"* (p. 5) (**CCO1**). Así, magnitud es la cantidad continua y número la cantidad discreta. De este modo, cuando presenta la *addicion ó summa*, en la página 8, y la *subftraccion*, en la página 9, lo hace mediante *líneas* (segmentos) con medidas enteras:

es decir, con cantidades cuyas partes *eſtan diſcontinuadas aunque sea con imaginaria deſunion*. Igualmente en el *producto* (p. 13) y en el *quociente* (p. 19) muestra el número como superficie o número plano (**CCO1**).

Identifica al número entero como aquél que "*fe expreffa folo con alguna, ò algunas NOTAS puesftas todas en vn Renglon*" (p. 6) (**CCO3**).

El número es, pues, una abstracción de objetos discretos, dada por una notación específica. Este texto es contemporáneo de la obra de Newton y Leibniz, sin embargo, la noción de número que sostiene es una noción clásica, basada en Euclides. Se aprecia el planteamiento euclídeo de la noción de número como pluralidad y la consideración de que el uno no es número pues, no es una pluralidad, lo que expresa así:

"Uno, no es Numero ; pero puede conſiderarſe como Principio, y origen de todo Numero" (p. 5) (**CCO1**).

La consideración de cantidades generales la localizamos, cuando enuncia proposiciones para las progresiones, como por ejemplo: *"Dado un Termino [a] y cualquier Denominador [x] forman una progreſsion geometrica"* (p.109) (**CCO4**).

También trata de las cantidades generales cuando inicia el estudio de la "*SYNTHESIS Y ANALYSIS DE LAS PROPOSICIONES MATHEMATICAS*":

> *"Es precifo tener medio afsi para defcubrir la Naturaleza de cualquier Propoficion , que fe proponga, como para demoftrar commodamente la ia defcubierta. El medio para confeguir efto es una efpecie de Arithmetica literal , que fe llama ALGBEBRA. (…) Defpues para fixar la Imaginacion , y aliviar imponderablemente la Memoria fe feñalará cada Termino de la Queftion con una letra del Alphabeto ; pero los conocidos , y determinados con una de las primeras a. b. c. d. &c. y los no conocidos , ò no determinados con una de las ultimas t. u. x. y. z."* (pp. 126-127) (**CCO4**).

Más adelante, Ulloa considera la ecuación como una igualdad o desigualdad de cantidades, expresándolo de la siguiente manera:

> *"Si es de igualdad , expreffada de dos modos una mifma Cantidad , y effe Cotejo es lo que fe llama Equacion , ó Igualacion. Si es de defigualdad, notando la diferencia que ai entre effas Cantidades , fe confique facilmente la Equacion: porque fi fe fabe , que x. excede á z. en 5. ferà x -5 Ω z. ò xΩ z + 5: y afsi la Cantidad z. puede llamarfe , x -5"* (p. 127) (**CCO4**).

Asimismo considera las incógnitas como aquellas cantidades que se desconocen en una operación planteada (**CCO4**). Y continúa:

> *"Quando eftà fola la Incognita en el primer Miembro, y fu valor folo en el 2.º fi efte es pofitivo, la Raiz es Pofitiva , v.g. xΩa; y Negativa , fi negativo , v.g. xΩ-b"* (p. 129) (**CCO4**).

Las definiciones, teoremas y enunciados se presentan como proposiciones y las reglas o propiedades como *"Scholio"*.

Una vez que ha definido lo que es número al comienzo de la obra, indica en qué consisten las operaciones de "*summa*", "*resta*", "*multiplicación*", y "*división*" de números *enteros (naturales)* (**CC01**). A continuación explica lo que es cantidad positiva y cantidad negativa (**CCO5)**, muestra la ley de los signos y aborda las mismas operaciones anteriores con las cantidades positivas y negativas. Sigue luego con los "*quebrados*"(**CCO6**).

Continúa el desarrollo del texto sin hacer mención especifica a las cantidades negativas y sus características, o utilizando más ejemplos que aclaren la idea. En todo el texto sólo hay un ejemplo práctico de cantidad negativa, si bien utilizó estos números en varias ocasiones, por ejemplo, trabaja los números negativos cuando estudia la resolución de ecuaciones y los logaritmos (**CCO5**).

Kline (1992) expone la incomodidad de los matemáticos del siglo XVIII con los números negativos. Aunque son números conocidos y aceptados, la mayor parte de los autores muestran cómo evitar los números negativos, excepto para indicar la sustracción de una cantidad mayor de una menor y para las raíces negativas. La posición de Ulloa es coherente con la de los autores de su época, y se basa en un concepto de número clásico.

El texto amplía o mejora los libros de aritmética de la época en España; introduce las cantidades negativas y brinda una introducción al álgebra y a otras partes de las matemáticas (**CGO6**).

4.4.3 Tratamiento dado a los negativos

En esta obra se aborda muy brevemente el número negativo. Pasamos a presentar párrafos correspondientes a cada una de las categorías establecidas para el tratamiento de los números negativos cuando hemos localizado esa información.

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.
"Efta feñal + fe llama poſtiva; y efta - Negativa" (p. 20).

La presentación que se realiza es formal, consta simplemente de notaciones que se muestran mediante signos abstractos.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.
"De aqui nace, que siempre que una Cantidad tiene delante de si la feñal + ò no tiene delante de sì la señal - fe llama, Cantidad positiva; pero siempre, que una Cantidad tiene delante de sì la feñal - fe llama, Cantidad negativa. Y cuando no antecede otra positiva; esta Cantidad fe llama, Cantidad falsa, ó , menor que nada" (p. 20).

De este párrafo se distinguen tres aspectos:

- Afirmación de que los signos más (+) y menos (-) dan cualidad positiva o negativa a las cantidades que preceden;
- Uso de la denominación "cantidades falsas" para las cantidades negativas, la cual procede de la Geometría de Descartes y tiene su origen en la resolución de ecuaciones;
- Las cantidades negativas tienen entidad propia, independiente de la sustracción, pero no vienen vinculadas a ningún fenómeno físico, al menos no en esta introducción.

"… afsi + + ò - - , fignifican Mas, y equivalen à vna Pofsitiva +: porque toda affirmacion de affirmacion, y toda negacion de negacion es

affirmacion." (p. 21).

Ulloa hace equivalentes los signos más (+) y menos (-) a una afirmación o negación lógica, cuando presenta la regla de los signos. Esta noción de afirmación o negación le va a permitir, mas adelante, conectar las cantidades positivas y negativas con las acciones de avanzar y retroceder.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.

No hemos encontrado explicación ni información en el texto para esta categoría. Ulloa no hace digresiones sobre la naturaleza de estas cantidades. Su presentación es formal y directa.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.

No hemos encontrado justificaciones que muestren la necesidad de estas cantidades en el texto; no hay información para esta categoría. Los ejemplos que aparecen en el texto no se proponen justificar la necesidad de estas cantidades sino que, una vez presentadas, se utilizan.

TSN5: Cantidades negativas como falsas y como menores que nada.

La denominación de una cantidad como menor que nada se sostiene sobre un ejemplo de movimiento, y tiene significado físico:

> *"(...) y para expresar, que hizo lo contrario , de lo que avia de hacer , puede dezirse , que ha abançado menos que nada, y que fu avance es, -2. leguas: conque aquí, dos leguas fon menos que nada*" (p. 20).
>
> *"Y cuando no antecede otra positiva; esta Cantidad fe llama, Cantidad falsa, ó , menor que nada"* (p. 20).

Más adelante, cuando está estudiando la solución a los distintos tipos de ecuaciones de segundo grado, y considera el caso $x^2+px+q = 0$, afirma:

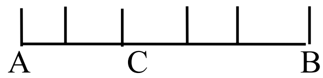
> *"… y afsi , $x^2 + px$ serìa Cantidad falfa o menor que nada (…) en efte Grado la Fórmula es impoffible : porque la Summa de Cantidades pofitivas nunca puede fer igual à Nada."* (p. 132).

En un sentido fenoménico se presentan dos argumentaciones para entender las cantidades negativas. Por un lado son falsas, lo que equivale a ser raíces negativas de una ecuación, y, por otro, son *menores que nada*. La nada se describe en sentido físico como el no moverse; de esta manera se identifica una cantidad negativa con el efecto de un retroceso como una cantidad inferior a no avanzar (ver comentario a la ejemplificación).

TSN6: Ejemplificación.

Este es el único ejemplo que se utiliza en el texto para aclarar la idea de *"número menos que nada"*:

> *"Es facil formar ideas de eftas Cantidades menores que nada. Supóngafe, que defde C. hasta B. ay tres leguas; y defde C. hasta A. ay dos. Si vn Caminante efta en C. con defignio de llegar a B. y effectivamente faliendo de C. llega a B. es verdad dezir, que abançó ; y que fu abance es mayor que nada; y que la medida de efte abance es tres leguas. Si no obftante su defignio fe halla precisado a detenerse en C. su abance es ninguno , o es igual a nada. Si en vez de caminar azia B. saliendo de C. llega a A. en la phrase vulgar fe dira, que cejò ; y para expressar, que hizo lo contrario , de lo que avia de hacer , puede dezirse, que ha abançado menos que nada, y que fu avance es, -2. leguas: conque aquí, dos leguas fon menos que nada*" (p. 20).



El ejemplo presenta una comparación de situaciones que conllevan a medidas dirigidas con sentidos opuestos. Como la escogencia de sentidos es arbitraria, la medida obtenida como negativa podría ser -2 o –3 según la conveniencia del resolutor. Corresponde a un fenómeno cotidiano basado en los desplazamientos.

Es interesante destacar que el movimiento es el único fenómeno de origen físico que presenta Ulloa para dar sentido a la noción *menor que nada*, ya que un retroceso es menos que no moverse, en el sentido de que se pierde posición.

La idea en que se sustenta esta representación gráfica es la misma en que se basa la geometría analítica de Descartes: elegir un punto como origen, de valor nulo, y a partir de él representar las cantidades positivas por puntos equidistantes hacia la derecha, y las cantidades negativas por puntos equidistantes hacia la izquierda. Pero Ulloa no le da un sentido algebraico general, es decir, no trabaja con cantidades generales, con enteros, sino con relativos, ya que utiliza los signos para la comparación de medidas concretas de diferentes regiones, dadas por los dos sentidos opuestos.

TSN7: Regla de los signos.

> *"De la conftitucion de eftas feñales + y - fe sigue lo 1º. que cualefquiera dos femejantes pueftas inmediatamente afsi + + ò - - , fignifican Mas, y equivalen à vna Pofsitiva +: porque toda affirmacion de affirmacion, y toda negacion de negacion es affirmacion. Lo 2º. que qualefquiera dos de femejantes immediatamente pueftas + - ò -+, fignifican Menos, y equivalen à vna Negativa -: porque toda affirmacion de negacion , y toda negacion de affirmacion es negacion. Supuesto efto , es facil Summar , Reftar , Multiplicar , y Partir imperfectamente las cantidades affectadas con cualquiera de las feñales + ó -"* (p. 21).

Aquí se presenta el significado lógico de lo negativo como una negación y este significado se toma como base para la justificación de la regla de los signos, realizando las diversas combinaciones de una afirmación (cantidad positiva) y de una negación.

> *"fe figuen dos Reglas para abreviar las operaciones de Sumar, y Reſtar tales Cantidades, fi fon defiguales. Iª. Siempre que tienen ſeñales encontradas ; en lugar de ſummar, ſe reſta ; y à lo que proviene ſe pone la ſeñal de la mayor : y en lugar de reſtar se ſumma ; y à lo que proviene ſe pone la ſeñal, que tiene aquella, de quien ſe avia de reſtar. IIª. siempre que tienen las miſmas ſeñales, y ſe manda reſtar la mayor de la menor ; ſe reſta conforme à razon natural, la menor de la mayor, y à lo que proviene ſe pone la ſeñal contraria"* (p. 22).

Se enfatiza en el algoritmo a seguir cuando se suman o restan cantidades, indicando que se debe siempre restar cuando los signos de las cantidades son diferentes; el signo de la cantidad resultante dependerá de cuál sea la cantidad mayor. Ulloa deja claro que en aritmética lo correcto o *"natural"* es restar una cantidad menor de una mayor y no lo contrario, siendo esto comprensible por su idea de la cantidad como medida.

> *"Si ſe multiplica, ò ſe parte + por + , ò - por - , el producto, ò Quociente ſiempre es, + : Y ſy ſe multiplica, ò ſe parte + por -, ò - por +, el producto, ò Quociente ſiempre es, -."* (p. 23).

El autor hace una generalización para la multiplicación y división, pero sólo toma en consideración los signos, siendo esto una regla de simplificación de signos.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.
"Si un poſitivo +3, fe fumma con vn privativo, ò igual à él, -3. ò mayor que él -4. ò menor que èl, -2 la fumma ferà +3-3. ò ,+3-4. ò, +3-2:porque la fumma fera +3+-3. ò, +3+-4. ò, +3+-2 [...]" (p. 21).

Ulloa identifica el valor absoluto de una cantidad con su valor relativo, puesto que lo que afirma en el párrafo es que $|+3|=|-3|$, $|+3|<|-4|$ y $|-3|>|-2|$, es decir compara los valores absolutos de las cantidades positivas y negativas.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.
"fi un Poſitivo +3, fe fumma con un Poſitivo ò igual à èl, +3. ò mayor que èl, +4. ò menor que èl, +2. la fumma ferà , +3 +3. ò, +3 +4 [...]" (p. 21).

De este párrafo se deduce que: +2<+3<+4, es decir, se establece un orden de las cantidades positivas sin relación con el cero.

> *Si un poſitivo +3, fe fumma con vn privativo, ò igual à él, -3. ò mayor que él -4. ò menor que èl, -2 la fumma ferà +3-3. ò ,+3-4. [...]"* (p. 21).
>
> *"Si de vn Privativo -3. fe refta vn poſitivo, ò igual à èl, +3. ò mayor que èl, +4. ò menor que èl, +2; el refiduo ferà, -3-3: ò, -3-4: ò -3-2. [...]"* (pp. 21)

En estos dos párrafos lo que se establece es un orden respecto a cero entre los valores absolutos de las cantidades; se infiere:

Del primero	del segundo
$\|+3\|=\|-3\|$	$\|-3\|=\|+3\|$
$\|+3\|<\|-4\|$	$\|-3\|<\|+4\|$
$\|+3\|>\|-2\|$	$\|-3\|>\|+2\|$

Por lo tanto, el signo menos (-), en la cantidad –3 sólo indica el efecto de sustracción que ocasiona la cantidad al adicionarla a otra.

Finalmente, añade:

> *"Si de un Privativo -3. fe refta un Privativo, ò igual à èl, -3. ò mayor que èl -4. ò menor que èl, -2. ..." (p. 21).*

De donde se desprende que -4 > -3 > -2; es decir, el orden entre negativos para Ulloa es el orden de los valores absolutos.

Más adelante, al trabajar con los logaritmos, presenta:

> *"Si se forma una Progrefsion geometrica cuio 1.º Termino fea 1. y el 2.º qualquier Cantidad , y fe difponen por fu orden debaxo de cada Termino fus Exponentes , feràn las Progrefsiones.*
>
> *Geom. 1. x. x^2. x^3 . x^4 . x^5 . x^6 . x^7 . &c.*
> *Arith. 0 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c.*
>
> *Y fi fe continùa la Progrefsion geometrica debaxo de el Zero , los Terminos de efta feràn Exponentes de los que corresponden en aquella afsi:*
>
> *Geom. x. 1. 1/x. $1/x^2$. $1/x^3$. $1/x^4$. $1/x^5$. $1/x^6$. &c.*
> *Arith. 1. 0. –1. –2. –3. –4. –5. –6. &c."* (p.119).

Observamos aquí la presencia de dos sucesiones: la de los números positivos y la de los números negativos, pero ambas se presentan como sucesiones crecientes independientes. En el caso de la sucesión de negativos los términos avanzan conforme aumentan los exponentes, si bien la presencia de la cantidad inicial, *x*, fuerza a que su exponente 1 aparezca vinculado con esta sucesión.

> **TSN10:** Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
> *"fi un Poſitivo +3, fe fumma con un Poſitivo ò igual à èl, +3. ò mayor que èl, +4. ò menor que èl, +2. la fumma ferà , +3 +3. ò, +3 +4. ò, +3 +2. porque la fumma ferà +3++3. ò +3++4. ò +3++2. y à eftas exprefiones equivalen las primeras.*
>
> *Si un poſitivo +3, fe fumma con vn privativo, ò igual à él, -3. ò mayor que él -4. ò menor que èl, -2 la fumma ferà +3-3. ò ,+3-4. ò, +3-2:porque la fumma fera +3+-3. ò, +3+-4. ò, +3+-2 y à eftas exprefsiones equivalen las primeras. De aqui nace efta Regla general para fummar tales Cantidades. Vnanſe con los ſeñales, que tienen"* (p. 21).
>
> *"Si de un poſitivo +3. se refta un poſitivo, ò igual á él, +3. ó mayor que él, +4. ó menor que él, +2. el refiduo ferà,. +3-3. ó +3-4. ò +3 -2. porque el refiduo ferá +3 - +3. ò, +3 - +4. ó +3 - +2. y à eftas expreſiones equivalen las primeras.*
>
> *Si de un Poſitivo +3. fe refta un Privativo, ò igual à èl, -3. ò mayor que èl, -4. ò menor que èl, -2 ; el refiduo ferà, +3+3. ò, +3+4. ò, +3+2. porque el refiduo ferà +3--3. ò, +3--4. ò, +3--2. y à eftas expreſiones equivalen las primeras.*
>
> *Si de vn Privativo -3. fe refta vn poſitivo, ò igual à èl, +3. ò mayor que èl, +4. ò menor que èl, +2; el refiduo ferà, -3-3: ò, -3-4: ò -3-2. porque el refiduo ferà, -3-+3: ò, -3-+4: ò -3-+2. y à eftas expreſiones equivalen las primeras.*
>
> *Si de un Privativo -3. fe refta un Privativo, ò igual à èl, -3. ò mayor que èl -4. ò menor que èl, -2. el refiduo ferà -3+3. ò, -3+4. ò, -3+2: porque el refiduo ferà -3 - -3. ò -3 - -4: ò -3 - -2. y à eftas expreſiones equivalen las primeras."* (pp. 21-22).

Como ya se han definido nuevas cantidades con signo y las reglas para operar con ellas, ahora se muestran mediante ejemplos los distintos casos de sumas y restas que pueden presentarse con números positivos y negativos, realizando finalmente una simplificación de signos y estableciendo de esta manera las reglas para operar con estas cantidades.

> *"Dado un Logarithmo negativo [-0.1023729.] hallar las Decimas de quienes lo es."* (p. 117).

En algunos casos, Ulloa hace uso de la cantidad negativa sin cuestionar su significado, aquí en particular simplemente es un guarismo.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.

No se ha encontrado información correspondiente a esta categoría sobre el tipo de problemas que solucionan las cantidades negativas. Esto supone un predominio de los aspectos formales y un escaso interés por trabajar con problemas cuyos resultados sean negativos e interpretar tales resultados.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

No hemos encontrado información o explicación en el texto para esta categoría. Los negativos tienen interés en cuanto que se presentan como resultado de la aplicación de las leyes formales del cálculo algebraico en la resolución de ecuaciones.

TSN13: Otros.

"Quando la cantidad literal propuefta es negada , y Poteftad , cuio exponente es numero par , no tiene Raiz alguna , poſitva , ó negativa: porque ±x multiplicado por fi mifmo da producto affirmado. Pero fi la Poteftad negada tiene por exponente numero impar , tendra fu Raiz negada como -x: porque su Quadrado sera x^2 *, fu cubo* $-x^3$ *, fu Quadrado Quadrado* x^4*."* (p. 91).

En este párrafo Ulloa plantea la no existencia de raíces de orden par para las cantidades negativas, pero sí para las raíces de orden impar; asimismo afirma la idea de que la cantidad negativa es una cantidad negada.

En la discusión de los tipos de ecuaciones por el número de sus raíces se plantean las diferentes combinaciones de raíces positivas y negativas en cada caso:

"Y asi en el 2.º Grado no ai mas que tres : porque las dos Raizes simples , ò feràn Pofitivas , ò Negativas , ò una de ellas Pofitiva , y otra Negativa. " (p. 129).

Los signos de las raíces de un polinomio y los signos de sus coeficientes los analiza Ulloa con detalle para los primeros grados.

También, como se ha dicho, los negativos se presentan en el estudio de los logaritmos.

4.4.4 Análisis

A continuación presentamos un análisis sobre los campos genéricos definidos. Como hemos planteado en los apartados 3.3.1 y 3.3.2, realizamos un análisis conceptual junto con una revisión histórico-crítica y un análisis de contenido.

4.4.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica.

- ***Número***

Se encuentra en esta obra de Pedro de Ulloa un apego a planteamientos clásicos sobre la noción de número. Como se puede apreciar a través de **CCO1**, encontramos la segunda definición que viene dada en el libro VII de los Elementos de Euclídes (Reedición de 1994), la cual dice: *"Un número es una pluralidad compuesta de unidades"*, de esta manera los números se forman agrupando unidades; el número se refiere a lo discreto o discontinuo como podemos verlo en **CCO1** y a lo continuo discretizado, como cuando utiliza segmentos con un número exacto de unidades. Bajo esta idea el número se asocia a colecciones abstractas de objetos tangibles. Esta apropiación del pensamiento euclídeo viene dada por el redescubrimiento del conocimiento griego durante la baja Edad Media y el Renacimiento. El dominio de los algoritmos de las operaciones muestra las ventajas de incorporar el sistema decimal de numeración a las nociones clásicas. Para representar o *"expresar la innumerable variedad que puede aver de Cantidades, se han inventado varias Notas (…) pero las mas commodas son unas cifras, cuya invencion vulgarmente se atribuye a los Arabes …"*

También encontramos la idea de número asociada a la de medida en **TSN6**.

- ***Cantidad***

Cuando se presenta la cantidad, Ulloa alude a dos tipos de cantidades: las que se pueden contar y las que se pueden medir, es decir, hace referencia a la pluralidad y a la medida. La primera se refiere al número en concordancia con la idea que tiene de él como pluralidad, que ya indicamos en el párrafo anterior, y la segunda se refiere a la magnitud. Así, la cantidad puede ser discreta o continua. De esta manera hallamos evidencia de la noción aristotélica de cantidad a través de lo que se expresa en **CCO2**. Como indica Gómez (1999, p. 91) respecto a esta noción de Aristóteles *"Lo que caracteriza a la pluralidad es su potenciabilidad de ser divisible en partes no continuas y a la de la magnitud es su potenciabilidad de ser divisible en partes continuas"* y ofrece la definición aristotélica: *"Se dice que posee "cantidad" lo que es divisible en partes internas, cada una de las cuales –sean dos o mas de dos- son por naturaleza algo uno, y algo determinado" (Aristóteles. Metafísica, 1020a, 5-15)*.

La idea aristotélica de cantidad que utiliza Pedro de Ulloa refleja la influencia de la matemática griega en su formación y, desde luego, en su obra; esto lo explicita al afirmar que sigue en el texto a Theodosio y Euclides.

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

En esta obra se aborda brevemente el número negativo. El autor utiliza la idea de cantidad negativa. Inicia su planteamiento mostrando los signos positivo y negativo; luego identifica las cantidades positivas y negativas. A estas últimas las considera como entidades autónomas, con significado formal, no sólo como sustraendo, como apreciamos en **TSN2**. Para ello explica qué son las cantidades precedidas del signo (–), aclarando que, si a esta cantidad no le antecede una cantidad positiva, se llaman cantidades falsas o menores que nada. Para dar una idea de cantidad negativa que sea congruente con la noción previa de cantidad, en **TSN5** utiliza la expresión cartesiana de "cantidad falsa" y proporciona en **TSN6** la caracterización de "cantidad menor que nada" mediante un ejemplo donde trata de aclarar el concepto.

En la justificación de la regla de los signos interpreta los signos + y – como afirmaciones y negaciones lógicas. El tratamiento que proporciona en la Primera Parte del texto es aritmético, ya que siempre presenta valores concretos, si bien busca establecer reglas formales para operar entre estas cantidades a través de los signos y de una justificación lógica. Mas adelante hace una breve presentación del uso algebraico de las cantidades negativas cuando aborda la solución de ecuaciones, pero la noción de número negativo es la establecida con anterioridad.

Cuando en **TSN2** Ulloa llama falsa a la cantidad negativa cuando no le antecede otra positiva, hallamos uno de los conflictos sobre la aceptación de números negativos desde su origen (el cual sería, posteriormente, bandera de los enciclopedistas franceses en su oposición a tal objeto matemático). Este conflicto se refiere a la aceptación, por una parte, de la existencia de cantidades negativas como resultado de cálculos y operaciones algebraicas; como consecuencia de ello surge la manipulación operatoria de estas cantidades y su aceptación formal. Pero, por otra parte, el intelecto y la reflexión filosófica no conciben la existencia real de unas cantidades que tengan un valor menor que cero, es decir, menos que nada, lo cual dificulta la aceptación de las cantidades negativas. Pese a que a las cantidades negativas se las dota de un significado relativo, continúan presentando inconvenientes para su comprensión. Descartes plantea en su *Geometría* la posibilidad de convertir toda raíz negativa en otra positiva, mediante un cambio del origen o punto de referencia, y de ahí la denominación de "cantidad falsa".

Ulloa conoce este conflicto, pero no lo contempló como una dificultad para su planteamiento, sólo lo menciona como dato al que trató de aportar algún significado al que no concede mayor espacio. Para Ulloa las cantidades negativas formaban parte del aparato formal y lógico de las matemáticas; consideraba que para trabajar con ellas era suficiente conocer las reglas de su representación y las correspondientes a las operaciones, que es a lo que dedicó su presentación, sustentando su significado en las simples nociones aritméticas de los números relativos.

La revisión histórica muestra que la posición de Ulloa sobre los números negativos corresponde a la transición entre un concepto de número clásico, basado en la abstracción de colecciones y la noción de número natural, a un concepto de número formal, establecido por leyes operatorias y la estructura que determinan, que va a dar lugar a una noción de número relativo.

4.4.4.2 Análisis de contenido

- ***Conceptos básicos***

Hemos identificado e ilustrado a partir de **TSN2** que, en el texto, el signo menos (–) pasa, de establecer una relación, a ser tan sólo un instrumento de sintaxis para un nuevo concepto. Los números o cantidades se pueden presentar de las siguientes formas: positivas con signo +, como +4, o sin él, es decir, 4; y negativas precedidas de una cantidad positiva como +4 –3, o solamente con signo –, como –3, siendo ésta una cantidad menor que nada o simplemente falsa. Para proporcionar algún significado concreto a lo anterior, utiliza una situación de desplazamientos relativos, como se observa y comenta en **TSN6**. Ulloa se apoya en el desplazamiento para ejemplificar la idea de cantidad menor que nada. Por medio de **TSN6** dota de significado cotidiano a la idea de cantidad menor que nada, por ello utiliza el ejemplo de desplazamiento, es decir una pareja de contrarios. Su familiaridad con las ideas de Descartes le hace utilizar la noción de cantidad falsa como algo conocido, que no necesita explicarse.

La consideración de la incógnita se refiere a valores específicos no conocidos en una operación, como se indica en **CCO5.**

En **CCO5** queda de manifiesto que el significado de una ecuación corresponde o bien a una igualdad o a una desigualdad; se aprecia un sentido de establecer un equilibrio o indicar su ausencia. Todas estas nociones son algebraicas y difundidas por los trabajos cartesianos.

- ***Fenomenología/justificación***

El análisis fenomenológico muestra la influencia de ideas racionalistas para la aceptación por Ulloa de las cantidades negativas, con vinculación directa a la Geometría de Descartes. La fenomenología utilizada es de procedencia cartesiana; viene fundada en los desplazamientos lineales y en la resolución de ecuaciones. Como hemos visto en **TSN5** se presentan dos argumentaciones para entender las cantidades negativas. Por un lado estas cantidades *“son falsas”*, lo que equivale a que son raíces negativas de una ecuación y, por otro, son *“menores que nada”*.

Los fenómenos considerados son aritméticos, por un lado, sostenidos en la comparación de medidas concretas y, por otro, de naturaleza algebraica resultado de la resolución de ecuaciones. No hay otra justificación en el texto para la aparición de los negativos.

Ulloa trata de aclarar la idea de cantidad negativa por medio de un único ejemplo físico, como indicamos en **TSN6**. Este ejemplo se fundamenta en la medida de distancias con direcciones diferentes y contrarias. El origen o punto de partida C lo utiliza como punto de referencia para los dos avances y para el intento de avance.

Asigna a la cantidad negativa una naturaleza de acción; considera una cantidad negativa como resultado de una transformación o cambio. También 0 o nada se produce, según el ejemplo, cuando se quiere efectuar una acción (desplazamiento) pero ésta no se hace. Dentro de este modelo la interpretación del 0 es no realizar una acción. Podría inferirse del esquema utilizado en el ejemplo la existencia de un cero positivo 0^+ y un cero negativo 0^-.

Ulloa utiliza las cantidades negativas para modelizar un fenómeno de movimiento en retroceso; el tipo de representación que utiliza para ejemplificar las cantidades negativas es gráfico, mediante desplazamientos sobre una línea.

- **Estructura de orden**

De **TSN6**, **TSN8**, **TSN9** y **TSN10** se obtienen dos consideraciones respecto al orden de las cantidades negativas: en primer lugar, se reconoce que las cantidades negativas son menores que nada y, tomando en cuenta el ejemplo presentado en **TSN6**, donde se asocia el cero con “nada”, se tiene por lo tanto, que las cantidades negativas son menores que cero.

En segundo lugar, se establece en varias ocasiones cuando un número negativo es igual, mayor o menor que otro tomando un orden de acuerdo a su valor absoluto, como en **TSN10**. En este caso lo hace, como cuando explica la diferencia entre negativos y afirma que -4 es mayor que -3.

Todo esto señala que no está comparando cantidades positivas y negativas, sino valores absolutos de cantidades, por lo cual se podría decir que estamos ante la presencia de números dirigidos

De otra parte, en **TSN9** se plantean dos sucesiones crecientes independientes: la de los positivos y la de los negativos, y en ambos casos se considera que los términos se siguen conforme aumentan los exponentes de las progresiones geométricas relacionadas.

- **Estructura algebraica**

En el texto se justifica la regla de los signos como resultado de componer proposiciones lógicas, en donde el signo positivo (+) equivale a una afirmación y el signo negativo (–) equivale a una negación. Se dota de justificación lógica a la ley de los signos como se ve en **TSN7**.

La suma y la resta son presentadas simplemente como una extensión de las operaciones entre naturales mediante aplicación de la simplificación de signos que expone inicialmente, y que muestra diferentes combinaciones de suma y resta de una cantidad positiva y una negativa. El principio para reducir términos de distintos signos es el de anulación/compensación. Se ofrece un tratamiento puramente sintáctico, como se mostró en **TSN10**.

Sin aportar explicación, cambia la terminología de las cantidades negativas al iniciar la explicación de las operaciones *"summa"*, *"residuo"*, *"producto"* y *"quociente"* de las cantidades. Ulloa introduce el término *privativo* para referirse a las cantidades precedidas de signo menos (–), y así pasa a emplear las cantidades como números. De este modo utiliza un sólo término en cada caso (*positivo* o *privativo*). A lo que llamaba cantidad, le dice ahora, número y pasa a explicar las reglas de sus operaciones, lo cual se puede observar en **TSN10**.

- ***Uso algebraico***

Realiza una caracterización de los polinomios mediante la interacción de los signos utilizados con los números a las letras y así aparece en el texto la noción algebraica de polinomio; de tal manera que presenta una notación algebraica. Al admitir la existencia de los negativos, los empieza a utilizar, por ejemplo, en los logaritmos, en exponentes, y también cuando indica que las cantidades negativas no tienen raíz par.

El conjunto numérico que Ulloa define para las operaciones, y que llama enteros, son sólo números naturales.

En forma global el texto tiene un planteamiento formalista, pues define los signos y las operaciones e inmediatamente comienza a operar con ellos de manera que no se llegue a contradicciones.

En **TSN13** podemos observar que las cantidades negativas eran manipuladas algebraicamente como parte de procedimientos algorítmicos.

4.4.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r.

Primera diferencia. La primera de las cinco diferencias estructurales establecidas por González Marí (1995) señala que los números enteros se caracterizan por una relación de orden total, mientras que los naturales relativos tienen un *doble orden natural*, con inversión en la región negativa, lo que hemos llamado en algún momento *orden del valor absoluto*. Para detectar esta diferencia González Marí establece cuatro indicadores (1998, pp. 214-218), que vamos a enumerar de nuevo para discutir su presencia en la obra de Ulloa.

El primer indicador es el que denomina **a.1.** *Atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones*. Se reconoce este indicador cuando la asignación es justa y determinada para el caso de los enteros, y para los números naturales relativos cuando es arbitraria e indeterminada (p. 214).

En este caso la asignación que se hace en TSN2 es precisa, sólo el adjetivo de *falsa* para la cantidad negativa puede tener un sentido arbitrario, que se solventa recordando la referencia a Descartes. También el significado lógico de los signos propuesto en TSN2 y TSN7 es determinado y parece apuntar a los enteros.

Sin embargo, la asignación que se hace a los términos positivo y negativo en TSN6 es arbitraria e indeterminada: "*hacer lo contrario de lo que pretendía*", de manera que el par avanzar-cejar tiene connotaciones de favorable – desfavorable para un propósito no formal. En este caso, el ejemplo elegido para presentar las cantidades negativas respecto de las positivas y dotar de sentido a la expresión "*cantidad menor que nada*", hace una asignación arbitraria, que corresponde a los números naturales relativos.

El segundo indicador **a.2.** *Comparación global de regiones* se reconoce por el tipo de comparación global de regiones que hace el autor (pp. 215-216). No hemos encontrado evidencias para este indicador que sitúen el tratamiento de Ulloa para las cantidades negativas en el campo de los enteros o en el campo de los naturales relativos.

Tercer indicador: **a.3.** *Comparación de medidas con valores numéricos negativos (inversión en el orden entre enteros y naturales relativos* (pp. 216-217).

La diferencia en este caso se establece porque para el caso entero el orden es el orden usual entre enteros negativos (es menor el de mayor valor absoluto) y en el caso de los naturales relativos el orden es el inverso, entre negativos es mayor el de mayor valor absoluto.

En este caso las observaciones recogidas en TSN9 dejan claro que Ulloa está trabajando el orden entre los negativos como orden relativo, ya que toma como orden para los negativos el de los valores absolutos.

Cuarto indicador: **a.₄.** *Comparación (orden) de medidas con valores numéricos de diferente signo o región* (pp. 217-218).

De los enunciados recogidos en TSN10 se desprenden comparaciones entre *privativos* –3 y positivos +2, *menores que el privativo,* que muestran la desconexión entre regiones propia de los naturales relativos, con los criterios de González Marí.

Como balance para esta primera diferencia D_1, sustentamos que los números negativos con que trabaja Ulloa son números naturales relativos, ya que las evidencias encontradas apuntan hacia esta interpretación.

Segunda diferencia. La segunda diferencia se refiere al papel que juega 0; en el caso entero no hay primer elemento, en el caso natural relativo 0 es primer elemento de la serie de los positivos (y de los negativos). Para reconocer esta diferencia González Marí (1998, pp. 218- 224) establece tres indicadores, cuya presencia en Ulloa vamos a estudiar.

Primer indicador **b.₁.** *Naturaleza de los números y de las situaciones.* Se tratará de números enteros cuando se trabaje con posiciones en una serie única respecto de un elemento central, que sirve de referencia, en el bien entendido que cero significa posición central y no medida en sentido absoluto. Esta condición parece no verificarla el autor cuando en la página 20, escribe:

> *"Si no obftante su defignio fe halla precisado a detenerse en C. su abance es ninguno , o es igual a nada."*

El cero en el ejemplo de Ulloa es una cantidad natural, a partir de la cual se producen avances y retrocesos. Por tanto, entendemos que este primer indicador señala hacia los naturales relativos.

Segundo indicador **b.₂.** *Representación.* En la estructura entera se utilizan números con signo que a veces se sustituyen por términos relativos sin que ello afecte a la naturaleza de los números. En la estructura natural relativa existen dos series duales con primer elemento, lo cual supone que la terminología que se utilice debe establecer claramente la diferencia entre ambas. En este caso la mayor parte del uso de las cantidades negativas se concreta en un número acompañado de un signo; en la ejemplificación se hace referencia permanente a la dualidad avanzar/retroceder. No estaría claro con esta única información si nos encontramos con números enteros o con naturales relativos. Sin embargo, observamos que el autor siempre se propone dotar de significado bien lógico o bien de medida a la simbolización matemática, es decir, de alguna información sobre el tipo dualidad a la que se refiere (p. 221), lo cual hace Ulloa en la mayor parte del texto considerado.

Las series de positivos y negativos que comienzan en 0, que comentamos en TSN9 también subrayan la idea de que hay un primer elemento, que es 0. Este segundo indicador también apunta hacia los naturales relativos.

Tercer indicador **b.₃.** *Transformaciones.* El trabajo de Ulloa no permite obtener información sobre este indicador.

Como balance para esta segunda diferencia D_2, decimos que los números negativos con que trabaja Ulloa, cuando satisfacen las condiciones de González Marí, lo hacen en el sentido de que se interpreten como naturales relativos.

Tercera diferencia. Se denomina: Continuidad de medidas vs. Discontinuidad de medidas al cruzar 0. En este caso no se establecen indicadores diferentes. La caracterización entera consiste en que se puede pasar de los positivos a los negativos, se puede “cruzar el cero”, sin sentido de discontinuidad. Sin embargo, en la estructura natural relativa, debido a la inversión del orden, al orden doble, no es posible efectuar medidas entre valores opuestos (González Marí, p.225).

Para Ulloa no hay continuidad de medidas ya que avanzar y retroceder son situaciones opuestas que, a lo menos que llegan es a ser nulas. Hay una discontinuidad expresada por “*hacer lo contrario de lo que había que hacer*”.

Cuarta diferencia. Cero único- Cero doble (natural relativo). Tampoco en este caso se establecen indicadores diferentes para su reconocimiento. González Marí afirma que se trata de una diferencia importante y lógicamente compleja (p. 226). No hay evidencias suficientes para sostener que Ulloa trabaja con un cero doble aún cuando hay ocasiones en que parece apuntar en este sentido. Así, cuando Ulloa expresa *“que hizo lo contrario de que avia de hacer”* parece que refleja la consideración de dos orígenes o ceros, puesto que las acciones realizadas son contrarias u opuestas; también con la presencia de las dos progresiones aritméticas detectadas en el estudio de los logaritmos y ya comentadas en TSN9. Sin embargo el análisis sobre el uso algebraico revela que, de forma general, los negativos reciben un tratamiento algorítmico y algebraico formal donde no parece tener cabida dos orígenes.

No consideramos suficientes la evidencias sobre un doble cero, aunque hay indicios débiles que apuntan a cierto cumplimiento de D_4.

Quinta diferencia. Composición aditiva: Adición entera- Adición natural y anulación–compensación. Tampoco para esta diferencia se establecen distintos indicadores. Las reglas presentadas en TSN7 y TSN9 para la adición y sustracción de cantidades negativas y positivas dejan claro que predomina el término de mayor signo y que se restan las cantidades de signos distintos, pasando por toda una casuística donde se analizan las distintas posibilidades. En este caso si está clara la estructura aditiva de los naturales relativos en el texto de Ulloa y se detecta la diferencia D_5.

La siguiente tabla resume la el análisis de las diferencias en el texto de Ulloa:

Tabla 4.1. Diferencias entre ***Z*** *y* $\mathbf{N_r}$ *en los Elementos de Ulloa*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
Ulloa	**Si**	**¿?**	**Si**	**Si**	Si	**Si**	**Si**	**¿?**	Si	Si	¿?	Si

Si =se cumple la diferencia en el campo de los números naturales relativos; No =la diferencia no se cumple en el campo de los relativos; ¿?=no hay evidencias de una u otra estructura; P = cumplimiento parcial de la diferencia en el campo de los naturales relativos.

4.4.6 Tratamiento global de los negativos en los *Elementos Matemáticos*

El balance del tratamiento que hace Ulloa de los números negativos, muestra que la estructura presentada corresponde a los números naturales relativos planteados por González Marí, excepto para la cuarta diferencia D4, de la que sólo hay indicios débiles no caracterizados por González Marí. Las reflexiones sobre la presencia de las diferencias de los naturales relativos, así como algún tratamiento claramente entero, indican que unos y otros se mezclan en el desarrollo del texto, con predominio en la conceptualización y fundamentación de los naturales relativos.

Aunque en el inicio, Ulloa presenta las cantidades negativas de manera formal y directa, el predominio de la estructura natural relativa es evidente, debido principalmente a dos razones.

En primer lugar, el marco de presentación de las cantidades negativas es aritmético, con cantidades concretas; cuando se presentan las cantidades algebraicas ya hay un desarrollo establecido para los negativos, que se ha sostenido sobre cantidades concretas y no sobre cantidades generales.

En segundo lugar, el ejemplo elegido para proporcionar significado a las "*cantidades menores que nada*" es una situación netamente relativa, de avances y retrocesos lineales. Aunque pudiera identificarse con la recta numérica, se trata de una situación muy diferente, que impone su propia lógica y, finalmente, distancia al autor del referente cartesiano en contra de su propia intención.

Las representaciones utilizadas para la cantidad negativa son numéricas y gráficas. El signo menos (–) otorga la cualidad de negativa a la cantidad que antecede, además indica el efecto de sustracción que ocasiona la cantidad al adicionarla a otra.

El conocimiento de Ulloa sobre Álgebra no destaca en el tratamiento de los negativos, ya que éstos tienen una base puramente aritmética, que permite sustentar una noción básica de número negativo, que luego se utiliza en operaciones más avanzadas, pero con un sentido puramente formal. De hecho Ulloa no muestra ningún problema en cuya resolución haya que reinterpretar el sentido de un resultado negativo.

El fundamento algebraico hace que utilice las cantidades negativas de manera reiterada a lo largo del texto, sin reparar en su significado y utilidad como resultado o como parte de una operación indicada. La doble consideración de las cantidades negativas como "menores que cero" y "falsas", reflejan en Ulloa, de una parte, el legado euclídeo de su formación, y por otra, el conocimiento y familiaridad con las modernas ideas novatoras y cartesianas.

4.5 Compendio mathematico. Tomo I y II (1707-1709).

4.5.1 Autor

Thomas Vicente Tosca: (n. en Valencia, 1651; m. en Valencia, 1723) (**CA1**). Realizó sus estudios en la Universidad de Valencia donde obtuvo el grado de maestro en artes y doctor en teología (**CA2**). En 1678 se ordenó sacerdote en la congregación de San Felipe de Neri.

Fueron Félix de Belaochaga y Baltasar de Iñigo, personajes del círculo de Zaragoza –la primera tertulia exclusivamente dedicada a las matemáticas, física y astronomía– quienes iniciaron a Tosca en los caminos de la matemática, la astronomía y la física (**CA5**).

Contemporáneo de Ulloa, Tosca vivió el cambio de la dinastía de los Austrias por la de los Borbones, con las azarosas luchas que ello supuso en el reino, principalmente en la Corona de Aragón, y el predominio de las ideas ilustradas en sus comienzos. Entre 1697 y 1705 organizó en sus habitaciones de la Congregación una escuela de matemáticas. Llevó a cabo diversas actividades técnicas para la ciudad de Valencia, entre ellas delineó el mapa de la ciudad (**CA7**).

Como universitario, ocupó el cargo de vicerrector de la Universidad de Valencia desde junio de 1717 hasta 1720 (**CA4**).

Vicente Tosca participó en el movimiento novator que se desarrolló en Valencia, siendo contemporáneo de Gregorio Mayans y Siscar, máxima figura del movimiento novator español. Su adhesión a las ideas novatoras se revela, entre otras cosas, con la publicación de su *Compendio* en Castellano, tanto así, que el propio Mayans y Siscar (citado por Capitán 1991, p. 691) indicaba que, si se quería enseñar la matemática en castellano y por libros impresos, debía de ser por medio del *Compendio* de Tosca repartiendo su estudio en tres o cuatro años (**CA7**). En esta obra se intentaba *"hacer una física desligada de los esquemas habituales de la filosofía natural más atentos a los <<primeros principios de los cuerpos>> y a las <<propiedades o afecciones generales del ente natural>>"* (Moreno, 2002; p. 360). Él acepta la necesidad de las matemáticas para el estudio de la física.

Tosca redactó el *Compendio* tomando como modelo los Cursos de carácter enciclopédico publicados fundamentalmente por los jesuitas y con finalidad educativa; parece evidente la presencia de una influencia común con Ulloa. Ahora bien, a diferencia de Ulloa, la estructura del *Compendio* distingue claramente entre Aritmética y Álgebra, dedicando un tratado diferente a cada materia.

Según López Piñero et al. (1983), Tosca ocupa un destacado lugar en la introducción de la ciencia moderna en España con la publicación de su *Compendio mathemático* y el *Compendium philosophicum* (**CGO6**).

Sus obras publicadas son: *Compendio matemático, en que se contienen todas las materias mas principales de las Ciencias , que tratan de la Cantidad,* en 1707, la cual tuvo una segunda y tercera impresión en 1727 y 1757, respectivamente; *Compendium Philosophicun praecipuas Philosophie...*, en 1721 y, de manera póstuma, *Tratado de arquitectura civil, monteo y cantena y reloxes* en 1724. Dejó manuscritos *Compendium mathematicum* en 1719 y *Aritmética superior* (Aguilar Piñal, 1983) (**CA6**).

Las referencias a Tosca pueden hallarse en Aguilar Piñal (1983)

Capitán (1991), Moreno (2002) y López Piñero et al. (1983) (**CA8**).

4.5.2 Caracterización del texto

Compendio Mathemático. Tomos I y II (1707-1709) (**CGO1**, **CGO2**). Madrid: Imprenta de Antonio Marín.

El Compendio Mathematico esta dedicado "al señor D. Felipe Quinto el animoso, rey de las españas"; D. Joseph Fernández de Manzanillo presbítero de la Congregación del Oratori de S. Felipe Nery, Secretario del Santo Oficio y Examinador Synodal del Arzobispado de Valencia otorgó la licencia para la publicación del segundo tomo el 2 de febrero de 1709.

El Tomo I del *Compendio Matemático* está dedicado a la Aritmética y en él no se consideran las cantidades negativas, éstas solamente se tratan en el tomo II de Álgebra. Este segundo tomo consta de 490 páginas, dividido en tratados (tratado IV, V y VI), los cuales, a su vez, se subdividen en libros y ellos, en capítulos. El tratado IV tiene tres libros y tratan de la aritmética superior; el tratado V consta de ocho libros, y tratan de *"algebra o arte analítica"*; el tratado VI tiene cuatro libros y corresponden a la música (**CGO3**).

Tosca cita y sigue en la mayor parte del texto a Euclides; también menciona la *Arithmética Universal* de José de Zaragoza, la *Aritmética* y el libro tercero del *Álgebra* de Miliet. Al iniciar la parte correspondiente al álgebra menciona como pioneros de ésta a Dionysio Areopagita, Mahomet Arabe, Gebro, Diophanto Alexandrino, Vieta, y Michel Rollé con su *Tratado de Álgebra* (**CGO5**).

En el Tomo I indica que las matemáticas *“según su derivación del Griego, es lo mismo que doctrina y disciplina”* (p. I) y señala su objeto:

> *“El objeto de la matemática es la quantidad, [...] si solamente en quanto en extensión, ò numero; y generalmente es objeto de la matemática aquello por lo cual una cosa se dize mayor, menor, ò igual a otra; y la razon es, porque todo su empleo consiste en averiguar, y demostrar las propiedades, y atributos de dicha quantidad”* (Tomo I, p. 2) (**CCO2**).

El concepto de número está considerado en el Tomo I libro 1, donde cita: *“Numero es una colección de unidades. Euclides def. 2 del libro 7.”* (p. 136) (**CCO3**). Al seguir Tosca a Euclides, y observando sus definiciones de *“número plano”* y *“número sólido”*, se ratifica la concepción euclidea, que identifica número primo con longitud y número compuesto con superficie o volumen.

La controversia sobre la unidad como número aún estaba vigente en España como puede apreciarse en la siguiente explicación:

> *“[...] la unidad no es numero, por no componerse de otras unidades; aunque Caramuel quiera defender lo contrario: y quando la unidad se considera dividida en partes, como en tercios, quartos, &c. Ya no se forma como unidad, si como numero. En tanto pues se llama unidad en quanto la suponemos indivisible; pero en variando la suposicion considerándola dividida en partes, ya dexa de ser unidad, y pasa à tener la razon de numero, y se transfiere la razon de unidad à cada una de las partes de la división”* (Tomo I, p. 136) (**CCO3**).

Tosca utiliza de manera casi literal las mismas definiciones y ejemplos del texto de Ulloa; aunque coincide con ese autor, hay algunas diferencias importantes entre ambos. Una primera diferencia radica en el hecho de que el Tomo II del *Compendio* es un texto explícito de álgebra, que dedica su atención a la que denomina *Arithmetica Superior de las Potestades Númericas, la cual “se levanta à la composición, y resolución de las potestades numéricas, estableciendo los principales fundamentos de la Álgebra”* (Tomo I) y al *Álgebra o Arte Analytica,* donde *“considera su naturaleza, y propiedades: averiqua su composición; pasando últimamente a su resolución, y extracción de las raíces que las forman.”* (Tomo II, p.1).

Ulloa dedica apenas 20 páginas (desde la 121 a la 140) a la *Synthesis y Analysis de las Proposiciones Mathematicas*, es decir, al estudio de los tipos de ecuaciones y sus vías de resolución, mientras que Tosca hace un desarrollo detallado del *Álgebra o Arte Analytica* en más de 260 páginas (de la 72 a la 336).

Una segunda diferencia entre la obra de Ulloa y la de Tosca se encuentra en el uso de ejemplos prácticos para plantear y resolver problemas. Ulloa emplea 12 páginas para ejemplificar la aplicación de las cuestiones teóricas planteadas. Esta ejemplificación es sistemática en Tosca, conectando de modo permanente la teoría con la práctica; alcanza hasta incluir poemas o referencias históricas para plantear como enigmas algunos de los enunciados de los problemas (Tomo II, pp. 133-135).

No da definición de cantidad aritmética o número natural, ni pueden inferirse a partir de lo expuesto en el Tomo II. En este Tomo II aborda las potencias de los números naturales y las relaciones de divisibilidad; trabaja con los quebrados así como también con las cantidades literales, dedica el libro VII (p. 275- 313) a las *Magnitudes irracionales è inconmenfurables* (**CCO6**).

Respecto al álgebra afirma:

> *"Es pues , la Algebra vn Arte que enfeña a hallar cualquiera cantidad , refolviendo la queftion propuefta , por los mifmos terminos , con que fe compufo.[…] Dividefe ya comúnmente la Algebra en vulgar y efpeciofa; la vulgar , a quien tambien llaman numerofa , exercita fu logiftica en los numeros vulgares y conocidos, hafta encontrar la igualacion con algunos caracteres incognitos."* (Tomo II, pp. 71-72). *[...] todo el artificio de la regla Algebraica, y Analítica, los quales tienen tres partes, que son: igualación, reduccion, y valor del carácter, [...]"* (Tomo II, p. 111) (**CCO4**).

Tosca escribe sobre la incógnita que *"En lugar de la magnitud incógnita que se busca, se supondra vna de las vltimas letras del Abecedario, como x.y.z &c. De suerte, que si se busca vn numero, ò lado, ò linea, se supondra sencillamente dicha letra."* (Tomo II, p. 110) (**CCO4**).

A las ecuaciones, Tosca las llama igualaciones y las define así: *"Igualación, es la comparación, ò cotejo de una cantidad con otra igual, pero de diferente nombre, ò carácter, como x Ω b. z-a Ω b2. &c."* (Tomo II, p. 112) (**CCO5**).

Los números negativos son tratados como cantidades menores que nada, en el capítulo II del tratado V de álgebra, el cual trata de *"la logística de los caracteres"* (**CCO5**).

En el texto se presentan las más importantes contribuciones del álgebra literal que Vieta había desarrollado entre 1591 y 1614. El estilo es sencillo, el tratamiento de las cuestiones sistemático y exhaustivo. El esfuerzo didáctico no es retórico, sino que incluye muchos tipos de ejercicios y reglas, que se concretan en aportaciones como la del *Arbol Analytico*, que se postula *“Para proceder con buen orden , y fin perturbacion en las operaciones fobredichas, singularmente quando fon mas de dos las igualaciones , convendra mucho fe dispongan de eftas en forma de Arbol”* (Tomo II, p. 171).

Tosca aplica las reglas del álgebra a la geometría de Descartes y Fermat en el libro VIII, dedicado a *la Aplicación de la Álgebra a la Geometría*. De acuerdo con Sánchez Cuellar (citado por López Piñero, 1979; p. 447), el *Compendio* fue redactado durante los años finales del siglo XVII, pues los avances científicos tanto matemáticos como físicos que se plasman en este texto corresponden como máximo, hasta 1680. Se percibe un desconocimiento por parte de Tosca de los trabajos de Leibnitz y Newton más allá de 1680 (López Piñero, 1979).

El uso de la *Geometría* de Descartes, por parte de Tosca, no es fortuito, puesto que en España el cartesianismo fue *“dictado común a toda actitud anti-escolástica y de adhesión más o menos amplia a los marcos filosóficos transpirenaicos”* (Leñal, citado por Moreno, 2002; p. 360).

4.5.3 Tratamiento dado a los negativos

Los párrafos de mayor interés relacionados con estos apartados están todos ellos en el Tomo II, y son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y –.

“[...] este señal + significa Mas; y este – significa Menos : del primero vfaremos quando vna quantidad fe ha de juntar con otra, ò afirmar de ella ; y del segundo, quando una cantidad se ha de quitar, ò negar de otra ; y por efta caufa el señal + fe llama Afirmativo [...] y el otro feñal – fe llama Negativo ” (p. 6)

“El signo + significa la suma que fe ha de hazer de dos cantidades” (p. 73).

“El signo –, sirve para denotar, que la magnitud siguiente a dicho numero se ha de restar de la que le precede” (p. 73).

“El signo + se llama mas, y el signo –, se llama menos” (p.73).

Estos párrafos reflejan el más (+) y menos (–) como signos abstractos para indicar operaciones de adición y sustracción.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas

“y por esta causa el señal + se llama Afirmativo; y la cantidad que se le sigue se dice afirmada: y el otro señal – se llama Negativo y la cantidad que se le sigue, se dice Negada” (p. 6).

Se destaca el carácter lógico que expresan los signos: afirmar o negar, con lo cual son símbolos opuestos entre sí. En la introducción que se hace a las cantidades negativas no se les asocia a ningún tipo de fenómeno. Las cantidades negativas son presentadas desde los valores proposicionales de la lógica, afirmando o negando a la cantidad que preceden, sea esta una cantidad concreta o una cantidad general.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.

"La cantidad que lleva antes de sì el signo –, se llama cantidad negativa, defectiva, ò falsa; y todas las que no son negativas, se llaman, positivas, ò reales. Las magnitudes positivas, son mas que nada; pero las negativas, son menos que nada." (p. 73).

También destaca el carácter relacional que pueden tener los dos signos:

"Las cantidades cuyas partes , ni vàn unidas con el signo + ni separadas con el signo ---- , fe llaman abfolutas, è incomplexas ; y todas las demas fe llaman compueftas , y complexas;" (p. 73).

Tosca deja claro que las cantidades positivas son reales, mientras que las negativas las considera "falsas". Encontramos la denominación de "cantidades falsas" para las cantidades negativas, que tiene su origen en la resolución de ecuaciones, y procede de la *Geometría* de Descartes.

La denominación de una cantidad como menor que nada se acompaña de una explicación o argumentación con significado físico, que justifica con un ejemplo de bienes y deudas y con otro de desplazamientos, como vamos a ver en TSN5 y TSN6. Con estos ejemplos el autor parece remitirse al Tomo I del Compendio, dedicado a la Aritmética, pero no constituyen el núcleo del tratamiento que Tosca hace de las cantidades negativas en este Tomo II.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.

No se ha encontrado en el texto algún tipo de argumentación o ejemplo que explique la razón de las cantidades negativas.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.

"Las magnitudes positivas, son mas que nada; pero las negativas, son menos que nada" (p. 73).

Se implica una naturaleza algebraica para las cantidades negativas, pues antes las ha llamado cantidades falsas y ahora son "*menores que nada"*, sin embargo encuentra en el álgebra el recurso que le permite eludir el conflicto que sí se encuentra en Ulloa.

> *"Dixe al principio que las cantidades negativas son menores que nada, lo que parece paradoxa, y seria destruir la idèa de la quantidad si se entendiesse con todo rigor: lo que los Algebricos quieren significar por cantidades menores que nada, [...]"* (p. 92).

La denominación de una cantidad como menor que nada se sostiene de nuevo sobre un ejemplo de movimiento, muy similar al de Ulloa (es, prácticamente, una copia literal del texto de ese autor), con significado físico, pero que se interpreta según "el estilo del álgebra":

> *"(...) si dicho hombre fuera detenido en C, fu avance feria nada; pero si vinieffe à B, diriamos en lenguaje ordinario que ha vuelto a atrás; y según eftilo de la Algebra, se dize aver abançado menos que nada; y que fu avance es, -3. leguas: y que estas –3. leguas es una cantidad menor que nada. Eftas cantidades negativas fon de gran confequencia en efta Facultad , como fe verà en el difcurso de efte tratado" (p. 93).*

Se establece un orden implícito entre las cantidades negativas y las positivas respecto a *"nada"*, y parece que efectúa una asociación de esta *"nada"* con cero;

> **TSN6:** Ejemplificación de cantidades negativas.
> *"Supongase, que un hombre no tiene bienes algunos, y que debe 1000. escudos; y otro hombre no tiene tampoco bienes algunos, pero no debe nada; es cierto tiene el primero peor fortuna que el segundo; pero este tiene nada: luego el primero tiene menos que nada. Tambien, si al que no tiene bien alguno, y debe 1000. escudos, le dàn 1000. escudos, con que paga la deuda, aumenta a sus bienes; pero sus bienes aun después de ese aumento son nada; luego antes del aumento, sus bienes eran menos que nada"* (p. 92-93).

Tosca utiliza una situación cotidiana con cantidades relativas (tener/deber), para dotar de significado numérico a un valor *"menor que nada"* para las cantidades negativas. En este caso la comparación de capitales es el fenómeno que se modeliza por medio de las cantidades negativas. Se hace evidente la equivalencia de tener "nada" con la cantidad cero.

> *"Supongase que ay 5. leguas desde C hasta A; y que de C à B, ay 3. leguas: Supongase tambien, que hallándose un hombre en C, quiere ir àzia A: si este hombre camina hasta A, es verdadero decir, ha avançado 5. leguas, y asi, que su avance es mas que nada: Si dicho hombre fuere detenido en C, su avance serìa nada; pero si viniesse à B, diriamos en lenguaje ordinario, que ha vuelto atràs; y según estilo de la Álgebra, se dize aver avançado menos que nada; y que su avance es –3. leguas, y que estas –3. leguas es una cantidad menor que nada. Estas cantidades*

negativas son de gran frecuencia en esta Facultad, como se verà en el discurso de este tratado” (p. 93).

En este ejemplo se presenta otro fenómeno cotidiano con cantidades relativas (avanzar/retroceder): se trata de desplazamientos con direcciones opuestas a partir de un punto determinado. El fenómeno físico que se modeliza corresponde a un movimiento en retroceso; este ejemplo es el mismo que utilizó Pedro de Ulloa, por ello serían válidas para este esté párrafo las mismas reflexiones hechas al texto de Ulloa, salvo por la precisión que hace Tosca de que las cantidades negativas hay que interpretarlas en el sentido del álgebra.

TSN7: Regla de los signos.
“En la suma, los signos semejantes dàn semejantes; los diferentes varìan la operación; y el mayor numero pone su signo.
En la multiplicación, y partición, los signos semejantes dàn +, los desemejantes dàn –.” (p. 92).

De manera retórica se indica la regla de los signos para la adición y sustracción; se enuncia que, cuando los signos no son iguales, se procede al revés, variando la operación y la cantidad superior pone su signo.

“Suele caufar no poca dificulta a muchos el concebir , porque el figno – fe muda en + en la fubftraccion de los numeros negativos , quando fe reftan de los positivos ; y porque en eftos cafos fale el refiduo mayor que la cantidad de quien fe reftò; como , fi de 14. fe reftan –2. es el refiduo , fegun la regla , +16. pero la razon es evidente ; porque quitar de 14. el –2. es quitar la carencia de 2. que es lo mifmo que añadir 2. (…) A mas de efto , por medio del reftar no fe bufca otra cofa que la diferencia que ay entre dos cantidades ; y es claro, que la diferencia que ay de 14. a –2. es 16. porque de 14. à nada van 14. de nada a –2. vàn 2. luego de 14. a –2. van 16.” (p. 91).

Tosca, a diferencia de Ulloa, no establece una discontinuidad al cruzar el cero, lo que hace es establecer la diferencia entre un positivo y un negativo. La resta la interpreta como la diferencia entre dos números, y así obtiene la regla para restar un negativo.

Al formular reglas generales para la suma, resta y multiplicación de signos, lo que Tosca hace es indicar diversos modos de simplificar signos.

“La regla de los signos para la multiplicación, incluye tres partes: la primera es, que multiplicar + por + dà +, como multiplicar +4. por +3. dà +12. y en esta nadie tropieza: la segunda es, que multiplicando +4. por –3. ò tambien +3. por –4. es el producto –12. y la tercera, que multiplicando –4. por –3. sea el producto +12. y estas dos tienen alguna

dificultad, que se allana con las razones siguientes.

I. La multiplicación es una suma abreviada, con que multiplicar –3. por 4. es tomar quatro veces el –3. y hazer la suma, la qual no ay duda ser –12. y por quanto lo mismo es multiplicar –3. por 4. que 4. por –3. es cierto que multiplicando 4. por –3. ha de ser el producto –12.

2. De lo dicho se colige tambien la razon, porque multiplicando –4. por –3. el producto ha de ser +12. porque no es otra cosa esa multiplicación, que sumar, ò tomar tantas vezes menos el –4. quantas ay unidades en el 3. y como quitar el menos es añadir, porque dos negaciones afirman, quitar una vez el menos 4. es lo mismo que añadir 4. luego quitar tres veces el –4. es añadir tres veces 4. que es lo mismo que añadir +12. luego el producto de –4. por –3. es necesariamente +12." (pp. 92-93)

En estos párrafos se aprecia que Tosca aplica, de manera particular a las cantidades positivas y negativas, aquellas reglas para la simplificación de signos que había enunciado. El argumento central es que la multiplicación es una forma abreviada de sumar cantidades iguales; de esta manera, y haciendo un uso implícito de la conmutatividad, justifica los resultados negativos de las multiplicaciones de cantidades con signos contrarios. Se aprecia el interés de Tosca por justificar formalmente la regla de los signos, prescindiendo de interpretaciones lógicas.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

Hay una breve mención en la regla de los signos al número de mayor valor de dos números con distinto signo, que puede interpretarse como una referencia al valor absoluto:

"En la suma, los signos semejantes dàn semejantes; los diferentes varìan la operación; y el mayor numero pone su signo" (p. 92).

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

"Las magnitudes positivas, son mas que nada; pero las negativas, son menos que nada" (p. 73).

"Supongase, que un hombre no tiene bienes algunos, y que debe 1000. escudos; y otro hombre no tiene tampoco bienes algunos, pero no debe nada; es cierto tiene el primero peor fortuna que el segundo; pero este tiene nada: luego el primero tiene menos que nada. Tambien, si al que no tiene bien alguno, y debe 1000. escudos, le dàn 1000. escudos, con que paga la deuda, aumenta a sus bienes; pero sus bienes aun después de ese aumento son nada; luego antes del aumento, sus bienes eran menos que nada" (p. 92).

Como habíamos señalado en TSN6, hay una equivalencia entre cero y nada, por lo tanto, las magnitudes positivas son mayores que cero y las negativas menores que cero. El autor no considera relación de orden entre cantidades negativas explícitamente; sin embargo la indicación que el primero tiene peor fortuna que el segundo, esta comparando dos valores, una deuda de 1000 y nada, es decir, -1000 y 0. En el tratamiento y uso algebraico para las cantidades negativas no necesita de la relación de orden, y sólo se refiere a ella en términos muy generales.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

Como hemos visto en TSN7, el autor pone de manifiesto la dificultad para operar con cantidades negativas, intentando, por medio de un ejemplo particular, despejar o aclarar el asunto. Sin embargo, lo que reafirma es el carácter sustractivo de las cantidades negativas. Estas cantidades son carencias y entonces indica que quitar una carencia es aumentar el valor de la cantidad que le precede:

> *"Suele causar no poca dificultad à muchos el concebir, porque el signo — se muda en + en la substracción de los numeros negativos, quando se restan de los positivos, y porque en estos casos sale el residuo mayor que la cantidad de quien se restò; como si de 14. se restan –2. es el residuo, según la regla, +16. pero la razon es evidente; porque quitar de 14. el –2. es quitar la carencia de 2. que es lo mismo que añadir 2."* (p. 93).

Destacamos en este párrafo, que Tosca se refiere concretamente a *números negativos*, es decir, cambia la denominación de cantidades negativas, menores que nada, y falsas, por la denominación de números negativos sin ofrecer ningún tipo de explicación por esto.

En este otro párrafo se presenta un ejemplo matemático en el que se acepta una cantidad negativa como solución a una ecuación, sin entrar a cuestionar su significado.

> *"Sea yy + 5y + 6 Ω 0. Pidese su solucion. Los divisores del vltimo termino son los mismos que en la pasada; porque todas las raíces han de ser negativas, por no aver alternación de signos, intentarè la partición por y + 2 Ω 0. por y + 3 Ω 0. &c. Y porque hallo venir justa por y + 2 Ω 0. digo, que vna raiz es –2. y la otra –3."* (p. 189).

Destaca aquí el carácter algebraico que impone Tosca a las cantidades negativas en su trabajo.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.

No hemos hallado información o explicación sobre el significado de obtener una cantidad negativa como resultado para un problema o una ecuación. Esto es indicio de que Tosca las utiliza desde la formalidad del álgebra y no requiere interpretar estos valores, sólo los emplea.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.
"[...] y que su avance es –3. leguas, y que estas –3. leguas es una cantidad menor que nada. Estas cantidades negativas son de gran frecuencia en esta Facultad, como se verà en el discurso de este tratado" (p. 93).

Tosca indica que durante los estudios en la Facultad es frecuente encontrarse y operar con cantidades negativas, lo cual es señal de que alguna utilidad han de tener, pero no especifica para qué son útiles. Para él solo representan una respuesta al aplicar las reglas del cálculo algebraico.

TSN13: Otros.
"[...] de aquí se colige la razon, porque sumando –2. con 16. es la suma 14. porque lo mismo es añadir menos 2. que quitar 2." (p. 93).

Tosca se reafirma en la idea de que las cantidades negativas indican carencia, como en el ejemplo de TSN10; asimismo se infiere una asociación con la distancia entre números para determinar cuanto "van" (o hay) entre una cantidad y otra.

4.5.4 Análisis

4.5.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica.

- ***Número***

A partir de las breves referencias expuestas en el Tomo II *Compendio mathematico* y lo citado en el Tomo I *"Numero es una colección de unidades. Euclides def. 2 del libro 7."*, se reconoce una asociación del número con la noción de magnitud continua por medio de la longitud. Esto es influencia de los *Elementos* de Euclides, los cuales sigue en la parte de la aritmética y hacen que la definición de número utilizada sea euclídea. Por tanto, para Tosca el número es medida y magnitud.

- ***Cantidad***

Sobre este concepto, el autor indica en el Tomo I que la cantidad es el objeto de la matemática, y es *"objeto de la matemática aquello por lo cual una cosa se dize mayor, menor, ò igual a otra; y la razon es, porque todo su empleo consiste en averiguar, y demostrar las propiedades, y atributos de dicha quantidad"*; por tanto deja entrever su idea de la cantidad como aquello que puede ser comparado con otro de su especie mediante una relación de orden y tiene propiedades y atributos particulares. El Tomo II, al tratarse de un texto de álgebra la noción de cantidad es una noción abstracta de carácter general, como se ha visto:

"la Algebra [es] vn Arte que enfeña a hallar cualquiera cantidad , refolviendo la queftion propuefta , por los mifmos terminos , con que fe compufo.[…] Dividefe ya comunmente la Algebra en vulgar y efpeciofa"

(p. 72).

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Tanto las cantidades positivas como negativas son presentadas a partir de valores proposicionales de afirmación o negación de una cantidad y no están asociadas a ningún tipo de fenómeno físico, como se observa en **TSN2**.

En **TSN3,** Tosca atribuye una existencia numérica real a las cantidades positivas; sin embargo, a las cantidades negativas las llama falsas, con el mismo sentido cartesiano que ya utilizaba Ulloa. Se observa en **TSN5** cómo el autor afirma que las cantidades positivas son mayores que nada y las negativas son menores que nada. Al afirmar esto, él dice *"parece paradoxa",* reflejando su conflicto por considerarlas falsas (esta denominación la utilizó Descartes para las raíces negativas que se obtenían de una ecuación), conflicto que resuelve interpretando estas cantidades en el sentido del Álgebra. Sin embargo, estas cantidades negativas están presentes en muchas situaciones cotidianas tal como él mismo lo manifiesta en **TSN6**.

Ejemplifica las cantidades negativas mediante fenómenos de comparaciones y movimientos; también utiliza esas cantidades para operar algebraicamente y en la solución de ecuaciones. Manifiesta el aparente conflicto que implica, de una parte, tildarlas de falsas y, por otra, aceptarlas como resultado de operaciones algebraicas, sin embargo parece que este conflicto sólo se da en el terreno aritmético, cuando hay que proporcionar interpretación física, pues en el algebraico se cumplen las reglas formales del álgebra.

Al igual que Ulloa, Tosca parece estar en un momento de transición entre un concepto de número tradicional y un concepto formal y preciso, regido por leyes formales. Pero en Tosca apreciamos una presencia menor de la estructura de número natural relativo ya que este autor se centra con mayor fuerza en la interpretación algebraica de los números negativos.

4.5.4.2 Análisis de contenido

- ***Conceptos básicos***

Los signos más (+) y menos (–) en **TSN1** son considerados desde dos perspectivas: la primera, como signos abstractos (más y menos) y la segunda, como elementos determinantes de valor lógico; por lo tanto, afirman o niegan el carácter cualitativo de una cantidad a la cual precedan.

Del apartado **TSN5** parece inferirse que se identifica *"nada"* con el cero, y al considerar un orden respecto a él, lo que se indica es que la cantidad negativa tiene un valor menor que cero.

Como se ha visto en **CCO7**, las ecuaciones corresponden a igualaciones o cotejaciones de cantidades. Tosca, igual que Ulloa, utiliza el símbolo Ω como elemento de comparación entre cantidades, equivaliendo este signo a la igualdad (=).

- ***Fenomenología/Justificación***

Como hemos visto en **TSN2** y **TSN3** así como lo comentado en el apartado anterior, una justificación para las cantidades negativas es su carácter de negación para las cantidades precedidos de ellas; se apoya en el valor proposicional de la lógica, evitando así asociarles en su presentación algún fenómeno físico particular.

Comentamos en **TSN6** cómo los ejemplos utilizados se corresponden con situaciones cotidianas de carácter relativo, asociadas a deudas, haberes, avances y retrocesos, es decir, son fenómenos de comparación y desplazamiento. Tosca utiliza en **TSN6** prácticamente el mismo ejemplo de desplazamiento presentado por Ulloa para igual propósito, pero sin incorporarle la representación gráfica mediante segmentos. De tal forma, recurre a los números relativos para explicar de forma general el “sentido” o “carácter” de una cantidad negativa. Sin embargo, estos fenómenos sirven sólo para ejemplificar e introducir la noción de cantidad negativa, no se utilizan para establecer relaciones de orden entre cantidades negativas ni para justificar las operaciones. En el *Compendio* Tosca no parece estar interesado por los aspectos aritméticos de los números negativos, y no profundiza en la estructura de los números relativos que pudiera derivarse de los ejemplos elegidos.

El interés de Tosca se orienta a las propiedades y características de los negativos que se derivan de su origen algebraico: cantidades generales que aparecen como resultado de resolver ecuaciones. La denominación de cantidades falsas o menores que nada apunta a que los números negativos que trabaja Tosca surgen para organizar fenómenos algebraicos.

- ***Estructura de orden***

En **TSN5** se dice que las cantidades negativas son menores que nada y las positivas mayores que nada; sí, Tosca asocia “nada” con el cero, las cantidades negativas serán, por tal razón, menores que cero. En **TSN9** se manifiesta un orden para ellas respecto a cero: deber 1000 es tener menos que no tener nada, así $-1000<0$ y; este orden, no es el que postula González Marí en los números naturales relativos. La información que proporciona Tosca sobre las relaciones de orden es muy restrictiva y no puede inferirse la presencia de un primer elemento, ni tampoco la consideración de un doble cero. Sí se aprecia, como se ha dicho, la aceptación en la continuidad de medidas.

Sin que presente la estructura de orden de manera formal, esta se halla manifiesta en diversos apartados; cuando expresa *"En la suma, los signos semejantes dàn semejantes; los diferentes varìan la operación; y el mayor numero pone su signo."*, está implícito el orden de los valores absolutos, pues el lector debe conocer el procedimiento para identificar cuál es el número mayor o menor.

- ***Estructura algebraica***

En el texto, Tosca muestra un énfasis por destacar sólo el carácter sustractivo de las cantidades negativas; éstas representan una "carencia", como puede observarse en **TSN10** y **TSN13**; dicha apreciación viene dada por su conocimiento y uso de la *Geometría* de Descartes, donde se afirma: *"Así, si suponemos que x representa la carencia de una cantidad (x=-5) que fuese 5 [...]"* (1986, p. 340).

La multiplicación de cantidades positivas o negativas es presentada en **TSN6** como una suma abreviada de cantidades iguales y haciendo uso de la conmutatividad, es decir desde un punto de vista formal.

Para Tosca el propósito del proceso algebraico es realizar una igualación, una reducción, y hallar un valor desconocido; sin embargo, aún no utiliza el lenguaje algebraico moderno, como se aprecia en la expresión utilizada en TSN13, *"yy + 5y + 6 Ω 0",* que en la moderna notación, correspondería a: $y^2 + 5y + 6 = 0$.

- ***Uso algebraico***

En **TSN10** realiza operaciones algebraicas con cantidades negativas, aplicando las leyes formales del álgebra; pese a indicar su carácter de "falsas", son admitidas como un valor válido para una incógnita en la solución de una ecuación o un problema, como se observa en **TSN10** y **TSN13**. Sobre este aspecto sigue en la misma línea de pensamiento que Ulloa, esto es, admitiéndolas y utilizándolas de manera formal.

4.5.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r*

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: $\mathbf{a_1}$. La presentación que se hace en TSN3 señala el término *falsa* para la cantidad negativa, lo cual podría tener un significado

* Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

arbitrario, pero al igual que en el texto de Ulloa, se recurre a Descartes para solventar su significación desde la teoría de las ecuaciones; asimismo, en TSN1, TSN2 y TSN7 se otorga una asignación como valores proposicionales de la lógica para los signos y las cantidades negativas (*negar*; *afirmar*; *dos negaciones afirman*). Todo esto da indicio de los números enteros.

Segundo indicador: **a_2.** El texto no arroja información ni evidencias de este indicador para los negativos en el campo de los números enteros o el de los naturales relativos.

Tercer indicador: **a_3.** En el ejemplo presentado en TSN9, hay una comparación entre una deuda de 100 y nada, afirmando que "*tiene el primero peor fortuna que el segundo*"; esta situación es susceptible de dos interpretaciones; la primera es que la deuda de 1000 (–1000) es menor que nada (0), esto es –1000<0, con lo cual se reflejaría el orden usual entre los enteros negativos (González, p 216). Otra opción es considerar su *peor fortuna* como que debe más que el no debe nada, es decir su deuda es mayor, así se tiene que –1000>0, lo cual indicaría que se está en el campo de los números naturales relativos.

Cuarto indicador: **a_4.** No hemos hallado evidencias para este indicador en este texto de Tosca para el tratamiento dado a las cantidades negativas en el campo de los números enteros o números naturales relativos.

Como balance para esta primera diferencia D_1, que tan sólo hay una posible presencia del tercer indicador, aunque no muy clara, por lo que concluimos que Tosca dota de significado a las cantidades negativas con números relativos, pero elude sus implicaciones estructurales de manera que no trabaja estas cantidades negativas como números naturales relativos.

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador: **b_1.** De una parte, el autor representa los números en una serie con respecto a un elemento central, al escribir en TSN7:

"porque de 14. à nada van 14. de nada a –2. vàn 2. luego de 14. a –2. van 16."

Para este caso, cero o nada representan el elemento de referencia entre una cantidad positiva y otra negativa, posibilitando valores inferiores y superiores a cero (González, p. 219), es decir, no es un primer elemento de una serie numérica.

Por otra parte al utilizar en TSN6 el mismo ejemplo que Ulloa, es valido también el comentario hecho en tal situación: *"Si dicho hombre fuere detenido en C. su avance sería nada."*.

El cero en el ejemplo es una cantidad natural, a partir de la cual se producen avances y retrocesos, con lo cual se entiende que está refiriéndose a números naturales relativos.

Segundo indicador: **b_2**. En los ejemplos de TSN6 se hace referencia permanente a las dualidades deudas/bienes y avanzar/retroceder. No es claro si nos encontramos con números enteros o con naturales relativos, puesto que al escribir *"debe 1000. escudos, le dàn 1000. escudos"* cabe la posibilidad de intercambiar símbolos y expresarse, *tiene –1000 escudos. Le dan otros 1000 escudos*, sin modificar el sentido de la frase original (González, p. 223), apuntando esto hacia los números enteros.

Asimismo, al expresar *"y que su avance es –3. leguas, y que estas –3. leguas es una cantidad menor que nada"* está utilizando una simbología matemática conocida y determinada para los números enteros (González, p. 222), además de presentar una compatibilidad entre adjetivación y signo una de las características de los enteros como afirma González Marí (p. 223).

Tercer indicador: **b_3**. Tosca ofrece un ejemplo en TSN6 donde escribe *"le dan 100. escudos, con los que paga la deuda, aumenta a sus bienes , pero sus bienes aun después de ese aumento son nada"* dándose una transformación cuantitativa positiva de los bienes (González, p. 224) perfilando esto hacia los enteros.

Como balance para esta segunda diferencia D_2, afirmamos que pese a que hay evidencias en los ejemplos de que Tosca trabaja con números naturales relativos, también otras evidencias apuntan a mayor un tratamiento de los negativos en el campo de los números enteros para este indicador. De nuevo Tosca combina los naturales relativos en los ejemplos, con una utilización entera en la comparación entre 14 y –2.

Dado el enunciado de la diferencia y que la continuidad/ discontinuidad de medidas se va a contemplar en el siguiente apartado podemos señalar que la evidencias sobre la diferencia D_2 son afirmativas de manera parcial

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

La continuidad de medidas de tipo entero se presenta en cuando afirma *"porque de 14. à nada van 14. de nada a –2. vàn 2. luego de 14. a –2. van 16."*, esto significa que se puede pasar de la zona de valores positivos a la de valores negativos sin que se produzcan rupturas.

Por otra parte no es claro si el sólo hecho de utilizar ejemplos donde se comparan deudas y haberes, es evidencia para afirmar que se verifica esta tercera diferencia, puesto que no es posible deber menos de cero, puesto que entonces ya no sería una deuda (debe) sino un bien (haber).

De manera global sobre esta tercera diferencia D_3, está claro que no se verifica, ya que Tosca establece una continuidad entre 14 y –2.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).
No se hallaron evidencias para sostener que Tosca considera un doble cero cuando utiliza las cantidades negativas o positivas; podemos afirmar que esta cuarta diferencia D_4 en el tratamiento de los negativos, no se cumple en el campo de los números relativos.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

Tosca justifica las operaciones cuidadosamente en cada caso. Ahora bien, en un balance de la suma establece: *"En la suma, los signos semejantes dàn semejantes; los diferentes varìan la operación; y el mayor numero pone su signo*. Que puede entenderse como un resumen mediante una regla de anulación composición para las operaciones con cantidades negativas; sostenemos que esta quinta diferencia D_5, aunque con carácter regresivo y secundario, está presente en este texto.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Tosca en relación con las diferencias:

*Tabla 4.2. Diferencias entre **Z** y N_r en el Compendio de Tosca*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
Tosca	**No**	**¿?**	**P**	**¿?**	No	**Si**	**No**	**No**	P	No	No	P

Si =se cumple la diferencia en el campo de los números naturales relativos; No =la diferencia no se cumple en el campo de los relativos; ¿?=no hay evidencias de una u otra estructura; P = cumplimiento parcial de la diferencia en el campo de los naturales relativos.

4.5.6. Tratamiento global de los negativos en el Compendio Matemático

Lo más interesante del texto de Tosca es su carácter complementario con el de Ulloa: éste hace un estudio prioritariamente aritmético de las cantidades negativas, mientras que Tosca hace una caracterización algebraica, en la que los números relativos sólo sirven como ejemplos iniciales para dotar de significado a las cantidades negativas. Ambas opciones expresan diferentes aproximaciones ya que los énfasis son diferentes.

El uso que hacen Tosca y Ulloa de los mismos ejemplos justifica que ambos autores compartan parcialmente algunas de las diferencias de González Marí; el énfasis de Tosca por la fundamentación algebraica y estructural, marca su menor implicación con la estructura relativa.

Tosca conoce y utiliza en ocasiones la aproximación relativa de los números negativos, pero trata de superarla en todo momento mediante una interpretación algebraica de dichos números.

El tratamiento que hace de los números negativos es formal apoyado en el álgebra; sin embargo muestra indicadores de uso de los aspectos de la estructura lógico formal de los números naturales relativos.

El concepto de número negativo lo fundamenta en los valores lógicos de la negación, al igual que lo hacía Ulloa.

El soporte fenomenológico utilizado es, de una parte, mediante la lógica, por otra, algebraico y, en tercer lugar, basado en ejemplos de movimiento y contabilidad para presentar problemas que dan origen a cantidades negativas. Los ejemplos presentados son un recurso didáctico para dotar de significado a un concepto en términos conocidos y cotidianos

En el *Compendio* se reitera con menos fuerza el conflicto reflejado en el texto de Ulloa: de una parte el razonamiento centrado en el efecto que produce una cantidad negativa al adicionarla o juntarla con otra cantidad y la disminuye más que si se le agregara cero, por esto son “menos que nada”; por otra parte el razonamiento filosófico de que no se puede quitar algo de donde no hay nada, esto es cero, y sus conocimiento de las ideas cartesianas le llevan a llamarlas “falsas”. No entra en reflexiones sobre esta doble naturaleza de las cantidades negativas.

Para ilustrar y clarificar la idea de cantidad negativa, así como para mostrar como surgen y se opera con ellas, son utilizadas representaciones numéricas y algebraicas. Tosca emplea los signos más y menos para indicar el carácter de positiva o negativa de una cantidad. Ignora las representaciones gráficas.

El orden que se establece entre las cantidades negativas y cero corresponde parcialmente al orden de los números enteros.

En el *Compendio* se vislumbra un cambio o transición del concepto de número natural hacia el de número entero, con presencia de números naturales relativos en tal proceso. Las interpretaciones de las situaciones relativas no son objeto de interés y atención por Tosca, quizá esto explique, la razón por la que sólo se presentan dos ejemplos de este tipo, apoyados en explicaciones más retóricas que numéricas o algebraicas, lo que muestra que la presencia de los números naturales relativos no se trata de una idea activa, puesto que en el resto del texto el tratamiento que se hace es algebraico.

4.6 Liciones de mathematica, o elementos generales de arithmetica y algebra para el uso de la clase. (1758).

4.6.1 *Autor*

Thomas Cerdá: (*n*. en Tarragona, 1715 y *m*. en Forli, Italia, 1791). Ingresó en la compañía de Jesús en el año 1732 **(CA1)**; en 1753 fue enviado a Marsella, donde perfeccionó su formación en matemáticas con el jesuita Esprit Pezenas **(CA3)**.

Cerdá fue discípulo de Gregorio Mayans y Siscar, quien le transmitió el deseo de renovación del pensamiento español a través de las ideas del movimiento novator **(CA2)**; esto, unido al contacto que en Francia tuvo con las ideas científicas de su época, hicieron de Cerdá uno de los más destacados abanderados en la introducción de los nuevos conocimientos de las ciencias exactas en España y, según sus biógrafos, uno de los mejores matemáticos españoles del siglo XVIII. En los *Elementos generales* del Padre Cerdá:

"<se encuentran muchas cosas tratadas más profundamente que en los libro ordinarios de este género. (…) En el segundo tomo se encuentra la teoría general de ecuaciones tratadas con mucha extensión y una elección de los mejores métodos inventados por Newton, MacLaurin, etc> Journal Etranger, Août, 1760." (Citado por Garma, 2002; p. 333).

Cerdá estudió las matemáticas de su época, las asimiló, se convirtió en profesor de matemáticas y produjo libros que contenían las últimas novedades en matemáticas procedentes de Newton, Leibniz y Euler, especialmente la teoría de las ecuaciones superiores y la teoría de series, que presenta en el Tomo II de los *Elementos* **(CA5).**

Publica las *Liciones* como Profesor Real de Matemáticas en el Colegio de Nobles de Santiago de Cordelles, en Barcelona. Enseñó filosofía en Zaragoza, Gerona y en la Universidad de Cervera, además fue cosmógrafo mayor de las Indias. Dictó clases de artillería en la Academia del cuerpo de Artillería de Segovia, lecciones que publicó en 1764. Entre 1764 y 1767 fue profesor encargado de la segunda cátedra de matemáticas de los Reales Estudios de San Isidro, del Colegio Imperial, perdiendo este puesto por la expulsión de los jesuitas **(CA4)**.

Durante su estancia como profesor de la Universidad de Cervera, estuvo al tanto de los avances matemáticos que se producían en Europa, a través de dos importantes revistas científicas que se recibían en dicha universidad: las *Acta Eruditorum* de Leipzig, publicación iniciada por Leibniz, y la *Histoire de L´Académie Royale des Sciences* de París **(CA5)**.

En el año 1753, Cerdá conocía la ecuación cartesiana de la parábola y el análisis infinitesimal, del que prometió un texto cuando estudió en Marsella (López Piñero et al., 1983).

Cerdá vivió y participó de las reformas borbónicas de Felipe V, Fernando VI y Carlos III; durante el reinado de este último fue expulsado de España junto con la Compañía de Jesús, en 1767, continuando su magisterio en Italia **(CA7)**.

En 1758 publicó *Liciones de matemática o Elementos generales de arithmetica, y álgebra* en dos tomos; más tarde, en 1764, *Lecciones de Artillería para el uso de la clase; Lecciones de mathematica o elementos generales de geometría para uso de la clase.* A su muerte dejó manuscrito un curso completo de matemáticas titulado *Álgebra aplicada a la Geometría*, en el que incorpora varios problemas con la notación de Leibniz y hace referencia al estudio de los incrementos infinitamente pequeños **(CA6)**.

Referencias a Cerdá y su obra se pueden hallar en Garma (2002), López Piñero et al. (1983) (**CA8**).

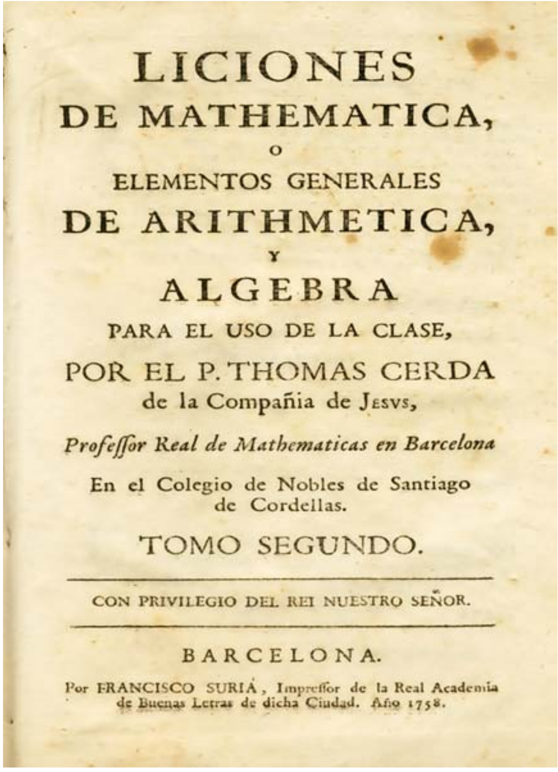
4.6.2 Caracterización del texto

Liciones de Mathematica, o Elementos Generales de Arithmetica y Algebra para el uso de la clase. Tomos I y II. (1758). Barcelona: Francisco Suriá, Impresor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad **(CGO1), (CGO2)**.

Cerdá establece en el propio título que el libro es un tratado de Aritmética y Álgebra. El tomo I consta de 316 páginas, y está dividido en 20 capítulos; el tomo II tiene 237 páginas, y sus capítulos son 18.

El tomo I está ordenado de manera que la Aritmética aparece como introducción al Álgebra; el capítulo primero, explica la diferencia entre Aritmética y Álgebra, el segundo define las propiedades y valor de los números, definiendo en el tercero las reglas fundamentales de la Aritmética.

En los capítulos siguientes aborda las operaciones del Álgebra, las fracciones numéricas y algebraicas así como las fracciones decimales. En el capítulo séptimo estudia las razones y proporciones, dedicando los siguientes a la regla de tres directa e inversa, simple y compuesta, así como sus aplicaciones; continúa con el estudio de las potencias, raíces y radicales, concluyendo con el estudio de las progresiones aritmética, geométrica y los logaritmos (**CGO3**).



LICIONES
DE MATHEMATICA,
O
ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
ALGEBRA
PARA EL USO DE LA CLASE,
POR EL P. THOMAS CERDA
de la Compañia de JESUS,
Profeſſor Real de Mathematicas en Barcelona
En el Colegio de Nobles de Santiago
de Cordellas.
TOMO SEGUNDO.

CON PRIVILEGIO DEL REI NUESTRO SEÑOR.

BARCELONA.
Por FRANCISCO SURIÁ, Impreſſor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha Ciudad. Año 1758.

En el tomo II estudia las ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, llegando hasta el estudio de las ecuaciones superiores y al método de Newton. Se trata de un libro de Álgebra en el sentido moderno del término, que incorpora los avances recientes de su época **(CGO3)**.

La obra está dedicada a la juventud española:
"*Para vosotros, ò Nobles Jovenes, Delicias, y Esperanzas de nuestra Nacion Española se trabaja unicamente esta Obrita, à fin de evitar la molestia de escribir en la Clase, y poder dar con alguna mayor extension estos Tratados, los mas esenciales, por ser los fundamentos de esta grande Ciencia de las Mathematicas*" (**CGO4**).

Cerdá dice que procura seguir en el texto el estado en el que se encuentran las ramas de las matemáticas en Inglaterra y Francia; en el texto se citan los libros *New compleat and universal system or body of decimal arithmetik*, y *The Young Student´s Memorial Book, or Pocket Library* de Benjamin

Martin, *Introductio in analisis infinitorum* de Euler, y los *Elementos de álgebra* de Saunnderson, entre otros (**CGO5**).

Toma ideas de Harriot, Newton, MacLaurin, Riccati, de Moivre, e incluye las soluciones de Cardano y Descartes a las ecuaciones de tercero y cuarto grado (López Piñero et al., 1983) (**CGO5**); todo ello es indicativo de que estaba al tanto de los desarrollos matemáticos que se venían produciendo en Europa a partir del siglo XVII.

Para Cerdá *"la Mathemática en comun es una Ciencia, que trata de la Magnitud, y Extensión"* (p. 1) y *"procede por definición, esto es, explicaciones claras y limpias del sujeto de que se trata, ò termino, de que se sirve: por Postulados, o Hipótesis"* (p. 3); estas proposiciones son probadas por *"Demonſtracion. que es decir prueba evidente que se deduce inmediatamente de los Axiomas o de otras Proposiciones ya demonstradas"* (p. 3); asimismo define lo que entiende por magnitud y número, de la siguiente forma:

Magnitud es: *"todo aquello, que es capaz de aumento, y disminución efto es , que añadiendofele algo de la misma efpecie , fe aumenta , y quitandofele algo, fe difminuye."*. Es interesante destacar los ejemplos de magnitud que proporciona, ya que incluye casos de la dinámica: *"Affi una linea , un cuerpo , un efpacio , un movimiento , una fuerza es magnitud."* (p. 1) (**CCO2**).

Cantidad: *"Toda Magnitud fe puede comparar con otra de la mifma efpecie , efto es , linea con linea, cuerpo con cuerpo, efpacio con efpacio ; y por configuiente le es igual , mayor , ò menor , y folo por efte cotejo con otra , como medida , podemos llegar a conocer fu quantidad , ò quan grande fea"* (pp. 1-2) (**CCO2**).

Número: *"si la quantidad, ò magnitud, que medimos, es preciſamente igual à la que tomamos por medida, fe llama Unidad, ò uno: fi la contiene dos, ò mas veces, fe llama Numero"* (p. 2) (**CCO1**). De manera implícita Thomas Cerdá asume el término de cantidad como resultado de comparar una magnitud con otra; la cantidad es el resultado de medir una magnitud.

En el texto queda claro que:

> *"La Arithmetica es una Ciencia , que trata de los Numeros , efto es , da Reglas para inferir unas quantidades de otras" […] "La parte de la Arithmetica, que fe firve para fus operaciones de las expreffiones determinadas 0, 1, 2, &c. fe llama fimplemente Arithmetica y fus expreffiones , de que fe firve , Numeros , o Châractéres Arithmeticos. La parte que fe firve de las expreffiones univerfales , e indeterminadas a, b, c, &c. fe llama Algebra o Arithmetica Univerfal , pero entrambas fe fundan en unos mifmos principios , […]"* (pp. 5-6) (**CCO4**).

Y continúa:

[…] aunque el modo de obrar es algo diferente el uno del otro ; el del Algebra es mas facil , y expedito , porque no eftá atado a tantas leyes y circunftancias , el de la Arithmetica es mas dificil , y penofo.” (p. 6) **(CCO4).**

Cerdá muestra así su preferencia por el Álgebra, cuyo desarrollo formal se presta a menos interpretaciones que la Aritmética. Esto lo apreciaremos en el distanciamiento que Cerdá procura mantener con las interpretación de los negativos como naturales relativos y su preferencia por la interpretación algebraica, como números enteros.

En el texto se indica que los escolios ilustran lo ya demostrado. Todo esto refleja una construcción formal de las matemáticas partiendo de axiomas, postulados, teoremas y reglas generales.

Acerca de número entero escribió:

“*Por nombre de Numeros entendemos aquí la unidad 1 , el complexo de muchas unidades , como 2, 3, 4, &c. ò alguna parte de la unidad , como 1/3, 1/4, 2/3, &c. A. la unidad, ò al complexo de muchas unidades, llamamos Enteros, ò un Todo, à las partes de la unidad llamamos Quebrado , ò Fraccion*” (p. 9)(**CCO3**).

“*lo que es un entero refpecto de una denominacion, es quebrado refpecto de otra. Affi un pie es un entero refpecto de pie, pero un quebrado, ò 1/3 refpecto de vara*” (p. 10) **(CCO3)**.

En el tomo I trata las cantidades negativas en el apartado en el que empieza a tratarse el Álgebra. Presenta las cantidades positivas y las cantidades negativas bajo el subtítulo “*Noticias previas para las Operaciones del Algebra*” (p. 49) (**CCO5**). Indica que el signo + se pronuncia plus o más y el signo – se pronuncia minus o menos. Aclara que las cantidades negativas se llaman “*menos que nada ò menos que cero*”, y muestra, como ejemplo, solamente un problema para aclarar cuándo una cantidad es inferior a cero. Hace la presentación y explica algunos signos matemáticos tales como, =, <, >, +, –, x, etc.

Cerdá dedica el Capítulo VI a las fracciones decimales, a su formación y a las operaciones entre fracciones decimales **(CCO6).**

En la introducción al álgebra dedica un solo párrafo para decir que son términos, cantidad “*complexa*” y “*simple*”. Luego pasa a indicar cuáles son las cantidades polinómicas. El texto continúa con la enunciación de reglas para la suma, resta, multiplicación y división de cantidades algebraicas. Además presenta la regla universal para los signos del producto.

La idea de generalidad queda manifiesta cuando explica la diferencia entre la aritmética y el álgebra:

> *"Pero para tratar la Arithmetica de eftos Numeros, ò quantidades, es menefter, que tenga algunas expreſſiones, ò ſeñales, que los expriman; y para efto tiene dos efpecies de expreſſiones, las unas determinadas, efto es, que exprimen un numero determinado, otras indeterminadas, y univerſales, que fon indiferentes para fignificar qualquier numero, y quantidad, y con las que hace fus operaciones univerſales, efto es, verdaderas en cualquier numero, y quantidad particular que fe las quiera fignificar"* (pp.5-6) (**CCO4**).

Cerdá enfatiza la diferencia en el tratamiento operacional para las cantidades que se hace en el Álgebra respecto a la Aritmética:

> *"hasta ahora hemos hecho las operaciones del aritmética en Numeros determinados, por consiguiente sus operaciones, y resultados solo exprimian quantidades particulares. Pero ahora hemos de hacer las operaciones universales, y en qualesquiera generos de cantidades, por consiguiente los Chàracteres han de significar indeterminadamente qualquier genero de quantidad, que queremos."* (p. 48) (**CCO4**).

Más adelante, cuando presenta las ecuaciones en el tomo II, vuelven a aparecer las cantidades negativas en el momento de hallar la raíz de una ecuación:

> *"El valor encontrado de la incognita fe llama Raiz de la Equacion […] Si es quantidad pofitiva , como en efta x = a , la raiz es pofitiva; fi es quantidad negativa , como x = –a , es negativa , que tambien la llaman algunos Raiz falfa"* (p. 13, Tomo. II) **(CCO4)**.

Los números negativos son utilizados en algunos apartados para indicar otras ideas como: la multiplicación de exponentes, la solución de ecuaciones, como logaritmo de una fracción propia y como elementos de progresiones aritméticas, como veremos en TSN13.

Algunos de los investigadores españoles de la historia de las ciencias consideran que este texto de Thomas Cerdá es: *"uno de los mejores, si no el mejor texto español de la época para la enseñanza de la aritmética y el álgebra"* (López Piñero et al., 1983)(**CGO6**).

4.6.3 Tratamiento dado a los negativos

La presentación de las cantidades negativas se realiza en el capítulo dedicado a la Aritmética. Los párrafos de mayor interés son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y –.
"Efta feñal + fignifica plus, ò mas, y sirve para denotar, que la quantidad, que le figue, fe ha de tomar, como junta, ò añadida à las otras, de quienes efte figno la fepara, ò mas breve fignifica la ſuma de ellas" (pp. 7-8, Tomo I).

"Efta feñal – fignifica minus , ò menos, è indica, que la quantidad, que fe figue, fe ha de quitar de las otras, que la acompañan, ò la diferencia de entrambas" (p. 8, Tomo I).

A partir de estos párrafos es observable que, en la Aritmética común, Cerdá otorga un significado relacional a los signos más (+) y menos (–), que no son sólo signos abstractos, pues sirven para expresar operaciones y establecer relaciones entre las cantidades, aunque no las cualifican.

La presentación de las cantidades negativas se realiza en el capítulo dedicado al Álgebra.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.
"*En la Algebra las quantidades fe exprimen por las letras del Alfabeto mayufculas , ò minufculas, a, b, c, &c. A, B, C, &c. Eftas quantidades unas fon Poſitivas, otras Negativas. Las pofitivas fon aquellas , á quienes precede el feñal + , como +a , y fe pronuncia plus , ò mas a; las Negativas aquellas , à quienes precede el feñal –, y fe pronuncia minus , ò menos, como – a , minus a."* (p. 49, Tomo I).

Aquí se aprecia cómo los signos más (+) o menos (–), que aislados denotaban relación, pasan a cualificar las cantidades a las que preceden.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.
"*Eftas quantidades Pofitiva , y Negativas en fubftancia fon las mifmas , fino que los fignos fignifican el diferente modo de tomarfe , affi como en el Sumar , y Restar por la Arithmetica las partidas fon las mifmas, folo que en la una operación fe añaden , y en la otra fe quitan. Affi + a es la quantidad a puefta , que es la Pofitiva , – a es la quantidad a quitada."* (p. 49, Tomo I).

De tal manera que la cantidad positiva es una cantidad que se añade a otras y la cantidad negativa es aquella que se quita de otra. Por lo tanto, en esta presentación se asignan acciones de aumento a las cantidades positivas y de disminución a las negativas; son estas acciones las que determinan el sentido positivo o negativo de una cantidad, y expresan un cambio o transformación. Como se afirma en este párrafo, las cantidades no varían en sí mismas, pero pueden variar en su relación con otras cantidades. Cerdá refuerza el carácter relacional de los signos mediante la referencia a partidas contables, como veremos en TSN6.

Pero quizás el aspecto más interesante del concepto de negativo que presenta Cerdá se encuentra en la noción de *"Razón Arithmetica"*:

> *"Razon de una quantidad à otra es el modo , con que una quantidad fe ha refpeto a otra de la mifma efpecie en orden a la magnitud , efto es , fi le es igual, mayor, ò menor , y quanto? De ahí fe ve , que quando cotejamos una quantidad con otra de fu mifma efpecie , podemos bufcar dos cofas: la una , precifamente fi una quantidad es mayor que otra? Efte modo pues con que la tal quantidad fe ha refpeto de la otra en orden à fu Diferencia , o Exceffo , fe llama Razon Arithmetica. (…) Por lo tanto toda razón requiere dos terminos ; el uno el que fe compara , y fe llama Antecedente de la Razon ; y el otro es à quien el Antecedente fe compara , y fe llama el Configuiente. La razon Arithmetica fe conoce cual fea , por el Reftar , facando la quantidad menor de la mayor. […] Si fe compara la quantidad menor à la mayor , la Razon ferá de menor desigualdad ; fi fe compara la mayor a la menor , ferá de mayor desigualdad ; finalmente fi las quantidades , que fe comparan fon iguales , la Razon ferá de igualdad"* (pp. 106-107).

Este tratamiento plantea una aproximación muy interesante a los positivos y negativos como relaciones de comparación entre parejas de números, o bien como pares ordenados de números naturales que se comparan: de 6 a 3 es + 3, de 3 a 6 es –3, mediante el concepto de razón aritmética (que luego veremos en TSN10) y que se utiliza para justificar la comparación entre negativos. Cerdá no desarrolla esta idea, pero no cabe duda que percibe la razón de una progresión aritmética, o diferencia, como su dato determinante, que va relacionando parejas de naturales consecutivos, que resultan equivalentes por tener la misma diferencia.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.

En el texto no hay justificación o explicación sobre el origen de estas cantidades. Dado el punto de vista adoptado, no parece necesaria una justificación especial, si bien se presentan aproximaciones muy interesantes.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada o como cantidades falsas.

> *"Affi + a es la quantidad a pueſta , que es la Poſitiva , – a es la quantidad a quitada ; por lo tanto las quantidades Negativas fon , y fe llaman menos que nada, ó menos que cero por fus efectos."* (p. 49, Tomo I).

Aquí, se reafirma lo presentado en TSN2 y TSN3 con respecto a las acciones realizadas; así las cantidades negativas son menores que cero por sus efectos, ya que reducen una cantidad inicial en más de lo que lo hace cero.

“El valor encontrado de la incognita fe llama Raiz de la Equacion(...) La Raiz toma diferentes nombres , fegun la efpecie de quantifdad fea. si es quantidad pofitiva, como en efta x = a , la Raiz es poſitiva ; fi es quantidad negativa , como x = -a , es negativa, que tambien la llaman algunos Raiz falſa” (p. 13, Tomo II).

La noción de cantidad falsa viene ligada con el tratamiento cartesiano de la resolución de ecuaciones.

TSN6: Ejemplos

“Pues fi á uno que tiene 6 ducados fe le juntan 0 ducados , fe queda con el mifmo dinero , que tenia, porque 0 ni añade , ni quita ; pero fi fe le junta -2 ducados , fe queda con 6 - 2 ducados = 4 , por lo tanto -2 es inferior á 0” (p. 50 , Tomo I).

“Para las cantidades negativas es lo mismo. Si à una deuda ab añado otra deuda de 7ab (fea la quantidad que fea ab) la fuma de las deudas ferá -8ab. Pues las deudas que difminuyen en la renta, tienen mucha femejanza con la quantidades negativas, que fe oponen à las pofitivas, y las difminuyen.” (pp. 52-53, Tomo I).

Los ejemplos que utiliza corresponden a situaciones cotidianas, relacionadas con deudas. Se ejemplifica la idea planteada en el apartado anterior acerca de que las cantidades negativas son menores que cero, mostrando los efectos que se producen al añadir deudas. El modelo tener-deber, o pérdidas-ganancias se muestra adecuado para dar sentido a las cantidades negativas. El sistema de representación utilizado para estas cantidades negativas es tanto numérico como simbólico; el fenómeno que aquí da sentido a los negativos es el conjunto de situaciones de ganancia-pérdida, basadas en la comparación de cantidades. Más adelante, cuando trata las Razones Aritméticas afirma que la razón “*de 6 a 3 es 3 y la de 4 a 3 no es fino 1*” (p. 109), destacando de nuevo el carácter relacional de los números para establecer la cantidades positivas y negativas.

TSN7: Regla de los signos:
Para la suma y resta:

“Demueftrafe efta Regla. Reftar es quitar una quantidad de otra. Si la quantidad , que fe debe quitar , es pofitiva , mudandole el figno fe hace negativa, y fumandola, affi puefta, con la otra de quien fe debe hacer la fubftraccion, fe le junta una quantidad negativa , que le deftruye igual parte pofitiva , por configuiente fe le quita la tal quantidad pofitiva. […] De la mifma fuerte , fi la quantidad , que fe ha de quitar , fueffe negativa , mudandole el figno , fe hace pofitiva , y juntandole à la otra , de quien fe ha de hacer la fubftraccion, le deftruye igual parte negativa , que es quitarfela […] En general el quitar una quantidad pofitiva es lo miffmo,

que añadir una negativa , y al contrario.” (p. 56).

Para el producto y división:
“Regla univerfal para los Signos del Producto. Quando entrambos Factores tubieſſen un miſmo ſigno, poſitivo, ò negativo, el ſigno del Producto es ſiempre poſitivo +. Si tubieſſen diferentes ſignos, el ſigno del Producto es ſiempre negativo –. O bien en otros terminos Semejantes ſignos dan + en el Producto, Diferentes –. Affi + x + = –x – =+, + x – = – “ (pp. 57-78, Tomo I).

“Si el Multiplicando es negativo , y el Multiplicador tambien negativo , el Producto ferá aun poſitivo. Affi –n x –a = na. Pues ſiendo el Multiplicador negativo , el multiplicar ferá quitar tantas veces el Multiplicando , quantas exprime el Multiplicador ; pero el Multiplicando es una quantidad negativa , y una quantidad negativa no fe puede quitar fino poniendo positivas (...) Si el Multiplicando es pofitivo , y el Multiplicador negativo, vale tambien la mifma razon , porque haciendo el Multiplicador Multiplicando , ò al contrario , el Producto es el mifmo. Y affi Diferentes fignos dan – en el Producto” (p. 59, Tomo I).

Como ya se ha dado la definición de cantidad positiva y de cantidad negativa, ahora éstas se usan para justificar la manera cómo debe hacerse el producto para efectuar una simplificación de signos cuando se tienen los distintos casos.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa
En el texto no se hace mención de este tema.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.
“Affi 6 à 3 es mayor, que 4 à 3, pues la diferencia de 6 à 3 es mayor, que 4 à 3, pues la diferencia de 6 à 3 es 3, y la de 4 à 3 no es fino 1; la de 3 à 4 es mayor, que la de 3 à 6, pues 3-4=-1, 3-6=-3, y -3 <-1” (p. 109).

La justificación de la relación de orden entre los negativos está basada en el carácter relacional (en este caso de comparación) que tienen estas cantidades y, que da lugar al concepto de Razón Aritmética antes comentado en TSN3 y TSN6. Al igual que una comparación entre cantidades positivas, es mayor una que otra o iguales; esto también es procedente en las relaciones o comparaciones entre cantidades negativas; es mayor (tiene más, o pierde menos) el que pasa de 4 a 3 que el que pasa de 6 a 3, así pues -3 < -1.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
“Sumar es juntar muchas quantidades, y ver la quantidad , que refulta de efta junta. Siendo en efte cafo las unas Poſitivas , las otras Negativas , igual numero de las unas deftruye igual numero de las otras: luego ſolo

queda parte de la que tiene mayor coeficiente, y por effo ſe pone ſolo la diferencia de entrambas con el ſigno de la mayor. Y affi eſta Suma de quantidades de diferentes signos, en fubftancia es una verdadera refta. Como ſi uno para averiguar fu verdadera renta juntaffe fu renta, y fuf cargos, lo que en limpio tendria, fería la diferencia de entrambos" (p. 54, Tomo I).

El autor vuelve a utilizar el esquema de haberes y deudas para justificar las reglas de la suma. Menciona expresamente el principio de anulación entre cantidades positivas y negativas. También alude al agrupamiento de las cantidades positivas y negativas entre sí y la compensación entre ambas.

La interpretación aritmética de la resta es la que sigue:
"Reftar es quitar una cantidad menor de otra mayor, para encontrar el exceſſo de la mayor ſobre la menor, ò la diferencia de entrambas." (p.19, Tomo I).

Esta observación es importante, pues la identificación aritmética de número, cantidad y medida como lo mismo, a través de relaciones entre ellas, no permite la situación contraria en la resta.

En esta interpretación aparece la evidencia de un manejo y comprensión del orden entre cantidades.

El tratamiento algebraico de la resta es diferente, ya que en este caso se trabaja con cantidades generales:

"Reftar es quitar una quantidad de otra. Si la quantidad , que fe debe quitar , es pofitiva , mudandole el figno fe hace negativa , y fumandola , affi puefta, con la otra de quien fe debe hacer la fufbtraccion, fe le junta una quantidad negativa. […] De la mifma fuerte , fi la quantidad , que fe ha de quitar , fueffe negativa , mudandole el figno , fe hace pofitiva , y juntandofe à la otra , de quien fe ha de hacer la fubftraccion, le deftruye igual parte negativa , que es quitarfela. […]. En general el quitar una quantidad pofitiva es lo mifmo que añadir una negativa, y al contrario." (p. 56, Tomo I).

La caracterización de la resta algebraica de dos cantidades como suma del opuesto no puede estar más clara.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.
La interpretación reiterada y permanente que Cerdá hace en el texto corresponde a una comparación de cantidades; las cantidades negativas expresan una relación de disminución o deuda.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

No se hace mención en el texto a la utilidad de las cantidades negativas. Las aplicaciones que hace Cerdá en el texto se concentran en los distintos problemas y variantes que se resuelven mediante la regla de tres, y en los problemas de aritmética comercial. En ninguno de los problemas que propone aparecen soluciones negativas.

TSN13: Otros.

"Supuefto pues que toda Equacion tiene tantas Raices, quantas unidades contiene el grado de que es, y que eftas Raices, cafo que fean Reales, pueden fer Poſitivas, ò Negativas, hemos de procurar conocer en las Equaciones, fi sus Raices fon poſitvas, ò negativas, y cuantas haya de cada efpecie." (p. 70, Tomo II).

Cerdá acepta la existencia de raíces negativas y recuerda que algunos las llaman falsas; sin embargo, no tiene duda de su legitimidad. El enunciado del teorema fundamental del álgebra así lo pone de manifiesto.

La presencia de números negativos en las operaciones formales de los exponentes no plantea problemas al autor.

"Qualquier quantidad, que eſté à modo de entero, ſe puede poner à modo de Fraccion, cuyo Numerador ſea la unidad, y el Denominador la quantidad miſma mudando el ſigno de ſu exponente. Affi $a^2 = 1/ a^{-2}$*"* (p. 194, Tomo I).

También aparecen números negativos en los logaritmos:

"Que el Logaritmo de qualquier Fraccion propia debe ſer una Quantidad negativa, ò Logarithmo negativo;(...)" (p.266, Tomo I).

Las cantidades positivas y negativas forman una progresión, en la que no hay discontinuidad al pasar por 0

"*Subſtituyasnſe ſucceſſivamente en lugar de la incognita los terminos de la progreſſion Arithmetica 3 , 2 , I , 0 , - I , - 2, &.*" (p. 134).

"La Progreffion Arithmetica de Terminos, que fe subtituyen por la incognita de la Equacion, fe puede comenzar de mas arriba, como de 3, de 4, de 5, &c. y profeguir mas abajo hafta -3, -4, -5, &c." (p. 138, Tomo II).

Esto muestra que las cantidades negativas pueden ser manipuladas para operar algebraicamente. Para Cerdá las cantidades negativas pueden reemplazar incógnitas en una ecuación.

4.6.4 Análisis

4.6.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

Cuando el autor plantea la relación de la magnitud con respecto a la unidad: *"fi la contiene dos, ò mas veces, fe llama Numero"*, refleja una definición sobre la base euclídea de número procedente del Libro VII de los *Elementos,* pero que añade un aspecto relacional: número es las veces que una cantidad contiene a la unidad.

La noción aritmética de número de Cerdá es convencional, si bien como hemos visto en **CCO3,** contempla la unidad explícitamente como número entero:

> "*Por nombre de Numeros entendemos aquí la unidad 1 , el complexo de muchas unidades , como 2, 3, 4, &c […] A la unidad, ò al complexo de muchas unidades, llamamos Enteros*" (p. 9).

Examinando el uso e interpretación algebraica que hace Cerdá de las cantidades y números, podemos afirmar que utiliza una idea de número como relación; esta idea nace con Stevin (1587) cuando define *"número es aquello por lo que se explica la cantidad de las cosas"*, es decir, no define el número en términos de la cantidad, sino que es aquello que la explica. Newton estableció en firme esta idea de número en la *Arithmetica Universalis*: *"se entiende por número, no tanto una colección de muchas unidades, como una relación abstracta de una cantidad cualquiera a otra de la misma especie que se considera como unidad"* (citado por Gómez 1999); de esta manera el número pasa a convertirse en la relación que se establece entre cantidades.

Esta concepción de número utilizada por Cerdá permite que los números pueden combinarse de diversas formas para establecer distintos tipos de relaciones entre ellos.

En estas *Liciones generales* de Cerdá hay evidencias de dos consideraciones para el concepto de número: una aritmética, que corresponde a la idea euclídea, ampliada con la unidad y que utiliza los números y signos concretos, y otra noción algebraica, con un significado relacional que emplea las expresiones universales. Como hemos visto en **(CCO4)**:

> "*La Arithmetica es una Ciencia , que trata de los Numeros , efto es , da Reglas para inferir unas quantidades de otras*" […] "*La parte de la Arithmetica, que fe firve para fus operaciones de las expreffiones determinadas 0, 1, 2, &c. fe llama fimplemente Arithmetica y fus expreffiones , de que fe firve , Numeros , o Châractéres Arithmeticos. La*

parte que fe firve de las expreffiones univerfales , e indeterminadas a, b, c, &c. fe llama Algebra o Arithmetica Univerfal , pero entrambas fe fundan en unos mifmos principios , […]” (pp. 5-6)

- ***Cantidad***

Para el autor, cantidad y magnitud se refieren a la misma cosa, añadiendo la noción de cantidad un significado comparativo o relacional, como podemos concluir a partir de **CCO2**. La identificación de cantidad con magnitud está en la misma línea de concepción de cantidad propuesta por Stevin, pues, al no fundamentar la noción de número en su carácter discreto, se rompe la dicotomía griega del continuo para la medida y el discreto para el número.

Como consecuencia de lo anterior, el campo **TSN10** indica que la resta aritmética entre cantidades sólo se da cuando de una cantidad mayor se quita o extrae otra menor. También resulta posible relacionar mediante comparación un número menor con otro mayor. En el tratamiento algebraico sí se establece la resta de dos cantidades cualesquiera, positivas o negativas, y la resta se establece como la suma del simétrico.

Cerdá usa la noción de cantidad vinculada a las nociones de unidad y magnitud. La noción de número es más amplia y se abre al aspecto relacional señalado por Newton, que incluye las cantidades concretas y las generales pero no se limita a ellas.

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Cerdá presenta las cantidades positivas y negativas como aquellas que están precedidas del signo más y menos respectivamente; en **TSN2** afirma que ambas cantidades son iguales; sólo las diferencian los signos que orientan el modo de considerarlas, es decir, los signos hacen variar la relación de unas con otras. En **TSN3** se afirma que el carácter positivo o negativo corresponde a acciones de aumento o disminución. En **TSN6** se presenta una interpretación relativa de las cantidades positivas y negativas, por medio de un ejemplo de balance de ganancias y pérdidas.

También en **TSN6** se presentan las cantidades positivas y negativas como acciones y mediante las razones aritméticas, dichas cantidades también se presentan como resultado de comparaciones numéricas. Las razones aritméticas se vinculan con las relaciones numéricas de comparación; estás relaciones expresan acciones de comparación para establecer cuánto va de un número a otro.

Las razones aritméticas le sirven a Cerdá en el Capítulo VII para establecer relaciones aditivas entre parejas de números naturales, que dan lugar a números positivos y negativos.

Aún cuando no menciona la noción de número negativo, a lo largo del libro sí utiliza distintos conceptos vinculados: cantidad negativa, cantidad menor que nada, raíz falsa y razón aritmética de una cantidad menor a otra mayor, como hemos visto en **TSN3** y **TSN5**. Con estas nociones trabaja y justifica una estructura para los negativos, que terminan formando una extensión de la secuencia numérica.

La significación aritmética que le asigna a una cantidad negativa cuando aparece, es la de quitar o disminuir o bien, algebraicamente, el resultado de comparar un número menor con otro mayor, como en **TSN9**.

En **TSN5** se observa el efecto que producen las cantidades negativas al operarlas con otras; este es menor que el producido al operar con cero. Por tal razón las llama *menores que nada* o *menores que cero*. Esta consideración es puramente algebraica y no se asocia a ninguna reflexión o postura filosófica, como señalamos en **TSN13**.

En **TSN9** se percibe que Cerdá basa el orden entre los negativos en el carácter relacional de dichas cantidades.

El tratamiento que Cerdá hace de las cantidades negativas es aritmético, de una manera muy sucinta, donde deja entrever algunos rasgos de los números naturales relativos (acciones de aumento o disminución, utilización de situaciones de carácter relativo); por otra parte las consideraciones son, en su mayoría, algebraicas (raíces de ecuaciones, relaciones, etc.). Diferencia con cuidado las características y propiedades de los negativos cuando trabaja en aritmética o en álgebra.

De forma global puede decirse que las cantidades negativas son asumidas y utilizadas según las necesite el autor para solucionar problemas o resolver ecuaciones, en ocasiones recurre a Descartes como apoyo para denominarlas falsas cuando surgen como raíz de una ecuación.

4.6.4.2 Análisis de contenido

- ***Conceptos básicos***

Como se manifiesta en **TSN1,** los signos (+) y (–) tienen un significado relacional, expresando cómo ha de tomarse una cantidad; asimismo expresan operaciones entre cantidades. Para Cerdá los signos más (+) y menos (–) significan juntar o quitar respectivamente. En TSN2 se expresa que estos signos determinan la cualidad de las cantidades.

La idea de que las cantidades negativas son menores que nada está en relación con el efecto que producen al juntarlas con otra cantidad, tal como en **TSN5**. Al no producirse efectos de aumento al operar cantidades negativas con otras positivas, se consideran éstas menores que nada.

Como se aprecia en **CCO5** y **TSN12**, la consideración de las incógnitas tiene carácter de generalidad por cuanto son indiferentes para significar cualquier número y cantidad; *"Pero ahora hemos de hacer las operaciones universales, y en qualesquiera generos de cantidades, por consiguiente los Chàracteres han de significar indeterminadamente qualquier genero de quantidad, que queremos."*

- ***Representaciones***

Como hemos afirmado tanto en **TSN2** y **TSN3** como en el apartado 4.6.4.1, las cantidades negativas se representan mediante relaciones que se establecen entre cantidades.

Los números o cantidades negativas se representan simbólicamente mediante números con signo, letras con signo, comparación de dos números y como valor de una incógnita. No hay representaciones gráficas de los negativos para Cerdá.

- ***Fenomenología/Justificación***

En **TSN6** los ejemplos que se presentan para dar idea de las cantidades negativas se fundamentan en relaciones de comparación de cantidades, se respaldan en situaciones cotidianas de carácter relativo que mencionan dinero, deudas, debe, haber, etc.; este argumento de comparación se utiliza para una aproximación de los números negativos como un par ordenado de naturales mediante el concepto de razón aritmética, como se argumenta en **TSN3**.

Globalmente los negativos se utilizan para representar fenómenos contables (deudas), aritméticos (series) y algebraicos (ecuaciones), a través de representaciones aritméticas y algebraicas.

- ***Estructura de orden***

Cerdá considera explícitamente la relación de orden entre números y entre cantidades, y presenta los signos > y < expresamente:

> *"Para fignificar , que una quantidad es mayor , que otra , ufa de efta feñal > , de manera que la quantidad , que eftá en la parte abierta , es mayor , y la que eftá en la punta , es menor. Affi a>b fignifica , que a es mayor que b."* (p. 7).

En **TSN6** se establece que: -2<0; en **TSN9**: -3<-1; en **TSN13** se afirma *"mas abajo"* de 3 está: -3, -4, -5; por lo que, mediante los valores que toma, puede apreciarse que considera el orden entre las cantidades negativas como el mismo orden de los números enteros, aunque no hay un uso sistemático de la comparación entre las cantidades positivas y las cantidades negativas, muestra en una ocasión la serie descendente de los enteros con continuidad a través de 0, en **TSN13**: *"[...] los terminos de la progreſſion Arithmetica 3 , 2 , I , 0 , - I , - 2, &."*.

Cerdá trabaja con la estructura de orden en muchos apartados; por ejemplo cuando afirma: *"Reftar es quitar una cantidad menor de otra mayor, para encontrar el exceſſo de la mayor ſobre la menor, ò la diferencia de entrambas."*, es claro que se debe conocer la forma de determinar cuál cantidad es mayor o menor que otra para poder realizar la operación, es decir hay un conocimiento del orden.

- ***Estructura algebraica***

En **TSN7**, el autor ofrece claras reglas para sumar, restar y multiplicar los signos mas (+) y menos (–) en las operaciones. En **TSN10** presenta una estructura de anulación y agrupamiento de las cantidades negativas positivas y negativas así como la comparación entre ambas.

Considera que las cantidades positivas y negativos son opuestas entre sí; puesto que *"el quitar una quantidad pofitiva es lo mifmo. que añadir una negativa , y al contrario."*, como hemos señalado en **TSN10**.

En el texto se señala que *"La parte que fe firve de las expreffiones univerfales , e indeterminadas a, b, c, &c. fe llama Algebra o Arithmetica Univerfal"*; el procedimiento seguido es definir unas reglas para efectuar las operaciones y luego pasa a aplicarlas en ejercicios, problemas y ecuaciones.

- ***Uso algebraico***

Las cantidades negativas son consideradas y aceptadas como raíces de una ecuación como se ha visto en **TSN13**. Thomas Cerdá indica que las cantidades negativas también son reales; pues se aceptan como raíz de una ecuación. Indicando que si las raíces son reales pueden ser estas positivas o negativas, indicando que algunos las llaman falsas. Aunque realmente a lo que le presta atención en esta parte es a los distintos métodos para solucionarlas, pero por ello no deja de ser importante, pues está diciendo que si aparecen se llaman falsas, pero ni las rechaza ni cuestiona su significado sólo que son una solución al problema planteado.

La exposición de la regla de los signos para la multiplicación se hace mediante representaciones algebraicas: $-n \times -a = na$.

Los negativos son utilizados a lo largo del texto de diferentes modos, como por ejemplo, en ecuaciones, exponentes etc. Hay un planteamiento que busca las consecuencias prácticas en el uso del álgebra.

4.6.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y $\mathbb{N}_r$ *

Primera diferencia: Orden total – orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1.** La indicación que se hace en TSN5 sobre las cantidades negativas como *menores que cero* es la determinada para números enteros; el hecho que la idea de cantidad negativa como *falsa,* sólo aparece en relación con las soluciones a ecuaciones y se asocia al tratamiento cartesiano, es indicio de que trabaja el campo de los números enteros. Cerdá parece estar interesado en mantener una asignación fija y universal de significados signos y adjetivos duales.

Segundo indicador: **a_2.** Hemos encontrado muestras débiles para este indicador en TSN13 que permiten situar el trabajo de Cerdá con las cantidades negativas en el campo de los números enteros.

Tercer indicador: **a_3.** La información que se recoge en los apartados TSN6 y TSN9, *"–2 es inferior á 0* y *–3<-1"*, permiten observar que el orden de los negativos en el texto es el usual entre los números enteros negativos; esto se reafirma cuando en TSN13 se indica *fe puede comenzar de mas arriba, como de 3, de 4, de 5, &c. y profeguir mas abajo hafta -3, -4, -5, &c.*

Cuarto indicador: **a_4.** No hemos encontrado muestras para este indicador que permitan situar el trabajo de Cerdá para las cantidades negativas en el campo de los números enteros o en el de los naturales relativos.

Como balance para esta primera diferencia D_1, sustentamos que los números con los que trabaja tienen algunas características de los números enteros; no son números naturales relativos.

Segunda diferencia: Sin primer elemento – con primer elemento

Primer indicador: **b_1**. En TSN6 al escribir *"pero si se le junta –2 ducados"*, claramente se esta indicando un saldo acreedor, por medio de la utilización de un significado asociado al tipo de los números enteros.

También en la progresión aritmética *"3, 2, 1, 0, -1, 2, &"* presentada en TSN13, utiliza el cero como una referencia central; esto permite la posibilidad de que existan valores inferiores y superiores a cero (González,

* Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

p. 219); esto nos permite afirmar que este indicador muestra que los negativos son tratados desde el campo de los números enteros.

Segundo indicador: **b_2.** Cuando Cerdá escribe *"la fuma de las deudas fera –8ab"* pone de manifiesto una compatibilidad entre adjetivación y signo en la estructura entera (González, p. 223).

Tercer indicador: **b_3.** En TSN9 se presenta cómo al comparar cantidades pueden obtenerse valores positivos o negativos, es decir las diferencias pueden aumentar o disminuir dependiendo de la pareja de números y orden en que se comparen. Por tanto este ejemplo de trasformación cuantitativa y métrica es indicio de que los números enteros están reflejados en el tercer indicador.

A manera de balance para esta segunda diferencia D_2, señalamos que no hay evidencias de que los números negativos hayan sido trabajados en el campo de los números naturales relativos. Según esta diferencia Cerdá está en el campo de los números enteros.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas- discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

En el texto de Cerdá, la continuidad numérica de medidas enteras esta latente en TSN13, donde se presenta la progresión aritmética *"3 , 2 , I , 0 , - I , - 2, &."*; se observa como los valores cruzan el cero y continúan.

Para esta tercera diferencia D_3, no hay indicios de la presencia de los números naturales relativos.

Cuarta diferencia: Cero único – Cero doble (natural relativo)

En TSN6 se trata una situación de deudas. Como las deudas están limitadas por cero (al cruzarlo se tienen haberes), podría considerarse esto un indicio de la existencia de un cero doble, para las deudas y para los haberes; sin embargo, el tratamiento que otorga a la situación de deudas está acompañado de compatibilidad de signo y adjetivo (b_2), además de por no encontrarse evidencias de discontinuidad de medidas (D_3), no nos permite afirmar la existencia de un doble cero.

De modo que para esta cuarta diferencia D_4, no hay indicios del cumplimiento de esta diferencia en el campo de los números naturales relativos.

Quinta diferencia: Composición aditiva: adición entera- adición natural y anulación-composición.

Hemos identificado que Cerdá considera que cantidades positivas y negativas son opuestas entre sí; *"el quitar una quantidad pofitiva es lo mifmo. que añadir una negativa , y al contrario."* Sin embargo, como también hemos visto en TSN10, al expresar las reglas para efectuar la suma *"igual numero de unas deftruye igual numero de las otras"* y para la resta *"encontrar el exceſſo de la mayor ſobre la menor",* referencias explicitas a la anulación-compensación, propias de los números naturales relativos.

Estas pocas evidencias de la adición de los negativos con un tratamiento propio de los naturales relativos, hace que aceptemos la presencia parcial de esta quinta diferencia D_5.

La siguiente tabla presenta el resumen del análisis hecho al texto de Cerdá:

*Tabla 4.3. Diferencias entre **Z** y $\mathbf{N_r}$ en las Liciones de Cerdá*

Autor	**D_1**					**D_2**				**D_3**	**D_4**	**D_5**
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**		**b_1**	**b_2**	**b_3**				
Cerdá	**No**	**No**	**No**	**¿?**	No	**No**	**No**	**No**	No	No	No	P

Si =se cumple la diferencia en el campo de los números naturales relativos; No =la diferencia no se cumple en el campo de los relativos; ¿?=no hay evidencias de una u otra estructura; P = cumplimiento parcial de la diferencia en el campo de los naturales relativos

4.6.6 Tratamiento global de los negativos en las Liciones de arithmetica, o Elementos generales de arithmética y álgebra para el uso de la clase

En este texto los números negativos son tratados desde una doble perspectiva: aritmética y algebraica, diferenciando en cada caso. Los negativos se consideran iguales que los positivos pero los signos varían el tipo de relación que establece cada uno. Su presentación esta asociada a operaciones aritméticas (sustracciones), luego el tratamiento se justifica en reglas y leyes formales del álgebra. También el autor emplea el concepto de razón aritmética para justificar la comparación entre negativos.

Los fenómenos modelizados a través de los negativos son de tipo contables (deudas), apoyándose luego en fenómenos cotidianos reales, todos ellos en torno a la comparación de cantidades; asimismo están presentes fenómenos aritméticos (series) y algebraicos (ecuaciones), a través de representaciones aritméticas y algebraicas.

La consideración de los negativos como *"menores que nada"* o *"menores que cero"* es planteada en términos de resultados operacionales, de adición de una cantidad negativa a otra cantidad, pero no en reflexiones metafísicas.

Desde el punto de vista algebraico los negativos son soluciones a ecuaciones, aceptando su naturaleza real; están sujetos a sus leyes formales, por lo tanto es posible operar con ellos en diversas situaciones. No hay reflexiones acerca de su significado o utilidad, tan sólo se aceptan y utilizan como otros números.

Como se ha indicado, en el tratamiento algebraico de los negativos hay una preferencia hacia los aspectos pragmáticos de su utilización como herramienta en procesos de resolución de problemas y ecuaciones.

De acuerdo a los párrafos, las ideas destacadas, y los comentarios hechos, afirmamos que, pese a que Cerdá utiliza cantidades relativas para aclarar la idea de negativo y en las situaciones aritméticas, trabaja con números enteros en el tratamiento algebraico pero sin afirmar que sean lo mismo. Son pocas las situaciones en que presenta números relativos, por lo que no hay persistencia en tal idea numérica.

4.7 Los documentos

Los trabajos estudiados son: *Elementos Matemáticos* (1706), de Pedro de Ulloa; *Compendio Matemático* (1707), de Thomas Vicente Tosca; *Liciones de mathematica o elementos generales de arithmetica y álgebra para el uso de la clase* (1758), de Thomas Cerdá.

Son tres documentos significativos, dentro de la producción de textos matemáticos españoles de la época, por la incorporación de nuevas ideas y conceptos matemáticos: en primer lugar las nociones de Descartes y posteriormente, las de Newton, Leibniz y Euler.

Muestran una progresión en la mayor precisión de su lenguaje, un mejor orden y encadenamiento de temas, un incremento en el tratamiento estructural de los conceptos y en la propia organización de los temas matemáticos. Las similitudes y diferencias entre la Aritmética y el Álgebra se perfeccionan de un autor a otro, y se mejoran las conexiones entre ambas ramas de la matemática, incrementando progresivamente la importancia del Álgebra y disminuyendo la de la Aritmética. Mientras que Ulloa mezcla cuestiones de Aritmética y Álgebra, Tosca diferencia entre Aritmética y Aritmética Superior y Álgebra; Cerdá establece un tratamiento en dos partes bien diferenciadas. La secuencia cronológica muestra un mayor dominio técnico, un trabajo progresivamente mejor acabado y más cercano a la producción europea del momento.

La conexión de las matemáticas con otras disciplinas fue defendida y practicada por los tres autores; esta conexión se hace tanto en el plano de los fundamentos como en el de las aplicaciones. Tosca lo plantea claramente cuando escribe sobre la matemática:

> *"[...] con ella se descubren los mas retirados secretos de la naturaleza. Ella es la que averigua las fuerzas del ímpetu, las condiciones del movimiento, las causas, efectos, y diferencias de las fases: la naturaleza admirable de la luz, las leyes de su propagación: levanta con hermosura los edificios, haze casi inexpugnables las Ciudades, ordena con admiración los exercitos; y entre las confusas, è inconstantes olas del mar, abre caminos, y sendas à los que navegen [...]"* (p. I).

Tanto Ulloa como Tosca publican estudios sobre música, que Tosca incluye en el segundo tomo del Compendio.

En la lectura y análisis de los textos presentados para este periodo se detectan similitudes entre los autores, las cuales permiten caracterizarlos en esta época, desde 1700 hasta 1767, desde el punto de vista de las nociones matemáticas, su formación científica, lo didáctico y, según las diferencias entre los números enteros y los números naturales relativos

4.8 Análisis conceptual de los negativos

Entre los objetivos de este estudio se encuentra realizar un estudio histórico epistemológico del número negativo, según señalamos en el Apartado 1.8, indagando en su evolución como concepto matemático en los libros de texto publicados en España durante el periodo 1700-1900. Para examinar los significados y establecer las conexiones entre los términos de cada campo conceptual y para contextualizar las definiciones dentro del área y del periodo histórico en que se insertan, hemos elegido como método el análisis conceptual (Rico, 2001). El análisis conceptual de este periodo se centra en las nociones de Número, Cantidad y Cantidad Negativa, cuya diversidad de significados presentamos en el Apartado 3.1.2, y que ya establecimos en un estudio piloto (Maz, 2000).

4.8.1 Concepto de número

En los textos, la noción de número es euclidiana, porque se apoya en los *Elementos* de Euclides; este fundamento procede de una acción: "coleccionar unidades", que evidencia una correspondencia entre medida y longitud. También se aprecia un acercamiento hacia la idea de número como relación; interpretamos que es consecuencia de los desarrollos y tratamientos algebraicos de las cantidades así como de los vínculos que se derivan de sus operaciones.

Tabla 4.4 Noción de número utilizada en los textos españoles (1700-1767).

Autor	Euclídea	Relacional
Pedro de Ulloa	X	
Vicente Tosca	X	
Thomas Cerdá	X	X

4.8.2 Concepto de Cantidad

Se esgrimen ideas variadas acerca de la cantidad; no hay consenso entre los diferentes autores sobre ella y por esto se manifiestan diversas nociones que implican la aristotélica, la empirista inspirada en los planteamientos de Stevin y también algunas un tanto avanzadas, semejantes a la que encontramos en Euler unos años más tarde.

Tabla 4.5 Noción de cantidad utilizada en los textos españoles (1700-1767).

Autor	Aristotélica	Empirista	Euleriana
Pedro de Ulloa	X		
Vicente Tosca	X		
Thomas Cerdá		X	X

El tratamiento algebraico, prioritario en Cerdá, hace que la noción de cantidad tenga un planteamiento más moderno.

4.8.3 Cantidades positivas y negativas

En la revisión que hemos hecho de estos autores encontramos seis significados diferentes para la presentación de las cantidades negativas:

- **Cantidades falsas**, en el sentido de Descartes, para referirse a los valores negativos que proceden de la solución de una ecuación, que ya comentamos en el Apartado 1.3.2.
- **Cantidades menores que nada**, cuando se pone el énfasis el orden y se discute el aparente absurdo de que una cantidad pueda ser menor que 0.
- **Carácter lógico,** cuando se destaca que la proposición que define las cantidades negativas proviene de la negación lógica de una cantidad positiva.
- **Presentación aritmética,** cuando la noción se introduce mediante una diversidad de ejemplos numéricos
- **Comparación aritmética,** en este caso destaca el negativo como expresión de una relación entre números donde el referente es menor que el referido, como ocurre en las progresiones aritméticas decrecientes.

- **Justificación algebraica,** como hace Tosca quien, al no poder encontrar significado preciso en los ejemplos, remite la interpretación de estas cantidades al *sentido del álgebra*.

Resumiendo, las distintas nociones de cantidad negativa que hemos encontrado en los autores analizados en este periodo, son:

Tabla 4.6 Noción de cantidad negativa

Autor	Cantidades falsas	Cantidades menores que nada	Negación lógica	Presentación aritmética, mediante ejemplos	Relación aritmética de comparación	Justificación algebraica
Pedro de Ulloa	X	X	X	X		
Vicente Tosca	X	X	X			X
Thomas Cerdá	X	X	X		X	X

4.9 Análisis de contenido

El análisis de contenido se establece en el Apartado 1.9 como método para el estudio de los libros que focalizan esta investigación. Centramos su especificidad en cuatro apartados:

- Estructura conceptual.
- Análisis fenomenológico.
- Sistemas de representación.
- Resolución de problemas.

4.9.1 Estructura conceptual

Consideramos aquí las descripciones de conceptos, sus interrelaciones y la estructura matemática en que se sustentan. Para estudiar la estructura conceptual establecida por cada autor y poder realizar las comparaciones pertinentes entre ellos, son cuatro los puntos que hemos analizado.

- Nociones básicas. Números enteros
- Definición de suma. Estructura aditiva
- Relación de orden
- Definición del producto. Estructura multiplicativa

Nociones básicas. Números enteros

Tabla 4.7 Nociones básicas y concepto de entero

Autor	Signos como operaciones	Signos como oposición lógica	Expresión de la cualidad de una cantidad	Signos como relaciones entre cantidades
Pedro de Ulloa	X	X	X	
Vicente Tosca	X	X	X	X
Thomas Cerdá	X		X	X

Además de los distintos usos que hacen los autores de las cantidades negativas, encontramos que todos ellos interpretan los signos como expresión de las operaciones. Ulloa y Tosca le atribuyen un sentido lógico de afirmación o negación de una determinada cualidad; por ello, también consideran que los signos expresan la cualidad de una cantidad. Tosca y Cerdá expresan la idea de los signos como relaciones entre cantidades, con cierto sentido de acción. Ya hemos comentado que para Tosca y Cerdá la procedencia algebraica de las cantidades negativas permite explicar su carácter singular, que se expresa con el signo –, cosa que no ocurre con Ulloa.

Definición de suma. Estructura aditiva

Tabla 4.8 Definición de suma. Estructura aditiva

Autor	Justificación aritmética	Presencia de la anulación compensación	Reglas propias para la resta	Resta como caso de la suma
Pedro de Ulloa	X	X	X	
Vicente Tosca	X	X	X	
Thomas Cerdá	X	X		X

Los autores de este periodo coinciden en la justificación aritmética para las reglas de las operaciones suma y resta, por su fundamento en la anulación/ compensación. Hay una progresión al final del periodo cuando Cerdá considera que la resta es un caso particular de la suma, a diferencia de los otros dos autores. No detectamos presencia de la consideración de estas operaciones como leyes internas, ni tampoco de la explicitación de sus propiedades.

Relación de orden

No detectamos en estos autores evidencia sobre el reconocimiento expreso del concepto de valor absoluto, aún cuando se refieren con mayor o menor precisión al *valor de una cantidad*. En este apartado es donde encontramos mayores diferencias entre los autores: dos de ellos no comparan expresamente los negativos con cero, aunque todos afirmen que las cantidades negativas son *menores que nada*. Las mayores diferencias las encontramos en el orden entre los negativos, donde se aprecia el progreso hacia un concepto mas elaborado. No hay consideración del orden conjunto de positivos y negativos; no se dedican apartados específicos para explicar la relación de orden ni se define explícita y formalmente el orden entre los números.

Tabla 4.9 Relación de orden

Autor	**Valor absoluto**	**Orden relativo entre los negativos y positivos**	**Orden entre cantidades** positivas y entre negativas pero no son comparables entre sí
Pedro de Ulloa	¿?	X	
Vicente Tosca	¿?	X	
Thomas Cerdá	¿?		X

Definición del producto. Estructura multiplicativa

El carácter de negación lógica que Ulloa y Tosca atribuyen al signo – les permite justificar la regla de los signos en los casos en que el multiplicador es negativo el argumento de que *"dos negaciones equivalen a una afirmación".* También se hace uso de la conmutatividad para hacer equivalentes los resultados de positivo por negativo con los de negativo por positivo.

Cerdá, por su parte, interpreta el resultado atendiendo al carácter relativo del multiplicador.

No detectamos la consideración de esta operación como ley interna, ni tampoco de sus propiedades

Tabla 4.10 Producto. Estructura multiplicativa

Autor	**Interpretación lógica para justificar la regla de los signos**	**Interpretación del carácter relativo del multiplicador**
Pedro de Ulloa	X	
Vicente Tosca	X	
Thomas Cerdá		X

4.9.2 Fenomenología

Los ejemplos que utilizan para ilustrar y explicar los números negativos recurren a situaciones relativas cotidianas y comunes para cualquier lector; todos los ejemplos tienen como argumento principal la presentación de situaciones de comparación de medidas contrarias a través de fenómenos de carácter:

- Contable (deudas).
- Físico (desplazamientos).
- Aritmético (series).
- Algebraico (ecuaciones).

Sin embargo, es dispar la utilización que los autores hacen de estos fenómenos: Ulloa sólo recurre a la presentación del fenómeno físico. Cerdá muestra los otros tres tipos, contables, aritméticos y algebraicos. Tosca utiliza los fenómenos contables y físicos. Estos autores emplean reiteradas analogías entre estas cantidades dirigidas y los números negativos para dar idea de ellas.

4.9.3 Resolución de problemas

Ulloa presenta sólo un problema para ilustrar las cantidades negativas: éste es de desplazamientos entre tres puntos fijos. Tosca prácticamente repite el mismo problema, pero agrega otros de comparación de deudas y haberes; además se apoya en ecuaciones de segundo grado para dar explicación de las raíces positivas y negativas de ecuaciones. Cerdá también recurre a problemas de deudas y rentas

Los autores manifiestan una preferencia hacia los problemas cuyo modelo es tener-deber, ganancias-pérdidas como el adecuado para presentar y explicar las cantidades negativas.

4.9.4 Representaciones

La variedad de situaciones fenomenológicas utilizadas hace que aparezcan presentes diversos sistemas de representación para los negativos:

- Representaciones verbales (explicaciones retóricas).
- Numéricas (números y signos).
- Algebraicas (letras, números y signos, y pares ordenados de números).
- Gráficas (líneas y segmentos).

Todos los autores emplean representaciones verbales, especialmente en la Aritmética, cuando presentan los ejemplos; Ulloa es el único que además utiliza la representación gráfica.

4.10 Números relativos

El análisis de las diferencias entre la estructura de los números enteros y los números naturales relativos (González Marí, 1995), arroja los siguientes resultados:

*Tabla 4.11 Comparación de autores y diferencias entre **Z** y N_r.*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
Pedro de Ulloa	Si	¿?	Si	Si	Si	Si	Si	¿?	Si	Si	¿?	Si
Vicente Tosca	P	¿?	P	No	P	Si	P	No	P	No	No	P
Thomas Cerdá	No	No	No	¿?	No	No	No	No	No	No	No	P

Si =se cumple la diferencia en el campo de los números naturales relativos; No =la diferencia no se cumple en el campo de los relativos; ¿?=no hay evidencias de una u otra estructura; P = cumplimiento parcial de la diferencia en el campo de los naturales relativos.

La tabla refleja: en la primera diferencia D_1: Orden total (entero) – orden parcial o doble natural con inversión en la región "negativa" (natural relativo) presenta diversos matices y combinaciones entre los autores. Se observa que la diferencia a_2, *Comparación-valoración global de las regiones*, no se cumple en ninguno de los tres textos, bien por no hallarse indicios que confirmen su presencia bien por valoración de la evidencia. Son los indicadores a_1, *Atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones*, y a_3, *Comparación de medidas con valores numéricos negativos en el orden entre entero y naturales relativos*, los que presentan un resultado diferente en cada texto y permiten realizar una valoración categórica de su cumplimiento. El cuarto indicador, $\mathbf{a_4}$, o bien no se reconoce o muestra la presencia de la diferencia. En conjunto admitimos una progresión en la presencia/ ausencia de números relativos a lo largo de estas obras por lo que respecta a la primera de las diferencias de González Marí, $\mathbf{D_1}$: *Orden total/ Orden parcial*. Por lo que se refiere a la relación de orden, Ulloa utiliza números relativos, Tosca los utiliza parcialmente y Cerdá utiliza claramente el orden de los números enteros.

Sin embargo, al comparar esta conclusión con la que se expresa en la Tabla 4.9, resulta difícil sostener que alguno de estos autores utilice el orden de los enteros ya que no entran en la comparación de los positivos con los negativos. Los indicadores de la diferencia D_1 no reconocen la presencia de la concepción de número relativo que aún se mantiene, incluso en la relación de orden que utiliza Tosca, si bien este autor elude los aspectos más contradictorios de dicha concepción relativa. Según los indicadores analizados Tosca trabaja con números enteros; según una consideración más reflexiva y detallada, complementada con el análisis de contenido, Tosca mantiene en la concepción de la relación de orden ciertas limitaciones de los números relativos.

En la segunda diferencia D_2: Sin primer elemento (entero) – con primer elemento (natural relativo) pueden verificarse todos los indicadores en los textos, excepto el tercero en Ulloa; el balance de esta diferencia muestra que no hay homogeneidad entre los autores para el tratamiento de los negativos en este aspecto. De nuevo, encontramos una progresión en la presencia/ ausencia de números relativos a lo largo de los tres autores por lo que respecta a esta segunda de las diferencias de González Marí, $\mathbf{D_2}$: *Con primer elemento/ sin primer elemento*.

La tercera diferencia D_3: Continuidad de medidas –discontinuidad de medidas (al cruzar el cero) permite ser evaluada en los tres textos y sólo se cumple para los naturales relativos en Ulloa.

No hay cumplimiento de la cuarta diferencia D_4: Cero único – cero doble (natural relativo) para el campo de los números naturales relativos. El libro de Ulloa no ofrece información que permita evaluarla; Tosca y Cerdá trabajan con un único cero.

La quinta diferencia D_5: Composición aditiva: adición entera- adición natural y anulación-compensación está manifiesta en los documentos de los tres autores, aunque sólo en Ulloa se verifica de manera absoluta en el campo de los números naturales relativos, mientras que en Cerdá y Tosca su cumplimiento es parcial. Esta quinta diferencia de las propuestas por González Marí (1995) es el rasgo relativo más persistente y común a los tres autores.

4.11 Consideraciones didácticas

La intención didáctica está presente en los tres autores, pero su manifestación es diferente en cada momento. Ulloa dedica su obra al Conde de Luna, celebrando contribuir al desarrollo intelectual de este personaje, indicando que esta obra dispone de todo lo indispensable para ser un matemático; Tosca dedica su trabajo al rey Felipe V, mientras que Cerdá dedica directamente su obra a la juventud española.

Los textos presentan el álgebra dando importancia y énfasis a sus aspectos prácticos y útiles como herramienta para el planteamiento y resolución de un nuevo tipo de problemas; representando todo ello un avance en la comprensión de la resolución de ecuaciones.

El interés por mostrar los contenidos matemáticos de forma didáctica para una adecuada comprensión de los mismos es una constante en estos autores. Este aspecto se evidencia espléndidamente en el *Compendio Mathematico* de Tosca, allí (p. 112) presenta el "*árbol analytico*" que consiste en un mapa conceptual para desarrollar de manera sistemática la resolución de ecuaciones.

Varios indicadores presentes en los textos permiten establecer y comparar la actividad didáctica de sus autores.

Tabla 4.12 Indicadores de actividad didáctica

Autor	Innovación y Actualización	Desarrollo lógico	Sentido práctico	Autonomía intelectual	Amenidad
Pedro de Ulloa		X	X		
Vicente Tosca		X	X		X
Thomas Cerdá	X	X		X	

4.12 Actividad científica

El trabajo científico de estos autores estuvo marcado por abiertas manifestaciones de simpatía y apoyo a las ideas renovadoras antiaristotélicas que postulaban los novatores, apostando con ello por la adquisición de un nuevo espíritu crítico.

Había preocupación en las clases ilustradas y en los renovadores por difundir los conocimientos científicos y los avances recientes que llegaban de los países vecinos, como vimos en los Apartados 2.3, 2.4 y 2.5, por esta razón y por su posición novatora los textos matemáticos son escritos y publicados en castellano, dejando de lado el latín, el lenguaje de los científicos y las clases instruidas.

El nivel de conocimientos de los autores estaba a la altura de sus contemporáneos europeos, como lo demuestran la estructuración y contenidos de sus textos; también es señal de ello las amplias y diversas referencias a obras y autores que reseñan en sus escritos. Sin embargo, no realizan aportaciones propias a la teoría matemática, es decir, no son creadores, sino meros difusores del conocimiento matemático.

4.13 Balance final

En conclusión, las principales ideas que podemos destacar sobre el tratamiento de los números negativos durante este periodo en estos autores, son:

1. Los autores de este periodo incorporan a los textos matemáticos españoles de la época conceptos y avances contemporáneos. Se reconoce una buena formación clásica en todos ellos, que se

equilibra con conocimientos actualizados conforme avanza el siglo. Escriben tratados de Aritmética y Álgebra en los que, progresivamente, se estructuran estas dos disciplinas de manera diferenciada.

2. Como consecuencia del análisis conceptual apreciamos un predominio de la noción euclidiana de número; sólo a final del periodo se incorpora un tratamiento relacional. El concepto de cantidad que predomina en cada autor es diferente, pasando de una interpretación aristotélica a otra empírica y, finalmente, a una consideración euleriana relacionada con las ideas del momento.
3. En este periodo se detecta una influencia importante de la obra de Descartes: en unos autores, por su conocimiento y, en otros, por su dominio; esto hace que en los textos incorporen las aportaciones cartesianas a la teoría de la resolución de ecuaciones; asimismo, se apoyan en su *Geometría* para llamar falsas a las raíces negativas de una ecuación. Los valores negativos como raíces de ecuaciones se consideran respuestas "*falsas*" en el sentido planteado por Descartes, esto es, valores contrarios a los que satisfacen a la ecuación. Los negativos también se consideran como *menos que nada* o *menores que cero*, prioritariamente desde el punto de vista de la adición. Es decir, se consideran así porque el efecto que producen al juntarlos con otras cantidades es menor que si se les agrega cero. En este periodo hay una variación en la introducción de las cantidades negativas, que pasa de la ejemplificación numérica a una justificación algebraica, progresivamente. Los fenómenos utilizados para ejemplificar las cantidades negativas dan prioridad a fenómenos contables; también se utilizan ejemplos de fenómenos físicos y aritméticos.
4. Los signos + y – se interpretan como símbolos de una afirmación y una negación lógicas; en este caso expresan la cualidad de una cantidad. También los signos expresan relaciones entre cantidades. Las representaciones utilizadas por todos los autores son verbales, numéricas y simbólicas; solamente Ulloa introduce la representación gráfica.
5. Los números negativos surgen como resultado de efectuar operaciones y cálculos aritméticos, por lo cual tienen existencia matemática real. Los números negativos se asumen como valores numéricos con los cuales se pueden efectuar operaciones aritméticas y algebraicas en la resolución de ejercicios, problemas y ecuaciones aún cuando, en muchas ocasiones, esos mismos valores son rechazados como respuestas, llevando a reconsiderar el enunciado, las consideraciones o los procesos efectuados.

6. La relación de orden entre los negativos experimenta un claro avance en este periodo, donde se pasa del orden relativo al orden entero. Sin embargo, estos autores no contemplan la relación de orden entre positivos y negativos. Ninguno de los autores utiliza un concepto formal de valor absoluto.
7. La suma se justifica en todos los autores mediante argumentos aritméticos de anulación/ compensación, de gran fuerza intuitiva, que muestran la persistencia de los números relativos en los autores consultados, si bien con una debilitación progresiva. Las operaciones de suma y resta se establecen mediante reglas que consideran los distintos casos de suma entre números negativos y de positivos con negativos. Los dos primeros autores establecen reglas diferenciadas para la resta, mientras que Cerdá considera ya la resta como un caso particular de la suma.
8. Las reglas del producto se justifican también por una combinación de argumentos lógicos, como en Ulloa, por la interpretación del producto como suma reiterada como en Tosca, o bien con un argumento algebraico, como en Cerdá. En todos los casos se trata de un producto basado en el carácter relativo de los factores.
9. Respecto a las diferencias de González Marí, encontramos que en el texto de Ulloa se cumplen cuatro de las diferencias, puesto que para la cuarta no se hallan evidencias que apunten a uno u otro tipo de números. En Tosca se cumplen parcialmente tres de las diferencias; la primera, segunda y quinta; cumple totalmente uno de los indicadores de la segunda diferencia y parcialmente el tercer indicador de la primera. En el libro de Cerdá solo se cumple de manera parcial una diferencia: la quinta. De los tres textos analizados, este es el que presenta menos indicios de los números naturales relativos según las diferencias estudiadas.
10. Subrayamos las limitaciones encontradas en las diferencias de González Marí para establecer con precisión las nociones relativas manejadas por los autores. No es cierto afirmar que alguno de los autores de este periodo trabajó con números enteros; sí detectamos que un predominio en el tratamiento algebraico establece un menor uso de las nociones relativas, pero esto no garantiza el conocimiento y dominio de la estructura de los números enteros.
11. Hay suficientes evidencias de que los autores se hallan en un momento de transición del concepto de número natural hacia el número entero; esto se refleja en la utilización de números naturales relativos junto a naturales durante la presentación de ejemplos, aunque estos relativos únicamente son utilizados cuando trabajan la aritmética. Los autores intuyen que el carácter

simbólico del álgebra permite ampliar la visión y utilidad de las matemáticas, por ello incorporan los avances algebraicos de la época, imprimiendo con ello dinamismo a los textos; este aspecto es de importancia significativa en la renovación progresiva del nivel matemático y científico español acercándolo al resto de Europa. Procuran diferenciar el tratamiento dado a la parte aritmética distinguiéndolo del algebraico; la reiteración de apartados aclarando las consideraciones que se hacen para las cantidades, números e incógnitas en álgebra o aritmética revela un esfuerzo de los autores por mostrar que se trata de estructuras distintas.

12. El interés por el desarrollo lógico de la materia y la prioridad que establecen para el sentido práctico de los conocimientos presentados, son los dos indicadores didácticos principales. Interés por la innovación, preocupación por la amenidad e impulso a la autonomía intelectual de los estudiantes, son otros indicadores contemplados por estos autores.

CAPITULO 5
Periodo Ilustrado (1768-1814)

5.1. Caracterización general

Como ya se ha descrito en el Apartado 2.3.2, la Ilustración consistió en un movimiento cultural, racionalista, innovador, empirista, antiescolástico y laico, que se inicia en Europa a mediados del siglo XVII y tiene su momento de máxima influencia durante el siglo XVIII. La llegada a España de la nueva dinastía Borbón favoreció la regeneración nacional e impulsó el desarrollo de la ciencia, la técnica y la cultura, estableciendo la razón como clave del desarrollo humano; el movimiento de la Ilustración alcanza su mayor vigor en España durante el reinado de Carlos III. La nueva monarquía española introdujo un nuevo modelo centralizado de gobierno, junto con nuevas modas, estilos y costumbres. La alianza con las clases burguesas introdujo un gobierno intervencionista, ejemplo de Despotismo Ilustrado, que trabaja por el bien común pero sin contar con los gobernados.

En 1766, durante el reinado de Carlos III, se produce un motín popular contra las medidas impuestas por el ministro Esquilache relativas a usos y vestimentas populares. Consecuencia de este motín fue la subida al gobierno de un grupo de ilustrados, presidido por el conde de Aranda. Este gobierno lleva a cabo la expulsión de la Compañía de Jesús de los territorios de la Monarquía en 1767, según hemos comentado en el Apartado 2.4.1.

Carlos III fue en España el paradigma de monarca ilustrado; Aranda, Campomanes y Floridablanca los ministros más destacados de la segunda parte de su reinado. Los ilustrados abrieron el camino a la secularización de la sociedad, trataron de recortar el poder de la Inquisición y de las órdenes religiosas más influyentes, como fue el caso de los jesuitas.

Por su significado político y cultural, por los cambios que supuso en la organización de las instituciones académicas y educativas, escogemos esta fecha para establecer un segundo periodo histórico en nuestro estudio. Este periodo lo iniciamos con la expulsión de la Compañía de Jesús del territorio español y sus posesiones de ultramar y lo finalizamos con la conclusión de la guerra de la Independencia y el posterior retorno de Fernando VII al trono en 1814. Durante todo este periodo se puede señalar que son la razón y el progreso los fines que orientan la acción de gobierno y las actuaciones sociales.

Se pueden distinguir tres etapas en este intervalo de tiempo: la primera, caracterizada por un predominio y culminación de las ideas ilustradas bajo el amparo de Carlos III, que concluye con su reinado en 1788; la segunda marcada por la Revolución Francesa y el aislamiento a que España es sometida por Carlos IV ante el temor del contagio de las ideas revolucionarias del país vecino. La invasión francesa en 1808 y el desencadenamiento de la guerra de la Independencia determinan la tercera de las etapas, que extendemos hasta 1814.

Como se ha señalado en el Capítulo II de esta Memoria, la primera etapa de este periodo es rica en los campos científicos y académicos por el apoyo directo que Carlos III da a la divulgación de los conocimientos y la implementación de reformas ilustradas. La Ilustración sustenta el concepto de razón práctica como energía creadora; sostiene que la ciencia, la cultura y la educación son instrumentos al servicio del cambio social, del progreso y de la libertad. Los ilustrados quieren reformar la sociedad bajo el impulso de la solidaridad, la tolerancia y la filantropía. El movimiento ilustrado español se propone la regeneración del país mediante el desarrollo de las ciencias útiles, de la implicación de los ciudadanos en las reformas sociales y de la expansión de una clase pequeño- burguesa de pequeños propietarios partidarios de las luces y del liberalismo (Quesada, 2004).

Los ilustrados enaltecen el trabajo productivo; emiten juicios negativos sobre la nobleza tradicional y su incapacidad económica. Se ha mencionado en el Apartado 2.7.2 que las Sociedades Económicas de Amigos del País, desempeñan un papel de primer orden en la difusión de las ideas de la Ilustración y en la movilización de las elites para la realización práctica de proyectos de mejora e innovación en la agricultura, la arquitectura, la economía y la industria (Amalric y Domergue, 2001). El pensamiento ilustrado es eminentemente práctico, pues se propone iluminar al pueblo, enseñarle a pensar. El arte y la literatura se subordinan a estos objetivos, el ensayismo y la prosa didáctica sustituyen a la literatura de ficción. Tratados, artículos y ensayos con fines educativos, científicos y críticos se publican regularmente en revistas y libros.

Igualmente la reforma de las universidades recibe un impulso importante en estos años, como ya hemos señalado en el Apartado 2.6.4. La expulsión de los jesuitas propició la fundación de varias cátedras de matemáticas y de física experimental, ayudó a la consecución del plan de estudios de 1771 y facilitó el plan posterior de 1786, orientado a desvincular las ciencias exactas y físicas del peso del aristotelismo. Cabe destacar también el pulso de poder que la Corona mantiene con la Iglesia Católica. El juicio al que la Inquisición sometió a Pablo de Olavide en 1778, genuino representante de la política ilustrada de la época, señala una crisis en la expansión de ideas progresistas (Amalric y Domergue, 2001).

En la segunda etapa, además del cierre de fronteras impuesto por Carlos IV, se manifiesta una significativa preocupación por mejorar la formación académica de los militares; esto hace que destacados matemáticos se incorporen a las Academias militares. La militarización de la ciencia española a gran escala es un hecho sin precedentes, que ocurre en estos años, y tiene en el ejercito y en la armada sus principales apoyos (Maldonado y González, 2002). El posibilismo reformista trata de expresarse mediante personajes como Cabarrús, Olavide y Jovellanos, según vimos en el Apartado 2.8.2, quienes finalmente no logran una plataforma política y un círculo de influencia permanente. La preocupación por aquellos aspectos innovadores de las ideas ilustradas se refuerza, por temor al contagio de los principios revolucionarios que se desarrollan en Francia e incrementa la fuerza de los sectores políticos e intelectuales más conservadores y reaccionarios.

A diferencia del periodo jesuita, en éste la divulgación de los avances de la ciencia y las matemáticas está apoyada en el trabajo que se desarrolla en instituciones civiles, como por ejemplo la Real Academia de San Fernando y la Universidad de Salamanca, o militares como la Academia Militar de Matemáticas. Destacan personajes con una gran preparación académica como Benito Bails, Juan Justo García, Francisco Verdejo, Gabriel Ciscar y José Mariano Vallejo.

La tercera etapa, con el país invadido por el ejército francés e implicado en una guerra civil, es destacable para nuestro estudio por la participación de Vallejo en las Cortes de Cádiz y la publicación de algunas de sus obras. En los Apartados 2.8.1 y 2.8.3 hemos hecho consideraciones más amplias sobre esta etapa.

5.2 Contexto institucional

El deseo ilustrado de renovación durante estos años lleva a la Corona a emprender distintas acciones, de las cuales se benefician las matemáticas en España. Entre estas acciones destacan:

El inicio de las reformas en algunas universidades, así en 1771 la Universidad de Salamanca envía al Consejo de Castilla un nuevo plan de estudios, que luego el Consejo recomienda, a su vez, a la Universidad de Valladolid para su implantación.

El envío de alumnos al extranjero para que adquieran una formación matemática sólida, como fue el caso de Benito Bails.

La liberalización de la censura de los libros, rápidamente interrumpido por el inicio de la revolución en Francia.

El fomento de las academias militares como centros de formación matemática al más alto nivel, como ocurrió con la Academia de Guardiamarinas de Cádiz y, especialmente, el empleo de militares como profesores, como fue el caso de Tadeo López Aguilar.

La fundación de los observatorios astronómicos de Madrid en 1789 y de San Fernando en 1793.

El vacío en la enseñanza civil, provocado por la expulsión de los jesuitas del Reino, trata de ser paliado mediante nuevos colegios y la restauración de la enseñanza en otros, como es el caso del Seminario de Nobles de Madrid y de los Estudios de San Isidoro de Madrid, ambos restaurados en 1770.

Los autores de las obras seleccionadas para el estudio de este periodo: Benito Bails, Francisco Verdejo, Juan Justo García y José Mariano Vallejo, son laicos, reflejando así el desplazamiento de los religiosos del monopolio académico y científico que hasta entonces ostentaban en casi todo el Reino. Todos ellos reciben una educación ilustrada, lo cual se refleja en su visión de la ciencia así como por la incorporación en sus textos de las ideas modernas y los adelantos matemáticos. Su trabajo lo realizan en las instituciones científicas renovadas, que se fortalecen como resultado de las nuevas necesidades educativas.

Ejemplo de la actitud ilustrada en estos autores lo encontramos en la posición de Verdejo al negarse a presentar la oposición a la cátedra de matemáticas en latín alegando que era innecesario, pues en la época existían buenos manuales de matemáticas en castellano. La escasez de personas cualificadas para la enseñanza de las ciencias, como consecuencia del vacío producido por la expulsión de los jesuitas y el alejamiento de España de muchos hombres de ciencia pertenecientes a la Compañía, posibilita nuevos planteamientos sobre las matemáticas y su enseñanza.

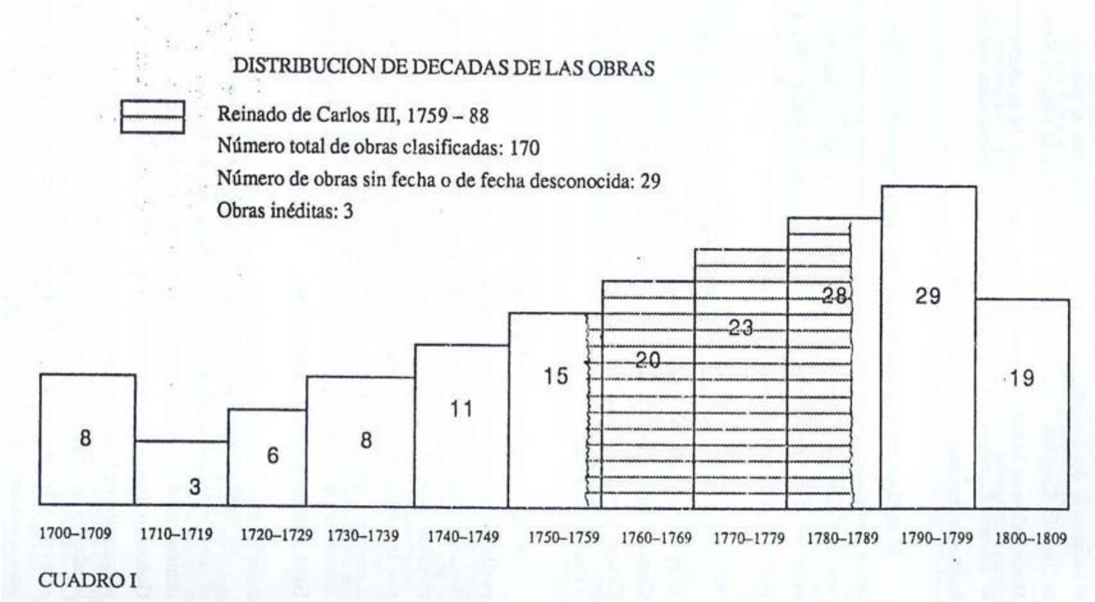
La ciencia y los conocimientos se difunden por diversas instituciones, así estos autores desarrollaron su actividad docente y literaria en reales academias, colegios de nobles, universidades, reales seminarios y otras instituciones civiles o militares. Sin embargo, Bails y Vallejo trascendieron estos ámbitos: uno a través de la dirección de una publicación periódica y el otro desde la política.

5.3 Ideas matemáticas

En estos años, la aritmética se enriquece con el sistema métrico decimal, llevada a cabo por la Academia Francesa, con apoyo de los gobernantes ilustrados españoles, y por la invención de la máquina de calcular en 1774, realizada por G. Hahn. La atención de los matemáticos está centrada en el desarrollo de los conceptos y técnicas del cálculo infinitesimal; así se suceden las publicaciones de Euler, Carnot, Lagrange, D´Alambert y Lacroix, en las cuales queda clara la intención de estos autores de despojarlo de una base geométrica y tratan de fundamentarlo en consideraciones puramente analíticas. Este periodo es prolijo en grandes matemáticos europeos, entre los que destaca Euler, quien publica más de cuatrocientos artículos y algunos libros (Kline, 2002). Se descubren nuevas propiedades de los números complejos; los logaritmos se perfeccionan para convertirse en una herramienta matemática de considerable utilidad. El álgebra progresa con Cramer, quien desarrolla la teoría general de las ecuaciones, y se sistematiza la teoría de los determinantes, ya propuesta por Leibniz. No experimentará ninguna revolución significativa hasta los trabajos de Galois a finales del XIX dedicados a la teoría de grupos y solución de ecuaciones (Van der Waerden, 1980). La diferenciación entre Aritmética y Álgebra parece consolidada y bien fundada mediante un sistema simbólico de notación que sostiene un sistema conceptual bien estructurado. Sorprendentemente, es el campo de los números enteros el que aún parece presentar resistencias para abandonar las nociones de números relativos debido a su potencia intuitiva y a su aparente utilidad práctica.

Revisando las reseñas que sobre la historia de las ciencias en España hacen Menéndez Pelayo (1954) y López Piñero et al. (1983) podemos identificar a 27 matemáticos, que durante estos años trabajan en España y hacen aportaciones propias de alguna valía. También se evidencia un volumen de publicaciones matemáticas que alcanza, aproximadamente, unos 50 textos. Hay que señalar que algunas publicaciones constan por sí solas de varios volúmenes, como es el caso de los tratados de Bails, Capmany o Vallejo. Sin embargo, Arenzana (1987), citando un trabajo de Francisco Martín, presenta un cuadro en el cual señala que se publicaron 99 obras matemáticas.

Figura 5.1 Distribución de obras matemáticas publicadas en España durante el siglo XVIIII.



(Tomado de Arenzana, 1987; p. 130)

Destaca en algunos títulos su finalidad para la enseñanza en las academias militares; entre otros está la voluminosa obra de Benito Bails, *Elementos de matemáticas,* la cual responde a la intención del Conde de Aranda (citado por Arenzana, 1987; p. 204), quien en 1775 declara que *"sería conveniente que los militares —y Bails lo hace para toda la sociedad— dispusieran de todos los conocimientos existentes en matemáticas en todas las naciones"*.

Los textos españoles de la época abarcan diversos campos relacionados tanto con las matemáticas como con la geometría y sus aplicaciones así como con su enseñanza. Se tienen títulos como: *Aritmética teórica y práctica para comerciantes* (Verdejo, 1795), *Instituciones de geometría práctica para artistas* (Bails, 1795), *Memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones* (Morales, 1797), *Aritmética del ciego hecha palpable* (Saunderson, 179*?)*; también es importante señalar que en 1807 se publican unos *Elementos* de Legendre traducidos al castellano.

Como se ha mencionado, en Europa los matemáticos intentan fundamentar el Cálculo; en España estos avances se van difundiendo a través de obras como *Instituciones del cálculo diferencial e integral, con sus aplicaciones a las matemáticas puras y mixtas* de José Chaix (1801), aunque sólo se publica el Tomo I, del Cálculo Diferencial (Menéndez Pelayo 1954); sumado esto a los viajes y contactos que ciertos matemáticos tenían con personajes de renombre en el extranjero, permite que haya un flujo actualizado de conocimientos sobre el avance de las matemáticas europeas.

Los matemáticos no fueron ajenos a las persecuciones de la Inquisición; víctimas de ella fueron entre otros Benito Bails y Bernardo Calzada, traductor de la *Lógica* de Condillac.

5.4 Elementos de matemática. Tomos I y II (1772).

5.4.1 Autor

Benito Bails. (*n*. en Barcelona, 1730; *m*. en Madrid, 1797) (**CA1**). La infancia y juventud de Benito Bails transcurren en Francia; se forma en Perpiñán y en la Universidad de Toulousse, donde estudia con los jesuitas (**CA2**). A los 24 años marcha a París donde se relaciona con importantes figuras de la Ilustración como D'Alembert, Condorcet, etc., quienes lo incorporan a las tareas de redacción de los artículos relativos a España del *"Journal Historique et Politique"* (Arias de Saavedra, 2002) (**CA3**). Esta etapa de su vida en Francia sería fundamental en su desarrollo académico y político; por su capacidad intelectual y su conocimiento de lenguas extranjeras es secretario del embajador español en la corte de Francia. En 1761 regresa a Madrid donde pronto se introduce en círculos ilustrados. En esa fecha colabora con Gerónimo Campmany en la publicación de unos *Tratados de Matemáticas para usos de las escuelas de cadetes que se establecieron en todos los regimientos de infanteria* (**CA5**) (Garma, 2002).

Su juventud transcurre durante la última época de Felipe V y el reinado de Fernando VI; su producción académica la realiza durante los reinados de Carlos III y Carlos IV (**CA7**).

Bails fue un claro representante del enciclopedismo español; su cultura alcanza la filosofía, el derecho, las humanidades, la arquitectura, teología y ciencias, así como un dominio del latín, italiano, ingles, francés y alemán (López Piñero, 1979). En sus textos matemáticos incluye extensas notas biográficas sobre matemáticos famosos, como hizo con la vida de *Jorge Juan* en los *Elementos de Matemáticas* (**CA7**).

Recibe ofertas para enseñar matemáticas en el Seminario de Nobles, dirigido por los jesuitas, pero no acepta esa colaboración. Ejerce por un tiempo la dirección del *"Mercurio histórico y Político"*, una publicación mensual fundada en 1738, desde donde desempeña una importante actividad ilustrada y antijesuítica (Arias de Saavedra, 2002) (**CA7**). Fue también director de la Real Academia de San Fernando, de cuya cátedra de Matemáticas destinada a los alumnos de arquitectura, es titular desde su fundación en 1768 hasta su muerte (**CA4**) y para la cual redacta unos *Elementos de Matemáticas*. Uno de los tomos de los *Elementos,* el IX, lo dedica a la *Arquitectura Civil*; también escribe el *Tratado de Matemáticas* para uso de las Escuelas de Cadetes que se establecen en todos los Regimientos de Infantería y la *Arismética para negociantes.* Su producción es muy amplia y cobija campos tan variados como la música y la arquitectura, entre otros (**CA6**).

Las obras de Bails se incorporan como textos en la reforma de los planes de estudios universitarios de 1807, que se aplica a todas las universidades. Los *Elementos de Matemática* fueron utilizados en los Reales Estudios de San Isidro a finales del siglo XVIII, y en el siglo XIX en el Colegio de Minería de México, siendo éste el primer texto reeditado por dicha institución (**CA7**).

Como afirma Vea (1995), Bails es fundamental como autor de libros de matemáticas *"tanto en su aspecto enciclopédico como en el didáctico"*, y continúa *"es uno de los iniciadores en la producción de textos para la formación matemática a través de sus Principios de matemática, síntesis de sus Elementos"*, también cita la afirmación de Arenzana señalando que *"su postura educativa rechaza en cierta medida el excesivo rigor, en favor de la finalidad docente".* Garma (2002) afirma que se puede calificar a Bails *"como mejor expositor de las matemáticas de la época"* (**CA7**).

Ocupa un puesto en la Academia de la Lengua, en la Academia de la Historia y en la Academia de las Ciencias y Artes de Barcelona. También fue profesor de matemáticas en la Academia de Bellas Artes de San Fernando, donde publica los *Principios de Matematica de la Real Academia de San Fernando* **(CA4)**. Benito Bails es una de las más importantes figuras académicas españolas del siglo XVIII. Por medio de sus obras contribuye a la divulgación del estado de la ciencia en su época; sus textos son punto de referencia en el concierto científico español por décadas **(CGO6)**.

En 1786 fue encarcelado por la Inquisición acusado de ateismo y materialismo; *"Bails confesó haber dudado de la existencia de Dios, pero negó haber abrazado el ateismo o materialismo"* (Herr, 1988; p. 175). El proceso se realiza en 1791 siendo un hecho que, junto con el procesamiento de Olavide, muestra el poder de la Inquisición en España durante los años de final del siglo XVIII. Al igual que con el destierro de Jovellanos a Mallorca desde 1801 a 1808, es una de las indignidades en las que incurren los gobiernos débiles del reinado de Carlos IV. De tal forma, Bails, al final de su vida fue desterrado a la ciudad de Granada (1792) –como años antes había sucedido con el Marques de la Enseñada– ante lo cual medió el Obispo de Jaén, siendo indultado meses después **(CA7)**.

El inventario de la biblioteca de Bails incluye 571 obras, de las que se han identificado en la actualidad 518. Del análisis temático de las obras se desprende que 139 de ellas (25%) eran de Matemáticas, correspondiendo más de un 36% de las restantes a temas afines como Arquitectura, Astronomía. Física e Ingeniería. Más del 50% de las obras están publicadas en francés y cerca del 60% están editadas con posterioridad al año 1750; ambos datos son indicativos de la modernidad y actualidad de las fuentes manejadas por Bails (**CA5**).

Entre las obras inventariadas aparece la *Geometría* de Descartes, la *Aritmetica Universalis* y los *Opuscula Mathematica* de Newton y los *Elementos de Álgebra* de Euler. También se encuentran otras obras de Euler, Barrow, Bernouilli, L'Hôpital, MacLaurin, Riccati, Simpson, Stirling y Wolf. Igualmente aparecen las obras de matemáticos españoles conocidos de los siglos XVII y XVIII, como Pérez de Moya, Jerónimo Cortés, Tosca, Jorge Juan, Corachán, Hugo de Omerique, Cerdá, Juan Justo García y otros autores importantes contemporáneos (Arias de Saavedra, 2000).

Publicó entre otras obras, los mencionados *Elementos de matemática* (1772-1778), *Principios de matemáticas de la Real Academia de San Fernando* (1776), *Arismetica para negociantes* (1790); además *Tratado de matemáticas* (1772), *Lecciones de clave y principios de armonía* (1775), *Principios de matemáticas, donde se enseña la especulativa, con su aplicación a dinámica, hidrodinámica, óptica, astronomía, geografía, gnómica, arquitectura, perspectiva y al calendario,* en 3 volúmenes (1776), *Pruebas de ser contrario a la práctica de todas las naciones y a la disciplina y perjudicial à la salud de los vivos enterrar a los difuntos en las iglesias y los poblados* (1789), *Tabla de logaritmos de todos los números naturales desde 1 hasta 20000 y de los logaritmos de los senos, tangentes de todos los grados y minutos del cuadrante del circulo* (1787), *Instrucción de geometría práctica para uso de los jóvenes artistas* (1795) (**CA6**).

Referencias a la vida y obra de Benito Bails pueden hallarse en Arias de Saavedra (2002), Garma (2002), Herr (1988), López Piñero (1979), López Piñero et al. (1986) y Vea (1995) (**CA8**).

5.4.2 Caracterización del texto

Elementos de Matemática. Tomos I y II, Segunda Edición 1793, Biblioteca de la Universidad de Granada. La Primera Edición es de 1772. Madrid: D. Joaquín Ibarra. Impresor de la cámara de S. M. (**CGO1, CGO2**).

El tomo I, que incluye los *Elementos de Arismetica*, tiene 597 páginas y 28 más de figuras, a las que llama plana a cada página; trae 68 páginas dedicadas a los prólogos general de la colección y al tomo, además de un elogio a Jorge Juan –capitán de la compañía de guardias marinas y su maestro–, así como las erratas e índice.

El Tomo I está dividido en cuatro partes: Elementos de Aritmética, Elementos de Geometría, Elementos de Trigonometría plana y, Geometría práctica. En la parte de Elementos de Aritmética establece la naturaleza de los números y sus diferentes especies.

El Tomo II, que incluye los negativos, tiene 518 páginas de contenido, otras 11 con figuras geométricas distribuidas en él; también hay 35 páginas de prólogo, erratas e índice. Este tomo no esta dividido en capítulos, sino en apartados que en la mayoría comienza por "De...", seguido del tema a tratar (**CGO3**).

Bails edita en 1772 los tres primero tomos de los *Elementos* y dedica el tercero a las secciones cónicas: El Tomo IV se edita en 1773, el V en 1774, los Tomos VI, VII y VIII en 1775, el X en 1776 y el IX en 1779, con lo cual la primera edición completa de la obra es de 1779. Estos tomos están dedicados a la dinámica, la hidrodinámica, óptica, elementos de astronomía, astronomía física, arquitectura civil, hidráulica y tablas de logaritmos. El interés de Bails por las aplicaciones de la matemática a diversos campos de la física, a la arquitectura y la ingeniería quedan sobradamente destacados en la amplia variedad de temas tratados en los *Elementos* **(CGO3)**. Arias (2002) considera que esta obra no es un tratado de Matemáticas en sentido estricto sino un texto enciclopédico, que sirvió para abandonar definitivamente el *Compendio* de Tosca.

El Tomo I comienza con un extenso *Prólogo General,* donde va mencionando las principales lecturas que ha realizado y los trabajos que ha recopilado y revisado para la redacción de su obra. Así, menciona las obras de Tosca y Dechales, los *Elementa mathesis universiae* de Wolfio publicados en 1743; también destaca los trabajos de Euler, Cramer, Ricatti y el estudio de Stirling sobre series. Sobre Cálculo Integral reconoce haber leido a Juan y Daniel Bernouilli, D'Alambert, Bougainville, Clairaut, Micheloti, Bossut y otros **(CGO5)**.

En la página V del Prólogo general destaca la originalidad de su proyecto subrayando que *"la Nacion Francesa, tan propensa a escribir, está todavia sin un Curso completo de Matemáticas"*, solo las *Lecciones* de La Caille son una aproximación a su trabajo. Pasa revista a los Cursos de Matemáticas en distintos países y comenta algunas de las obras más señaladas que le han servido como referentes: la obra de Emerson en Inglaterra (con 10 tomos) y la del catedrático Hennert en Utrecht (9 tomos). Destaca el trabajo de Euler por sus distintos tratados de Matemática Especulativa. También reconoce la publicación del Curso de Matemáticas de Bezout (1769) en 6 tomos y menciona las partes que copia de la Aritmética y de la Trigonometría plana **(CGO5).**

Hecho este planteamiento muestra la ambición de sus objetivos y la amplitud de contenidos que se propone abordar:

> *"Enterados mas de lo que quisiéramos de que eran muy estrañas para nuestros hombres las doctrinas que íbamos a publicar , y de lo mucho que importaba que saliese al publico con toda la posible brevedad nuestro trabajo , nos detuvimos poco en dar á las materias , que nos tocaba tratar , un aspecto muy diferente del que tenian en las obras clasicas que nos dedicamos á extractar ó copiar ; solo pusimos cuidado en echar mano de las mas celebradas , y enlazar con todo esmero los pedazos que para la formacion de un tratado sacábamos de diferentes."* (p. XIII, Tomo I).

> *"Para mayor duracion del edificio que íbamos a levantar , procuramos echar mano de los materiales mas recientes , fundando en su buena calidad la firmeza de la fabrica , ansiosos de hermosearla con la novedad , y de asegurarla los más años que pudiésemos del achaque de antiquada"* (p. XVIII, Tomo I), **(CGO4)**.

Bails inicia el segundo Tomo explicando cuáles son los elementos del álgebra, sigue con las operaciones fundamentales y prosigue con otros temas hasta llegar a las ecuaciones y sistemas lineales; también presenta las progresiones geométricas, las cantidades imaginarias, aplicaciones de las series al cálculo de logaritmos, etc.

El plan general de la obra está basado en la idea de exponer en forma didáctica la teoría, con los últimos adelantos de las matemáticas. En el prólogo reflexiona y explica el por qué toma una opción diferente a la guía de los *Elementos* de Euclídes para la geometría, como era la tradición en los textos españoles de la época y lo justifica con los argumentos expuestos por otros autores extranjeros que ya lo habían hecho.

Traduce literalmente partes de algunos textos de grandes matemáticos de la época. En el prólogo indica que la parte de la aritmética la copió en forma textual de Bézout; de tal forma que no tenemos su propio parecer o criterio sobre las matemáticas sino el de Bézout:

> *"La arismética que trae nos pareció á todas luces muy cabal, y la mejor que hasta entonces hubiésemos registrado. Solamente entendimos que la doctrina de las decimales ocuparía mejor lugar declarándola separada á continuación de los quebrados comunes; con cuya leve alteración la copiamos al pie de la letra, qual la publicó Mr. Bézout"* (p. XX, Tomo I) (**CGO5**).

Como se ha indicado, Bails sigue textualmente el tercer tomo del

Cours de Mathématiques, a l´usage des Gardes du Pavillon de la marine. Par M. Bézout, de l´Académie Royale des Sciences (1769), claramente lo expresa cuando afirma "*de quien echamos mano es el de M. Bezout, de donde trasladamos quasi todo lo que en el nuestro se leerá hasta la resolucion de las equaciones superiores*" (**CGO5**).

En el Tomo II trata la aplicación del Álgebra a la Geometría, donde recopila, sigue y extracta publicaciones, entre otros de: Emerson, Mauduil, Euler, Bezout, Descartes, Newton, Saunderson, Clairaut, Ricatti y Simpson, las cuales conoció durante su permanencia en Francia (**CGO5**).

Otros temas que trata en el Segundo Tomo son: *Infinito e infinitamente pequeño, Cantidades imaginarias, Doctrina de las equaciones superiores, Diferencias finitas, Doctrina de series, Cálculo de logaritmos y líneas trigonométricas, Cálculo de π, Resolución de equaciones de tercer grado, y Potencia y raíz de un binomio* (**CGO3**).

En el inicio de cada uno de los tomos, Bails hace un balance de las obras recientes que considera más relevantes sobre las matemáticas y álgebra publicadas en Europa; entre estas menciona el *Compendio* de Vicente Tosca, afirma *"el del P. Tosca, Valenciano (1) sacando casi todo del que publico en latín à mediados del ultimo siglo Dechals"* y resalta algunos aspectos didácticos *"dos circunstancias sumamente apreciables concurren en la obra de Tosca, es á saber, mucha claridad (Tambien es suma la de Dechals), y una disposicion general de los Tratados, igualmente que una coordina con particular de cada una de ellas muy bien entendida [...]"* (p. III, Tomo I) (**CGO5**).

La mayor parte de las definiciones y conceptos relacionados con las nociones de número, cantidad, cantidades negativas, ecuaciones y resolución de ecuaciones que encontramos en los dos primeros tomos de los *Elementos* también se encuentran en los *Principios de Matemáticas*, obra que fue escrita por los mismos años y en la que reitera muchas de las ideas.

Se dan algunas definiciones sobre tópicos que nos interesan, cantidad, unidad, aritmética y número entero:

Cantidad: "*Llamamos , en general , **cantidad** todo lo que sufre aumento o disminución o todo lo que pueda ser mayor o menor, como la extension , la duracion , el peso &c. La cantidad es el objeto de las Matematicas (…) llamandose Arismetica ò Aritmetica el rama que considera la cantidad expresada en numeros.*" (**CCO2**) (p.1, Tomo I).

Afirma que la cantidad "*es el objeto de las matemáticas*"; presenta luego la *arismetica* o aritmética.

Aritmética: *"Es , pues , la Arismetica la ciencia de los numeros , considera su naturaleza , su propiedades , y suministra medios faciles , asi para expresarlos , como para componerlos , ò resolverlos , y esto es lo que llamamos calcular."* (p. 1, Tomo I) (**CCO2**).

Unidad: *"No es posible explicar ni entender que cosa es número , sin declarar ò saber primero que cosa es unidad."*

Unidad llamamos una cantidad que se toma ò elige (la mas veces á arbitrio). Para que sirva de término de comparación respecto de todas las cantidades de su misma especie" (p. 1, Tomo I) (**CCO1**).

Número *"expresa por consiguiente el número de quantas unidades o partes de la unidad se componen una cantidad propuesta"* (p. 2, Tomo I) (**CCO1**).

Número entero: "*si una cantidad consta de unidades enteras, el número que la expresa se llama número entero*" (**CCO3**), además, "*Espresa por consiguiente el número de quantas unidades ó partes de la unidad*" (**CCO3**).

Los elementos de "*arismetica"*, se inicia con el sistema de numeración, siguiendo luego con la presentación de los signos +, -, =; de esto se pasa a explicar las reglas de la aritmética: adición y sustracción; como consecuencia de esto surge la presentación de las cantidades negativas y positivas.

Una parte de las cantidades negativas son tratadas en la aritmética cuando se presenta la resta, y luego vuelven a aparecer en el tomo II de álgebra, cuando dedica un apartado a la *Consideración acerca de las cantidades positivas y negativas* (**CCO5**).

En los *Elementos* se estudian los números fraccionarios y los decimales en el Tomo I y los imaginarios en el Tomo II (**CCO6**).

Bails presenta su idea sobre el álgebra:

> *"El objeto de la Ciencia que llamamos Álgebra, es dar medios para reducir á reglas generales la resolución de todas las cuestones que se pueden proponer acerca de las cantidades; Para ser generales estas reglas, es preciso que no pendan de los valores de las cantidades que se consideran, sí de la naturaleza de cada cuestion; y han de ser siempre las mismas respecto todas las cuestiones de una misma especie."* (p. 1, Tomo II) (**CCO4**).

Enfatiza sobre la diferencia existente entre la aritmética y el álgebra:

"Debe, pues valerse el Álgebra para representar las cantidades de caracteres y signos distintos de las que usa la arismética.[...]
La Arismética da reglas para hallar resultados; pero estos resultados no pueden dar reglas. Uno y otro dá el Álgebra; esto es, resultados; y estos resultados subministran reglas : para conseguirlo representa las cantidades por signos generales , que son las letras del abecedario , que como no tienen más relación con un número que con otro , nada representan , y si algo representan , no representan mas que lo que uno quiere. Estos signos que permanecen a la vista en todo el discurso del cálculo guardan , por decirlo así, la estampa de las operaciones por donde han pasado ; ò por lo menos ofrecen en los resultados de esta operaciones vestigios del camino que se debe seguir para llegar al mismo término por medios mas sencillos. (p. 1, Tomo II) (**CCO4**).

Vemos que una idea que destaca Bails es la consideración del álgebra como un sistema de representación de cantidades en general; incluso las operaciones son modos de expresar una nueva cantidad:

"No sólo representa el Algebra las cantidades por signos generales , sino que tambien representan como están las unas respecto de las otras , y las diferentes operaciones que con ellas se han de egecutar ; en una palabra , todo es representación ; y quando decimos que hacemos una operación , damos una nueva forma a una cantidad." (p. 1-2, Tomo II) (**CGO7**).

El conocimiento y admiración que le despierta Euler lo refleja cuando expresa sobre el estudio del álgebra:

"*el que estudiare este asunto en el Algebra de M. Euler, aunque no se detenga en lo que añadiera M. De Lagrange, sobre Algebra, indeterminara más de lo que pueda enseñarle ninguno de los Tratados de que hacemos y haremos mencion*." (Prólogo, Tomo II) (**CGO5**).

Para López Piñero et al. (1986) los *"Elementos de Matemáticas"* en diez tomos son el trabajo matemático de carácter enciclopédico más importante publicado en castellano durante el siglo XVIII; fue utilizado como libro de texto en el Real Seminario de Vergara, el Real Seminario de Nobles, la Escuela de Almaden y la Universidad de Salamanca entre otras instituciones educativas. En general, la obra de Bails es una recopilación de la más actual producción matemática europea de la época (**CGO6**).

Bails utiliza las mismas definiciones y ejemplos de esta obra, en otras de las que produce, como lo son *Los Principios de Matemáticas,* y en *Arismetica Para Negociantes.*

5.4.3 Contenido seleccionado del texto

Algunos de los párrafos de mayor interés y ordenados según los campos determinados son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y —.

Tomo I: Aritmética:

"El signo con que señalamos el valor de dos ó mas números juntos es + que se pronuncia mas: 3 + 4 v.gr. se lee tres mas quatro, y está diciendo que el valor de 3 se junte con el de 4.
El signo con el que señalamos que un número se resta de otro, ó la diferencia que hay entre los dos es —, y se pronuncia menos; 4 — 3, v.gr. se lee 4 menos 3, y está diciendo que del 4 se ha rebaxado ó debe rebaxar el 3." (p. 10, Tomo I).

Tomo II: Álgebra:

"Pero si son desemejantes las cantidades , no se puede hacer mas que indicar la sustracción : lo que se egecuta por medio de este signo — , que significa menos." (p. 4, Tomo II).

"los signos + y — tampoco han representado hasta ahora mas que las operaciones de adicion y sustraccion; pero tambien pueden representar en muchos casos lo que son unas cantidades respecto de otra." (p. 114, Tomo II).

Este campo ofrece dos significados distintos para los signos más (+) y menos (—): en primer lugar son los encargados de indicar las operaciones de adición y sustracción entre cantidades particulares; en segundo término permiten establecer relaciones entre cantidades de manera general.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.

Tomo I: Aritmética:

"Entonces la operación se hace al revés, quiero decir que el número menor se resta del mayor, y se señala la resta con este signo — , el cual expresa la naturaleza del caso, y es causa de llamarse negativo al cual acompaña." (p. 18, Tomo I).

"*Si en vez de añadir sucesivamente unidades á 0, las fuésemos restando, resultará la serie de los números negativos, cuyos primeros términos son los siguientes:*

0, —1, —2, —3, —4, ." (p. 20, Tomo I).

Las cantidades negativas son presentadas como resultado de efectuar operaciones aritméticas elementales (sustracción en este caso) entre números. Se pasa de llamarlas cantidades negativas a números negativos, sin aportar ninguna explicación para este cambio de denominación. Esta construcción de los negativos es copia literal de la que publicó Euler (1770) en la Real Academia de las Ciencias de San Petersburgo (Euler, *Elements of Algebra*, 1840, p. 5). A diferencia de Euler, Bails no define el nuevo conjunto de los números enteros.

Para las cantidades en general Bails establece:

> *"Quando alguna cantidad no lleva signo , se supone, ò es lo mismo que si llevara el signo + : a es lo mismo que +a. Es uso corriente suprimir el signo de la cantidad que se escribe la primera , quando esta ha de llevar el signo + ; pero si ha de llevar el signo — es indispensable escribirle."* (p. 5, Tomo II).

> *"las cantidades que llevan el signo +, se llaman cantidades positivas; y las que llevan el signo —, se llaman cantidades negativas. En adelante trataremos con alguna individualidad de la naturaleza y de los usos de estas cantidades consideradas separadamente la una de la otra."* (p. 6, Tomo II).

En álgebra las cantidades negativas tienen existencia independiente de las positivas y no están asociadas a las operaciones.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas

Tomo I: Aritmética:

Las cantidades negativas surgen como resultado de restar una cantidad mayor de otra menor; por lo tanto tienen su origen en la realización de operaciones o cálculos aritméticos con cantidades o números particulares.

> *"De la naturalexa de las cantidades negativas se sigue que se han de calcular al reves de las positivas; Quiero decir que cuando ocurra sumar una cantidad negativa con otra positiva, se ha de restar aquella de esta; porque si quiero sacar lo que sumamos las deudas de un hombre con su caudal, he de rebaxar aquellas de este; si quiero restar una cantidad negativa de otra positiva, he de sumar aquella con esta; porque rebaxar ó quitar deudas à uno es aumentar su caudal, es darle dinero."* (p. 19, Tomo I).

Tomo II: Álgebra:

Se presenta el reconocimiento de la existencia real de las cantidades negativas. Tan sólo se distingue una diferencia formal; es decir, difieren de las positivas en la manera de operar con ellas, pero en los cálculos se usan conjuntamente. Hay un carácter relacional de las cantidades, haciéndose necesaria una condición de oposición u opuestos para establecer dicha relación.

"Tienen , pues , las cantidades negativas una existencia tan real como las positivas , y solo se diferencian de estas en que se toman en el cálculo de un modo enteramente opuesto. Pueden hallarse , y se hallan con frecuencia mezcladas en los calculos cantidades negativas con positivas , no solo por haberse egecutado algunas operaciones con la mira de restar unas cantidades de otras , sino tambien porque suele ser preciso expresar en el calculo los diferentes respectos con los que se consideran las cantidades." (p. 116, Tomo II).

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
Tomo I: Aritmética:
"Siempre que ocurre restar un número menor de otro mayor, la regla no tiene dificultad; pero parece impracticable cuando hay que restar de un número menor otro mayor, como cuando hay que averiguar el haber de un hombre que debe mas de lo que tiene. Entonces la operación se hace al revés, quiero decir que el número menor se resta del mayor, y se señala la resta con este signo – , el cual expresa la naturaleza del caso, y es causa de llamarse negativo al cual acompaña" (p. 18, Tomo I).

Tomo II: Álgebra:
"Puedese considerar una misma cantidad con dos respectos del todo opuestos, ò como capaz de aumentar otra cantidad , ò como capaz de disminuirla. [...] El método mas natural para hacer perceptible esta diferencia , consiste en señalar las dos cantidades con un signo que avise el efecto que una cantidad es capaz de producir en la otra." (p. 115, Tomo II).

Hay una reiteración de la condición de las cantidades negativas como opuestas a las positivas para efectuar cálculos, mediante la comparación de cantidades opuestas de carácter relativo.

Tomo I: Aritmética:
"*Luego por lo mismo que la cantidades positivas son patentemente mayores que nada , y las negativas son menores , los numeros positivos se formarán añadiendo 1 à 0, esto es a nada, y continuando con añadir sucesivamente mas unidades à cero. De aquí nace la serie de los numeros llamados naturales , cuyos primeros terminos son los siguientes*

0 , +1 , +2 , +3 , +4 , +5 , +6

Si en vez de añadir sucesivamente unidades á 0, las fuésemos restando, resultará la serie de los números negativos, cuyos primeros términos son los siguientes:

0, —1, —2, —3, —4, (p. 20 Tomo I).

Dos aspectos se destacan en estos párrafos: en primer término se habla explícitamente de números naturales y de negativos; en segundo término se presentan como series ordenadas creciente y decreciente, respectivamente. Esto conecta con que las series se generan a partir de efectuar sumas o restas sucesivas de unidades a cero repitiendo el planteamiento de Euler (1840).

> *"Asi mismo, si consideramos la linea recta como engendrada del movimiento de un punto A, que se mueve en una direccion perpendicular á la linea BC, se hecha de ver que como el punto generador puede caminar, ó desde A ácia D, ó desde A ácia E, si representamos por a el camino AD. ó AE que hubiere andado, no queda bien determinada con esto la situacion de dicho punto. Para fijarla es preciso avisar con alguna señal si la cantidad a se ha de considerar á la derecha ó á la izquierda, para cuyo fin pueden servir los signos + y -."* (p. 115 Tomo II).

El ejemplo que Bails presenta en el texto es un fenómeno cotidiano de comparación de desplazamientos con direcciones contrarias. Este ejemplo es similar al utilizado por Ulloa y Tosca en la primera mitad del siglo XVIII; se utiliza una representación gráfica para ilustrar el significado físico de una cantidad negativa; sin embargo presenta una matización, la acción se muestra bajo un argumento matemático y geométrico, con el cual parece asignarles un carácter dinámico, basado en una noción relacional.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.

> "(...) *el haber de un hombre que nada tiene y nada debe , es nada ó cero; el haber de un hombre que no solo nada tiene , sino que ademas debe 6 reales, es menor que nada, es negativo –6 , porque los 6 reales que debe destruyen 6 reales que se le dieran; por manera que dándole 6 reales , ó lo que es todo uno , perdonándole la deuda , su haber sería nada o cero. Por consiguiente el haber de este hombre es +6 , ó –6 ; sobre cuyas espresiones conviene hacer una consideración de mucha importancia y es que cero es el término desde donde empiezan las cantidades positivas y negativas , siendo las primeras mas que cero, y las otras menos que cero.*" *[...]*
> *"Las cantidades positivas son patentemente mayores que nada , y las negativas son menores."* (p. 18-20, Tomo I).

De este párrafo se deduce que hay un orden implícito de las cantidades negativas respecto a cero. La consideración de una cantidad como menor que cero sólo es presentada desde el punto de vista matemático sin entrar en otras consideraciones.

Hay una identificación de "nada" con el cero: así, tener nada es tener cero unidades. También deber es tener menos que nada; de esta manera, las cantidades negativas son menores que cero, por lo tanto, tenemos que el cero es el origen tanto de las cantidades positivas como de las negativas.

El uso de comparaciones entre deudas y haberes nos conduce a una discontinuidad de medidas, puesto que unas (deudas) solo pueden alcanzar valores hasta llegar a cero, pues a partir de este valor pasan a convertirse en la otras (haberes); lo mismo ocurre con los haberes. Esta doble existencia de regiones diferentes no permite *"cruzar el cero"* y continuar con un mismo tipo de cantidad. De tal forma que es una evidencia del uso en la Aritmética de los números relativos planteados por González Marí.

TSN6: Ejemplificación.
Algunos de los ejemplos presentados en el texto son los siguientes.
Tomo I: Aritmética:
"*Supongamos ahora, para dar un exemplo del caso que ha dado motivo á estas consideraciones, que nos ofrezca ajustar las cuentas á un hombre que tiene 3 reales , y debe 6 ; claro está , por lo dicho , que su haber es —3 , pues le faltan 3 reales para que su haber sea 0. En lugar de restar la deuda 6 del haber 3 , haré lo contrario , y restare 3 de 6 , la resta con el signo negativo —3 será el haber de tal hombre*" (p. 19, Tomo I).

Se utiliza una situación cotidiana a través de cantidades relativas (tener, haber, deber, deuda), para ilustrar las cantidades negativas. Se muestra un ejemplo aditivo del tipo anulación compensación. El fenómeno utilizado es de tipo contable mediante la comparación entre cantidades contrarias.

Tomo II: Álgebra:

"si suponemos que un hombre tenga tantos doblones como debe , podra servir un mismo número para expresar la cantidad numérica de su haber y de sus deudas: pero este número , sea el que fuere, no nos manifestará la diferencia que hay entre el dinero que dicho hombre tiene y el que debe. El método más natural para hacer perceptible esta diferencia , consiste en señalar las dos cantidades con un signo que avise el efecto que la una es capaz de producir en la otra; y como el efecto de las deudas es disminuir el haber, es natural señalar aquellas con el signo –." (pp. 114-115, Tomo II).

Los signos mas (+) y menos (–) establecen e indican los efectos que produce una cantidad al aplicarse sobre otra, de tal forma que en el álgebra se desvincula el signo – de los números negativos; ahora este signo indica efectos operacionales sobre una cantidad. También hemos visto en **TSN4** la ejemplificación de las cantidades negativas mediante desplazamientos de un punto matemático sobre la recta.

TSN7: Regla de los signos.
Operaciones aritméticas:
"Siempre que ocurre restar un numero menor de otro mayor , la regla no tiene dificultad ; pero parece impracticable quando hay que restar de un numero menor otro mayor , como quando hay que averiguar el haber de un hombre que debe mas de lo que tiene. Entonces la operación se hace al reves , quiero decir que el numero menor se resta del mayor , y se señala la resta con este signo – , el qual expresa la naturaleza del caso y es causa de llamarse negativo el numero al que acompaña." (p. 18, Tomo I).

"En lugar de restar la deuda 6 del haber 3 , haré lo contrario , y restare 3 de 6 , la resta con el signo negativo –3 será el haber de tal hombre. De la naturaleza de las cantidades negativas se sigue que se han de calcular al reves de las positivas ; quiero decir , que quando ocurre sumar una cantidad negativa con otra positiva , se ha de restar aquella de esta; porque si quiero sacar lo que suman las deudas de un hombre con su caudal , he de rebaxar aquellas de este; si quiero restar una cantidad negativa de otra positiva, he de sumar aquella con esta ; porque rebaxar o quitar deudas á uno es aumentar su caudal , es darle dinero. [...] Siguese de aquí que 1–1 es nada ò cero , 2–2 lo mismo , 3–3 es tambien cero &c. ; que 4–7 es –3 ; porque si un hombre tiene 4 pesos y debe 7 , no solo no tiene nada , sino que todavia debe 3 pesos..." (pp. 19-20, Tomo I).

Las reglas aritméticas para restar cantidades da lugar a la consideración de las cantidades negativas. A continuación se establece que la suma de una cantidad negativa equivale a una resta y la resta de una cantidad negativa equivale a una suma. Así pues, cantidad negativa equivale resta; resta de negativo equivale a suma. La justificación de estas reglas se basa en la anulación-compensación de cantidades.

No hay otras consideraciones relativas al producto u operaciones aritméticas con negativos.

Operaciones algebraicas:

"De lo dicho tambien se saca que esta expresion +a–a, es siempre 0 o nada , y que para entender estotra +a –b hay dos casos que considerar.
1º Quando a es mayor que b , se resta b de a , y la resta , que expresa el valor que se busca , llevará el signo +.
2º Quando a es menor que b , entonces se resta a de b , y se tomará la resta negativa , dándole el signo –, y este será el valor de la expresion."

"Por lo que mira a la sustraccion de las cantidades algebraicas , la regla general es esta : Múdanse los signos de la cantidad que se debe restar estos es , múdese + en – , y – en + : súmese esta cantidad , despues de hecha esta mudanza , con la cantidad de la qual se le ha de restar."

"Quando se suman caudales con caudales , es cierto que estos se aumentan ; asímismo , quando se suma una deuda con otra se hace mayor la deuda. Pero quando los caudales se suman con la deuda , en realidad se disminuye una de las dos cantidades." (p. 6-7, Tomo II).

Los principios establecidos para la suma y resta aritméticas se generalizan al caso del álgebra y se mantiene el principio de anulación compensación para justificar las reglas.

La interpretación de las cantidades negativas como números relativos queda de manifiesto en las justificaciones que aporta Bails para las reglas de los signos:

"1º Si el multiplicando y el multiplicador fueren positivos , el producto será positivo ; porque caudales sumados cierto número de veces unos con otros , forzosamente han de producir caudales. Así, +a x +b dá +ab. Esta regla se expresa generalmente de este modo : + x + dá +.
2º Si el multiplicando es negativo y el multiplicador positivo , el producto será negativo ; porque una deuda sumada cierto número de veces con ella misma , por precision ha de producir una deuda. Por esta razon , –a x +b dá –ab.
Esta regla se expresa de un modo general diciendo: – x + dá –.
3º Quando el multiplicado fuere positivo y el multiplicador negativo , el producto será negativo; por que una cosa que se le quita a un hombre un cierto número de veces , le pone en el mismo estado que una deuda del mismo valor , y por consiguiente estos dos efectos se han de señalar con un mismo signo –.
Esta regla se expresa en general de este modo: + x – dá –.
4º Si el multiplicando y el multiplicador fueren ambos negativos , el producto será positivo; porque si á un hombre se le quita una deuda un cierto número de veces , hará esto para èl el mismo efecto que si se le diera una cosa del mismo valor , y por consiguiente estos dos efectos se han de señalar con el mismo carácter +. La expresion general de esta regla es que – x – dá +." (pp. 36-37, Tomo II)

"Si los dos términos que se han de multiplicar el uno por el otro , llevan ambos un mismo signo , esto es , ó ambos + , ó ambos – , llevará siempre su producto el signo +. si al contrario llevan distintos signos , esto es, el uno + y el otro –, ó el uno – y el otro +, su producto llevará siempre el signo –." (p. 16, Tomo II).

Bails establece una regla general para la multiplicación algebraica de términos con signos iguales o diferentes, basada en una interpretación relativa de las cantidades.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

"(...) Las letras solamente representan el valor absoluto de las cantidades. [...] Quando dicha cantidad es representada por una sola letra ó un numero , no podemos conocer con cual de estos dos respectos se la considera. Por ejemplo , si suponemos que un hombre tenga tantos doblones como debe , podrá servir un mismo numero para explicar la cantidad numerica de su haber y de sus deudas ; pero este numero , sea el que fuere , no nos manifiesta la diferencia que hay entre el dinero que dicho hombre tiene y el que debe." (p. 114, Tomo II).

Queda implícito que las cantidades tienen un valor absoluto y otro relativo, aunque esto sólo se evidencia en el álgebra. También destaca que hay dos cantidades relativas distintas, una positiva y otra negativa, con un mismo valor absoluto.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

"La progresion aritmetica es una serie ó continuacion de términos , que cada uno lleva al que le precede o le sigue el mismo exceso [...] La progresion se llama creciente ó decreciente según que sus terminos vayan creciendo ó menguando" (p. 146, Tomo I).

"Como es preciso conocer también los logaritmos de estos numeros menores , es preciso continuar la progresion aritmetica desde cero , primer termino suyo , ácia abajo [...] Aquí se vé todo esto muy á las claras:
–8. –7. –6. –5. –4. –3. –2. –1. 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8" (p. 132, Tomo I).

Aunque no lo define de manera formal, Bails conoce perfectamente el orden entre los números enteros ya que lo aplica en el cálculo de logaritmos, y lo basa en la noción de progresión aritmética.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

"Cuestion 2. Hallar un número al cual restado de 10 quede 15. [...].
Este valor negativo de x manifiesta que la cuestion se ha de proponer al reves, en estos términos.
Cuestion 3. Hallar un número el qual , añadido á 10 , sea 15 la suma.
[..]
Esto acaba de manifestar que concepto debe formarse de las cuestiones cuya resolucion da negativo el valor de la incognita" (p. 148. Tomo II)

"Hallar un número tal que si á su quadrado se le añade 8 veces el mismo número, sea la suma 33. Si conociera este número, que llamaré x, es evidente que si á su cuadrado x^2 le añadiera 8 veces el mismo número, esto es 8x , la suma seria 33; es menester , pues , que sea $x^2 + 8x = 33$.
Para resolver esta equacion añado á cada miembro el número 16 que es el cuadrado de la mitad del número 8 que multiplica x en el segundo término, y saco $x^2 +8x + 16 = 49$; de cuya equacion el primer miembro es un cuadrado perfecto. Saco la raiz quadrada de cada miembro , observando la regla dada , y sale $x + 4 = \pm 7$; por consiguiente $x =\pm 7-4$, que dá estos dos valores de x, $x =+ 7– 4 =3$, y $x = –7 – 4 = –11$

El primero de estos valores satisface las questiones, [...]. Por lo que mira al segundo valor, como es negativo dá á entender que si en la cuestion se considera a x como un respecto del todo opuesto, la resolvería el número 11" (p. 151. T. II).

En el texto se hace uso de los negativos en la parte que se explican y desarrollan las ecuaciones. Las raíces negativas de una ecuación son admitidas y además, se considera válida la aparición de una cantidad negativa como resultado de operaciones algebraicas. Ahora bien, cuando resulta posible, se reinterpreta la solución negativa o bien se renuncia la cuestión.

"$x^{-2} = 1/xx$" (p. 187, Tomo I).

"Siendo esta la razon porque el logaritmo de todo quebrado se llama defectivo ó negativo, y lleva el signo – como –0,3679767" (p. 128, Tomo II).

Vemos como los negativos son utilizados entre otras cosas como: guarismos, valores de logaritmos y exponentes.

"una cantidad negativa no puede tener raiz quadrada ni exacta, ni aproximada; porque no hay cantidad alguna que multiplicada por si misma pueda dár un producto negativo" (p. 147, Tomo II).

Hay conocimiento de la no existencia de raíces cuadradas de términos negativos, esto es apoyado en la regla de los signos explicada en **TSN7**.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.
"Pueden hallarse, y se hallan con frecuencia mezcladas en los cálculos cantidades negativas con positivas, no solo por haberse egecutado algunas operaciones con la mira de restar unas cantidades de otras, sino tambien porque suele ser preciso espresar en el cálculo los

diferentes respectos con que se consideran las cantidades" (p. 116, Tomo II)

En álgebra hay consideraciones diferentes para los negativos de las que se realizan en la aritmética, ya que no está implicada solamente la sustracción de cantidades particulares, sino que entran en juego consideraciones formales basadas en cantidades generales.

Continúa la reflexión sobre el problema planteado en el campo anterior:

> *"El primero de estos dos valores satisface á la cuestion , pues 9 que es el quadrado de 3 , añadido á 8 veces 3 ó 24 , compone 33. Por lo que mira al segundo valor, como es negativo dá á entender que si en la cuestión se considerára x con un respecto del todo opuesto, la resolveria el número 11; quiero decir que el segundo valor de x dará respuesta á esta cuestión."* (p. 151. T.II).

Se admiten las cantidades negativas en el sentido que expresamos en el comentario del campo anterior; sin embargo se interpretan como elementos indicadores de un fallo en el enunciado, para proceder luego a reelaborarlo de manera que se obtenga una solución positiva.

> *"si despues de resuelta una cuestión saliese negativo el valor de la incógnita hallada por los métodos arriba declarados : por egemplo , si se llegase á un resultado como este x = –3 , se debería inferir que á la cantidad representada por x , no la conviene las propiedades que se supusieron convenirla al hacer el cálculo , sino propiedades del todo opuestas. Por egemplo , si se me propusiera esta cuestión : Hallar un número que sumado con 15 componga 10, al instante conoceria evidentemente que es imposible esta cuestión ; porque representando por x el número que se busca , tendria esta ecuación x + 15 = 10 , y por consiguiente en virtud de las reglas arriba dadas, x=10 –15, ó x = –5. Esta última conclusión me daria á conocer, que en lugar de considerar que x se ha de añadir á 15 para formar 10 , es antes preciso restar x de 15 para el fin propuesto. Por lo mismo toda resolución negativa es señal de que hay algun supuesto falso en la proposición de la cuestión "* (pp. 116-117. T. II).

En el intento de que las ecuaciones establezcan relaciones entre cantidades reales y concretas, se observa que las cantidades negativas al igual que en el párrafo anterior, son asumidas como un indicador de la existencia de algún supuesto que es falso y por tanto deberá replantearse el problema.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

Bails no ofrece información explicita sobre la utilidad de las cantidades negativas en el texto.

TSN13: Otros

"Quando el número propuesto no tiene sino uno ò dos guarismos, su raíz en número entero es fácil de sacar por la tabla aquí puesta, cuya primer linea se forma de los quadrados de los nueve guarismos, que forman la segunda"

1	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*	*64*	*81*	
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	(p. 123, Tomo I).

Con esta tabla Bails reafirma que en la aritmética no se consideran las raíces negativas de un número elevado al cuadrado; esto confirma que no se están tratando números enteros, sino naturales.

"Puédese considerar una misma cantidad con dos respectos del todo opuestos, ó como capaz de aumentar otra cantidad, ó como capaz de disminuirla. Quando dicha cantidad es representada por una sola letra o un número, no podemos conocer con qual de estos dos respectos se la considera." (p.114, Tomo II).

Hay una alusión implícita al valor absoluto y al valor numérico de toda cantidad.

5.4.4 Análisis

5.4.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

Sobre la noción de número Benito Bails mantiene una serie de ideas encadenadas, que revisamos en el apartado 5.4.2.

1º Que cantidad es todo lo que sufre aumento o disminución y que puede ser mayor o menor; la Aritmética considera la cantidad expresada en números (**CCO2**).

2º La Aritmética es la ciencia de los números y suministra los medios para expresarlos y calcular con ellos (**CCO2**).

3º La noción de número se sustenta sobre la noción de unidad.

4º La unidad es una cantidad arbitraria y sirve de término de comparación para las demás cantidades (**CCO1**).

5º Los números expresan una relación: *"expresa por consiguiente el numero de quantas unidades o partes de la unidad se componen una cantidad propuesta"*, (**CCO1**)

Se identifica una noción relacional de número diferente de la noción euclídea que se ha caracterizado en el apartado 4.4.4.1, aunque hace referencia a varias unidades.

En **CCO4** se reiteran las ideas de número y de cantidad como relación. Estas nociones no se presentan de modo tan explícito como en 4.6.4.1. Se deduce que la idea de número en Bails está en transición, va de una noción euclídea clásica a una más moderna, que establece el número como un tipo de relación entre cantidades tal como lo plantearon Stevin y Newton y que recoge Cerdá (ver 4.6.4.1).

- ***Cantidad***

En **CCO2** se expresa que cantidad es *todo lo que sufre aumento o disminución*, siendo esta misma la definición dada por Euler (1840, p. 1) *"Whatever is capable of increase, or diminution, is called magnitude, or quantity"*. Esta definición que utilizó Bails fue expresada por un matemático de tanta autoridad como Euler, y proporciona soporte conceptual a una idea empírica: que algunas cualidades de los objetos son susceptibles de aumento o disminución y por ello se pueden comparar, a diferencia de otras, tal como el dolor o el odio. Gómez (1999) reflexiona ampliamente sobre este aspecto.

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Se toman dos puntos de vista para los negativos, de una parte en la aritmética, surgen como resultado de operaciones con cantidades particulares (sustracciones) en **TSN2** y, luego, razonando sobre ellas mediante argumentos retóricos y numéricos, apoyados en números relativos en **TSN4**. Todo este tratamiento se desarrolla en el Tomo I de los Elementos.

En el Tomo II, dedicado al Álgebra, surgen estas cantidades como expresión de sentidos opuestos en el cálculo con cantidades, y como nociones relacionales que permiten expresar lo que son unas cantidades respecto de otras, como vemos en **TSN1, TSN3 y TSN4**. Cuando se trata la teoría de las ecuaciones, hay un énfasis en indicar que si aparecen estos valores en las soluciones indican alguna falsedad en el planteamiento del problema o en su resolución, por tanto, se debe redefinir el enunciado del problema o replantear las propias ecuaciones, así en **TSN10** y **TSN11**. Esta interpretación se debe a la obra de Bezout, quien, al igual que otros grandes autores franceses del siglo XVIII como Lacroix y Bourdon, tomaron y difundieron los planteamientos de D´Alambert sobre las cantidades negativas.

En sentido aritmético, es de resaltar que en **TSN4** se refiere concretamente a los números negativos. Otra idea que se hace explícita a través de **TSN3** es que las cantidades negativas son reales debida a su consideración como opuestas a las positivas.

Por medio de **TSN3**, **TSN4** y **TSN13**, se indica que, las cantidades positivas y negativas se han de tomar como opuestas para el cálculo en sentido algebraico.

El signo menos (–) que acompaña a un número indica que este ha surgido de restar una cantidad mayor de otra menor como se indica en **TSN4**. Muestra además en **TSN7**, la forma de restar una cantidad mayor de otra menor, e indica que la respuesta debe tener el signo (–) para indicar que se invirtió el orden de los números al efectuar la operación y es la justificación que se da para el signo. Así, asigna a la cantidad negativa un carácter de sustracción. Estas ideas, de nuevo, se corresponden con la procedencia que Euler (1840, p. 3) otorgó a las cantidades negativas.

5.4.4.2 Análisis de contenido

- **Conceptos básicos**

Bails identifica un doble significado de los signos mas (+) y menos (–); en primer término el signo mas (+) indica juntar y el signo menos (–) restar o buscar la diferencia entre dos números. Una segunda significación –algebraica- se refiere a que los signos indican lo que son unas cantidades respectos a las otras, como se ha indicado en **TSN1**. Justifica la construcción de los números negativos, por simetría con los positivos, restando la unidad a 0 sucesivamente, como se ve en **TSN2**.

Indica que las cantidades negativas son contrapuestas a las cantidades positivas y que son menos que nada. En el campo **TSN5** se da una identificación del cero con nada, pero el autor no realiza ningún tipo de reflexión sobre la implicación de esto.

Desde un planteamiento algebraico, la idea clave es que los valores positivos y negativos indican sentidos opuestos para el cálculo, **TSN3** y **TSN4**; no hay comparación con cero y, en este caso, no se dice que son menores que nada, **TSN5**.

- ***Fenomenología/Justificación***

Los ejemplos de cantidades negativas que se presentan en **TSN4**, **TSN5** y **TSN6** se refieren a comparación de cantidades mediante situaciones cotidianas. Bails utiliza con frecuencia en el texto términos como: haber, debe, tener y deuda para referirse a cantidades opuestas tanto positivas como negativas.

En **TSN3** muestra la construcción de los negativos basada en relaciones aritméticas.

En **TSN4** se utiliza un ejemplo gráfico de un desplazamiento para aclarar la idea de cantidad negativa y positiva, basado en una noción relacional y situado en el Tomo **II** dedicado al Álgebra; ese ejemplo es prácticamente el mismo que se presenta en los *Elementos Matematicos* de Ulloa en 1706.

En **TSN6** se presentan cantidades negativas mediante comparación de situaciones discretas por medio de cantidades adjetivadas.

En el ejemplo de los doblones, al tratar de deudas no se refiere a números enteros. Se trata de naturales ubicados en regiones o estados opuestos, por lo tanto, está manipulando cantidades relativas. También en **TSN11** muestra que no admite soluciones que no sean números naturales y esto resulta contradictorio con lo que ha afirmado en **TSN3**, pues si son de una misma naturaleza ¿por qué la respuesta negativa indica un fallo en el planteamiento?

•***Estructura de orden***

Aunque no se trata específicamente este aspecto mediante una definición formal de tal estructura, la lectura del texto lleva a deducir que el autor establece en **TSN4**, **TSN5** y **TSN9** un orden de los números negativos respecto a cero.

En **TSN4** se incluye el número cero (0) como parte de la serie de los números negativos. Además, se indica que el cero es el inicio tanto de las cantidades negativas como de las positivas. Bails toma en ese caso el cero como el punto de partida u origen para los dos tipos de cantidades, asumiéndolas así como contrarias o de sentidos opuestos como se observa en **TSN5**, donde afirma que los positivos y las negativos comienzan en 0; esto se corrobora igualmente en la indicación que da en **TSN4** para obtener los números negativos, restando unidades a partir de cero, siguiendo los planteamientos de Euler (1770) como ya hemos indicado. No obstante, en **TSN9** se presenta la sucesión de los naturales con 0 integrado entre negativos y positivos. Hay una diferenciación entre estas dos consideraciones: los positivos constituyen una progresión creciente, que comienza en 0; los negativos forman una progresión decreciente que también comienza en 0; no obstante, no hay discontinuidad entre ambas progresiones.

• ***Estructura algebraica***

En la aritmética se hace mención de que igual número de cantidades positivas y negativas se "destruyen" entre sí, por lo que se deduce de **TSN5** que no se refiere a una estructura aditiva de los enteros.

Sin embargo, en el mismo Tomo I afirma que el álgebra da *"medios para reducir á reglas generales la resolución de todas las cuestones que se pueden proponer acerca de las cantidades; Pero son generales estas reglas, es preciso que no penden de los valores de las cantidades que se consideran, si de la naturaleza de cada cuestion;[...]"*. Bajo esta consideración los negativos son utilizados en el Tomo II desde las reglas formales, y en particular en la resolución de ecuaciones, como se ve en **TSN7** y **TSN10**.

- ***Uso algebraico***

En el texto se presentan y aceptan las cantidades negativas como posibles soluciones a las ecuaciones. La solución negativa indica que se debe considerar opuesta alguna de las consideraciones hechas en el planteamiento, esto queda de manifiesto en los campos **TSN10** y **TSN11**.

Se presenta una tabla con números que están elevados al cuadrado y sus respectivas raíces cuadradas, pero solo incluye las raíces positivas, indicando esto solo la consideración de números naturales.

5.4.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r[*]

Primera diferencia. Orden total – orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: a_1 Cuando escribe *"ademas debe 6 reales, es menor que nada, es negativo –6,"* (**TSN5**) está utilizando una asignación justa y determinada para los números enteros negativos (González, 214).

También hay presencia de asignación arbitraria de valores en **TSN4** *"cuando hay que averiguar el haber de un hombre que debe mas de lo que tiene. Entonces la operación se hace al revés, quiero decir que el número menor se resta del mayor, y se señala la resta con este signo –",* se asimila la deuda como lo contrario de tener, y ello se refleja en el cambio del orden de las cantidades para efectuar la operación; esto es manifestación de los números naturales relativos.

Segundo indicador: a_2 Se presentan indicios de números enteros y de naturales relativos; los primeros están latentes al afirmar *"y es que cero es el témino donde empiezan las cantidades positivas y negativas, siendo las primeras mas que cero y las otras menos que cero."*, puesto que la comparación de

[*] Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

regiones es justa y determinada para medias entera.

Las cantidades relativas se evidencian en **TSN4**: *"rebaxar ó quitar deudas à uno es aumentar su caudal, es darle dinero."*, no se pueden comparar deudas y caudales puesto que disminuir una significa aumentar la otra, con lo cual la comparación global de las regiones es arbitraria e indeterminada.

Tercer indicador: $\mathbf{a_3}$ La serie de los números negativos que se presenta en **TSN2** no indica si esta ordenada de mayor o menor o lo contrario; de tal forma que tan sólo hallamos un indicio de este indicador al señalar que las cantidades negativas tienen *"una existencia tan real como las positivas , y solo se diferencian de estas en que se toman en el cálculo de un modo enteramente opuesto."*, lo que indica que la diferencia radica en la realización de una operación. Pero luego hemos visto en **TSN9** que se presenta la sucesión de los enteros con 0 integrado entre negativos y positivos; no hay inversión en el orden entre negativos, sino sólo su consideración como sucesión decreciente. No consideramos que Bails desconozca el orden de los enteros, si bien el uso que hace en algunos ejemplos parece indicar lo contrario.

Cuarto indicador: $\mathbf{a_4}$ Para este indicador no hallamos indicios que permitan determinar si el tratamiento de los negativos es en el campo de los enteros o en el de los naturales relativos.

Para esta primera diferencia D_1, los distintos indicadores presentan algunos indicios y evidencias que apuntan a los naturales relativos, en el tratamiento aritmético que hace Bails de los negativos, con lo cual admitimos que se presenta parcialmente esta diferencia.

Segunda diferencia: Sin primer elemento – con primer elemento.

Primer indicador: $\mathbf{b_1}$ En el ejemplo mostrado en **TSN4**, donde utiliza una representación grafica, se fija un punto de referencia A, a partir del cual se considera el desplazamiento, sin embargo esta referencia no señala cual es su significado, permitiendo asignarle un doble significado, inicio del avance o del retroceso. También cuando se expresa *"como el efecto de las deudas es disminuir el haber, es natural señalar aquellas con el signo –"*, implica una existencia de limites inferiores tanto para las deudas como para los haberes. Igualmente en TSN5 se afirma que las cantidades positivas y negativas empiezan en 0, indicando la admisión de un primer elemento en ambas sucesiones. De tal forma vemos un posible uso de los negativos como naturales relativos.

Segundo indicador: $\mathbf{b_2}$ Cuando leemos en **TSN5** *"debe 6 reales, es* *menor que nada, es negativo –6"*, hallamos una simbolización matemática conocida y determinada para los números enteros (González, 222) y un intercambio de símbolos sin que se altere el significado.

En cambio en **TSN6** se escribe *"la diferencia que hay entre el dinero que dicho hombre tiene y el que debe, el método más natural para hacer perceptible esta diferencia , consiste en señalar las dos cantidades con un signo que avise el efecto que la una es capaz de producir en la otra"*, con lo cual queda evidente la presencia de una representación mixta o abreviada, a través de la mezcla de representaciones para indicar el efecto de una cantidad (González, 221); Asimismo cuando expresa en TSN6 que *"restar la deuda 6"* es manifiesta una incompatibilidad de representación entre adjetivación y signo en la estructura natural aditiva. Estas circunstancias señalan a los números naturales relativos.

Tercer indicador: **b_3** Bails presenta en **TSN4** una transformación cuantitativa *"1–1 es nada ó cero, 2–2 lo mismo, 3–3 es tambien cero, &c que 4–7 es –3; porque si un hombre tiene 4 pesos y debe 7, no solo no tiene nada, sino que todavia debe 3 pesos: Por lo mismo, 8–13 es –5, y 30–48 es –18 ."*, donde no se percibe la existencia de un primer elemento, es decir permiten la existencia de valores positivos y negativos.

Vemos en **TSN5** que también presenta una transformación discreta limitada inferiormente: *"perdonándole la deuda su haber seria nada o cero"*, puesto que no puede disminuirse la deuda mas allá de cero, en vista de que pasaría a ser un haber. De tal forma esto pone de manifiesto las cantidades relativas.

Como balance global, podemos afirmar que hay suficientes evidencias de la manifestación de números relativos y el tratamiento de los negativos como estos, confirmando así la presencia de la segunda diferencia D_2.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas – discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

La imposibilidad de cruzar el cero esta manifiesta en **TSN4** *"porque rebaxar ó quitar deudas à uno es aumenta su caudal, es darle dinero"*, el hecho es que sólo se puede disminuir una deuda hasta cero, pues a partir de allí es un caudal; también en **TSN6** se presenta un ejemplo de cuentas donde hay discontinuidad de medidas. Sin embargo, la construcción de los negativos desde 0 mediante resta de unidades muestra una posibilidad aritmética de cruzar cero. Aunque la evidencia no es abundante, consideramos que, parcialmente, se da esta tercera diferencia D_3 en el sistema de números a negativos que presenta Bails.

Cuarta diferencia: Cero único – cero doble (natural relativo).

Hallamos expresado en **TSN5** que *"cero es el término donde empiezan las cantidades positivas y negativas siendo las primeras mas que ceo y las otras menos que cero"* lo cual nos lleva a pensar que se esta refiriendo a un único cero, en el sentido numérico de los enteros, por lo que creemos que no hay indicios del cumplimiento de esta diferencia D_4, para los números relativos.

Quinta diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación compensación.

Como se ha afirmado en el apartado "*Estructura algebraica"*, cuando en **TSN5** expresa que las cantidades iguales de unas y otras se destruyen, aquí la estructura de adición que se percibe es de anulación y compensación, esto es una situación que podemos caracterizar como evidencia de la quinta diferencia D_5.

Tabla 5.1 Diferencias entre ***Z*** *y* ***Nr*** *en los Elementos de matemáticas de Benito Bails*

Autor	**D_1**					**D_2**				**D_3**	**D_4**	**D_5**
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**		**b_1**	**b_2**	**b_3**				
Bails	**P**	**P**	**¿?**	**No**	**P**	**Si**	**P**	**P**	**Si**	**P**	**No**	**Si**

5.4.6 Tratamiento global de los negativos en los *Elementos de Arismética.*

En resumen el análisis efectuado sobre las diferencias entre la estructura entera y la natural relativa presentes en esta obra, revela que, para Bails, los números negativos son entidades de naturaleza dual (aritmética-algebraica). La consideración aritmética establece que las cantidades negativas surgen de sustracciones donde el minuendo es menor que el sustraendo. Desde el punto de vista algebraico las cantidades negativas tienen sentido opuesto a las positivas: sentido opuesto en el cálculo, expresan aspectos opuestos de una misma cantidad o bien expresan las relaciones de unas cantidades respecto a otras.

De manera general se perciben dos justificaciones distintas para los negativos; en la aritmética (Tomo I) el argumento es de tipo operacional entre cantidades particulares (sustracciones) mientras que en el álgebra (Tomo II) se buscan interpretaciones en fenómenos físicos y dinámicos a través del tratamiento de cantidades generales.

El tratamiento algebraico de los negativos es formal y se ajusta a las tendencias de su época, reflejando un conocimiento del tratamiento dado tanto por Bézout como por Euler.

La noción aritmética en Bails es más potente que la algebraica, que resulta mucho más imprecisa e intuitiva. La noción aritmética se sostiene sobre la construcción que hace Euler de los números negativos, la cual copia Bails sin aportar ninguna idea propia. La justificación algebraica está basada en una noción de cantidad dirigida, más próxima a los naturales relativos. Por eso se produce un retroceso respecto a Cerdá en su empleo de los naturales relativos. Las ideas de Cerdá sobre la noción algebraica de número negativo se sostienen en las soluciones de las ecuaciones y en la noción de razón aritmética, es decir, se trata como un concepto relacional entre pares de números. Bails menciona el carácter relacional, pero no lo explica ni le da contenido; señala el sentido opuesto entre cantidades positivas y negativas y se queda en la justificación intuitiva.

Como personalidad ilustrada del último tercio del siglo XVIII, Bails es un divulgador excelente y un buen transmisor de las ideas de otros, lo cual muestra en su trabajo como erudito y como gestor de la política científica de su época, pero no es un investigador en matemáticas. Por eso reconocemos en la obra de Bails un retroceso en el dominio de los enteros, que se manifiesta al detectar un mayor número de indicadores que muestran la presencia de los naturales relativos. Este autor no es un creador matemático ni tampoco un pensador autónomo; recoge ideas de sus lecturas y copia a aquellos autores que le merecen respeto, pero no hace una labor de elaboración y depuración propia que le lleve a profundizar en los conceptos que trabaja, como él mismo reconoce. De ahí que su tratamiento aritmético de los números negativos sea más potente que el algebraico, ya que ha seguido a Euler y, por otra parte, no ha profundizado en las implicaciones algebraicas de las ideas asumidas.

Cuando realiza las operaciones en la aritmética, las cantidades que se utilizan se consideran como opuestas, mientras que, cuando se producen bajo las leyes formales propias del álgebra, utiliza propiedades formales de los números enteros. A diferencia de Euler, nunca menciona el conjunto de los enteros. El apoyo para justificar las reglas de las operaciones y las relaciones estudiadas en la intuición de las cantidades o números dirigidos es permanente en Bails. En los ejemplos y en las aplicaciones en problemas trata de imponer este significado de manera sistemática.

La estructura con que Bails presenta los números negativos combina los números naturales relativos y los enteros, y se hallan evidencias de algunas de las diferencias planteadas por González Marí, especialmente en el Tomo II.

Los fenómenos que utiliza para presentar los negativos son: balance de bienes y deudas (tener/deber), desplazamientos respecto de una posición, doble sentido de una cantidad según se plantee como incremento o disminución. Como fenómeno aritmético clave está la sustracción con minuendo menor que el sustraendo y las series numéricas. Como fenómenos y algebraicos están las ecuaciones.

En **CGO7** sostiene que todo es representación y que el álgebra es un sistema de representación de cantidades en general y de sus operaciones. Recurre a representaciones gráficas mediante líneas y segmentos, representaciones numéricas a través de números y series y símbolos algebraicos cuando se utilizan ecuaciones, cantidades generales y polinomios.

Los negativos son utilizados en procesos de resolución de problemas y ecuaciones, interpretando su aparición en tales situaciones como indicio de la existencia de alguna clase de falsedad, ya sea esta en el enunciado o en el planteamiento.

En Bails encontramos con nitidez un curioso fenómeno: la coexistencia de nociones y conceptos correspondientes a los naturales relativos y a los enteros en su trabajo, presentados con los mismos signos y mediante los mismos ejemplos, lo cual no contribuye a su clarificación.

La integración entre su Aritmética y su Álgebra no está lograda por la distinta procedencia de los materiales utilizados, una menor profundidad en los conceptos y cierto descuido en el rigor intelectual.

5.5 Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría (1782)

5.5.1 Autor

Juan Justo García (*n*. Zafra 1752- *m*. Salamanca 1830) (**CA1**). Recibió el grado de bachiller en teología (1772) y bachiller en artes (1773); fue becario del Colegio Trilingüe de Salamanca y se le reconoce haber estudiado dos años de lengua hebrea y dos de matemáticas **(CA2**).

El plan de estudios de 1771 de Carlos III impulsa la renovación y el dominio de las disciplinas matemáticas en la Universidad de Salamanca, como se vio con detalle en el Apartado 2.6.4 de esta Memoria. En esta universidad se dota una segunda Cátedra de matemáticas en 1773, a la que oposita Juan Justo García, Cátedra de Aritmética, Geometría y Álgebra.

Su ingreso como profesor en la Universidad de Salamanca es resultado de la crisis surgida por la presencia de Diego Torres de Villarroel como catedrático de matemáticas en esa universidad durante 26 años (Garma, 2002), y los intentos de continuar su influencia por medio de sus sobrinos, uno de ellos sucesor de Torres y el otro aspirante a la sucesión en la cátedra, ambos desconocedores de las matemáticas (**CA5**; **CA7**).

Juan Justo García fue nombrado en 1774, y accedió a esta cátedra luego de una oposición accidentada en la cual tuvo que intervenir el Consejo de Castilla para atender a las denuncias presentadas por varios catedráticos por el desconocimiento e incompetencia del otro aspirante, sobrino de Torres Vilarroel. En la resolución tiene que actuar el rey Carlos III para que se produzca el nombramiento de Juan Justo García como catedrático (Garma, 1988) (**CA4; CA7**).

Para que se ratifique su nombramiento tiene que escribir un texto sobre la asignatura y validar así sus conocimientos matemáticos. Desde 1774 a 1782 se dedica a estudiar intensamente las matemáticas de su época, y los resultados se reflejan en el texto que comentamos. *Los Elementos* son la contribución de nuestro autor a la renovación de la enseñanza de las matemáticas en Salamanca (**CA4**).

Por encargo del Claustro de la Universidad de Salamanca formó parte de la comisión encargada de la creación del Colegio de Filosofía en 1792 (Cobos & Fernández, 1997).

Prácticamente su vida se desenvuelve entre la ilustración española y el régimen absolutista de Fernando VII; durante la invasión francesa, Juan Justo García es marginado en la Universidad de Salamanca junto con otros profesores. Es en el trienio liberal (1820-1822) cuando llega a la cumbre política y universitaria; en la primera es diputado y en la segunda actúa como vicerrector en varios claustros (Cuesta Dutari, 1974) (**CA7**).

García estaba al tanto de los avances matemáticos, como lo indica su conocimiento de las obras de Newton, Euler, Laplace, así como las de Bails, por citar algunos nombres (**CA5**).

Entre las obras que publicó tenemos: *Elementos de aritmética, álgebra y geometría,* cuya primera edición es de 1782, *Discursos predicables* con Miguel Martel en 1790, y *Principios de aritmética y geometría...,* en 1814 el cual es un extracto de sus Elementos; también publicó *Elementos de geografía general, Astronómica, física y política* (1818) y *Elementos de verdadera lógica extractados de los elementos de ideología de Destutt-Tracy* (1821) (**CA6**).

Referencias a la vida y obra de Juan Justo García pueden hallarse en Cuesta Dutari (1974), Cobos & Fernández (1997) y Garma (2002; 1988)

(**CA8**).

5.5.2 Caracterización del texto

Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría. (1814). Cuarta edición. Tomo primero. Salamanca: Imprenta de D. Vicente Blanco, Primera edición de 1782 (**CGO1**, **CGO2**).

Este primer tomo comprende 253 páginas; además incluye otras 53 para el Prólogo y un *Resumen histórico del origen, progresos y estado actual de las matemáticas: aritmética, álgebra y geometría* (**CGO3**).

Este texto no se divide en libros o capítulos, sino que se organiza por temas cortos. Así los temas tratados son: las operaciones básicas de la aritmética, los quebrados y sus operaciones, los números complejos, algunos elementos de álgebra y las operaciones con cantidades algebraicas, fracciones continuas, radicales, cantidades imaginarias, razones y proporciones, regla de tres, combinaciones, permutaciones, logaritmos, ecuaciones y su solución (**CGO3**).

La preocupación didáctica del autor se pone de manifiesto en distintos párrafos del Prólogo:

> *"Las esplicaciones largas y minuciosas son otro defecto no menos perjudicial y comun en obras apreciables , por otra parte […] sin considerar que en una demostracion para ser percibida , se deben esponer con la posible concision las ideas que median entre las dos principales que hacen el obgeto de la proposicion : y que qualquiera espresion importuna estravía ó debilita la atencion del Lector , y le hace oscura la esplicacion."* (p. VI).

> *"Con efecto , son cosas muy diferentes el saber , y el enseñar debidamente lo que se sabe."* (p. V).

El autor afirma que el propósito del texto es que *"el filósofo, el medico, el teólogo y el jurista tomar en un año escolástico que destinan á este estudio, las luces necesarias á sus respectivas profesiones"* (p. VI) (**CGO4**), además de que quienes pretendan dedicarse al estudio de las matemáticas ahorren tiempo en su empeño con esta obra, para que luego puedan extender sus conocimientos en los textos de Benito Bails, Mariano Vallejo o Tadeo Lope y Aguilar en los cuales los temas se tratan con más *"doctrina y extensión"* (p. VII) (**CGO5**). Esta indicación explícita acerca de la ampliación de conocimientos matemáticos en otros textos españoles es importante puesto que pone de manifiesto, en primer lugar, un reconocimiento del nivel científico de las obras de estos autores nacionales en la época y, en segundo término, ubica el propio texto de Juan Justo en un nivel inferior a otras obras escritas por españoles contemporáneos a él.

También pone de manifiesto la importancia del conocimiento matemático para el desarrollo de la sociedad: *"Se sabe que el esplendor , poder y prosperidad de una Nacion pende en gran parte del fomento y cultivo de las ciencias matemáticas."* (p. VIII).

Es muy interesante el extenso *Resumen Histórico* que incluye al comienzo de su obra. Cuenta la historia de la aritmética, del álgebra y de la geometría; demuestra que conoce la teoría y los principales problemas que hay planteados en cada una de estas materias.

En la historia del álgebra hace referencia a las contribuciones de Harriot y Vieta: *"El mismo empleó el primero las raices negativas en las equaciones"* (p. XXV); menciona la obra de Girard: *"en la que (hizo) finas observaciones sobre las raices negativas de las equaciones de 3.er grado."* (p. XXVI) y reconoce las aportaciones de Descartes: *"fue el primero tambien que hizo de las raices negativas el uso debido , esplicó su naturaleza , y manifestó sus ventajas (…) determinó por medio de los signos el número de raices positivas y negativas de una equacion quando no hay imaginarias ...."* (p. XXVI). Conoce a Newton y su obra en detalle (p. XXVIII) y menciona *"las sutiles especulaciones sobre los logaritmos de las cantidades negativas"* (p. XXIX) que hace Euler. Todas estas referencias muestran el conocimiento que tiene García sobre el dominio algebraico de los números negativos (**CGO5**). Parece haberse guiado del texto de Montucla (año VII de la revolución), el cuál cita, cuando recrea el desarrollo del álgebra.

En la historia de la geometría expone los antecedentes del cálculo diferencial e integral y resume la polémica entre Newton y Leibniz. Conoce las obras de La Grange, D'Alambert, Juan Bernouilli, MacLaurin, Moivre, Montmort, Emerson, Clairaut, Simpson, Newton, Leibniz, Jacobo Bernouilli, L'Hôpital, Euler y Bezout (p. XXXII); reconoce que *"en la última mitad del siglo XVIII llevada el algebra á un grado suma de perfeccion , y hecha el mas apto como el mas útil instrumento para adelantar todas las demas ciencias…"* (p. XXXIV) (**CGO5**).

Con su trabajo, García superó el atraso en matemáticas que la presencia de Torres Villarroel había supuesto para la Universidad de Salamanca. Es el primer matemático que trabaja en esta universidad en el periodo Ilustrado, con un dominio de la materia adecuado a los conocimientos de la época (**CGO6**).

En relación con los conceptos básicos Juan Justo García define cantidad y número así:

Cantidad:
“Todo lo que puede concebirse compuesto de partes que se midan ó se numeren , se llama Cantidad ; y es objeto de las ciencias que conocemos con el nombre de Matemáticas. De ellas llamarémos Mistas á las que consideran en la cantidad alguna propiedad sensible : como el movimiento , la luz, objetos de la Dinámica y Optica : y Puras a la Aritmética , Álgebra y Geometría [..] las cuales calculan y miden la cantidad desnuda de toda propiedad sensible.” (p. 1) (**CCO2**).

Número:
“Si una cosa qualquiera se considera dividida en partes iguales ; por exemplo , si un real se divide en treinta y quatro maravedises , se da el nombre de unidad a cada una de estas partes , y de número à qualquiera porción de ellas como siete , treinta.” (p. 2) (**CCO1**).

“Quando el número contiene unidades cabales , se llama entero ; y quebrado quando solo contiene partes de unidad como un medio , dos quintos.” (p. 2) (**CCO3**).

También afirma que la Aritmética es *“una ciencia que examina las propiedades de los números, y un arte que da reglas para ajustar con ellos todo genero de cuentas”* (p. 2), con lo cual se le brinda un carácter práctico; además dice *“que no atiende a si los números de que trata, representan el peso de los cuerpos, ó sus grados de movimientos [...]”* (p. 1) (**CCO1**). Los ejemplos que utiliza para trabajar con números incluyen datos bíblicos sobre los años transcurridos desde la creación del mundo, que fija en 5923 (p. 7).

En el desarrollo del texto se aborda la generalidad del Álgebra:

“Queriendo los Matemáticos demostrar de un modo general las verdades que la Aritmética demuestra solo en casos particulares , para elevarse a superiores conocimientos (...) formaron una Aritmética universal que se llama Álgebra , que por medio de cantidades generales é indeterminadas no solo demuestra generalmente sus proposiciones , sino que (...) conduce a resultados que la Aritmética no logra (...) , resuelve además infinitos problemas (...) , y suministra métodos para facilitar sus operaciones complicadas.” (p. 53) (**CCO4**).

Pues, como se indica, el Álgebra enseña
“a resolver los Problemas; esto es, á encontrar una ó mas cantidades desconocidas con ciertas condiciones por medio de otras conocidas que se llaman los datos del problema, […] Se supone que la cantidad que se va a buscar que llamaremos la incognita ; […] mirándola como conocida , se expresa con signos algebraicos la conexión ó relaciones que con ella tienen las demas cantidades que intervienen en el problema […] De estas operaciones resultarán diferentes expresiones de las cantidades conocidas

mezcladas con la incognita , entre las que se han de buscar dos iguales para formar con ellas y el signo = lo que llamamos Equacion , por cuyo medio se averigua el valor de la incognita." (pp. 170-171) (**CCO4**).

Los números negativos están ubicados en los Elementos de Álgebra (**CCO5**). En esta parte del libro también se presentan los irracionales (p. 77) y las cantidades imaginarias (p. 114) (**CCO6**).

Como ya se ha mencionado, al inicio de la obra se comenta brevemente el desarrollo histórico de las matemáticas. Este apartado permite deducir que García está al corriente de los avances y desarrollos del álgebra y el cálculo, a través de las obras de Newton, Leibnitz, La Grange, La Place, Girard, Euler y Descartes, entre otros. Se citan expresamente en el texto las memorias de D´Alambert en la Academia de Berlín del año 1746 (**CGO5**).

Aunque Aguilar Piñal (1983; Tomo IV p. 81) afirma que este texto fue *"el primer libro moderno de matemáticas a nivel superior aparecido en España"*, creemos que no es así estrictamente, pues el mismo autor recomienda la lectura de otros publicados en la península para un mejor conocimiento, tal como se ha comentado antes. Debemos, sin embargo, indicar que el texto tuvo gran acogida, como lo demuestran sus posteriores reediciones: la segunda, en 1794; en 1781, la tercera; la cuarta, en 1814 y finalmente, la quinta, en 1821 (**CGO6**). Es precisamente la cuarta de 1814 la que aquí seguimos para nuestro análisis.

5.5.3 Tratamiento dado a los negativos

Los párrafos de mayor interés relacionados con los ítems son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.

"[...] usaré del signo + que quiere decir mas [...]" (p. 7).

Tan sólo se presenta explícitamente el signo más (+) y se hace para indicar la operación de adición. La presentación del signo – es implícita, el signo expresa la operación de restar y se lee *menos*:

> *"Restar un número de otro es averiguar la diferencia que hay entre los dos : restar por exemplo 7 de 9 es encontrar el número 2 en que el 9 excede a 7. Esto se espresa mas brevemente así; 9 – 7 = 2 , y se lee nueve menos siete es igual á dos."* (p. 8-9).

Esta presentación de los signos se hace en la parte correspondiente a la Aritmética.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.

"Los signos +, – puestos a las cantidades significan el sentido en que se

han de tomar : las que tienen el – que se llaman negativas, se toman en sentido contrario á las positivas que tienen el signo +, ó estan al principio sin signo [...]" (p. 54).

Los signos dan sentido –cualifican- a la cantidad a la que preceden; el signo – otorga carácter negativo cuando precede a una cantidad; no sucede así con el signo +, pues, si un numero no está precedido por un signo, se asume su carácter positivo. Esta presentación de las cantidades positivas y negativas se hace en el apartado de Álgebra.

Para Juan Justo las cantidades negativas son contrarias u opuestas a las positivas, aspecto que se subraya con tres ejemplos, uno de caudales y deudas, otro de recorridos y un tercero de fuerzas, y se toman de esta manera según la situación. Implícitamente se da un carácter relativo a la negatividad de las cantidades.

"[...] si a es el valor de una fuerza que obra de derecha á izquierda, –a será la misma fuerza obrando de la izquierda ácia la derecha." (p. 54).

En esta presentación plantea tres tipos de fenómenos, que veremos en **TSN6**.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.

García no trata explícitamente la naturaleza de las cantidades negativas, más allá del sentido contrario en que se han de tomar los signos + y –, como se ha expresado en el párrafo anterior.

La aparición de soluciones negativas al resolver una ecuación hay que interpretarlas como efecto de un mal planteamiento de la cuestión propuesta, es decir, suponiendo que la respuesta va a ir en un sentido y no en su contrario, como finalmente ocurre.

"Este valor negativo significa que hubo pérdida y no ganancia en el empleo , y por consiguiente que el problema está mal propuesto" (p. 183).

"El otro valor –6 confirma lo que dejamos dicho de las cantidades negativas ; pues resuelve el problema en un caso contrario al que se propone …" (p. 204).

En este sentido se entiende que la naturaleza de las cantidades negativas para J. Justo García no es otra que la de cantidades con sentido, es decir, números dirigidos o relativos.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.

La interpretación del apartado anterior también proporciona respuesta parcial en este caso; la explicación que García encuentra a la presencia de cantidades negativas en la resolución de problemas, se justifica al interpretar en un sentido el resultado final, y no en el contrario que es el que corresponde.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.

En el texto no se ha encontrado referencia alguna a esta categoría, salvo la información correspondiente a la obra de Descartes en la Introducción.

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.

"[...] si + 20 con el signo + representa el caudal de una persona, –20 representará igual cantidad de deuda." (p. 54).

"[...] si b es el camino que se ha recorrido ácia el Oriente, –b será el corrido ácia el Occidente." (p. 54).

"[...] si a es el valor de una fuerza que obra de derecha á izquierda, –a será la misma fuerza obrando de la izquierda ácia la derecha." (p. 54).

Para ejemplificar las cantidades negativas, el autor recurre a situaciones cotidianas reales de carácter relativo, como: deudas, haber, recorrido y fuerzas. Los fenómenos en los que se presentan las cantidades negativas son de comparación y desplazamiento. Es interesante ver cómo utiliza la tercera ley de Newton (acción y reacción en la física dinámica) para ilustrar la naturaleza de las cantidades negativas en el sentido de lo planteado en **TSN2**.

TSN7: Regla de los signos.

Para la resta:

"Se mudan en sus contrarios los signos del sustraendo , porque asi como la diferencia entre 10 y 8 es 10 disminuido en 8 ó 10 – 8 , asi también la diferencia entre la cantidad a y b , será a disminuido de b ó a – b. Pero como entre uno que tiene 10 doblones y otro que debe 8 , cuyo haber es –8 hay de diferencia 10+8 , también entre a y –b habrá de diferencia a+b.

"De lo qual y de lo dicho en la suma se infiere que las cantidades negativas disminuyen las positivas quando se suman con ellas , y las aumentan quando se restan . Con efecto , añadir deudas es disminuir caudal , y quitarlas es aumentarle: asi , no debe equivocar el sumar con el añadir y el restar con el disminuir" (p. 56).

Se identifica restar con "mudar de signo", como también hace Bails. El planteamiento de las operaciones de suma y resta está basado claramente en relaciones de anulación compensación. La precisión de que restar no siempre es disminuir y sumar no siempre es aumentar, es propia de los relativos.

Para el producto:
"[...] últimamente se pone al producto el signo + si los factores tienen ambos un mismo signo, y el – si le tienen diverso.
El producto de +a X + b es +ab [...]" (p. 57).

"[...] Por lo que toca a los signos es evidente que multiplicar una cantidad positiva +a ó negativa –b por otra positiva 3 es tomar +a o –b 3 veces : luego en el primer caso será el producto +3a y en el segundo –3b, es decir + X + = + y – X + = –. Asi mismo, multiplicar +a cantidad positiva ó –b negativa por –3 es tomar +a ó –b tres veces, pero al contrario de como se tomarian si el multiplicador fuera +3; luego si en este caso serian los productos +3a, –3b, deben ser en el presente –3a y +3b: y + X – = –, – X – = +. Si en lugar de 3 de que hemos usado para mayor claridad , ponemos c , quedara la demostración mas general." (pp. 57-58).

El autor indica una regla general para la multiplicación de los signos, brindando una explicación basada en el producto como producto de un escalar por una cantidad dirigida, combinado con la noción de sentido contrario de las cantidades negativas; luego lo amplía a la expresión literal.

La regla de los signos para el producto se justifica aquí mediante un producto escalar con cantidades dirigidas. Esta diferencia, no contemplada por González Marí, se presenta con cierta sistematicidad en los autores de este periodo como hemos visto para Tosca y Bails, y también veremos para Verdejo. Podemos postular una sexta diferencia D_6 entre los naturales relativos y los enteros, basada en la justificación de la regla de los signos. En el primer caso el producto se establece como producto por un escalar, es decir, el producto como una suma reiterada; en el segundo caso hay alguna justificación algebraica basada en las propiedades del elemento simétrico para la suma u otra justificación similar. Retomaremos esta cuestión mas adelante.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

En el texto no se ha encontrado información explícita correspondiente a esta categoría, pero no cabe duda de que García expresa esta idea cuando menciona que un caudal y una deuda se refieren a igual cantidad:

"[...] si + 20 con el signo + representa el caudal de una persona, –20 representará igual cantidad de deuda." (p. 54).

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

En el texto no se ha encontrado información correspondiente a esta categoría, pero si encontramos la sucesión de los números enteros como una progresión aritmética que proviene de los logaritmos de las potencias de 10:

"–3. –2. –I. 0. I. 2. 3. 4. &c." (p. 163).

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
En el uso de los negativos encontramos una diversidad de opciones:
Exponentes negativos:

"Asimismo, si se resta en $\frac{a}{a^4}$ *, 4 de 1, sale de cociente* $a^{1-4} = a^{-3}$ *"* (p. 62).

Signo de una raíz:
"Se pone el signo + á la raiz de la potencia positiva si es impar; pero si es par se le dan á la raiz los dos signos ±; [...] si es impar y negativa la potencia, se pone á la raiz el signo -." (p. 77).

Razón aritmética, proporciones y progresiones aritméticas:
"La comparacion de una cantidad qualquiera 8 con otra de la misma especie para ver lo que la una excede a la otra se llama razon aritmética ; la diferencia 12 – 8 = 4 que resulta de esta comparacion , exponente de la razon ; el 8 que se compara , antecedente ; y el 12 a quien se compara consecuente. La razon aritmética de 7 a 15 , que se escribe asi , 7 • 15 , es 15 – 7 = 8 y la de b á d ó b • d , es b – d ó d – b" (p. 115).

"Quando comparamos dos razones aritméticas iguales 3 • 7 , 5 • 9 diciendo de 3 a 7 hay la misma diferencia que de 5 a 9, formamos una proporcion aritmética , que se escribe asi , 3 • 7 : 5 • 9 ; a • b : c • d quiere decir a es á b aritméticamente como c á d." (p.116).

"Una serie de razones aritméticas continuas forman una progresion artimética , que es una serie de términos que restados cada uno del inmediato dan una misma diferencia. […] Quando hay que añadir sucesivamente la diferencia á cada termino para sacar el siguiente ; los términos aumentan y se llama crescente. Si la diferencia se ha de restar de cada término para formar el siguiente , menguan, y se llama decrescente." (p. 118).

En todo este tratamiento de razones y progresiones aritméticas García evita la aparición de los números negativos y el único uso que hace del signo menos es para referirse a la resta. La diferencia conceptual con el tratamiento que vimos daba Cerda en los *Elementos* es considerable e ilustrativa del uso de los negativos como números relativos, sin tener en cuenta nociones relacionales.

Logaritmos negativos:

"Efectivamente , siendo cero el logaritmo de 1 , deben ser negativos los logaritmos de los quebrados propios que son menores que 1…" (p. 162).

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.
"Tres comerciantes emplean 1500 doblones en un negocio ¿quál debe ser su ganancia para que al fin del año toquen á cada uno 398 doblones?

Si se supone la ganancia x, resultarán 1500 + x al fin del año: y pues que debe tocar de esto á cada uno de los tres 398, será $\frac{1500+x}{3}=398$*,* *1500 +x =1194, y por consiguiente x=1194 –1500=–306.*

Este valor negativo significa que hubo pérdida y no ganancia en el empleo, y por consiguiente que el problema está mal propuesto." (p. 183).

Se pueden extraer dos ideas de este párrafo:

- Las cantidades negativas surgen como resultado de efectuar operaciones algebraicas.
- Cuando resulta negativo el valor de una variable, esto indica una formulación errónea del problema.

"El otro valor –6 confirma lo que dejamos dicho de las cantidades negativas; pues resuelve el problema en un caso contrario al que se propone: esto es en el supuesto de que se hubieran llegado dos mas á comer y pagar, adeudando 6rs. ménos cada uno." (p. 204).

Como ya se indicó en **TSN3,** se halla una respuesta contraria a la pedida; lo que indica que el planteamiento es erróneo, según se deduce del comentario del autor; entonces, las cantidades negativas como solución a una ecuación señalan que se ha cometido un fallo de interpretación en el proceso.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas
Desde una perspectiva aritmética las cantidades negativas tienen escasa utilidad ya que se necesita reinterpretar las soluciones negativas a los problemas de tipo práctico o aplicado. Por eso el tratamiento aritmético de las cantidades negativas es inexistente, sin consideraciones formales y cuando se presentan estas cantidades se trabajan como números relativos.

Desde un planteamiento algebraico las cantidades negativas son necesarias, se definen sus operaciones, haciendo uso de la intuición basada en la noción de número o cantidad relativa, y se amplía su campo al introducirlas en relaciones exponenciales y logarítmicas. Los números negativos se convierten en un instrumento formal de las operaciones y relaciones algebraicas; sin embargo, su interpretación en la solución a un problema continúa provocando dificultades.

5.5.4 Análisis
5.5.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

En el texto se distingue entre *unidad* y *número*; mientras que la unidad es cualquiera de las partes iguales en que se divide una cosa, el número es "*qualquiera porción de ellas".* García no busca proporcionar definiciones precisas sino que prefiere un estilo indirecto y más retórico, acompañado en ejemplos.

La noción de número que propone está basada en la consideración conjunta de varias unidades y se muestra mediante ejemplos familiares para el lector, como es el caso de los reales y los maravedíes, que presentan la relación entre dos órdenes de unidades, en este caso monetarias. Como se desprende de las consideraciones y explicaciones dadas sobre el propósito de la aritmética, podemos inferir una noción de número clásica asociada con la medida, que sigue planteamientos euclidianos, ya que del texto parece desprenderse la idea de que la unidad no se considera un número.

- ***Cantidad***

Para Juan Justo García la cantidad está asociada a la medición y numeración de partes, por tanto es una noción inscrita en lo continuo y discreto. A diferencia de sus contemporáneos Bails y Verdejo, García no utiliza las nociones de comparación y de orden sino la división en partes iguales, que permiten medir o numerar. De tal manera está reflejada la idea de cantidad aristotélica, semejante a la presente en la obra de Pedro de Ulloa y comentado en el apartado 4.4.4.1. Distingue tres tipos de cantidades: *Mistas* –con carácter físico-, *Puras* –relativas a la aritmética y el álgebra- (**CCO2**), y *cantidades generales*, específicas del álgebra (**CCO4**).

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Las cantidades positivas o negativas son aquellas precedidas de un signo más (+) o menos (–). En **TSN6** puede apreciarse que el autor tiene claro que hay diferencia entre el valor numérico y el valor cualitativo de las cantidades.

La presentación de las cantidades positivas y negativas se hace en el apartado de Álgebra. Los signos dan sentido a la cantidad a la que preceden, como hemos visto en **TSN2, TSN3 y TSN6.**

Para Juan Justo las cantidades negativas son opuestas a las positivas, de esta manera se da un carácter relativo a la negatividad de las cantidades.

Estas cantidades negativas también surgen después de efectuar operaciones algebraicas, aunque estos valores son rechazados como solución a los problemas planteados y se destaca el carácter relativo de la solución para redefinir o volver a plantear el problema, como se aprecia en **TSN11**.

5.5.4.2 Análisis de contenido

- ***Conceptos básicos***

En un primer momento, los signos más (+) y menos (–) representan las operaciones de adición y sustracción, **TSN1**; luego estos dos signos determinan las cualidades positivas o negativas de las distintas cantidades a las cuales preceden, como se indica en **TSN2**, **TSN3** y **TSN6**.

Los conocimientos que se brindan en el texto tienen como propósito *"resolver los problemas",* esto se consigue mediante la consideración de cantidades generales, lo cual se lleva a cabo realizando operaciones con las incógnitas y cantidades conocidas.

Según Juan Justo, cuando se procede a mezclar cantidades conocidas y desconocidas igualándolas con otras semejantes se están utilizando las ecuaciones, como se ve en **CCO4**.

- ***Fenomenología/Justificación***

García encuentra cantidades negativas en la resolución de problemas e interpreta esos resultados como números relativos. En el texto no se justifica formalmente la necesidad de las cantidades negativas; los ejemplos con los que se ilustra están asociados a situaciones cotidianas esencialmente relativas.

En **TSN6** se utilizan contextos de deudas, caudales, recorridos y fuerzas. Como se aprecia en todos esos ejemplos, la argumentación se fundamenta en la condición de opuestas o contrarias entre las cantidades positivas y negativas. Los fenómenos con que se presentan las cantidades negativas son de comparación y de desplazamiento. En algebra, García admite las cantidades negativas como entes formales con los que se puede operar mediante la suma, resta, producto, división, potenciación y logaritmación.

- ***Estructura de orden***

El autor no se ocupa por el orden entre las cantidades negativas, pues no lo explicita ni lo evidencia en el desarrollo del texto. El único apartado que podría inducirnos a conjeturar sobre este aspecto es la utilización de números negativos en una progresión aritmética, como se aprecia en **TSN9**; pero consideramos que no es suficiente para emitir juicio o valoración alguna.

- ***Estructura algebraica***

El tratamiento que hace de las operaciones con cantidades negativas es algebraico. Juan Justo no profundiza en consideraciones aritméticas sobre su significado o naturaleza; se limita a utilizarlas. La estructura algebraica con la que trabaja Juan Justo García es la de los números relativos; restar es mudar de signo y multiplicar es reiterar una cantidad -multiplicando- tanta veces como indica un escalar –multiplicador-, tal como se deduce de **TSN7** y **TSN10.**

- ***Uso algebraico***

Las respuestas negativas como solución a problemas son sometidas a interpretación para determinar si responden o no a los supuestos esperados, como se ve en **TSN11**. Esto se deriva de la fundamentación relativa con la que García sustenta a los negativos.

Una vez formalizadas, con las cantidades negativas se llevan a cabo distintas operaciones sin considerar su cualidad, tal como se observa en **TSN10**.

5.5.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r*

Primera diferencia: Orden total – orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: $\mathbf{a_1}$.

Cuando en TSN2 el autor escribe: *"las que tienen el – que se llaman negativas, se toman en sentido contrario á las positivas que tienen el signo + [...]"*, no señala cuáles cantidades son mayores o menores respecto a cero, ni es fija la valoración respecto a determinados valores, sino que se enfatiza el carácter de opuestas unas de otras; este mismo se reafirma en los ejemplos presentados en TSN6. Estas características representan una atribución de significados arbitraria e indeterminada para números relativos (González, p. 214).

Segundo indicador: $\mathbf{a_2}$.

Respecto a la comparación-valoración global de regiones, se observa en **TSN10** que *"añadir deudas es disminuir caudal, y quitarlas es aumentarlas",* esta es arbitraria e indeterminada para números naturales relativos, puesto que las deudas disminuyen los caudales, pero no se indica cual es mayor respecto a otra; esto sucede porque por que tal comparación se da sólo en

* Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

términos de los efectos. Esta situación está relacionada con el comentario que presentaremos en D_3.

Tercer indicador: **a_3**.

No hay muchos indicios para este indicador, sin embargo, en **TSN9** se presenta una progresión aritmética *“-3.-2.-I. 0. I. 2. 3. 4. &c.”* donde se observa el orden usual entre números enteros negativos.

Cuarto indicador: **a_4**.

Cuando se efectúa el análisis sobre la comparación de medidas entre valores numéricos de diferente signo, se observa en **TSN7**: *“entre uno que tiene 10 doblones y otro que debe 8, cuyo haber es –8 hay de diferencia 10+8 [...]”*, donde hay conexión y homogeneidad para números enteros; es posible efectuar la comparación entre un valor positivo y uno negativo, hallando un valor numérico para la diferencia.

El balance que hacemos, indica que esta primera diferencia D_1 se manifiesta de manera clara para dos indicadores que muestran el tratamiento de los negativos en el campo de los números naturales relativos.

Segunda diferencia: Sin primer elemento – con primer elemento.

Primer indicador: **b_1**.

La progresión *“–3. –2. –I. 0. I. 2. 3. 4. &c.”* , indica la presencia de valores numéricos por encima y por debajo de cero. Esto apunta a un tratamiento de números enteros.

Por el contrario, encontramos en **TSN3**: *“Este valor negativo significa que hubo pérdida y no ganancia en el empleo [...]”*, la existencia implícita de limites inferiores para los valores, puesto que las perdidas solamente pueden disminuir hasta cero; a partir de allí pasan a ser ganancias y viceversa, con lo cual hay un primer elemento para las ganancias y otro para las perdidas, presentando indicios de naturales relativo.

Segundo indicador: **b_2**.

Para la representación hallamos en **TSN3** una simbolización matemática conocida y determinada para los números enteros: *“El otro valor –6 confirma [...]”*; asimismo en **TSN7** escribe*“otro que debe 8, cuyo haber es –8”,* hallándose un intercambio de símbolos sin que se modifique el sentido de la frase; esto orienta hacia los números enteros.

Tercer indicador: **b_3**.

En **TSN7**, cuando se presenta la resta, hay una transformación cuantitativa, tanto de aumento como de disminución con cantidades positivas y negativas. Esto confirma la ausencia de un primer elemento, apuntado hacia los números enteros.

Como balance de esta segunda diferencia D_2, afirmamos que las evidencias indican que esta diferencia se cumple parcialmente para los naturales relativos en el trabajo de Juan Justo García.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas – discontinuidad de medias (al cruzar el cero).

La progresión mostrada en **TSN9** y el ejemplo de los doblones en **TSN7** indican que es posible pasar por el cero, es decir cruzar desde una “zona” de valores negativos a otra de valores positivos y viceversa. Estos son indicadores de un tratamiento en el campo de los números enteros.

Cuarta diferencia: Cero único – cero doble (natural relativo).

Como se afirmado en b_1, el cero es utilizado como una referencia central común; asimismo hemos presentado en D_3, que no hay indicios de discontinuidad de medidas y al no hallar indicios de un tratamiento donde se presente un doble cero, creemos que esta cuarta diferencia no se cumple para los números naturales relativos.

Quinta diferencia: Composición aditiva: adición entera–adicción natural y anulación compensación.

En el señalado ejemplo de los doblones de **TSN7** se manifiesta la estructura de la adición relativa Por ello afirmamos que sí se cumple está diferencia.

*Tabla 5.2 Diferencias entre **Z** y N_r en los Elementos de Juan Justo García.*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
J. J. García	Si	Si	No	No	Si	P	No	No	P	No	No	Si

El dominio que muestra García de la estructura de los números negativos se sostiene, principalmente, sobre su consideración como números relativos, exceptuadas las relaciones de orden y la discontinuidad de medidas. García maneja las propiedades formales de los negativos, pero en sus ejemplos y justificaciones está trabajando con números relativos.

5.5.6 Tratamiento global de los negativos en los Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría.

En relación con los antecedentes de Torres de Villarroel, la presencia de Juan Justo García supone para la Universidad de Salamanca, y para las universidades españolas, una entrada en la modernidad matemática. Las lecturas recogidas en los *Elementos* muestran buena elección, conocimiento suficiente y actualizado y una amplia erudición en matemáticas. Falta la finura del especialista para algunas cuestiones, y un punto en que se aprecia esto es en el tratamiento dado a los números negativos. En este texto los negativos son tratados en el capítulo dedicado al álgebra. Su presentación esta justificada por el carácter de contrarios a los positivos y se basan en nociones relativas. Al igual que ocurre con Bails, el esfuerzo de lectura y síntesis de muy diversos autores no contribuye a que los negativos se analicen adecuadamente lo que impide que se eludan las trampas procedentes de los números relativos.

Las situaciones que permiten ser modelizadas por medio de los negativos son fenómenos contables (caudales y deudas), de desplazamiento (recorridos con direcciones opuestas), de física dinámica (fuerzas contrarias), apoyados en situaciones cotidianas y de dominio general para el lector; también utiliza fenómenos aritméticos (progresiones) y algebraicos (ecuaciones).

En correspondencia con los fenómenos señalados, los sistemas de representación utilizados son verbales (explicaciones), aritméticos (números) y algebraicos (letras y números).

La presencia de valores negativos como solución a sistemas de ecuaciones durante la resolución de problemas es asumido como indicio de que se produjo un mal planteamiento de las cuestiones, con lo cual la respuesta debe ser considerada en el sentido contrario.

Como hemos mencionado, Juan Justo García hace un tratamiento de las cantidades negativas sin profundizar en consideraciones sobre su significado o naturaleza. Al asumirlas como resultado de operaciones procede a utilizarlas en diversos aspectos matemáticos como exponentes, raíces y logaritmos, entre otros.

5.6 Compendio de Matemáticas puras y mixtas (1794).

5.6.1 Autor

Francisco Verdejo González. Son escasos los datos biográficos sobre Francisco Verdejo a los que hemos tenido acceso, y no disponemos de información relativa a los campos **CA1**, **CA2** y **CA3**.

En 1770 Carlos III reestablece los Reales Estudios de la Corte, cerrados tras la expulsión de los jesuitas. Para entrar como profesor de matemáticas había que realizar un examen de lógica, aritmética y geometría, así como mostrar dominio del latín. Verdejo se presenta en 1794 como aspirante a la cátedra de matemáticas de los Reales Estudios. En su solicitud declara no saber latín, y argumenta que ello no es necesario para enseñar matemáticas *"por haber buenos libros de matemáticas escritos en castellano"*. Tras litigar y ser admitido, obtiene la cátedra de matemáticas en 1794 frente a otros cuatro opositores, en la que sucede a Gregorio Rosell (Garma, 2002), (**CA4**).

El mismo año de 1794 comienza su trabajo en los Reales Estudios y edita el *Compendio*, que fue utilizado como texto en esa institución. El *Compendio* de Verdejo incluye el cálculo diferencial e integral y es considerado uno de los trabajos más importantes de la época por la calidad de su obra, junto con los textos de Cerdá, Jorge Juan, Bails, García, Rosell, Císcar y otros (Garma, 1988) (**CA7**).

Verdejo no menciona los autores en los que se ha basado para la redacción de su obra. Se considera que el *Compendio* encaja mejor en los siglos XVII y XVIII que en el siglo XIX. Su contenido está más cerca de la obra de Villalpando (1778) que de la de Benito Bails (**CA5**).

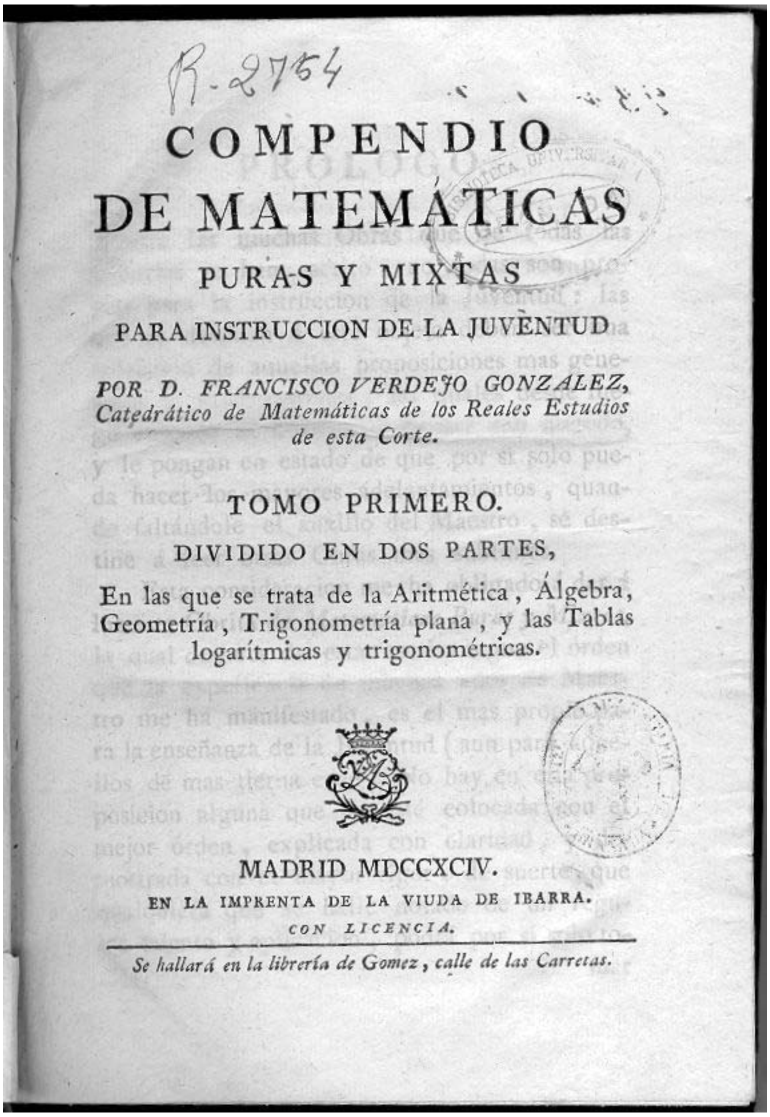
Dejó manuscrito un *Manual o tablas de repartimiento y réditos.* Publicó el *Compendio de Matemáticas puras y mixtas, para instrucción de la juventud* (1794-1802) en 2 volúmenes, *Compendio de Aritmética teorica y práctica para comerciante, artesanos y negociantes* (1795), *Arte de medir tierras y aforar líquidos y sólidos* (1796), y *Adiciones al primer tomo del Compendio Matemático* (1801) (**CA6**).

Encontramos referencias a Verdejo en Garma (2002), Aguilar Piñal (1995), Palau (1975) y Ramírez (1863) (**CA8**).

5.6.2 Caracterización del texto

Compendio de Matemáticas puras y mixtas, para instrucción de la juventud, Tomo primero (1794). Madrid: Imprenta de la Viuda de Ibarra (**CGO1**, **CGO2**).

El texto consta de 249 páginas; acompañan al texto unas *Tablas de los Logaritmos de los Senos y Tangentes y de los números naturales desde 1 hasta 9000* y finaliza con 14 láminas. El Tomo I se divide en dos partes, subdivididas en capítulos. La primera parte tiene siete capítulos, iniciando con la numeración y las reglas de la aritmética, prosigue con el álgebra y las operaciones entre expresiones algebraicas, continúa con los "quebrados", las potencias, raíces, razones, proporciones y logaritmos. Los dos últimos capítulos tratan la regla de tres, el interés y la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. La segunda parte, que trata sobre geometría y trigonometría, consta de ocho capítulos (**CGO3**).



R-2754

COMPENDIO
DE MATEMÁTICAS
PURAS Y MIXTAS
PARA INSTRUCCION DE LA JUVÈNTUD

POR D. FRANCISCO VERDEJO GONZALEZ,
Catedrático de Matemáticas de los Reales Estudios de esta Corte.

TOMO PRIMERO.
DIVIDIDO EN DOS PARTES,
En las que se trata de la Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría plana, y las Tablas logarítmicas y trigonométricas.

MADRID MDCCXCIV.
EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.
CON LICENCIA.

Se hallará en la librería de Gomez, calle de las Carretas.

El Tomo II está dedicado al cálculo diferencial e integral, aplicaciones del álgebra a la geometría y secciones cónicas. Las *Adiciones al Primer Tomo del Compendio* se presentan en un librito de 47 páginas, que suele estar encuadernado junto con el primer Tomo y que incluye aplicaciones de las teorías propuestas (**CGO3**).

La obra está dedicada al ministro Manuel Godoy (Aguilar Piñal, 1995).

En el prólogo del Tomo I, el autor afirma que la obra tiene como objeto la instrucción matemática de la juventud con unos conocimientos básicos y necesarios. Su interés didáctico lo manifiesta cuando expresa:

> *"Esta Obrita de Matemáticas puras y Mixtas, la qual después de estar escrita según el orden que la experiencia de muchos años de Maestro me*

> *ha manifestado , es el mas propio para la enseñanza de la Juventud.* […] *No hay en ella proposición alguna que no esté colocada con el mejor órden , explicada con claridad y demostrada con el mayor rigor ; de suerte , que qualquiera que se halle dotado de un regular talento y aplicación , podrá por sí solo tomar los conocimientos necesarios para ser buen Comerciante, Geómetra ó Artesano, como para ser buen Matemático, aplicándose después al estudio de otras Obras mas sublimes."* (Prólogo), (**CGO4**).

Verdejo no menciona a ningún autor en quien se haya basado para escribir su libro, pero sí destaca el peso de su experiencia como maestro durante muchos años. Igualmente, señala que se trata de una obra de iniciación.

Son varios los datos que nos permiten conjeturar la influencia de la obra de Tosca en Verdejo. En primer lugar, la época de su formación en la cual la obra de Tosca tenía difusión considerable. En segundo lugar, la elección del título, que viene a expresar una identidad de propósitos al mismo tiempo que un esfuerzo por actualizar los conocimientos especializados de matemáticas. En tercer lugar, su empleo como libro de texto en los Reales Estudios, donde quiere superar la influencia de los jesuitas (**CGO5**). No obstante, el carácter de la obra de Verdejo es mucho menos ambicioso por lo que se refiere a la Aritmética y al Álgebra que el de Tosca, y en el Tomo I está más preocupado por la divulgación y actualización de nociones generales. Los aspectos innovadores se presentan en el Tomo II.

En el Tomo I, Verdejo expresa que las matemáticas son: *"Ciencias que tienen por objeto las cantidades, y las relaciones de ellas"* (p. 1). Considera que

> *"Las Ciencias Matemáticas se dividen en puras y mixtas.*
>
> *Las Matemáticas puras consideran la cantidad del modo más abstracto, sin pasar los límites de la extensión. [...] Las partes que componen las Matemáticas puras son tres , a saber , Aritmética , Álgebra y Geometría.*
>
> *La Aritmética tiene por objeto la relación de las cantidades en quanto se expresan por números.*
>
> *El Álgebra tiene por objeto la relación de las cantidades expresadas de modo mas general ; esto es , por las letras de qualquier Alfabeto."* (p. 2) (**CCO4**).

También formula las definiciones de cantidad y de número.

Cantidad: *"Por cantidad entendemos todo aquello que comparado con su especie puede ser igual, mayor, ó menor; y así los tiempos, los números, los pesos* *son cantidades"* (p. 1) (**CCO2**).

Esta noción de cantidad está basada en la relaciones de comparación, igual-mayor-menor, que se establecen al considerar la igualdad o desigualdad entre objetos respecto de alguna característica. Esta noción es similar a la que vimos en 4.5.2 para Tosca.

El número es *"la relación que tiene una cantidad con otra de su misma especie, á la que se ha dado el nombre de unidad [...]"* (p. 4) (**CCO1**).

Se reafirma esta idea de número como relación al indicar:

> *"Una vez que los números enteros representan las relaciones de unas cantidades con otras de su especie, que se han escogido por unidad, podemos considerar qualquiera número entero, como el exponente de la razon que resulta de la comparación de él, y la unidad."* (p. 99) (**CCO1**).

Para Verdejo, *"el Número se divide en entero y quebrado";* supone que el número entero (natural para nosotros) *"es aquel que contiene cierto número de veces á la unidad, sin que resulte resta alguna, [...]"* (p. 4) (**CCO3**).

Los números y cantidades negativas se tratan en el capítulo segundo del Tomo I, dedicado al Álgebra, sus caracteres y signos, y las cuatro operaciones de las cantidades literales (**CCO5**). En el Capítulo IV se habla de los números irracionales o inconmensurables, cuando se tratan las raíces cuadradas que no son exactas (p. 81); también se presentan cantidades radicales o irracionales (p. 94). Finalmente, el *Compendio* trata las cantidades imaginarias (p. 96) (**CCO6**).

Asimismo, llama ecuación a:

"toda expresión compuesta de varias cantidades separadas con el signo de igualdad, [...] En las ecuaciones que se proponen resolver los Matemáticos , ha de haber siempre cantidades conocidas (que comúnmente se llaman datos) y cantidades incógnitas." (p.128-129) (**CCO4**).

La principal valoración de la obra de Verdejo la encontramos en Garma (1988), quien considera que este libro presenta una introducción al cálculo diferencial e integral acorde con los avances de la época (**CGO6**).

5.6.3 Tratamiento dado a los negativos

Los párrafos de mayor interés relacionados con los ítems son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y –.
"Los signos de que se vale para indicar las operaciones son los siguientes: +, –, [...]
mas..................+
menos................. –
[...] El signo mas puesto entre dos cantidades denota una adición; [...] El signo menos denota una substracción;" (pp. 35-36).

Los signos mas (+) y menos (–) indican, en primer término, las operaciones de adición y sustracción, respectivamente, cuando están entre dos cantidades.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.
"En las qüestiones que los Matemáticos se proponen resolver con el auxilio del Álgebra , no solo tienen necesidad de hallar la magnitud de unas cantidades por medio de la relacion con otras , sino que tambien les conviene conocer el sentido en que se toman ; porque es evidente que 8 r.^{s} pueden representar que uno tiene 8 r.^{s} , y que debe 8 r.^{s} , pero desde luego se manifiesta quan distintamente influyen en el haber de un hombre los 8 r.^{s} como haber, y los 8 r.^{s} como deuda: esta se dice cantidad negativa; y los 8 r.^{s} que representan el caudal, se nombra cantidad positiva, y se distinguen con los signos + y – : si +a expresa un caudal , –a manifestará una cantidad igual , y contraria á +a; esto es una deuda." (p. 37).

Verdejo recurre a un ejemplo de deudas y haberes semejante al utilizado por Bails para la presentación de las cantidades negativas; en primer lugar emplea una situación cotidiana de bienes con marcado carácter relativo, luego muestra el carácter de contrarios entre las cantidades positivas y las negativas. En este caso, vincula su presentación con una relación dual de oposición. También atribuye un nuevo significado a los signos + y – para representar cantidades positivas y negativas.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.
"lº. Que no hay cantidades negativas si no es quanto se comparan con otras positivas: 2º. Que las cantidades negativas son cantidades reales y existentes, y homogéneas con las positivas de su especie siempre que se prescinda del sentido en que se toman." (p. 37).

Se extraen tres ideas de este párrafo:

- No se asume la existencia de las cantidades negativas como entes matemáticos independientes.
- Sólo pueden existir las cantidades negativas cuando hay comparación entre cantidades, es decir, las cantidades negativas tienen carácter relacional o relativo.
- Se otorga a la cantidades negativas una naturaleza real como

las positivas, si tan sólo se toma su valor absoluto, ignorando el sentido o cualidad de las mismas.

Esta versión de los negativos reduce su entidad a la de números relativos, basados en una relación de comparación entre cantidades opuestas.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.

No hay nueva información, distinta de la ya aportada en **TSN2**. En la resolución de problemas de álgebra Verdejo no sólo considera la magnitud (valor absoluto) de la cantidad, sino que además tiene en cuenta su sentido, cosa que no era necesaria en la aritmética. Verdejo presenta situaciones cotidianas que hacen necesario conocer el sentido.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.

No se ha encontrado mención ni referencia a esta interpretación de las cantidades negativas. Verdejo no introduce la noción de *cantidad menor que nada*; para este autor, la noción de cantidad es puramente relacional respecto de otra positiva con distinto sentido.

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.

"Si resolviendo una qüestion con la mira de saber las fanegadas de trigo que han entrado en un Almacen, nos saliese una cantidad negativa: por ejemplo –a nos dará á conocer que en el Almacen, lejos de haber entrado trigo, ha salido un número de fanegadas igual á a; por último si a expresa lo que se ha alargado una linea, –a representará lo que se ha acortado" (p. 37).

Para mostrar e ilustrar el significado de las cantidades negativas se presentan situaciones cotidianas reales y relativas, tales como las de deudas y haberes, introducir y extraer, alargar y acortar, como también hemos visto en **TSN2**. Todas ellas indican pares de acciones contrarias, en donde lo negativo se identifica con el carácter de opuesto o contrario a una acción dada. Se refuerza así la interpretación relativa de las cantidades negativas, por comparación, y que tienen sentido porque sirven para interpretar los resultados que aparecen en la resolución de una ecuación.

TSN7: Regla de los signos.

El tratamiento de las operaciones entre cantidades con signo lo realiza Verdejo en el capítulo segundo del Tomo I, dedicado al Álgebra. Las operaciones Aritméticas, que se tratan en el capítulo primero, no hacen referencia a números relativos.

"Para la substraccion de las cantidades algebraicas se escribe las cantidades del sustraendo con los signos trocados (esto es , que las

> *positivas sean negativas y las negativas positivas) […] diremos por regla general : que en la substraccion de las cantidades algebraicas , sean monomias ó polinomias , se deben trocar los signos del substraendo."* (p. 39-40*).*
>
> *"La multiplicación de las cantidades algebraicas monomias se executa [...] Es regla general que los signos semejante producen mas, y los encontrados menos. Acerca de lo qual hay quatro casos que considerar.*
>
> *Caso 1.º*
>
> *96. Se nos propone multiplicar +a por +b: multiplicar +a por +b es tomar +a tantas veces como expresa la b, y así el producto será +ab.*
>
> *Caso 2.º*
>
> *97. Sea –a la cantidad que queremos multiplicar por +b, haciendo la misma consideración que antes, hallarémos el producto –ab.*
>
> *Caso 3.º*
>
> *98. Multipliquemos ahora +a por –b: si b fuera positiva, tendríamos el primer caso (96), y el producto seria +ab; pero como b es negativa, nos dice que el producto se tome en un sentido opuesto, esto es negativamente, así el producto será –ab.*
>
> *Caso 4.º*
>
> 99. *Sean por último –a y –b las cantidades que hemos de multiplicar: si b fuera positiva, tendríamos el segundo caso (97), y el producto sera –ab; pero como b es negativa, nos dice que el producto se tome en un sentido opuesto, esto es positivamente, luego será +ab.*
>
> 100. *De todas estas consideraciones se deduce, que +a X +b=+ab:; -a X +b=-ab; +a X-b=-ab; y –a X –b=+ab."* (p. 41).

Se indica la regla para multiplicar signos; se toma como eje de la demostración la repetición sucesiva del valor, en dependencia directa del carácter del multiplicador (a favor o en contra).

Es reiterada la asignación, a todo lo precedido del signo menos, de un atributo de oposición.

> **TSN8:** Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.
> *"las cantidades negativas son cantidades reales y existentes, y homogéneas con las positivas de su especie siempre que se prescinda del sentido en que se toman."* (p. 37).

El valor absoluto de una cantidad positiva y una negativa son iguales, si bien su sentido es contrario, según se desprende de este párrafo.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

Para efectuar sustracciones en la aritmética es indispensable tener la noción de orden entre cantidades.

"Aunque no en todos los casos el minuendo es mayor que el substraendo, pues unas veces es igual, y otras menor, la operación siempre se hace restando el menor del mayor" (p. 10).

El principio de tricotomía se presenta para las cantidades generales:

"Esta expresión a = b, dice que la a es igual á la b.
Esta a > b, que la a es mayor que la b; y esta a <b, que la a es menor que la b." (p. 36)

Verdejo utiliza las nociones de razón y de progresión aritmética:

"Razón es la comparación que hacemos con dos cantidades de una misma especie.
Con dos miras muy diferentes pueden compararse una con otra dos cantidades ; esto es , pueden compararse con el fin de saber las veces que la una contiene á la otra , y tambien con el objeto de saber el exceso que hay de una á otra. [...]
La segunda comparación se llama razon aritmética, y lo que resulta exponente de la razon , y las dos cantidades que se comparan en una y otra razón términos de ella." (p. 98).

"La progresión aritmética es tambien una serie ó continuacion de términos , donde cada uno lleva al que le antecede , ó le sigue un mismo exceso , según sea creciente o decreciente." (p. 108).

A partir de las ideas anteriores presenta la secuencia de los números enteros como una progresión aritmética:

"[...] los términos de la progresión aritmética ÷ –3. –2. –1. 0. 1. 2. 3. &c. [...]" (p. 110).

"[...] ÷ –6. –5. –4. –3. –2. –1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c." (Anexo, p. 16).

Los términos de esta progresión muestran un orden, que puede justificarse fácilmente. El exceso de 3 a 2 es el mismo que el de 2 a 1, igual que el de 1 a 0, el de 0 a –1, de –1 a –2, etc. Aunque no se dice explícitamente, –1 es mayor que –2 ya que lo excede en 1, por igual motivo que 3 es mayor que 2. La secuencia es una progresión aritmética positiva, en la que se puede pasar de cada término al siguiente sumando la unidad, como hace Bails. No obstante Verdejo no llega a presentar estas consideraciones y no hay mención de relación de orden ni de comparación entre cantidades positivas y negativas.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
"[...] quando los signos son encontrados, como las cantidades negativas destruyen á las positivas, suele ser la suma en unos casos menor que uno de los sumandos, y en otras igual á cero." (p. 39).

No es claro si esto es un indicio de opuestos aditivos de números enteros, o si se refiere a la compensación-anulación de los números naturales relativos.

Las cantidades negativas aparecen como raíces:
"En quanto al signo que debe llevar la raiz es la regla general , que quando el exponente de esta es par , debe llevar el signo doble de mas y menos (que es ±) , pues a las dos tiene derecho." (p. 82).

Verdejo trabaja también las operaciones con potencias y define la potencia de exponente negativo:

"A todo quebrado se le puede dar la forma de entero , pasando el denominador al numerador como factor ; pero con un exponente de signo contrario […] (p. 56).

Esta idea la utiliza posteriormente para los logaritmos:

"[...] Suponiendo que la base logarítmica sea 10 , si la elevamos succesivamente á las potencias que expresan los términos de la progresión aritmética ÷ –3. –2. –1. 0. 1. 2. 3. &c. tendremos

$(10)^{-3} = \frac{1}{(10)^3} = \frac{1}{1000}$ *&c"* (p. 110).

El autor utiliza pues las cantidades negativas como raíces, como elementos de una progresión aritmética y como exponentes, con un significado estrictamente numérico, sin cuestionar su naturaleza.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.
"Hallar un número, que multiplicado su mitad por su tercio, y sumando con ello la misma mitad, produzca 30.
Si llamamos x este número, tendremos $\frac{1}{2}x \times \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = 30$, *ó lo que es lo mismo,* $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x = 30;$ *quitando el denominador 6,* $x^2+3x=180;$ *completando la equacion* $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 180 + \frac{9}{4}$, *y extrayendo la raiz quadrada* $x + \frac{3}{2} = \pm\frac{27}{2}$, *y por último* $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$, *que nos da x=12, y x=-*

15, de cuyos valores el 12 es el que cumple con la qüestion." (Anexo p. 33).

"Iº Que quando de los dos valores diferentes de la incógnita, el uno es positivo, y el otro negativo, el positivo es el que cumple con la qüestion en los términos que viene propuesta, y el negativo cumplirá en el caso de mudar algunas circunstancias de ella: 2º Quando los dos valores de x salen positivos, los dos cumplen con la qüestion; pero si son negativos no cumplen ninguno con ella, y cumplirán los dos con variar alguna de las circunstancias de ella: 3º Quando las raices son imaginarias, la question es indisoluble." (p. 145).

Se destacan tres ideas en estos párrafos:

- Las cantidades negativas surgen como consecuencia de operaciones algebraicas.
- Tan sólo se acepta la solución positiva para un problema, el valor negativo de la incógnita es desechado.
- Obtener un valor negativo como solución indica que se deben cambiar algunos aspectos, bien del enunciado, del planteamiento o de la interpretación.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

No se ha encontrado información o explicación correspondiente a esta categoría.

5.6.4 Análisis

5.6.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

Verdejo define el número, en **CCO1a** como *"la relación que tiene una cantidad con otra de su misma especie, á la que se ha dado el nombre de unidad [...]"*; esta noción relacional del número corresponde a la planteada por Stevin (1587) y Newton (Gómez, 1999) la cual hemos descrito en 4.6.4.1 y que en España en ese mismo siglo XVIII también utilizaron Cerda y Bails (ver 4.6.4.1 y 5.4.4.1); esta idea se reafirma en **CCO1.**

- ***Cantidad***

La cantidad es expresada, en **CCO2**, como *"todo aquello que comparado con su especie puede ser igual, mayor, ó menor"*. Verdejo aclara que en la aritmética sólo se tratan las relaciones de las cantidades que se expresan a través de números. La división entre aritmética y álgebra para el tratamiento de las cantidades es precisa, y la establece en términos de su generalidad.

A diferencia de Bails, quien sigue a Euler, Verdejo no sustenta la idea de cantidad sobre nociones empíricas sino que, al igual que Cerda, se basa en la noción de relación. Este planteamiento coincide con la idea de cantidad que presenta el francés Lacroix (Maz, 2000) la cual esta un tanto cercana a las ideas que más adelante propondrá Augusto Comte (reedición de 1998).

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

En **TSN3** se indica la existencia real tanto de las cantidades positivas como negativas, estas últimas, lo son si solamente se toma su valor absoluto. Pese a ello, las cantidades negativas no tienen existencia propia, sino es a través de su relación con las correspondientes cantidades positivas.

Como concepto, a la cantidad precedida por un signo menos (–) se le asocian una serie de términos diversos, estos son: cantidad negativa, negativamente, sentido opuesto y contrario; todos ellos con igual significado respecto a una cantidad de signo positivo o sin signo.

Verdejo aclara que la consideración para las cantidades negativas es una cuestión que surge en el álgebra pero no en la aritmética. No entra en consideraciones sobre si estas son falsas o por qué aparecen; se limita a indicar que surgen al realizar operaciones algebraicas y las interpreta con naturalidad, como se aprecia en **TSN4**. Tampoco menciona qué sean cantidades menores que nada, expresión a la que no atribuye significado ya que cada cantidad negativa es idéntica a otra positiva, pero con sentido distinto, **TSN5**.

Pese a lo anterior, los valores negativos obtenidos para las incógnitas, como consecuencia de las operaciones, se desechan y sólo se dan por válidos los valores positivos, o bien es necesaria una reinterpretación del enunciado del problema para encontrar sentido a la solución negativa, como hace en **TSN11.**

5.6.4.2 Análisis de contenido

- ***Conceptos básicos***

En **TSN1** los signos + y – son utilizados para señalar las operaciones aritméticas de adición y sustracción, que deben realizarse con las cantidades a las cuales preceden. Asimismo, el signo menos (–), cuando antecede a un valor, representa lo contrario de aquello que significa sin signo alguno, esto indica un sentido opuesto, como se observa en **TSN2** y **TSN6**.

Otro significado atribuido a los signos + y – es distinguir cuando una cantidad es positiva o negativa, como se indica en **TSN4**, es decir, identificar el carácter o condición de la cantidad.

Incógnita y generalidad están muy presentes en el texto. Se utilizan para dar idea de cosas que pueden adquirir valores diferentes según la situación, como se observa en **TSN6** y **TSN9.**

- ***Fenomenología/Justificación***

La justificación que se da para la aparición de las cantidades negativas está en la necesidad que existe en el álgebra por conocer las relaciones que se establecen entre cantidades así como el sentido en que son tomadas. En este caso presenta una justificación muy similar para cantidades algebraicas.

En el texto se recurre a situaciones cotidianas de carácter relativo para dar idea y ejemplo de ellas, de esta forma surgen analogías a deudas, caudales, haberes, entradas, alargamientos y acortamientos, como se aprecia en **TSN2**, **TSN4** y **TSN6**.

En general, los ejemplos que Verdejo utiliza en el texto se articulan alrededor del significado de las cantidades negativas como opuestas o contrarias a las positivas en sus efectos.

Esta noción, que presenta mediante ejemplos, la eleva a categoría general como vemos en **TSN2**, donde se refiere a cantidades con magnitud y sentido. Sin embargo, cuando hay que dar interpretación a los resultados negativos de una ecuación Verdejo recuerda que hay que contextualizar el significado de las soluciones negativas, como hace en **TSN11.**

- ***Estructura de orden***

Se presentan la relación de orden y los signos correspondientes, sin embargo no se aplican estas comparaciones de manera expresa. Cuando indica: *"[...] los términos de la progresión aritmética ÷ –3. –2. –1. 0. 1. 2. 3. &c. [...]"*, la secuencia de los enteros se presenta ordenada. Aunque no hay en el texto mención explícita sobre ese orden está clara dicha ordenación a partir de **TSN9**, y se pueden inferir algunas propiedades de dicha relación:

a) Los negativos son menores que 0.
b) Cualquier negativo es menor que cualquier positivo.
c) El orden entre negativos es el orden entero y no el orden relativo.

- ***Estructura algebraica***

Para Verdejo restar es "trocar el signo" y esta es la explicación que se proporciona para la sustracción. En la justificación de la regla de los signos para la multiplicación que se da en **TSN7**, el producto se presenta como reiteración de cantidades, es decir, como un producto escalar. Luego en su introducción, la estructura de los negativos se basa en una noción relativa.

Es claro que, en el texto, las cantidades negativas se operan posteriormente desde una estructura algebraica entera, observándose en **TSN10** y al utilizar valores literales y plantear reglas de carácter general.

- ***Uso algebraico***

Las cantidades negativas se toman como valor resultante para una incógnita; como resultado de operaciones algebraicas para dar solución a un problema; para variar algunas condiciones iniciales del planteamiento del problema de la forma como se presenta en **TSN11**. El origen relativo de los negativos se mantiene en la interpretación y aceptación de los resultados negativos.

También se utilizan como números en los términos de un polinomio, para expresar exponentes, logaritmos, raíces y como elementos de progresiones aritméticas, como se ve en **TSN10**.

La distinción inicial que hace Verdejo entre Aritmética y Álgebra marca algunas de las dificultades que se encuentran en el tratamiento de los negativos. Cuando trabaja con cantidades en general, opera con expresiones simbólicas que abarcan dos tipos de signos, a los que trata de dar un significado relacional mediante ejemplos con cantidades relativas, que facilitan relaciones de comparación. Es decir, la noción algebraica (cantidad en general) trata de sustentarla mediante significados aritméticos (cantidades que se expresan mediante números relativos).

El tratamiento que hace de las operaciones es algebraico y las reglas quedan bien definidas; muestra incluso una cierta intuición de la noción de simétrico.

También el concepto algebraico permite establecer las nociones de razón y progresión aritmética, con la distinción entre progresiones crecientes (cuyos términos están ordenados de menor a mayor) y decrecientes (cuyos términos van de mayor a menor). A partir de ahí surge una importante progresión aritmética creciente: …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…, que es la secuencia de los números enteros. Verdejo no estudia esta progresión, sólo la utiliza para obtener los logaritmos decimales de las potencias negativas de 10, pero no cabe duda que dicha progresión muestra una concepción avanzada de la relación de orden entre los números enteros. Esta relación proviene del concepto algebraico de progresión aritmética **TSN9**.

5.6.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r[*]

Primera diferencia: Orden total – orden parcial o doble natural con

[*] Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1**. En **TSN6** se expresa *"si a expresa lo que se ha alargado una línea, -a representará lo que se ha acortado"*, donde se hallan indicios de una atribución de significados, signos y adjetivos duales relativos de manera arbitraria, los cuales dependen de una circunstancia particular, acordes con los planteamientos de González Marí (p. 214) para los naturales relativos.

En **TSN2** se dice que *"desde luego se manifiesta quan distintamente influyen en el haber de un hombre los 8 r.ˢ como haber, y los 8 r.ˢ como deuda"*. Lo cual supone una atribución de significado dual.

En **TSN11** se afirma: *"Quando los dos valores de x […] son negativos no cumplen ninguno con ella, y cumplirán los dos con variar alguna de las circunstancias de ella."* En este caso hay algo más que indicios, ya que el significado atribuido a las soluciones negativas se rechaza, y exige una reinterpretación para dotarle de significado.

Se acepta la presencia del primer indicador

Segundo indicador: **a_2**. En este trabajo de Verdejo, no hemos hallado información para este indicador que permita señalar el tratamiento de los negativos en el campo entero o relativo.

Tercer indicador: **a_3**. La comparación de medidas con valores negativos se trata en el texto de Verdejo cuando sostiene en **TSN3** *"que no hay cantidades negativas si no es en quanto se comparan con otras positivas […] que las cantidades negativas son […] homogeneas con las positivas de su especie siempre que se prescinda del sentido en que se toman"*, pero esta comparación no se refiere al orden entre cantidades negativas. No hay evidencia de la presencia de este indicador.

Independientemente de lo anterior, la relación de orden entre los números está reflejada en **TSN9** *"-3.-2.-1. 0. 1. 2. 3. &",* mediante el orden usual entre los enteros negativos, lo cual parece sustentar que el orden que emplea Verdejo es el orden entero.

Cuarto indicador: **a_4**. El trabajo de Verdejo no permite obtener información sobre este indicador por motivos similares a los dados en el indicador anterior.

Como balance para esta primera diferencia D_1, tenemos que hay algunas evidencias de su presencia, por lo cual parece que respecto a la relación de orden los números naturales relativos tienen presencia parcial en el trabajo de Verdejo.

Segunda diferencia: Sin primer elemento – con primer elemento

Primer indicador: **b_1**. En las ejemplificaciones y fenómenos relativos que se presentan en el texto nunca se hace referencia a la cantidad nula, razón por la cual no es posible apreciar evidencias sobre la presencia de este indicador.

Por otra parte, las progresiones aritméticas presentadas en **TSN9** *"[...] ÷ -6.-5.-4.-3.-2.-1.0. 1. 2. 3. 4. 5. 6."* y *"-3.-2.-1. 0. 1. 2. 3. &"*, consideran la existencia de valores numéricos superiores e inferiores a cero, con lo cual se tiene que el cero es un número de referencia, mas no un primer elemento; esto apunta a la estructura de los números enteros.

Segundo indicador: **b_2**. Durante el trabajo algebraico con ecuaciones se escribe *"[...] que nos da x=12, y x=-15"* utilizándose una simbolización matemática conocida y determinada para los números enteros (González, 222).

También se escribe en **TSN4** "*porque es evidente que 8 r.^{s} pueden representar que uno tiene 8 r.^{s}, y que debe 8 r.^{s}; pero desde luego se manifiesta quan distintamente influyen en el haber de un hombre los 8 r.^{s} como haber, y los 8 r.^{s} como deuda",* hallándose indicios de una simbolización inexistente para los negativos, así como una representación acompañada de información sobre el tipo de dualidad que representa; síntoma de la presencia de relativos.

Tercer indicador: **b_3**. No hemos hallado información sobre las transformaciones con números negativos para este indicador.

De manera general, indicamos que para esta segunda diferencia D_2 hay presencia parcial de los números naturales relativos en Verdejo.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas – discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

El paso de una zona de valores numéricos positivos a la zona de valores negativos y viceversa está reflejada en **TSN9** mediante las progresiones aritméticas *"[...] ÷ -6.-5.-4.-3.-2.-1.0. 1. 2. 3. 4. 5. 6."* Y *"-3.-2.-1. 0. 1. 2. 3. &"*, de tal forma se presenta un cruce natural entre una zona y otra; el cero no significa ningún punto de ruptura, tan sólo es un elemento numérico más.

Estas secuencias numéricas enteras muestran que, algebraicamente, hay continuidad entre negativos y positivos, con un único cero, que no es valor inicial. De tal forma que esta tercera diferencia señala a los números enteros.

Cuarta diferencia: Cero único – cero doble (natural relativo)

No hemos hallado en este trabajo de Verdejo información alguna que permita establecer el cumplimiento de esta diferencia para los números naturales relativos; esto es coherente con la no existencia de una discontinuidad de medidas (D_3).

Quinta diferencia: Composición aditiva: adición entera- adición natural y anulación-compensación.

Como se ha comentado en la estructura que el autor utiliza para la multiplicación y la adición es algebraica por lo que se presenta parcialmente el tratamiento relativo. Por esta razón creemos que hay indicios escasos de la quinta diferencia D_5, en el campo de los naturales relativos.

La siguiente tabla presenta el resumen del análisis hecho al texto de Verdejo:

Tabla 5.3 Diferencias entre $\mathbf{Z}$ *y* $\mathbf{N_r}$ *en el Compendio de Verdejo*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
F. Verdejo	**Si**	**¿?**	**No**	**¿?**	**P**	**No**	**P**	**¿?**	**P**	**No**	**No**	**P**

En cuanto a balance de indicadores relativos al uso y presencia de los naturales relativos por parte de este autor observamos la coincidencia con las evidencias obtenidas para Tosca con anterioridad. Hay menor presencia de indicadores que en Bails, lo cual supone un uso restringido de los naturales relativos y un tratamiento más moderno de las cantidades y números negativos.

5.6.6. Tratamiento global de los negativos en el *Compendio de Matemáticas puras y mixtas.*

En el capítulo de aritmética no hay mención a los negativos. En el capítulo segundo, dedicado al álgebra, se les otorga una naturaleza real bajo la consideración del valor absoluto. En los ejemplos presentados se utilizan situaciones cotidianas donde intervienen abundantemente cantidades relativas, que denotan un carácter de opuestas respecto a otras cantidades. La conceptualización y posteriores operaciones desarrolladas por medio de sus propiedades se explican bajo una estructura mixta entre los números relativos y los números enteros, como ocurre en el uso de relaciones de anulación/compensación para la suma y en la significación escalar del producto para la regla de los signos.

En el texto hay una variedad de situaciones lógico-duales y modelizaciones de fenómenos asociadas a los números naturales relativos, que coinciden con la interpretación aritmética de la noción de cantidad. El tratamiento algebraico coincide en algunos aspectos con la caracterización de los enteros, si bien hay propiedades importantes que no se tratan.

Las situaciones utilizadas para ser modelizadas por medio de los números negativos son fenómenos de comparación (deudas y haberes), aritméticos (progresiones) y algebraicos (operaciones y ecuaciones); estos son descritos mediante representaciones aritméticas y algebraicas.

Para el autor, los negativos surgen como resultado de efectuar operaciones algebraicas. En procesos de resolución de problemas o determinación de raíces de ecuaciones solamente se aceptan las respuestas positivas; la obtención de valores negativos indican que deben variarse ciertas consideraciones, ya sean estas de la formulación, planteamiento o la interpretación del resultado.

Mediante la presentación y tratamiento algebraico dado se elude entrar en reflexiones o consideraciones sobre los negativos más allá del aspecto puramente matemático. Sin embargo, cada vez que hay que ejemplificar para dotar de significado a las expresiones negativas, las cantidades que se utilizan son relativas, lo cual explica la persistencia de los indicadores de González Marí.

Desde una perspectiva matemática estamos ante un autor que pretende divulgar las innovaciones recientes, mediante su incorporación en un manual que se va a utilizar como texto en unos estudios superiores generales. El mayor interés de Verdejo no parece estar en los contenidos aritméticos y algebraicos, que son suficientemente conocidos, sino en las nuevas nociones del cálculo diferencial e integral. Por ello la primera parte del Tomo I del *Compendio* es un manual práctico de aritmética y álgebra elementales, sin mayor pretensión. El uso que hace de las cantidades y números negativos coincide con una posición ecléctica que consolida la noción de orden y la estructura de los números enteros pero, sin embargo, la justifica y ejemplifica mediante situaciones relativas.

La presencia de los indicadores D_1, D_2 y D_5 así lo muestra. El conflicto para dotar de significado a las soluciones negativas de los problemas planteados es el dato mas significativo de la tensión entre estas dos interpretaciones.

La vinculación con la obra de Tosca y su superación se manifiestan a lo largo del análisis que hemos realizado de este texto, al menos en lo relativo a los números negativos.

5.7 Tratado elemental de matemáticas. La aritmética y álgebra. (1813)

5.7.1. *Autor*

José Mariano Vallejo. (*n*. en Albuñuelas -Granada-, el 30 de mayo de 1779; *m* en Madrid, el 4 de marzo de 1846) (**CA1**). Matemático y pedagogo, estudió en la Universidad de Granada; su formación matemática se desarrolló en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando en Madrid, bajo la dirección de Antonio Varas, a quien reconoce como su maestro (pp. II y III, Prólogo del Tratado). En esta Academia obtiene en 1801 (cuando todavía era estudiante) el cargo de sustituto de las cátedras de Matemáticas (**CA2, CA3**).

Vallejo ocupa un lugar destacado en la historia de la Educación y, en particular, en la historia de la Educación Matemática en España. Es un claro ejemplo de hombre ilustrado, con buena formación filosófica, enciclopédica y científica, cuya orientación política estuvo influenciada por las ideas liberales europeas así como por las corrientes de pensamiento provenientes de la Revolución Francesa. Su juventud transcurre durante la última etapa de predominio ilustrado en la política española, siendo testigo del cierre de fronteras impuesto por Carlos IV. Como la época en la que vive, Vallejo tiene una biografía compleja y brillante, diversa y contradictoria; su presencia en la vida pública española de estos años está vinculada permanentemente con la educación y con la ciencia. Vallejo es un hombre progresista, comprometido con el cambio y la innovación en España, lo cual se manifiesta en multitud de actuaciones, en su participación activa en la política científica y educativa, en la creación y gestión de las nuevas instituciones que surgen en la primera mitad del siglo XIX para el desarrollo de la cultura, la técnica y la investigación en España y en América (Gentil, 1998; Hernaz y Medrano, 1990). En 1802 Vallejo obtiene por oposición la *Cátedra de Matemáticas, Ataque, Fortificación y Defensa de plazas* en el Real Seminario de Nobles de Madrid, sustituyendo a Tadeo Lope, e introduce mejoras en el desarrollo de las clases (Enciclopedia Espasa, 1928; Garma, 2002) (**CA4**).

En la Guerra de la Independencia colabora con el cuerpo de artillería; de esta forma trabaja en el laboratorio de fuegos artificiales estudiando la trayectoria que seguían las granadas lanzadas por los franceses durante el sitio de Cádiz. Durante este periodo ocupa importantes cargos en la administración pública: Oficial Mayor del Archivo del Ministerio de Gobernación y jefe de la Sección de Caminos y Canales. Asimismo fue promotor en la creación de la *Academia Militar de San Fernando* (**CA4**). El 28 de abril de 1813 toma posesión como diputado en las Cortes de Cádiz en representación de la provincia de Granada, dando así inicio a su carrera política (Hernaz y Medrano, 1990) (**CA7**).

A lo largo de toda su vida Vallejo muestra su adhesión a las ideas liberales, lo cual fue notorio durante el gobierno constitucional, donde trabaja con Argüelles en la Secretaría de Estado y Gobernación en 1820, y en 1821 es nombrado Vocal de la Dirección General de Estudios por Quintana. Al finalizar el trienio liberal, en 1823, tiene que exiliarse de Madrid y en 1825 sale de España hacia Inglaterra como otros tantos intelectuales españoles de la época; luego se traslada a Francia donde fija su residencia hasta su regreso. Durante estos años se mantiene dando clases de matemática en las ciudades en que reside y aprovecha para actualizar sus conocimientos científicos:

> *"Desplomado el sistema constitucional, no pudiendo venir a mi casa de Madrid ; por impedirlo el decreto espedido en Jeréz en 4 de octubre de 1923 , viagé por el estrangero , y traté de aprovechar esta coyuntura para adquirir nuevos conocimientos"* (p. XV, Tomo I; cuarta edición de 1841) (**CA3**).

Su preocupación patriótica le lleva a recomendar el cultivo de la ciencia como sistema de regeneración política:

> *"..perdidas las Américas , es indispensable para que la España no desaparezca del cuadro de las demás Naciones , que cultive las Ciencias Naturales y Exactas…"* (p. XVI. Tomo I, cuarta edición).

El exilio tuvo efectos positivos para Vallejo: la posibilidad de contrastar sus ideas educativas con las que se practican en otros países y la oportunidad de relacionarse con la escuela matemática francesa. Asiste a cursos de Lacroix, Laplace, Cauchy y Gay-Lussac, recibe de ellos una notable influencia matemática y didáctica, que se aprecia en su obra; fruto de esta etapa fue la buena amistad que mantuvo con Pierre Simón Laplace (**CA5**).

Luego de su regreso a España en 1832 es nombrado Vocal de la Inspección General de Instrucción Pública y encamina su trabajo a la difusión de nuevos métodos de enseñanza para lectura y matemáticas en la Escuela Primaria, métodos trabajados durante su estancia en el extranjero. Su iniciativa lleva a la creación de Escuelas Normales en todo el reino; personalmente contribuye a fundar dos Normales en Madrid y a la ampliación de los programas de estudios para maestros. Vallejo realiza su principal actividad en estos años impulsando nuevas ideas e instituciones que desarrollan la política educativa liberal (**CA7**).

En el campo científico Vallejo contribuye a la difusión de las ideas de Cauchy en España y América, mediante la publicación de la segunda edición del Tomo II del *Tratado Elemental* (1832), dedicado al cálculo diferencial e integral. Domina y difunde las ideas de Poisson, Cauchy y Fourier, que presenta en varias memorias (**CA5**).

A la vuelta del exilio se incorpora a la *Real Sociedad Económica Matritense de Amigos del País*, es colaborador en la fundación del *Ateneo de Madrid*, del que fue Presidente, y de la *Real Academia de Ciencias Naturales*. Nuevamente regresa a la política, llegando a senador por Granada en 1844. Tampoco se debe olvidar su faceta como editor e impresor a través de su editorial Garrasayaza (**CA4, CA7**).

Entre muchos otros textos publicó: *Adiciones a la geometría de D. Benito Bails* (1806), *Aritmética para niños* (1806), *Memoria sobre la curvatura de las líneas en sus diferentes puntos, sobre el radio de curvatura y sobre las evolutas* (1807), *Tratado completo del arte militar* (1812), *Tratado elemental de Matemáticas* (1812-1813), *Compendio de Mecánica Práctica* (1815), *Compendio de Matemáticas puras y mixtas* (1819), *Teoría de la lectura* (1824), *Ideas primarias que deben darse a los niños acerca de los números* (1833), *Nociones geográficas y astronómicas para comprender la nueva división del Territorio Español* (1834), *Memoria de la separación de la plata que contiene el plomo* (1839), *Nueva construcción de caminos de hierro* (1844) y *Aclaraciones acerca del modo de realizar el abastecimiento de aguas de la capital* (1845) (**CA6**).

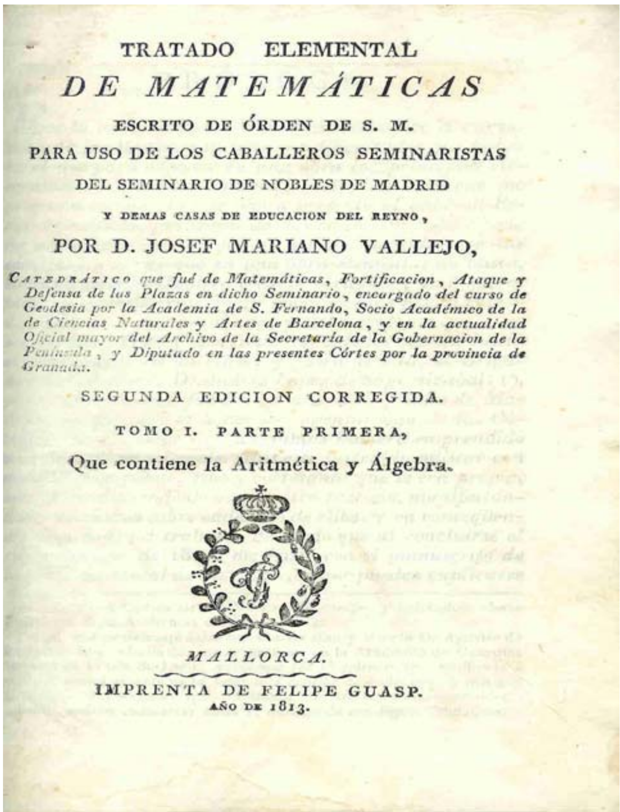
Entre los trabajos prácticos que realizó, se cuentan la nivelación de los alrededores de Madrid, la medida del perímetro de la ciudad, y la de la altura de los puentes de Segovia y Toledo.

Una mayor información biográfica se puede hallar en Arenzana, 1990; Camacho, 2000; Garma, 2002; Gentil, 1998; Hernaz y Medrano, 1990; Vea, 1995, y en los Prólogos e Introducciones del *Tratado Elemental* y del *Compendio* del propio Vallejo (**CA8**).

5.7.2. Caracterización del texto

Tratado elemental de matemáticas. Tomo I. *La Aritmética y álgebra*. Segunda edición. (1813). Madrid: Imprenta Garrasayaza (**CGO1**). La primera edición también es de 1813 (**CGO2**).

El tomo de la segunda edición, que es el que seguimos en este estudio, consta de 347 páginas de texto, más otras 22 de introducción, 3 de prólogo y el índice. Tiene dos partes: la primera corresponde a la *Aritmética*, desde la página 1 a la 158; una segunda parte trata del Álgebra, *Principios* *del álgebra*, desde la página 159 hasta el final. La cuarta edición incorpora una *Segunda Parte del Álgebra, de más de 200 páginas y* además contiene ocho apéndices y un índice; en el índice se incluye un listado con las 28 adiciones principales que incorpora la cuarta edición, ninguna de ellas relativa a las nociones que nos ocupan (**CGO3**).



TRATADO ELEMENTAL

DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS

DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID

Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REYNO,

POR D. JOSEF MARIANO VALLEJO,

CATEDRÁTICO que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario, encargado del curso de Geodesia por la Academia de S. Fernando, Socio Académico de la de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona, y en la actualidad Oficial mayor del Archivo de la Secretaría de la Gobernacion de la Península, y Diputado en las presentes Córtes por la provincia de Granada.

SEGUNDA EDICION CORREGIDA.

TOMO I. PARTE PRIMERA,

Que contiene la Aritmética y Álgebra.

MALLORCA.

IMPRENTA DE FELIPE GUASP.

AÑO DE 1813.

En la cuarta edición el autor incluye en el 8º Apéndice un *Cuadro Arquitectónico de las Matemáticas,* tomado de Wronski, donde mediante un diagrama, se presentan las distintas partes de las matemáticas y sus relaciones, junto con el objeto de estudio en cada caso.

En el *Cuadro Arquitectónico* la Aritmética es una parte de las Matemáticas Puras, la *Algoritmia*, que se ocupa de los *Hechos de los números*. El Álgebra, por el contrario, se ocupa de las *Leyes de los números* y tiene dos partes. La primera parte, *Teoría del Álgebra*, se ocupa de *lo que es*; la segunda, *Técnica del Álgebra*, se ocupa de *lo que es necesario hacer*. La primera se considera objeto del entendimiento, mientras que la segunda es objeto de la voluntad, mostrando así su dependencia de la filosofía racionalista y de las ideas de Kant, en el año de la cuarta edición de esta obra (**CGO3**).

Los contenidos de la primera parte del Tomo I son las cuatro operaciones elementales con números enteros (naturales), fraccionarios y decimales. A continuación, en la parte de los Principios del Álgebra, se tratan las cantidades algebraicas, las operaciones con ellas, los quebrados literales, las cantidades imaginarias y sus operaciones, la resolución de ecuaciones, elementos algebraicos aplicados al comercio, progresiones, logaritmos y permutaciones, concluyendo con algunas propiedades de los límites (**CGO3**).

El objetivo de la obra es educativo; el propio autor lo destaca:
“Esta obra en que se exponen todas las nuevas teorías descubiertas hasta el dia, se escribió en virtud de órden del Gobierno, para que sirviese de

texto en todas las casas de educación de la Nacion Española, y fue aprobada por el primitivo consejo de Regencia para que pudiese servir de texto en las Universidades y demas estudios, tanto de la España ultramarina como de la Europea” (Prólogo p. V, segunda edición).

Este texto inicia el estudio de las matemáticas con la exposición de conceptos elementales tanto científicos como filosóficos y metodológicos. En la introducción dice Vallejo que *“se dan unos principios de Metafísica suficientes para entrar con utilidad en el estudio de las Matemáticas*”. Presenta las nociones y conceptos de *cuerpo, sensación, idea, abstracción, atención, análisis, relación, razón, juicio, proposición, razonamiento, entendimiento, inducción, verdad, axioma, teorema, demostración, definición, problema, corolario, postulado y lema*. Así:

> *“Problema es una proposición en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas, debemos averiguar alguna otra desconocida”* (p. VIII, Tomo I, segunda edición).

Reconoce la influencia de filósofos racionalistas, como Locke y Condillac y *“otros autores célebres de Metafísica”*. De estos autores deriva una serie de principios que utiliza en la articulación de la obra: *“Las cualidades necesarias que debe tener una obra elemental son la exactitud, la claridad, la brevedad, la sencillez, la fecundidad y la elegancia*” (p. VIII, T. I, cuarta edición) (**CGO5**).

Igualmente reconoce la influencia de matemáticos relevantes. En el texto cita a Bourdon y a Laplace; así mismo toma algunos métodos de resolución de ecuaciones del texto de James Wood y en algunos apartados sigue el álgebra de Kellan (**CGO5**).

La preocupación didáctica de Vallejo se manifiesta a lo largo de todo el texto y, de manera explícita, en el Prólogo:

> *“Me propuse reunir todos los principios fundamentales de la ciencia , con el fin de facilitar á nuestros jóvenes el cabal conocimiento de los escritos magistrales de los matemáticos : por cuyo motivo introduje y comprendi en esta obra muchas teorías importantes á que comúnmente no se daba ningún lugar en los libros elementales […] Hice el mas profundo estudio de los modernos autores de Metafísica para penetrarme bien del método que debía seguir en su esposición ; y cuando ya tenía escritos los tratados en borrador , los distribuía entre mis discípulos para que los estudiasen ; y al explicármelos , pudiese yo deducir cuál era el medio que menos dificultades les ofrecía. Y entre los diversos modos que puede haber de esponer una misma doctrina , preferi constantemente aquel que , presentando la ciencia en el grado de adelantamiento que tenia , conciliaba mejor la claridad, la sencillez, la facilidad en la ejecución de las operaciones y la exactitud. Para conseguir esto puse el mayor esmero en tres puntos muy esenciales ,*

cuales son : la elección de doctrina , modo de esponerla y extensión que debía dar á cada ramo en particular" (p. I, Tomo I, cuarta edición).

"El mayor absurdo en que pueden incurrir los escritores de elementos , es el suponer que los principiantes saben ya lo mismo que van á aprender ; pues esto no es dar á conocer las ciencias , sinó es querer darse á conocer ellos…" (p. IV, Tomo I, cuarta edición) (**CGO4**).

Esta obra se considera un manual de matemáticas de gran corrección, que integra avances científicos europeos de numerosos campos y supera a los *Elementos* de Bails. La obra fue libro de texto en la Academia Militar de San Fernando desde su publicación Su valía y oportunidad se aprecian en el dictamen que emitió la Universidad de Salamanca en 1815 para su uso como libro de texto en centros docentes. Igualmente, en 1816, el Consejo de Indias recomienda el uso del *Tratado* en ambas Américas, islas adyacentes y Filipinas (Gentil, 1998). El *Compendio* se considera un resumen abreviado del *Tratado* y, por ello, la difusión del aquel trabajo se valora como reconocimiento de la importancia de este primero. La influencia de esta obra se muestra por las sucesivas reediciones hechas, desde la primera hasta la cuarta, luego de casi 30 años después de publicarse la primera. También se realizan ediciones en el extranjero, algunas fraudulentas. Machado (2000) estudia la influencia de la obra matemática de Vallejo en el Colegio de San Ildefonso de México a mediados del siglo XIX, e ilustra sobre la historia de las ediciones del *Compendio* hechas en París, sin autorización del autor, *Para uso de los Colegios de América y los Colegios de México*, en las que se incluían trabajos de otros autores franceses. Vallejo denuncia y se queja de ello en el apéndice octavo:

"ha sabido el autor, con sentimiento, que en Francia le han reimpreso sus obras; lo cual perjudica no solo á sus intereses, sino también á los del público; pues conteniendo gran número de inexactitudes y errores, se originan muchas penalidades á los que estudian y enseñan por ellas (p. 553, Tomo I, cuarta edición)" (**CGO6**).

Inicialmente Vallejo indica lo que entiende por Aritmética: *la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad en cuanto está espresada por numeros*" (p. 1, Tomo I, segunda edición).

Luego define cantidad y número así:

Cantidad es "*todo aquello que puede ser mayor ó menor, ó todo lo que es suceptible de aumento ó disminucion*" (p. XIII, Tomo I, segunda edición) (**CCO2**).

Número "*es el resultado de la comparación de la pluralidad o muchedumbre con la unidad ó el que espresa la reunion de muchos individuos o unidades*" (p. 1, segunda edición) (**CCO1**).

También lo define diciendo que número *"es una pluralidad determinada"* (p. 12. Tomo I, cuarta edición) (**CCO1**).

Mas adelante, en el Álgebra, continúa:

> *"..de aquí en adelante vamos a tratar de ella* (de la cantidad) *generalmente, esto es , considerándola sola en cuanto es suceptible de aumento o disminucion.."* (p. 159, Tomo I, segunda edición) (**CCO2).**

Estas definiciones son relacionales: la definición de cantidad es la de Euler y procede de un proceso de comparación, trata de aquello que es susceptible de aumento o disminución, es decir, de ser mayor o menor por comparación con otras cantidades. Igualmente, la noción de número utiliza términos de la definición euclidiana pero es relacional, en el sentido de Stevin y Newton. En el primer caso el uno no sería considerado como número; sin embargo, Vallejo indica que:

> "*Algunos sostienen que el 1 no es numero, pero no es una coleccion de unidades; pero como la verdadera idéa de número es que sea el resultado de la comparación de una cantidad con la unidad, puede resultar de esta comparacion que la cantidad que se compara sea igual con la misma unidad; y así no se puede pone en duda el que 1 sea un número como cualquiera otro*" (p. 12, Tomo I, cuarta edición) (**CCO1**).

Estamos, pues ante una noción de número explícitamente relacional e, incluso, preconjuntista.

Respecto a número entero determina:

> "*es aquel que se compone exactamente de unidades, como todos los que hemos considerado hasta aquí"* (p. 11, Tomo I, segunda edición) (**CCO3**).

Vemos que las nociones de número y cantidad —para Vallejo— aparecen estrechamente asociadas en la parte dedicada a la Aritmética, lo cual muestra la dependencia que asigna a los números positivos de las actividades de medida y los fenómenos cuantitativos en que se sustentan. No ocurre así con el Álgebra, que es:

> *"la ciencia que trata del cálculo de las cantidades consideradas en general , esto es , independientemente de toda magnitud numérica y de todo sistema de numeración."* (pp. 159, Tomo I, segunda edición) (**CCO4)**.

Considera además que:

> *"El Álgebra […] es la ciencia que trata de reducir á reglas generales todas las cuestiones que pueden ofrecerse acerca de las cantidades. El Álgebra tiene dos partes: la 1ª trata del modo de ejecutar las operaciones de sumar, restar, multiplicar etc. con las cantidades espresadas por letras; y la 2ª del modo de servirse de este cálculo para la resolución de los problemas"* (p. 160, Tomo I, segunda edición) (**CCO4**).

Y continúa:

> *"La segunda parte fue la primera que se inventó […] resolviendo un gran número de problemas importantísimos. Luego que se vió su utilidad y excelencia , se echó de ver que era necesario explicar en general el modo de ejecutar la primera parte"* (p. 160, Tomo I, 2ª edición) (**CCO4**).

Vallejo parece reconocer en este segundo párrafo el carácter dual (aritmético-algebraico) de las cantidades negativas.

Además de los números enteros, trata los quebrados y las fracciones decimales así como también las cantidades o "expresiones" imaginarias y cita a Wronski, quien opina que se deberían llamar *"entidades ideales, y que son unos seres privilegiados y eminentemente lógicos*" (Tomo I, Cuarta edición) (**CCO6**).

Los números negativos se presentan en el texto en el inicio del Álgebra (pp. 163-165). Explica que hay dos tipos de cantidades: las positivas y las negativas; luego procede a realizar problemas con los que ejemplifica tales cantidades; no menciona la obra de Kant y, seguramente, no trabajó con ella, pero sí es cierto que está familiarizado con las ideas que aparecen en *Las magnitudes negativas,* publicado 50 años del *Tratado,* en 1763. Vallejo era un buen lector y conocía las publicaciones matemáticas más importantes. Cuando explica la multiplicación algebraica, señala las reglas de la ley de los signos para la multiplicación y presenta las demostraciones que para ella dan Laplace, Euler, Bois-Bertrand y Hutton. Los negativos son utilizados: para solucionar ecuaciones, como raíz de una ecuación, como logaritmo de quebrados, como exponentes y para indicar cuándo se obtienen cantidades imaginarias. (**CCO5**, **CGO5**).

Vallejo no incluye representaciones gráficas para ilustrar las cantidades enteras o negativas o, incluso, los números enteros (**CGO7**).

Los contenidos de la obra eran los de mayor difusión durante la reforma del Plan de Estudios del 4 de agosto de 1836 y aún luego del Plan de Estudios de septiembre de 1845 seguía siendo una obra que se utilizaba en la asignatura de la segunda enseñanza elemental:

> *"Complemento de la Aritmética. Álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive. Geometría. Trigonometría rectilínea. Geometría práctica"* (Tomo I, cuarta edición) (**CGO6**).

5.7.3. Tratamiento dado a los negativos

Algunos de los párrafos seleccionados relativos al número negativo son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y –.
"Se indica esta operación poniendo este signo + entre los sumandos, el cual se lee mas;" (p. 15, segunda edición). *"de manera que a+b expresa que el valor de la cantidad b se debe añadir a la cantidad a"* (p. 162, segunda edición).

"(...) este signo es el – que se lee ménos (…)" (p. 20. segunda edición). *"El signo – [señala] la sustracción y se lee menos, de manera que a–b expresa que el valor de la cantidad b se debe restar del valor de la cantidad a"* (p. 162, segunda edición).

Los signos más (+) y menos (–), indican las operaciones de adición y sustracción, tanto en la introducción de la Aritmética como en la del Álgebra.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.
"A las cantidades, que conspiran al fin que se propone el calculador, se les da el nombre de cantidades positivas, y á las que conspiran á un fin opuesto el de negativas." (p. 163, segunda edición).

Según Vallejo, la cualidad de cantidades positivas o negativas la establece la intencionalidad del calculador. Si están a favor de las intenciones de quien realiza las operaciones, son positivas; y, si no lo están, son negativas. La justificación es Aritmética y basada en los cálculos.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.
"Acerca de las cantidades negativas se han dicho muchos desatinos ; porque se les ha llamado cantidades falsas, y se ha dicho que no existían, etc.; pero en la idea de cantidad negativa no entra otra sino la de conspirar al fin contrario al que el calculador se propone, debiendo advertirse que una misma cantidad puede ser positiva en una cuestión y negativa en otra." (p. 163, segunda edición).

Al indicar que es un desatino llamarlas falsas, implícitamente está aceptando su existencia y no considera ningún motivo para rechazarlas, siempre que mantengan su propio significado, que consiste en actuar en contra de la intención del calculador, de manera que una misma cantidad *"puede ser positiva en una cuestión y negativa en otra"*. La presentación de Vallejo vincula las cantidades negativas con las operaciones aritméticas y con la interpretación de los datos y resultados en la resolución de problemas; esta idea la ejemplifica con la comparación entre el cálculo del tiempo que tarda un estanque en llenarse o en vaciarse, así como con la comparación entre las ganancias y pérdidas de un mismo sujeto.

Y continúa:

> *"Como las cantidades positivas conspiran al fin que se propone el calculador, tratan de aumentar el resultado que se busca, y por lo mismo se señalan estas cantidades con el signo +, que es el de aumento ó adicion, y como las cantidades negativas conspiran al fin opuesto al que se propone el calculador, tratan de disminuir el resultado que se busca, y por lo mismo se señalan con el signo –; de manera que de aquí en adelante no podremos escribir una cantidad sin poner el signo que le corresponde para indicar su naturaleza. Sin embargo, cuando es el signo + el que lleva una cantidad , se suprime; de modo que a es lo mismo que +a; pero cuando de ningun modo se puede omitir el signo es quando es menos ó –; de manera que en –a no se puede dejar de poner el signo –, pues entonces no se expresaría que en qualquiera qüestion donde debía entrar la a, había de conspirar á disminuir el resultado en todo el valor que ella tuviese."* (p. 164, segunda edición).

Cuando la cantidad es negativa es indispensable identificarla mediante el signo menos (–), lo cual no es necesario si la cantidad positiva o está aislada; asimismo afirma que las cantidades negativas indican disminución.

> **TSN4:** Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
> *"Luego esto de cantidades positivas y negativas solo es relativo al fin que se propone el calculador ; y la cantidad que en una qüestion sea positiva , en la qüestion opuesta será negativa."* (p. 164, segunda edición).

La consideración de relatividad de las cantidades es puramente convencional y por conveniencia de quien realiza las operaciones.

> "*Las cantidades negativas no se han necesitado considerar en la Aritmética ; porque allí en la resolución de las qüestiones se suple todo con palabras, y se ejecutan las operaciones separadamente.*" (p. 164, segunda edición).

Según este párrafo, las cantidades negativas no son necesarias cuando se trabaja en la Aritmética, ya que los signos se pueden sustituir por palabras, pero si embargo:

> *"El Álgebra trata de indicar , solo con un corto número de signos , todos los razonamientos que pueden influir en los resultados, de manera que , el Álgebra es la escritura de la lengua de la cantidad. Los signos que hasta ahora hemos dado á conocer son suficientes para resolver estas cuestiones"* (p. 165, segunda edición).

A continuación traduce a cantidades con signo el enunciado de un problema de ganancias y pérdidas. Y sigue:

> *"Pues todo el artificio de esta ciencia consiste en dar otra nueva forma á la expresión que tenemos, para que haya cantidades iguales , que ejerciendo oficios contrarios destruya la una el efecto que podía causar la otra ; y por lo mismo nos podemos desentender de ambas , puesto que su reunion en nada altera el resultado"* (p. 166, segunda edición).

Aunque Vallejo entienda que se está refiriendo al Álgebra, todo su planteamiento lo hace con ejemplos y cantidades numéricas concretas; no hay expresiones literales, ni mención a cantidades en general, sólo *números relativos*. Lo que sí se produce es una nueva interpretación de los signos + y –; con ellos trata de expresar *de modo general* la relación entre cantidades que "*ejercen oficios contrarios*", es decir, lo que Kant llamaba oposición por anulación. Hay un avance en la consideración de las cantidades negativas como opuestas a las positivas correspondientes, no sólo como resultados de operaciones aritméticas. A esto es a lo que Vallejo llama tratamiento algebraico.

> **TSN5:** Cantidades negativas como menores que nada.
> *"Si al resolver esta qüestión encontrásemos que el resultado era cero, diriamos que el sugeto ni ahorraba ni se empeñaba; y comparando el resultado anterior con este en que sale cero, vemos que es mas ventajoso para el sugeto ahorrar cero que ahorrar –150; por esta causa se ha dicho que las cantidades negativas eran menores que cero ; en lo cual no se ha procedido con el mayor acierto, puesto que formándonos nosotros la idea de cero, ó de la nada cuyo símbolo es, prescindiendo de todo lo que hay, para poder decir que hay nada; despues de haber prescindido de todo lo que hay, no se puede prescindir de mas, y por lo mismo no se puede formar idea de una cosa que sea menos que nada. No obstante, esta expresión abreviada de que se usa para dar á conocer que una cantidad de esta especie reunida con otra de especie contraria, la disminuye en tanto cuanto ella vale; luego esto equivale á menos que á haberle añadido nada ó cero."* (p. 167, segunda edición).

Éste fragmento presenta tres reflexiones: la primera tiene que ver con la interpretación de las cantidades negativas como menores que cero; la segunda idea hace una discusión sobre esto, enfatizando que no se puede quitar algo de donde ya se ha quitado todo; la tercera reflexión orienta hacia un nuevo significado: dar a conocer que al juntarla con otra contraria tiene un efecto menor que agregarle nada. De nuevo la interpretación de negatividad es la misma que hace Kant, con igual dificultad para entender cómo es posible restar de cero.

El siguiente párrafo se orienta a discutir el significado tradicional de cantidad negativa menor que nada. En el párrafo siguiente se discute y demuestra la relación $-a < 0$:

> *"Tambien ha conducido á esto el que, suponiendo que se pueda comparar una cantidad negativa con cero, resulta que el valor de aquella es menor que cero; porque sea por ejemplo –a: si el valor de esta cantidad, comparado con nada ó cero no es menor, será igual ó mayor; si fuese igual, y supusiésemos que –a =0, como si á cosas iguales se añaden iguales, los resultados serán iguales, tendrémos, añadiéndoles 3a á ambas, que 3a – a = 0 + 3a; pero 3a – a es 2a, porque podemos considerar á –a como una unidad cualquiera, y quitando de tres veces esta unidad una vez esta unidad, nos resultará dos veces esta unidad ó 2a; y como 0 +3a es 3a, tendrémos que 2a = 3a; pero como esto es un absurdo, porque dos unidades ó cosas cualesquiera no pueden equivaler á tres de las mismas, tendremos que el supuesto que nos ha conducido á él tambien lo será; luego no puede ser –a = 0.*
> *Tampoco puede ser –a >0, porque en este caso añadiendo á ambas expresiones 3a, tendríamos: 3a – a > 0 + 3a, ó 2a > 3a, absurdo tambien manifiesto; luego tampoco se puede suponer que –a > 0, luego será forzosamente –a < 0."* (p. 167, segunda edición).

Vallejo utiliza el principio o ley de tricotomía sin ninguna duda en la anterior demostración, usando implícitamente la idea de que toda cantidad positiva es mayor que una negativa; esta demostración es algebraica y es la primera ocasión en que trabaja con expresiones literales. A partir de aquí se abandona el carácter relativo de las expresiones negativas que ha sostenido en la página 164, cuando afirmaba: *Luego esto de cantidades positivas y negativas solo es relativo al fin que se propone el calculador*.

Justifica que las cantidades negativas son *menores que nada* a través de una demostración. Realiza un planteamiento mediante una reducción al absurdo, concluyendo que matemáticamente una cantidad negativa, en efecto, es menor que cero. A partir de ahora, una de las características de las cantidades negativas es que *son menores que cero*.

TSN6: Ejemplificación.
"*si nos proponemos averiguar en quanto tiempo se llenará un estanque de agua, en que por un lado entra agua y por otro sale, tendremos que atender no solo al agua que entra, sinó tambien al agua que sale; y como el agua que entra conspira al fin que nos proponemos, esta será la positiva ; y la que sale, conspira á vaciar el estanque, que es lo contrario de llenarle, será la negativa*" (p. 163, segunda edición).

"(...) *averiguar lo que ahorra un hombre anualmente ; y tendremos que todas las rentas de este sugeto, como conspiran al fin que nos proponemos, serán las cantidades positivas en nuestra qüestion ; y como los gastos conspiran al fin opuesto, serán las negativas*" (pp. 163-164, segunda edición).

"*Aquí vemos, que siendo solo la renta 5300 y los gastos 5450, este sugeto no ahorrará, sinó que al contrario se empeñará en cada año ; y así encontraremos un resultado contrario del que buscábamos, pues procedíamos buscando ahorro y hallamos al contrario alcance. Ahora, pues que ya la cuestión nos dice que procedíamos bajo un supuesto falso, cual es el de haber ahorros, para hallar en cuanto se empeña cada año, restarémos la renta 5300 de los gastos 5450; pues en tanto como los gastos escedan á la renta, en tanto será lo que se empeñe cada año; y ejecutando esta resta, se tendrá que se empeña cada año en 150 ducados*" (p. 163, 2ª edición).

"Supongamos ahora que nos proponemos averiguar en cuanto se atrasa o se empeña un sugeto al año; y tendrémos que como en este caso los gastos conspiran á nuestro fin, seran las cantidades positivas ; y como las rentas conspiran al fin opuesto serán las cantidades negativas. Luego esto de cantidades positivas y negativas solo es relativo al fin que se propone el calculador; y la cantidad que en una cuestion sea positiva, en la cuestion opuesta será negativa" (p. 185, cuarta edición).

Los fenómenos utilizados en los ejemplos corresponden a situaciones cotidianas y reales. Se muestran diversas cantidades adjetivadas o cantidades relativas mediante expresiones como: ahorrar, empeñar, llenar y salir, entre otras; sin embargo en todas las situaciones presentadas las cantidades negativas indican acciones contrarias a las positivas: vaciar, gastar y empeñar.

TSN7: Regla de los signos.
Para la suma:
"Para sumar en Álgebra no hay mas que poner todos los sumandos los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que llevan; y como en todo resultado se debe averiguar si hay reduccion ó destruccion, se deberá hacer despues" (p. 172, segunda edición).

"Restar en Álgebra es hallar la diferencia entre dos cantidades , ó quitar una cantidad de otra dada. Para hallar las reglas que nos deben conducir en la operación de restar , supondremos que de +a se quiere quitar ±b ; y tendremos indicando la operación : a – (±b) ; ahora el signo – que esta fuera del paréntesis indica que la cantidad á que afecta , influye en el resultado de un modo inverso al que influiría si tuviese el signo + ; pero si tuviese el signo + el resultado seria a ± b; luego como aquí ha de ser el inverso , sería a – (±b) = a ∓ b; en cuyo resultado tenemos á un mismo tiempo estos dos: a – (+b) = a – b y a– (–b) = a + b. […] Para restar cantidades algebraicas no hay mas que poner el minuendo y á su continuacion el sustraendo mudándole los signos" (p. 174, segunda edición).

Para el producto:

"Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra ; y tomarla del mismo modo que diga se debe tomar. Añadimos aquí esta circunstancia, porque como en el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sinó tambien á su modo de existir, el multiplicador con sus unidades nos dice las veces que debemos tomar el multiplicando, y con su signo el modo con que le debemos tomar" (pp. 175-176, segunda edición).

"Diofanto daba por axioma que – por – daba +, y que – por + daba –, pues hacía que entrase esto en la definicion 9ª del libro 1º.

Para demostrar nosotros la regla de los signos, nos propóndremos multiplicar +a por +b, ó para mayor sencillez y claridad, tomarémos por multiplicador la unidad; y así indicarémos nuestra operacion de este modo +a × +1; ahora el multiplicador +1 nos dice con sus unidades que tomemos una vez al multiplicando, y con su signo + nos dice que le tomemos como él sea; el multiplicando +a es positivo, luego le deberémos tomar una vez positivamente, y será por consiguiente el producto +1a ó +a, omitiendo el coeficiente 1; luego +a × +1 = a; que en cuanto a los signos da: + × + = +.

Supongamos ahora que el multiplicador sea –1, y tendrémos indicada nuestra operacion de este modo: +a × –1; aquí el multiplicador con sus unidades nos dice que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le tomemos al contrario de como él sea; el multiplicando es positivo, luego le debéremos tomar una vez negativamente, y se tendrá: +a × –1 = –1a = –a; lo que en punto á los signos da: + × – = –.

Supongamos ahora que el multiplicador sea negativo tal como –a; si el multiplicador es +1, tendrémos indicada la operacion de este modo: –a × +1; donde el multiplicador +1 nos dice con sus unidades que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le debemos tomar como él sea; el multiplicando es negativo, luego le

> *deberémos tomar una vez negativamente, y será: $-a \times 1 = -1a = -a$; lo que da para los signos $- \times + = -$.*
>
> *Finalmente si el multiplicador fuese -1 tendríamos indicada la operacion de este modo: $-a \times -1$; donde el multiplicador -1 nos dice con sus unidades que debemos tomar al multiplicando una vez, y con su signo que le debemos tomar el contrario de como él sea; el multiplicando es negativo, luego le deberiamos tomar positivamente, y se tendrá: $-a \times -1 = +1a$; lo que da para los signos $- \times - = +$.*
>
> *Estos cuatro casos se convierten en estos dos, á saber: que signos semejantes, esto es, + por + ó – por –, ó en general $\pm$ por $\pm$, dan siempre + en el producto: y signos desemejantes, esto es, + por – ó – por +, dan siempre en el producto –."* (pp. 176-177, segunda edición).
>
> *"En la división […] en punto á signos se observa la misma regla que en la multiplicacion , á saber: que signos semejantes dan + en el conciente, y signos desemejantes dan –"* (p. 181, 2ª edición).

La regla de los signos se justifica mediante la noción intuitiva de cantidad negativa que se expresa mediante el signo menos: *"el cual conspira al fin contrario del que calcula*". Vallejo generaliza la regla por medio de expresiones algebraicas: el signo menos que antecede una cantidad indica que deberá tomarse tal cantidad en forma contraria.

También Vallejo cita y presenta las demostraciones formales de Lapplace, Euler, Bois-Bertrand y Hutton, que muestran diversos modos de argumentar la regla, haciendo uso de otras definiciones y propiedades. Deja claro que hay otras demostraciones posibles, pero la noción de cantidad negativa le resulta suficiente para justificar la regla de los signos.

> **TSN8:** Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.
> *"En el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades , sino al modo con que influyen en la qüestion que el calculador se propone resolver"* (p. 163, segunda edición). *"(...) quando se compara el valor absoluto de dos cantidades negativas, se dice que es mayor aquella que tiene menos unidades ó que tiene menor valor numérico"* (p. 168, segunda edición).

Se denota que el autor establece una diferencia entre el valor absoluto y el valor numérico de una cantidad.

> **TSN9:** Orden en las cantidades negativas.
> "*Figurémonos ahora que ajustamos las cuentas á otro sugeto, y encontramos que se empeña en 300 ducados cada año; si queremos*

comparar la situación de estos dos sugetos, con el fin de averiguar el que mas se empeña, diremos que este último: porque es mucho mayor 300 ducados que 150 ducados que sacábamos antes. Pero si suponemos la qüestión resuelta por Álgebra, con el fin de buscar el ahorro de este sugeto, encontraríamos que su ahorro anual sería -300 ducados; y si quisiéramos comparar ese ahorro con el anterior, que era -150, no diríamos que -300 sea mayor ahorro que -150, sino al contrario; porque en un sentido absoluto, si buscamos cual de los dos ahorra mas, y encontramos que ninguno ahorra, el que tiene el estado mas ventajoso es aquel que menos se empeña. Por esta causa, cuando se compara el valor absoluto de dos cantidades negativas, se dice que es mayor aquella que tiene menos unidades ó que tiene menor valor numérico, esto es, que $-2a > -3a$.*"* (pp. 167-168, segunda edición).

En la primera parte del párrafo realiza una comparación de cantidades relativas. La segunda presenta el orden entre las cantidades negativas y vemos reflejado el orden de los números enteros en las cantidades negativas. A continuación realiza una demostración por reducción al absurdo de la relación de orden establecida entre cantidades negativas.

Vallejo plantea que el orden queda establecido según el fin al que conspira el que realiza los cálculos, es decir, si comparamos deudas o ahorros. No se aprecia una prioridad por establecer un orden, sólo cuando indica qué se puede suponer, resuelve la situación por medio del álgebra.

Hay utilización de la notación matemática usual. El uso de cantidades algebraicas permite establecer de forma general un orden entre cantidades negativas; esté orden es el de los números enteros.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
"(...) y ejecutaremos nuestra resta ; y como $-a$ *y* $+a$ *se destruyen queda por resta* $+b$*"* (pp. 186-187, segunda edición).

"el quociente por el divisor da el dividendo, y como se ha de restar se destruyen" (p. 187, segunda edición).

Se hace alusión a una resta como destrucción de cantidades semejantes con signos contrarios, esto evoca la anulación compensación de los números relativos.

"(...) $-\frac{b}{a}$ *multiplicado por b es* $-\frac{b^2}{a}$*"* (p. 187, segunda edición)

Las cantidades negativas también pueden ser fraccionarias.
"lo que demuestra, que la ecuación tiene dos raices reales y dos imaginarias. Las raices reales son por otra parte la una positiva y la

otra negativa" (p. 396, cuarta edición).

El anterior párrafo es literal a lo escrito en el texto de M. Bourdon (1817, p. 581) y en él se aceptan las raíces negativas, asimismo se hace referencia a la naturaleza real de tales raíces. También se interpretan exponentes negativos:

"(...) de modo que $\frac{a^2}{b^{-2}}$ *es lo mismo que* a^2b^2*"* (p. 185, segunda edición)

TSN11: Interpretación de los resultados obtenidos.
"*cuando el resultado de una qüestion es negativo, responde á la qüestion opuesta ó al fin contrario de aquel para que se entabló el cálculo, ó que manifiesta una situacion contraria á la que nosotros supusimos; y que cuando se considera en sí una cantidad señalada con el signo – sin suponerla el resultado inmediato de operacion, entonces al reunirse con otras cantidades hace menos efecto que el reunir cero en vez de ella.*" (p. 168, segunda edición).

"&c, -3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, &c" (p. 321, segunda edición).

Obtener una respuesta negativa indica que es contraria al fin propuesto por el calculador; la actuación de una cantidad negativa sobre otra cantidad es menor que agregar cero. Esto se refiere al tratamiento aritmético de estas cantidades.

En el tratamiento algebraico, las propiedades de los negativos satisfacen condiciones que no tienen los números naturales; así en otro ejemplo encontramos:

"*hallar un número, tal que si á su quintuplo se le añaden 3 unidades, resulte el mismo número quitándole 5 unidades, la tendríamos planteada en la siguiente ecuacion*

$$5x+3=x-5; \text{ que da } 4x= -5 -3= -8, \text{ y } x=-2$$

Aquí tenemos un resultado negativo; y debemos fijar nuestra consideracion en lo que nos manifiesta, que es el que este número es de una naturaleza contraria á la de los números como se han considerado en la Aritmética, ó que si se quiere obtener un número como los considerados en la Aritmética que unidos á otros de su especie los aumenta ó restados los disminuyen etc., debemos cambiar enteramente en sus opuestas todas las condiciones del enunciado (...). No sucede así en el Álgebra; la resolucion x= –2 satisface precisa y exactamente á la cuestion en los términos que viene propuesta sin incurrir en ninguna contradiccion." (p. 281, cuarta edición).

En la Aritmética no hay lugar para los números negativos; las cantidades negativas, al surgir como resultado de operaciones, deben se reinterpretadas de acuerdo con el fin del que calcula. Tal situación no acontece en el Álgebra, donde los números negativos no incurren en contradicciones o falsos supuestos, por lo que son adecuados como solución a las cuestiones planteadas.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.
"la resolucion x= –2 satisface precisa y exactamente á la cuestion en los términos que viene propuesta sin incurrir en ninguna contradiccion." (p. 281, cuarta edición).

Como se indica en el comentario de TSN11, las cantidades negativas son de gran utilidad, pero bajo el dominio del álgebra. Aunque no lo dice explícitamente, los negativos sirven para obtener las soluciones de las ecuaciones algebraicas.

TSN13: Otros.
"En el álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino al modo con que influyen en la qüestion que el calculador se propone resolver" (p. 163, segunda edición).

5.7.4. Análisis

5.7.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

La consideración que hace del concepto número es relacional, con base en la noción aristotélica de cantidad discreta, basada en la pluralidad, y en la definición euclídea, como se puede apreciar en **CCO4**. Encontramos esta idea de número tal como la caracterizamos en 3.1.2, si bien menos general que la noción de Newton que allí se cita, y se reiteró en 4.6.4.1.

Esta idea de número que presenta Vallejo es un tanto elemental y antigua, al vincularla con nociones clásicas; no refleja el conocimiento avanzado que tenía de las matemáticas europeas de la época. El sentido relacional de la noción de número se presenta vinculado a la pluralidad de unidades discretas y no a la relación abstracta de una cantidad cualquiera con otra que se toma como unidad. Para salvar el inconveniente de que, ante tal idea, el uno no fuese considerado número, recurre a un principio de comparación de cantidades con una unidad de medida; de esta manera, tal comparación podría resultar igual a la misma unidad, dando de esta forma cobijo al uno dentro *"de la comparación de la pluralidad o muchedumbre con la unidad"*, otorgándole luego estatus de número.

- ***Cantidad***

La cantidad es definida en **CCO2** como: *"todo aquello que puede ser* *mayor ó menor, ó todo lo que es susceptible de aumento ó diminucion*", coincide con la dada por Bails, y corresponde a la definición de Euler recogida en 3.1.2 si bien se advierte una influencia considerable de las ideas de Kant en los ejemplos utilizados, que se basan en fenómenos relativos.

- ***Cantidades positivas y cantidades negativas***

Las cantidades negativas se empiezan a clasificar en **TSN2** como aquéllas que están a favor o en contra de las intenciones del calculador. Así, las cantidades positivas son aquéllas que conspiran a favor de los fines propuestos y las cantidades negativas son las que conspiran en forma opuesta, donde los signos tratan de dar expresión a relaciones opuestas, tal como se pone de manifiesto en los campos **TSN3**, **TSN4**, **TSN6** y **TSN11**.

Una cantidad no es positiva ni negativa en sí misma, sino que depende de la circunstancia en la que se le considere. Las cantidades negativas surgen de los cálculos aritméticos. De esta manera, en **TSN4** se indica la relatividad del carácter positivo o negativo de una cantidad.

Cuando aparece una cantidad negativa como resultado de un problema, ésta responde al fin contrario que se establece para el cálculo con el que se opera.

Durante la explicación y presentación de los contenidos de la aritmética no se consideran las cantidades negativas, expresada en **TSN4**, pues éstas no eran necesarias ya que en los planteamientos se utilizan palabras para describir algunas situaciones en el desarrollo de ejercicios. Así que es en el campo del álgebra en el que se consideran las cantidades negativas, tal como explicamos en **TSN11**, pues en ella sí satisfacen correctamente las cuestiones en el mismo modo en que han sido planteadas. Parece que esto puede ser influencia de la afirmación de Euler (1797, p. B2) "*In Algebra then we confider only numbers wich represent quantities, without regarding the different kinds of quantity*", de tal manera en el álgebra se pueden abordar los números que representen cantidades sin importar la naturaleza o cualidad de ellas.

La noción de cantidad negativa en Vallejo se sustenta en los números relativos y las magnitudes negativas de Kant, y profundiza en la dualidad aritmético-algebraica.

Vallejo considera en **TSN3** un desatino llamar falsas a las cantidades negativas así como negar su existencia, por lo que entendemos que él asume su naturaleza como real, tal como lo expresa al considerarlas una de las raíces reales de una ecuación, como se muestra en **TSN10**.

5.7.4.2 Análisis de contenido

- ***Conceptos básicos***

Inicialmente, en el campo **TSN1**, se asocian los signos más (+) y menos (–) a las operaciones de adición y sustracción, tanto en Aritmética como en Álgebra. Pero luego en **TSN3** se utilizan para indicar el carácter positivo o negativo de una cantidad, con lo cual queda claro que para Vallejo los signos + y – tienen varios significados.

Acerca del número cero encontramos en el texto dos consideraciones: la primera tiene que ver con la nada o la ausencia, es decir, con el cero absoluto que prescinde de todo, como ocurre en el campo **TSN5**. La segunda consideración se refiere al cero como resultado de operaciones, en este caso su origen se debe a la aplicación de reglas matemáticas, como expresa en **TSN11**.

Dado que el mismo título del texto indica que trata de Aritmética y Álgebra, en su contenido se utilizan ecuaciones e incógnitas y, en general, toda la simbología algebraica. Aunque establece que la Aritmética es la ciencia de la cantidad expresada por números y el Álgebra la de las cantidades en general, la introducción a los conceptos y operaciones algebraicas la hace mediante ejemplos aritméticos que, más adelante, generaliza. Esto hace que el trabajo con las cantidades negativas se sustente en la consideración dual, aritmético-algebraica, del concepto.

- ***Fenomenología/Justificación***

En los ejemplos presentados en el texto y, en particular, en el campo **TSN6**, encontramos que están relacionados con situaciones cotidianas y reales: ahorro, gastos, llenado y vaciado de recipientes, rentas, etc.; es decir, se buscan situaciones que expliquen las cantidades negativas mezclando cantidades, números y retórica. De esta manera podemos apreciar una utilización de explicaciones y justificaciones más propias de la aritmética, de los números naturales relativos, que del álgebra. Queda suficientemente ilustrado a través de los campos **TSN5**, **TSN6** y **TSN9**, que Vallejo está manipulando o utilizando cantidades adjetivadas o números naturales relativos para explicar la idea de cantidad negativa. Además son inexistentes las representaciones gráficas en el texto.

- ***Estructura de orden***

El orden numérico que se plantea mediante los ejemplos para las cantidades negativas en los campos **TSN5**, **TSN6** y **TSN9** corresponde parcialmente al orden de los números enteros. Aunque no presenta ejemplos para mostrar el orden de las cantidades negativas con respecto a las positivas, sí utiliza implícitamente la idea de que toda cantidad positiva es mayor que una negativa cuando muestra que una cantidad negativa es menor que 0, en **TSN5**.

Como manifestamos en el comentario hecho al campo **TSN9**, hay dos consideraciones sobre el orden. Si se plantea la comparación asimétrica de cantidades negativas, el orden aceptable resulta ser el de los naturales relativos. Cuando la relación de orden se establece en el álgebra, entonces tenemos ya el orden de los números enteros. Vallejo plantea bien el sentido de la comparación entre cantidades negativas: cuando compara *deudas* –valores negativos- las considera como *ahorros* –valores positivos- que es el sentido en que trabaja el calculador. De este modo, y con números relativos, justifica que –300 < -150, lo cual no le lleva a afirmar que *deber 300* es menor que *deber 150* sino a que *deber 300* es *ahorrar menos* que *deber 150.*

Vallejo deja claro que se trata de un artificio para conectar las cantidades relativas, con las que viene ejemplificando los conceptos, con la estructura de orden que él ya conoce y a la que quiere introducir al lector. La validación del argumento viene dada por la prueba de que –3a < -2a. También hemos visto en **TSN11** la presencia de la secuencia de enteros.

- ***Estructura algebraica***

Las cantidades negativas se tratan en el álgebra; allí estas cantidades satisfacen a las cuestiones que han sido propuestas tanto en los enunciados como en los desarrollos sin incurrir en contradicciones. Esto se reitera en **TSN4**, **TSN7** y **TSN10**.

Al hacer referencia a la resta, ésta es presentada como una situación donde las cantidades semejantes se destruyen, pues una conspiraría en contra de la intención de la otra. Esto es una manifestación de la anulación-compensación manifiesta en los números relativos.

- ***Uso algebraico***

Como hemos visto en los campos **TSN4**, **TSN7**, **TSN12** y enfatizado en los apartados anteriores, las cantidades negativas sólo se consideran en la parte correspondiente al álgebra.

Se utilizan las cantidades negativas en varios temas en el texto como cuando se admite que los números elevados al cuadrado tienen dos raíces cuadradas, una positiva y la otra negativa; esto lo hallamos en el campo **TSN10**.

5.7.5 Diferencias lógico formales entre Z y N_r[*].

Primera diferencia: Orden total – orden parcial o doble natural con

[*] Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1** En **TSN5** escribe *“Tampoco puede ser –a>0 [...] luego será forzosamente –a<0”*, apreciándose una atribución de significados justo y determinado para los números enteros negativos; esta misma idea se observa cuando expresa *“[...] se ha dicho que las cantidades negativas eran menores que cero; en lo cual se ha procedido con el mayor acierto [...]”*

También se encuentran evidencias de asignaciones arbitrarias o indeterminadas para los números naturales relativos en **TSN3** *“una misma cantidad puede ser positiva en una cuestión y negativa en otra”* y en **TSN6** *“como los gastos conspiran al fin opuesto, serán las negativas”*.

Segundo indicador: **a_2** Vallejo afirma en **TSN6** *“como el agua que entra conspira al fin que nos proponemos, esta será positiva; y la que sale conspira á vaciar el estanque, que es lo contrario de llenarle, será la negativa”*, dando a entender que entrar o llenar es mejor que salir o vaciar, de esta forma efectúa una comparación global de regiones de manera arbitraria para medidas naturales relativas; por tal razón las dos regiones no son comparables pues al disminuir una la otra aumenta.

Tercer indicador: **a_3** La comparación de medidas con valores numéricos negativos se hace desde el orden usual entre números enteros negativos, como se aprecia en **TSN8** *“-2a>-3a” y* en **TSN5** “*comparando el resultado anterior con este en que sale cero, vemos que es mas ventajoso para el sugeto ahorrar cero que ahorrar –150”*, donde se esta afirmando que –150<0. En **TSN9** se enfatiza que *“cuando se compara el valor absoluto de dos cantidades negativas, se dice que es mayor aquella que tiene ménos unidades ó que tiene menor valor numérico”,* correspondiendo esto con el tratamiento de los números enteros.

Cuarto indicador: **a_4** En **TSN6** leemos *“[...] siendo la renta 5300 y los gastos 5450, este sugeto no ahorrará sinó que al contrario se empeñará en cada año; [...] se tendrá que se empeña cada uno en 150 ducados”*, este ejemplo presenta realiza una comparación de medidas con valores numéricos de diferente o región, donde se percibe una desconexión entre las regiones, lo cuál es indicio de que esta utilizando números naturales relativos.

Como balance, afirmamos que se cumple esta primera diferencia **D_1**, para los números naturales relativos en este trabajo de Vallejo.

Segunda diferencia: Sin primer elemento – con primer elemento.
Primer indicador: **b_1** El aspecto de la naturaleza de los números y situaciónes que se trabajan en el texto es considerado en diversos párrafos;

así en **TSN5** aparece *"es mas ventajoso para el sugeto ahorrar cero que ahorrar –150"*, en esta frase se refleja un significado usual de número entero para el valor mostrado; también señala la posibilidad de obtener valores numéricos inferiores a cero, lo que indica la utilización de un número entero (González, p.219).

En los ejemplos presentados en **TSN6** se evidencia la existencia de limites inferiores para las cantidades que se utilizan, esto es *"siendo la renta 5300 y los gastos 545"*, es evidente que los gastos están limitados por cero, pues pueden disminuir hasta ese valor, a partir de allí ya no son gastos sino rentas. Esto apunta a que se trabajan números relativos.

Segundo indicador: $\mathbf{b_2}$ La simbolización utilizada es la conocida y determinada para los números enteros como en **TSN9** dice *"[...] su ahorro anual seria –300 ducados; y si quisieramos comparar ese ahorro con el anterior que era –150, no diriamos que –300 sea mayor ahorro que –150 [...]"* también se repite esto en **TSN5**: *"ahorrar –150"*, donde se fuerza una compatibilidad entre adjetivación y signo.

Tercer indicador: $\mathbf{b_3}$ No hemos hallados indicios que señalen el trabajo de Vallejo en dirección de los números enteros o los naturales relativos.

La valoración de esta segunda diferencia $\mathbf{D_2}$ indica que hay indicios de se cumple de manera parcial en el campo de los números naturales relativos.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas – discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

En el texto hemos hallado evidencias en **TSN11** que permiten negar el cumplimiento de esta tercera diferencia $\mathbf{D_3}$, ya que se presenta la secuencia de los enteros.

Cuarta diferencia: Cero único – cero doble (natural relativo).

No hemos hallado pruebas del cumplimiento de esta cuarta diferencia $\mathbf{D_4}$, en los números enteros o los naturales relativos.

Quinta diferencia: Composición aditiva: adición entera– adición natural y anulación-composición.

En **TSN10** al explicarse la sustracción se indica *"[...] y como –a y +a se destruyen queda por resta +b"* dejan claro que esta proponiendo una idea de opuestos aditivos, pero en el sentido de anulación uno de otro. Por tal razón afirmamos que esta quinta diferencia $\mathbf{D_5}$ se cumple para los números naturales relativos.

La tabla siguiente presenta el resumen del análisis sobre las diferencias:

Tabla 5.4. Diferencias entre ***Z*** *y* $\mathbf{N_r}$ *en el Tratado de Mariano Vallejo*

Autor	**D$_1$**					**D$_2$**				**D$_3$**	**D$_4$**	**D$_5$**
	a$_1$	**a$_2$**	**a$_3$**	**a$_4$**		**b$_1$**	**b$_2$**	**b$_3$**				
Vallejo	**Si**	**Si**	**No**	**Si**	**Si**	**Si**	**No**	**¿?**	**P**	**No**	**No**	**Si**

5.7.6 Tratamiento global de los negativos en el Tratado Elemental de Matemáticas

El autor afirma que una cantidad no es positiva o negativa por sí misma, sino que lo es en relación a las circunstancias en que se considera; los negativos no son considerados en la Aritmética puesto que estas cantidades no son necesarias para solucionar las cuestiones que allí se plantean. Por esta razón se tratan en el Álgebra.

Al considerar reales a los negativos se aleja del pensamiento matemático de principios de siglo que recurría a Descartes para señalar estas cantidades como falsas; tampoco suscribe las afirmaciones de D'Alambert o de Lacroix, que las adjetivan de absurdas y tratan de prescindir de ellas.

El autor hace reiterada referencia a cantidades opuestas o contrarias, mediante diversos ejemplos como expresamos en 5.7.4.2; se utilizan expresiones como, por ejemplo, ahorrar, rentas, empeñar y gastar, para expresar que una situación es contraria a otra. Asimismo cuando se establece la comparación entre la salida del agua con la que entra al estanque, se atribuyen tanto signos y significados duales y relativos. También se establecen comparaciones y valoraciones de situaciones relativas.

Los negativos son presentados mediante fenómenos contables (rentas, gastos), físicos (llenado y vaciado de recipientes) y algebraicos (ecuaciones). Se trata de ejemplos de magnitudes negativas, fundadas en una relación de oposición de predicados positivos que se anulan cuando se contemplan sobre un mismo sujeto.

En el texto para mostrar los números negativos se recurre a sistemas de representación verbales (explicaciones), aritméticos (números y signos) y algebraicos (letras, números y signos).

Vallejo es un autor de transición. Cuando trabaja en Aritmética lo hace con números naturales relativos, a los que intenta quitar toda su carga conflictiva insistiendo en la relatividad de las cantidades a las que representan *"según conspira al fin del que calcula o a un fin contrario"*.

Cuando se sitúa en el campo del Álgebra trabaja con números enteros, sin ninguna vacilación, si bien ejemplifica con cantidades relativas. Ocurre que no aborda todas las propiedades algebraicas con el mismo interés y profundidad. Las cantidades negativas dejan de ser absurdos y el valor -2 tiene sentido propio. Discute que $-a < 0$ y que $-3a < -2a$; pero no discute ni muestra que $-a < +b$, aunque sí hace uso de este resultado. Muestra la regla de los signos y trata de justificarla; sin embargo, para la adición sí continúa con la anulación-compensación, ya que en el caso de la suma no hay necesidad de justificar una nueva regla.

5.8 Los documentos

Los trabajos estudiados son: *Elementos de matemática. Tomos I y II* (1772), de Benito Bails; *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría* (1782), de Juan Justo García; *Compendio de Matemáticas puras y mixtas* (1794), de Francisco Verdejo; *Tratado elemental de matemáticas. La aritmética y álgebra* (1813), de José Mariano Vallejo.

Cada uno de los libros está escrito en una de las décadas del periodo considerado. De acuerdo con las etapas que hemos establecido en el Apartado 5.1 los dos primeros libros se imprimen durante el reinado de Carlos III, el tercero durante el reinado de Carlos IV, y el último casi a la conclusión de la Guerra de la Independencia. Las circunstancias y momentos en que se redactan y publican son, pues, muy distintos, si bien todos se sustentan en los valores de la Ilustración, en la consideración de la razón práctica como energía creadora, y en la ciencia, la cultura y la educación como herramientas al servicio del progreso y la libertad.

La obra de Bails tiene la ambición de proporcionar un manual enciclopédico, que presenta un balance amplio y extenso de los avances en el desarrollo de la matemática tanto pura como aplicada, para lo cual no duda en sintetizar y copiar a numerosos autores. La obra se escribe para servir de texto a los estudiantes de la Academia de San Fernando Igualmente, la obra de Juan Justo García tiene por finalidad actualizar los conocimientos matemáticos de los estudiantes de la Universidad de Salamanca, proporcionando un manual con las ideas científicas de la época que sirviese de libro de texto. Los dos manuales son un efecto de las reformas emprendidas por Carlos III respecto a la enseñanza de las matemáticas en centros de educación superior, como Academias, Universidades y otras instituciones, derivadas de la expulsión de los jesuitas, como hemos señalado en las Apartados 2.6, 2.7 y 5.1.

Tanto un trabajo como el otro se denominan *Elementos*, subrayando así su intención de ofrecer en un documento estructurado el estado de los conocimientos matemáticos recientes y sus aplicaciones, si bien su amplitud de contenidos y extensión son diferentes. Reconocen ambos autores el valor del *Compendio* de Tosca y tratan de mejorar y superar la aportación de este autor. Subrayan su interés por la didáctica y la importancia que dan a la transmisión del conocimiento a los estudiantes, como hemos visto en los Apartados 5.4.2 y 5.5.2.

También Verdejo edita su *Compendio* para ser utilizado como libro de texto en la cátedra de matemáticas de los Reales Estudios, reestablecidos por Carlos III en 1770. La intención de reconocer la obra de Tosca y, al mismo tiempo, actualizarla, son patentes en este autor de manera especial. La obra no tiene carácter enciclopédico, ni se propone dar una visión general de las matemáticas; se trata de un manual de orientación práctica, sin citas ni menciones de autores extranjeros, menos ambicioso, y que subraya el carácter aplicado de los conceptos matemáticos. Coincide con las obras de Bails y de García en su interés didáctico y su preocupación por la enseñanza, según señalamos en 5.6.2.

La obra de Vallejo se edita con la finalidad de presentar los avances matemáticos realizados en el último tercio del siglo XVIII, que no se habían publicado o habían tenido escasa difusión en España. El *Tratado* sirve de texto en la Academia Militar de San Fernando desde su primera edición. Vallejo actualiza y supera la obra de Bails, incorpora nuevas ideas, presenta conceptos y materiales más elaborados que sus antecesores. Reconoce explícitamente la aportación de las ideas de los filósofos de la Ilustración en el plan general de su obra. La modernidad del *Tratado* tiene dos indicadores claros: sus sucesivas reediciones, que actualizan el documento sin modificar su estructura básica, y la edición del *Compendio*, obra que amplía y profundiza el *Tratado*. La preocupación didáctica en la obra de Vallejo es permanente, y así se manifiesta en esta obra, según señalamos en el Apartado 5.7.2.

Los documentos y citas aportados permiten afirmar que estos autores estaban al tanto de los avances matemáticos contemporáneos, tal como lo demuestran la estructuración y contenidos de sus textos; también este conocimiento se evidencia en el inventario de la biblioteca de Bails, donde se hallan 139 textos matemáticos y 91 de física, incluyendo ocho obras de Euler y ejemplares de Wolf y Lagrange, por mencionar los más destacados (Arias de Saavedra, 2002). Las amplías citas que Bails, Vallejo y García hacen de las obras europeas contemporáneas a sus libros así lo demuestran.

Las obras de Bails y de Vallejo siguen un plan de trabajo ambicioso; aunque se trata de documentos en su mayor parte de recopilación y actualización de conocimientos, presentan un proyecto de gran amplitud, y tratan de estructurar en un mismo libro los avances recientes más significativos de las matemáticas. Bails se propone integrar saberes muy diferentes en sus *Elementos*, y lo hace con escasa aportación propia, mientras Vallejo destaca sus propias aportaciones y quiere hacernos llegar en todo momento su trabajo de reelaboración de ideas. Como afirman los investigadores de la ciencia española (Arenzana, 1987; López Piñero y otros, 1986), con la obra *Elementos de Matemáticas* de Bails, la ciencia en el sentido moderno, penetra en España. En esta enciclopedia de la ciencia se intenta demostrar la verdad matemática y científica a través de la deducción y la razón derivada de la matemática misma.

Juan Justo García y Verdejo presentan en sus obras una versión más limitada de la Aritmética y del Álgebra. Tanto los *Elementos* como el *Compendio* son obras escritas para servir de libros de texto, de extensión bastante menor que las de Bails y Vallejo, con objetivos no tan ambiciosos. Su mayor originalidad estriba en que, la primera, fue elaborada para superar el atraso en los estudios de matemáticas de la Universidad de Salamanca y, la segunda, para superar los manuales de los jesuitas en los Reales Estudios, ambas en el último cuarto del siglo XIX.

Las cuatro obras consideradas son trabajos hechos desde la sociedad civil, por funcionarios ilustrados y eruditos, que se proponen actualizar los conocimientos de la sociedad española de su época y, al mismo tiempo, redactar manuales de texto para las instituciones en las que trabajan. También destaca la presencia de aplicaciones técnicas de los conocimientos matemáticos o, al menos, la importancia de considerar la dimensión aplicada en el estudio de las matemáticas.

La expulsión de los jesuitas muestra aquí sus carencias y sus aspectos positivos. Es indudable que hay un cierto retroceso en un primer momento, pero estos primero pasos dubitativos provocan una reacción en la sociedad civil y muestran una capacidad de recuperación considerable, como se aprecia por la calidad y difusión de los trabajos de Vallejo.

5.9 Análisis conceptual de los negativos en el periodo ilustrado

Según señalamos en el Apartado 1.8, entre los objetivos de este estudio se encuentra realizar un estudio histórico epistemológico del número negativo, indagando en su evolución y consolidación como objeto matemático formal en los libros de texto publicados en España durante el periodo 1700-1900. Entre las técnicas consideradas se encuentra el análisis conceptual, como método para examinar los significados y establecer las conexiones entre los términos de cada campo conceptual, para contextualizar las definiciones dentro del área y del periodo histórico en que se insertan (Rico, 2001). El análisis conceptual se centra en las nociones de Número, Cantidad y Cantidad Negativa, cuya diversidad de significados presentamos en el Apartado 3.1.2, y que se establecieron en un estudio piloto (Maz, 2000).

5.9.1 Concepto de Número.

Los autores seleccionados presentan, mayoritariamente, en estas obras una noción de número relacional, basada en la pluralidad de unidades discretas; hay cierta conexión con la definición euclidiana, pero como ejemplificación. Que los números expresan una relación es mencionado explícitamente por Bails, Verdejo y Vallejo para utilizar la idea relacional de número propuesta por Stevin y Newton. Está asociada a la suposición de que el número explica la cantidad; cuando Stevin (1585; p. 1) afirma *"La partie est de la même matiere qu´est sont entier"* y *"L´unité est une partie dúne multitude d´unités"* se refiere en primer término a objetos materiales, mientras que luego lo hace a objetos matemáticos, es decir, a objetos abstractos.

La formación más clásica de Juan Justo García le lleva a sostener la noción tradicional euclidiana sobre el número, sin prestar atención a la noción relacional de sus contemporáneos. Esto muestra que, aún en ambientes culturales destacados, la noción euclidiana era de uso corriente y no se apreciaban contradicciones ni se consideraba inadecuado fundamentar el desarrollo de la aritmética sobre dicha noción.

Tabla 5.5 Nociones de número utilizada por los Ilustrados en España.

Autor	Noción euclídea	Número como relación
Benito Bails	X	X
Juan Justo García	X	
Francisco Verdejo		X
José Mariano Vallejo	X	X

5.9.2 Concepto de Cantidad.

Según vimos en el Apartado 3.1.2, el concepto de cantidad es asumido desde cuatro posiciones:

- **Aristotélica**: concibe la cantidad como todo aquello que se puede medir y contar, asimismo, es la división la operación que permite identificar una cantidad.
- **Fenoménica**: basada en la noción de cantidad realizada por Kant, y que presentamos en el Apartado 1.3.3. Allí se señala que esta

noción de cantidad es un concepto del entendimiento, que permite la comparación de fenómenos, y que se constituye en tres momentos: unidad, pluralidad y totalidad.

- **Euleriana**: considera que cantidad es todo fenómeno de la experiencia que puede sufrir aumento o disminución, y atribuye a las matemáticas la investigación sobre los medios para medir la cantidad (Euler, 1770, p.1).

Tabla 5.6 Nociones de cantidad utilizada por los autores Ilustrados

Autor	Noción aristotélica	Noción fenoménica	Noción de Euler
Benito Bails		X	X
Juan Justo García	X	X	
Francisco Verdejo		X	
José Mariano Vallejo		X	X

Apreciamos en todos los autores considerados en este periodo la influencia de las ideas de Kant, en el sentido de que la noción de cantidad es una noción de comparación, que integra unidad y pluralidad en una totalidad.

Juan Justo García muestra una visión más clásica también en esta noción. En Bails y en Verdejo apreciamos también su conocimiento de la obra de Euler, contemporáneo de estos autores, mientras que en Verdejo apreciamos una mayor exigencia, que parece acercarle a una noción positivista.

5.9.3 Cantidades positivas y negativas

La pluralidad de fuentes que utiliza Bails le llevan a establecer diversos significados para las nociones de cantidad positiva y cantidad negativa. Ya detectamos en este autor un esfuerzo de integración de nociones contrapuestas, que, en ocasiones, introduce más confusión que claridad sobre la noción de número negativo. Este autor muestra cuál es el estado de precisión que han alcanzado los matemáticos sobre este concepto en este momento. Aún cuando las principales herramientas parecen bien establecidas, la dualidad de tratamiento debida a la aproximación aritmética y algebraica no producen un concepto riguroso.

Todos los autores coinciden en el tratamiento de las cantidades negativas como opuestas o relativas a las positivas, y esta idea de relatividad la subrayan de diferentes formas.

Verdejo y Vallejo señalan el origen algebraico de las cantidades negativas, asumen las leyes que regulan sus operaciones y argumentan ocasionalmente sobre la dualidad aritmético- algebraica de estas cantidades.

García sólo menciona que los negativos proceden de cálculos algebraicos, sin valor aritmético.

Tabla 5.7 Nociones de cantidad negativa utilizada por los Ilustrados

Autor	Cantidades menores que nada	Resultado de operaciones Aritméticas	Magnitudes relativas	Entidades de naturaleza dual	Resultado de operaciones algebraicas
Benito Bails	X	X	X	X	
Juan J. García			X		X
Francisco Verdejo			X	X	X
José M. Vallejo			X	X	X

5.10 Análisis de contenido

En el Apartado 1.9 establecimos el análisis de contenido como método elegido para llevar a cabo el estudio de los libros de texto que focalizan esta investigación. Centramos su especificidad en *"identificar y describir estructuradamente los diversos significados de las matemáticas escolares, teniendo en cuenta la estructura conceptual, los sistemas de representación y los fenómenos considerados en cada caso"* (Gómez, 2002).

5.10.1 Estructura conceptual.

Se considerarán aquí las descripciones de conceptos, las interrelaciones entre ellos y la estructura matemática en que se sustenta. Para estudiar la estructura conceptual establecida por cada autor y poder realizar las comparaciones pertinentes entre ellos, analizamos seis puntos.

- Nociones básicas. Números enteros
- Definición de suma de números enteros
- Estructura aditiva del conjunto de los enteros
- Relación de orden entre los enteros
- Definición del producto de números enteros
- Estructura multiplicativa del conjunto de los números enteros.

Nociones básicas. Números enteros

Todos los autores consideran dos significados para los signos + y –, expresión de las operaciones y expresión de oposición. Bails y Verdejo, con diferente interpretación, señalan que los signos también indican relaciones entre números o cantidades.

Bails justifica los números enteros como resultante de restar la unidad a 0 sucesivamente; se obtiene así el conjunto de negativos como simétrico de los positivos. Esta construcción es aritmética y permite presentar la serie de los enteros.

J. Justo García presenta el conjunto de los enteros como una progresión que surge de los logaritmos de las distintas potencias de 10.

Verdejo considera el conjunto de los enteros como una progresión aritmética, cuyo origen está en las relaciones de comparación entre números naturales.

Vallejo no considera el conjunto de los enteros explícitamente; sí se refiere a cantidades negativas en general, que operan con las positivas.

Tabla 5.8 Nociones básicas y concepto de entero

Autor	**Signos como operaciones**	**Signos como relaciones**	**Signos como oposición**	**Presencia de la secuencia de los enteros**	**Consideración de cantidades enteras en general**
Benito Bails	X	X	X	X	
Juan J. García	X		X	X	
Francisco Verdejo	X	X	X	X	X
José M. Vallejo	X		X	X	X

Definición de la suma de enteros

Bails establece separadamente las operaciones aritméticas y las algebraicas mediante reglas que abordan los distintos casos particulares. Tanto la suma como la resta se basan en la anulación compensación.

García trata de proporcionar un sentido práctico a la suma; distingue también entre suma y resta, que justifica por anulación – compensación. Presenta cada regla con ejemplos particulares, que luego generaliza con letras.

Verdejo considera la resta de cantidades algebraicas mediante una regla práctica de anulación compensación. No considera la resta como caso particular de la suma.

Vallejo considera la suma y la resta dentro del álgebra; proporciona reglas generales que luego adapta a los casos. Tampoco considera la resta como un caso de la suma.

Tabla 5.9 Suma de enteros

Autor	Justificación aritmética	Justificación algebraica	Presencia de la anulación compensación	Reglas propias para la resta	Resta como caso de la suma
Benito Bails	X	X	X	X	
Juan J. García	X	X	X	X	
Francisco Verdejo		X	X	X	
José M. Vallejo		X	X	X	

Observamos que, conforme avanza el periodo, no parece necesaria la justificación aritmética de las reglas para la suma de cantidades relativas generales, pero todos los autores llevan a cabo una justificación algebraica; las reglas propias de la resta se tratan independientemente de las de la suma.

Estructura aditiva

Ninguno de estos autores considera explícitamente las propiedades de las operaciones suma y resta. Todos ellos consideran los negativos como soluciones posibles de las ecuaciones y trabajan con valores negativos atendiendo a las reglas y propiedades conocidas de las operaciones.

Orden entre los enteros

El orden es parte de la estructura conceptual de los números negativos, que se evidencia en los libros analizados. No se identifica unidad de criterio en los autores sobre este concepto, pues hacen diversas consideraciones indirectas respecto al orden entre cantidades. Vallejo expone dos argumentos para el orden en los negativos: de una parte, cuando plantea la comparación asimétrica de cantidades negativas respecto a cero, el orden resulta ser el de los naturales relativos; mientras que, cuando la relación de orden se establece en el álgebra, entonces se tiene el orden de los números enteros. Bails establece un orden entre los propios negativos pero sin considerar al número cero en la comparación.

En los textos de García y Verdejo, el único indicio sobre el orden es la progresión aritmética en la que aparecen números negativos y positivos; en el libro de Verdejo se presenta en términos generales y algebraicos el principio de tricotomía, aunque no es suficiente para emitir una valoración sobre su pensamiento respecto al orden entre los negativos.

5.10 Relación de orden utilizada por los autores ilustrados en España.

Autor	Valor absoluto	Comparación de los negativos con cero	Orden entre los negativos	Orden de los números enteros
Benito Bails	X	¿?	X	—

Juan Justo García	¿?	—	—	—
Francisco Verdejo	—	—	—	—
José Mariano Vallejo	X	X	X	—

Definición del producto

La justificación de los resultados de los distintos casos del producto la presentan Bails, García y Verdejo mediante argumentos que tratan de Interpretar el carácter relativo del multiplicador. Vallejo presenta justificaciones mas elaboradas de la regla de los signos y muestra la demostración algebraica de Laplace y reitera la argumentación de Euler.

Tabla 5.11 Producto de enteros

Autor	Interpretación del carácter relativo del multiplicador	Multiplicador igual a la unidad	Justificación algebraica
Benito Bails	X		
Juan J. García	X		
Francisco Verdejo	X		
José M. Vallejo	X	X	X

Estructura multiplicativa

Ninguno de estos autores considera explícitamente las propiedades de la operación producto.

5.10.2 Fenomenología

Puig (2001) señala que la fenomenología es un medio para organizar las ideas matemáticas y, cuando estas ideas están relacionadas con los sistemas escolares en los que se pretenden enseñar, estamos ante la fenomenología didáctica. Los autores analizados utilizan fenómenos tomando como modelos contextos y situaciones que proceden tanto de su entorno cotidiano como de la matemática; se distinguen tres tipologías de fenómenos en los textos:

- ***Fenómenos físicos:*** parece que estos ofrecen una opción para mostrar la presencia de los números negativos en situaciones relativas familiares para los alumnos. Reconocemos tres clases de ellos: desplazamientos (avances, retrocesos; e.g. Bails), deformaciones (alargamientos y acortamientos; e.g. Verdejo) y capacidad (entrada y salida de productos o sustancias; e.g. Verdejo y Vallejo).

- ***Fenómenos contables:*** están relacionados con el manejo de capitales mediante la relación debe-haber o deudas y ganancias (e.g. Bails, Verdejo, García y Vallejo).

- ***Fenómenos matemáticos:*** recurren a los objetos del mundo matemático para ilustrar los negativos por medio de comparaciones (a través de la relación de orden < o >; e.g. Vallejo), operaciones algebraicas (e.g. Bails) y secuencias numéricas (e.g. Verdejo).

5.10.3 Problemas planteados

Estos autores recurren a problemas de enunciado muy similar, diferenciándose tan solo por pequeñas variaciones en los objetos sobre los que tratan; así unos se refieren a deudas mientras que otros lo hacen a pérdidas, unos hacen cuentas sobre dinero y otros sobre cantidad de trigo. De todo esto se identifican cuatro tipos de problemas: Algebraicos mediante resolución de ecuaciones, contables, de desplazamiento y volumen de líquidos

5.10.4 Representaciones

La variedad de situaciones fenomenológicas utilizadas hacen que estén presentes diversos sistemas de representación para los negativos; éstos son: verbales (explicaciones retóricas; e.g. Bails y Vallejo), numéricos (números y signos; e.g. Bails, Verdejo, García y Vallejo), algebraicos (letras, números y signos, y pares ordenados de números; e.g. Bails, Verdejo, García y Vallejo) y gráficos (líneas; e. Bails).

5.11 Números relativos

El análisis de las diferencias entre la estructura de los números enteros y los números naturales relativos (González Marí, 1995) arroja los siguientes resultados:

*Tabla 5.12. Comparación de autores y diferencias entre **Z** y N_r.*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
B. Bails	**P**	**P**	**¿?**	**No**	**P**	**Si**	**P**	**P**	**Si**	**P**	**No**	**Si**
J. J. García	**Si**	**Si**	**No**	**No**	**Si**	**P**	**No**	**No**	**P**	**No**	**No**	**Si**
F. Verdejo	**Si**	**¿?**	**No**	**¿?**	**P**	**No**	**P**	**¿?**	**P**	**No**	**No**	**P**
J. M. Vallejo	**Si**	**Si**	**No**	**Si**	**Si**	**Si**	**No**	**¿?**	**P**	**No**	**No**	**Si**

Si =se cumple la diferencia en el campo de los números naturales relativos; No =la diferencia no se cumple en el campo de los relativos; ¿?=no hay evidencias de una u otra estructura; P = cumplimiento parcial de la diferencia en el campo de los naturales relativos.

Los resultados que presenta la tabla anterior permiten señalar:

En la primera diferencia **D_1:** Orden total–orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa se confirma:

La presencia clara del indicador a_1, *Atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones*, en tres de los autores y de manera parcial en el restante; esto indica que recurren a esta atribución como recurso para explicar los negativos.

El segundo indicador, a_2, *Comparación-valoración global de las regiones,* lo utilizan dos autores de manera explicita, mientras que en otro esto ocurre de manera parcial, con lo que este indicador está presente entre los autores de la época de forma generalizada.

De manera contraria el indicador a_3, *Comparación de medidas con valores numéricos negativos en el orden entre enteros y naturales relativos*, no se manifiesta en tres de los textos, confirmando que el uso del orden no se corresponde con el de los relativos.

Para el indicador a_4, Comparación de medidas con valores numéricos negativos (inversión en el orden entre enteros y naturales relativos), hay una presencia a favor y dos en contra, por lo que no hay suficientes indicios para confirmar o rechazar el cumplimiento de este indicador.

De manera individual, la diferencia D_1 se identifica en J. Justo García y José Mariano Vallejo, y se reconoce parcialmente en Benito Bails y Francisco Verdejo.

Para la segunda diferencia $\mathbf{D_2}$: Sin primer elemento (entero) - con primer elemento (natural relativo):

El indicador b_1, *Naturaleza de los números y de las situaciones*, se presenta en dos autores y de manera parcial en un tercero.

El indicador b_2, *Representación*, se manifiesta de manera parcial en dos de los libros, mientras en los otros dos no hay cumplimiento.

Para el indicador b_3, *Transformaciones*, no hay indicios suficientes para valorar su cumplimiento o no.

El análisis individual revela que la diferencia $\mathbf{D_2}$ se presenta totalmente en el texto de Bails y parcialmente en los de Vallejo, Verdejo y García.

La tercera diferencia $\mathbf{D_3}$: Continuidad de medidas – discontinuidad de medidas (cruzar el cero), se encuentra parcialmente sólo en la obra analizada de Bails, para las de Verdejo y García no se cumple, mientras que en la de Vallejo no hay evidencias en uno u otro sentido; de forma general esta diferencia no se cumple.

La cuarta diferencia **D_4**: Cero único – cero doble (natural relativo) no se localiza en los textos de Bails, García y Verdejo, tampoco en el de Vallejo hay pistas que señalen su cumplimiento; esta diferencia no se cumple para los textos revisados.

La quinta diferencia **D_5**: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-compensación se cumplen totalmente en los libros de Bails, Verdejo y Vallejo, pero para el de García se identifica sólo parcialmente.

En este periodo encontramos que la Diferencia D_1 se presenta total o parcialmente en todos los autores; los indicadores, por orden de presencia, son: a_1, prácticamente en todos los autores; a_2 presencia mayoritaria o dudosa; a_3 presencia en Vallejo, y a_4 sin presencia reconocible.

La diferencia D_2 tiene presencia parcial en todos los autores, excepto en Bails que tiene una presencia afirmativa mayoritaria. Los indicadores por orden de presencia son: b_1, b_3 y b_2.

Las diferencias D_3 y D_4 no se presentan en los autores de este periodo.

La diferencia D_5 tiene una presencia reconocible en todos los libros, excepto en la obra de Verdejo, en la que sólo se reconoce parcialmente.

5.12 Consideraciones Didácticas

Como hemos subrayado en el Apartado 5.8, todos los textos analizados tienen una finalidad educativa y están dirigidos a la enseñanza de las matemáticas, por lo cual guardan una secuencia didáctica en su desarrollo.

Tabla 5.13 Indicadores de actividad didáctica

Autor	Actualización	Revisión y síntesis	Originalidad	Rigor y precisión	Interés social de las matemáticas	Principios filosóficos	Principios didácticos
Benito Bails	X	X					
Juan J. García	X	X		X	X		
Francisco Verdejo	X	X		X	X		
José M. Vallejo	X	X	X	X	X	X	X

Reconocemos en los autores estudiados una preocupación expresa por la instrucción de sus alumnos, lo cual se manifiesta en su interés en ofrecer manuales eficaces para el trabajo de los estudiantes en las instituciones en las que trabajan como profesores. Esto lleva a la sustitución de textos antiguos y a una actualización de los conocimientos, cuyo proceso de transformación es muy rápido durante estos años. Se aprecia una marcada influencia de autores franceses para la exposición de los contenidos, lo cual es reconocido abiertamente por algunos de ellos.

Son varios los indicadores que permiten establecer y comparar la actividad didáctica de los autores de textos de matemáticas españoles estudiados, y que resumimos en la tabla 5.13.

5.13 Actividad Científica

Fue muy fecunda la actividad científica de estos autores; su producción bibliográfica es muy variada y amplia: tratados generales, textos específicamente de álgebra, matemáticas prácticas para actividades especificas, aplicaciones militares y manuales para la enseñanza primaria. La vigencia de las obras de Bails y Vallejo sólo tiene comparación con las de Córtazar a partir de la segunda mitad del siglo XIX.

Como era de esperar en hombres ilustrados, su actividad no se limitó al campo docente o al de autores de texto, transcendieron en la sociedad a través de actuaciones políticas (Juan Justo García y José Mariano Vallejo fueron diputados), difusión y critica social (Benito Bails fue director del *Mercurio Histórico y Político*), participando en Academias (Vallejo fue miembro fundador de la Real Academia de Ciencias y Bails fue académico de la Lengua, de la Historia y de las Ciencias y Artes de Barcelona).

El contacto con los sistemas educativos franceses permitió a algunos de los autores tener un conocimiento de los más actuales métodos de enseñanza. Asimismo, el conocer y contactar con las figuras más destacadas de las matemáticas francesas del momento permitieron el intercambio de correspondencia con ellos (Bails con D´Alambert y Condocet; Vallejo con Lapplace, Lacroix y Cauchy).

Como se desprende de sus reseñas biográficas, estos personajes desarrollaron su labor docente en los más prestigiosos centros educativos del reino de la época: la Real Academia de San Fernando, los Reales Estudios de la Corte, la Universidad de Salamanca y el Real Seminario de Nobles de Madrid.

Como se ha dicho, los autores analizados de este periodo Ilustrado son laicos, a diferencia de los del periodo anterior, esto responde en parte a las medidas tomadas por la corona para llenar el vacío docente originado por la expulsión jesuita en 1767 y significa un paulatino desplazamiento de las ordenes religiosas del control educativo y científico español. Otro aspecto importante es la publicación de los textos en castellano y la propia convicción de que los textos escritos en castellano son rigurosos, actuales y tan útiles como los escritos en latín, como lo pone de manifiesto la mencionada actitud de Verdejo en su oposición a la cátedra de matemáticas.

5.14 Balance final

Destacamos algunas ideas sobre el tratamiento de los números negativos, los libros en que se presentan y los autores que los escriben durante el periodo Ilustrado.

1. Apreciamos ideas de pensadores y matemáticos contemporáneos, como Kant y Euler en los conceptos básicos centrales utilizados por los autores de textos matemáticos españoles de este periodo. También hay una manifiesta influencia de autores matemáticos franceses en el tratamiento y consideración de los números negativos.
2. Como consecuencia del análisis conceptual, sostenemos que los autores de este periodo tienen un concepto relacional de número, si bien utilizan alternativamente la noción euclidiana como caracterización asumida. El concepto de cantidad es el que hemos denominado fenoménico, expresado por Kant en *Crítica de la Razón Pura*, como concepto del entendimiento que permite la comparación, si bien la mayoría de los autores atribuyen también a esta noción un carácter empírico. Sobre las cantidades negativas estos autores consideran que surgen como determinaciones cualitativas de la cantidad y le atribuyen sentido relativo, en coherencia con la noción kantiana. Por su origen, las cantidades negativas son entidades de naturaleza dual, resultado de operaciones aritméticas y algebraicas.
3. Del estudio de la estructura conceptual establecemos que los autores de este periodo conocen, escriben y manejan la *progresión de los enteros*, pero trabajan con números relativos, que simbolizan con los signos + y –, a los que atribuyen un significado de oposición, además del usual de operaciones.
4. La atribución de significados, signos y adjetivos duales a los negativos está ligada a la consideración del concepto euclidiano de número en la mayoría de estos autores. Los negativos se representan con números, letras y signos, verbalmente y mediante

pares ordenados. No se usa la recta numérica para representar este conjunto, si bien se conserva la representación mediante segmentos en algún caso.

5. Los ejemplos de cantidades negativas se hacen a través de la organización de fenómenos físicos, contables o matemáticos.
6. La estructura aditiva está basada en criterios de anulación-compensación, que se justifican algebraicamente, con reglas independientes para la resta. No hay, pues, suma de enteros, sino sólo suma de números relativos No se consideran propiedades generales para esta suma de relativos. Se admiten las soluciones negativas en las ecuaciones.
7. Las consideraciones respecto al orden entre negativos y de los negativos con cero son escasas, si bien se incrementan a final del periodo. Los autores no comparan expresamente los positivos con los negativos.
8. Conviene recordar que García y Verdejo trabajan con la sucesión de los números enteros, en la que está implícita la relación de orden; Verdejo establece los símbolos y habla de relación de orden, para la que llega a establecer algún criterio. Vallejo, también presenta la secuencia de los enteros en relación con los logaritmos de las potencias de diez y dedica tiempo a establecer y probar las relaciones de los negativos con 0 y entre ellos. Son aproximaciones valiosas a la noción de orden entero. Esto no obsta para que algunos de los indicadores de González Marí permitan reconocer la presencia del orden relativo en multitud de ejemplos. La dualidad aritmético-algebraica de las cantidades negativas hace factible estas contradicciones.
9. La justificación del producto de relativos se centra en argumentar los condicionamientos que produce el carácter relativo del multiplicador. Todos los autores pretenden justificar así la regla de los signos. Si bien Vallejo conoce justificaciones con fundamento algebraico, las presenta como una curiosidad. No hay consideración de propiedades para el producto
10. Reconocemos en los autores de este periodo la presencia, con mayor o menor intensidad de tres de las diferencias de González Marí, las denominadas D_1, D_2 y D_5; no hay presencia de D_4 y sólo datos muy escasos sobre D_3. El análisis conceptual ha puesto de manifiesto que los autores de este periodo trabajan con números relativos preferentemente, si bien con las limitaciones que impone el desarrollo de las matemáticas del momento.
11. Hay una serie de indicadores que muestran el interés didáctico de los autores, entre ellos destacan la preocupación por la actualización de los conocimientos, el interés por conocer las

producciones foráneas, el esfuerzo por cuidar el rigor y la precisión y la reiteración por subrayar el interés social del estudio de las matemáticas.

CAPITULO 6

Periodo Romántico (1815-1874)

6.1. Caracterización general

La denominación de Romántico para este tercer periodo establecido en nuestro estudio es una denominación usual para referirse, a grandes rasgos, a la actividad literaria, científica, filosófica y artística, a la cultura española en general, durante los años que transcurren entre la restauración de Fernando VII y la de Alfonso XII. Así, los historiadores hablan de un periodo Romántico en la literatura española y, actualmente, se habla del Periodo Romántico en la historia de la ciencia española, por contraste con el Periodo Ilustrado que le precede (Jurestchke, 1989; Maldonado y García, 2002). Este periodo lo sitúan distintos autores entre 1808 y 1874, o entre 1814 y 1874, si bien, dependiendo de la disciplina, las fechas finales pueden variar.

El fin de la guerra de la Independencia y el retorno de Fernando VII al trono español supuso la incorporación paulatina a la actividad política y a la vida cultural de algunas de las ideas liberales plasmadas en la Constitución de 1812, las cuales fueron inicialmente aceptadas por el monarca, según hemos comentado en el Capítulo 2. Pero, sobre todo, supone una ruptura radical con el periodo Ilustrado precedente. Escogemos esta fecha para establecer el inicio de un tercer periodo para nuestro estudio, por las implicaciones que tuvieron en la sociedad española las ideas liberales. Es entre 1850 y 1880 cuando se considera el comienzo de la incorporación española al movimiento científico europeo; por ello hemos escogido 1874 como fecha para finalizar este periodo, con el fallido intento de establecer una nueva dinastía, a través de Amadeo de Saboya.

Estas son las razones por las que hemos asumido la denominación *Periodo Romántico* para referirnos en este estudio al comprendido entre 1814 y 1874, que abarca desde el fin de la guerra de la Independencia hasta el comienzo de la madurez científica española en matemáticas (Vernet, 1989).

Una descripción a grandes rasgos que proporcione una visión global de la España del siglo XIX, suele destacar una vida política en permanente crisis, provocada por conspiraciones y pronunciamientos; ausencia de proyección internacional producto de las guerras civiles carlistas y los desastres de la pérdida del imperio ultramarino; estructuras económicas débiles o inexistentes, dependientes del capital y de los intereses extranjeros; fracaso de la Revolución Industrial en España; y consolidación de la economía liberal.

El desequilibrio político interno y el incipiente problema colonial llevan a un desistimiento de los problemas de la ciencia. En este contexto, la política científica española del siglo XIX mantiene una tendencia centralista y uniformadora, con tendencia a la concentración institucional en Madrid, acompañada de un cierto desarrollo en Cataluña. Los términos usuales cuando se compara la actividad científica al inicio de este periodo con el periodo anterior hablan de *catástrofe* y de *colapso de la actividad científica*, por interrupción del desarrollo previo, especialmente estimable en matemáticas. El triunfalismo y la ideologización de la ciencia y de su historia que se produce en estos años, son fruto del debate político y social entre liberales y conservadores (Maldonado y García, 2002).

La ausencia de un modelo planificado de política científica y de unas estructuras administrativas básicas, hacen urgente emprender reformas administrativas en la enseñanza y en la gestión de los centros e instituciones de educación superior e investigación; estas reformas comienzan en 1833 y se extienden durante todo el periodo. El desarrollo alcanzado es desigual y escaso, pero consigue establecer las bases del sistema educativo español. También proporciona un marco institucional para la independencia progresiva de las distintas disciplinas, con un incremento del número de ramas científicas y de nuevas especialidades. El periodo de la Ciencia Romántica pasa en estos años de sustentarse en el racionalismo crítico de Kant a orientarse por las ideas del positivismo de Comte, con una nueva fase de Ciencia Positiva.

Podemos distinguir tres etapas durante este intervalo de tiempo.

Primera Etapa.

La primera etapa transcurre durante el reinado absolutista de Fernando VII, desde 1814 hasta 1833, y se caracteriza por su lucha contra los vientos de cambio que imponía la Constitución de Cádiz. En los años de la guerra se produce una ruptura generacional por muerte de muchos de los científicos del periodo anterior. También se produce un éxodo de intelectuales y científicos hacia el extranjero para evitar las represalias del régimen. La restauración de la Compañía de Jesús en 1815 no tiene efectos educativos, ni aporta nuevo personal dedicado a la investigación. La desorganización, supresión o el cierre de las instituciones del periodo Ilustrado produce un letargo, cuando no una desaparición de la actividad científica vinculada al Antiguo Régimen.

Los enfrentamientos políticos e ideológicos entre reaccionarios y liberales radicales, generan desconfianza política y dificultan la tranquilidad y aislamiento necesarios para la investigación durante estos años. La censura, los prejuicios y las prohibiciones a la libertad de pensamiento contribuyen a crear una atmósfera social irrespirable, que produce una desconexión con la ciencia europea y una decadencia intelectual, cuando no la paralización de toda iniciativa.

En el trienio liberal, 1820-1823, los liberales tratan de poner en práctica su ideario en una situación de fuertes confrontaciones. El protagonismo de los liberales en estos años, los identifica y facilita su expulsión del país en la siguiente década. Juan Justo García fue diputado liberal en Cortes desde 1820 a 1821. Algunos exiliados importan ideas procedentes de sus contactos científicos y educativos en el extranjero. En el ámbito educativo destaca José Mariano Vallejo, no sólo por sus aportaciones a la enseñanza a través de sus textos, sino también por su posición política que es claramente liberal.

Segunda Etapa

La segunda etapa corresponde al reinado de Isabel II, desde 1834 a 1868. En esta segunda etapa, para la configuración del denominado Estado liberal, tanto la regente Maria Cristina de Borbón como Isabel II buscan el apoyo de moderados, liberales y progresistas en el gobierno. El retorno los exiliados liberales, junto con el nuevo régimen político, contribuye a la recuperación científica en estos años. Varios aspectos destacan en esta etapa:

a) Guerras Carlistas, guerras civiles, que fueron originadas por la pretensión al trono del infante don Carlos María Isidro, segundo hijo varón de Carlos IV. Estas tres guerras (1833-1839; 1847-1849; 18772-1876) eran expresión del enfrentamiento político e ideológico entre liberales y absolutistas; la participación de combatientes extranjeros en uno y otro bando facilitó el intercambio de avances y conocimientos técnicos relacionados con la tecnología militar. El predominio de la actividad bélica entre 1833 y 1840 subraya la importancia de las Academias Militares en estos años, como hemos indicado en el Apartado 2.7.1. También se pone de manifiesto con la publicación de manuales para aspirantes y cadetes, redactados por profesores de estos centros, como ocurre con los de Odriozola y Feliú.

b) Los esfuerzos del gobierno por establecer un sistema educativo centrado y bajo control gubernamental, lleva a la promulgación de diversas leyes y planes de instrucción. La reforma de las universidades la realiza el ministro Pidal. Se establece una nueva Licenciatura en matemáticas. La Ley Moyano establece nuevos centros universitarios, entre ellos las Facultades de Ciencias. Las reformas producen avances apreciables en los centros universitarios, con nuevos profesores, relacionados con centros científicos, y conocedores de revistas y libros extranjeros.

c) Esfuerzos sociales: se produce un despegue considerable del asociacionismo científico, lo cual lleva a una institucionalización académica de la actividad científica. Aunque el apoyo socio económico es precario, la ciencia adquiere credibilidad gracias a los esfuerzos y empeños individuales. Los gobiernos tratan de apoyar la creación o modificación de centros de enseñanza y también de instituciones de investigación. Estos son los años en que se trabaja para incorporar el nuevo Sistema Métrico Decimal.

d) Publicaciones. La importancia de los conocimientos y técnicas adquiridos por los exiliados en el extranjero contribuye a proporcionar crédito a la recuperación de la actividad científica. Se fomenta desde el gobierno la difusión de publicaciones extranjeras y la edición de libros y revistas. La reorganización del sistema educativo impulsa la mejora de la enseñanza y genera nuevas necesidades intelectuales. En este contexto cabe entender los trabajos de Fernández Vallín y Bustillo y de Rey Heredia, ambos profesores de Enseñanza Media.

e) Inestabilidad política por los constantes cambios de gobierno. Así, los gobiernos conservadores de Narváez provocan nuevos exilios de científicos progresistas. No obstante la censura ideológica, se va imponiendo un perfil de gobernante tecnócrata que facilita el acercamiento a Europa. Las reformas de los moderados se sostienen sobre una ideología ilustrada que subraya el carácter utilitario de la ciencia –esto se expresa por el rechazo a la enseñanza y estudio en latín y griego-; la difusión de la instrucción a las clases medias; y el impulso a la riqueza pública.

Tercera Etapa

La tercera etapa se inicia con la revolución de septiembre de 1868 que derroca a Isabel II y concluye con la proclamación de Alfonso XII como rey en 1874. Dentro de las medidas importantes tomadas durante el Sexenio Democrático están la implantación del derecho de reunión y asociación, el sufragio universal y la libertad de imprenta. En esta etapa de la vida española se fija la peseta como unidad monetaria.

La breve monarquía democrática de Amadeo de Saboya (1871-1873) estuvo marcada por la inestabilidad política, por lo que en dos años se sucedieron seis gabinetes y se convocaron tres elecciones generales.

De forma general este periodo es testigo de la llegada de las corrientes filosóficas que triunfan en Europa; así afloran en España el racionalismo con Giner de los Ríos, el kantismo gracias a Rey y Heredia y el krausismo de la mano de Sanz del Río, por mencionar algunas. Estas corrientes son cultivadas por diversos círculos sociales y académicos e influyen en la vida política española, según vimos en el Apartado 2.9.

6.2 Contexto institucional

La educación fue un aspecto clave durante este periodo, tanto a nivel civil como a nivel militar, según desarrollamos en el Apartado 2.10.

En lo civil, el Plan de Instrucción Primaria de 1838 es un intento por regular la primera enseñanza. El ministro Pidal realiza en 1845 la reforma de las universidades. Las universidades se reducen a 10. Desvincula la enseñanza universitaria de la segunda enseñanza o secundaria y la instituye como competencia específica del Estado, con la creación de la Dirección General de Instrucción Pública. Los estudios de doctorado se centralizan en la Universidad Complutense de Madrid.

La Ley Moyano, de 1857 establece nuevos centros universitarios; con esta ley se alcanza una regulación de carácter nacional para todos los niveles educativos.

En 1834 se funda la Real Academia de Ciencias Naturales de Madrid, germen de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, fundada en 1847.

La instrucción para la ingeniería militar fue reestructurada en 1839 mediante un nuevo plan de estudios, donde se enfatiza la práctica experimental en ciencias. La creación de nuevas Escuelas de Ingeniería se produce entre 1834 y 1855.

En 1854 se promulga un Real Decreto para *estimular la redacción de manuales de divulgación científica*, al que se acogen varios de los libros que estudiamos.

Dos situaciones que brindaron la oportunidad de conocer e implementar los avances tecnológicos y científicos que se producen en Europa fueron el retorno a España de los intelectuales y académicos que se habían exiliado durante el reinado de Fernando VII, así como la política implementada para enviar a jóvenes españoles a realizar o completar su formación en el extranjero, como fue el caso de Juan Cortázar.

En el año 1873 se promulga un decreto que moderniza las facultades y surgen las titulaciones de Física y Química, Matemáticas e Historia Natural.

Los autores de las obras seleccionadas para el estudio de este periodo son: José de Odriozola, Jacinto Feliú, Joaquín Mª Fernández y Cardín, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo y José María Rey y Heredia. Ellos desarrollan su actividad matemática tanto en Academias Militares como en la sociedad civil; esto es una muestra del desplazamiento sufrido por las órdenes religiosas en el sistema educativo, siendo ocupado su lugar por los profesores de las Academias Militares, de los centros de Enseñanza Media y Facultades universitarias.

6.3 Ideas matemáticas

Como hemos señalado en el apartado 2.11, este periodo histórico es abundante en matemáticos de renombre mundial y fecundo en el desarrollo de conceptos matemáticos.

Las matemáticas europeas posteriores a la Revolución Francesa se caracterizan por su posición crítica y por la revisión profunda de los fundamentos, en especial, en Análisis Matemático y Geometría. En estos años se impone un nuevo rigor en la investigación. Destacan, entre otras muchas, las figuras de Cauchy, fundador del análisis, Galois quien establece la teoría de grupos para el estudio de la resolución de ecuaciones, y Gauss con su demostración del teorema fundamental del álgebra. La incorporación en España de estas nuevas orientaciones se produce con retraso. Nombres destacados son Chaix y Vallejo, quien en esta etapa estudia las funciones trascendentes.

Academias e instituciones militares incluyen las matemáticas en sus planes de formación, para lo cual se redactan manuales y libros de texto. El Observatorio Astronómico de San Fernando de Cádiz, uno de los centros más destacados por su contribución científica en el siglo XIX, adquiere nuevo impulso durante los años del gobierno de Fernando VII.

Durante los años del reinado de Isabel II hay dos datos importantes, ya mencionados, el gran desarrollo del asociacionismo científico y la nueva regulación de los estudios para la totalidad del sistema educativo. Los moderados potencian la enseñanza superior y la formación tecnológica; los progresistas ponen su empeño en la instrucción pública básica, el fomento de los hábitos de estudio y de investigación.

En 1852 se produce una actualización de los planes de estudio en los que se incluyen nuevos conceptos, como: *álgebra superior, geometría analítica, cálculo diferencial e integral*. También encontramos consolidada la división de matemáticos en puros y aplicados, según su trabajo se realice en una Facultad o en una Escuela de Ingeniería.

Hay escasas referencias a los trabajos matemáticos de la época; se desconocen los trabajos de Riemann y Weierstrass.

Matemáticos destacables de está etapa son Rey y Heredia y García Galdeano. Datos culturales matemáticos son la publicación, en 1862, del *"Vocabulario Matemático etimilógico, seguido de un breve índice de matemáticos célebres y de las obras mas notables"*, de Picatoste, y el discurso de ingreso de Echegaray en la Real Academia de Ciencias, titulado *"Historia de las matemáticas en nuestra España"*.

A nivel internacional los matemáticos de primera línea encausan sus trabajos hacia la moderna significación del concepto de número. El desarrollo de las leyes composición interna y las reglas de cálculo entre magnitudes matemáticas son imprescindibles para alcanzar esta meta, por ello es determinante en este proceso la publicación en 1867 la *Theorie der completen zahlensysteme* de Herman Hankel (Wussing, 1998); como se ha mencionado en el apartado 1.3.1, esta obra plantea el principio de permanencia de las leyes formales, el cual es aplicado para ampliar determinados campos numéricos.

En el Sexenio Progresista, dada su corta duración, son pocos los datos que diferencian las ideas matemáticas de esta etapa de las de la anterior.

Son frecuentes las traducciones y reimpresiones de autores franceses como Lacroix, Briot y Cirodde. Posteriormente los autores matemáticos españoles incorporan los métodos de exposición franceses en sus obras alcanzando igual calidad y valor matemático, como es el caso de Cortazar.

Los autores españoles hacen uso del álgebra de forma moderna e incorporan los conceptos más actuales de la época en sus obras; de esta manera el cálculo diferencial e integral pasa a ser contenido usual en los manuales de matemáticas superiores.

Se incrementan los esfuerzos para introducir y establecer el sistema métrico decimal en todo el reino; esto hace que sean incorporados en los textos matemáticos apartados destinados a la enseñanza del nuevo sistema de medida.

Los matemáticos españoles estaban al tanto de los conocimientos matemáticos más actuales, sin embargo, su labor fue solamente de difusores de los conocimientos mediante sugerencias y planteamientos didácticos, pero no fue la de aportar nuevos conceptos.

No hay cifras exactas sobre el número total de obras matemáticas publicadas, puesto que abundaron de todo tipo, desde las dirigidas a la primaria como a la secundaria o la universidad; sin embargo consideramos que las cuatro obras seleccionadas para el estudio en este periodo son representativas por la trascendencia de sus autores y la diversidad de sus lugares de ejercicio profesional, así como por la importancia otorgada tanto en los concursos de textos para la segunda enseñanza, como por las listas publicadas por el gobierno de los textos a utilizar para enseñar matemáticas.

6.4 Curso completo de Matemáticas puras (1827)

6.4.1 Autor

José de Odriozola y Oñativia (*n. Cestona,* 1785- *m.* 1864) (**CA1**). Coronel de infantería y teniente coronel de artillería (**CA2**). Fue miembro destacado de la Real Academia de San Fernando donde fue nombrado académico de mérito en 1814. Participó en la fundación de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales fundada en 1847 (**CA4**).

Su vida transcurre entre la ilustración y el periodo Romántico; por tanto conoció los reinados de Carlos IV, Fernando VII, José Bonaparte e Isabel II; desde su desempeño militar se dedicó a la enseñanza y a la redacción de textos. De esta manera, Odriozola pertenece a ese grupo de militares ilustrados que, desde su papel como autores de textos matemáticos, difundieron los avances de las matemáticas y sus aplicaciones en las artes militares; sus obras de texto tuvieron vigencia académica en diferentes niveles educativos (**CA4**).

Sus obras trascendieron la enseñanza militar; tal es el caso de su *Curso completo de matemáticas puras* que fue aprobado como texto por la Facultad de Filosofía (**CA7**). De 1845 hasta 1849 dicho texto aparece en la lista oficial de textos para la enseñanza de las matemáticas (**CA7**).

Publicó: *Curso completo de matemáticas puras* (1827); *Ensayo sobre las ciencias y las artes del dibujo* (1831); *Tratado elemental de Mecánica* (1832), *Mecánica aplicada a las máquinas*; *Dinámica* (1863); *Hidrostática e hidrodinámica* (1863) y *Mecánica racional e industrial* (1863) (**CA6**). Dejó sin terminar una obra titulada *Memoria nacional e industrial*.

Vea (1995) opina que Odriozola fue:

> *"uno de los pocos matemáticos españoles de la primera mitad del siglo XIX con iniciativa propia para mejorar la situación académica de las matemáticas, tanto en la enseñanza militar como en su posterior repercusión en la enseñanza tanto elemental como de ampliación"* (pp. 178-179) (**CA7**).

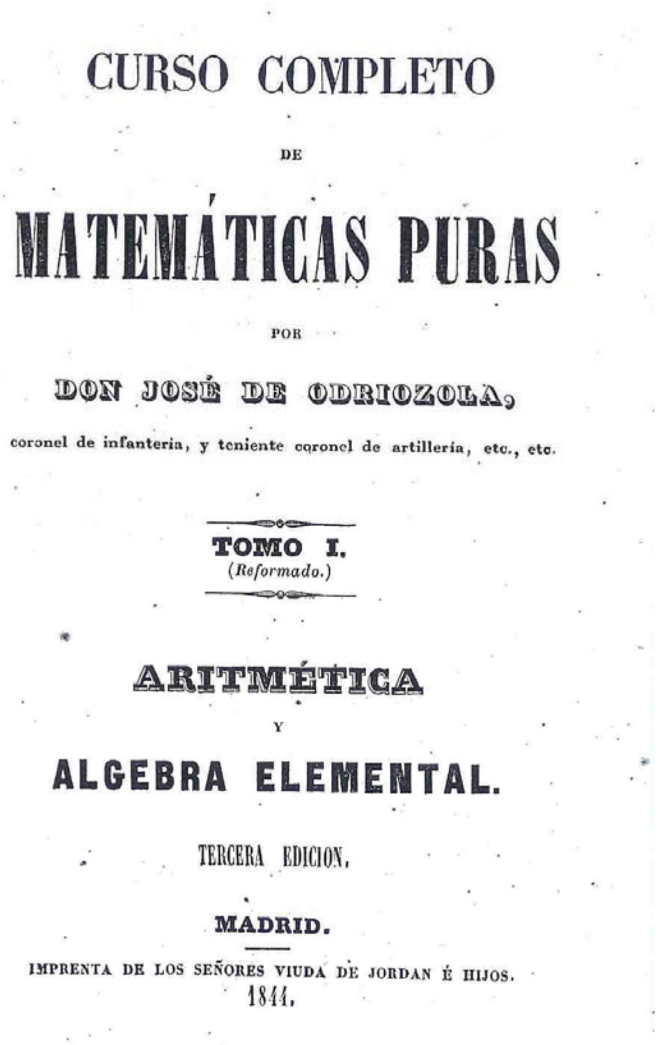
Hemos encontrado pocas referencias a Odriozola y su obra, entre ellas están Ausejo & Hormigón (2002), la Enciclopedia Universal Ilustrada (1929) y Vea (1995) (**CA8**).

6.4.2 Caracterización del texto

Curso completo de Matemáticas puras. (1827). Aritmética y Álgebra elemental. Tercera edición, (1844). Tomo I reformado. Madrid: Imprenta de los señores viuda de Jordán é hijos (**CGO1**).

La primera edición data del año 1827 (Vea, 1995) (**CGO2**). El texto tiene 512 páginas, y está dividido en dos partes. La primera se titula *Aritmética con elementos de Álgebra correspondiente* y la integran ocho capítulos, con una extensión de 379 páginas. Esta primera parte se inicia con las operaciones aritméticas, luego prosigue con las fracciones decimales, divisibilidad, límites, números fraccionarios y números complexos (compuestos), potencias y raíces, para continuar con las razones, progresiones y logaritmos. Finalmente dedica un capítulo a la regla de tres (**CGO3, CCO6**).

La segunda parte se titula *Complemento del álgebra elemental*, y la integran cinco capítulos. Empieza con las operaciones algebraicas, prosigue con las potencias y raíces de las cantidades algebraicas, dedica un capítulo a problemas determinados de primer grado y otro a los de segundo grado; finaliza con un análisis indeterminado de problemas del primer y segundo grado con dos incógnitas (**CGO3**).



CURSO COMPLETO

DE

MATEMÁTICAS PURAS

POR

DON JOSÉ DE ODRIOZOLA,

coronel de infantería, y teniente coronel de artillería, etc., etc.

TOMO I.

(*Reformado.*)

ARITMÉTICA

Y

ALGEBRA ELEMENTAL.

TERCERA EDICION.

MADRID.

IMPRENTA DE LOS SEÑORES VIUDA DE JORDAN É HIJOS.

1844.

El autor es contemporáneo de Vallejo, si bien hay 14 años claves de diferencia entre la edición del *Tratado Elemental* y la del *Curso Completo de Matemáticas Puras*. Mientras que el primer texto tiene un plan ambicioso y muestra una visión optimista de la ciencia, que se ajusta a las reformas discutidas en las Cortes de Cádiz, la obra de Odriozola se enmarca en la década reaccionaria del reinado de Fernando VII, cuando se han producido algunos cambios administrativos y de organización en la enseñanza, pero se han incrementado las restricciones educativas en un marco político muy cerrado. Vallejo dirige su obra a los *Caballeros Seminaristas del Seminario de Nobles*; Odriozola recomienda la suya para la *instrucción secundaria*, con unas referencias al modo de trabajo en el aula y a la disciplina intelectual de los estudiantes.

La obra está dirigida a la enseñanza de la aritmética durante la instrucción secundaria, e insiste en:

"la necesidad de tratar filosóficamente la Aritmética que haya de formar

> *parte de las ciencias matemáticas; habiendo para ello también otro motivo poderoso, y es , que conviene asi para desarraigar el vicio juvenil , fecundo en errores, de propasarse a sentar proposiciones generales sin el debido fundamento"* (p. 4) (**CGO4**).

Odriozola establece unas breves consideraciones metodológicas para el uso de su texto en la clase de matemáticas:

> *"En toda la obra se notará la falta de abundantes ejemplos ó casos particulares de un principio esplicado; mas yo creo que en el testo no deben seguir á una teoria mas aplicaciones que las necesarias para su aclaracion, y que al profesor toca el proponer nuevas diariamente en su academia, y aun exijir de los discipulos resoluciones por escrito de otras que proponga para horas de estudio privado, precaviendo el que para todos no sea una misma la cuestion"* (p. 4) (**CGO4**, **CGO7**).

Y también añade unas prescripciones para el aprendizaje:

> *"Obligado por este medio cada discipulo á discurrir sobre las materias, adquirirá posesion de las ideas , manifestará su capacidad en las pequeñas composiciones que habrá de formar espresando por escrito el discurso de la cuestion , y con el ejercicio se irá perfeccionando en el arte de pensar y en el de esplicar"* (p. 4) (**CGO4**, **CGO7**).

El planteamiento filosófico empirista y de cierto pesimismo, se aprecia en el Capítulo Preliminar. Así, afirma que:

> *"La idea de cantidad de cada especie se imprime en nuestra mente por una continuación de sensaciones que causan en nuestro sentidos los objetos materiales. Así, padeciendo mil y mil ilusiones y desengaños, aprendemos lo que es distancia , superficie , bulto , peso , tiempo , etc., y en general lo que es cantidad"* (pp. 5 y 6)

Habla en sentido positivista de las reglas que fundamentan toda ciencia (*Reglas de la Ideología*), que son la Lógica *–formación de las ideas razonando-* y la Gramática *– expresión de las ideas en lenguaje oral y escrito-* (p. 7). Retomado una idea clásica, de las matemáticas griegas, establece dos grandes tipos de cuestiones y proposiciones de las matemáticas "*Teoremas: cuestiones de demostrar, que se alcanzan mediante la prueba-* y *–Problemas: cuestiones de encontrar, que se alcanzan mediante resolución-"* (pp. 8-9).

Mediante ejemplos matemáticos plantea las nociones de *razonamiento, silogismo, definición, axioma, verdad o falsedad, métodos analíticos, métodos sintéticos*, y otras.

No se hallan, por el contrario, referencias a los autores en los que Odriozola se basa para su trabajo (**CGO5**).

Veamos su definición de la cantidad y el número:

Cantidad: *"Todo lo susceptible de aumento ó disminución se llama cantidad"* (CCO2) (p. 5), e indica como ejemplo de ella a *"la distancia, la superficie, el bulto, el peso, el tiempo, etc.; y aún cualquiera colección de objetos de una misma naturaleza, como por ejemplo de hombres, de árboles, de pueblos, etc."* (p. 5) (**CCO2**), luego aclara aún más la definición, indicando *"[...] procedemos á valuar el grandor de cada cantidad, comparándola con otra de la misma especie."* (p. 6) (**CCO2**), además aclara:

> *"Cuando la cantidad es capaz de variar de grandor de una manera contínua, es decir de aumentarse ó disminuirse cuan poco a poco se quiera imaginar, como sucede á la distancia, al bulto, al peso, al tiempo, etc., se puede elegir por unidad una magnitud de la especie respectiva, cuan grande ó pequeña se quiera, […]. Más cuando la cantidad aumenta ó disminuye de una manera brusca ó discontínua, como sucede á los diferentes géneros de colecciones de individuos; entonces la unidad es necesariamente uno de los individuos, como por ejemplo un hombre tratándose de número de hombres, sin atender á si la unidad es grande ó pequeña."* (p. 6) (**CCO2**).

Número: *"Esta segunda cantidad destinada servir de término de comparación para todas las demas de su misma especie, se llama unidad; y la expresión de las veces que la unidad está comprendida en la cantidad valuada, se llama número"* (p. 6). Considera como número entero al número de veces que la unidad se encuentra en una cantidad; se trata de una noción relacional (**CCO1, CCO3**).

La Aritmética es entendida como el cálculo con números:

> *"Cuando los números abstractos ó concretos espresan cantidades valuadas fijas, como cinco, nueve, etc, el cálculo ejecutado con tales números se llama Aritmética"* (p. 8) (**CCO1**).

También el Álgebra se entiende como sintaxis y cálculo de conceptos más generales:

> *"Y el cálculo que se ejecuta con números espresados por caracteres de una y otra clase, mediante otros signos conjuntivos, disyuntivos y verbales […] se llama Álgebra"* (p. 8).
>
> *"El lenguaje algebraico sirve para abreviar y generalizar los razonamientos sobre las cuestiones relativas a los números"* (p 22) (**CCO4**).

La consideración de cantidades generales la explicita cuando indica que *"Una letra puede representar cualquiera número de cualquiera sistema de* *numeración, y este número puede ser entero ó fraccionario ó inconmensurable”* (p. 381) (**CCO4**). De la misma manera indica que una ecuación es tan sólo una igualdad: *“Esta expresión, en que el signo = representa el verbo y el atributo es igual, se llama igualdad ó equivalencia, y tambien á veces ecuación”* (p. 23); una ecuación puede ser literal: *“[...] cuando las cantidades conocidas que entran en ellas son literales”* o numérica: *“cuando las cantidades conocidas en ellas son números particulares”* (p. 442) (**CCO4**).

Los números negativos son utilizado en el texto como: exponentes, logaritmos de números menores que uno y como una razón. El autor dedica un apartado: *Nociones primeras sobre la sustracción de números enteros algébraicamente*, para explicar como efectuar sustracciones, especialmente cuando se pretende restar un número mayor de otro menor (**CCO5**).

El texto (Tomo I, reformado) figuró en las listas oficiales para la enseñanza de las matemáticas del año 1846,1850,1852 y en los años 1847 y 1849, junto con los tomos segundo y cuarto (Vea, 1995) (**CGO6**, **CGO7**).

6.4.3 Tratamiento dado a los negativos

Los párrafos de mayor interés relacionados con los apartados son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.

“El signo + espresa la conjuncion mas; y escrito entre dos números generales o particulares , como por ejemplo A+B , indica que al valor A se ha de añadir el valor B” (p. 22-23).

“[...] se llama signo aditivo el + en el calculo.” (p. 31).

“El signo – escrito entre dos números , como por ejemplo A – B , significa la palabra menos , é indica que del valor representado por A se ha de quitar el valor representado por B” (p. 23).

“[...] se llama en general signo sustractivo el –, [...]” (p. 39).

Los signos más (+) y menos (–) tienen un sentido cuantitativo y expresan las acciones de *añadir* y de *quitar*. También tienen sentido numérico u operacional, ya que indican las operaciones de adición y sustracción.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.

“Cuando se propone restar de un número particular otro mayor , la operación es á la evidencia imposible aritméticamente, como por ejemplo si se pide restar 6 de 5. Pero indicando algebraicamente la operación, será
5 – 6
y veamos á que resultado algébrico nos conduce el siguiente razonamiento. Esta cantidad, cualquiera que ser pueda, subsistirá la misma indudablemente aunque se añada y quite 1 al mismo tiempo, o bien añadiendo 1 – 1 que es

nada. Entonces la espresion propuesta se transforma en

5 + 1 – 6 – 1 ;

que se reduce á 6 – 6 – 1 , y finalmente á

– 1 ;

resto negativo, resultante de restar la cantidad mayor de la menor” (p. 39).

Los signos más (+) y menos (–) determinan la cualidad positiva o negativa de una cantidad. Es de destacar el otorgamiento de una existencia real a las cantidades negativas aisladas, que proviene de ampliar el significado de determinadas operaciones aritméticas. Por otra parte, los signos positivo y negativo se contraponen uno a otro. En su presentación no se asocia ningún fenómeno físico a las cantidades negativas, sólo se les otorga significado aritmético.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.
"Pues el signo – antepuesto al número aislado indica negación, ó sea el faltar al restando aquella cuantía para que la operación fuera posible."
(p. 40).

Hallamos en el párrafo dos consideraciones para la cantidad negativa: una primera es que ésta surge como resultado, o son aquello faltante, para poder efectuar una resta entre números naturales; otra segunda es que las cantidades negativas representan la negación de la cantidad.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
El párrafo que continúa el extractado para **TSN2**, dice:
"Igualmente dará resto negativo otro caso cualquiera en que el restador sea mayor que el restando , como por ejemplo

495+778-123-778;

que se reduce á 1273-1273-778, y finalmente á

–778.

Bastan estos ejemplos para inferir el motivo por qué el signo sustractivo – se suele tambien llamar negativo; igualmente que cantidad negativa la que afectada con signo – forme sola ella una expresión en que no haya cantidad alguna afectada con signo aditivo +, que por contraposición se suele llamar tambien signo positivo." (p. 39-40).

Se reitera la segunda consideración del ítem anterior: las cantidades negativas proceden de una sustracción con el minuendo mayor que el sustraendo; por lo tanto, su origen es el resultado de operaciones aritméticas.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.
"Recapitulando los tres casos que puedan ocurrir en la sustraccion, como por ejemplo: 2a –a = a, 2a–2a = 0, 2a – 3a = –a, se infiere el motivo para decir fundadamente, que toda cantidad positiva es mayor

que cero y que toda cantidad negativa es menor que cero." (p. 42).

Las cantidades negativas son menores que cero porque surgen de las restas sucesivas de minuendo fijo (2a) y de sustraendo creciente (–a, –2a, –3a, etc.); en este caso las diferencias van disminuyendo, por las propiedades usuales de la resta. Luego a es mayor que 0, que, a su vez, es mayor que –a; como esto sirve para cualquier valor de a, de ahí la validez del enunciado. El autor no menciona en su texto que las cantidades negativas son "menores que nada"; tampoco hay una asociación del cero con la "nada". Afirma claramente que las cantidades negativas son menores que cualquier cantidad positiva.

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.
"Pues en efecto, si uno debiere 20 reales y no tuviese mas que 12, dando estos á cuenta resultaria que aun debe 8, esto es, que tiene menos que nada: como se espresa en 12-20=–8" (p. 42).

Odriozola utiliza escasos fenómenos para ejemplificar, fiel a su propósito enunciado al comienzo del libro:

"En toda la obra se notará la falta de abundantes ejemplos ó casos particulares de un principio esplicado; mas yo creo que en el testo no deben seguir á una teoria mas aplicaciones que las necesarias para su aclaracion, y que al profesor toca el proponer nuevas diariamente en su academia" (p.4).

Uno de estos casos es el de las cantidades negativas, donde establece la analogía de las cantidades negativas con valores débitos y las positivas como haberes, en el que sigue las mismas consideraciones que hace Euler.

Odriozola utiliza situaciones reales de carácter relativas (tener, deber) en una acción cotidiana para ilustrar las cantidades negativas. Pese a que se refiere a números concretos (puesto que tienen determinada la unidad, 12 reales), opera con números abstractos (12–20=-8). De esta manera ejemplifica que las cantidades negativas tienen utilidad para representar fenómenos de la vida diaria.

TSN7: Regla de los signos.
Para la suma y resta:
"La sustraccion indicada en m – (a+ b+ c + …)
está ejecutada en m– a– b – c –…
y así queda demostrado que – (a+ b+ c + …) significa lo mismo que –a– b – c –…" (p. 40-41).

"La expresion a–a no puede menos de reducirse á cero, puesto que es una sustraccion indicada entre dos números iguales, ó como se suele

decir tambien, por destruccion de terminos iguales de signos contrarios" […] "En general, cuando en el polinomio hay dos términos iguales con signos contrarios , como 2 a –2 a, se destruyen : y cuando hay dos términos semejantes de signos contrarios, como por ejemplo 8 a – 3 a, que solo difieren por sus coeficientes numéricos, se reducen a un solo término compuesto de la letra comun y de la diferencia de coeficientes de aquellos , afectado con el signo del término que tenía mayor coeficiente" (p. 42).

Se establece el significado del signo menos delante de un paréntesis; se enuncia el principio de anulación compensación y se establece la regla para reducir términos con distinto signo.

Para el producto:

"Representando cada una de las letras A, B, D, E un factor monómio o polinomio, sabemos que la suma A+A+A+… en que A entra el número de veces que expresa B, se reduce al producto BA, expresión sinónima de B×A, ó bien A×B. Es decir, que al producto de dos factores positivos corresponde signo positivo.

Tambien la suma —A—A—A… en que A entre el número de veces que espresa B, se reduce al producto

—BA.

Por otra parte, la operación propuesta es como la de multiplicar —A por B; y asi, parece indudable que la expresión

—BA debe ser sinonima de —A×B;

ó bien, que al producto de un factor negativo por otro positivo corresponde signo negativo.

Aun falta considerar el caso de ser negativos ambos factores; caso en que difícilmente podríamos inferir de este modo el signo del producto.

Por lo cual, vamos á demostrar con todo rigor las leyes de la multiplicacion de factores monomios ó polinomios, cuyos términos sean de cualesquiera signos; ya que en los elementos algébricos de la Aritmética solo se hallaron productos de factores positivos.

Primeramente, sean A—B y D los dos factores dados para la multiplicacion, que se indica en (A—B) ×D.

Esta expresión equivale á la suma de binómios iguales A—B+A—B+A—B+… en que el sumando A entra D número de veces y otras tantas el sumando negativo —B. Es decir, que el producto pedido equivale á la suma de los dos siguientes polinomios, cuyos valores se simplifican por las reducciones respectivas y

A+A+A+A…hasta D veces=DA,

—B—B—B—…hasta D veces=—DB,

que dan la suma total DA—DB,

Luego, (A—B)× D=DA—DB.

Sean ahora factores de la multiplicación A—B y D—E, como se indica en la expresión

(A—B) ×M.

Este producto, según el caso precedente, será

$$M\times A—M\times B;$$

Producto que, restituyendo D—E por M, y á causa de

$$—M=—(D—E)=+(E—D), \text{ viene á ser}$$

$$(D—E)\times A+(E—D)\times B.$$

Ejecutando las dos multiplicaciones indicadas aquí, conforme al caso precedente, el resultado será

$$AD—AE+BE—BD.$$

Luego, (A—B) ×(D—E)=AD—AE—BD+BE.
En esta equivalencia formular, conforme á su análoga del artículo, están cifradas las tres reglas siguientes que nos habíamos propuesto adquirir.
[…] al producto de dos términos de un mismo signo pertenece el signo +, y que al producto de dos términos de signos diferentes pertenece el signo —.

A fin de grabar mejor en la memoria esta regla de signos, se suele decir tambien, 1.º que + multiplicado por +, lo mismo que – multiplicado por -, dá signo +: 2.º que + multiplicado por -, lo mismo que – multiplicado por +, dá signo–.” (p. 387-389).

Se establece una regla para realizar la multiplicación con los signos + y – que se enuncia de manera abstracta y formal de aplicación general.

Odriozola justifica la regla de los signos a partir de la definición de multiplicación de un número por negativo, siendo esta semejante a la que utiliza Lacroix (1846), la cual se apoya en que la multiplicación algebraica y aritmética son la misma “cosa”; Lacroix argumenta que esto es razonable debido a que los negativos son el resultado de la sustracción aritmética de una cantidad mayor de otra menor (Gomez, 2001; Maz, 2000). Por otra parte, las justificaciones de Lacroix están fundadas y explicadas mientras que Odriozola da por supuestas propiedades que no se preocupa por demostrar.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.
“Aprovechamos esta oportunidad para prefijar desde ahora la importante distinción entre el valor algébrico de un número, que es cuando está afectado por el signo positivo ó negativo, y el valor absoluto ó puramente aritmético de aquel mismo número, que es considerándole como sino estuviese afectado por ninguno de dichos signos. Así, por ejemplo, +8 y –8 son valores algébricos del número absoluto 8: igualmente que +a y –a lo son del número absoluto general a.” (p. 42).

Hay una diferencia entre el valor absoluto y valor relativo. El primero no está afectado por signos, y Odriozola lo denomina valor aritmético del número, mientras que el segundo si está afectado por el signo y lo denomina valor algebraico. Esta distinción para toda cantidad algebraica ya la señala Cauchy (1821) en el *Analyse Algébrique*.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.
"Y acusado es el advertir que toda desigualdad en que haya miembro con signo negativo se deberá establecer con la previsión, de que toda cantidad negativa es menor que cualquiera positiva, y que entre dos negativos es menor aquella cuyo valor absoluto seria mayor." (p. 443).

"[...] Tambien dada –5<–3, sucede otro tanto en –5+2<–3+2 y –5–2<–3–2. Lo mismo en –3<2 y –3+4<2+4 y –3–4<2–4." (p. 444).

Este aparado, complementado con **TSN5**, permite observar que se establece el orden entre las cantidades negativas y el de éstas respecto a las positivas; vemos que este orden es el mismo orden de los números enteros.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
En los números decimales:
" las espresiones consecutivas $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4} \dots$
serán como las respectivas $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \dots$ *"* (p. 103).

En las razones aritméticas
"Cuando se comparan dos cantidades a y b con el objeto de hallar la diferencia k, se escriben el restando y el restador como se sabe ; y la espresion

$$a - b = k \text{ ó } b - a = -k$$

se llama razon de diferencia o razon aritmética. […]
Por ejemplo, 8–3=5 y 3–8=–5.
La cuestion de hallar la razon de diferencia entre dos cantidades viene á ser una resta." (p. 289).

Odriozola utiliza los negativos, entre otros casos, para expresar potencias de denominadores con exponentes positivos en fracciones.

" $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ". (p. 313).
" $Log. \frac{1}{30} = -1{,}4\dots;$ " (p. 333).

También permiten señalar el valor del logaritmo de un número entre 0 y 1 y se pueden trabajar como radicales.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.

"Habiéndose dispersado un ejército de 24000 hombres se han reunido 9000; ¿cuántos mas deberán reunirse para que sumados con los 9000, la suma llegue á ser tercera parte del primitivo ejército?
La expresión del problema en leguaje del cálculo es

$$x + 9000 = \frac{24000}{3} = 8000;$$

y la solucion x=8000 – 9000= –1000.
Por el valor negativo de x se infiere ser imposible la cuestion conforme se ha propuesto; mas, quedará corregida tomando x en sentido contrario: es decir, que debió proponerse la cuestion en la forma siguiente.
Dispersado un ejército de 24000 hombres y reunidos ya 9000, ¿cuánto sobra ó cuánto excede este número al tercio del total?" (p. 459).

La obtención de una cantidad negativa como solución a un problema indica la imposibilidad práctica de la respuesta y conlleva a una reformulación del problema propuesto. La cantidad negativa indica un planteamiento inadecuado para resolver un problema determinado que se solventa mediante una reformulación de la cuestión planteada.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

No se ha encontrado información para esta categoría, distinta de la referenciada en los apartados anteriores.

TSN13: Otros.

"La expresión a–a no puede menos de reducirse á cero, puesto que es una sustracción indicada entre dos números iguales, ó como se suele decir tambien, por destrucción de términos iguales de signos contrarios." (p. 42).

La sustracción es asumida como una anulación de cantidades opuestas, es decir, como una anulación-compensación.

"[…] la ecuación propuesta será
$3x^2 - 8x = \frac{20}{3}$, *de donde* $x = \frac{4}{3} \pm 2$, *ó bien*
$x = \frac{10}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$: *valores que no difieren de los precedentes sino por el signo, que ha cambiado en ambos. De suerte que, en caso de resultar los valores de x con signos contrarios, no se puede conseguir que ambos sean positivos, aunque se cambie el sentido del problema"* (pp. 481-482).

Se aceptan los valores negativos como solución de una ecuación si satisface el enunciado de un problema determinado.

6.4.4 Análisis

6.4.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

En este texto Odriozola expresa su idea de números como: *"la expresión de las veces que la unidad esta comprendida en la cantidad evaluada"*, esto indica que el número esta asociado a una relación de comparación entre cantidades, con lo cual nuevamente hace aparición las definiciones de Stevin y Newton, las cuales hemos caracterizado y comentado en los Apartados 3.1.2 y 4.6.4.1; esta idea de número también es cercana a la utilizada por Euler, sin embargo, él indicaba expresamente que tal noción era una *"razón de una magnitud a otra tomada arbitrariamente como unidad"* (Vera, 1927; p. 8) y no tan solo una *"expresión"*.

- ***Cantidad***

Las nociones sobre la cantidad muestran una fundamentación empírica. Junto con la justificación, los ejemplos propuestos son todos ellos de magnitudes físicas o de colecciones de objetos individuales. También la definición dada en **CCO2**: *"Todo lo susceptible de aumento ó disminución",* es la misma de Euler; se evidencia una preocupación por incorporar la idea de continuidad en las magnitudes físicas.

Igualmente, Odriozola considera las bases lógicas para el tratamiento de las cantidades, que recoge y enumera mediante ocho Axiomas:

> *"1º Las cantidades de una misma especie son las unicas comparables entre sí, considerándose de una especie aquellas que se refieren a la misma unidad. […]*
> *2º El todo es igual al conjunto de sus partes. […]*
> *3º Cada parte es igual á el todo menos el conjunto de las demás partes. […]*
> *4º El todo es mayor que cualquier parte suya, y esta menor que el todo. […]*
> *5º Una cantidad no varía de valor, aunque se le añada y quite simultáneamente otra cualquiera de su misma especie. […]*
> *6º Las cantidades iguales a otra son iguales entre sí. [...]*
> *7º Si de cantidades iguales se quitan partes iguales, lo restante de una de aquellas es igual a lo restante de la otra; y si á cantidades iguales se añaden otras iguales , las que resultan son iguales entre sí. […]*
> *8º Si á cantidades desiguales se añaden ó quitan partes iguales, quedarán otras cantidades tan desiguales como las primeras."* (pp. 10-11).

Con esto, Odriozola da un paso mas allá de la definición de Euler y se adentra en principios positivistas al utilizar la misma noción de cantidad que presenta Lacroix en su *Curso completo elemental de matemáticas puras* (Maz, 2001).

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Como se ha comentado en **TSN2** y en **TSN4,** las cantidades negativas surgen de restar un número mayor de otro menor; de este modo el autor presenta y justifica las cantidades negativas. Con el ejemplo inicial elegido, Odriozola da a entender que la aparición de las cantidades negativas proviene de restas sucesivas, cuando introduce –1 al modo en que lo hace Euler en **TSN2**. Sin embargo, no es sistemático, ni establece la serie de los números negativos. Odriozola admite la existencia de las cantidades negativas aisladas, es decir, sin que afecten a otra cantidad, las justifica implícitamente por la extensión de la resta **TSN4**, las asume como *cantidades que faltan*, **TSN3** y les otorga estatus como entidades reales. No utiliza la expresión "menores que nada" y apenas presenta un fenómeno de haberes y deudas como ejemplo del nuevo concepto, **TSN5** y **TSN6**.

De igual forma en **TSN11** se evidencia que el autor considera que las cantidades negativas tienen origen en el desarrollo de procesos tanto aritméticos como algebraicos para la resolución de problemas. Esta consideración sobre el origen de las cantidades negativas hace que Odriozola las someta a las leyes algebraicas, lo que se evidencia en **TSN2**, **TSN8**, **TSN9**, **TSN10**, **TSN11** y **TSN13**.

6.4.4.2 Análisis básico de contenidos

- ***Conceptos básicos***

Los signos mas (+) y menos (–) son presentados en **TSN1** con una denominación: *conjunción mas* o *palabra menos*; con un significado: *añadir* o *quitar*; y con nombre técnico: *signo aditivo/ signo sustractivo.* En forma operacional indican adición y sustracción, respectivamente.

En el campo **TSN3** se pueden observar otra consideración para el signo menos: tiene que ver con la negación de las cantidades precedidas por este signo.

Como se ha mencionado en **TSN2**, también los signos mas (+) y menos (-) son quienes determinan el carácter positivo o negativo de una cantidad.

La consideración que se hace en **TSN5** de las cantidades negativas como menores que cero, proviene de el efecto que estas producen al operar con otras cantidades.

En el texto se utilizan letras para expresar incógnitas y cantidades generales de cualquier sistema de numeración; así mismo, las ecuaciones tanto literales como numéricas son planteadas y desarrolladas en distintos apartados.

- ***Fenomenología/Justificación***

El argumento con el cual justifica la aparición de las cantidades negativas, es la consideración de sustracciones de cantidades mayores de otras menores, como se observa en **TSN4**. La ausencia de fenómenos que ejemplifiquen las cantidades negativas viene justificada por la explicación que hace el autor en la Lección Primera, según se ha visto en **TSN6**.

Debe destacarse como, pese a utilizar cantidades asociadas a objetos (en este caso dinero), Odriozola realiza las operaciones tan sólo con los valores numéricos abstractos.

- ***Estructura de orden***

El análisis de **TSN9** permite identificar un orden entre las cantidades negativas, además entre ellas y las positivas. Este orden es el que corresponde con el orden de los números enteros.

- ***Estructura algebraica***

El autor presenta en **TSN7** la multiplicación de signos como una regla abstracta general y no entra en planteamientos que la justifiquen, salvo en el caso del producto de menos por menos. Está claro que Odriozola no considera conjuntamente las estructuras aditiva y multiplicativa, si bien establece conexiones entre ellas.

El texto presenta una amalgama de operaciones y reglas, las cuales se presentan y explican ya sea de manera particular mediante ejemplos numéricos, como en **TSN4**, **TSN5**, **TSN9** y **TSN10**, o, igualmente, con términos generales y abstractos por medio de letras.

A partir de **TSN8** se puede observar que se hace una diferenciación entre el valor algebraico de un número y su valor absoluto. Este apartado, como en **TSN7** y **TSN13,** parece darnos cierta idea de la existencia de valores opuestos aditivamente.

Asimismo, en **TSN7** parece proponerse una estructura aditiva basada en la anulación compensación.

- ***Uso algebraico***

El autor considera que una variable puede obtener un valor negativo como consecuencia de las operaciones algebraicas que se realizan para dar solución a problemas determinados, sin embargo, en **TSN11** se muestra como tal respuesta, indica que debe llevarse a cabo una reformulación en el planteamiento del problema.

Los negativos son utilizados en diversos apartados del texto como por ejemplo: en logaritmos, exponentes, etc., tal como se observa en **TSN4**, **TSN5**, **TSN9**, **TSN10** y **TSN11**.

6.4.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r[*]

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador a_1: Al afirmar en **TSN5** que *"toda cantidad positiva es mayor que cero y que toda cantidad negativa es menor que cero"* Odriozola confiere una atribución de significados y adjetivos justa y determinada para los números enteros.

Segundo indicador a_2: En **TSN9** se establece una valoración global de las regiones positiva y negativa *"toda cantidad negativa es menor que cualquiera positiva y que entre"*, correspondiendo esto a una comparación justa y determinada entre números enteros (González, p. 215). La comparación se rige por un concepto matemático: el valor absoluto, de esta forma la valoración carece de aspectos subjetivos y es independiente del autor.

Tercer indicador a_3: La comparación que el autor hace en **TSN9** entre valores numéricos negativos: *"-5<-3"* y la rotunda afirmación *"dos negativos es menor aquella cuyo valor absoluto seria menor"* refleja que la utilización de la relación de orden entre números enteros está presente en el texto.

Cuarto indicador a_4: En **TSN5** leemos *"Pues en efecto, si uno debiere 20 reales y no tuviese mas que 12, dando estos á cuenta resultaría que aun debe 8, esto es, que tiene menos que nada: como se expresa en 12–20=–8"* este ejemplo presenta una comparación de medidas con valores numéricos de diferente signo, en particular hay conexión entre las regiones positiva y negativa, pues se puede comparar y operar con cantidades de diferente signo. Esto indica el manejo de números enteros.

Como balance, afirmamos que las evidencias mostradas por los indicadores a_1, a_2, a_3 y a_4 señalan que esta primera diferencia $\mathbf{D_1}$ no se encuentra en este autor para el campo de los números naturales relativos.

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador b_1: La posibilidad de la existencia de valores numéricos inferiores y superiores a cero, tomando a este como valor de referencia central la hallamos en **TSN5** *"como se expresa en 12–20=–8"*, en

[*] Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

TS10 *"Por ejemplo, 8–3=5 y 3–8=–5"* y en **TSN9** *"[...] Tambien dada –5<–3, sucede otro tanto en –5+2<–3+2 y –5–2<–3–2. Lo mismo en –3<2 y –3+4<2+4 y –3–4<2–4."*. Estos ejemplos señalan un conjunto numérico sin primer elemento, lo cual corresponde con la naturaleza de los números enteros.

Segundo indicador **b_2**: En la representación numérica hallamos la existencia de representaciones aisladas para números negativos, como en **TSN4** *"[…] 5+1–6–1; que se reduce á 6–6–1 y finalmente á –1"*, esto es característico de la representación simbólica de los números enteros. Por otra parte esta simbolización matemática es conocida y determinada para los enteros, como se lee en **TSN9** *"[...] Tambien dada –5<–3, sucede otro tanto en –5+2<-3+2 y –5–2<–3–2. Lo mismo en –3<2 y –3+4<2+4 y –3–4<2–4."*.

Tercer indicador **b_3**: En **TSN4** se indica *"Cuando se propone restar de un número particular otro mayor, la operación es á la evidencia imposible aritméticamente, como por ejemplo si se pide resta 6 de 5. Pero, indicando algébricamente la operación, será 5–6; […]"* esto significa que se pueden realizar transformaciones cuantitativas discretas en cualquier sentido y de cualquier valor absoluto (González, p. 224), lo cual no es posible en la estructura natural relativa y si en la estructura de los números enteros.

La valoración de esta segunda diferencia **D_2** indica que no hay indicios de cumplimiento para el campo natural relativo.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

El ejemplo presentado en **TSN5** así como las relaciones de orden de **TSN9**, lo señalado en **TSN10** *"Por ejemplo, 8–3=5 y 3–8=–5"*, señalan la posibilidad de poder "pasar" de la zona de valores numéricos negativos a la de valores numéricos positivos y viceversa, lo cual es una de las características de la estructura entera (González, p. 225); la presencia de esta continuidad de medidas indica que la tercera diferencia **D_3** no se cumplen en el campo de los números naturales relativos.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).

No hemos hallado en el texto indicios de la existencia de un doble cero y si tenemos en cuenta lo afirmado en el indicador b_1, que el cero es utilizado como una referencia central común y al no existir discontinuidad de medidas como se señalo en D_3, inferimos que esta cuarta diferencia **D_4** no se cumple para los números naturales relativos.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

En **TSN8** se lee *"Así, por ejemplo, +8 y –8 son valores algébricos del* *número absoluto 8: igualmente que +a y –a lo son del número absoluto general a.”* lo cual es un indicio del inverso aditivo; esto apunta a una estructura entera.

Sin embargo en **TSN7** afirma *“La expresión a–a no puede menos de reducirse á cero, puesto que es una sustracción indicada entre dos números iguales, ó como se suele decir tambien, por destrucción de términos iguales de signos contrarios.”,* señalándose una estructura aditiva de anulación-compensación, por lo que se estaría ante la estructura de los números naturales relativos.

Señalamos que hay indicios de que esta quinta diferencia $\mathbf{D_5}$ se cumple de manera parcial en el campo de los números relativos.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Odriozola en relación con las diferencias:

*Tabla 6.1 Diferencias entre **Z** y $\mathbf{N_r}$ en el Curso de matemáticas de Odriozola.*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
Odriozola	**N**	**N**	**N**	**N**	No	**N**	**No**	**No**	N	No	No	P

6.4.6 Tratamiento global de los negativos en el Curso Completo de Matemáticas

En este texto los números negativos son tratados desde un punto de vista operacional de tipo algebraico. La presentación de las cantidades negativas no esta asociada a ningún tipo de fenómeno físico o cotidiano, se les otorga un significado numérico.

El autor otorga existencia real a los negativos, asumiendo su existencia aislada de otros números. Hay dos consideraciones para las cantidades negativas, como negación de la cantidad o como valor faltante para efectuar una resta entre valores numéricos naturales.

Hay distinción entre el valor algebraico de un número y su valor absoluto. Se establece una relación de orden entre los negativos apoyada en los valores absoluto de los números, correspondiéndose con el orden de los números enteros.

El sistema de representaciones utilizado es de tipo numérico. Los fenómenos modelizados son aritméticos (sustracciones, orden) algebraicos (ecuaciones) y uno contable (deudas) aunque en este ultimo solamente opera con valores numéricos abstractos.

Odriozola llama la atención sobre la interpretación de las posibles soluciones de un problema, en especial cuando esta es negativa; señala la conveniencia de reflexionar sobre el sentido lógico de ella e indica la conveniencia de replantear la forma de plantear la cuestión que dio origen a tal respuesta. Sin embargo tales respuestas son válidas cuando se resuelven ecuaciones de segundo grado y satisfacen las condiciones del problema dado.

6.5 Tratado elemental de matemáticas. Para el uso del Colegio General Militar. Tomo II, Álgebra. (1847)

6.5.1 Autor

Jacinto Feliú de la Peña (*n. Mataro, Barcelona* 1787; *m. Barcelona* 1867) (**CA1**). Realizó estudios de filosofía y teología, hebreo y matemáticas (**CA2**). A causa de la guerra de la Independencia debió trasladarse a Palma de Mallorca, allí se ordenó sacerdote (**CA3**).

Ejerció la enseñanza de las matemáticas en el Colegio Militar de Palma de Mallorca; fue profesor de los Cadetes de infantería en Gandia y Valencia. De allí pasó a la ciudad de Barcelona donde se encargó de la instrucción de los jóvenes profesores de las Escuelas Pías. Durante 20 años fue profesor de matemáticas del Colegio Militar de Segovia, pasando luego a las Escuelas Pías de Madrid (**CA4**).

Fue nombrado Provincial de Cataluña y Comisario apostólico general de la Orden en España. Desde este cargo dirigió la fundación de los colegios de Guanabacoa y Puerto Príncipe en América.

Su talante ilustrado hizo que en sus textos de matemáticas predominara lo práctico y útil de la matemática, en contraposición de su contemporáneo Odriozola (Vea, 1995) (**CA7**).

Vivió la guerra de la independencia, el absolutismo de Fernando VII, la regencia de Maria Cristina y el reinado de Isabel II; fue testigo de las grandes reformas educativas del siglo XIX –el plan Pidal y la Ley Moyano– así como los esfuerzos para implantar el sistema métrico decimal en España (**CA7**).

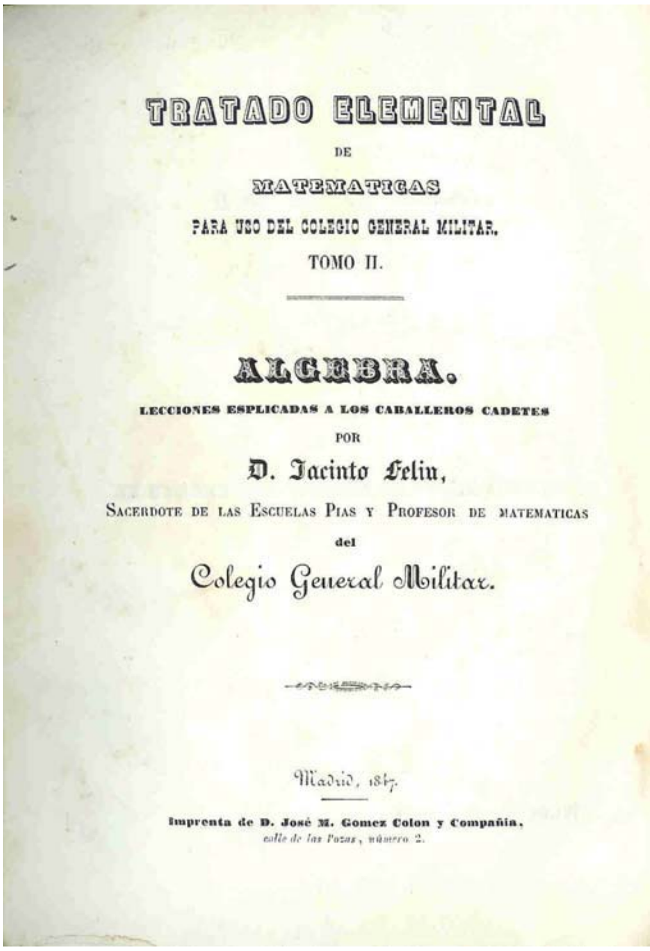
Su obra fundamental es el *Tratado elemental de matemáticas* (1847), un trabajo editado en seis volúmenes. También publicó *Tablas de logaritmos* (1847), *Sobre la necesidad de introducir en la geometría el método de los antiguos geómetras*, y *Elementos de gramática castellana y ortografía* (**CA6**).

Las referencias a Feliú y su obra las hallamos en Ausejo & Hormigón (2002) y Vea (1995) (**CA8**).

6.5.2 Caracterización del texto

Tratado elemental de matemáticas. Para el uso del Colegio General Militar. Tomo II. *Álgebra*. (1847). Madrid: Imprenta de D. José M. Gómez Colón y Compañía (**CGO1**, **CGO2**).

Este tomo está dedicado a su Majestad la Reina. Consta de 508 páginas y está dividido en dos partes, a su vez agrupadas por lecciones, siendo en total 54. La primera parte tiene 15 lecciones y ocupa las primeras 139 páginas; se trata de una parte teórica dedicada al estudio de las expresiones algebraicas y sus operaciones. La segunda parte tiene 39 lecciones y ocupa desde la página 141 hasta la 504; es una parte aplicada dedicada al estudio de las ecuaciones, sus tipos y métodos de resolución, así como a la resolución de problemas. Las últimas páginas contienen el índice y las erratas (**CGO3**).


TRATADO ELEMENTAL
DE
MATEMATICAS
PARA USO DEL COLEGIO GENERAL MILITAR.
TOMO II.

ALGEBRA.
LECCIONES ESPLICADAS A LOS CABALLEROS CADETES
POR
D. Jacinto Feliu,
SACERDOTE DE LAS ESCUELAS PIAS Y PROFESOR DE MATEMATICAS
del
Colegio General Militar.

Madrid, 1847.
Imprenta de D. José M. Gomez Colon y Compañía,
calle de las Pozas, número 2.

Inicia la primera parte mostrando ventajas del uso del álgebra respecto a la aritmética; pasa luego a las partes de un polinomio y las clases de estos, sigue con las operaciones básicas con expresiones algebraicas, operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias, potencias de polinomios y números quebrados y “enteros”, raíces de un monomio. La segunda parte se inicia mostrando el objeto del análisis, se muestra la resolución de ecuaciones con una o con más variables, luego están las razones y proporciones, expresiones imaginarias, fracciones continuas, logaritmos, función exponencial y logarítmica (**CGO3**).

No se hace mención a ningún autor en el que se haya basado o del que haya recibido alguna influencia para el desarrollo del texto (**CGO5**).

El autor recuerda que *“Hasta ahora, ó en la Aritmética se ha considerado la cantidad como aislada ó separada de otra ú otras, y se ha atendido solamente á su relación con la unidad, ó á su valor numérico*” (p.14) (**CCO1**), plantea su idea de cantidad así:

Cantidad: “*[…] en general la cantidad puede entrar en combinacion o relaciones con otra ú otras: y estas relaciones solo pueden ser de aumento ó de disminucion, porque la cantidad es suceptible de solas estas dos modificaciones*” (p. 14) (**CCO2**).

No hay ninguna definición o pista que nos indique su interpretación de número o número entero. Se tratan en el texto además de los números que él indica como “enteros”, las fracciones (**CCO3**).

Respecto del Álgebra, Feliú señala:
“…lo que se llama Álgebra, que puede decirse, es una especie de lengua, por la cual se generalizan y abrevian los razonamientos , que es menester formar para resolver las cuestiones relativas á los números” (p. 13).

“El objeto peculiar de esta parte del Álgebra , llamada análisis , es resolver cualquier problema ó cuestion que sea relativa á números. En todo problema se enuncian esplicita ó implicitamente ciertas condiciones ó relaciones , que deben tener entre sí las cantidades conocidas y desconocidas. Para venir en conocimiento de estas , supónganse conocidas, y escribanse algebráicamente todas las condiciones que impone el problema á las cantidades que entran en él. […] Deducir del problema la ecuación se llama plantear el problema” (pp. 141-143).

Feliú considera que hay dos clases de cantidades en un problema: las cantidades conocidas y las cantidades desconocidas:

“Dividir el número 60 en dos partes, de modo que la mayor lleve á la menor el esceso 14.

el número dado igual á 60

Cantidades conocidas: *el esceso dado igual á 14*

la parte mayor
Cantidad desconocidas: *la parte menor"* (p. 8).

En esta clasificación, las cantidades desconocidas son las *incógnitas* (**CCO4**).

Dedicó la lección II a las cantidades negativas como un apartado específico, donde se explica la suma y resta de ellas así como la ley de los signos (**CCO5**).

Mediante la recta numérica ilustra un problema de desplazamiento en el que intervienen cantidades negativas para interpretar éstas en su solución.

Se hace uso de los números negativos en distintos temas como por ejemplo: cuando explica la ley de los signos para la multiplicación de términos, como exponentes, al hallar raíces cúbicas de términos, también son considerados como razones en una progresión aritmética decreciente y al hallar logaritmos de fracciones menores que la unidad y mayores a cero. También los utiliza en las desigualdades mostrando como varían si se multiplican por una cantidad negativa. Finalmente los usa para denotar expresiones imaginarias (**CCO5**).

En la Lección VII del libro se presenta la noción de fracción y los decimales; también se presentan identidades numéricas derivadas del desarrollo en serie de una fracción algebraica, entre ellas algunas identidades absurdas o falsas. En la lección IX se presentan las raíces, expresiones radicales y expresiones imaginarias y en las Lecciones XII y XIII se estudia la extracción de raíces de números enteros (naturales), fraccionarios y decimales. Surgen de ahí los números *sordos, inconmensurables ó irracionales* (p. 117) (**CCO6**).

El libro está escrito de manera formal en términos modernos; el autor define unas reglas básicas y luego empieza a mostrar como al combinarlas se obtienen teoremas y leyes. Su estilo es didáctico, pues una vez dadas las definiciones se presentan ejemplos particulares, mostrando después generalizaciones. Un aspecto llamativo es que, pese a los abundantes ejemplos, el texto carece de ejercicios y problemas propuestos (**CGO6**).

6.5.3 Tratamiento dado a los negativos

Algunos de los párrafos seleccionados y ordenados son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y –.

> *“Asi, el signo + indica que una cantidad se ha de sumar con otra, por ejemplo: a + b es la suma de a con b.”* (p. 9).
>
> *“El signo – indica que una cantidad se ha de restar ó quitar de otra, (...), por ejemplo a – b designa que la cantidad b se ha de restar ó quitar de la a.”* (p. 9).

Los signos más (+) y menos (–) denotan las operaciones de adición y sustracción entre cantidades.

> **TSN2:** Presentación de las cantidades negativas.
> *“Pero en general la cantidad puede entrar en combinacion ó relaciones con otra ú otras: y estas relaciones solo pueden ser de aumento ó de disminucion, porque la cantidad es suceptible de solas estas dos modificaciones. Asi la considerarémos en adelante: y si se combina con otra invariable de su misma especie, para que sirva á esta de aumento, se llamará cantidad positiva, y se antepondrá á su valor numérico el signo +: y si de disminucion, se llamará cantidad negativa, y se antepondra el signo – á su valor numérico. Por ejemplo: si 8 es el valor numérico de la cantidad a, y es positiva, será: a=+8: y si es negativa, será: a=–8.*
> *El símbolo a de una cantidad envuelve el signo, y su valor numérico: y asi como el valor numérico puede ser 2, ó 3, ó 4 etc., segun sea la unidad á que se refiera, asi tambien el signo puede ser + ó – segun sea positiva o negativa.”* (p. 14).

En este párrafo se amplía el sentido de relación entre cantidades. La cantidad no sólo es el resultado de una relación con la unidad sino que también hay relaciones entre las cantidades: relaciones de aumento y relaciones de disminución. El aumento de una cantidad dada cualquiera procede de una cantidad positiva y su disminución de una cantidad negativa.

Esta noción relacional parece basarse en una consideración inicial de las cantidades como absolutas: a partir de una cantidad dada, ***m***, se puede: *aumentar* dicha cantidad en otra, p. Ej. 8: m + 8; ó *disminuir* dicha cantidad en otra, p. Ej. 8: m – 8.

De ahí se pasa a afirmar que, si una cantidad ***a*** es: *positiva*, tiene el signo +: + 8, y produce *aumento*; ó *negativa*, tiene el signo –: – 8, y produce *disminución.*

Hay en este argumento dos tipos de cantidades: *estados*, cantidades (absolutas) susceptibles de modificación; *relaciones,* aumentos o disminuciones que tienen los estados.

Se trata de una situación relativa que es dinámica, en cuanto procede de relaciones entre cantidades. Esta nueva noción parece representar con el símbolo *a*, a cualquier cantidad independiente de su signo pero, de inmediato, recupera la notación convencional:

> *"Las notaciones a y +a se considerarán como equivalentes : en este caso – a representará la cantidad opuesta o contraria a a ó +a"* (p. 14).

El ejemplo numérico final sigue los argumentos presentados por Cauchy (1821) para señalar que el valor absoluto de un número representa tanto a una cantidad positiva como negativa.

> **TSN3:** Naturaleza de las cantidades negativas.
> *"Todo término que se haya de quitar ó restar, y que lleve por consiguiente antepuesto el signo –, se llamará término sustractivo; suele llamarse tambien negativo."* (p. 22).
>
> *"Podrán llamarse opuestas o contrarias dos cantidades, que tengan un mismo valor numérico, pero diferente signo"* (p. 14).

En el campo anterior se definió a la cantidad negativa como aquella que se relaciona con otras por medio de una disminución y aquí se ratifica este aspecto.

El aspecto más destacado del segundo párrafo está en que parece reconocer la noción de *"cantidades opuestas"* como una nueva relación entre las cantidades con signo: relación de oposición entre cantidades relativas. Sin embargo no queda explícita la dualidad de sentidos que pueden interpretarse en las cantidades de una misma magnitud, y que utiliza Kant para su análisis de las magnitudes negativas, ya que se consideran sólo para el caso en que tengan el mismo valor absoluto. Este enunciado hay que interpretarlo como la noción de simetría entre cantidades.

> **TSN4:** Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
> *"Sea a–b la diferencia de dos cantidades: si á las dos cantidades a y b se dan valores numéricos particulares, podrá ocurrir que se dé al minuendo a un valor numérico menor que al sustraendo b, por ejemplo : sea a=4 y b=6. en este caso será : a—b=4—6=—2=—(6—4): porque si una misma cantidad y de la misma especie que a y b ha de sufrir por una parte un aumento igual á 4 , por otra una disminución igual á 2. Luego toda sustracción cuyo minuendo sea menor que el sustraendo, se ejecutará al contrario, esto es, se restará el minuendo del sustraendo, y al residuo se le antepondrá el signo —."* (pp. 22-23).
>
> *"La cantidad a será mayor que b, si la diferencia a–b es positiva: al contrario, será a menor que b, si la diferencia a-b es negativa.*

La cantidad m será una cantidad media ó comprendida entre las dos a y b, si las dos diferencias a–m y m–b son un mismo signo.

Ahora si suponemos que en la diferencia a–b el minuendo a conserve un valor constante, por ejemplo, sea constantemente a=4, y el sustraendo b reciba valores sucesivos enteros desde cero en adelante, la diferencia a-b disminuirá y recibirá esta serie de valores:

Cuando... b=0.... a–b = 4–0 = 4
b=1.... a–b = 4–1 = 3
b=2.... a–b = 4–2 = 2
b=3.... a–b = 4–3 = 1
b=4.... a–b = 4–4 = 0
b=5.... a–b = 4–5 =–1
b=6.... a–b = 4–6 =–2
b=7.... a–b = 4–7 =–3
b=8.... a–b = 4–8 =–4
....

La diferencia a–b ofrece una serie de valores que van continuamente decreciendo, y estando el cero entre los valores positivos y negativos se dice 1.º que el cero es menor que toda cantidad positiva y mayor que toda cantidad negativa […]” (p. 23)

Feliú utiliza la relación de orden para caracterizar el valor intermedio de dos cantidades. Hace una justificación de los negativos que se fundamenta en una extensión de las leyes formales (en este caso la resta) para dos números cualesquiera, obteniendo así la serie de los números negativos. Esta construcción de los negativos es a partir de sustracciones sucesivas de minuendos menores que los sustraendos.

Este planteamiento para obtener los números negativos permite *“pasar*” de la región positiva a la negativa sin *“saltos”* numéricos, de forma que presenta un conjunto numérico continuo.

El autor utiliza una estrategia similar a la que Euler presenta en los *Elements of Álgebra* (1770) para generar los números negativos a partir de sustracciones sucesivas desde un valor fijo.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.
“1º: que el cero es menor que toda cantidad positiva y mayor que toda cantidad negativa:(...)” (p.24).

Considera una relación de orden entre números y no discute el significado de la frase “menor que nada”.

TSN6: Ejemplificación.
“Prob. en una escuela de latinidad hay 40 alumnos: la clase de menores tiene 24 alumnos mas que la de medianos, y esta 20 mas que

la de mayores: ¿cual es el número de alumnos de cada clase?

Sea x el número de alumnos de la clase de mayores:
será $x + 20$ el de la clase de medianos:
el de la clase de menores será: $x+20+24$.

Planteado el problema será: $x+x+20+x+20+24=40$:
de donde $3x = 40– 20– 20– 24$:
ó ....$3x =–24$.
o´...........$x =–8$.
Este valor de x dice que el número de alumnos de la clase de mayores ha de ser –8, lo que no tiene sentido; y de aqui inferimos que el problema es imposible. Sin embargo, no siempre que el valor de la incognita sea negativo, debe sacarse semejante consecuencia, porque el error puede provenir del mismo calculador al plantear el problema, como se verá en el siguiente:

Dos móviles partieron á un mismo tiempo de dos puntos de una misma recta DR, el uno del punto A, y el otro se ignora de qué punto. Solo se sabe que los dos caminaban en un mismo sentido, por ejemplo, hácia la derecha: que el punto de encuentro fué el punto C, que dista del punto A, c leguas: que el primero andaba d leguas por hora, y el segundo d´ leguas por hora: se pregunta ¿de qué punto de la recta DR partió el segundo móvil?

D B’ A B C R

(...) Luego de realizar las operaciones se obtiene que la distancia $x = -10$, por lo que:
El valor de la incógnita, aunque sea negativo, no indica por eso imposibilidad ó contradiccion en las condiciones del problema. Ignorando nosotros la posicion del punto de donde partió el segundo móvil, y pudiendo estar este á la derecha ó á la izquierda del punto A, supusimos erróneamente que estaba á la derecha del punto A, y el Álgebra nos advierte el error, dando á la incógnita un valor negativo” (pp. 156-159).

Por medio de dos ejemplos diferentes presenta la resolución de problemas. En el primero muestra como una solución negativa no tiene sentido, pero en el segundo ejemplo dicha solución sí tiene sentido.

En el segundo caso realiza un cálculo numérico y una interpretación real, se trata de una situación de la vida cotidiana asociada a desplazamientos con direcciones opuestas, que representa con una gráfica de la recta. La representación gráfica se utiliza como sistema de referencia, más no para ilustrar un valor negativo, como sucedía en los textos del siglo XVIII, sino para dar ejemplo del sentido lógico de una repuesta con valor negativo.

Se enfatiza el análisis lógico de las respuestas de un problema, obtenidas al resolver una ecuación. El valor negativo no se rechaza por ser negativo, sino por la inconsistencia lógica de tal respuesta.

TSN7: Regla de los signos.
Para la suma:
"17. Problema. Sumar la cantidad a con la cantidad b.
Pueden suceder cuatro casos , según sean las dos cantidades positivas ó negativas , ó la una positiva y la otra negativa. Indicando la operación, será:

1º .... +(+a)+(+b):
2º .... +(+a)+(—b):
3º .... +(—a)+(+b):
4º .... +(—a)+(—b):

En el primer caso el signo + que precede á los dos paréntesis , indica que se han de agregar á una tercera cantidad las dos comprendidas en los paréntesis , y siendo las dos positivas han de servir á la vez de aumento de una misma: es claro que el conjunto de los dos aumentos equivaldrá al aumento +a+b: luego será:

$$+(+a)+(+b)=+a+b \text{ (A).}$$

Por ejemplo: si a=10 y b=5, un aumento de 10 unidades junto con otro de 5 , compondrán un aumento de 15 unidades=10+5.

En el segundo caso +(+a)+(—b), el signo + que precede á los paréntesis , indica que han de agregarse á una tercera cantidad las dos +a y —b , habiendo de recibir á la vez por +a un aumento igual al valor numérico de b: dicho aumento y disminución equivaldrán á un aumento igual al valor numérico a–b , y será:

$$+(+a)+(-b)=+a-b. \text{ (B)}$$

Por ejemplo: si a=10 y b=5 , un aumento de 10 unidades y al mismo tiempo una disminución de 5 , equivaldrán á un aumento de 5=10 –5.

El tercer caso +(–a)+(+b) es idéntico al segundo : porque si una cantidad ha de recibir á la vez una disminucion y un aumento , será indiferente que reciba primero la disminucion y después el aumento , o al contrario , primero el aumento y después la disminución : luego será:

$$+(-a)+(+b)=-a+b. \text{ (C).}$$

Por fin, en el cuarto caso +(–a)+(–b), la misma cantidad ha de recibir dos disminuciones consecutivas, la una correspondiente al valor numérico de a , y la otra al de b: es claro que el conjunto de las dos disminuciones compondrá la sola disminución —(a+b) equivalente á las dos –a–b , y será :

$$+(-a)+(-b)=-a-b. \text{ (D).}$$

Por ejemplo : una disminución de 10 unidades junto con otra de 5 , compondrá una disminución de 15 unidades=–10–5.
Reuniendo los resultados (A), (B), (C), (D), será:

$$+(+a)+(+b)=+a+b$$
$$+(+a)+(-b)=+a-b$$
$$+(-a)+(+b)=-a+b$$
$$+(-a)+(-b)=-a-b$$

Donde se ve 1º que para sumar las cantidades representadas por letras, no hay mas que agregarlas ó escribir unas á continuación de otras con los mismos signos que llevan

2º Que la suma algebraica no es siempre aumento como en la aritmética , sino que puede resultar de esta operación una disminucion, como se ve en el resultado +a–b de sumar +a con –b" (pp. 17-19)

La suma de cantidades establece sus resultados con base al refuerzo de los aumentos o de las disminuciones, cuando se suman sólo entre ellos, y en la anulación / compensación que se produce cuando se suman aumentos con disminuciones. Esta justificación es coherente con la noción de cantidad relativa en que se sustenta. Destaca la idea de que la suma algebraica es una ley de composición interna y que no coincide con el hecho de que *sumar es aumentar*.

Para la resta:

"20. Problema. Restar la cantidad b de la cantidad a.

Pueden ocurrir cuatro caso , seegún sean las dos cantidades a y b positivas ó negativas […]

Reuniendo los cuatro resultados será:

$$+(+a)-(+b)=+a-b$$
$$+(+a)-(-b)=+a+b$$
$$+(-a)-(+b)=-a-b$$
$$+(-a)-(-b)=-a+b$$

Donde se ve 1º : que para restar en álgebra, se escribirá el minuendo , y a su continuacion el sustraendo, mudando á este el signo.

2º Que la resta algebráica no es siempre una disminución como en la Aritmética, sino que puede resultar esta operación un aumento, como se ve en el resultado a+b de quitar –b de a" (pp. 21-22).

La resta entre cantidades algebraicas se establece mediante la noción usual de resta de dos cantidades: *consiste en calcular aquella otra cantidad que, sumada con el sustraendo, da el minuendo.* De acuerdo con este criterio y con las reglas de la suma, se obtienen las reglas correspondientes de la resta. Queda sumido que la resta de cantidades algebraicas también es una ley de composición interna; se enuncia explícitamente que restar es sumar al minuendo el opuesto del sustraendo, y que restar no coincide con disminuir.

Para el producto:

"Relativamente á los signos que pueden tener los dos factores pueden ocurrir los cuatro casos siguientes:

1º .... +(+a) × (+b):
2º .... +(—a) × (+b):
3º .... +(+a) × (—b):
4º .... +(—a) × (—b):

En el primer caso , el multiplicador +b se compone de tantos iguales á +1 como unidades tiene b : luego el producto que se busca, se compondrá de tantos sumandos iguales al multiplicando (+a) como unidades tiene b: luego el producto que se busca , será =(+a)+(+a)+(+a)+...... repetido el +a por sumando tantas veces como unidades tiene b. Esta suma es =+a+a+a+....=+ba: y será: (+a) × (+b)=+ab (A). […]

En el 2º caso el producto debe formarse de tantos sumandos iguales á —a como unidades tiene b: luego dicho producto=(—a)+(—a)+(—a)+...... repetido —a, b veces por sumando. Esta suma es =—a—a—a—....=—ba : y será (—a) × (+b)=-ab. (B). […]

En el tercer caso el multiplicador —b se forma de b sumandos iguales á —1: luego asimismo el producto ha de formarse de b sumandos iguales á —(+a)=—a:
luego será este producto =—a—a—a... =—ba: y será (+a) × (—b)=—ab. (C).

Por fin, en el 4º caso , el multiplicador —b se compone de b sumandos iguales á —1:
luego el producto se compondrá asimismo de b sumandos iguales a —(—a) =+a: luego será dicho producto =+a+a+a+.... =+ab: luego dicho producto =+ab. (D).
[…] Reúnanse las cuatro fórmulas (A), (B), (C), (D):

(+a) × (+b)=+ab:
(–a) × (+b)=–ab:
(+a) × (–b)=–ab:
(–a) × (–b)=+ab:” (pp. 25- 28)

“Luego signos semejantes en los dos factores de una multiplicación darán + en el producto, y signos desemejantes darán –” (p. 28).

Presenta de manera esquematizada la justificación y las reglas para simplificar signos en la multiplicación. Mientras que las reglas de la adición y sustracción se sustentan sobre la noción de cantidad algebraica postulada, relación de aumento o disminución, las reglas del producto no están justificadas por esas nociones.

Los casos (+a) x (+b) y (–a) x (+b) se pretenden justificar a partir de que el multiplicador positivo +b es igual a *b-veces* el valor +1. El autor ignora la necesidad de justificar que (+a) x (+1) = +a y que (–a) x (+1) = –a en términos de que una cantidad positiva es un aumento y de que una cantidad negativa es una disminución; se limita a identificar +1 con 1, con lo cual: (+a) x (+1) = (+a) x 1, que hace equivaler con + a, así como (–a) x (+1) = (–a) x 1, que hace equivaler con –a.

Elude la justificación del producto como ley de composición interna por medio de una transformación de significados, basado en una identificación abusiva de los símbolos. Igual ocurre con la interpretación de los productos por –b.

La definición del producto algebraico no es coherente con la noción de cantidad algebraica planteada.

Luego, establece la regla general. Aunque establece estas reglas por medio de cantidades literales, al presentar los ejemplos numéricos particulares utiliza en su argumentación expresiones y relaciones típicas del campo natural relativo.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.
“El símbolo de una cantidad envuelve el signo y su valor numérico : y así como el valor numérico puede ser 2, ó 3, ó 4 etc., así tambien el signo puede ser + o – según sea positiva ó negativa” (p. 14).

Esta es una correcta consideración del valor absoluto de un número.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.
“Para designar que una cantidad es mayor que otra, se usa este signo >, y se lee mayor que, por ejemplo a>b denota que a es mayor que b, ó b menor que a: [...]” (p. 11).

“La cantidad variable, cuyo valor numérico pueda aumentar sin fin, de modo que pueda ser mayor que otro número dado por grande que este sea, se llama cantidad infinita ó infinitamente grande: tal seria por ejemplo la cantidad variable, cuyos valores numéricos fuesen 1,2,3,4,5.......... y así sin fin. si esta cantidad variable es positiva, se representará por este signo +Ƨ ó simplemente por Ƨ : y si es negativa por –Ƨ . Toda cantidad finita estará necesariamente comprendida entre –Ƨ y +Ƨ .” (pp. 16-17)

“La cantidad a será mayor que b, si la diferencia a–b es positiva: al contrario, será a menor que b, si la diferencia a-b es negativa.” (p. 23).

“La diferencia a–b ofrece una serie de valores que van continuamente decreciendo, y estando el cero entre los valores positivos y negativos, se dice 1º: que el cero es menor que toda cantidad positiva y mayor que toda cantidad negativa: y 2º por ser por ejemplo: –2 mayor que –4, que de dos cantidades negativas es mayor la que tiene menor valor

numérico." (p. 24)

"Por ejemplo, será 8>3, por ser 8-3=5, una cantidad positiva: –2 > –8, por ser –2–(–8)=–2+8=6 una cantidad positiva: –5<0, por ser –5–0 =–5, una cantidad negativa.
En general aquella cantidad será mayor, que se aproxime mas á +∞ , y aquella será menor, que se aproxime mas á –∞ ." (p.209).

"Sean las desigualdades 3 > 1, –2 >–3, 1 >–27: si se elevan á la potencia tercera por ejemplo, resultaran estas otras desigualdades: 27>1 ,–8 >–27, 1> –27". (p. 211).

El orden es una definición establecida algebraicamente por Feliú en términos formales a partir de la suma. En el primer párrafo se establece el orden entero tanto para los positivos como para los negativos. Se trata del aspecto más moderno dentro del tópico que estudiamos. Establece que toda cantidad positiva es mayor que 0 y que toda cantidad negativa es menor que 0; igualmente establece el orden entre las cantidades negativas, justificando estas afirmaciones sobre la base de la definición. También estudia las cantidades infinitas y amplía la relación de orden incluyendo a +∞ y a –∞. La ejemplificación es detallada y muestra cómo se aplica el criterio general.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
"(...) luego recíprocamente una raíz de grado par podrá tener indiferentemente el signo + ó el signo –:(...)" (p. 72).

"$(-2a^2bc^3)^n = \pm 2^n a^{2n} b^n c^{3n}$." (p. 70)

Para Feliú la consideración algebraica de los negativos permite la existencia de una raíz negativa para un número elevado a potencia par.

"Otro resultado singular vuelve á presentar el álgebra, y es una cantidad con exponente negativo, difícil tambien de entender si se quiere interpretar como una potencia […] , una cantidad con exponente negativo no indica una potencia, sino un cociente, cuyo dividendo es la unidad , y el divisor es la misma cantidad, pero mudado el signo del exponente." (p. 36).

En este párrafo queda claro que el signo menos que acompaña a un número puede señalar o determinar una operación diferente a la sustracción. Esto implica un nuevo significado para el signo menos.

TSN11: Interpretación de los resultados obtenidos.
"El valor de la incógnita, aunque sea negativo, no indica por eso imposibilidad ó contradiccion en las condiciones del problema. Ignorando nosotros la posicion del punto de donde partió el segundo

móvil, y pudiendo estar este á la derecha ó á la izquierda del punto A, supusimos erróneamente que estaba á la derecha del punto A, y el Álgebra nos advierte el error, dando á la incógnita un valor negativo". (p. 159).

Feliú vuelve al ejemplo anterior, donde se muestra la interpretación que tiene un resultado negativo en la resolución de un problema. También utiliza la idea de que las cantidades negativas son el opuesto de su correspondiente positiva.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

En el texto no hay explicaciones sobre este aspecto. El tratamiento claramente algebraico que adopta el autor para los negativos evita reflexiones sobre su utilidad, pues son considerados como resultado de operaciones.

TSN13: Otros.

"¿Cuál será el signo de una potencia?
1º Si la potencia es de grado par, esta llevará siempre el signo +, ya tenga la cantidad el signo +, ya tenga el signo-: si la potencia es de grado impar, esta llevará el mismo signo que la cantidad ó raiz" (p. 67).

"Hallar dos números cuya suma sea 20.
Res. Sean x, y , estos dos números : la condicion del problema estará escrita en la única ecuacion: x+y=20.

Si x=1, será: y=20-1=19.
x=2,...........: y=20-2=18.
x=4/5.........: y=20-4/5 = 100/5 - 4/5= 96/5.
x=-2,.........: y=20-(-2)=22." (p. 274).

En este último párrafo se presenta una reflexión en la que ya se muestra, que los valores negativos que se obtienen al efectuar operaciones algebraicas se consideran como soluciones válidas para una ecuación.

"Restar es averiguar la diferencia de dos cantidades, ó lo que falta á la una para ser igual a á la otra. Examinada bien esta definición, se verá sin mucha dificultad que es equivalente á esta: restar una primera cantidad de otra es hallar una tercera que sumada con la primera dé la segunda".

6.5.4 Análisis

6.5.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

En el Tomo II no se presenta una definición de número, pero la lectura global de los distintos campos nos ofrece una idea de que considera el número como la expresión de una cantidad conocida y también como una cantidad que establece relaciones con otras.

- ***Cantidad***

Feliú indica que la cantidad en aritmética se considera aislada y sólo se relaciona con la unidad; pero expresa en **CCO2** que las cantidades pueden establecer distintas relaciones con otras, como observa en **TSN2**. En general, considera la cantidad como susceptible sólo de modificaciones de aumento o disminución, continuando de esta forma con la reiterada definición de Euler (Apartado 3.1.2).

La idea de las *relaciones que establecen unas cantidades con otras* es una idea empirista; sin embargo, Feliú no considera en su texto de Álgebra referencias a las aplicaciones físicas de sus estudios matemáticos, excepto en dos ejemplos de problemas de móviles, que hemos visto en **TSN6**, como aplicación de la resolución de ecuaciones. Tampoco Feliú menciona las cantidades intensivas, ni siquiera para rechazarlas. La noción de cantidad que maneja en el texto es euleriana.

Los principios lógicos para el tratamiento de cantidades que establece Feliú, son:

> *"Siendo un principio evidente, que si con cantidades ó espresiones iguales se hacen operaciones iguales, se sigue:*
> *1º Que podrá añadirse á los dos miembros de una igualdad una misma cantidad, y habrá igualdad.*
> *2º Que podrá quitarse una misma cantidad de los dos miembros de una igualdad, y habrá igualdad.*
> *3º Que podrán multiplicarse ó dividirse por una misma cantidad los dos miembros de una igualdad, y habrá igualdad.*
> *4º Que podrán sumarse o restarse dos igualdadades entre sí, y asimismo multiplicarse o dividirse, permaneciendo igualdad"* (p. 11).

Comparando con el planteamiento de Odriozola, y con el posterior de Fernández Vallín, apreciamos la inferior fundamentación lógica y filosófica del texto de Feliú.

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

En **TSN2** se indica que la cantidad positiva la determina una relación de aumento y la cantidad negativa está determinada por una relación de disminución de carácter sustractivo. Las nociones que subyacen a las cantidades con signo son las relaciones de aumento ó disminución que pueden experimentar las cantidades absolutas, que actúan en este caso como referencia. Esto se manifestará, entre otras cosas por el signo, que le antecede como vemos en **TSN3**.

Las cantidades negativas surgen para Feliú como disminuciones que experimentan cantidades absolutas, como relaciones de disminución. Lo negativo procede de la sustracción, de quitar, restar o disminuir. Feliú no considera la relación de oposición entre cantidades positivas y negativas, salvo en el caso de las cantidades simétricas, como vimos en **TSN3**. La noción de cantidad negativa que propugna es resultado de operaciones y cálculos aritméticos; surge a partir de algoritmos y el autor no intenta la discusión de esta noción ni la de su relación con las cantidades positivas.

Por medio de una extensión de las leyes formales en **TSN4**, justifica las cantidades negativas; esto es, muestra la aparición de los números negativos como resultado de sustracciones sucesivas con minuendo un mismo número fijo, mientras que el sustraendo aumenta; de esta manera el minuendo llega a ser menor que el sustraendo. Este planteamiento muestra el paso de los números positivos a los negativos sin saltos ni discontinuidades, con un proceso similar al de Euler.

En **TSN5** vemos cómo se establece acertadamente la relación de orden entre números entre los cuales están consideradas las cantidades negativas. No considera la expresión "*cantidades menores que nada*".

Un aspecto a destacar en el texto es que Feliú considera que las cantidades negativas son números. Esto se aprecia cuando se toman en consideración en el momento en que se piden números como solución a problemas numéricos, como vemos en **TSN6** y en **TSN11.** Así, en un caso plantea un problema de cantidades absolutas, donde la solución negativa es imposible. A continuación plantea un problema de móviles donde la solución negativa sí tiene interpretación mediante cambio de sentido.

- ***Otras nociones***

Los conceptos de incógnita, ecuación, problema y planteamiento de un problema, son los clásicos ya establecidos para el Álgebra desde el siglo XVII. Feliú no muestra mucho empeño en dar definiciones formales escuetas sino que, en esta parte de su obra, hace una síntesis de los conocimientos usuales del Álgebra y los estructura mediante ejemplos, que llevan a reglas prácticas y a nuevas definiciones. El comienzo del Tomo II, con el planteamiento del problema clásico de dividir un número conocido en otros dos de diferencia también conocida, es un buen ejemplo del estilo de la obra.

6.5.4.2 Análisis básico de contenidos

La presencia de los signos mas (+) y menos (–) indican individualmente la suma y la resta como se observa en **TSN1**. Estos signos determinan si dos cantidades son opuestas o contrarias, incluso si ambas tienen igual valor absoluto o numérico tal como se indica en **TSN2**.

Se puede afirmar que en el apartado **TSN2** los signos más (+) y menos (–) tienen una doble significación: indican operaciones aritméticas y también expresan el carácter positivo o negativo de una cantidad.

No se plantea ningún tipo de reflexión sobre las cantidades como menores que nada. En **TSN5** sólo se establece un orden entre números en relación con 0.

Vemos que en **CCO4** se consideran las incógnitas como aquellas cantidades que se desconocen en un problema. De esta manera Feliú las utiliza en los diversos campos como se observa en **TSN6** y **TSN14**.

- ***Fenomenología/Justificación***

En **TSN2** se utilizan relaciones entre cantidades para justificar la aparición de las cantidades positivas y negativas; estas relaciones son de aumento o disminución. También en **TSN3** se presenta la idea de sustracción como argumento para la existencia de negativos.

Feliú se apoya en la idea de valor numérico de una cantidad algebraica para justificar el surgimiento de cantidades negativas, como se ve en **TSN4** y hemos comentado en el apartado 6.5.4.1.

Los ejemplos que se presentan en su mayoría son de tipo numérico; también se utiliza un ejemplo en **TSN6** con desplazamientos y utilizando un segmento de recta para mostrar la significación de la respuesta negativa, acorde con lo planteado en el problema.

- ***Estructura de orden***

Hay una correcta consideración del valor absoluto de una cantidad en **TSN8**. Asimismo, se da una definición de orden total en forma algebraica la que corresponde con el orden de los números enteros. Feliú considera a partir de esta definición todas las relaciones de orden importantes, en relación con 0 y de las cantidades negativas entre sí, y algunas propiedades, como hemos visto en **TSN9**.

La extensión de la relación de orden para definir las cantidades infinitas es una aportación interesante.

- ***Estructura algebraica***

Se presentan las operaciones de suma y resta como leyes de composición interna, indicando que pueden realizarse con cantidades tanto positivas como negativas; la resta queda definida por la suma del opuesto. Cuando estas operaciones se realizan algebraicamente como en **TSN6**, las cantidades están sometidas a reglas o leyes, eliminando la idea de sólo aumento en la suma y disminución en la resta. La noción de simétrico se plantea cuando se afirma que +a y –a son cantidades *opuestas o contrarias*, según se ve en **TSN2**. No expresa la idea de que la operación suma tenga propiedades formales, ni tampoco la noción de elemento neutro, aún cuando dichas propiedades no se desconozcan.

Es interesante destacar la definición que proporciona para la relación de orden entre cantidades algebraicas, que es la de orden para números enteros, se establece a partir de la suma y, por tanto, es compatible con esta operación, según se vio en **TSN9**.

Son admitidas las soluciones negativas tanto para las ecuaciones como para los problemas, como se observa en **TSN11**. Además, en **TSN6** se aclara que, el hecho de obtener una respuesta negativa, no indica necesariamente un fallo o error en el planteamiento o las operaciones hechas.

Para el producto no se establece una definición coherente con la noción de cantidad algebraica; tampoco se prueba que sea una ley de composición interna, aunque el autor parece darlo por demostrado mediante una manipulación de signos no justificada, que ya comentamos en **TSN7**. La regla de los signos para el producto la justifica débilmente. Al igual que con la suma, no considera propiedades formales para el producto, ni para las operaciones de suma y producto.

- ***Uso algebraico***

Ya resaltamos que los conceptos de incógnita, ecuación, problema, plateamiento y solución en Feliú son los clásicos del Álgebra, **CCO4.** Las cantidades negativas son utilizadas en forma indiscriminada en diversas situaciones; es decir, se toman como números que satisfacen ciertas condiciones o que brindan soluciones a problemas. Esto se aprecia bien en **TSN6**, **TSN11**, **TSN13** y **TSN14**.

6.5.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r[*]

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1** Cuando el autor afirma en **TSN4** *"[…] el cero es menor que toda cantidad positiva y mayor que toda cantidad negativa […]"* esta asignando una atribución de significados justa y determinada para números enteros, de tal forma, la valoración de una cantidad viene dada por su

[*] Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

posición en el esquema lineal de la recta numérica, independientemente de si esta en la región de los positivos o los negativos (González, p. 214).

Segundo indicador: **a_2** En **TSN9** leemos que *"[…] 1>–27 […]"* y también *"En general aquella cantidad será mayor, que se aproxima mas á +Ƨ , y aquella será menor, que se aproxime mas á –Ƨ "* estableciéndose una comparación-valoración global entre las regiones positiva y negativa de forma justa y determinada para medidas enteras, puesto que se deduce que los números positivos son mayores que los negativos.

Tercer indicador: **a_3** Este indicador hace referencia de manera específica a la comparación entre medidas con valores numéricos negativos y en este texto está presente para el campo de los números enteros, tal como se infiere de **TSN9** *"[…] —2 mayor que —4, que de dos cantidades negativas es mayor la que tiene menor valor numérico"*, puesto que se está considerando el orden usual entre números enteros negativos.

Cuarto indicador: **a_4** Aquí la comparación se hace entre valores numéricos positivo y negativos; esto lo hallamos en **TSN9** *"[…] 3>1, —2>—3, 1>—27, […]"* y *"En general aquella cantidad será mayor, que se aproxima mas á +Ƨ , y aquella será menor, que se aproxime mas á –Ƨ ".* Esta comparación se hace desde la relación de orden entre números enteros.

Como balance de esta primera diferencia **D_1**, sustentamos que la relación de orden con la que trabaja Feliú es la propia de los números enteros, dado que las evidencias presentadas así lo señalan.

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador: **b_1** La posibilidad de existencia de valores inferiores y superiores a cero la hallamos en **TSN4** cuando se muestra la obtención de los negativos a partir de sustracciones sucesivas y en la afirmación *"La diferencia a–b ofrece una serie de valores que van continuamente decreciendo, y estando el cero entre los valores positivos y negativos […]"* esto significa la inexistencia de limites inferiores para la comparación. En esta situación el cero aparece de manera implícita como una referencia central. Las circunstancias señaladas apuntan claramente al campo de los números enteros.

Segundo indicador: **b_2** La representación utilizada para los negativos es simbólica como se observa en **TSN4** *"b = 5...a—b = 4—5=—1"*, en **TSN6** *"x =—10"*, **TSN7** *"+ (—a)+(—b) = —a—b"* y **TSN 9** *"[...] —2—(—8)=—2+8 = 6"* y claramente matemática mediante símbolos conocidos y determinados para los números enteros: *"—5<0, por ser —5—0 =—5, una cantidad negativa"*.

La argumentación para la particularización de la ley de los signos en la suma presenta la incompatibilidad manifiesta entre adjetivación y signo característica del campo relativo (González, p. 22): *"Por ejemplo: una disminución de 10 unidades junto con otra de 5, compondrá una disminución de 15 unidades= —10—5"*, en el campo entero esto se expresaría así: *una disminución de —10 unidades junto con otra de —5 compondrá una disminución de —15unidades =—10—5*, por lo tanto hay evidencia del uso de números relativos en esta argumentación.

Tercer indicador: **b_3**. Las transformaciones entre cantidades positivas y negativas presentes en el texto indican la posibilidad de realizarlas en cualquier sentido y valor absoluto como se observa en **TSN9** *"Sean las desigualdades 3>1, -2>-3, 1>–27: si se elevan á la potencia tercera por ejemplo, resultaran estas otras desigualdades: 27>1 ,–8>– 27, 1> –27"* y en **TSN4**:

> *"Cuando... b=0.... a–b = 4–0 =4*
> *b=1.... a–b = 4–1=3*
> *b=2.... a–b = 4–2 =2*
> *b=3.... a–b = 4–3 =1*
> *b=4.... a–b = 4–4 =0*
> *b=5.... a–b = 4–5 =–1*
> *b=6.... a–b = 4–6 =–2*
> *b=7.... a–b = 4–7 =–3*
> *b=8.... a–b = 4–8 =–4*
>
> *La diferencia a–b ofrece una serie de valores que van continuamente decreciendo, y estando el cero entre los valores positivos y negativos […]"*

Las situaciones mostradas evidencian la ausencia de un primer elemento y la posibilidad de ubicar en una misma recta numérica a todas las cantidades.

Como balance de esta segunda diferencia **D_2**, señalamos que hay evidencias de un cumplimiento parcial de en el campo de los números naturales relativos.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

Los párrafos anteriormente destacados de **TSN4** y **TSN9** señalan la continuidad de medidas, esto es la eventualidad de poder pasar de una región positiva o negativa a la otra sin que haya cortes o saltos numéricos. Por lo tanto afirmamos que esta tercer diferencia **D_3**, no hay indicios de la presencias los números naturales relativos.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).

Cuando en **TSN4** se expresa *"La diferencia a–b ofrece una serie de* *valores que van continuamente decreciendo, y estando el cero entre los valores positivos y negativos"*, se conjugan dos aspectos la continuidad de la medida y el cero como punto de referencia central, además en **TSN9** se afirma *"Toda cantidad finita estará necesariamente comprendida entre –Ƨ y +Ƨ ."*, con lo cual el cero no cabe la posibilidad de un cero doble.

Consideramos que no hay indicios del cumplimiento de esta cuarta diferencia $\mathbf{D_4}$ en el campo de los números naturales relativos.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

La generalización de las operaciones es hecha mediante procedimientos algebraicos y simbolización matemática, sin embargo en la definición de la suma la justificación de las reglas se hace en términos de la anulación / compensación de los aumentos con las disminuciones, de manera coherente con la noción de cantidad relativa que este autor utiliza. También la resta: *"Restar es averiguar la diferencia de dos cantidades, ó lo que falta á la una para ser igual a á la otra"* se basa en la intervención de la suma o resta de números naturales, hecho que es manifestación del campo relativo.

Esta quinta diferencia $\mathbf{D_5}$ presenta evidencias del uso de números naturales relativos.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Feliú en relación con las diferencias:

*Tabla 6.2 Diferencias entre **Z** y $\mathbf{N_r}$ en el Tratado elemental de Feliú.*

Autor	**D_1**					**D_2**				**D_3**	**D_4**	**D_5**
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**		**b_1**	**b_2**	**B_3**				
Feliú	**No**	**No**	**No**	**No**	No	**N**	**P**	**No**	No	No	No	**Si**

6.5.6 Tratamiento global de los negativos en el *Tratado Elemental de Matemáticas*

Los números negativos se asumen y tratan como números, se toman de forma aislada y en interacción con otros, tanto positivos como negativos.

Se justifica su aparición mediante la ampliación del campo de aplicación de una operación aritmética al campo algebraico, esto hace que estén determinados por su carácter sustractivo. Las relaciones de aumento o disminución establecen los números negativos y otros.

Los números negativos son considerados un conjunto numérico correctamente ordenado bajo la misma relación de orden que los números enteros.

Los fenómenos donde intervienen los negativos son de tipo aritmético (adiciones), algebraico (ecuaciones) y físicos (desplazamientos). Los sistemas de representación utilizados para los números negativos son verbales, numéricos, algebraicos y gráficos. Los tipos de problemas en los que participan los negativos son de tipo aritmético y algebraico.

Los valores negativos obtenidos como solución de un problema al resolver una ecuación son examinados respecto al enunciado y sólo son rechazados si tienen inconsistencias de tipo lógico.

De acuerdo con las hipótesis de González Marí detectamos dos diferencias, que muestran la presencia de los números relativo en este autor. La diferencia D_2 muestra las limitaciones de la fundamentación aritmética del concepto de cantidad negativa de Feliú; la diferencia D_5 pone de manifiesto las limitaciones estructurales de su tratamiento.

El texto que trabajamos corresponde a la primera parte de la obra, dedicada a Aritmética y Álgebra, y su edición es de 1863; disponemos también de una edición de 1864, del mismo impresor, con la que la hemos cotejado (**CGO2**). Consta de 370 páginas y está dividido en dos partes, la primera trata sobre Aritmética (230 páginas) y la segunda sobre Álgebra (140 páginas) (**CGO3**). Las primeras veinte páginas están dedicadas al prólogo y a unas *"brevisimas nociones de lógica"*. La Aritmética está compuesta por tres grandes bloques temáticos y unos preliminares; el primero es sobre cálculo aritmético y se divide en tres apartados: números enteros, números fraccionarios y números inconmensurables. En el segundo trata la comparación de los números: igualdades, desigualdades, razones y proporciones, progresiones y logaritmos. El tercero estudia las aplicaciones de la aritmética: el sistema de pesas y medidas de España, las operaciones con números concretos, regla de tres, interés y descuento, fondos público y, finalmente, cambios y arbitrajes (**CGO3**).

6.6 Elementos de Matemáticas. Aritmética y Álgebra. Geometría, Trigonometría y Nociones de Topografía. (1857)

6.6.1 Autor

Acisclo Fernández Vallín y Bustillo (*n.* en Gijón 1825 - *m.* en Madrid 1896) (**CA1**). Cursó estudios en el Instituto de Jovellanos, obteniendo más tarde una plaza de profesor auxiliar de matemáticas en este centro (**CA2**; **CA4**). En 1847, a la edad de 22 años, obtiene la cátedra del Instituto de Valladolid; de allí pasa en 1850 al Instituto del Noviciado (Instituto Cardenal Cisneros) de Madrid, que más tarde sería sede de la Universidad Central, del que fue director (Vea, 1995) (**CA4**).

Desempeña los cargos de vocal de la Junta Superior de Inspección y Estadística de Instrucción Pública y Consejero del Real Consejo de Instrucción Pública; además fue miembro de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, titulando su discurso *Cultura Científica de España durante el siglo XVI*, de carácter apologético y tono mesurado (Vernet, 1989). También fue nombrado secretario de la Comisión de Relaciones Exteriores entre España y las Repúblicas de América, de la Sociedad Geográfica de Madrid y, presidente del Centro Asturiano de Madrid (**CA4**, **CA5**).

Consagra gran parte de su esfuerzo y empeño a lograr, para su ciudad, la fundación de la Escuela de Artes y Oficios (antecesora del la actual Escuela Universitaria de Ingenieros Técnica e Industrial de Gijón), a la que dedica su actividad, conocimientos y dinero. En homenaje a la actividad y esfuerzo realizado por su ciudad, la Colonia Gijonesa de la Habana instauró el premio Fernández-Vallín-Habana. Creó la fundación Santa Laureana para niñas huérfanas en Gijón (**CA7**).

La obra se escribe durante un periodo de gobierno moderado (1843-54), a la que sigue un bienio progresista (1854-56). Es una época de crecimiento de la población urbana, de expansión agrícola, de equipamiento industrial, de extensión del derecho al voto, de consolidación de los movimientos sociales y de surgimiento de nuevas fuerzas políticas de orientación republicana (Kinder & Hilgemann, 1981). El autor vive su época de plenitud a mediado del siglo XIX, en un momento en que los gobiernos liberales desarrollan una política de actualización y modernización de España, de aproximación a Europa, dentro de la cual ocupa un lugar importante la institucionalización de un sistema educativo laico y liberal. El protagonismo de intelectuales bien preparados, rigurosos y formados en una ética ciudadana progresista, como es el caso de Vallín y Bustillo, contribuyen al establecimiento de las bases sobre las que consolidar un sistema educativo basado en la ciencia y en las ideas modernas.

La formación filosófica de Fernández Vallín se pone de manifiesto en la redacción de su obra, en la que incluye la fundamentación lógica y filosófica de los principales conceptos utilizados. La influencia del pensamiento de Jovellanos y de las ideas liberales son perceptibles en la vida y obra de este autor. Su trabajo es reconocido en su madurez, el rey Alfonso XII le otorga la gran Cruz de Isabel la Católica y Francia le nombra Oficial de Instrucción de Academia con las palmas de oro (**CA7**).

Publicó: *Tratado elemental de matemáticas* (1851); *Elementos de Matemáticas. Aritmética y Álgebra. Geometría, Trigonometría Rectilínea y Esférica.*

Nociones de Topografía (1857); *Geometría para niños* (1895); *Aritmética, álgebra y principios de geometría con arreglo a la nueva organización dada por la segunda enseñanza por el Real decreto de 9 de octubre de 1866*; *Principios y ejercicios prácticos de aritmética* (**CA6**).

Referencias a la vida y obra de Fernández Vallín y Bustillo se pueden hallar en Espasa (1957), Vernet, H. (1989) y Vea (1995) (**CA8**).

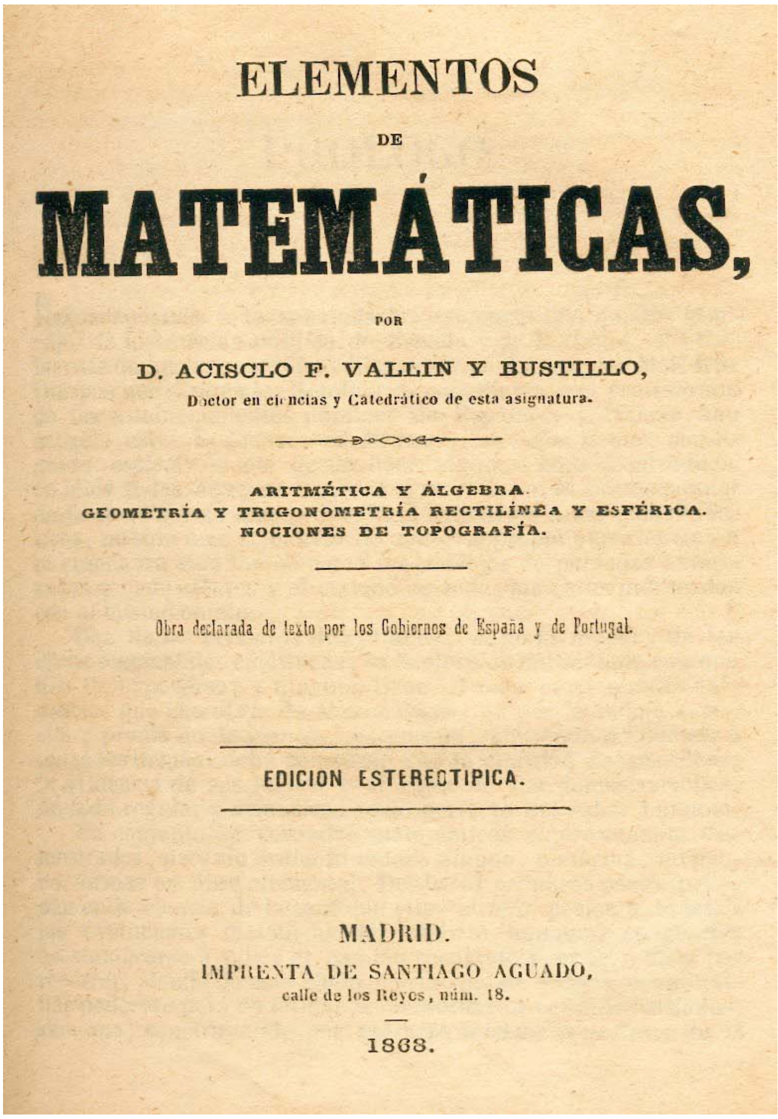
6.6.2 Caracterización del texto

Elementos de Matemáticas. Aritmética y Álgebra. Geometría, Trigonometría Rectilínea y Esférica. Nociones de Topografía. (1857). Edición estereotípica. Madrid: Imprenta de Santiago Aguado (1863)(**CGO1**).

No es posible establecer con certeza la fecha de publicación de la primera edición, pues como afirma Vea (1995) algunas de sus ediciones carecen de la numeración correspondiente, pues a casi todas las presenta como *edición* o *nueva edición estereotípica*, sin embargo, se puede indicar que la 6ª edición se publicó en 1857 (**CGO2**), por tal razón hemos utilizado esta fecha para su ubicación cronológica. La publicación de esta obra coincide con el esfuerzo de los Gobiernos liberales de la época por modernizar el sistema educativo español, que tuvo su culminación con la promulgación de la Ley Moyano, también en 1857.

El texto que trabajamos corresponde a la primera parte de la obra, dedicada a Aritmética y Álgebra, y su edición es de 1863; disponemos también de una edición de 1864, del mismo impresor, con la que la hemos cotejado (**CGO2**). Consta de 370 páginas y está dividido en dos partes, la primera trata sobre Aritmética (230 páginas) y la segunda sobre Álgebra (140 páginas) (**CGO3**). Las primeras veinte páginas están dedicadas al prólogo y a unas *"brevisimas nociones de lógica"*. La Aritmética está compuesta por tres grandes bloques temáticos y unos preliminares; el primero es sobre cálculo aritmético y se divide en tres apartados: números enteros, números fraccionarios y números inconmensurables. En el segundo trata la comparación de los números: igualdades, desigualdades, razones y proporciones, progresiones y logaritmos. El tercero estudia las aplicaciones de la aritmética: el sistema de pesas y medidas de España, las operaciones con números concretos, regla de tres, interés y descuento, fondos público y, finalmente, cambios y arbitrajes (**CGO3**).

La parte dedicada al álgebra consta de seis bloques de contenido y unos preliminares; estos preliminares tratan sobre la notación algebraica, igualdad y desigualdad de las expresiones algebraicas y, fórmulas algebraicas (**CGO3**).


ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS,

POR

D. ACISCLO F. VALLIN Y BUSTILLO,

Doctor en ciencias y Catedrático de esta asignatura.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.
GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA.
NOCIONES DE TOPOGRAFÍA.

Obra declarada de texto por los Gobiernos de España y de Portugal.

EDICION ESTEREOTIPICA.

MADRID.
IMPRENTA DE SANTIAGO AGUADO,
calle de los Reyes, núm. 18.

1868.

El primer bloque es sobre cálculo algebraico y sus operaciones. El segundo se refiere a las cantidades enteras; presenta las cuatro operaciones aritméticas básicas, la potenciación y radicación. El tercer bloque trata de las cantidades fraccionarias (**CCO6**); dedica un apartado a los exponentes negativos. El cuarto aborda las cantidades radicales. El quinto, las cantidades imaginarias y las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces de tales cantidades (**CCO6**). El último bloque corresponde a la comparación algebraica: ecuaciones, resolución de sistema de ecuaciones, inecuaciones y teoría de las progresiones (**CGO2**).

Como signos distintivos del método con que deben exponerse las Matemáticas, Fernández Vallín destaca:

> *"[…] la claridad de sus ideas, la evidencia de sus juicios y el rigor de sus demostraciones […]; desde los primeros pasos […] es preciso*

acostumbrarse á saber el camino recorrido y el que falta por recorrer, siendo de este modo el principio de deducción un auxiliar poderoso para no fatigar la memoria con verdades aisladas, sino que, construyendo por nosotros mismos la síntesis de la ciencia […] alcancemos á deducir el desarrollo , que puede y debe tener cada una de sus teorías. Este ha sido el objeto principal que nos hemos propuesto al dar a nuestro libro la forma filosófica, que domina en cada uno de los diferentes tratados que contiene" (p. 7- 8) (**CGO4)**.

Fernández Vallín subraya dos aportaciones didácticas importantes en la obra:

"Primero , […] los ejercicios prácticos que diseminados por todo el cuerpo de la obra , son un poderos estímulo para que el lector adquiera facilidad en sus diferentes soluciones, familiarizándose de esta manera con el espíritu investigador de la ciencia.
Segundo , […] las notas biográficas e históricas que no tan sólo sirven para la mayor ilustracion del lector , sino también para quitar en mucho su aridez á la parte esencialmente científica" (p. 9) (**CGO4**).

La resolución de problemas y la reflexión histórica quedan así destacadas como recursos didácticos relevantes en el plan de este libro. Por este motivo, en el texto se insertan, a pie de página, algunos datos históricos sobre tópicos y autores matemáticos; menciona a Euclides, Arquímedes, Eratóstenes, Diofanto, Omerique, Newton, Leibnitz, Weigel, Geberto, Rudolph, Stifels, Record, Pitágoras, *Tales*, Harriot, Ptolomeo, Chernac, Burckardt, Muller, Neper, Raimundo Lulio, Briggs, Barlow, Bombelli, D´Alambert, Girard, Cardano, José Maria Rey y Heredia, Buée, Truel, Warren, Vallés, Faure, Fermat, Pascal, Laplace, Poisson, Viete, Descartes, Picarte, Callet, Huygens, Daniel Bernoulli, StiFeliús, Moivre, Wallis, Gauss, Cramer, Euler, Lambert, Lagrange, Wronski, Jorge Juan, Antonio de Ulloa, Ciscar, Agustín Pedrayes, Pedro Chacón, y las tablas de Vasquez Queipo, José de Mendoza y Ríos (**CGO5**).

En los preliminares presenta unas *brevísimas nociones Lógica, como preliminares al estudio elemental de las Matemáticas*.

En este apartado diserta sobre: *las facultades del alma*, *el lenguaje*, la *Gramática* y la *Lógica*. También presenta la noción de *idea* y la de *ideas matemáticas*, que *son las nociones ó conceptos de la inteligencia producidos por la intuición del número y de la extensión.*

Después de hablar de ideas *simples y compuestas*, presenta las nociones de *ideas individuales y abstractas*, y continúa:

"Ideas abstractas son las que tenemos de aquellas condiciones que

> *afectan a los seres, prescindiendo de los seres mismos. La abstracción es la condición de la investigación científica. […] La idea abstracta de número es el fundamento de la Aritmética"* (p. 12).

Otros conceptos que presenta en esta introducción son los de *juicio, proposición, raciocinio, argumentación, ciencia, tipos de ciencia* y *método*. De estas nociones se desprende que las matemáticas son una ciencia racional, que se sirve de métodos analíticos y sintéticos. Su aparato argumental se basa en *definiciones, axiomas, postulados, teoremas, problemas, demostraciones, corolarios* y *teoría*.

Vemos que los fundamentos filosóficos de las matemáticas son propios de los filósofos racionalistas de la época, utilizando de manera descriptiva algunas nociones establecidas por Kant y por sus discípulos (**CGO5**).

La vinculación del libro con los programas oficiales la pone manifiesto el autor cuando transcribe el texto de la Real Orden, de 22 de mayo de 1861, en la que se dice:

> *"La Aritmética matemática y el Álgebra, hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive, serán objeto de exposición y demostración científica en lección diaria y continuo ejercicio durante seis meses, de provechosos resultados resultados si el alumno cuenta con la exigida preparaciónde los primero años. El repaso y repetición de los últimos meses perefeccionarán el estudio , y un saludable rigor en los exámenes dará á cada uno su merecida nota."*

El autor hace constar en los créditos de la obra que *está declarada de texto por los gobiernos de España y de Portugal.* También agradece la acogida que han dado a los Elementos de Matemáticas *"los gobiernos de varias repúblicas hispano-americanas, los MM.RR. Obispos que dirigen los Seminarios Conciliares y el profesorado de los establecimientos públicos de España y Ultramar"* (p. 7) (**CGO6**).

Veamos las definiciones de número, número entero y cantidad que presenta el autor (p. 22):

> Número:
> *"El número se refiere al conjunto ó totalidad mayor o menor de partes iguales ó unidades que constituyen la cantidad […] es un conjunto de unidades"*, además es *"el resultado de comparar la cantidad con la unidad : entendiéndose por unidad una cantidad arbitraria que se toma por término de comparación para referencia á ella todas las cantidades de su misma especie"* (p. 22). *"La unidad […] se considera también*

como un número entero: es el primer elemento de la pluralidad" (p. 27).

"El valor de una cantidad es su razón con la unidad respectiva" (p. 233) (**CCO1**)

Número entero es: *"la reunión de varias unidades de una misma naturaleza"* (**CCO3**).

Cantidad: *"[...] todo lo que es capaz de aumento y disminución",* noción euleriana, y agrega:

> *"Pero considerada de un modo general y filosófico, la cantidad no es la cosa misma, que puede ser mayor ò menor, sino una categoría fundamental del entendimiento humano, el cual contempla las cosas como unas (unidad), ò como muchas (pluralidad); ò como colecciones de muchas unidades (totalidad)."* (p. 21) (**CCO2**).
>
> Y añade la siguiente reflexión positivista:
> *"las cantidades que no admiten comparación [con una unidad arbitraria de la misma especie, como la belleza, la alegría, el dolor […] no son mensurables, no son numerables y, por lo tanto, no forman parte del objeto de las matemáticas"* (p. 22).

Afirma que la palabra Aritmética se deriva del griego $\alpha\rho\iota\tau\mu o\zeta$ que significa número, y de τεχνη, que significa arte, de ella dice que *"trata de los números de un manera determinada […] prescinde de las cualidades empíricas de las cantidades que numera y combina."* (p. 23), y la define como *"la ciencia de los números"* (p. 27) (**CCO1**).

Sobre el Álgebra postula que *"es la ciencia que trata de las leyes generales de la cantidad. Las leyes de la cantidad son independientes de toda aplicación numérica ó geométrica, y comprenden lo mismo á los números que á la extensión"* (p. 233) (**CCO4**).

Las cantidades generales son tratadas abundantemente en este texto; sobre ellas Fernández Vallín dice:

> *"los procedimientos algebraicos, despojando à las cantidades de su determinación concreta y particular, para no ver en ellas mas que lo que tienen de verdaderamente universal y científico, necesitan nuevos órdenes de signos arbitrarios y convencionales, y por lo mismo capaces de universal representación, como las letras del alfabeto, las cuales no teniendo por si valor alguno determinado, pueden recibir los valores numéricos o geométricos que se quiera"* (p. 234 (**CCO4**).

El texto establece que las cantidades negativas, junto con los números imaginarios, son de una naturaleza distinta –y superior- a la de los números naturales, decimales y fraccionarios, ya que incluyen un carácter cualitativo especial; por eso entran a formar parte de las cantidades generales, cuyo estudio corresponde al Álgebra:

> *"En el carácter elevado y trascendental del Álgebra no basta considerar el valor numérico o geométrico de las cantidades con la generalidad que es propia de esta ciencia sino que se ha de atender muy particularmente a su cualidad ó afección respectiva, dividiéndose , por esta razón , las cantidades algebraicas en positivas, negativas, é imaginarias"* (p. 233) (**CCO4**).

También indica que una igualdad o equivalencia es la relación existente entre dos diferentes expresiones de una misma cantidad; luego, se tiene que una ecuación *"es la igualdad que contiene una o varias cantidades desconocidas, llamadas incógnitas."* (p. 290); presenta dos tipos de ecuaciones las numéricas y las literales (**CCO4**).

Vea (1995) indica que esta obra presenta, de manera moderna, los conceptos matemáticos desarrollados (**CGO6**). Los textos de Fernández Vallín fueron utilizados en la enseñanza secundaria española a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, puesto que aparece en varias listas oficiales dentro de los textos para las matemáticas. Este texto es una adecuación a la enseñanza secundaria de los contenidos del *Tratado elemental de matemáticas* (**CGO7**).

6.6.3 Tratamiento dado a los negativos

Los párrafos de mayor interés relacionados con los apartados son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.
" + equivale á más;
…– (equivale á) menos;" (p. 24).

"La adición algebraica se indica separando los sumandos por el signo + ; la sustracción de una cantidad de otra poniendo el signo – entre el minuendo y el sustraendo" (p, 234).

Los signos más y menos designan las operaciones aritméticas y algebraicas de adición y sustracción.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.
"el residuo ó diferencia de dos números, cuando el minuendo es menor que el sustraendo, se llama número negativo." (p. 35).

"Las cantidades algebraicas [se dividen en] positivas, negativas , é imaginarias" "Las cantidades directamente contrarias […] necesitan indicarse con signos representativos del carácter positivo y negativo , en que consiste su contrariedad" (p. 233)

El número negativo surge cuando se realiza la sustracción de un número mayor de otro menor, pero también indica que la consideración de tales cantidades corresponde al Álgebra, en cuyo caso las cantidades negativas aparecen como contrarias de las positivas.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.
"Aunque esta consideracion de las cantidades positivas y negativas basta para la generalidad de las cuestiones concretas que el Álgebra se propone resolver, hay sin embargo afecciones especiales, que no son lo positivo y negativo y que motivan una nueva división de las cantidades en reales e imaginarias." (p. 234).

"Las cantidades reales positivas van precedidas del signo + ó no llevan signo alguno, las negativas van siempre precedidas del signo —, […] la cantidad precedida del doble signo ± debe considerarse como la representación de dos cantidades del mismo valor absoluto, una positiva y otra negativa " (p. 235).

Sostiene que las cantidades negativas son reales Es muy interesante la clasificación *algebraica* que hace Fernández Vallín de las cantidades (números) en reales e imaginarios; a su vez, los reales se clasifican en positivos y negativos.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
"En el […] Álgebra no basta considerar el valor numérico […] de las cantidades, sino que se ha de atender muy particularmente a su cualidad ó afección respectiva, dividiéndose, por esta razón, las cantidades algebraicas en positivas, negativas , é imaginarias"

"[...] son cantidades directamente contrarias, cuya diferente acepción, si bien dependiente en gran parte de la Voluntad del calculador, necesita indicarse con signos representativos del carácter positivo y negativo, en que consiste su contrariedad" (p. 233).

En primer lugar establece que la condición de positivo o negativo (como la de imaginario) tienen carácter cualitativo. En segundo lugar hace dos consideraciones: la primera indica la naturaleza contraria de las cantidades negativas, es decir, les asigna un carácter opuesto a los positivos; la cualidad mencionada parece consistir en ser contrarias a otras, que se toman como positivas. La segunda consideración se refiere a la voluntad de quien realiza los cálculos; esta segunda condición determina la cualidad de negativo o positivo de una cantidad.

> *"Una cantidad bajo el concepto absoluto de cantidad y sin relación con ninguna otra, no es positiva, ni negativa, ni imaginaria."* (p. 234).

Cuando se presentan cantidades independientes, a éstas no se les puede asignar cualidad alguna; esto solo puede hacerse cuando están relacionadas con otras cantidades.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.
"Las palabras igual, mayor y menor, no siempre expresan una relacion cuantitativa, sino una relación de valor, dependiente tambien de la afeccion de la cantidad. Solo en este sentido puede decirse que las cantidades negativas son menores que cero [...]" (p. 236).

De este texto se infiere que la relación de orden convencional puede ampliarse a cantidades reales –con afección positiva o negativa-. En sentido usual las cantidades (absolutas) son mayores que cero; pero como las cantidades negativas tienen una afección o cualidad especial, por eso puede decirse –y justificarse, como veremos en **TS9**- que son *menores que cero.*

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.
"Las ganancias y pérdidas de un comerciante, el tiempo anterior y posterior á una época determinada, la distancia que recorre un móvil a la derecha ó a la izquierda, los grados de temperatura sobre ó bajo el cero del termómetro, etc., son cantidades directamente contrarias, cuya diferente acepción, si bien dependiente en gran parte de la Voluntad del calculador, necesita indicarse con signos representativos del carácter positivo y negativo, en que consiste su contrariedad" (p. 233).

"Los créditos y las deudas de un comerciante son cantidades reales (positivas unas y negativas las otras [...]. Las distancias que recorre un móvil à la derecha ó à la izquierda, son reales (positivas ó negativas); cualquiera otra dirección es imaginaria" (p. 234).

Emplea situaciones cotidianas reales tanto relativas (ganancias, perdidas, recorridos) como situaciones que modelizan la estructura ordinal de Z (temperaturas y cronología, como afirma González Marí 1995, p. 239). En ambos casos acentúa el hecho de ser cantidades contrarias, sin mucha precisión, en las que el criterio de que quien realiza las operaciones decide cuáles son unas u otras, cosa que no es admisible en temperatura y cronología.

Las direcciones de un móvil solo pueden ser positivas o negativas, cualquier otra deberá ser obligatoriamente imaginaria; aquí vemos una identificación abusiva e injustificada del plano cartesiano con el plano complejo.

Las cantidades negativas se aceptan como cantidades reales, igual que lo son las positivas.

TSN7: Regla de los signos.
Para la suma y resta:

"***Adición de las cantidades algebraica enteras***.
Signo positivo o negativo de la suma.

La adición algebraica no es precisamente la suma de los valores cuantitativos de los sumando, sino la reduccion a una expresion única de sus valores cuantitativos y cualitativos, de tal modo que el valor del resultado sea equivalente a la suma de los valores de sus datos. Por eso ha de atenderse tanto á los signos que acompañan á las cantidades. Así:

La suma de dos ó mas cantidades positivas es positiva. La suma de dos o mas cantidades negativas es negativa. La suma de varias cantidades unas positivas y otras negativas , es positiva, nula ó negativa.

La adicion algebraica no lleva, pues, la idea de aumentar un resultado , sino la de juntar varias cantidades en una sola, que puede ser cero, ó mayor o menor que cada uno de los sumandos. […]
Adicion de dos ó mas monomios

Para sumar dos ó mas monomios basta escribirlos unos al lado de los otros con sus mismos signos.
$(+a) + (+b) = +a + b$ $\quad$ $(+a) + (–b) = +a –b$
$(–a) + (–b) = –a – b$ $\quad$ $(–a) + (+b) = –a +b$ *(p. 239).*

Sustraccion de las cantidades algebráicas enteras
Signo positivo o negativo del residuo

La sustraccion algebraica ó literal no lleva en sí la idea de disminución, como sucede en la Aritmética, sino la de determinar una cantidad que sumada con el sustraendo dé el minuendo, verificándose en algunos casos que el residuo es mayor que el minuendo. El residuo de dos cantidades, ambas positivas o negativas, puede ser positivo, nulo ó negativo. […]
Sustraccion de un monomio de otra cantidad algebraica.

Para restar de una cantidad literal un momonio se escribe el minuendo y a su continuación el sustraendo , cambiando a éste de signo.
$(+a) – (+b) = +a – b$ $\quad$ $(+a) – (–b) = +a + b$
$(–a) – (–b) = –a + b$ $\quad$ $(–a) – (+b) = –a – b$ *(p. 241).*

Para el producto:

“*Multiplicación de las cantidades algebráicas enteras*
Signo positivo ó negativo del producto
De la definicion general de la multiplicacion se deduce que: si el signo del multiplicador es el de la unidad positiva , el signo del producto es el mismo del multiplicando ; y que si el signo del multiplicador es contrario al de la unidad positiva , el signo del producto será contrario al que lleve el multiplicando. Y por consiguiente:
El producto de dos cantidades positivas ó negativas es positivo; y el producto de dos cantidades, una positiva y otra negativa, es negativa.

$+A$ X $+B= +AB$| $-A$ X$-B=+AB$| $+A$ X$-B=-AB$| $-A$ X$+B=-A$

Del mismo modo, se verifica que:

$$\begin{array}{l} \pm\times+ \\ \pm\times- \end{array} \; ò \; \begin{array}{l} +\times\pm=\pm \\ -\times\pm=\mu \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mu\times+ \\ \mu\times- \end{array} \; ó \; \begin{array}{l} +\times\mu=\mu \\ -\times\mu=\pm \end{array}$$ ” (p. 242).

Presenta una regla formal y general para la multiplicación de cantidades con signos iguales o diferentes. Esta regla la plantea a través de unas ecuaciones algebraicas.

Igualmente habla de la división de cantidades enteras, en la que considera de nuevo la regla de los signos; distingue entre división exacta e inexacta (pp. 246-247).

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

“La cantidad precedida del doble signo ± ó μ debe considerarse como la representación de dos cantidades del mismo valor absoluto, una positiva y otra negativa.” (p. 233).

En el tercer párrafo de **TSN13** queda explícito que dos cantidades, una positiva y otra negativa, pueden tener el mismo *valor cuantitativo*. Queda implícito en el párrafo de **TSN8** que el valor absoluto de un número es dicho valor cuantitativo, independiente del signo; por lo tanto dos cantidades con distinto signo pueden tener un mismo valor absoluto.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

“Las palabras igual, mayor y menor, no siempre expresan una relacion cuantitativa, sino una relación de valor, dependiente tambien de la afeccion de la cantidad. Solo en este sentido puede decirse que las cantidades negativas son menores que cero (*), y que de dos cantidades negativas, la mayor es aquella cuyo valor cuantitativo es menor.

$a+b=b+a$ $\quad a+b>a$ $\quad a<2a$ $\quad –a<0$ $\quad –a>–2a$*”*

(*) En efecto; si suponemos —a=0 y añadimos 2a á los dos miembros, resulta a=2a. Suponiendo —a>0 tendremos, del mismo modo, el absurdo a>2a luego se debe verificar —a<0” (p. 236).

Establece la relación de orden entre las cantidades negativas así como entre ellas y cero. También presenta las mismas relaciones entre las cantidades positivas; sin embargo, no determina explícitamente cuál es la relación de orden entre las cantidades positivas y negativas.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.
“[...] luego el logaritmo de una fraccion es igual á la diferencia de los logaritmos del denominador y numerador, precedida del signo -; es decir, un logaritmo sustractivo ó negativo.

$Log.\frac{4}{5} = \log.4 - \log.5 = -0096910$ ” (p. 171).

El autor utiliza los números negativos para indicar logaritmos de números entre 0 y 1.

“ $(1-a)^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(1-a)^{-2}}$ ” (p. 280).

“Se llama CANTIDAD IMAGINARIA la expresión algebraica afecta del signo $\sqrt{-1}$ *.”* (p. 283).

“ $2\sqrt[\frac{1}{2}]{-5A^n} = 2(-5A^n)^2 = 50A^{2n}$ ” (p. 280).

“ $a^{-2} < 1, a^{-n} < 1, a^{-\frac{1}{n}} < 1, a^{-\frac{1}{n}} < 1.$ ” (p. 341)

“÷7 1/2, 7, 61/2, 6, 51/2, 5, 41/2, 4, 31/2, 3, 21/2, 2, etc. (Dif. —1/2½)” (p. 151).

Las cantidades negativas sirven, entre otras, para indicar exponentes y cuando preceden a un número dentro de un radical de índice par indican que es un número imaginario. Como se observa en este apartado, el autor utiliza con naturalidad los negativos cuando los necesita para operar o para representar ciertas cantidades; no se cuestiona su significado.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.
“Soluciones Negativas. Responden á las condiciones del problema si por la naturaleza del enunciado puede considerarse la incógnita positiva ó negativamente , es decir, en los dos sentidos , inverso el uno del otro : en otro caso el problema es imposible , aun cuando basta una ligera modificacion en el enunciado para dejar resuelto otro problema análogo al propuesto. [...]

2º Si dos locomotoras del camino del Norte salen á un mismo tiempo para Paris, una de Madrid y otra de Valladolid, recorriendo con movimiento uniforme la primera 45 kilómetros por hora, y 30 la *segunda, ¿á qué distancia de Irun se deberan encontrar?*

Valladolid E Irun E’

*Madrid*____

La distancia de Madrid á Irun es de 631 kilómetros y la de Valladolid á Irun de 339; luego si suponemos que se encuentran en E, y llamamos x la distancia desde Irun hasta este punto, como el tiempo empleado por ambas locomotoras ha de ser el mismo, tendremos

$$\frac{631-x}{45}=\frac{389-x}{30}$$ *de donde resulta x= –95*

cuya solucion negativa satisface cumplidamente al enunciado del problema diciendo que se encuentran 95 kilómetros depues de Irun, es decir en E’, puesto que la incógnita es susceptible de la doble consideración positiva y negativa, según se cuente antes ó después de llegar a Irun.

En este y otros problemas análogos, la solucion negativa proviene de una suposición falsa al plantearlos, ó sea de la poca generalidad dada al valor de la incógnita, pues si llamamos x los kilómetros recorridos por la locomotora que sale de Madrid, la otra recorrerá x-242, en cuyo caso el valor de la incógnita, deducido de una ecuación análoga á la anterior, nos dará x=726 kilómetros, es decir 95 kilómetros después de pasar por la estacion de Irun.” (p. 318).

Fernández Vallín plantea que, si se obtiene una respuesta negativa, debe replantearse el problema para que se obtenga una solución lógica.

Llama la atención que, para ilustrar esta situación en la solución de un problema, utiliza una representación geométrica (a través de la recta), hecho no tomado en consideración cuando pretende ejemplificar las cantidades negativas, como se presenta en **TSN6**.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

El autor emplea los negativos como números a lo largo del Álgebra, si bien cuando se tiene que referir a ellos los llama cantidades. Hay pues una gran variedad de usos de los negativos, si bien en el texto no hallamos explicación o mención especifica que destaque esa utilidad. La aportación del autor está en su empleo regular, sin plantear reflexiones al respecto.

TSN13: Otros.

“Llámase expresion algebraica ó literal toda cantidad expresada por una ó mas letras, unidas entre sí por los signos del cálculo. […] La expresion algebráica de un solo término , se llama monómio. […] Todo monómio se puede considerar como un producto indicado de dos ó mas factores. La expresion algebraica que no lleva denominador ni signo

> *radical , tiene la forma entera"* (p. 235).
>
> *"Dividiéndose las cantidades algebraicas en reales e imaginarias y las primeras, sean positivas ó negativas, en enteras, fraccionarias y radicales, el cálculo algebraico comprenderá por tanto el cálculo de todas esta expresiones"* (p. 239).

En el primer apartado se explica lo que se entiende por expresión algebraica y por monomio; también se habla de expresiones enteras, por contraposición a las fraccionarias y radicales.

En el segundo apartado se presentan los enteros o cantidades enteras como aquellas cantidades reales, positivas o negativas, que no son ni fracciones ni radicales.

> *"Las cantidades positivas y negativas tienen entre sí tales relaciones de simetría, que la suma ó adicion de las unas equivale á la sustracción de las otras, e inversamente. Por eso, dos cantidades una positiva y otra negativa, cuyos valores cuantitativos son iguales, dan un resultado nulo ó cero."* (p. 234).

Aquí aparece la idea de los opuestos aditivos, a los que relaciona por simetría. De tal manera, las cantidades positivas y negativas son el inverso aditivo unas de otras; esto es un indicio de que no se refiere a los números naturales relativos.

6.6.4 Análisis

6.6. 4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- **Número**

En este texto, la definición que el autor da de número, según hemos visto en **CCO1**, es una idea relacional: *"el resultado de comparar la cantidad con la unidad"*, lo cual refuerza más adelante, en la segunda parte: *"el valor de una cantidad es su razón con la unidad respectiva"* (p. 233) y preconjuntista: *"un conjunto de unidades"*. Por otra parte, también sostiene que la unidad es un número.

- **Cantidad**

Como se observa en **CCO2,** Fernández Vallín define la cantidad como *"todo lo que es capaz de aumento y disminución"*; esta es la misma definición dada por Euler (1797) en su *Álgebra,* la cual centra el argumento en la "posibilidad" de variar en mayor o menor medida respecto a una consideración inicial.

En el análisis de la noción de cantidad, basada en las categoría de *unidad*, *pluralidad* y *totalidad*, que hemos visto en **CCO2**, Fernández Vallín refleja directamente la *Tabla de las Categorías* de Kant (CRP, B 106), para quien *"la totalidad no es mas que la pluralidad considerada como unidad* y quien sostiene que *siempre que se tienen los conceptos de pluralidad y de unidad es posible el concepto de número"* (CRP, B111).

Al planteamiento relacional de Euler hay que añadir la aportación positivista de no considerar las cantidades extensivas como objetos de la matemática y la fundamentación racionalista de la cantidad como categoría. La vinculación de las matemáticas con la filosofía en Fernández Vallín se hace patente con el concepto de cantidad.

El Álgebra la presenta como la ciencia que trata de las leyes generales de la cantidad, con un carácter elevado y trascendental, según hemos visto en **CCO4**; Fernández Vallín establece que las cantidades algebraicas se dividen en positivas, negativas o imaginarias. Se desprende que las cantidades negativas son propias del Álgebra y añaden una cualidad o afección, y no lo son de la Aritmética ni corresponde a la simple noción usual de número (como razón entre una cantidad y la unidad).

- **Cantidad positiva y cantidad negativa**

En **TSN2** queda planteado que hay un origen aritmético de los números negativos, que procede de realizar restas donde el sustraendo es mayor que el minuendo.

En **TSN2** se establece también que en Álgebra se estudian las cantidades directamente contrarias, que los signos positivo y negativo representan esa contrariedad y, por tanto, a esas cantidades. Como en el caso de las *magnitudes negativas* de Kant, las cantidades con signo se fundamentan en una relación de oposición, que da lugar a las cantidades contrarias.

Hay una asociación entre cantidad negativa y número negativo, pero esto no se hace explícito a lo largo del texto.

Pero además de ser resultado de operaciones y tener un carácter relacional con las cantidades positivas, las cantidades negativas, por su naturaleza, son cantidades reales, en oposición a las imaginarias, como se indica en **TSN3**. El sentido de esta naturaleza es algebraico y se las considera miembros de un conjunto, luego tienen estatus algebraico, según indicamos en el Apartado 3.1.2. La identificación de lo imaginario con un tercer tipo de cualidad es confusa por imprecisa.

En **TSN13** estamos ante un concepto de cantidad entera, por primera vez entre los libros escogidos para este estudio. Este concepto de *cantidad* *entera* no es el de *número entero*. Este concepto refiere, por un lado, a una cantidad en general, expresada mediante una letra acompañada de un signo, y, en otra versión se refiere a un monomio. Los números enteros surgen en las soluciones de los problemas, como hemos visto en **TSN11**, y lo que resulta más adecuado es reinterpretarlos. Las cantidades enteras son cantidades algebraicas, positivas o negativas, que, siendo reales, no son fracciones ni radicales. La diferencia con los números enteros actuales radica en que las cantidades enteras de Fernández Vallín son expresiones generales, que vienen dadas literalmente y, a veces, se identifican con monomios, como vemos en **TSN7**.

Es significativo observar como en este tratamiento Fernández Vallín quiere tomar distancia de las cantidades aritméticas, que inducen a la confusión de los números relativos. Las reglas de cálculo se establecen para las cantidades enteras.

La justificación que proporciona en algunos casos sobre el origen de estas cantidades no es coherente con el estatus antes señalado, y debilita la posición de Fernández Vallín. El autor establece en **TSN4** la necesidad de considerar la cualidad o afección de una cantidad y no sólo su valor numérico o absoluto; subraya que las cantidades negativas son contrarias a las positivas, pero también reitera que su determinación depende, en parte, *de la voluntad del calculador*, argumento relativo de origen aritmético que pareciera contradictorio e innecesario considerar.

De algún modo no sistemático, recupera y utiliza argumentos propios de los números relativos, incongruentes con el estatus algebraico establecido. Esto vuelve a ocurrir con las ejemplificaciones, como vemos en **TSN6**, donde incluye fenómenos relativos: ganancias/ pérdidas, recorridos a derecha e izquierda, junto con fenómenos enteros: temperaturas y cronología.

Como se indica en **TSN10,** los logaritmos de fracciones entre 0 y 1 los llama *"sustractivos"* o negativos a los que tienen signo menos, es decir hay una asociación del signo menos con la sustracción.

Menciona una relación de simetría entre las cantidades positivas y negativas en **TSN13**, esto la idea de inverso aditivo.

6.6.4.2 Análisis básico de contenido

- **Conceptos básicos**

En **TSN1,** los signos + y - representan las operaciones de adición y sustracción aritmética; luego en **TSN3**, los signos más y menos pasan a indicar o representar el carácter positivo o negativo de una cantidad determinada.

En **TSN5** se dice que las cantidades negativas son menores que cero, lo cual se evidencia mediante una extensión de la relación de orden usual. Se indica que sólo en tal caso se puede hacer esta afirmación.

Fernández Vallín considera las cantidades enteras, positivas y negativas, como entes algebraicos, formando parte de un conjunto en el que juegan las operaciones o clase de números reales, distintos a los fraccionarios y radicales.

Aunque la línea principal de argumentación es la de las cantidades enteras, Fernández Vallín conserva algunas adherencias de justificaciones aritméticas y/o relativas. La idea de que el signo de una cantidad es una afección o cualidad particular de la cantidad, conserva bastante de la noción de cantidad relativa y, a veces, de cantidad adjetivada. Desde un punto de vista práctico mantiene reminiscencias de los negativos como resultado de operaciones aritméticas y también como números relativos, caracterizados por su relación de oposición con otros, llamados positivos.

Como se ha puesto de manifiesto en la caracterización del texto, se tratan las cantidades generales por medio de incógnitas representadas por las letras del alfabeto, las cuales pueden recibir los valores numéricos que se quiera. Cuando estas incógnitas están igualadas con otras similares, se llaman ecuaciones.

- ***Fenomenología/Justificación***

En **TSN2** se muestran los negativos como fenómenos aritméticos.

En **TSN6**, el autor presenta una serie de situaciones cotidianas reales asociadas a ganancias, pérdidas y recorridos, las cuales son un tipo de magnitudes dirigidas.

Asimismo presenta otros fenómenos que se representan de manera acorde y lógica con los números enteros; éstos son temperaturas y cronologías.

En **TSN11,** un fenómeno físico de desplazamiento, representado de forma algebraica y gráfica, es utilizado para explicar cómo deben interpretarse las soluciones negativas en un problema o ecuación, utilizando el soporte de la recta numérica como apoyo a la argumentación.

La resolución de problemas es otra vía de la que surgen valores negativos (no se precisa si son cantidades o números), como se deduce de **TSN11**. La solución negativa de un problema tiene sentido cuando la incógnita se puede considerar como una cantidad real, es decir, con dos sentidos contrarios que se pueden tomar uno como positivo y el otro como negativo. De este modo Fernández Vallín hace compatible la noción de cantidad con el planteamiento y resolución de problemas. Presenta varios ejemplos, como el problema de los trenes, que le permiten dotar de sentido las soluciones obtenidas. Así hace también con un problema cronológico, en el que afirma que "*habiendo supuesto positivos los años posteriores al nacimiento de J.C. serán negativos los anteriores*". Igualmente interpreta las soluciones 0 e ∞.

Pero, al mismo tiempo, afirma que las soluciones negativas conllevan una interpretación de la respuesta, ya que indican una suposición falsa al plantear el problema o una incorrecta selección de las incógnitas, lo que parece contradictorio con la suposición de que las cantidades negativas son reales, y recuerda a los números relativos. En el ejemplo y en otros casos, la interpretación indica que el planteamiento había partido de algún supuesto falso.

- **Estructura de orden**

Caso curioso es el modo de presentar que las cantidades negativas son menores que cero, ya que lo argumenta como debido a la *afección particular de las cantidades negativas.* Es decir, se presenta la condición de "*menor que 0*" como una peculiaridad de las cantidades negativas, que amplía la relación de orden usual, como vimos en **TSN5**. Luego, justifica la relación de orden entre las cantidades reales -positivas y negativas- mediante el orden parcial de los enteros, como vimos en **TSN9**. No utiliza la expresión "*menores que nada"*.

Tanto en **TSN5** como **TSN9** se plantea una relación de orden entre las propias cantidades negativas, y entre ellas y el cero; pero no se deja constancia de la comparación entre cantidades positivas y negativas. De hecho demuestra que $-a < 0$; enuncia que si $a > b$ entonces $-a < -b$, pero no demuestra esto, sino sólo que $-a > -2a$. Así mismo la relación de orden de las cantidades positivas respecto a cero no se pone de manifiesto de manera explícita.

- **Estructura algebraica**

En las operaciones se tratan las cantidades negativas desde un punto de vista algebraico, se consideran parte de las cantidades algebraicas enteras.

Establece que la adición es una operación algebraica entre cantidades enteras, según vemos en **TSN7**. Destaca la diferencia con la suma aritmética de los valores de las cantidades; la adición no consiste en aumentar, sino en juntar cantidades enteras; la adición aritmética debe tener en cuenta tanto los signos como las cantidades. El resultado de una suma de cantidades enteras puede ser positivo, nulo o negativo, es decir, es otra cantidad entera. Cuando establece las reglas habla de *suma de monomios,* aún cuando los representa como cantidades enteras: +a, –a.

La sustracción también es una operación algebraica entre cantidades enteras, **TSN7**. No coincide con la operación aritmética, que consiste en disminuir. La sustracción entera consiste en encontrar una cantidad que, sumada con el sustraendo, dé el minuendo. El resultado puede ser cualquier cantidad entera: positiva, nula o negativa, es decir, otra cantidad entera. Cuando establece la regla de los signos habla de *la sustracción de un monomio de otra cantidad*.

El producto también es una operación algebraica entre cantidades enteras. Establece que el signo del resultado depende del signo del multiplicador, por la definición general del producto, si bien no justifica esta fundamentación en el caso de multiplicador negativo, que es el que presenta dificultad. La ley de los signos para la multiplicación de cantidades es presentada en **TSN7** como una regla general de simplificación de signos. A diferencia de la suma y la resta, que se refieren a monomios, el producto se refiere a cantidades enteras, para las que utiliza los términos A y B.

No hay referencias a la estructura algebraica aditiva, salvo la mención al carácter simétrico de las cantidades negativa y positiva con el mismo valor absoluto, que vimos **TSN13**. Tampoco hay vinculación entre las estructura aditiva y multiplicativa.

- **Uso algebraico**

La solución algebraica de ecuaciones origina cantidades negativas así mismo en estos procesos se opera con ellas. También se utilizan para indicar ciertos exponentes entre otras cosa.

6.6.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r[*]

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1** La atribución de significados y signos que el documento presenta en TSN3 para los negativos es arbitraria e indeterminada *"cuya diferente acepción, si bien dependiente en gran parte de la Voluntad del calculador, necesita indicarse con signos representativos del carácter positivo y negativo, en que consiste su contrariedad"* esto mismo se reafirma en **TSN5**, señalando un significado dual propio del campo natural relativo.

Segundo indicador: **a_2** No encontramos presencia de este indicador en el autor que analizamos.

Tercer indicador: **a_3** La única comparación de medidas entre valores negativos la hallamos en **TSN9** *"—a>—2a"* apreciándose el orden usual entre números enteros negativos.

Cuarto indicador: **a_4** El texto no permite obtener información sobre este indicador que oriente hacia uno y otro campo numérico.

Como balance para esta primera diferencia **D_1**, sustentamos que hay indicios de un cumplimento parcial para el campo natural relativo.

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador: **b_1** La naturaleza de los números y de las situaciones presenta significados asociados a los números enteros *"…los grados de temperatura sobre ó bajo el cero del termómetro…"*. Esto se reafirma en **TSN11** donde en un ejemplo hay evidencia la posibilidad de existencia de valores inferiores y superiores a cero.

Segundo indicador: **b_2** La representación utilizada para los números negativos en este texto es simbólica en **TSN9** *"—a>—2a"* y con simbolización matemática en **TSN11** *"X=—95"*, ambas son conocidas y determinadas para los números enteros.

Tercer indicador: **b_3** Solamente hallamos una transformación cuantitativa con cantidades negativas en **TSN10** "$2\sqrt[\frac{1}{2}]{-5A^n} = 2\left(-5A^n\right)^2 = 50A^{2n}$", ésta denota ausencia de primer elemento y unicidad de la serie numérica, por lo cual se desarrolla en el campo numérico entero.

[*] Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

La valoración de esta segunda diferencia **D_2** indica que no hay indicios de cumplimiento para el campo natural relativo.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

Los ejemplos se presentan bajo una notación y estructura algebraica, representando en su mayoría los valores negativos de manera literal asumiendo la generalidad de estos; en **TSN10** y **TSN11** los ejercicios y ejemplos indican la continuidad de medidas al cruzar el cero.

Como balance de esta tercera diferencia **D_3**, afirmamos que ésta no se cumple para el campo natural relativo.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).

No hay evidencias suficientes para sostener que Fernández Vallin y Bustillo trabaja con un doble cero, puesto que los negativos reciben un tratamiento algorítmico y algebraico formal donde no tiene cabida la existencia de dos orígenes.

Consideramos que no se cumple esta cuarta diferencia **D_4** para el campo de los números naturales relativos.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

Como se ha mencionado el tratamiento algebraico de los negativos en el texto señala una composición aditiva propia de los números enteros. Sin embargo, al mencionar relaciones de simetría en **TSN13**, se sugiere la presencia del opuesto aditivo en procesos de suma entre cantidades positivas y negativas, y esta presente la anulación de un valor sobre otro para obtener un resultado nulo, esto se corresponde con la anulación-compensación que describe González Marí (1995). Por lo tanto, consideramos esto como evidencia del cumplimiento parcial de la quinta diferencia **D_5** para el campo de los números naturales relativos.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Fernández Vallín y Bustillo en relación con las diferencias:

Tabla 6.3 Diferencias entre **Z** y N_r en los *Elementos de matemáticas* de Vallin y Bustillo.

Autor	**D_1**					**D_2**				**D_3**	**D_4**	**D_5**
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**		**b_1**	**B_2**	**b_3**				
Fernández Vallin y Bustillo	**Si**	**¿?**	**No**	**¿?**	P	**No**	**No**	**No**	No	No	No	P

Nuestro autor inicia su presentación de las cantidades negativas desde su origen aritmético y de los fenómenos relativos, lo cual abandona para establecer el estatus algebraico de las cantidades negativas, como parte de las cantidades algebraicas enteras. La noción de cantidad entera, no obstante, es distinta de la de número entero. En primer lugar porque conserva adherencias de justificaciones aritméticas y relativas; en segundo lugar por que no domina la estructura de los números enteros

6.6.6 Nuevos indicadores del dominio de la estructura de Z

La presencia de las diferencias de González Marí es débil para D_1 e, igualmente los es para D_5. Podría suponerse de aquí que nuestro autor dominaba el conjunto de los números enteros, pocos años antes de su formalización por Hankel. Esto podría deducirse si hacemos consistir el dominio de **Z** en la ausencia (o en una presencia débil) de indicadores para las cinco diferencias establecidas por González Marí entre **Z** y $\mathbf{N_r}$. El estudio de Fernández Vallín puede ayudar a solventar este interrogante.

Es evidente que, aunque Fernández Vallín dispone de un concepto de cantidad entera algebraica muy cercano al de número entero (aunque también peligrosamente cercano al de monomio), no domina la estructura de los números enteros por desconocimiento o conocimiento insuficiente de aspectos relevantes de dicha estructura.

<u>En relación con la suma</u>: dispone de una noción de la operación como ley de composición interna, que justifica en **TSN7**.

Dispone de una noción de suma que incluye propiedades formales, como es la conmutativa.

Parece disponer de una noción de elemento simétrico, según se presenta en **TSN13**.

No tiene la noción de elemento neutro, si bien conoce que sumar 0 no cambia el resultado.

<u>En relación con la resta</u>: sí la considera como una ley de composición interna, que justifica sin definirla.

No establece relación entre la suma y la resta.

En relación con el producto: dispone de una noción de la operación como ley de composición interna, que no sabe justificar adecuadamente, en **TSN7**.

Justifica parcialmente la regla de los signos de acuerdo con las propiedades de las operaciones.

No considera las propiedades formales de la noción de producto.

No establece propiedades conjuntas para suma y producto.

No considera la división como una operación complementaria, distinta de una ley de composición interna.

6.6.7 Tratamiento global de los números negativos en los *Elementos de matemáticas. Aritmética y álgebra, geometría y nociones de topografía*

El autor, inicialmente, presenta los negativos como resultado de operaciones aritméticas; luego pasa a darles un sentido algebraico. También argumenta la condición de contrarios respecto a los positivos

En atención al concepto de cantidad, sólo puede ser negativa en relación con otra, pero no de forma aislada o independiente; sin embargo el número negativo como medida es asumido como real.

Desarrolló la idea de los negativos como menores que cero, argumentando una relación cuantitativa y cualitativa entre cantidades.

Se apoya en fenómenos físicos (desplazamiento y temperatura) y matemáticos (orden) así como en situaciones de carácter contable (debe, haber) basadas en la comparación de cantidades; hay en el texto representaciones numéricas, algebraicas y gráficas para explicarlas.

Entre los positivos y negativos se establecen relaciones que el autor llama “de simetría” para la adición y sustracción, las cuales pueden interpretarse como la existencia del opuesto aditivo.

En general en el texto se presenta una riqueza de consideraciones respecto a las cantidades negativas y positivas, lo cual induce a pensar en un conflicto epistemológico por parte del autor sobre las cantidades negativas y su naturaleza. Los números negativos son interpretados y utilizados como enteros, aunque en ocasiones se recurre a situaciones con cantidades dirigidas, pero este es sólo un recurso didáctico para dar una explicación más cercana o familiar al lector.

En algunos aspectos sobre las cantidades positivas y negativas se induce la idea del inverso aditivo, afirmando que tienen igual valor cuantitativo; al juntar cantidades con valores cuantitativos iguales pero de diferente signo, dan un resultado nulo o cero.

6.7 Elementos de matemáticas. Álgebra. (1858)

6.7.1 Autor

Joaquín Maria Fernández y Cardin (*n*. en Pintueles – Oviedo- 1820; *m*. en Madrid 1893) (**CA1**). Se Licenció en Derecho y se doctoró en Ciencias **(CA2)**.

Desde la edad de 20 años se dedicó a la enseñanza de matemáticas y ciencias en la Universidad de Oviedo y en el Instituto de San Isidro de Madrid desde 1850 hasta 1893 (**CA4**). Obtuvo la Cruz de Carlos III y la de Isabel la Católica así como diversos premios de Sociedades Económicas (**CA7**).

No participó en los debates ideológicos que se sucedieron entre los académicos de la época. En el Instituto de San Isidoro fue compañero de Urbano Gonzalez Serrano, el baluarte del Krausopositivismo español, y de Monlau (**CA5**).

Fernández y Cardin fue testigo de los cambios políticos emprendidos por Isabel II, asimismo vivió los vientos de cambio en materia educativa impulsados por el Plan del Duque de Rivas (1836), el Plan Pidal de 1845 y la Ley Moyano en 1857; de manera casi simultánea con esta última ley surge Fernández Cardin como autor de textos para la enseñanza de las matemáticas (Vea, 1995) (**CA7**).

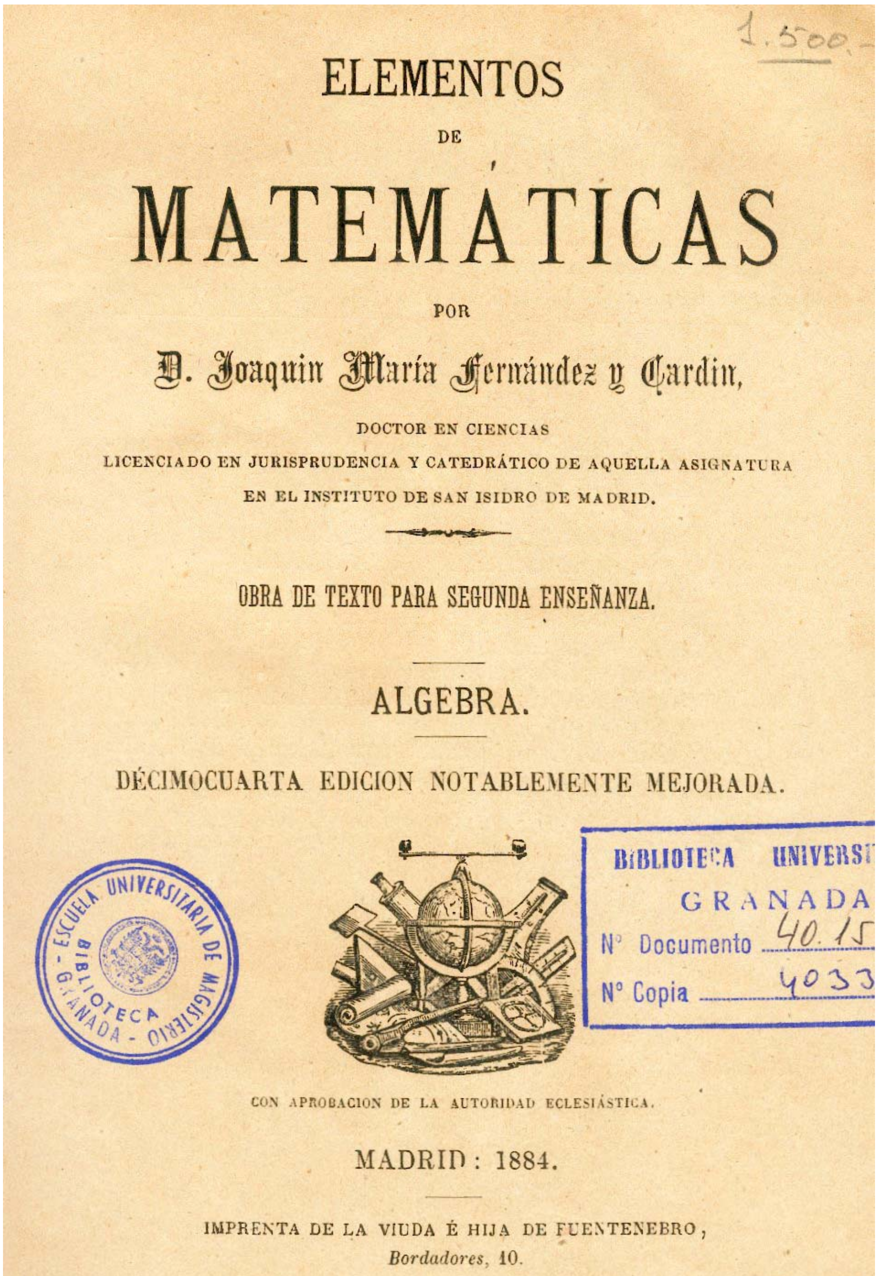
Su obra *Elementos de matemáticas* sirvió de texto en varios institutos de España y América. Otros de sus trabajos publicados fueron *Nociones de aritmética y geometría* (**CA6**). Hizo un estudio sobre los pesos y medidas de Asturias, y grabó el plano de Oviedo.

Se pueden hallar referencias a Fernández Cardín y su obra en Vea (1995) y en la Enciclopedia Universal Ilustrada Espasa (1924) (**CA8**).

6.7.2 Caracterización del texto

Elementos de matemáticas. Algebra (1884). Decimocuarta edición notablemente mejorada. Madrid: Imprenta de la viuda e hija de Fuentenebro

(**CGO1**). La primera edición fue publicada en el año 1858 (**CGO2**).


1.500

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

D. Joaquin María Fernández y Cardin,

DOCTOR EN CIENCIAS

LICENCIADO EN JURISPRUDENCIA Y CATEDRÁTICO DE AQUELLA ASIGNATURA

EN EL INSTITUTO DE SAN ISIDRO DE MADRID.

OBRA DE TEXTO PARA SEGUNDA ENSEÑANZA.

ALGEBRA.

DÉCIMOCUARTA EDICION NOTABLEMENTE MEJORADA.

CON APROBACION DE LA AUTORIDAD ECLESIÁSTICA.

MADRID: 1884.

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJA DE FUENTENEBRO,
Bordadores, 10.

Este tomo consta de 232 páginas, dividido en 17 capítulos y un complemento de seis capítulos más. La obra empieza presentando el cálculo de las cantidades algebraicas; sigue con los quebrados, las ecuaciones de primer grado; luego los problemas de primer grado con una incógnita; de ahí pasa a los sistemas de ecuaciones con dos o más incógnitas y operaciones con cantidades algebraicas; a continuación, las ecuaciones de segundo grado y las bicuadradas, razones y proporciones, progresiones, logaritmos y, finalmente, las aplicaciones de los logaritmos. En el complemento se dan ejemplos de multiplicación con polinomios, se continúa con la división de polinomios, potencias de las cantidades algebraicas, raíces, cálculo de radicales y una generalización del cálculo algebraico de cantidades exponenciales (**CGO3**).

Cada capítulo está estructurado en artículos que, a su vez, se dividen en puntos, cada uno de los cuales trata brevemente de una noción o concepto. A veces, un punto consiste en una simple definición, otras en el enunciado y planteamiento de un problema; en algunos casos tiene mayor extensión, como ocurre con la regla de los signos (**CGO3**).

La misma portada del texto indica que es *"una obra para el estudio de las matemáticas en la segunda enseñanza"*. El estilo es muy ágil y facilita la lectura; también está concebido para facilitar el trabajo del profesor y el estudio del alumno. El libro tiene un estilo escolar propio de la época e incluye multitud de ejemplos y ejercicios, que se proponen aclarar los conceptos o procedimientos presentados (**CGO4**).

Fernández Cardín no hace referencias a los autores en los que se fundamentó para escribir el texto (**CGO5**).

A partir del contenido del texto no se puede inferir cuál es la noción de número que utiliza Fernández y Cardín (**CCO1)**, ni tampoco la de número natural (**CCO3**).

Sobre la noción de cantidad que sustenta transmite una breve información:

> *"La generalidad con que el Álgebra considera la cantidad exige que en ella se tenga en cuenta, no solamente su valor respecto á una unidad cualquiera, sino tambien su manera de ser ó de influir en el resultado á que se aspira en el procedimiento. Las cantidades han de ser miradas bajo el doble concepto de la* cantidad *y de la* cualidad*"* (p. 10) (**CCO2**).

En el texto se tratan las cantidades generales, ya en la primera definición se indica que *"El Álgebra es una ciencia que trata de las propiedades generales de la cantidad, expresada por símbolos en que se prescinde de todo valor numérico"* (p. 3); así, el Álgebra permite expresar las cantidades de manera general, utilizando para ello letras que las representan. Por comparación, se afirma que *"La Aritmética puede representar indiferentemente cualquiera especie de números ó magnitudes [… con] valor determinado, si bien convencional"* (p. 3). También se dice que *"el Álgebra es la ciencia de las transformaciones y de las fórmulas"* (p. 10).

Las *"cantidades incógnitas son las que se trata de conocer ó determinar en* *cada problema"* (p. 4). También se define ecuación como *"una igualdad en que entran una ó más cantidades desconocidas ó incógnitas"* (p. 42), y se clasifican en numéricas y literales (**CCO4**).

El autor dedica, en el primer capítulo, un apartado a las cantidades negativas: *"De las cantidades consideradas como positivas y como negativas"* (p. 10), en dos páginas expone de manera breve todo lo relacionado con los negativos, en general (**CCO5**).

A lo largo de la obra aparecen, como resultados de los problemas propuestos, números naturales, negativos, fraccionarios, decimales, radicales e imaginarios que el autor maneja con soltura, dando por supuesto su conocimiento y dominio por el lector; así:

> *"Luego el valor de la incógnita puede ser positivo o negativo, conforme el signo + ó el signo -: entero ó quebrado, según que dicho segundo miembro, dividido por el coeficiente de la incógnita, dé un cociente entero ó fraccionario"* (p. 51) (**CCO6**).

La obra fue editada, al menos, en catorce ocasiones y estuvo en vigor como libro de texto hasta finales del siglo XIX. Se trata de un manual para estudiantes de secundaria, poco dado a especulaciones y reflexiones filosóficas. Los conceptos se presentan mediante definiciones breves y precisas, o bien, cuando ello no es posible, mediante una descripción de las nociones implicadas, siempre acompañados de ejemplos y de aclaraciones. Debió utilizarse en centros religiosos privados, ya que se hace constar la aprobación de la autoridad eclesiástica (**CGO6**).

6.7.3 Tratamiento dado a los negativos

Los párrafos de mayor interés relacionados con los ítems son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y –.

"El signo + indica la adición, así para expresar que a se ha de sumar con b, se escribe a + b, y se lee: a más b" (p. 4).

"El signo – indica la sustracción: para expresar que de a se ha de restar b, se escribe a – b, y se lee a ménos b.
Adviértase que los signos + y – tambien sirven para indicar el carácter positivo ó negativo de las cantidades" (p. 5).

Los signos + y – indican las operaciones aritméticas de adición y sustracción; igualmente expresan el carácter positivo negativo de una cantidad.

El autor presenta un nuevo signo ±, al que llama *signo de ambigüedad* (p. 5), y que expresa una disyunción o doble opción de la suma y la resta entre dos cantidades.

> **TSN2:** Presentación de las cantidades negativas.
> *"Las cantidades han de ser miradas bajo el doble concepto de la cantidad y de la cualidad […] Bajo el concepto de su cualidad o manera de ser, se dividen las cantidades en positivas y negativas. […] Para expresar el carácter positivo o negativo de las cantidades se emplean los dos signos + y –, que sirven para indicar la adición y la sustracción [...]"* (p. 10).

Las cantidades algebraicas no sólo tienen *quantum* sino también *qualitas*; cuando introducimos el criterio de cualidad en las cantidades, surgen las cantidades positivas y las cantidades negativas. En este caso los signos + y – no tienen significado operacional, sino que pasan a determinar el sentido positivo o negativo de las cantidades cuando las preceden. El autor considera el caso en que una cantidad no está precedida de ningún signo:

> *"El signo + no se emplea cuando la cantidad positiva está sola ó es la `primera de una expresión compleja"* (p. 11).

> **TSN3:** Naturaleza de las cantidades negativas.
> *"Las denominaciones de positivo y negativo son puramente relativas, y no denotan mayor excelencia ó privilegio de lo primero sobre lo segundo. Estas denominaciones se cambian cuando se muda de objeto en la consideración algebraica: así, cuando consideramos el haber de un capital, es negativo el deber ó las deudas; y cuando consideramos las deudas, es negativo el haber, que ántes era positivo. Una cantidad bajo el concepto absoluto de cantidad y sin relacion con ninguna cuestion, no es positiva ni negativa."* (p. 11).

El carácter positivo o negativo de una cantidad no está determinado previamente, sino que éste depende de las consideraciones que se hagan. Se hace palpable el carácter algebraico de las cantidades negativas.

> **TSN4:** Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
> *"Bajo el doble concepto de su cualidad ó manera de ser, se dividen las cantidades en positivas y negativas. Consideradas como positivas las que tienen un modo de ser determinado, serán negativas las que tienen un modo de ser contrario á ellas"* (p.10).
>
> *"la sustracción misma no es, con efecto, sino la oposición de dos cantidades de contrario carácter: el sustraendo siempre es negativo respecto al minuendo"* (p. 11).

Fernández Cardín hace una distinción entre el valor y lo que representan las cantidades, esto es, entre su cantidad y su cualidad; es bajo este último parecer que las cantidades son de carácter positivo o negativo. Además se indica que las unas son contrarias a las otras. Reconoce la presencia de cantidades negativas en las restas.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.
"Cuando se dice que las cantidades negativas son menores que cero, sólo quiere expresarse que influyendo sobre las positivas las disminuyen, ó que añadidas á las positivas las aumentan ménos que si no se les añadiera nada." (p. 11).

Las cantidades negativas son menores que cero por sus efectos sobre otra cantidad positiva –no por su naturaleza–; ya que las aumentan en menor medida de lo que lo hace el cero.

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.
"[...] para apreciar los grados de temperatura, no sólo conviene saber cuántos son; sino tambien si están por encima ó por bajo del cero del termómetro: para juzgar de la situación de un capital, hay que saber si las cantidades ó partidas del balance corresponden al haber ó al deber: y para calcular la posición de un móvil, es necesario tener conocidas, además de su velocidad, la dirección de su movimiento." (p. 10).

Para dar ejemplo de las cantidades negativas, Fernández y Cardín utiliza situaciones cotidianas reales que se modelizan por medio de los números enteros (temperaturas) y otras, también reales, de carácter relativo (posición, dirección, debe y haber).

También presenta enunciado de problemas en los que usa cantidades relativas, establecidos mediante relaciones de comparación entre poblaciones, o entre edades de personas:

"En una población invadida por la peste han muerto la décima parte de sus habitantes, la vigésima se hallan enfermos y la trigésima convalecientes; si hubieran sido invadidos 190 individuos más, hubieran sido atacados la mitad de sus habitantes; ¿cuál era el número de éstos antes de la invasión?"

"Un padre tiene 41 años, su hijo 8, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será cuádruple de la del hijo?" (p. 58).

TSN7: Regla de los signos.
Para la suma:
"Se llama ADICION ALGEBRÁICA una operación, cuyo objeto es reunir dos ó más expresiones algebráicas en una sola, conservando á cada término el mismo signo que tiene. […]

Ejemplos
1º $a+(+b)=a+b$.
2º $-a+(+b)=-a+b$.
3º $a+(-b)=a-b$.
4º $-a+(-b)=-a-b$.*”* (p. 17).

Se define la suma y se presentan las reglas generales para la adición de cantidades con signo.

Para la resta:
“Se llama SUSTRACCIÓN ALGEBRÁICA a una operación cuyo objeto es, dada las suma algebráica de dos cantidades y una de éstas determinar la otra. De donde se infiere que el resto es una cantidad que sumada algebráicamente con aquella que se resta, ó sea al sumando conocido, produce la cantidad de que se resta, ó sea la suma dada.
Sea, pues, restar de la cantidad A […] la cantidad b, y se tendrá
$A - (+b) = A - b$; *porque*
$A - b + b = A$
De igual modo se verá que
$A - (- b) = A + b$; *puesto que*
$A + b - b = A$
[…] Luego para restar de una cantidad otra algebráica, se escribe la primera con los mismos signos que tiene, y á continuación la segunda con signos contrarios á los que llevaba.” (p. 18-19).

Para el producto:
“Se llama MULTIPLICACIÓN ALGEBRÁICA de una cantidad por otra, la operación cuyo objeto es hallar una tercera cantidad, que sea en signo y magnitud relativamente á uno de los factores lo que el otro es respecto á la unidad positiva”. […]
“Deduzcamos, en primer lugar, la regla para determinar el signo del producto.
Al efecto, supongamos para mayor sencillez que el valor absoluto del multiplicando es a, y b el del multiplicador, cuyo producto es ab, y expresemos siempre el signo de cada factor.
Sea 1º. $+a \times +b$.
El signo del multiplicador +b es igual al de +1; luego (según la definición) el del producto ha de ser igual al del multiplicando +a, esto es, positivo; luego el del producto tambien será positivo. Luego
$$+a \times +b=+ab.$$

2º. $-a \times -b$.
El signo del multiplicador –b es contrario al de +1; luego el del producto ha de ser contrario tambien al del multiplicando –a; pero éste es negativo; luego el del producto será positivo. Luego
$$-a \times -b =+ab.$$

3º. $+a \times -b$.

El signo del multiplicador –b es contrario al de +1; luego el del producto ha de ser contrario al del multiplicando +a; luego ha de ser negativo. Luego

$$+a \times -b = -ab.$$

4º. –a X +b.
El signo del multiplicador +b es igual al de +1; luego el del producto ha de ser tambien igual al del multiplicando –a; luego ha de ser negativo. Luego
–a X –b =-ab.
Los casos que se acaban de examinar son todos los que pueden ocurrir respecto á signos, y de ellos se deduce la regla siguiente:
Si los dos factores de un producto tienen igual signo, el producto es positivo; si tienen signo contrario, negativo, o abreviadamente

+ multiplicado por + ó – por – dan +,
+ multiplicado por – ó – por + dan -;

mas breve aún

$$+ \times + = +, \qquad + \times - = -,$$
$$- \times - = +. \qquad - \times + = -.”$$

(pp. 20-21).

“Corolario 2º. Un producto de cualquier número de factores será positivo, si el número de factores negativos fuese par, y negativo en el caso contrario;” (p. 22).

Se deduce y justifica la regla de los signos para la multiplicación tanto en forma retórica como simbólica; es utilizado el +1 como condición para el argumento, siendo cualquier cantidad favorable o contraria a él.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.
“[...] y por consiguiente que de dos cantidades negativas es menor la que tiene mayor valor absoluto, y al contrario.” (p. 11).

Aquí hay una referencia al orden, pero de forma implícita deferencia los valores absoluto y relativo de una cantidad.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.
“[...] puede decirse tambien que el que tiene una deuda de 7 pesos, tiene ménos que el que no tiene nada ó esta en paz: esto se expresa

$$-7 < 0.$$

En igual sentido se dice que el que tiene una deuda de 100 pesos tiene ménos que el que tiene otra de 20;[...] Así

$$-100 < -20.”$$ (p. 11).

También se menciona a continuación el orden entre las positivas:
“Una cantidad negativa, resultado de una sustracción, no indica sino que el sustraendo es mayor que el minuendo; y que en vez de

exceso de éste sobre aquél, hay un defecto ó un exceso de aquél sobre éste" (p.11)

Se establece un orden para las cantidades negativas entre ellas y con respecto a cero; indirectamente se hace mención al orden de las cantidades positivas.

En el estudio de las progresiones aritméticas:

"Se llama progresión creciente aquella en que la razon es positiva y los términos van por tanto aumentando; y decreciente en el caso contrario. […]

÷ 16, 12, 8, 4, 0, –4, –8, …" (p. 113).

"÷ –nd. ….– 3d, – 2d, – d, 0, d, 2d, 3d, …." (p. 159).

Vemos la comparación entre positivos y negativos, cuando se expresa que el carácter decreciente de una sucesión es por disminución de valor, debido a una resta sucesiva de valor constante, o razón aritmética negativa.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

"Corolario. Para restar de un número menor otro mayor se resta el menor del mayor, y á la diferencia se le pone el signo –" (p. 12)

"Tomemos al efecto la expresión $\sqrt{-4}$.
Como –4 = 4 X –1, sustituyendo este valor de –4 debajo del radical, tendremos
$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times -1} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$. *"* (p. 100)

"Sea convertir el logaritmo –3,481790 en otro de característica negativa y mantisa positiva." (p. 166).

"¿Cuál es la razon de una progresión, cuyo primer término es 20, el último 0, y 6 el número de términos?

$$d = \frac{0-20}{6-1} = -4$$ *"* (p. 151).

$$\text{“} a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

Luego toda cantidad con exponente negativo es equivalente á la unidad partida por la misma cantidad con exponente positivo" (pp. 226.227).

Se utilizan las cantidades negativas para expresar exponentes, logaritmos, como razón de progresiones aritméticas, etc., entre otras cosas;

en estos casos no se hace ninguna reflexión sobre lo que pueden significar.

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.
"El valor negativo de la incógnita cuando por naturaleza de la cantidad que representa no es susceptible de variar la cualidad o acepción, significa que el problema es imposible; pero aún podrá convertirse en posible cambiando en la ecuación del planteo el signo de la incógnita y traduciendo la ecuación resultante en otro problema análogo al propuesto.

OBSERVACIÓN. Puede haber casos en que las condiciones físicas del problema impidan esta transformación. [...]
Un padre tiene 41 años, su hijo 8, ¿dentro de cuántos años la edad del padre sera cuádrupla de la del hijo?

Supongamos que esto se verifica después de 5 años.
Llamando x los años que han de transcurrir desde los 5 hasta que la condicion se verifique, se tendrá: edad del padre $41 + 5 + x$, *idem de hijo* $8 + 5 + x$; *luego*
$4(13+x) = 46 + x$;
de donde $x = -2$.

Siendo posible este problema, ¿de qué proviene el valor negativo que acaba de hallarse para la incógnita? De que al plantearle se ha supuesto que la edad del padre se cuadruplicaría respecto de la del hijo después de 5 años, siendo así esto debe suceder ántes de este tiempo.

De manera que el tiempo transcurrido desde la época de la pregunta hasta que se verifica la condicion del problema es $5 + x = 5 - 2 = 3$, *como efectivamente sucede.*
Rebajando, pues 2 años de los 5 de la nueva hipótesis, según indica el signo negativo del primero de estos números, se tiene el verdadero resultado. Luego

El valor negativo de la incógnita proviene tambien de una hipótesis falsa, hecha al plantear el problema; en este caso el problema es posible y el valor hallado, tomado en sentido contrario del que en dicha hipótesis se indica, resuelve la cuestion." (pp. 66-67).

Hay varias ideas en estos párrafos:

- Las cantidades negativas surgen como resultado de operaciones algebraicas.
- Obtener un valor negativo para una incógnita puede indicar que el problema es imposible; sin embargo, esto puede conllevar a cambiar su planteamiento para poder resolverlo.
- Así mismo, ese valor negativo en la incógnita puede surgir como consecuencia de una falsa hipótesis y, por tanto, se debe invertir

el valor hallado para que, de esta manera, brinde la solución al problema planteado.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.
No hallamos información o explicación a este aspecto en el texto.

TSN13: Otros.
En relación con el valor numérico de un polinomio:
"Es evidente, según lo que precede que los términos de un polinomio que alcancen valores positivos donde quieran se hallen, contribuyen siempre á aumentar el resultado, y los negativos a disminuirlo" (p. 14).

"Debe advertirse tambien que la índole especial de los signos con que se representan las cantidades, y el doble concepto de cantidad y cualidad que se les atribuye, hacen que las definiciones, especialmente de las operaciones directas, dadas en la Aritmética, no sean bastante generales para reducir á su mayor sencillez las transformaciones de que las cantidades algebraicas son capaces." (p. 17).

En la Aritmética hay una clara asociación de las cantidades positivas con aumento (adición) y las cantidades negativas con la disminución (sustracción).

6.7.4 Análisis

6.7.4.1 Revisión histórico-crítica

- ***Número***

Ya hemos indicado en **CCO1** que en el texto analizado no aparece definición alguna al respecto. Sin embargo, el autor indica que el Álgebra trata de las propiedades generales de las operaciones expresadas por medio de símbolos sin valor numérico; de tal forma, el número es la representación de la cantidad, con esto nos aventuramos a inferir que su noción de numero es la de Stevin.

- ***Cantidad***

En **CCO2** hemos visto que las cantidades tienen un valor respecto de la unidad (ó cantidad propiamente dicha) y una cualidad, que es la manera de ser o de influir en el resultado al que se aspira. Se reconoce así una base positivista –relación con la unidad- y fenoménica en las cantidades relativas, de procedencia kantiana. Puede apreciarse en algunos momentos la influencia de las ideas de Rey y Heredia, de quien era contemporáneo. Para el autor las cantidades pueden ser de diversa naturaleza y tener cualquier valor numérico, entero o fraccionario.

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

El texto presenta de manera global la idea de que las cantidades positivas y negativas se definen por relación de unas con otras, son opuestas unas a otras, pero pueden cambiar *cuando muda el objeto en la consideración algebraica*; este carácter positivo o negativo no está predeterminado, sino que dependerá de las consideraciones que se hagan sobre una cantidad determinada y en un contexto específico, como se infiere de los campos **TSN2**, **TSN3** y **TSN4**.

Las cantidades negativas surgen y se presentan como resultado de realizar operaciones algebraicas como consecuencia del planteamiento de ecuaciones para solucionar un problema determinado. Sin embargo, la solución negativa para una incógnita puede ser considerada como falsa y llegar a rechazarse, ya que puede indicar dos cosas: que se ha incurrido en un planteamiento contrario e incorrecto de la hipótesis, o bien que el problema tiene solución si se hacen los ajustes pertinentes en el planteamiento, como se manifiesta en **TSN11**.

Se aprecia en **TSN3** que toda cantidad presenta dos características a saber el valor y la cualidad, esta última es la que determina el sentido positivo o negativo de una cantidad. Pero también, a lo largo de las citas, en especial en **TSN13**, el autor plantea que la noción de positivo está vinculada con la adición aritmética, con la acción de aumentar, mientras que la noción de negativo procede de la resta aritmética, de la acción de disminuir.

A partir de los ejemplos utilizados en **TSN6** se puede ver que las cantidades negativas están presentes en muchas actividades y situaciones cotidianas; por lo tanto, no son desconocidas, sino, al contrario, hay presencia familiar en el entorno diario de las personas.

- ***Otras nociones***

El planteamiento sobre el Álgebra es convencional, como estudio de las propiedades generales de la cantidad y ciencia de la transformación y de las fórmulas. Las nociones que utiliza para incógnita, ecuación, problema, solución, etc. son comunes

6.7.4.2 Análisis conceptual

- ***Conceptos básicos***

Se observa una doble significación para los signos + y –; en primer término, se da un carácter operacional, al ser los indicadores de las operaciones de adición y sustracción. En segundo lugar se les otorga un estatus cualitativo, al determinar estos signos el sentido positivo o negativo de una cantidad a la cual preceden, como se muestra en **TSN1** y **TSN2**. Esta identificación de signos sostiene también una identificación conceptual de positivo con suma y negativo con resta, que se mantiene en el tratamiento de estas cantidades; el carácter relacional y convencional de las nociones de positivo y negativo se desdibuja y predomina la interpretación aritmética, que refuerza la conceptualización de estas cantidades como números relativos.

La consideración hecha en **TSN5** de las cantidades negativas como menores que cero tiene que ver exclusivamente con el resultado aditivo de agregarlas a otra cantidad, es decir, se refiere a que éstas hacen disminuir a otras al *"agregarlas",* incidiendo menos que si no se agregara nada.

Desde las primeras líneas del texto se pone de manifiesto que el Álgebra prescinde de todo valor numérico, con lo cual queda evidente el tratamiento de cantidades generales y, sobre todo, el uso de incógnitas o variables para hallar, expresar y llevar a cabo las operaciones con las cantidades. Se indica que, cuando entran en juego una o varias cantidades desconocidas relacionadas por un signo de igualdad, se trata entonces de las ecuaciones.

- ***Fenomenología/Justificación***

La justificación que se hace de la aparición de las cantidades negativas está en **TSN4** y **TSN11.** Se centra en las operaciones algebraicas y en que el sentido positivo o negativo de una cantidad es relativo; pues depende sólo de la consideración que se haga de ella.

Como afirmamos en **TSN6**, para hacer claridad en el concepto de cantidades negativas, Fernández y Cardín se apoya en mostrar una serie de situaciones cotidianas y posiblemente familiares a los lectores. Estas situaciones relacionadas, por ejemplo, con posiciones de desplazamiento o deudas son claramente de cantidades dirigidas, de magnitudes orientadas con lo cual, se está refiriendo a magnitudes relativas; mientras que, cuando menciona la situación del termómetro y las temperaturas, es una situación que perfectamente se representa en una modelización a través de los números enteros. También en la resolución de problemas plantea cuestiones sobre poblaciones y edades, mediante relaciones y cuestiones de comparación que, igualmente, corresponden a números relativos.

- ***Estructura de orden***

Por medio de **TSN5** y **TSN9** se presenta un orden para las cantidades negativas, tanto entre ellas como con respecto a cero, también se da por conocido el orden entre las cantidades positivas. Se establece indirectamente una comparación de orden entre cantidades positivas y negativas en el estudio de las progresiones aritméticas, según vimos en **TSN9**. la relación de orden es la de los números enteros.

- ***Estructura algebraica***

Pese a que el texto es manifiestamente de álgebra, llama la atención un aspecto que revela la asociación aritmética de las cantidades positivas y negativas; es el hecho de relacionar positivo con aumento (adición) y negativo con disminución (sustracción), tal como comentamos en **TSN13**. Esa relación se potencia en **TSN7** con la definición de las operaciones de suma y resta, ya que:

- Sumar es reunir cantidades que conservan los signos.
- Restar dos cantidades es encontrar una tercera que, sumada con la según da, dé como resultado la primera.
- No se establece la conexión general de la resta con la suma.

Las reglas para establecer el signo del resultado en las operaciones de suma y resta son fundamentalmente sintácticas, derivadas de la definición inicial.

El producto se define mediante una proporción en la que interviene la unidad positiva. No hay justificación ni explicación de esta definición, que se plantea en término formales para establecer la regla de los signos, y, una vez conseguido este objetivo, no vuelve a utilizarse.

El autor no establece relación entre la suma y el producto, si bien trata la propiedad distributiva del producto respecto de la resta.

La noción de ley de composición interna en Fernández Cardín es convencional: las llama operaciones algebraicas, considera que los resultados son cantidades en todos los casos, pero no trabaja con propiedades formales, ni conecta entre sí las distintas operaciones

En los demás ámbitos, el tratamiento que se sigue es algebraico; en los comentarios de **TSN7**, **TSN10**, **TSN11** y **TSN13** se ha puesto de manifiesto esta característica operacional.

- ***Uso algebraico***

Cuando se presenta y explica la regla de los signos para la multiplicación en **TSN7,** utiliza el +1 como base argumental para su definición y para las demostraciones posteriores. La unidad representa lo positivo, la comparación del multiplicador con él determinará el signo resultante en la simplificación.

En **TSN10** se muestran algunos ejemplos de la utilización de las cantidades negativas en operaciones algebraicas. Como se ha comentado en el apartado 6.8.4.1, las cantidades negativas surgen de efectuar tales operaciones e implican un análisis de ellas cuando emergen como posible respuesta a un problema.

Hallamos una postura un tanto contradictoria en el tratamiento de las cantidades negativas cuando analizamos **TSN5** y **TSN13;** pues, en el primero se indica que las cantidades negativas, al ser agregadas a una positiva, las *“aumentan menos”* que si se agregara cero y, sin embargo, en el segundo de estos dos apartados se indica explícitamente que las cantidades negativas (polinomios en ese caso) *“disminuyen”* las cantidades. Es claro que no es lo mismo “*aumentar menos* que *disminuir*”.

6.7.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r*

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: $\mathbf{a_1}$. La atribución de significados, signos y adjetivos a las regiones positiva y negativa por el autor es arbitraria e indeterminada, puesto que en **TSN3** escribe *“[…] Consideradas como positivas las que tienen un modo de ser determinado, serán negativas las que tienen un modo de ser contrario á ellas”*, además en **TSN4** afirma *“Una cantidad bajo el concepto absoluto de cantidad y sin relacion con ninguna cuestion, no es positiva ni negativa”,* no señalándose en ninguno de los casos cuales cantidades son mayores o menores respecto a cero, ni se hace fija la valoración de unas respecto a las otras, sino que se enfatiza el carácter de opuestas entre sí. Esto es un indicio de que está tratando con números naturales relativos.

Segundo indicador: $\mathbf{a_2}$. El orden manifestado para este indicador se refiere a la comparación-valoración global de regiones y tal comparación se efectúa de manera arbitraria e indeterminada, puesto que en **TSN4** se afirma *“las denominaciones de positivo y negativo son puramente relativas y no denotan mayor excelencia ó privilegio de lo primero sobre lo segundo”*; de tal forma se evidencia una comparación desde el campo natural relativo.

Tercer indicador: $\mathbf{a_3}$. La comparación entre medidas con valores numéricos negativos esta presente en **TSN8** *“[...] y por consiguiente que de dos cantidades negativas es menor la que tiene mayor valor absoluto, y al contrario.”* y en **TSN9** *“—100<—20”*, manifestándose así el orden usual entre números enteros negativos.

Cuarto indicador: $\mathbf{a_4}$. El texto de **TSN3** ya señalado en el indicador $\mathbf{a_1}$ permite observar que la comparación de medidas con valores de diferente

* Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

signo o región está en el campo relativo, porque al señalarse el carácter contrario entre esas cantidades o regiones, se implica una desconexión entre tales regiones.

Como balance para esta primera diferencia $\mathbf{D_1}$, sustentamos que hay indicios de un cumplimento para el campo natural relativo.

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador: $\mathbf{b_1}$. El autor otorga a los negativos en **TSN6** significados asociados a los tipos de situaciones modelizadas por los números enteros, como lo son temperaturas y posiciones de móviles en el espacio. La misma situación se observa en **TSN9**, con las progresiones aritméticas *"÷16. 12. 8. 4. 0. –4. –8. …, decreciente cuya razon es –4;"* donde se indica la posibilidad de valores numéricos inferiores y superiores a cero.

Segundo indicador: $\mathbf{b_2}$. Las representaciones utilizadas para los números negativos son simbólica y de tipo matemático como en **TSN11** *"X=–2"* y **TSN9** *"÷16. 12. 8. 4. 0. –4. –8"*, siendo estas conocidas y determinadas para los números enteros (Gozález, p. 222).

Tercer indicador: $\mathbf{b_3}$. En **TSN9** se presenta el ejemplo de una progresión donde las transformaciones resultantes de operar con un valor negativo permiten obtener valores positivos o negativos.

La valoración de esta segunda diferencia $\mathbf{D_2}$ indica que no hay indicios de cumplimiento para el campo natural relativo.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

Los ejemplos se presentan bajo una notación y estructura algebraica, representando en su mayoría los valores negativos de manera literal asumiendo la generalidad de estos; la progresión mostrada en **TSN9** indica la existencia de una continuidad de medidas al cruzar el cero.

Como balance de esta tercera diferencia $\mathbf{D_3}$, afirmamos que ésta no se cumple para el campo natural relativo.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).

No hay evidencias para sostener que Fernández y Cardín trabajase con un doble cero, puesto que los negativos reciben un tratamiento algorítmico y algebraico formal donde no tiene cabida la existencia de dos orígenes, como se ha señalado tanto en la tercera diferencia D_3 como en el indicador b_1 de la segunda.

Consideramos que no se cumple esta cuarta diferencia $\mathbf{D_4}$ para el campo de los números naturales relativos.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

El tratamiento algorítmico y algebraico para las operaciones entre números negativos corresponde al usual para números relativos. En **TSN7** vemos la falta de conexión entre las operaciones suma y resta, la implicación de que restar un positivo es restar mientras que restar un negativo es sumar, en **TSN10** vemos el Corolario que explica como restar un número menor de otro mayor. Todo ello muestra una vinculación clara con las reglas de la anulación compensación, Por tanto afirmamos que se cumple la diferencia **D_5** para el campo natural relativo.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Fernández y Cardin en relación con las diferencias:

*Tabla 6.4 Diferencias entre **Z** y N_r en los Elementos de matemáticas de Fernández y Cardin.*

Autor	**D_1**					**D_2**				**D_3**	**D_4**	**D_5**
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**		**b_1**	**b_2**	**b_3**				
Fernández y Cardin	**Si**	**Si**	**No**	**Si**	Si	**No**	**No**	**No**	No	No	No	**Si**

6.7.6 Tratamiento global de los números negativos en los Elementos de matemáticas.

Los negativos en este libro reciben un tratamiento algebraico convencional, que combina consideraciones aritméticas que asocian lo positivo con aumento y lo negativo con disminución. Se considera de manera sistemática que las cantidades negativas tienen su origen en el resultado de efectuar operaciones aritméticas.

Los fenómenos mediante los cuales se manifiestan los negativos son contables (deudas, haber), físicos (posiciones de desplazamiento, temperaturas) y relaciones de comparación temporales y con cantidades discretas; para ello recurre a representaciones algebraicas, numéricas y lingüísticas.

Los resultados negativos obtenidos como respuesta a la resolución de un sistema de ecuaciones son sometidos a análisis y reflexión si tales ecuaciones se han planteado para solucionar un problema dado.

Fernández Cardín utiliza piezas conceptuales de distinta procedencia. Para la noción de cantidad y de cantidad negativa sigue las ideas relacionales derivadas de Kant y difundidas en España por Rey Heredia y Fernández Vallín y Bustillo; como compañero de profesión de ambos y autor de libros de texto, debió tener fácil acceso a estas ideas, a las que no aporta nada propio. En este caso el planteamiento corresponde a los números relativos.

La relación de orden es la de los números enteros, aunque no la define ni establece en toda su extensión y detalle, como sí hace Feliú. No se deja influir en este caso por las nociones relativas. Las herramientas en las que se sostiene son principalmente la de sucesión aritmética decreciente y la de los logaritmos de la potencias decimales.

La estructura algebraica está escasamente fundada y poco desarrollada. La justificación que hace de las operaciones se sostiene en ideas aritméticas y su principal finalidad está en justificar el signo del resultado de una operación. Detectamos deficiencia en el dominio estructural de los enteros en el texto.

6.8 Teoría transcendental de las cantidades imaginarias (1865)

6.8.1 Autor

José María Rey y Heredia: (*n*. en Córdoba, 1818; *m*. en Córdoba, 1861) (**CA1**). Ingresó en el Seminario conciliar de San Pelagio de la ciudad de Córdoba en 1833, donde cursó estudios durante once años, tres de Filosofía y siete de Sagrada Teología (**CA2**); allí desempeñó, durante los últimos cuatro el cargo de Pasante en la enseñanza de la Filosofía. Además, durante los dos últimos años, ocupó el cargo de Bibliotecario de la Biblioteca Pública Episcopal de Córdoba.

Mediante oposición obtuvo en 1844 el cargo de profesor de Lógica en el Instituto de Ciudad-Real. También ocupó la cátedra de Lógica en Madrid, en 1848 (**CA4**). Mientras ejercía la docencia se licenció en jurisprudencia en la Universidad Central.

Modesto y sencillo, en palabras de su biógrafo, siempre rehuyo la pompa de los grados y el lujo de los títulos académicos; sólo las exigencias de los reglamentos hicieron que tomara los grados de Bachiller en Filosofía en 1846, el de Regente de Psicología y Lógica en 1847. En 1852 fue Bachiller de la Facultad de Jurisprudencia licenciándose en 1854 y en el año 1857 en Filosofía y Letras en la Universidad Central (**CA3**). Todo esto lo realizó mientras ejercía la cátedra en el Instituto del Noviciado (Monlau, 1865).

Fue socio de la Sociedad Económica de Amigos del País y

Académico de la general de Ciencias, Bellas Letras y Nobles Artes de Córdoba (**CA4**). Compartió amistad y trabajo con otros destacados matemáticos de la época como Fernández Vallín y Bustillo (**CA5**). Rey y Heredia recibió el influjo de las doctrinas de Kant, lo que refleja en sus obras, como se ha mencionado en el apartado 2.9.3. Según García de Galdeano (1907) el que tratara de subordinar su obra *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* a la categoría de la cualidad de Kant, le hizo perder el rigor matemático (**CA7**).

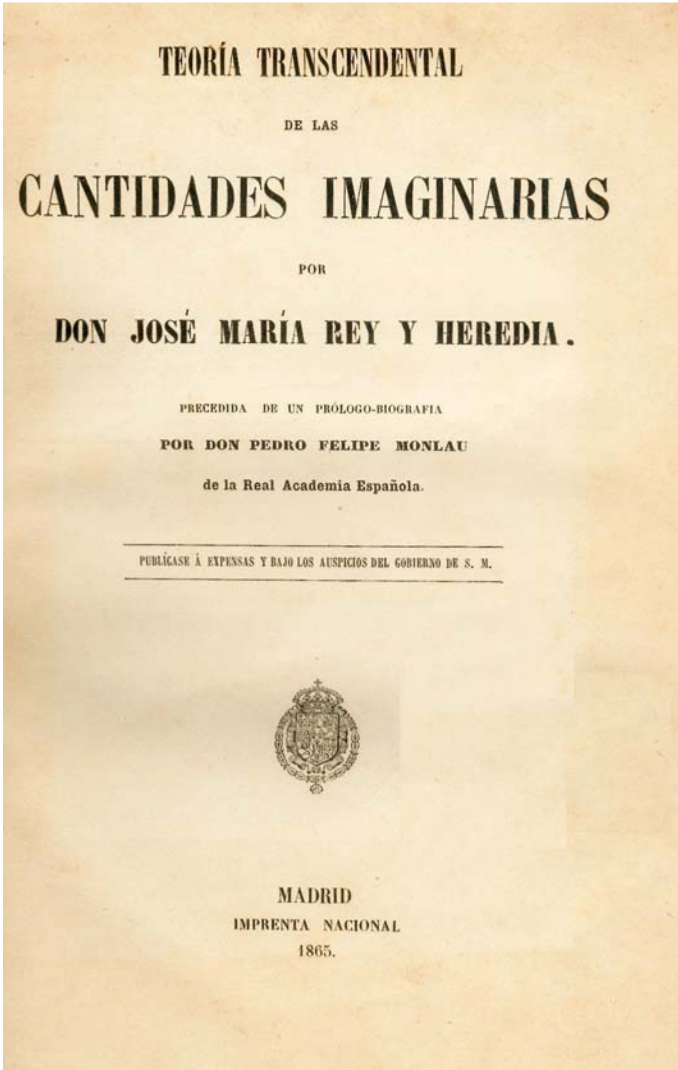
La figura de Rey y Heredia trascendió a los ámbitos filosóficos españoles como lo evidencian las diversas referencias que los historiadores de la filosofía española hacen a él (Fernández-Carvajal, 2003; Méndez Bejarano, 1927; Vidart Schuch, 1866) (**CA7**).

Escribió en compañía de Pedro Felipe Monlau un libro de *Psicología y Lógica* (1849), el cual fue utilizado en la mayor parte de los institutos y colegios del Reino. Este texto fue aprobado por el Real Consejo de Instrucción Pública en 1849; posteriormente publicó *Elementos de ética* (1853), la cual fue considerada *"una verdadera creación para su tiempo, dado el atraso de los estudios filosóficos en España, y parece señalar la transición de la moral kantiana a la del filósofo de Nobitz"* (Menéndez Bejarano, 1827; p. 454). También escribió *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* (1865), la cual fue publicada de manera póstuma (**CA6**).

Se pueden hallar referencias a Rey Heredia y su obra en Monlau (1865), Vidart Schuch (1866), García de Galdeano (1907), Maldonado y García (2002); Méndez Bejarano (1927), Heredia (1989), Escribano (1998) y Fernández-Carvajal (2003) (**CA8**).

6.8.2 Caracterización del texto

Teoría transcendental de las cantidades imaginarias. (1865). Madrid: Imprenta Nacional (**CGO1**, **CGO2**).



TEORÍA TRANSCENDENTAL

DE LAS

CANTIDADES IMAGINARIAS

POR

DON JOSÉ MARÍA REY Y HEREDIA.

PRECEDIDA DE UN PRÓLOGO-BIOGRAFIA

POR DON PEDRO FELIPE MONLAU

de la Real Academia Española.

PUBLÍCASE Á EXPENSAS Y BAJO LOS AUSPICIOS DEL GOBIERNO DE S. M.

MADRID

IMPRENTA NACIONAL

1865.

Antes de iniciar la caracterización de la obra de Rey Heredia conviene que precisemos algunas cuestiones relativas al objeto de nuestro estudio y a la inclusión en la investigación del presente documento.

La *Teoría Trascendental de las Cantidades Imaginarias*, no es un libro de matemáticas al uso. No está dedicado a la Aritmética y al Álgebra como ocurre con el resto de los manuales que venimos estudiando. No es un libro de texto, tampoco es un libro de compilación de los saberes matemáticos de la época. La *Teoría Trascendental* es un libro singular, porque reúne dos características que no tienen los restantes manuales incluidos en este estudio.

En primer lugar, es un libro de creación, con ideas y aportaciones originales de su autor, no en algunos capítulos, sino en todo el plan y desarrollo de la obra, al que incorpora el estudio de la representación de los complejos en el plano, en su forma módulo-argumental, junto con un análisis lógico exhaustivo de los conceptos implicados. Se trata de un producto poco usual entre los matemáticos españoles de la época, interesados en el estudio de algunos problemas, pero no inmersos en una obra original propia, con la extensión y amplitud que tiene el texto que nos ocupa.

En segundo lugar, por tratarse de un libro de filosofía matemática en el sentido más amplio del término, en que tratan de exponerse algunas teorías de la matemática superior –la teoría de los números complejos- a la luz de la filosofía crítica trascendental derivada de Kant.

El esfuerzo de Rey por intervenir en el debate científico de su época para buscar los fundamentos lógicos de los números complejos -lo que él denomina *imaginarismo*- le llevan a estudiar y analizar las nociones de cantidad y cantidad negativa, número y número negativo, a la luz de la doctrina de Kant, casi 100 años después de la publicación de *Crítica de la Razón Pura*.

Estos son los motivos de incluir la *Teoría Trascendental* entre los manuales que analizamos en nuestra investigación. Las aportaciones de Rey son atípicas, por lo inusual en España de trabajos como el suyo; éste libro es uno de los primero que une la originalidad de su perspectiva con la calidad de sus reflexiones. Por eso, aunque su tema central son los números complejos, nos parece indiscutible su inclusión aquí –en tanto que profundiza sobre la naturaleza de los números negativos- y sólo lamentamos no disponer de un mayor fondo de obras similares para haber ampliado nuestra muestra (**CGO7**).

La obra fue reconocida en su época y su edición se hizo por orden administrativa:

> "*Ministerio de Fomento. = Instrucción Pública.= Negociado 4º. = Iltmo. Sr.: Reconocida por el Real Consejo de Instrucción publica, como obra de mérito y digna de publicacion la titulada* TEORÍA TRASCENDENTAL DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS, *que ha dejado inédita D. José María Rey y Heredia, catedrático que fue de Psicologia y Lógica en el Instituto del Noviciado de esta Corte; S. M. La Reina (Q.D.G.) deseando honrar la memoria y singulares dotes de aplicación, ingenio y modestia de dicho*

profesor, ha tenido á bien mandar se imprima y publique bajo los auspicios del Gobierno [...] Madrid 21 de Noviembre de 1861. = Corvera.= Sr. Director general de Instrucción Pública"

Vernet (1989) también destaca la importancia de la obra, señalando que marca un precedente en el estudio de la lógica simbólica en España (**CGO6**).

El texto tiene 343 páginas, además de otras 20 de prólogo escrito por P. F. Monlau, que desarrolla una extensa *noticia biográfica del autor*; las primeras veinte páginas del texto se dedican a la introducción (**CGO3**).

Está dividido en cuatro libros: el libro I lo forman seis capítulos y trata de la naturaleza e interpretación de las cantidades imaginarias; el libro II corresponde a las imaginarias en el algoritmo de la suma, en tres capítulos; el libro III es sobre las cantidades imaginarias en el algoritmo de la "producción", en dos capítulos y el libro IV, sobre las cantidades imaginarias en el algoritmo de la "gradación", en ocho capítulos (**CGO3**).

El objetivo reconocido de este trabajo es mostrar un nuevo concepto de cantidad, basado en ideas de la Lógica trascendental de Kant y en la representación módulo argumental de los números complejos en el plano. Con estas nociones Rey busca la fundamentación formal de las cantidades imaginarias para establecer su naturaleza matemática (**CGO4**).

Uno de los argumentos que encuentra el autor a favor de su hipótesis está en lo que él considera desarrollo del Álgebra, a partir del tratamiento dado a los números negativos, en donde retoma ideas de Kant (Apartado 1.3.3):

"El de las cantidades negativas, consideradas al pronto como imposibles, ó desechadas como inútiles, fue, sin duda la ocasión de los primeros pasos que diera el Álgebra por el buen camino. Los valores negativos no pudieron ser tenidos por verdaderos, ni propios, sin que los analistas reconociesen la cualidad *de las cantidades como un concepto necesario, ó sin que viesen este concepto en toda su pureza y trascendencia, al menos en sus dos categorías antitéticas de realidad y negación, dominando y justificando las soluciones contrarias de los problemas concretos. Desde este momento debió comenzar un nuevo periodo de elevación y grandeza para el Álgebra […] y bien pronto las fórmulas algebráicas tradujeron las relaciones de* magnitud *con igual habilidad que las de* número, *[…] Esta armonización suprema estaba, empero, reservada al Álgebra, la cual, interpretando los resultados negativos, ha comenzado á vislumbrar la realización de su ideal en el entero sometimiento é incorporación definitiva de la Aritmética y de la Geometría á la concepción pura, y, por lo tanto, en la indiferente*

aplicabilidad de sus conceptos á todo número y á toda extensión" (pp. 14-16).

Y subraya la importancia de la representación geométrica de los números en la recta real:

> *"Suponemos tan adelantada la ciencia algebráica […] sólo porque ha realizado en las direcciones opuestas de las rectas la antítesis de lo positivo y lo negativo de los números"* (p. 16).

El Álgebra integra el estudio de las magnitudes con el de los números mediante la incorporación de las cantidades negativas, y amplía el concepto de cantidad a una nueva noción general de cantidad, que Rey considera insuficiente, como ahora veremos.

Las nociones de incógnita y ecuación no aparecen en el glosario y tampoco se encuentran en el índice. El interés que presentan estos conceptos es debido a que la unidad imaginaria, $\sqrt{-1}$, es raíz de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ (**CCO4)**.

En la introducción Rey y Heredia hace una síntesis de las publicaciones más recientes de la época sobre los imaginarios, en ella menciona los planteamientos de Condillac, Wronski, François, Gergonne, Faure, Renouvier, Laplace y Cournot; las obras *Essai sur la philosophie du Calcul* de Vallés, *Transacciones filosóficas* de Buée, *Tratado de la interpretación geométrica de las raíces cuadradas de las cantidades negativas* de John Warren, el *Tratado de álgebra* de George Peacock. En su parte final dedica 12 páginas a la *Crítica de la Razón Pura,* de Kant, particularmente al fragmento de la *lógica transcendental*, así como otras 36 páginas a un amplio glosario (**CGO5**).

En la introducción, Rey y Heredia hace una serie de reflexiones sobre aspectos de la matemática; da gran importancia a los conceptos para interpretar la realidad, al respecto escribe:

> "*A la pura sensibilidad, que no nos daria más que intuiciones ciegas é ininteligibles, se unen los conceptos que por sí mismos serian formas vacias sin el contenido de la intuición*" (p. 7).

Afirma que:

> *"La ciencia matemática es una verdadera metafísica que toma por objeto cosas que no son dadas en la experiencia, pero que al propio tiempo da por fiador á la idealidad de los conceptos, la evidencia y trascendentalidad de las intuiciones puras*" (p. 20).

Prosigue su reflexión indicando que son las cantidades negativas las que determinan el comienzo de la grandeza del Álgebra. Compara las teorías de Descartes y Euclides señalando que con el Álgebra se solucionan cuestiones geométricas y aritméticas con *"la misma universalidad y con idéntica evidencia"*. Estas referencias y reflexiones denotan un conocimiento actualizado del desarrollo de las matemáticas europeas.

También en la Introducción, al discutir la necesidad de un nuevo fundamento para superar las contradicciones de los números imaginarios, Rey plantea la necesidad de revisar la noción de cantidad para incluir en ella a las cantidades imaginarias: *"¿Se ha formado idea cabal de las afecciones o modos de la cantidad?*

Del glosario tomamos su concepto sobre cantidad, recogido de la obra de Kant (CRP, B 106):

> "*es un concepto de las cosas, no es la cosa misma. La cantidad es una categoría fundamental del entendimiento, el cual aplica á las cosas que son su objeto cuando las considera bajo el punto de vista de su unidad ó de su pluralidad, ó de la totalidad que forma la pluralidad de unidades*" (p. 314)(**CCO2**).

Esta noción también la vimos en el Apartado 6.6.4.2, cuando analizamos la obra de Fernández Vallín, quién estudió los trabajos de Rey y Heredia.

Prosigue con una crítica a quienes han adoptado la definición Euleriana de cantidad, la que considera como un simple criterio empírico:

> "*Las categorías de la cantidad son eminentemente matemáticas; y fuera muy conveniente que los que la definen diciendo que es todo lo susceptible de aumento ó disminucion, penetrasen algo más en el juego intelectual de estos conceptos. Lo que pasa ordinariamente por una definicion exacta de la cantidad, no es más que un criterio empírico para conocer cuando una cosa es cantidad, pero no una definicion esencial del objeto de la ciencia matemática*" (p. 315) (**CCO2**).
>
> Además, afirma qué:
> *"las cantidades bajo el puro concepto de cantidad no tienen cualidad"* (p. 30).

Esta referencia puede interpretarse relacionada con lo que nosotros entendemos por números naturales (**CCO3**).

Ahora bien, siendo la preocupación central de Rey las cantidades imaginarias -e, igualmente, las positivas y las negativas- tienen que ir mas allá de la simple consideración de las cantidades absolutas. Así afirma que las cantidades, en general, son portadoras de cualidad:

> *"La cuestión de los imaginarios versa sobre la cualidades del número y de la extensión"* (p. 25). *"Cualidad de las cantidades es aquel modo de ser ó aquella particular afeccion que las hace concurrir de diversa, y aun de opuesta manera á los fines intentados por el cálculo. Las cosas no son objeto del pensamiento matemático solo como* quantas, *sino tambien y muy principalmente como* qualia. *[…] La cualidad es un concepto tan matemático como la cantidad*" (p. 27).

Rey explica que ello es debido, no a nuestras sensaciones, sino a las condiciones de nuestro entendimiento:

> "*No son para nosotros las cosas unas, ni muchas, ni todos, ni partes, ni positivas, ni negativas, porque así las percibimos, sino porque así las concebimos, porque así las juzgamos y entendemos*" (p. 28).

Y continúa con la aplicación de la Lógica trascendental a las matemáticas:

> *"Las categorías de la cantidad intervienen en la formacion de todas las nociones del número, de la unidad, de la pluralidad, de la medida, del múltiplo, de la totalidad, de la fraccion ó parcialidad.*
>
> *Las de la cualidad dan un sentido y una afeccion á las cantidades y juegan en todas las teorias acerca de números positivos, negativos, reales ó imaginarios.*
> *Los de relacion corresponden a los algoritmos, u operaciones en virtud de las cuales unas cantidades engendran á otras […]*
>
> *Y las de la modalidad finalizan la obra distinguiendo en los llamados problemas el diverso valor de las soluciones como posibles ó imposibles, como congruentes ó incongruentes, y como necesarias ó contingentes."* (p. 29).

Ahora bien, como:

> *"Las formas del juicio respecto a la cualidad son: afirmativos, negativos y limitativos;[…] y las categorías de la cantidad son: unidad, pluralidad, totalidad".*

Entonces:

> *"El concepto matemático de las* cantidades positivas *se deriva naturalmente de la función lógica que ejerce el entendimiento en los juicios* afirmativos.*"* (p. 29) .

Sobre el número dice que:

> "*No hay número para el entendimiento si este no forma una cierta totalidad de pluralidad de unidades*" (p. 314).
>
> *"La numeración es […] la síntesis sucesiva de la unidad consigo misma, ó […] la transición de una unidad á otra, para contarlas ó para reducirlas á número"* (pp. 11-12)
>
> *"[...] todo número es una síntesis…"* (p. 31) **(CCO1**).

También estas nociones pueden entenderse en relación con la noción de número natural (**CCO3**).

Los negativos aparecen sistemáticamente, ya que la negación es una de las categorías centrales de la cualidad, que determina a las cantidades reales o imaginarias. El desarrollo del texto gira en torno a las cantidades imaginarias, como indica su titulo; específicamente los negativos aparecen en las reflexiones de la introducción y como preámbulo a la presentación de los números imaginarios, pero sin notación matemática; los negativos también se utilizan como elementos que, en una raíz cuadrada, identifican a una cantidad imaginaria. (**CCO5**).

Los números irracionales se presentan en el glosario como *números sordos* (p. 334) (**CCO6**).

Este texto fue el primer intento español por dar una explicación formal a los números imaginarios a través de una justificación geométrico-algebraica, aunque la argumentación se basa en la categoría de cualidad de Kant (**CGO6**).

6.8.3. Tratamiento dado a los negativos

Estos contenidos se encuentran en la introducción, y responden a planteamientos con base filosófica en Kant.

> **TSN1:** Significado y presentación de los signos + y –.
> *"Los signos + y –, absolutamente arbitrarios, en nada revelan al espíritu la índole de las cantidades á quienes afectan, ni mucho menos la clase de procedimiento en cuya virtud fuera posible deducirlos uno de otro: son signos sin genealogía y sin historia."* (p. 49).

Inicialmente destacamos tres ideas:

- Los signos +/– son arbitrarios.
- Afectan a las cantidades y determinan su cualidad.
- Se relacionan mediante procedimientos.

> "*El signo +, que precede, ó se supone preceder, á toda cantidad, no es comunmente más que la expresion sumatoria ó sintetica que revela otro órden de conceptos que nada tienen de comun con la afeccion ó cualidad*" (p.30).

Cuando se refiere a las cantidades aritméticas, el signo + indica una operación y no tiene que ver con la cualidad.

> *"También hay aquí una confusión nacida del doble uso del signo –, el cual, cuando se emplea, como es costumbre, para indicar la operacion de restar, deja sin signo cualitativo al substraendo, y oculta su verdadera afeccion negativa"* (p. 32).

Se señala que el doble significado del signo – induce a confusiones.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.

> *"Es común práctica […] la de considerar como positivas todas las cantidades mientras no aparezca explícito su carácter substractivo ó negativo. En rigor no hay derecho para llamar positivas las cantidades, sino en cuanto á ellas se refieren las negativas"* (p. 30).
>
> *Con el concepto de cantidades positivas está enlazado estrechamente el de las negativas, que no expresan en suma sino un segundo momento intelectual contrario al primero. Ninguna cantidad, con efecto, merece el título de negativa, si no se refiere á otra positiva. Los juicios de donde nace la categoria de negacion , y que la Lógica llama juicios negativos, son aquellos en que excluimos el concepto del sujeto del concepto del predicado, limtándose, por otra parte, esta exclusion á no poner á aquel dentro de la esfera de este […]*
>
> *Lo negativo es lo opuesto a lo positivo, sin que haya por otra parte en estas denominaciones correlativas otro fundamento que el concepto ó intencion que se propone ó emprende la investigación matemática. De tal manera subsiste la correlación antitética, que las cantidades positivas no vienen á ser más que las verdaderas* negativas de las negativas.*"* (p. 31).

Como vimos en el Apartado 1.3.3 la noción que aquí se maneja es la de cantidad negativa de Kant, basada en la contraposición de cualidades. Lo negativo tiene sentido sólo respecto a algo positivo, es decir, como contrario a lo positivo.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.

> "*Los valores negativos no pudieron ser tenidos por verdaderos, ni propios, sin que los analistas reconociesen la cualidad de las cantidades como un concepto necesario, ó sin que viesen este concepto en toda su pureza y trascendencia, al menos en sus dos categorías*

antitéticas de realidad y negación, dominando y justificando las soluciones contrarias de los problemas concretos" (p. 14).

"El carácter substractivo ó destructor de los números negativos se comprende muy bien, supuesta la contrariedad de concepto cualitativo que los domina; porque si todo número es una síntesis, la de los negativos, en cuanto es contraria á la de los positivos, debe recaer sobre ellos en sentido contrario, realizando el análisis de sus unidades elementales y separándolas en un orden descendente, que es la función regresiva contraria a la progresiva en que son engendrados los positivos.

La índole de las rectas negativas se expresa por una dirección contraria á la de las positivas, partiendo de un comun origen; y para entender bien cómo esto se conforma con la función lógica del juicio, conviene advertir que en las rectas se distinguen dos especies de dirección: una interna, y otra externa. La direccion interna de una recta finita, que es de la que tratamos aquí, siempre es doble, ó positiva y negativa, como referida á la duplicidad necesaria de sus puntos extremos en que puede concebirse el origen, ó la doble manera y opuesto sentido en que la recta puede ser recorrida al hacer la sintesis intuitiva de sus elementos" (p. 31-32).

Hallamos dos nociones primordiales:

Primera: en cuanto números, las cantidades negativas tienen carácter sustractivo ya que realizan el análisis de las unidades separándolas en orden descendente. Esto va justificar que no se puedan comparar los números negativos con los positivos, como veremos más adelante.

Segunda en cuanto magnitudes, las cantidades negativas se sitúan sobre rectas (semirrectas), contrarias a las positivas y con un origen común (0); expresan así un sentido opuesto en el recorrido.

La oposición la establece la cualidad, nunca la síntesis de cualidad y cantidad, por eso las cantidades positivas y las negativas nunca van a ser comparables.

"Las cantidades positivas y negativas que resultan de la relacion directa de un sujeto á la interioridad de un predicado son las llamadas cantidades reales" (p. 37).

"Las cantidades reales positivas, como +A= +1.A, tienen por argumento +1.
En las reales negativas, como –A = –1.A, el argumento es –1" (p. 65).

Las cantidades positivas y negativas para Rey son igualmente reales:

conjuntamente constituyen las cantidades reales.

Su razonamiento principal es que hay cantidades reales e imaginarias; en cada uno de los casos hay cantidades positivas y negativas cuya fundamentación es dicotómica al incluir o excluir a un sujeto de un predicado. Las cantidades positivas y negativas son cantidades relativas (se basan en una adjetivación de opuestos que en este caso se considera que tiene fundamentación lógica).

> **TSN4:** Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
> *"Los juicios de donde nace la categoría de negación y que la Lógica llama juicios negativos, son aquellos en que excluimos el concepto del sujeto del predicado, limitándose, por otra parte, esta exclusion á no poner á aquel dentro de las esfera de este, ó á ver esta esfera como no incluyendo al sujeto en toda su extension lógica, que es lo que llamo su circunscripcion."*
>
> *"La inclusión y la no inclusion constituyen dos funciones tan perfecta y adecuadamente antitéticas, que no admiten término medio ó funcion intermedia posible respecto de los dos conceptos sujeto y predicado; y han de copiar necesariamente esta oposición en las afecciones cualitativas que el entendimiento impone a las cantidades. Lo negativo es lo opuesto á lo positivo, sin que haya por otra parte en estas denominaciones correlativas otro fundamento que el concepto ó intencion en que se propone ó emprende la investigacion matemática"* (p. 31).

Los juicios negativos son aquellos que excluyen al sujeto de la esfera del predicado. Sólo hay juicios negativos, pues, para las proposiciones elementales, que constituyen la lógica de primer orden: *"x cae bajo p"*, *"x no cae bajo p"*, serian +a, –a respectivamente.

> La fundamentación lógica es la base, el resto es convenio:
>
> *"Los algebristas que no se elevan a esta clase de conceptos, suelen explicar la naturaleza de la afeccion negativa por un resultado de la substraccion, que á veces se propone ó intenta, de un numero mayor respecto de otro menor. Pero no advierten que lejos de inferirse aquella cualidad de esta operación, en ella va necesariamente envuelta, aunque no expresada, la naturaleza negativa del substraendo respecto del minuendo. La necesaria oposición de estos términos algorítmicos no puede ser explicada por la indole negativa del resultado, sino que es menester suponerla como una necesidad lógica del entendimiento en la concepcion de ciertas cantidades"* (p. 32).

"Un minuendo no es positivo, sino en cuanto se concibe modificable por la afeccion negativa del sustraendo; una recta no es positiva, sino en cuanto se fija uno de sus extremos como orígen ó punto de referencia de las rectas negativas ó que tienen direccion opuesta" (p. 30).

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.
"Suele también decirse que las cantidades negativas son menores que cero: pero no comprendo cómo pueda esto afirmarse, cuando la calificacion de las cosas como mayores, iguales ó menores, no puede tener sentido sino bajo el concepto de cantidad, y bajo tal concepto no son comparables las cantidades con cero, ó con la nada que no es cantidad. La cualidad negativa que es propia de algunas cantidades es un punto de vista absolutamente diverso del quantum de ellas" (p. 32).

Toda la argumentación que aquí se presenta está dirigida a afirmar que la relación de orden afecta sólo a la cantidad y no a la cualidad y, por tanto, no tiene sentido su uso en las cantidades afectadas de cualidad, es decir, a las cantidades positivas y negativas.

En ambos casos Rey y Heredia considera que no se establece una comparación con cero:

"Las cantidades positivas no son mayores que cero, por la misma razon que las negativas no son menores: el cero no puede ser comparado con la cantidad, porque no es cantidad" (p. 34).

"Si las cantidades negativas fuesen menores que cero, serian con mas razon menores que las positivas, y entonces ¿por qué no se las desprecia, cuando entran en combinacion sumatoria con las positivas; como se desprecia el cero mayor que ellas?
Si la proporcion geométrica ó por cociente

$$a : -a :: -a : a$$

es legítima, como ciertamente lo es, ¿no se seguiria el absurdo de que una cantidad mayor a tuviese con otra menor –a la misma relacion, que esta misma menor, con aquella misma mayor?
Si la cantidad –a es menor que cero, ¿cómo se concilia que sus potencias pares son mayores, y sus potencias impares menores que cero?" (p. 33).

Continúa reflexionando sobre la imposibilidad de establecer comparación entre las cantidades negativas y cero; en parte razona sobre la base de los números complejos en los que no hay relación de orden.

TSN6: Ejemplificación.
"(...) las leguas que anda un viajero hacia Poniente no son ménos largas ó ménos cuantas, que las que anduviera hacia Oriente; y sería absurdo decir que siendo aquellas negativas, el viajero hace menor

jornada que estándose parado: las deudas pueden ser, y son, más ó ménos grandes en sí mismas, segun lo sea el número que lleva esta connotacion concreta de deuda, que no significa mas que lo opuesto al haber” (pp. 32-33).

Segunda opción radical adoptada para los números naturales relativos; la modificación que dota a una cantidad de positiva o negativa es sólo de orden lógico y no afecta a su tamaño, ni por ello al orden.

“Es impropio decir que una población á 40° de latitud tiene mas latitud que la situada debajo del ecuador , que no tiene ninguna. Hasta es contradictorio asegurar que el que tiene 20 reales, tiene mas dinero que el que no tiene ningún dinero” (p. 34).

“Todos los problemas referentes á la fortuna de las personas, versan ordinariamente sobre cantidades ó habidas, ó debidas, siendo muy raro formularlos respecto de cantidades meramente depositadas, y que no afectan directamente al haber ni al deber, y que sin embargo afectan de un modo indirecto á la situacion de un capital.
Si una cantidad positiva representa el haber, y una negativa el deber, una imaginaria debe expresar un depósito” (p. 46).

Rey y Heredia dota de significados relativos a la cantidad positiva y la negativa asociándoles situaciones opuestas, mientras que trata de dotar de significado concreto a la noción de cantidad imaginaria.

TSN7: Regla de los signos.
“Las cantidades positivas no vienen á ser más que las verdaderas negativas de las negativas, ó que serían negativas si las negativas se tomasen como positivas; lo cual explica los resultados de ciertas combinaciones de signos, como

$$+a = -(-a),\ y\ -(+a) = +(-a)\text{''} \quad \text{(p. 31).}$$

Presenta una interpretación lógica de la relación de simetría: la negación de una negación es una afirmación; la negación de una afirmación es como la afirmación de una negación.

Para la suma:
“La suma de cantidades reales puede ser aditiva ó substractiva.
Suma aditiva es aquella que se realiza por una síntesis progresiva (a la derecha ó á la izquierda del punto de origen) de todos los elementos cuantitativos que tienen un mismo signo ó cualidad. Tal es

$$A + B + C + D + E + \&c.$$

ó tambien

$$-A - B - C - D - E - \&c. = -(A + B + C + D + E + \&c.)$$

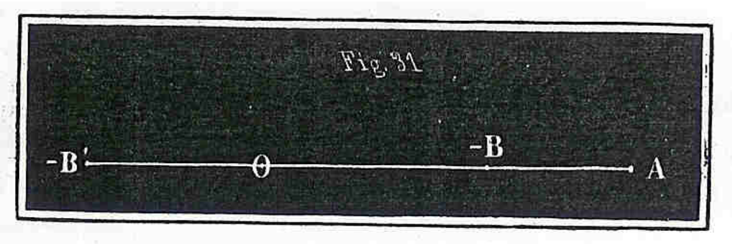
Suma sustractiva es aquella que se realiza por una sintesis regresiva ó *contraria entre los elementos que llevan opuesto signo*

$$A - B$$

y tambien

$$-A + B$$

Suponiendo realizada la síntesis de todos los elementos o unidades de A en un sentido, comienza la síntesis de los elementos ó unidades de B en el sentido opuesto. Esta oposición de direccion de ambas síntesis, es aplicable lo mismo á las cantidades numéricas que á las extensivas.
Si la cantidad A se cuenta como positiva á la derecha de un punto de origen, por ejemplo O (Fig. 31), la substracción ó regreso de B puede expresarse partiendo del último punto en que termina la síntesis de A, y volviendo sobre el mismo A hácia el punto de origen: la resultante sumatoria será aquella parte de A que no quede neutralizada por el influjo regresivo de B ó aquella parte de B (cuando B es mayor que A) que expresa un regreso á la izquierda del punto de origen no neutralizado por la síntesis progresiva de A. En este último caso la resultante sumatoria es negativa.



La substracción puede también expresarse refiriendo cada uno de los elementos de signo contrario al punto de origen y en sentidos opuestos, y considerándolos como dos fuerzas que obran simultáneamente sobre aquel punto, y cuya resultante final sería la diferencia de la mayor sobre la menor referida como positiva ó negativa al mismo origen
La primera de estas expresiones es geométrica, y la segunda dinámica" (p. 88- 89).

La figura representa la diferencia entre valores como anulaciones o compensaciones entre segmentos. Se utiliza una analogía que recuerdan operaciones vectoriales en las leyes de la física dinámica.

Para el producto, comienza afirmando el carácter incompleto de la demostración tradicional, basada en un concepto deficiente de producto, como se explica en **TSN10**.

"La llamada regla de los signos es tan obscura é incomprensible en la demostracion que de ella intentan dar los libros elementales (...)" (p. 117).

La demostración que proporciona se basa en la interpretación geométrica de los números reales como segmentos orientados y de los productos como superficies:

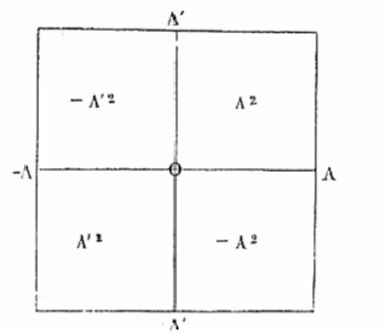
"La afeccion positiva y negativa de los números y de la extensión, está referida á un punto de origen, que es el cero para los números, y el punto matemático (verdadero cero de extension) para las lineas

$$-A \;\overset{0}{\overline{\hspace{8em}}}\; +A$$

Asimismo los productos binarios, sean numéricos ó extensivos, han de estar referidos á dos ejes; para la extension, estos ejes son dos rectas ortogonales que determina en sus cuatro ángulos rectos la afeccion positiva ó negativa de los productos. […] (p. 117).

Esto supuesto, si basta representar por +A y –A la contraria direccion referida á un punto de origen de las rectas cuya magnitud cuantitativa es A; cuando se trata de superficies no sólo habra que considerar la superior é inferior como positiva y negativa respectivamente, sino tambien la de la derecha y la de la izquierda entre sí, puesto que en el plano es posible y necesaria esta doble determinación lineal, representante de la doble dimension que lo constituye. […] (p. 118).

Demos ahora una forma geométrica á la afeccion positiva ó negativa de cualquiera de los dos factores, y veremos la conformidad de esta teoria con los resultados de la contraposicion en la siguiente figura



donde dos factores positivos (que supongo iguales) A x A estarán representados en su tésis, ó posición primitiva factorial por OA, coincidiendo consigo mismo ó superpuesto á si mismo: mas en su antitesis ó contraposicion productiva es menester que uno de ellos tome una posicion normal OA' […] el producto se representará entonces por la superficie A^2, que supongo positiva. Esto quiere decir la regla ordinaria de que la cantidad positiva multiplicada por positiva da un producto positivo, o diciendolo más breve pero menos propiamente:

+ x + = +” (p. 120).

De igual manera, mediante interpretación geométrica de las relaciones lógicas subyacentes, Rey plantea y justifica la regla de los signos para el producto.

Hay un reconocimiento de que las leyes del producto no se pueden justificar con los números relativos.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

Cuando presenta una ejemplificación (ver **TSN9**), utiliza dos rectas para hallar una sucesión ascendente menciona:*“los valores absolutos ó numéricos de todos los términos”*, que utiliza para justificar su planteamiento.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

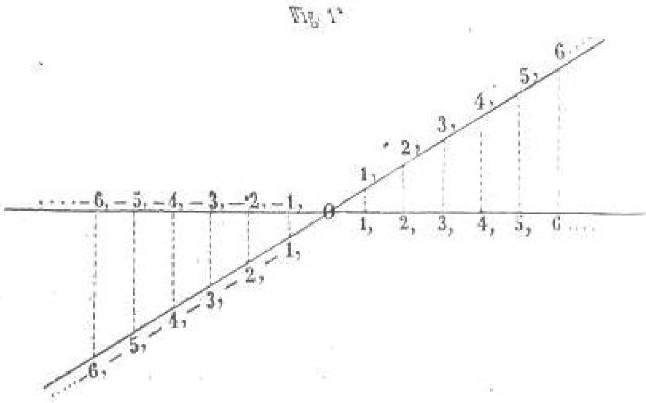
“Si la cantidad –a es menor que cero, ¿cómo se concilia que sus potencias pares son mayores, y sus potencias impares menores que cero?

Contra estas antiguas objeciones de D´Alembert y de Carnot, no vale decir que las cantidades negativas añadidas á las positivas dan una suma menor que si se les añadiese cero; porque esta añadidura ó adicion no es otra cosa que substraccion, y el resultado debe llevar el nombre de resta, y no el de suma.

Ni tampoco es razon bastante la que se deduce de la série natural aritmética

÷.....–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

á la cual erróneamente atribuye Mr. Coyteux el carácter de creciente, cuando no es sino ascendente, explicándose el ascenso uniforme de ella por el decremento cuantitativo de los términos negativos hasta cero, y el incremento de los positivos. Este ascenso progresivo podria representarse de una manera geométrica, haciendo perpendiculares por bajo y por encima de un eje horizontal los valores absolutos ó numéricos de todos los términos: una oblícua que pasase por el punto de orígen, sería el lugar geométrico de todas estas longitudes” (p. 33).



TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

Suma:

"La suma algebraica […] siempre se ha de concebir realizada bajo el doble concepto de la cantidad y de la cualidad de los sumandos. La cantidad y la cualidad radican en nuestro propio entendimiento como formas necesarias de todo pensamiento matemático, y son por lo tanto categorías de universal aplicación á las relaciones de los números y las magnitudes. […]

"Los sumandos han de ser homogéneos […] Es menester distinguir la homogeneidad que depende del concepto empírico […] de la homogeneidad que depende del concepto categórico de cualidad, esto es, lo positivo, lo negativo ó lo imaginario. […] Lo que hace verdaderamente conceptual y algebráica á la suma, es esa doble consideracion de la cantidad y de la cualidad de los sumando, conceptos indefectibles en el Álgebra. Pueden y deben, ser sumadas sincategóricamente las cantidades positivas con las negativas, y unas y otras con las imaginarias" (pp. 86-87).

Producto:

"Si la multiplicacion ó produccion se considera algebraicamente y con entera dependencia de la funcion del entendimiento que por ella se realiza, sostengo que no es un caso particular de la suma, sino una relacion especial entre dos ó mas números que engendran otro numero, un algoritmo propio, esencialmente distinto de la mera aproximacion ó síntesis que relaciona los sumandos en la suma. Los factores de un producto no se relacionan por via de síntesis, sino de antitesis, y están el uno respecto del otro en una perfecta reciprocidad, en virtud de la cual se determina un mismo producto con la repeticion sumatoria de cualquiera de los factores, sirviendo el otro de indice de esta repeticion. […].

La definicion ordinaria que más se aproxima á la verdadera es la que refiere el producto al multiplicando, como el mutiplicador a la unidad. Pero fácilmente se descubre el defecto de esta definicion , observando que *los oficios de multiplicando y multiplicador dependen solo de la significacion concreta que tienen los dos factores en la cuestion particular que se resuelve. El algoritmo algebraico prescinde de estas determinaciones empíricas, y hace indiferente la funcion de los factores, y por lo tanto reciproca y mutua su accion multiplicativa. […] La posicion reciproca de los factores debia excusarnos la demostracion de esa propiedad de que: el orden de su multiplicacion no altera el producto”* (pp. 113-114).

Potencias:
“El tipo mas perfecto de la potenciabilidad, está pues, en lo meramente cualitativo, é independiente de todo concepto de cantidad numérica; y en esto me fundo para afirmar que, lejos de inferirse las reglas de los signos de las potencias y raíces de la que se establece en la multiplicación, debiera, por el contrario, deducirse esta de aquellas; de suerte que:

no es $(-)^2 = +$, *porque* $- x - = +$;

sino $- x - = +$, *porque* $(-)^2 = +$

Las direcciones no se multiplican realmente, sino que se modifican y varían evolucionan y giran sin término” (p. 207).

Asigna a los signos la cualidad de direcciones. Los signos resultantes de la multiplicación tienen su origen en las transformaciones que surgen al ser afectadas o modificadas por la potenciación. Al parecer establece una reciprocidad de propiedades.

TSN11: Interpretación de los resultados obtenidos.
“El carácter substractivo ó, destructor de los números negativos se comprende muy bien, supuesta la contrariedad de concepto cualitativo que los domina; porque si todo número es una síntesis, la de los negativos, en cuanto es contraria á la de los positivos, debe recaer sobre ellos en sentido contrario, realizando el análisis de sus unidades elementales y separándolas en un órden descendente, que es la función regresiva contraria á la progresiva en que son engendrados los positivos” (p. 31).

Los números negativos tienen un carácter sustractivo o *“destructor”,* debido a la cualidad contraria que los determina lógicamente. Las unidades elementales de los negativos se analizan y separan en orden descendente, contrario al orden progresivo o ascendente de los negativos.

“Los algebristas no se elevan á esta clase de conceptos, suelen explicar la naturaleza de la afeccion negativa por un resultado de la sustraccion, que á veces se propone ó intenta, de un número mayor respecto de otro menor” (p. 329.

Aquí hay una crítica a la “simplificación algebraica” que toma los negativos sólo como una sustracción.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

No hay referencias o explicaciones explícitas en el texto sobre este apartado.

TSN13: Otros.

"(...) los signos +, – y $\sqrt{-1}$, son signos de relación y no de cualidad. Ya sabemos que la extremada sencillez (tanta que más es pobreza) del lenguaje algebraico atribuye á estos signos ese doble oficio, de donde proviene no poca obscuridad cuando el cálculo ha de interpretarse con arreglo á ciertos principios superiores" (p. 115).

Aquí realiza una crítica al lenguaje algebraico al atribuir a los signos aislados dobles significados, lo cual, según el autor, genera confusiones, pues estos signos deben interpretarse de acuerdo con reglas establecidas y *"superiores"*

"La índole de las rectas negativas se expresa por una direccion contraria á la de las positivas, partiendo de un comun orígen; y para entender bien cómo esto conforma con la lógica del juicio, conviene advertir que en las rectas se distinguen dos especies de direccion: una interna, y otra externa. La direccion interna de una recta finita, que es de la que tratamos aquí, siempre es doble, ó positiva y negativa, como referida á la duplicidad necesaria de sus puntos extremos en que puede ser recorrida al hacer la síntesis intuitiva de sus elementos. La direccion externa no es más que la posicion que las rectas tienen respecto de otras en un plano ó en el espacio." (pp. 31-329).

En este texto Rey muestra la interpretación de la posición de las cantidades positivas y negativas sobre una misma recta, como resultante de considerar dos semirrectas con el mismo origen y direcciones opuestas, es decir una representación módulo argumental, en el plano complejo, de positivos y negativos, que trata de compatibilizar con la interpretación lógica. Para ello alude a la necesidad de considerar una doble dirección en la recta entera para hacer compatible la representación gráfica con la relación de orden independiente entre cantidades positivas y negativas.

6.8.4 Análisis

6.8.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

En **CCO1** apreciamos un sentido ordinal de número y la presencia del principio de cardinalidad, que muestra una noción bastante avanzada de número, basado en la idea de síntesis sucesiva de la unidad consigo misma.

Apoyándose en la *Lógica trascendental* de Kant, afirma que el juicio es el hilo conductor para encontrar todos los conceptos fundamentales. Dentro de las categorías del juicio que toman parte en la formación de todo número están la cantidad, la cualidad, la relación y la modalidad (p. 29).

- ***Cantidad***

En la Introducción Rey afirma que la aportación histórica del Álgebra ha consistido en integrar el estudio de las magnitudes con el de los números mediante la inclusión de las cantidades negativas. Para nuestro autor la noción de cantidad es muy importante y necesita de su revisión para estudiar las cantidades imaginarias.

La noción de cantidad en Rey es, como se ha dicho, una categoría central de la Lógica trascendental, con tres clases (unidad, pluralidad y totalidad), afectadas a su vez por una forma de juicio cualitativo, con tres tipos también (afirmativos, negativos y limitativos). Esta noción la necesita para interpretar los imaginarios como cantidades de pleno derecho (**CCO2**). Las cantidades en general, afirma, son portadoras de cualidad, lo cual es debido al modo en que entendemos las cosas, y no sólo al modo en que las percibimos. Por este motivo critica la noción euleriana de cantidad, que considera un simple criterio empirista.

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Las cantidades no tienen un carácter preestablecido de positivas o negativas, sino que éste depende de la consideración que de ellas se haga por quien las manipule, como se afirma en **TSN3**.

Se indica en **TSN2** el carácter relacional de la alternativa positivo/ negativo para la cantidades, basado en la contraposición de cualidades, ya establecida por Kant. Lo negativo es el contrario lógico de lo positivo que, a su vez, sólo tiene sentido respecto de lo negativo. Por ello, lo positivo niega la negación, en una conclusión lógica brillante, con implicaciones algebraicas. Un número sólo puede ser negativo cuando se relaciona o compara con otro positivo. Deja claro que cantidades positivas y las negativas son opuestas

En **TSN3** asume que las cantidades negativas son reales, como las positivas reales. La información que aporta Rey y Heredia en este campo es amplia y muy abstracta; vamos a tratar de aclararla.

* Antes de aceptar a las cantidades negativas como verdaderas y propias hubo que reconocer que el concepto de negatividad es necesario.

* Es necesario diferenciar entre negación y realidad, tratando de

proporcionar sentido a las cualidades contrarias en predicados concretos.

* La fundamentación /diferencia entre lo positivo y lo negativo hay que entenderla como de orden lógico: lo positivo incluye a un sujeto en un predicado, lo negativo excluye a ese mismo sujeto del predicado ("X tiene a": $+a \rightarrow$ "X no tiene a": $-a$) , según puede verse en **TSN4**.

* Negativo es lo opuesto a positivo sin otro fundamento que la intención con que se emprende la investigación matemática (en este caso se justifica la aparición de soluciones contrarias en problemas concretos).

* Ambas interpretaciones dan lugar al concepto necesario de contraposición, que fundamenta los negativo.

* Lo substractivo, que aparece con lo negativo, procede de la contrariedad de conceptos en que se sustenta.

* Todo número es una síntesis, que agrega; por contraposición lógica los negativos realizan el análisis de las unidades y las segregan en orden descendente. Esto va justificar que no se puedan comparar los números negativos con los positivos, como veremos más adelante.

* Distingue dos tipos de direcciones en las rectas: interna y externa. La doble dirección interna puede ser positiva o negativa, según la doble manera de recorrer la recta o considerar sus dos sentidos opuestos.

* En cuanto magnitudes, las cantidades negativas se sitúan sobre rectas (semirrectas), contrarias a las positivas y con un origen común (0); expresan así un sentido opuesto en el recorrido.

* Las rectas negativas (semirrectas) se expresan por una dirección contraria a la de las positivas.

* La oposición entre positivas y negativas la establece la cualidad, nunca la síntesis de cualidad y cantidad, por eso las cantidades positivas y las negativas nunca van a ser comparables.

* Rey no considera una fundamentación algebraica estructural y formal de los negativos, sino que trabaja en una profundización lógica del planteamiento clásico de los números relativos.

* Consideradas las cantidades reales como parte de las imaginarias, identifica la noción de positividad en el valor +1, y la negatividad en –1. El autor llama *"su argumento"* a esta identificación.

En **TSN4** muestra que las cantidades negativas surgen del juicio de un sujeto. Su fundamentación es estrictamente lógica y surgen para atender una necesidad intelectual. Los juicios negativos excluyen al sujeto del predicado; inclusión y exclusión son funciones antitéticas, sin valor intermedio posible.

Negativo es lo opuesto a los positivo; no hay otro fundamento lógico. Números y longitudes son positivos o negativos por convención. La justificación de los negativos no está en la sustracción, sino que, por el contrario, es la sustracción la que se fundamenta en la noción de cantidad negativa.

Los planteamientos que hace Rey y Heredia están orientados a mostrar que la interpretación que se haga de negativo o positivo de una cantidad viene dado por la intención con que se inicia la investigación matemática, pues tales calificativos no tienen sentido si no es en la relación de uno con otro. Esto es plenamente coherente con el pensamiento de Kant (1763) sobre las cantidades negativas. Así mismo indica la dificultad que surge de utilizar la misma notación para indicar la sustracción y las cantidades negativas.

6.8.4.2 Análisis básico de contenido

- ***Conceptos básicos***

En **TSN1** afirma que los signos + y – son arbitrarios, afectan a la cualidad de las cantidades y se deducen de procedimientos. En este campo **TSN1** se identifica también la doble consideración del signo menos (–), tanto para indicar la resta como para el carácter de la cantidad.; por ello ocurre que el doble significado del signo – induce a confusiones. También en **TSN13** se subraya el carácter relacional de los signos. La sola presencia de tales símbolos no determina el tipo o la cualidad de una cantidad, ya que cuando expresan operaciones no indican cualidad.

Aunque el autor no lo menciona, las cantidades que utiliza no toman valores enteros exclusivamente, sino que pueden ser fraccionarias e, incluso, irracionales. Si bien los ejemplos que utiliza son de valores enteros, la denominación de cantidades reales para el conjunto de las positivas y negativas corresponde al conjunto de cantidades que implícitamente viene utilizando. Esto no afecta a las reflexiones que hacemos sobre la estructura en que encuadra a los enteros negativos.

En **TSN5** considera que la relación de orden se refiere sólo a la cantidad y no afecta a la cualidad; esto hace que, cuando intervienen *cantidades portadoras de cualidad*, no hay posibilidad de comparar con 0. Por eso, las cantidades, tanto si son positivas o negativas, no son comparables con el cero, así que, tampoco las cantidades negativas son menores que nada, pues dice que la cantidad determinada por la cualidad no es comparable con la nada.

Un aspecto muy interesante también se presenta en **TSN5**: identifica el cero y la nada. Para él, cero no es una cantidad, y tampoco la nada lo es. Hecha tal identificación, Rey y Heredia procede a enfatizar que las cantidades negativas no pueden ser menores que cero o que nada, porque entonces sería cantidades despreciables para la suma. Al situar la base de la relación de orden en la pura cantidad encuentra esta contradicción. Igualmente, encuentra otras incoherencias en las relaciones de proporcionalidad y en las de potenciación.

- ***Fenomenología/Justificación***

Los ejemplos aritméticos que presenta corresponden a situaciones reales y cotidianas. En **TSN6** se apoya en una situación relativa para ilustrar una cantidad negativa. Es curioso observar el modo en que utiliza un sistema de coordenadas, las coordenadas geográficas, para ilustrar la comparación de una cantidad con la cantidad cero.

En el texto brinda una interpretación geométrica para la transición de los valores positivos a los negativos, en el plano complejo, que no hemos querido incluir aquí, que se basa, por una parte en un punto que recorre una semirrecta; y por otra en un segmento que gira sobre el origen, moviéndose sobre la circunferencia unidad, es decir, cambia su posición sin variar su magnitud. En el primer caso los números positivos no pueden disminuir mas de cero ya que sino variaría su argumento; en el segundo caso se pasa de +1 a –1 tomando como valor intermedio la unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$.

- ***Representaciones***

La representación gráfica de los negativos en la recta que propone Rey no es la representación sobre la recta numérica real, sino una representación módulo argumental sobre el plano complejo, en donde todos los negativos se sitúan sobre una semirrecta con origen en 0 y contrapuesta a la recta de los reales positivos, según se vio en **TSN3** y se vuelve a destacar en **TSN13**. Esta semirrecta muestra el carácter de opuestos que tienen los negativos respecto de los positivos y, recíprocamente. También justifica que los negativos y positivos no puedan compararse.

Además de la representación gráfica, Rey utiliza otras representaciones: verbales (lógicas o adjetivadas), numéricas y simbólicas de distintos tipos (literal, compleja, módulo argumental, etc.).

El esfuerzo por integrar los fenómenos cuantitativos: numéricos y de extensión en un mismo concepto, que abarque las cantidades imaginarias, y sobre una base fundamentalmente lógica no se logra. La interpretación módulo argumental, del plano como haz de semirrectas, entra en colisión con la noción de recta real única, y hace fracasar el concepto de Rey.

- ***Estructura de orden***

En el campo **TSN5** niega que ambos tipos de cantidades se puedan comparar con 0; tampoco admite establecer comparación entre ambos tipos de cantidades positivas y negativas, es decir, no se puede establecer una comparación entre ambos órdenes.

Vemos en **TSN9** el planteamiento lógico- geométrico de Rey, que le permite dotar de significado a los números imaginarios, definir e interpretar las operaciones, fracasa en la relación de orden ya que trata de establecer el orden entre los números reales a partir del inexistente orden entre los números complejos, de ahí las contradicciones señaladas en **TSN5**. A esto añade una interpretación de la serie numérica de los enteros como ascendente y no como creciente, para hacer un ajuste *ad hoc* de las evidencias a su teoría.

Rey no está interesado por la relación de orden en los complejos, ya que esta noción es algo que afecta sólo al puro concepto de cantidad; en cuanto se habla de cantidades positivas o de cantidades negativas deja tener sentido la comparación entre ellas o la comparación con 0; cualquier comparación sólo entre positivas o sólo entre negativas, tiene sentido porque podemos olvidar la cualidad y atender únicamente a la cantidad.

Conviene recordar que por la época muchos matemáticos de relieve aún sostenían conceptos similares, como el mismo Rey se encarga de recordarnos cuando presenta las objeciones de D´Alambert para admitir que $-a < 0$. Brinda una interpretación de la secuencia de los números enteros. Afirma que no es una serie creciente, sino ascendente. La doble recta permite visualizar los valores absolutos (esta representación no se realiza en el plano cartesiano).

- ***Estructura algebraica***

En **CCO4** establece que el Álgebra integra el estudio de las magnitudes con el de los números mediante la incorporación de las cantidades negativas. Las nociones de incógnita y ecuación no aparecen en el glosario ni en el índice; el interés que presentan estos conceptos es debido a que – 1 es raíz de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Afirma que el álgebra es una semiótica de la matemática, y por ello impone una serie de leyes para los procedimientos matemáticos.

Cuando afirma que las cosas no son ni positivas ni negativas porque así las percibimos, sino porque así las juzgamos y entendemos (**CCO2**), está proponiendo que tales números son un producto lógico y formal del entendimiento humano. Esto es una primera idea de un producto matemático abstracto, si tomamos en consideración lo expresado acerca del álgebra, como una semiótica matemática que establece una teoría sistemática.

Cuando define la suma para los números reales (positivos y negativos) en **TSN10**, indica que esta operación afecta a la cantidad y a la cualidad, lo que implica homogeneidad de los sumando. Desde un punto de vista lógico sostiene que se puede establecer la suma sincategoremática de las cantidades reales, que comprende todos los casos.

Asimismo realiza una interpretación de la relación de simetría entre negación y afirmación, como comentamos en el campo **TSN7**; reconoce la imposibilidad de justificar la ley de los signos con los números relativos. Desde un punto de vista lógico deriva la relación de oposición entre cantidades:

$$+ a = -(-a), \text{ y que } -(+a) = +(-a).$$

Estas igualdades afirman que todo positivo es simétrico de su simétrico y que restar un positivo equivale a sumar su simétrico.

No obstante, en **TSN11** critica la posible interpretación de la negación como una resta.

También en **TSN7** presenta los diferentes tipos de suma, en donde considera que la resta es una *suma substractiva*, (o suma de simétricos, según la igualdad anterior). Establece e interpreta geométricamente las reglas de las distintas sumas como composición de avances y retrocesos sobre una misma recta, a partir del origen que está en 0, o, de manera dinámica, como composición de fuerzas.

En **TSN10** comienza por destacar que la multiplicación no está lógicamente subordinada a la suma, que se trata de una operación con identidad propia. La interpretación geométrica que hace del producto, como superficie producto de dos segmentos, parece aproximar la noción de producto de Rey a la de producto cartesiano.

Afirma la reciprocidad de los sumandos y la posibilidad de obtener el producto por vía de síntesis, como sumatoria de cada uno de los factores, tantas veces como indique el otro factor. También afirma la propiedad conmutativa y destaca su importancia.

En **TSN7** hemos visto a Rey preocupado por la falta de fundamentación de la regla de los signos y dispuesto a superar esta carencia lógica de los reales. Para ello se propone interpretar el producto como producto cartesiano geométrico y utilizar una interpretación un tanto forzada del signo de una superficie, en el cual ya está implícita la regla que se propone probar. Para justificar la regla de los signos en el producto de cantidades reales, tiene que considerar éstas en el plano complejo, y aún así no cierra la justificación lógica que pretende. En este caso Rey se distancia de la argumentación formal y necesita de un marco complejo para encontrar una justificación, que no tiene nada de sencilla; contradice así su propósito inicial de facilitar una explicación lógicamente comprensible y fácilmente deducible.

- ***Uso algebraico***

Trabaja las potencias de las cantidades reales y discute las expresiones radicales, principalmente cuando dan lugar a expresiones imaginarias. Como el propósito del texto es dar interpretación de las cantidades imaginarias, las cantidades negativas tan sólo son utilizadas como punto de partida para argumentar las imaginarias, así que su uso se limita más que nada a servir de objeto para reflexiones; y en ocasiones, como un número cualquiera para realizar operaciones.

Intenta refutar las objeciones hechas a los negativos por D´Alembert y Carnot sobre el resultado de sumar una cantidad negativa a una positiva como menor que nada, atribuyendo esto a que es una resta y no una suma.

6.8.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r[*]

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1** La atribución de significados y signos que el documento presenta para los negativos es arbitraria e indeterminada, como por ejemplo se deduce de **TSN3**: “*Lo negativo es lo opuesto á lo positivo, sin que*

[*] Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

haya por otra parte en estas denominaciones correlativas otro fundamento que el concepto ó intencion en que se propone ó emprende la investigacion matemática". Se está indicando que es el propósito requerido por el resolutor lo que finalmente atribuye a una cantidad su significado, bien sea positivo o negativo. Esto es una característica del campo numérico relativo.

Segundo indicador: **a_2** Para el autor no es posible establecer la comparación o valoración que se hace entre regiones, pues afirma en TSN4 *"No son para nosotros las cosas unas, ni muchas, ni todos, ni partes, ni positivas, ni negativas, porque así las percibimos, sino porque así las concebimos, porque así las juzgamos y entendemos"*, de tal forma que no existe una asignación de valor determinada para cada región en términos de mayor o menor, sino que es arbitraria e indeterminada para medidas naturales relativas, en el sentido que propone González Marí (1995; p. 215), esto se ve reforzado cuando afirma en **TSN5** *"Si las cantidades fuesen menores que cero, serian con mas razón menores que las positivas, y entonces ¿Por qué no se las desprecia cuando entran en combinación sumatoria con las positivas"*.

Tercer indicador: **a_3**. En la comparación de medidas con valores numéricos negativos hecha en **TSN9**, presenta la progresión aritmética *"….–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,…"*, que no considera expresión de una relación de orden y por ello la llama progresión *ascendente*, pero *no creciente*. Al ilustrar mediante una representación gráfica los valores positivos y negativos los ubica en semirrectas opuestas, pero no unos antes que otros,aún cuando los primeros a estén a la derecha de los otros. Luego estimamos que se presenta este tercer indicador.

La consideración que hace en **TSN5** *"Las cantidades positivas no son mayores que cero, por la misma razon que las negativas no son menores: el cero no puede ser comparado con la cantidad, porque no es cantidad"* señala un orden natural para cada conjunto numérico sin la posibilidad de realizar comparación alguna entre ellos, lo que se considera característico del sistema natural relativo (González, p. 216).

Cuarto indicador: **a_4** Rey y Heredia plantea en **TSN6** un ejemplo para clarificar el significado de una cantidad negativa *"(...) las leguas que anda un viajero hacia Poniente no son ménos largas ó ménos cuantas, que las que anduviera hacia Oriente; y sería absurdo decir que siendo aquellas negativas, el viajero hace menor jornada que estándose parado"* dejando vislumbrar una desconexión entre regiones debido a la inexistencia de términos que den sentido a las comparaciones, pues la que se presenta se apoya en la idea de direcciones opuestas pero con valores naturales a cada lado, correspondiéndose esto al campo de los naturales relativos.

Como balance para esta primera diferencia **D_1**, sustentamos que los números con los cuales trabaja el autor tienen todas las características propias de los números naturales relativos.

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador: **b_1** Como se ha indicado, en **TSN9** no se admiten valores inferiores ni superiores a cero. En **TSN3** establece *La direccion interna de una recta finita, que es de la que tratamos aquí, siempre es doble, ó positiva y negativa, como referida á la duplicidad necesaria de sus puntos extremos en que puede concebirse el origen.* Esta representación grafica de los valores positivos y negativos afirma la existencia de limites inferiores con lo cual se está representando números relativos.

En **TSN2** el autor afirma *"ninguna cantidad, con efecto, merece el titulo de negativa, si no se refiere á otra positiva"* dejando la condición de negativo a la comparación con otra cantidad de sentido opuesto, por tal razón no cabe la existencia de valores inferiores o superiores a cero, pues las cantidades aisladas no son ni positivas o negativas, reflejando esto una naturaleza propia de los números naturales relativos.

Segundo indicador: **b_2** La representación que se utiliza para los negativos es de tipo simbólica y matemática, como en **TSN3** *"En las reales negativas, como –A=–1.A, el argumento es –l"* y **TSN9** *"….–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,…"* siendo esta la usual para los números enteros.

Tercer indicador: **b_3** En **TSN13** hemos hecho mención de una representación gráfica que indica la transformación de una cantidad negativa en otra positiva, moviéndose por la circunferencia unidad y requiriendo una transición por valores imaginarios y también una serie numérica en la que los valores negativos van aumentando hasta transformarse en positivos, por lo que no hay indicios de transformaciones en el campo relativo.

La valoración de esta segunda diferencia **D_2** indica que no hay indicios de cumplimiento para el campo natural relativo.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

Las diversas representaciones gráficas que se presentan en **TSN9** permiten observar que no es posible pasar de la zona de valores negativos a la de valores positivos y viceversa. También el uso de la serie numérica reafirma este hecho.

Sin embargo, en **TSN5** indica que las cantidades negativas ni las positivas son comparables respecto a cero. Esto indica que no tiene sentido pasar de un valor positivo a uno negativo, pues no considera la forma de establecer un orden entre ellos, así que no pueden ser ordenadas una respecto a la otra, por tanto hay una discontinuidad de medidas

Como balance de esta tercera diferencia **D_3**, afirmamos que se cumple para el campo natural relativo.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).

En **TSN13** se observan varias gráficas, las cuales permiten concluir que se hace uso de un cero único, esto es, el cero como referencia central, lo cual es característico de los números enteros. No obstante, como se ha señalado en la tercera diferencia, la alusión hecha al orden **TSN5** *"[…] no son comparables las cantidades con cero, ó con la nada que no es cantidad"* implicando con ello la existencia de un doble cero, uno para el inicio de la serie numérica positiva y otro para la negativa. De tal manera, afirmamos que en esta cuarta diferencia **D_4** se evidencia un cumplimiento parcial para el campo natural relativo.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

En **TSN13** se ilustra mediante una gráfica la suma de cantidades "reales" en la que se evidencia el uso de la anulación compensación así como la adición natural, por lo que afirmamos que esta quinta diferencia **D_5** se cumple para el campo natural relativo.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Rey y Heredia en relación con las diferencias:

Tabla 6.4 Diferencias entre ***Z*** *y* ***N_r*** *en la Teoría transcendental de Rey y Heredia.*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
Rey y Heredia	**Si**	**Si**	**P**	**Si**	Si	**P**	**No**	**No**	No	Si	P	Si

6.8.6 Tratamiento global de los negativos en la Teoría transcendental de las cantidades imaginarias

En este texto se trata de poner de manifiesto que hay cantidades relacionadas con situaciones cotidianas, que sólo pueden ser expresadas mediante la cualidad de las mismas; sin embargo, es consciente de que existen otras cantidades bajo el puro concepto de cantidad que no tienen cualidad. Las primeras corresponderían a los números naturales relativos.

En tal sentido, se trata lo negativo como lo opuesto a lo positivo, basándose en la idea de parejas opuestas como añadir/quitar, avanzar/retoceder, etc.

Para mostrar los números negativos se utilizan representaciones gráficas, numéricas, algebraicas y verbales.

El autor no acepta la existencia autónoma de las cantidades negativas sino que estas sólo pueden serlo en relación con otra positiva. Se asume la diferencia existente entre el signo menos (—) y el menos que acompaña a una cantidad negativa (—A), señalando la confusión que origina esta dualidad del menos.

En general el autor utiliza en este texto a los números negativos como argumento para efectuar analogías entre ellos y los números negativos con respecto a su naturaleza, tratamiento y sus operaciones para lograr una “formalización” y aceptación de estos últimos.

Aún cuando su interés principal no esté en los números enteros, sí utiliza con extensión y profundidad las que llama “cantidades reales”, que proporcionan suficientes datos sobre el modo de conceptualizar la estructura en la que se incardinan los negativos.

Rey Heredia pone de manifiesto, llevando hasta el extremo las consecuencias lógicas del tratamiento cualitativo de las cantidades negativas, que la fundamentación lógica de Kant es una elaboración formal bastante coherente para los naturales relativos.

La crisis se produce con la relación de orden, para la que no encuentra una explicación en la Lógica trascendental de Kant, y queda subsumida por las dificultades de la relación de orden en el campo de los complejos.

Desde el punto de vista estructural no resuelve el problema de la regla de los signos y, aún cuando es consciente de la necesidad de fundamentar la multiplicación de manera independiente a la suma, y avanza una interpretación de producto cartesiano para justificar el producto de cantidades, no termina de lograr este propósito.

6.9 Los documentos

Los textos estudiados son: *Curso completo de matemáticas puras* (1827), de José de Odriozola; *Tratado elemental de matemáticas. Para el uso del Colegio General Militar. Tomo II* (1847), de Jacinto Feliú de la Peña; *Elementos de matemáticas. Aritmética y Álgebra. Geometría y Trigonometría Rectilínea y*

Esférica. Nociones de Topografía (1857), de Acisclo Fernández Vallín y Bustillo; *Elementos de matemáticas. Álgebra* (1858), de Joaquín María Fernández y Cardín; *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* (1865), de José María Rey y Heredia.

El periodo Romántico, que abarca seis décadas, lo hemos estructurado en tres etapas desde el punto de vista político y social. De la primera etapa estudiamos un texto, el de Odriozola. En la segunda etapa, que comprende algo más de tres décadas, hemos elegido los cuatro textos restantes. Para la tercera etapa, la más corta e intensa políticamente, no hemos encontrado ningún manual representativo. La elección de dos textos editados en años consecutivos, los de Fernández Vallín y Bustillo y de Fernández Cardín, se justifica por la difusión que tuvieron y las diferencias entre ambos, que presentan dos modos distintos de entender la enseñanza del álgebra en estos años. Hay que considerar la intensificación en la publicación de libros durante la década de los cincuenta, años en los que se llevan a cabo reformas educativas en secundaria y en la universidad, y se promueve la revisión y edición de nuevos libros de texto.

Autores relevantes de este periodo son también Juan de Cortázar y Diego Terrero, cuyas obras -*Tratado de Álgebra Elemental* (1844) y *Lecciones de Aritmética y Álgebra elemental* (1866)-, respectivamente, también hemos analizado, pero que finalmente no hemos considerado de interés para su inclusión en este estudio.

Hemos trabajado, pues, cinco textos distintos para presentar la enseñanza de los números negativos en España a lo largo de seis décadas, las comprendidas entre 1815 y 1874. Estos libros reflejan que el trabajo y el conocimiento matemático de los autores es acorde con las ideas, las condiciones institucionales y el desarrollo intelectual de la época.

De los cinco manuales, cuatro de ellos están escritos para su uso como libros de texto. Dos para la enseñanza secundaria y otros dos fueron escritos expresamente para la enseñanza militar, sin embargo, en el caso de Odriozola su texto también transcendió al ámbito educativo civil.

De los cuatro manuales escolares dos tienen un contenido de Aritmética y Álgebra, y los otros dos se centran en Álgebra; por ello su aproximación a los números negativos tiene amplitud diferente. Los cuatro manuales expresan con sus títulos: *Elementos, Curso completo y Tratado elemental,* la pretensión de abarcar las partes más importantes del álgebra elemental del momento. Con carácter general, estos libros tratan y estudian las expresiones algebraicas, sus tipos y operaciones -suma, resta, producto, división, potenciación y radicación- en primer término. En segundo término, tratan de las ecuaciones, métodos de resolución, desarrollos y resolución de problemas, de mayor o menor complejidad.

Por el contrario, el libro de Rey es un libro teórico, donde se plantean nuevas nociones y se desarrolla una nueva interpretación de los números complejos con la ambición de encontrar, desde un planteamiento filosófico, respuesta a problema teóricos de los conjuntos numéricos. Es, pues, un libro para pensadores y expertos en matemáticas. La diferencia es importante: cuatro de los manuales son libros de divulgación, más o menos actualizados, pero sin pretensiones de originalidad conceptual, mientras que el quinto presenta resultados de investigación, donde el autor trata de sustentar filosóficamente una nueva interpretación teórica de los complejos; es un libro original de matemáticas, escrito para matemáticos, con resultados del propio autor.

Todos los libros están escritos con lenguaje formal y en términos modernos, de forma rigurosa y con propósitos pedagógicos.

Vea (1995) afirma que la obra de Odriozola, para la época, viene a equivaler a los *Principios de matemáticas* de Bails, pues pretende compilar todos los conocimientos matemáticos de entonces, aunque está dirigida a la instrucción secundaria. Este autor pone de manifiesto en el texto los principios positivistas en que se fundamenta.

Fernández Vallín y Bustillo reflexiona en un capítulo preliminar sobre los supuestos filosóficos racionalistas e idealistas en que va a basar su tratado. Fernández Cardín destaca como seguidor del krausismo y el positivismo. Ambos autores son asturianos y están influidos por las ideas y proyectos de Jovellanos. Con mucha mayor extensión y profundidad, Rey Heredia dedica parte considerable de su libro a presentar un extracto de la *Critica de la razón pura* y a exponer, mediante un Glosario, los supuestos kantianos que sustentan su trabajo.

A diferencia de los autores del siglo XVIII, quienes indicaban claramente las fuentes que seguían, en el siglo XIX estas referencias son escasas o inexistentes. De los textos analizados el de Fernández Vallín y Bustillo ofrece un amplio listado de referencias; el de Rey y Heredia también las ofrece, aunque en menor medida.

Un aspecto destacable en estas obras, con la excepción de Feliú, es la numerosa presencia de ejemplos concretos e ilustrativos de los conceptos. Sin embargo el texto de Feliú aporta contenidos que no corresponden al nivel la enseñanza secundaria, como lo son la descomposición en fracciones simples o las funciones exponencial y logarítmica.

Queremos resaltar la obra de Rey y Heredia porque es la única que presenta aportaciones propias, algo inusual entre los autores españoles, tanto en el plan de la obra como en su desarrollo.

Los cinco trabajos está realizados por funcionarios del Estado, los dos primeros profesores de Academias y otros centros de formación militar, los tres últimos son Catedráticos de Instituto por oposición.

Los dos primeros son contemporáneos, nacen a finales del siglo XVIII, viven la Guerra de la Independencia en su juventud y valoran la importancia de una buena formación científica en el mundo militar. Ambos son miembros de instituciones regladas, ejercito y orden religiosa; contribuyen a la mejora de la formación intelectual de los jóvenes de su tiempo. Los textos de estos autores son extensos, de algo más de 500 páginas, pero su organización y estructura es diferente, como se ha visto en 6.4 y 6.5, respectivamente.

Los tres últimos también son contemporáneos, nacen a mediados del reinado de Fernando VII y su juventud transcurre en pleno periodo liberal. Son jóvenes brillantes, que se incorporan pronto a los nuevos Institutos de Secundaria y trabajan arduamente para mejorar el nivel de sus estudiantes. Están comprometidos con las ideas filosóficas de su época y participan de la vida política local y nacional. Rey Heredia es el más profundo y también quien antes se malogra, dejando una breve pero importante obra para su época. Los otros dos autores alcanzan casi el final de siglo y en su madurez contribuyen a mantener y elevar el nivel científico de los centros de secundaria.

6.10 Análisis conceptual de los negativos en el periodo romántico

Sintetizando los análisis básicos realizados en cada una de las obras, abordamos el análisis conceptual conjunto de los textos seleccionados en el periodo Romántico; para ello nos basamos en las nociones de Número, Cantidad y Cantidad Negativa, cuya diversidad de significados ya presentamos en el Apartado 3.1.2.

6.10.1 Concepto de Número

Estos autores en sus obras continúan con una noción relacional de número e inician el uso de la noción de cardinal en un contexto preconjuntista. Feliú y Fernández y Cardín no señalan expresamente en los textos analizados la noción de número que trabajan, pues remiten al Tomo I de sus obras, los cuales no hemos podido localizar; sin embargo el tratamiento dado a otros conceptos relacionados permiten identificar sus nociones de número.

Tabla 6.6 Noción de número utilizada por los autores del periodo Romántico

Autor	Noción relacional	Noción cardinal o preconjuntista	Noción inductiva
José de Odriozola	X		
Jacinto Feliú	X		
A. Fernández Vallín y Bustillo	X	X	
Joaquín Mª Fernández y Cardín	X	?	
José Mª Rey y Heredia		X	X

El planteamiento más moderno es el de Rey y Heredia que se sitúa en una noción inductiva de número natural, donde cada término se obtiene, de manera recurrente, *por síntesis sucesiva de la unidad consigo misma.* Se aprecia cierta continuidad con el periodo Ilustrado y la presencia, por vez primera, de un planteamiento inductivo para caracterizar los números naturales.

6.10.2 Concepto de Cantidad

Para el concepto de cantidad, Odriozola y Feliú se sustentan en la noción euleriana, acompañada de una serie de principios lógicos para el trabajo con cantidades. Fernández Vallín proporciona una noción más amplia, que incluye la noción kantiana. Rey Heredia desarrolla todo su tratado basado en la Lógica Trascendental de Kant, de ahí que su planteamiento sobre la noción de cantidad sea de base fenoménica. Finalmente Fernández Cardín sobre la base de una noción kantiana parece avanzar cierto planteamiento positivista.

Tabla 6.7 Nociones de cantidad utilizadas durante el periodo Romántico.

Autor	Noción de Euler	Noción Fenoménica	Noción Positivista
José de Odriozola	X		
Jacinto Feliú	X		
A. Fernández Vallín y Bustillo	X	X	
Joaquín Mª Fernández y Cardín		X	X
José Mª Rey y Heredia		X	

En este periodo se aprecia una preocupación por el fundamento filosófico de la noción de cantidad. Los planteamientos de los distintos autores vienen acompañados por reflexiones filosóficas, expresadas en forma de principios o por citas detalladas de Kant. Hay una progresión de la noción euleriana a la fenomenológica; sólo secundariamente parecen avanzarse planteamientos positivistas. No encontramos referencias de la noción aristotélica.

6.10.3 Cantidades positivas y negativas

Odriozola considera las cantidades negativas como expresión *de una cantidad faltante*, y surgen como resultados de operaciones aritméticas. Feliú presenta las cantidades negativas como cantidades relativas, que proceden de las relaciones entre cantidades. Igualmente hace surgir la secuencia de los negativos como resultado de mantener fijo el minuendo de una resta e ir aumentando el sustraendo; es decir, las cantidades negativas proceden de operaciones aritméticas. Con mayor o menor complejidad conceptual Vallín y Bustillo, Fernández Cardín y Rey señalan el carácter relativo de las cantidades negativas, insistiendo que se trata de cantidades reales determinadas por un valor cualitativo y otro cuantitativo. Rey profundiza más en esta idea y hace coincidir la formulación de una cantidad negativa con su expresión módulo- argumental, propia de los números complejos. Finalmente, la presencia de soluciones negativas en la resolución de una ecuación marca el carácter algebraico de estas cantidades.

Tabla 6.8 Nociones de cantidad negativa

Autor	Cantidades que faltan	Resultado operaciones Aritméticas	Magnitudes relativas	Consideración módulo-argumental	Resultado operaciones algebraicas
José de Odriozola	X	X			
Jacinto Feliú		X	X		
A. Fernández Vallín y Bustillo		X	X		X
J. Fernández y Cardín			*X*		X
José Mª Rey y Heredia			*X*	X	

Apreciamos en este periodo la consideración de las cantidades negativas como magnitudes relativas, la insistencia en el carácter real de las cantidades enteras y el esfuerzo por dotar a esta noción de contenido formal propio, en especial mediante la notación módulo argumental. Los autores de comienzo del periodo emplean la construcción euleriana de restas con minuendo menor que sustraendo; posteriormente, se destaca el origen de estas cantidades como resultado de resolver ecuaciones algebraicas.

6.11 Análisis de Contenido

Llevamos a cabo el análisis de contenido de los autores estudiados en este periodo atendiendo a la estructura conceptual, la fenomenología, los problemas planteados y los sistemas de representación utilizados, según indicamos en el Apartado 1.9.

6.11.1 Estructura conceptual

Retomamos los seis puntos planteados para estudiar la estructura conceptual:

- Nociones básicas. Números enteros
- Definición de suma de números enteros
- Estructura aditiva del conjunto de los enteros
- Relación de orden entre los enteros
- Definición del producto de números enteros
- Estructura multiplicativa del conjunto de los números enteros

Nociones básicas. Números enteros

Tabla 6.9 Nociones básicas y concepto de entero

Autor	Signos como acciones	Signos como operaciones	Signos como relaciones	Signos como oposición	Presencia de la secuencia de los enteros	Consideración de cantidades enteras en general
José de Odriozola	X	X	X			
Jacinto Feliú	X	X	X		X	
Fernández Vallín y Bustillo		X		X		X
Fernández y Cardín	X	X		X		
José Mª Rey y Heredia		X		X	X	X

Tres autores destacan el significado de los signos como acciones y otros tres el significado como expresión de una oposición. Vallín y Bustillo y Rey señalan que esta oposición es de carácter lógico, con lo cual el fundamento de los signos es formal, mientras que, cuando se destacan los signos como acciones, parece subrayarse un fundamento empírico, consideración que parece compartir los tres autores restantes.

Todos los autores reconocen el significado operatorio usual de los signos + y –.

La secuencia de los enteros, construida según el sistema de restas sucesivas de Euler se presenta sólo en Feliz y Rey. La consideración de las cantidades enteras como cantidades reales la sustentan Vallín y Bustillo y Rey.

Definición de la suma de enteros

Tabla 6.10 Suma de enteros

Autor	Justif. Aritmética	Justif. Algebraica	Justif. Geométrica	Presencia de la anulación compensación	Reglas propias para la resta	Resta como caso de la suma
José de Odriozola	X			X	X	
Jacinto Feliú		X		X	X	X
Fernández Vallín y Bustillo		X		X	X	X
J. Fernández y Cardín		X		X		
José Rey y Heredia			X	X		X

La presencia de la anulación/ compensación se encuentra en todos los autores, lo cual muestra la fuerza de los números relativos, presente en todos los autores de este periodo. Hay un avance desde la justificación aritmética de la operación hasta su justificación algebraica, con utilización de ejemplos numéricos en algunos casos. Hay autores que incorporan la resta como caso particular de la suma –restar una cantidad es sumar su opuesta-, con distintas variantes. Sin embargo, esto no excluye la necesidad que sienten algunos autores por enunciar una reglas propias para la resta.

El tratamiento de Rey es singular, ya que la justificación que proporciona a la suma de enteros tiene base Geométrica, lo cual le permite también reducir la resta a un caso particular de la suma. Rey discute las ideas de D'Alambert sobre el resultado de sumar una cantidad positiva con otra negativa.

Estructura aditiva

Feliú, Vallín y Bustillo y Fernández Cardín consideran explícitamente que la suma y la resta de cantidades enteras son leyes internas; esta consideración también está presente en Rey. Ninguno de los autores hace referencia a las propiedades formales de las operaciones de suma y resta.

Salvo en el caso de Rey, todos los autores consideran expresamente los negativos como soluciones posibles de las ecuaciones y trabajan con valores negativos atendiendo a las reglas y propiedades conocidas de sus operaciones. Odriozola y Fernández Cardín recomiendan interpretar los resultados negativos que se obtienen al resolver un problema mediante una ecuación.

Orden entre los enteros

El orden está en estrecha relación con la conceptualización del número negativo. Todos los autores conocen y utilizan la noción de valor absoluto. Se aprecia un avance importante en los autores de este periodo respecto a los del periodo anterior, puesto que en éste la mayoría considera el orden para los números enteros cuando opera o se refiere a los negativos estableciendo incluso algunos el orden entero.

Rey y Heredia presenta el orden entre los negativos como el orden entre los enteros y hace lo mismo para los positivos, pero no efectúa ninguna mención a cómo son los unos respectos a los otros en términos del orden, debido a su peculiar interpretación de los negativos como complejos, que presentamos en el Apartado 6.8.4.

Tabla 6.11 Relación de orden utilizada.

Autor	Valor absoluto	Orden entre cantidades positivas y entre negativas pero no son comparables entre sí	Orden y comparación entre positivos y negativos	Orden entero
José de Odriozola	X			X
Jacinto Feliz	X			X
A. Fernández Vallín y Bustillo	X	X		
Joaquín Mª Fernández y Cardín	X		X	
José Mª Rey y Heredia	X	X		

Como se mencionó en el apartado 6.5.4.2, Feliú utiliza el concepto de relación de orden para definir las cantidades infinitas.

Definición del producto

Tabla 6.12 Producto de enteros

Autor	Interpretación del carácter relativo del multiplicador	Multiplicador igual a la unidad	Justificación algebraica
José de Odriozola			X
Jacinto Feliú		X	
A. Fernández Vallín y Bustillo	X		
J. Fernández y Cardín		X	
José Mª Rey y Heredia			X

En tres casos se interpreta el resultado en términos del carácter relativo del multiplicador, aunque en dos de ellos se reduce dicho multiplicador a la unidad. En otros dos casos se procede a la justificación algebraica del producto, Odriozola mediante identidades algebraicas; Rey mediante su interpretación módulo argumental de los enteros.

Estructura multiplicativa

Ninguno de estos autores considera explícitamente las propiedades de la operación producto.

***6.11.2 Fenomenología*:**

Los autores analizados toman situaciones de su entorno cotidiano así como de tipo matemático que se modelizan a través de los números negativos; se distinguen tres tipologías de fenómenos en los textos:

- ***Fenómenos físicos:*** parece que estos ofrecen una opción para mostrar la presencia de los números negativos en situaciones de familiaridad para los alumnos; se manifiestan dos clases:
  a) Desplazamientos (avances, retrocesos; e.g. Fernández y Cardín, Feliú y Fernández Vallín y Bustillo).
  b) Temperaturas (e.g. Fernández Vallín y Bustillo y Fernández y Cardín).

- ***Fenómenos contables:*** están relacionados con el manejo de capitales mediante la relación debe-haber o deudas y ganancias (e.g. Odriozola, Fernández Vallín y Bustillo y Fernández y Cardín).

- ***Fenómenos matemáticos:*** se recurre a los objetos del mundo matemático para ilustrar los negativos por medio de:
  a) Comparaciones (a través de la relación de orden < ó >, e.g. Odriozola y Fernández Vallín y Bustillo).
  b) Operaciones aritméticas (a través de adiciones, e.g. Feliú),
  c) Operaciones algebraicas (e.g. Odriozola y Feliú).
  d) Secuencias numéricas (e.g. Fernández y Cardín).
  e) Representaciones geométricas (eg. Rey y Heredia).

6.11.3 Problemas planteados:

Odriozola, Feliú, Fernández Vallín y Bustillo y Fernández Cardín dedican varios capítulos o lecciones a plantear y resolver problemas de ecuaciones o sistemas de ecuaciones de primer y segundo, proponiendo ejemplos y aplicaciones. El carácter de manuales escolares de sus obras hace que la presencia y diversidad de problemas sea obligada. No ocurre así con el libro de Rey, que es puramente teórico.

Los problemas que se plantean son, en general, muy similares entre sí; éstos conciernen a diversas situaciones, requieren del planteamiento algebraico para su solución y su objetivo es de tipo didáctico para la comprensión de los conceptos estudiados.

6.11.4 Representaciones:

La variedad de situaciones utilizadas hace necesario que estén presentes diversos sistemas de representación para los negativos; éstos son:

- ***Verbales*** (explicaciones lógicas o adjetivadas; eg. Rey y Heredia, explicaciones retóricas; e.g. Feliú).
- ***Numéricos*** (números y signos; e.g. Odriozola, Feliú, Fernández Vallín y Bustillo, Rey y Heredia y Fernández y Cardín).
- ***Algebraicos*** (letras, números y signos; e.g. Odriozola, Feliú, Fernández Vallin y Bustillo y Fernández y Cardín).
- ***Gráficos*** (líneas; eg. Fernández Vallín y Bustillo y Rey y Heredia).
- ***Módulo Argumental*** (eg Rey Heredia: Interpretación de las cantidades negativas como números complejos).

6.12 Números relativos

El análisis de las diferencias entre la estructura de los números enteros y los números naturales relativos (González Marí, 1995) arroja los siguientes resultados:

*Tabla 6.13 Comparación de autores y diferencias entre **Z** y **N_r**.*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
J. Odiozola	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	P
J. Feliz	No	No	No	No	No	P	P	No	P	No	No	Sí
A. Fernández Vallín y Bustillo	P	No	No	No	P	No	No	No	No	No	No	P
J. Fernández y Cardín	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No	No	No	No	No	No	Sí
J. Rey y Heredia	Sí	Sí	P	Sí	Sí	P	No	No	No	Sí	P	Sí

Sí =se cumple la diferencia en el campo de los números naturales relativos; No =la diferencia no se cumple en el campo de los relativos; ¿?=no hay evidencias de una u otra estructura; P = cumplimiento parcial de la diferencia en el campo de los naturales relativos.

Los resultados que presenta la tabla anterior permiten señalar:

En la primera diferencia **D_1**: Orden total-orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa se confirma:

El indicador **a_1**, *Atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones*, se cumple en dos de los autores y de manera parcial en un tercero; esto es muestra de que se recurre en parte a esta atribución de tipo relativo para explicar los negativos.

El segundo indicador, **a_2**, *Comparación-valoración global de las regiones*, está presente sólo en dos de los autores por lo que no hay suficientes indicios para confirmar o rechazar su presencia generalizada

Para el tercer indicador, **a_3**, *Comparación de medidas con valores numéricos negativos en el orden entre enteros y naturales relativos*, no se manifiesta en cuatro de los autores, por lo que el orden no se corresponde con el de los relativos.

La presencia del cuarto indicador, **a_4**, *Comparación de medidas con valores numéricos negativos (inversión en el orden entre enteros y naturales relativos),* solo se evidencia en tres de los autores, lo que no es indicio suficiente para confirmar o rechazar el cumplimiento de forma generalizada de este indicador.

De manera individual, la diferencia **D_1** se identifica en Joaquín María Fernández y Cardín y José Maria Rey y Heredia; no se reconoce en José de Odriozola, Jacinto Feliú, mientras que en Acisclo Fernández Vallín y Bustillo se reconoce parcialmente.

Sin embargo, como hemos visto en el Apartado 6.11.1 al estudiar el tratamiento dado a la relación de orden en este periodo, Fernández Cardín considera finalmente el orden entero como ya vimos en el Apartado 6.7.4.2, aún cuando proporcione indicadores parciales en que trabaja con el orden relativo. Ya indicamos en 6.7.5 y 6.7.6 que es la distinta procedencia de conceptos que utiliza este autor lo que hace que se encuentren evidencias de uso del orden relativo, aún cuando el orden general que establezca sea el de los números enteros. La interpretación del orden en Rey es diferente como ya se explicó en 6.8.6 y 6.11.1.

Para la segunda diferencia **D_2**: Sin primer elemento (entero) - con primer elemento (natural relativo):

El indicador **b_1**, *Naturaleza de los números y de las situaciones*, se presenta de manera parcial en dos de los autores, confirmando que la naturaleza y las situaciones de los negativos no se corresponden con los relativos.

El indicador **b_2**, *Representación*, sólo tiene presencia parcial en un autor, confirmando que la representación utilizada no corresponde a la de los relativos.

Para el tercer indicador, **b_3**, *Transformaciones*, no hay indicios de cumplimiento en ninguno de los autores.

El análisis individual de la diferencia **D_2** revela que sólo hay cumplimiento parcial en Jacinto Feliú, en los demás no se cumple.

La tercera diferencia **D_3**: Continuidad de medidas – discontinuidad de medidas (cruzar el cero), sólo se presenta en la interpretación que hace José María Rey y Heredia; de manera general esta diferencia no se cumple.

La cuarta diferencia **D_4**: Cero único – cero doble (natural relativo) no hay indicios en los autores de esta diferencia, por lo que no se detecta en los textos analizados.

La quinta diferencia **D_5**: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-compensación se cumple totalmente en los libros de Feliú, Fernández y Cardín y, Rey y Heredia; el cumplimiento parcial se observa en Odriozola y Fernández Vallín y Bustillo.

En este periodo hallamos que la diferencia D_1 se presenta total o parcialmente en tres autores; los indicadores, por orden de presencia, son: a_1, a_2, a_4, a_3.

La diferencia D_2 tiene presencia parcial sólo en Feliú. Los indicadores por orden de presencia son b_1, b_2, b_3.

Las diferencias D_3 y D_4 no tienen presencia en los autores de este periodo, excepto en el trabajo de Rey Heredia.

La diferencia D_5 tiene una presencia reconocible en todos los libros analizados.

6.13 Consideraciones Didácticas

Todos los textos analizados tienen una finalidad educativa para la enseñanza de las matemáticas, por lo cual guardan una secuencia didáctica en su desarrollo. Al igual que en el periodo anterior se aprecia una marcada influencia de autores franceses para la exposición de los contenidos, lo cual es reconocido abiertamente por algunos de los autores. La peculiaridad del libro de Rey hace que la intención didáctica no sea tan inmediata como en el resto de los libros, que son manuales escolares.

Todos los autores coinciden en la importancia de la exposición metódica y ordenada de los contenidos. Sin embargo difieren en lo que respecta a si esto debe ser de forma inductiva o deductiva, de tal forma que Odriozola propone y recurre a la exposición de casos generales para llegar a lo particular, mientras que Feliú y Cardín establecen la secuencia metodológica partiendo de situaciones particulares para llegar a la generalidad.

Las propuestas didácticas que hacen estos autores son variadas. Unos enfatizan la práctica y ejercitación mediante ejercicios y problemas para facilitar la adquisición del conocimiento, como es el caso de Feliú. Odriozola resalta la interpretación de las soluciones de los problemas para comprender adecuadamente no sólo el problema sino los conceptos involucrados, presentando pocos ejemplos y dejando esa tarea al profesor. Por su parte, Fernandez Vallín y Bustillo recomienda memorizar conceptos y ciertos teoremas, además señala la conveniencia de intentar solucionar los problemas por diferentes métodos. Fernández y Cardín utiliza la introducción progresiva de los contenidos según el nivel de dificultad que estos presenten.

Como se deduce de lo anterior, los autores pretender mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por tal razón recomiendan estrategias metodológicas con propósitos didácticos que, a su modo de ver, facilitan tales procesos.

Los indicadores que presentamos permiten establecer y comparar la actividad didáctica de los autores de textos de matemáticas españoles estudiados; los resumimos en la siguiente tabla:

Tabla 6.14 Indicadores de actividad didáctica

Autor	Actualización	Originalidad	Rigor y precisión	Interés social de las matemáticas	Principios filosóficos	Principios didácticos	Destaca en las aplicaciones
José de Odriozola	X				X	X	X
Jacinto Feliú	X			X	X		
Fernández Vallín y Bustillo	X		X		X	X	X
Fernández y Cardín					X	X	X
José Mª Rey y Heredia	X	X	X		X		

6.14 Actividad Científica

En las reseñas biográficas de estos autores se observa que desarrollaron su actividad educativa y profesional en el entorno militar y civil. Su producción bibliográfica es muy variada y amplia, con la excepción de Rey y Heredia; los demás escribieron diversos tratados y cursos con los que pretendían abarcar toda la matemática.

Fueron profesores y directores de destacadas instituciones educativas del reino, como el Instituto del Noviciado de Madrid, del que fue director Fernández Vallín y Bustillo, el Colegio Militar de Palma de Mallorca, las Escuelas Pías de Barcelona, el Instituto de San Isidro de Madrid y la Universidad de Oviedo.

Participaron en las sociedades científicas españolas de la época, bien participando en su fundación o como socios, como por ejemplo en la Academia de las Ciencias, Bellas Letras y Nobles Artes de Córdoba, la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y la Real Academia de San Fernando. Algunos participaron vivamente en la fundación de instituciones educativas, como es el caso de Feliú en la de los colegios de Guanabacoa y Puerto Príncipe en América y de Fernández Vallín y Bustillo en la de la Escuela de Artes y Oficios de Gijón.

Rey y Heredia ha sido mucho más reconocido en el ámbito filosófico español que en el matemático. Su deseo de difundir y aplicar las ideas de Kant a los objetos matemáticos es una labor de aportación única tanto a la matemática española como a la filosofía de las matemáticas.

Durante estos mismos años tiene en España una difusión considerable el libro de Lacroix *Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras,* cuyos dos primeros tomos están dedicados a la Aritmética y al Álgebra, respectivamente. Vea (1995) informa que estos libros fueron traducidos y utilizados como textos en las facultades de Filosofía para desarrollar los contenidos de las matemáticas superiores. Por estos mismos años se traducen varios libros de Aritmética y Álgebra del francés; entre ellos hemos consultado las *Lecciones de Álgebra Elemental y Superior* de Ch. Briot Los historiadores de la época reconocen la influencia de estos autores en los matemáticos españoles. Nosotros hemos llevado a cabo el análisis conceptual y el análisis de contenido sobre los negativos en estos libros de autores franceses (Maz, 2000) y no hemos encontrado diferencias sustantivas sobre estos conceptos con los autores españoles.

Los autores elegidos participan de la actividad institucional en esta época de reglamentación básica de la política científica, que emprenden los sucesivos gobiernos españoles de la época. La reforma de la universidad, la caracterización de la enseñanza secundaria, la creación o renovación de centros e instituciones de investigación, los contactos con expertos extranjeros son pasos de la política centralista de esta época, como hemos señalado en los Apartados 6.1 y 6.2. Nuestros protagonistas participan del incipiente desarrollo institucional en España de la ciencia y de la educación. Estos autores no son investigadores en el sentido actual del término; su trabajo principal es la enseñanza y su aportación principal a la ciencia es de compilación y difusión, salvo en el caso de Rey quien hizo una aportación original, como se ha visto en el Apartado 6.3.

6.15 Balance final

En conclusión, las principales ideas que podemos destacar sobre el tratamiento de los números negativos durante este periodo y en estos autores, son:

1. La principal aportación al estudio de las estructuras numéricas realizada en España durante el siglo XIX –la obra de Rey Heredia- es un trabajo aislado, que se publica póstumamente, valorado principalmente como trabajo filosófico y no llega a ser conocido fuera de España
2. Los conceptos de cantidad y cantidad negativa de la mayor parte de los autores de este periodo se sostienen en las ideas de Euler y Kant; se aprecia mayor presencia de planteamientos positivistas. La mayoría considera el carácter relativo de las cantidades positivas y negativas. También se aprecian ideas conjuntistas y nociones inductivas sobre el concepto de número.
3. La interpretación de los signos + y –, se lleva a cabo bien como acciones y relaciones entre cantidades o bien como signos de oposición, lo cual muestra distinto fundamento, empírico o lógico, en las ideas que se siguen. Los primeros consideran los números negativos como resultado de efectuar operaciones aritméticas, mientras que los segundos los consideran resultados de operaciones algebraicas.
4. Los negativos tienen existencia real y aparece la noción de opuesto o simétrico. La presentación de los negativos deja de estar asociada a fenómenos físicos, aunque se sigue recurriendo a ellos para presentar problemas donde intervienen valores negativos. Una justificación para la presencia de los negativos está en la ampliación del campo de aplicación de las operaciones aritméticas al campo algebraico. Estos autores no suelen utilizar la secuencia de los enteros; sólo uno de ellos plantea la construcción de la secuencia por el método de Euler.
5. Las representaciones usuales para los negativos: verbales, numéricas y algebraicas se enriquecen con la representación módulo argumental que hace Rey, cuando presenta los negativos como un caso particular de los complejos; esta conceptualización lleva consigo la representación gráfica de los negativos sobre una semirrecta de origen 0, opuesta a la semirrecta positiva. Se reducen los fenómenos físicos y contables que sirven para ejemplificar las cantidades negativas; se incrementan, sin embargo, los fenómenos matemáticos en que se sustenta esta

noción. No hay presencia de la recta numérica en otros autores.

6. En relación con la suma la interpretación de todos los autores se sustenta sobre la anulación/ compensación. Se aprecia un desplazamiento desde argumentos aritméticos a los algebraicos para justificar las reglas de la suma. Es importante destacar que la resta se comienza a considerar como caso particular de la suma: *restar es sumar el opuesto*. También encontramos la mención expresa de que suma y resta son leyes internas, pero no hay referencia a propiedades formales de estas operaciones. Los negativos se tratan desde un punto de vista operacional algebraico y, por tanto, sujetos a cumplir ciertas reglas formales.
7. Hemos subrayado el avance que se produce en la consideración del orden cuando intervienen números negativos. Todos los autores, excepto Rey, consideran como relación de orden la de los números enteros. Sin embargo, al estudiar las diferencias de González Marí, observamos la presencia de algunos indicadores del orden relativo tanto para la primera como para la segunda diferencia, lo cual muestra la dificultad de distanciarse de algunas interpretaciones y usos de los números relativos, aunque el concepto general esté bien entendido y asumido. La interpretación de la relación de orden en Rey Heredia es la del orden complejo, como vimos en 6.8.4.2; el resto de los autores establecen la relación de orden de los números enteros.
8. La justificación del producto de relativos se hace, en tres autores, interpretando el carácter relativo del multiplicador (que en dos de los casos se reduce a la unidad); otro autor lleva a cabo una justificación algebraica, mientras que Rey hace la justificación mediante la interpretación módulo argumental. Predomina el producto de relativos. No se considera el producto como ley interna; tampoco se hace mención de propiedades para esta operación.
9. Las diferencias de González Marí nos permiten realizar un análisis mas fino sobre la persistencia de algunos usos de los números relativos cuando las definiciones formales podrían hacernos creer que ya se han superado estos conceptos. Reconocemos en los autores de este periodo una presencia parcial de la diferencia D_1, por el uso de alguno de los indicadores en algún autor, y una presencia de la diferencia D_5 en la totalidad de los autores.
10. Los indicadores didácticos que encontramos en estos autores plantean una prioridad de los principios filosóficos y preocupación por actualizar conceptos y teorías anteriores. El resto de indicadores es más disperso y no parece establecer nuevas prioridades.

CAPITULO 7

Periodo de la Restauración (1875-1902)

7.1. Caracterización general

La abdicación de Amadeo de Saboya dio paso a la instauración de la Primera República en España (1873-1874), que llegó a su fin el 29 de diciembre de 1874 con el alzamiento militar del general Martínez Campos, quien proclama a Alfonso XII rey de España. El periodo que se inicia con el nuevo rey, es conocido como Restauración; en su comienzo está la nueva Constitución de 1876, que establece formalmente la normalidad democrática. La cronología extiende este periodo hasta 1902, fecha en que sube al trono Alfonso XIII (Álvarez Junco, 2002), si bien la mayor parte de los expertos lo centran en el último cuarto del siglo XIX. La Restauración establece un periodo de estabilidad y continuidad política en España y, desde el punto de vista cultural, marca una etapa de expansión en la que se consolidan unas estructuras que impulsan el desarrollo científico- técnico de alta calidad en algunas disciplinas (Maldonado y García, 2002).

Fijamos el inicio de este periodo con la entrada de Alfonso XII a Madrid en 1875 y lo finalizamos con el comienzo del nuevo siglo; distinguimos dos etapas en este periodo: la primera coincide con el reinado de Alfonso XII (1875-1885) y entre los eventos destacados están:

- La reanudación de una monarquía parlamentaria; el sistema político se sustenta en el rey, las Cortes y la Constitución.
- La promulgación de la Constitución de 1776, que asigna al rey el poder ejecutivo.
- El abandono del sufragio universal y vuelta al sufragio restringido.

- La pacificación de los conflictos armados (el Carlismo y los disturbios en Cuba).
- La fundación del Partido Liberal-Fusionista y el Partido Liberal-Conservador, éste último aglutina en su seno a los antiguos moderados, partidarios de Isabel II y a los miembros de la Unión Liberal.
- Los reajustes económicos en todos los sectores.
- La precariedad en la industrialización del reino.

La segunda etapa la ubicamos durante la regencia de María Cristina de Habsburgo y Lorena (1885-1902), que se caracteriza por:

- La reintroducción del sufragio universal, suprimido por Alfonso XII.
- La guerra hispano-norteamericana; primero en Filipinas y luego en Cuba.
- La pérdida de las colonias (Cuba, Puerto Rico y Filipinas).
- El surgimiento de los movimientos nacionalistas con aspiraciones de autogobierno de Cataluña y el País Vasco, basados en unos hechos diferenciales: lengua, derechos históricos (fueros), cultura y costumbres propias.

Un hecho de importancia durante la Restauración ocurre en 1879 cuando Pablo Iglesias funda el Partido Socialista Obrero Español.

La sociedad española de la Restauración puede caracterizarse como una sociedad dual en la que conviven dos sectores bien diferenciados: uno, interior y agrario con formas de vida y subsistencia muy atrasadas con pudientes oligarquías, como es el caso de las dos Castillas, Extremadura y Andalucía. El otro, lo conforman unas zonas industrializadas en las que se abre paso una sociedad moderna, como ocurre en Cataluña, el País Vasco y Madrid. La España de finales del siglo XIX es un país fragmentado, provinciano, con un gobierno de escasa capacidad; país de centralismo legal pero de localismo político y social. La Restauración pone de manifiesto la distancia entre la España oficial y la real, entre la normalidad política alcanzada y las enormes desigualdades sociales existentes.

La inexistencia de una amplia clase media de ideología moderada y la inquietud social derivada de la distribución injusta de la propiedad y de la riqueza hacen inviable la alternancia en el gobierno por los mecanismos democráticos normales. De ahí que el poder se entregue a la oligarquía de políticos profesionales, terratenientes, empresarios, financieros y caciques locales, quienes amañan las elecciones y deciden los resultados, como denuncia Costa a comienzos del siglo XX. Los recursos económicos y burocráticos son escasos y el gobierno se ve obligado a delegar en las fuerzas locales. La oligarquía, organizada en torno a los caciques, corrompe el sistema democrático, que entra en crisis a finales de siglo.

La pérdida de las últimas colonias y la derrota frente a los Estados Unidos en 1898, producen una enorme crisis social, incrementada con el auge del movimiento obrero, la pérdida de mercados, el sentimiento de humillación de los militares y la aparición de los nacionalismos.

A comienzos del siglo XX España es un país escasamente industrializado, prioritariamente rural, con graves carencias democráticas, políticamente invertebrado, socialmente inestable y sometido a tensiones considerables desde muy diversos frentes, como señala Ortega y Gaset. El régimen político de la Restauración presta escaso interés a la educación, dificulta la modernización del país, aplaza las reformas necesarias para resolver la cuestión agrícola y parece empujar a obreros y campesinos hacia la revolución. La crisis del 98 produce la reacción de los intelectuales que toman conciencia de la realidad y se proponen criticarla y transformarla. La apabullante derrota ante los Estados Unidos y la pérdida de las colonias desatan una renovada conciencia nacional, conocida como *Regeneracionismo,* que aspira a la reforma del país (Quesada, 2004).

7.2 Contexto institucional

La Restauración significó, inicialmente, un paso atrás en cuanto a las libertades relacionadas con la educación, la ciencia y la política. La libertad de cátedra en las universidades fue suprimida; se estableció la censura contra cualquier manifestación contraria a la monarquía y el dogma católico.

Como se ha señalado en el Capítulo 2, el panorama para el desarrollo y difusión de la ciencia no era propicio, teniendo en cuenta la falta de apoyos materiales por parte de las instituciones públicas y privadas. También influye en este ambiente adverso, la nueva política del gobierno y el tradicionalismo religioso que choca contra el Catolicismo liberal español que se opone a la intervención eclesiástica en la vida pública. Este hecho se hace evidente cuando Augusto González Linares, catedrático de Ampliación de Historia Natural en la Universidad de Santiago, presenta abiertamente en 1875 las tesis darwinistas, las cuales habían sido condenadas por la Iglesia. La respuesta del ministro de Fomento (el Marques de Orovio) fue la conocida *Circular de Orovio* en la que se prohibe la libertad de cátedra al impedir la explicación de las teorías darwinistas. González Linares la ignora, lo que provoca su expulsión de la cátedra; este hecho genera un movimiento de solidaridad entre los catedráticos progresistas, que se salda con la dimisión de unos y el cese de otros: Castelar renuncia a su cátedra el 19 de marzo y Giner de los Rios el 25; les siguen Salmerón, Gumersindo de Azcárate, Montero Rios, Figuerola, Moret y muchos otros más. Ante tal situación los catedráticos de la Universidad Central firman una carta colectiva de protesta, lo que llevó a la cárcel o al destierro a muchos de los firmantes, hecho que se conoce como la *Segunda cuestión universitaria* (Otero, 1998).

Sin embargo, esta situación trajo consigo un hecho significativo y trascendental para la educación y la ciencia española; los catedráticos que habían sido alejados de las universidades fundan el 29 de octubre de 1876 la Institución de Libre Enseñanza, bajo la presidencia de Giner de los Rios. Éste era un centro privado y de carácter laico, concebido bajo los postulados del krausismo, que introdujo una pedagogía racionalista, laica y humanista, fomentando la curiosidad científica y la actitud crítica. La Institución se crea como organismo educativo, independiente de la Iglesia y del Gobierno; se sostiene sobre una síntesis entre la filosofía krausista y la pedagogía frobeliana. Esta iniciativa se considera uno de los hitos en la renovación intelectual y política del país.

La aceptación de la libertad de cátedra y el regreso de los catedráticos destituidos a la universidad española se produce en 1881, cuando se inicia el periodo de gobierno de los liberales con Sagasta, quienes derogan los decretos restrictivos. La nueva política se centra en la reforma universitaria y en el impulso de la investigación.

Pese a las dificultades sociales, durante la Restauración tiene lugar en España una etapa de creatividad y desarrollo cultural sin precedentes inmediatos, que es conocida como Edad de Plata de la Cultura Española, o también como segunda edad de oro (Tuñón de Lara, 1973). Esta etapa comienza con el Realismo en literatura, cuyo interés se centra en reflejar fielmente la realidad. En su origen está el rechazo progresivo del idealismo romántico y la emergencia de la mentalidad científico-positivista, sostenida por el método de análisis de la realidad presentado por Darwin en el *Origen de las Especies.*

Los novelistas realistas se proponen reflejar la realidad, con exclusión de los subjetivismos. Autores de esta corriente son Fernán Caballero, Valera, Pereda y Pedro Antonio de Alarcón. Al desarrollarse el sistema capitalista derivan hacia posiciones antiburguesas y anticlericales. Galdós presenta la cumbre del Realismo español y se convierte en la conciencia crítica de la Restauración.

En el campo de la filosofía el positivismo alcanza su apogeo en España durante la Restauración e influye en pensadores relevantes como Salmerón, Azcárate y Giner de los Ríos. En el Apartado 2.9.4 hemos destacado las principales corrientes y autores positivistas en España. El positivismo rechaza la religión, la metafísica, los conceptos universales y absolutos, las ideas aprioristicas y las teorías no demostradas empíricamente. Admite como fuentes del conocimiento la experiencia y como método científico la inducción.

El debate filosófico durante la Restauración lo centran el positivismo, el enfoque evolucionista y las preocupaciones críticas, que proponen un nuevo rigor metodológico y epistemológico. Frente al krausismo, asentado institucionalmente en el mundo educativo, el positivismo destaca entre las preocupaciones filosóficas de este periodo; la Restauración supone la implantación del positivismo en el mundo filosófico español.

Los positivistas reducen el origen del conocimiento a los hechos, la fuente del conocimiento a la inducción; rechazan el conocimiento de origen no fenoménico como la metafísica o la teología. Rechazan también la intuición como vía para el método científico.

El debate filosófico se plantea entre krausistas y positivistas. Los primeros consideran la metafísica como un sistema u organismo absoluto de la totalidad del saber, donde se ofrece la identidad de lo real y lo ideal, que proporciona fundamento armónico a todos los ámbitos del mundo de la vida. Los segundos consideran la filosofía como la legislación del conocimiento científico (neokantianos), como una síntesis general de las ciencias empíricas combinadas con un planteamiento evolucionista (comtianos), con una defensa del método inductivo y una defensa de las ideas darvinistas (Menéndez y Vázquez-Romero, 2002).

El krausismo que domina el pensamiento progresista español durante el Sexenio Democrático y los primeros años de la Restauración empieza a efectuar una transición hacia el positivismo. Los debates en torno al positivismo tienen como escenario el *Ateneo* de Madrid, con dos frentes antagónicos: la Sección de Ciencias matemáticas, físicas y naturales y la Sección de Ciencias morales y políticas (Jiménez, 1987).

Cobra protagonismo el método de las ciencias empíricas; la actividad filosófica se reconduce a una preocupación neokantiana por los límites del conocimiento y a una actitud sintética que trata de conciliar ciencia y filosofía. El movimiento positivista estimula un gran entusiasmo por el progreso, las ciencias y la tecnología. También las doctrinas positivistas contribuyen al desarrollo del naturalismo en literatura, que interpreta la conducta humana como resultado de circunstancias sociales, de la herencia y de la fisiología. La crisis de fin de siglo coincide con la crisis del positivismo.

En marzo de 1877 comienza a editarse el *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza*, que proclama la libertad de la ciencia y de la enseñanza:

> *"La Institución (…) se propone (…) muy principalmente educar; su objetivo (consiste) (…) en preparar a sus alumnos (…) para ser ante todo hombres capaces de dirigirse en la vida y de ocupar digna y útilmente el puesto que les esté reservado"*

También en 1877 comienza la segunda polémica sobre la Ciencia Española, que inicia Núñez de Arce con su discurso en la Academia Española. En este debate participan Manuel de la Revilla, Menéndez y Pelayo, Gumersindo de Azcárate, entre otros. Marcelino Menéndez Pelayo publica su *Historia de los heterodoxos españoles* (1880-1882). La trascendencia de esta polémica para el desarrollo y estímulo de la ciencia están suficientemente documentados por García Camarero y García Camarero (1970).

En estos años surgen en el panorama español hombres de ciencia que realizan su labor en pro de incorporar y difundir los avances científicos y tecnológicos en la sociedad; entre ellos tenemos a Santiago Ramón y Cajal quién fue el principal creador de la teoría neuronal, la que sistematizó en su obra *Textura del sistema nervioso del hombre y de los vertebrados*, publicada entre 1897 y 1904.

7.3 Ideas matemáticas

La recuperación de la ciencia en España durante el último cuarto del siglo XIX se produce con mayor empuje en el campo de las ciencias biomédicas; las ciencias físico-químicas y matemáticas tienen menor vitalidad. Estas disciplinas se hicieron más prácticas y se afianzaron mediante una metodología hipotético- deductiva. Estas ciencias se implantaron en diversos ámbitos y lograron un grado apreciable de desarrollo. La estructura científica que se configura en este último cuarto de siglo tiene continuidad en el primer cuarto del siglo XX y proporciona un periodo de esplendor en el plano científico, que contribuye a la Edad de Plata de la cultura española.

En el periodo que nos ocupa las matemáticas cuentan con destacados hombres que dedican sus esfuerzos e investigaciones a fundamentar las bases del conocimiento matemático, formalizando nuevos conceptos y desarrollando nuevamente algunos largamente conocidos. Entre estos ilustres matemáticos tenemos a Hermite, profesor de la Sorbona quien estudió las funciones elípticas y publica en 1880 su trabajo *Teoría de los Números*; Lindemann publica en 1882 su *Trascendencia del número* y Cantor en 1883 su *Teoría de Conjuntos.* Lie publica en 1888 la *Teoría de Grupos continuos,* mientras que Frege publica su *Lógica matemática* en 1892. Poincare investigó las soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales no lineales; Ruffini y su teoría de los grupos de sustituciones. Asimismo, están los trabajos de Dedekind, Peano, Hankel y Hilbert orientados a la teoría de números, junto con la publicación de los *Fundamentos de la Geometría* por Hilbert en 1899. (Kline, 1992).

Destacan en España la llamada *tríada de seminaristas* (Vera, 1935): García de Galdeano en Análisis, José Echegaray en Física matemática y Eduardo Torroja en Geometría moderna. En general durante este periodo los matemáticos no sólo continuaron con las líneas de trabajo marcadas durante el periodo Romántico (análisis, teoría de los números, ecuaciones diferenciales, etc.), sino que abordaron el estudio de lo abstracto, resolviendo problemas que no tenían relación con el mundo físico o real.

La organización de las enseñanzas se regulariza con el Real Decreto de 4 de Agosto de 1900, donde se establecen las secciones de las Facultades de Ciencias, que pasan a ser cuatro: Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales. En la Universidad española se comienza a distinguir entre el erudito, informado y al tanto de lo que ocurre en el mundo, y el investigador, que contribuye activamente al proceso de construcción del conocimiento. Se reconocen como grandes docentes y reelaboradores de conocimiento matemático en el último cuarto del siglo XIX a Eugenio de la Cámara, Simón Archilla, José Echegaray, Zoel García Galdeano y Eduardo Torroja (Martín Municio 2002).

En este periodo se agudizan los debates y rivalidades entre las Escuelas de ingenieros y las Facultades de Ciencias.

Una característica de este periodo relacionada con la consolidación de las disciplinas científicas, tiene que ver con la necesidad de los matemáticos por comunicar y publicar los nuevos conocimientos para que estos puedan ser contrastados y validados por otros especialistas. Merton (1984) señala que esta comunicación entre quienes desarrollan la ciencia genera nuevo conocimiento o mejora al anterior, al plantear nuevos problemas a las comunidades científicas y permitir la unificación y sistematización de una teoría. Fue esta la situación que se vivió en el concierto matemático de finales del XIX. Esto se evidencia en estudios cienciométricos hechos en el *Mathematical index* del *Catalogue of Scientifics Papers 1800-1900* de la *Royal Society of London* los cuales revelan que durante 1875 se publican 504 revistas mientras que en el año 1900 se pasa a publicar 1107 e indexa 137 revistas (Wagner-Döbler y Berg, 1996). La difusión de los avances matemáticos se acelera con la aparición de estas publicaciones especializadas; entre ellas están el *Acta Mathematica* (1882), el *American Journal of Mathematics* (1878) y *El Progreso Matemático* (1891) en España, fundada por García de Galdeano, siendo esta la primera revista española dedicada exclusivamente a las matemáticas.

Las revistas permiten a los matemáticos españoles estar al tanto de los nuevos conocimientos, como por ejemplo se desprende de la utilización del principio de permanencia de Hankel en los textos que escriben.

Siguiendo la pauta del periodo anterior se fundan nuevas academias y sociedades, como por ejemplo la *American Mathematical Society* (1888) y la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (1890).

En determinados países es la figura de algún destacado matemático la que impulsa el desarrollo de la investigación en matemáticas, es el caso de Alemania, donde Klein, a través de su seminario, es el principal motivador de los jóvenes investigadores en Göttingen. En otros países la prosperidad económica favoreció el desarrollo de las investigaciones en matemáticas, como ocurrió en los Estados Unidos, donde Rockefeller financia la fundación de la Universidad de Chicago, la cual se abre en 1892; allí, Eliakim Hastings Moore, Oskar Bolza y Heinrich Maschke implementan un programa de entrenamiento en matemáticas que rivalizó con muchos de sus competidores alemanes.

A nivel internacional se evidencia el establecimiento de una profesión matemática, la cual implicó cambios en la enseñanza de las matemáticas en las distintas naciones; estos cambios ocurrieron a menudo a través de muy diferentes de eventos y contextos: políticos, financieros, filosóficos o pedagógicos, proporcionaron escenarios conducentes a una educación más alta para el estudio y persecución de la investigación matemática (Parshall, 1996). Se produjo una redefinición del papel del profesor de matemáticas, abarcado actividades de enseñanza y la producción de investigación original siguiendo el modelo alemán. La evolución del profesor de matemáticas fue influenciada por el establecimiento de nuevas figuras de instructores: maestros de conferencias, ayudantes y profesores asociados, etc (Parshall, 1996).

Como se ha mencionado en el Apartado 2.11.1 a finales del siglo XIX en España solamente hay tres Facultades de Ciencias en las que se puede cursar la carrera de Matemáticas: Barcelona, Madrid y Zaragoza. Desde estos centros la matemática española inicia su despegue, reconociéndose además las cualidades pedagógicas de sus profesores universitarios (Rico y Sierra, 1994).

7.4 Tratado de Álgebra (1883)

7.4.1 Autor

Zoel García de Galdeano y Yanguas (Pamplona, 1846 - Zaragoza, 1924) (**CA1**). Realiza sus primeros estudios en su Pamplona natal y en Valencia. Inicia estudios de Filosofía y Letras al tiempo con los de la Facultad Libre de Ciencias Exactas de Zaragoza (**CA2**). Se licencia en filosofía en 1871. Ingresa como profesor de cálculo en la Facultad de Ciencias en 1872; entre 1878 y 1881 desarrolla un curso dedicado a la introducción de la *geometría sintética* (Martín Municio, 2002). (**CA4**). Fue cofundador del Instituto Libre de Calahorra en 1872 (**CA7**).

En 1881 aprueba las oposiciones de profesor del Instituto de Ciudad Real, luego trabaja en Almería y Toledo. Pasa a Zaragoza donde en 1889 y 1896 gana las cátedras de Geometría general y analítica y de Cálculo infinitesimal respectivamente, esta última la desempeña hasta el año 1918 (**CA4**); allí fue maestro de Julio Rey Pastor.

En lo político, García de Galdeano vive uno de los momentos históricos con mayores cambios en España. Pasa su infancia y juventud bajo el reinado de Isabel II, su época de estudiante universitario durante el sexenio democrático, y su madurez profesional en la restauración borbónica. En los ámbitos filosófico y educativo vive la llegada y auge del krausismo así como los debates sobre la tradición histórica de las ciencias en España.

En 1891 funda la revista *"El progreso matemático"*, primera revista científica española dedicada exclusivamente a las matemáticas de la que se publicaron 92 números. A través de esta revista se difunden los nuevos conceptos del cálculo infinitesimal y de las geometrías no euclidianas (**CA7**).

Asiste a diversos congresos internacionales sobre matemáticas, desde el primero que tuvo lugar en Zurich en 1897, hasta el que tuvo lugar en Cambridge en 1912. En el Cuarto Congreso Internacional de Matemáticas de Roma, en 1908, se constituye la *Commission Internationale pour l'Enseigment Mathématique* (CIEM), García Galdeano preside la subcomisión española (Rico y Sierra, 1992). Aprovecha estas oportunidades para establecer relaciones con los matemáticos europeos y publica regularmente artículos e informes en *L'Enseignement Mathématique*, revista oficial de la

CIEM (**CA3, CA5**). En 1914, junto a José Rius y Casas, propone fundar *La Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales*, de la cual fue miembro y presidente. En 1916 fue elegido presidente de la Sociedad Matemática Española (actual Real Sociedad Matemática Española). Se jubila en el año 1918 (**CA5**).

Desarrolla una destacada labor en la mejora del nivel matemático español como autor y como promotor de la actividad académica, financiando con su propio dinero algunas publicaciones. Se le reconoce como uno de los primeros especialistas españoles en lógica matemática (Maldonado y García, 2002). Además de los trabajos en matemáticas también publicó *Ensayos de Síntesis Matemática y Nuevo Método de Enseñanza Matemática*, así como *Algunas consideraciones sobre Filosofía y Enseñanza de la Matemática*. En ambas publicaciones aborda cuestiones sobre el currículo de matemáticas y la metodología para su enseñanza, aporta reflexiones sobre la formación de los profesores y sobre la innovación pedagógica, incluyendo a los profesores universitarios. En la enseñanza de la matemática tiene una visión acorde con las ideas renovadoras internacionales del momento (Rico, 1999). García Galdeano se preocupa por la formación del estudiante de matemáticas; su propuesta de introducir una materia titulada *Crítica, Historia y Pedagogía de la Matemática* en el plan de estudios de esta especialidad en las Facultades de Ciencias, es novedosa en el panorama educativo español (López Piñero, 1983). Donó su extensa biblioteca particular a la Facultad de Ciencias de Zaragoza (**CA7**).

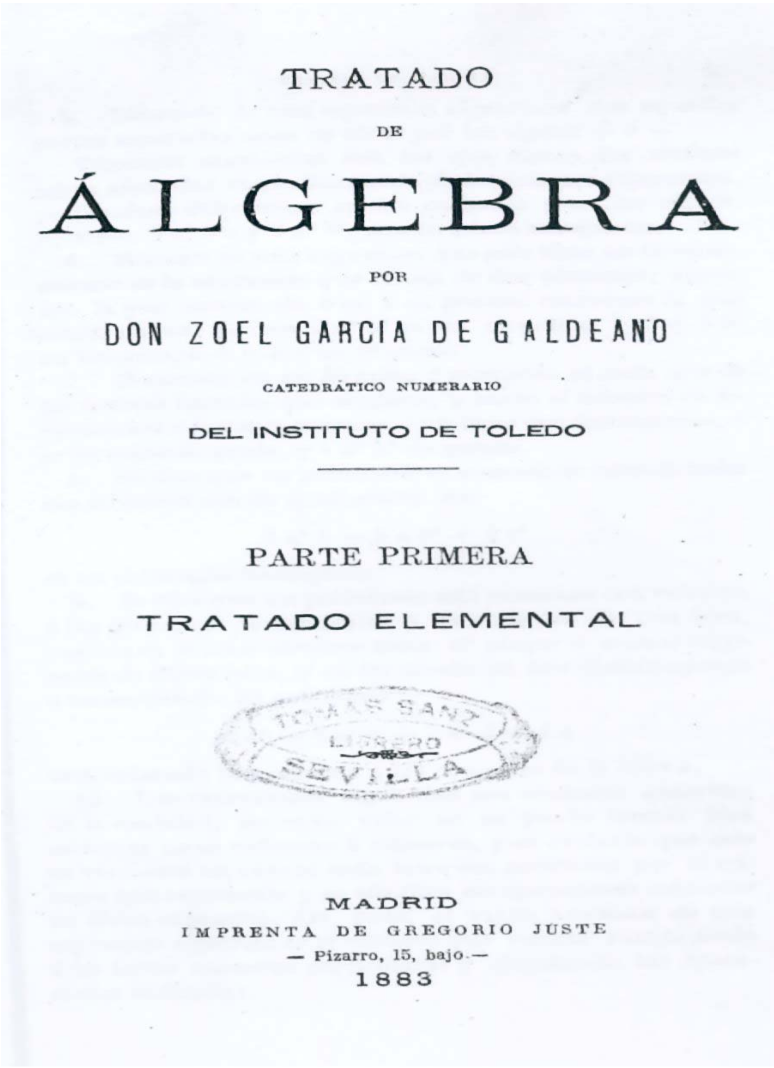
Fue autor de casi dos centenares de publicaciones entre libros y artículos, especialmente de carácter divulgativo y didáctico; destacamos: *Tratado de Álgebra* (1883), *Tratado de álgebra con arreglo a las teorías modernas* (1886), *Armonías del mundo físico* (1890), *Las matemáticas en España* (1893), *Ciencia educación y enseñanza* (1899), *La enseñanza científica* (1902), *Tratado de análisis matemático* (1904) y *Filosofía y enseñanza de la matemática* (1907) (**CA6**).

Referencias a García de Galdeano y su obra pueden hallarse en Hormigón (1993), Vea (1995), Peralta (1999), Martín Municio (2002) y Maldonado y García (2002) (**CA8**).

7.4.2 Caracterización del texto

Tratado de Álgebra. (1883). Parte primera. Tratado Elemental. Madrid: Imprenta de Gregorio Juste (**CGO1**, **CGO2**).

El texto tiene 336 páginas distribuidas en tres partes o secciones y carece de introducción o prólogo explicativo. La primera parte la llama *Teoría de los algoritmos primitivos*, la cual divide en tres libros: el libro primero trata sobre las definiciones, divisiones y nociones primitivas (cantidad concreta, cantidades positivas y negativas, nociones de álgebra, ecuaciones y funciones); en este primer libro ya presenta los números enteros, comprendiendo a los positivos y a los negativos. También presenta las cantidades negativas continuas, es decir, los números reales negativos. El segundo libro, trata sobre *Teoría combinatoria* (permutaciones, combinaciones, probabilidades); el libro tercero, sobre *Teoría de las funciones explícitas ó cálculo algebraico*, en el que trata sobre las fracciones, fracciones algebraicas, cálculo de determinantes, series, progresiones, cantidades reales de forma radical y cantidades imaginarias con sus operaciones, se inicia con las reglas de cálculo de las *cantidades racionales enteras* (**CGO3, CCO6**).


TRATADO

DE

ÁLGEBRA

POR

DON ZOEL GARCIA DE GALDEANO

CATEDRÁTICO NUMERARIO

DEL INSTITUTO DE TOLEDO

PARTE PRIMERA

TRATADO ELEMENTAL

TOMAS SANZ LIBRERO SEVILLA

MADRID

IMPRENTA DE GREGORIO JUSTE

— Pizarro, 15, bajo.—

1883

En la parte segunda expone la *Teoría de las funciones explícitas en los algoritmos derivados*. Ésta se divide en tres libros: el primero de ellos trata de *Algoritmos técnicos* (series y fracciones continuas); el libro segundo, sobre *Algoritmos teóricos derivados* (numeración, factoriales, funciones logaritmo y seno, correspondencias geométricas de las funciones exponencial y seno y multiplicidad de los valores de la función logarítmica). El libro tercero trata sobre *Teoría general de las operaciones y de las cantidades*; en este tercer libro presenta las propiedades formales de las operaciones suma y producto, así como las generalizaciones sucesivas del concepto de cantidad, que justifican el tratamiento estructural de los números enteros (**CGO3, CCO4**).

La tercera parte la dedica a la *Teoría de las funciones implícitas*. La sección se divide en tres libros, el primero trata *Las funciones implícitas en las ecuaciones de equivalencia* (principios sobre las sustituciones de las ecuaciones y los sistemas, ecuaciones de primero y segundo grado, ecuaciones binómicas y sistema de ecuaciones); el libro segundo, sobre *Las funciones implícitas en las ecuaciones de congruencia* (sustituciones de las congruencias y sus sistemas, teoría de las ecuaciones binomias); y el libro tercero trata la *Teoría de las inecuaciones* (nociones inecuaciones de primer y segundo grado) (**CCO4**, **CGO3**).

García de Galdeano no establece explícitamente los objetivos de esta obra, aunque si está clara su intención de ofrecer una versión actualizada de los avances recientes sobre el desarrollo del Álgebra; el texto es posterior en 16 años al trabajo de Hankel, y en él ya se hacen uso de las teorías desarrolladas por este autor (**CGO4**). Además de la referencia a Hankel, también menciona a los siguientes autores: Wronski, Poncelet, Briggs, asimismo alude a las tablas de logaritmos de Callet Galvez, Sehron, Lalande y Vasquez Queipo (**CGO5**).

El autor remite a la Aritmética para conocer una definición inicial de Cantidad, de origen empírico; afirma: *“La cantidad tiene su representación en el número”*, pero añade: *“existe otro medio de representación más general con el empleo de las letras del alfabeto”* (p. 3) (**CCO2**). Después de hacer una revisión de los distintos tipos que pueden considerarse en las cantidades (*análogas*, *expresión algebraica*, *entera*, *fraccionaria*, *racional* y *radical*), subraya el carácter físico de las cantidades absolutas:

> *“La cantidad es esencialmente concreta y no se nos puede presentar más que bajo las formas de espacio y tiempo. Así, cualquier cantidad que consideremos será, ó una distancia, ó una extensión de terreno, ó un peso que corresponde á un cuerpo de cierto volumen y cierta densidad, ó una moneda cuyo valor dependerá de la cantidad del metal y de su volumen, ó en fin, la cantidad considerada podrá ser un intervalo más ó ménos largo de tiempo.”* (p. 6) (**CCO2)**.

Continúa señalando que:

"[...] el concepto de las cantidades consta de dos elementos separables, que son: 1.º El número resultante de comparar aquéllas con una unidad de su especie. 2.º la distincion y designación de dicha especie." (pp. 6-7) (**CCO1**, **CCO2**).

En el libro tercero dedica un apartado a la teoría de la cantidad, en lo que atañe a la generalización del concepto.

"315. Si principiamos á elevarnos, desde el concepto más elemental de la cantidad al más complejo, para pasar por todos los grados que de ésta puedan distinguirse, nos encontramos, en primer término, con la cantidad abstracta, llamada también discreta.

Trata las cantidades abstractas y considera la comparación de tales cantidades:

"316. En una sola hipótesis está basada la teoría de las cantidades abstractas ó discretas , á saber: la igualdad de sus diversas unidades. De esta manera, la comparación de las cantidades abstractas y sus mútuas transformaciones se reducen á las transformaciones de sus números correspondientes, por esta razón, el concepto de las cantidades abstractas y el de número pueden considerarse como sinónimos" (p. 213) (**CCO1**, **CCO4**).

De tal manera que número es sinónimo de cantidad abstracta.

Esta idea se había planteado con anterioridad, de manera tanto formal como descriptiva, al dar una explicación de la relación entre número y cantidad:

"[...] en Álgebra se expresará [la cantidad] por el símbolo general

$$n\,\varphi$$

indicando n el número que mide la cantidad y que se llama módulo, y φ la especie de cantidad que se considera.
Hecha esta distinción entre los elementos que se hallan en el concepto de una cantidad y en su expresión general, se observa inmediatamente que cuando se trata de la cantidad concreta, que es continua, y por consecuencia divisible, la división, operacion muchas veces imposible exactamente en números enteros, deja de serlo si, en vez de dividir el módulo, se divide la unidad de la especie considerada, procedimiento que sirve de fundamento á toda la teoría de quebrados. En este caso la expresión n φ toma la forma

$$n.\frac{1}{m} \text{ ó } \frac{n}{m}$$

en la cual los dos elementos n y m reciben el nombre de numerador y *denominador"* (p. 7) (**CCO1, CCO2**).

Y continúa, disertando sobre los números naturales:

> *"Nuestra inteligencia puede hacer abstracción de todas las propiedades de un objeto ménos una, por ejemplo, su color, para considerar á éste como independiente del objeto, por más que en la realidad no puede darse un color sin objeto, como no puede en gramática considerarse un adjetivo sin un sustantivo á que aplicarse; pues dicha facultad intelectual, en matemáticas, puede considerarse un número en abstracto, es decir, sin hacer referencia á ninguna cantidad. Este número abstracto ó absoluto es esencialmente entero é indivisible, y expresa simplemente grados en la escala de la pluralidad; es la base de contar."* (p. 7) (**CCO3**).

En el texto se tratan de manera clara los números enteros:

"Que comprende los números enteros, positivos y negativos." (p. 8) (**CCO5**).

También trata otro tipo de números:

> *"Las raíces de los números que no las tienen exactas en números enteros son* INCONMENSURABLES*, y los números que son potencias exactas de otros son en número muy limitado, sobre todo á medida que aumenta el grado de aquélla. Esto ofrece un caso de un número que puede concebirse engendrado por graduación, mediante un número* INFINITO *de factores, más ó ménos (según que sea aquél mayor ó menor que la unidad), un valor que tiende hácia cero ó* INFINITAMENTE PEQUEÑO*. Así la expresión de esta generacion será:*
>
> $$N = (1+\omega)^{\text{Ƨ}} \quad [\ldots]$$
>
> *Observación. Debe advertirse que esta generacion de los números es puramente ideal, es decir, tan sólo concebida por la razon; mas no se trata de su realización práctica como cuando se trataba de los números finitos. Y hay que advertir que el modo ordinario de proceder de las matemáticas es aquél, puesto que lo inconmensurable é indefinido se presenta con más facilidad que lo finito."* (pp. 126-127) (**CCO3**, **CCO6**).

La generalización está patente a lo largo del texto, evidencia de ello es su afirmación:

> *"Álgebra es la ciencia en que se estudian las leyes de la combinación y el órden para aplicarlas a la resolución de los problemas de la cantidad, considerada en general, es decir, expresada por símbolos generales, en los cuales se prescinde de todo valor numérico. Los conceptos de órden y*

de combinación tienen una importante intervención, y casi tanto, en la ciencia matemática, como el de cantidad. (p. 11) (**CCO4**).

Como vemos destaca dos términos estructurales *orden* y *operación* (*combinación,* en la terminología del autor). García Galdeano utiliza representaciones gráficas en muchos apartados de la obra para aclarar e ilustrar los conceptos expuestos.

Para tratar las ecuaciones cita a Wrosnki, e indica que resultan *"de la comparacion ó consideracion simultanea de dos algoritmos."* (p. 13). Expresa que las ecuaciones pueden se numéricas o literales (**CCO4**). Además aclara que:

"[...] puede admitirse, generalizando, que las expresiones

$$ax + by - c \;\; y \;\; m\chi^2 + ny + pz$$

en las que hay cantidades conocidas, ligadas con otras desconocidas, son maneras distintas de producir un mismo número, de manera que la ECUACIÓN *es una igualdad en que entran una ó más cantidades desconocidas ó incógnitas."* (p. 13) (**CCO4**).

Las cantidades positivas y negativas reciben atención especial en un pequeño apartado al inicio del texto (**CCO5**). A través del desarrollo de los contenidos, los negativos que van surgiendo los utiliza.

En esta obra, García de Galdeano presenta un tratamiento teórico del álgebra de orientación claramente formal, dejando de lado el estudio de las aplicaciones como era tradicional en los textos matemáticos de la época. Las referencias estructurales, que comentaremos más adelante, se ponen de manifiesto al establecer que el recíproco de a es –a:

"Para la adición, el objeto recíproco de a es 0 – a" (p. 209) (**CGO7**).

Como afirma Vea (1995) su talante innovador dificulta la comparación con otros autores de finales del siglo XIX. Ejemplo de ello es la incorporación en un texto para segunda enseñanza temas como el principio de permanencia de las leyes formales, las cantidades infinitas, los números transfinitos o el infinito matemático (**CGO6**).

7.4.3 Tratamiento dado a los negativos

Los párrafos de mayor interés relacionados con los apartados son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.

"El símbolo n φ de las cantidades concretas en la teoría de las cantidades positivas y negativas toma la forma explícita

$$+n \;\; ó \;\; -n,$$

es decir, que la n representa un número y la modificación cualitativa, *representada por los signos + ó –, indica una oposición de dirección, que puede hacerse visible adoptando la línea recta como representación de las cantidades continuas y dirigidas."* (p. 9).

Los signos + o – son los modificadores de la cualidad de una cantidad, además son opuestos en dirección. Se hace una interpretación geométrica para interpretar los dos signos. Explícitamente, se indica que se utilizan para nombrar cantidades "dirigidas".

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.
"Son cantidades positivas las que tienen un modo de ser determinado, y negativas las que tienen el modo de ser contrario á las primeras." (p. 8).

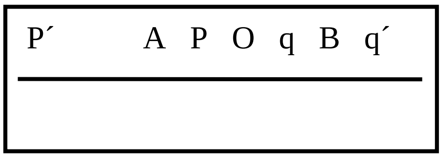
La idea que expone es de contrarios u opuestos, es decir, las cantidades negativas son contrarias a las positivas; las cantidades negativas están subordinadas al modo determinado que asuman las positivas.

"Una nueva generalización del concepto del número y de las operaciones se obtiene introduciendo las cantidades de dos afecciones opuestas, ó positivas y negativas, que permiten resolver el problema de la sustracción para el caso de ser el sustraendo mayor que el minuendo. La série de valores contínuos, considerada anteriormente, se completa con otra série de valores tomados en direccion opuesta, á contar desde un orígen, y las dos se hallan así incluidas en otra más general que comprende todos los valores positivos y negativos, y en este caso de las operaciones se ha resuelto, parcialmente, en el cálculo de las cantidades racionales enteras" (pp. 216-217).

La consideración de cantidades positivas y negativas corresponde a una ampliación y generalización del concepto de número. Esta ampliación permite resolver operaciones donde el sustraendo es mayor que el minuendo en la sustracción.

También se deja constancia de que tanto los positivos como los negativos hacen parte, es decir son subconjuntos, de una serie continua que los contiene a ambos, y a este subconjunto se le denomina, en particular, *cantidades racionales enteras*.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.
"Admitiendo esta representación, podrá, pues, convenirse en considerar como positivas a las magnitudes OQ, OB y OQ´ tomadas (fig.1ª) á la derecha del punto O ú origen y las OP´, OA y OP á la izquierda de dicho punto, como negativas.



Esta representación de las magnitudes de dos modos de ser opuestos por medio de la recta, puede no sólo aplicarse á las longitudes ó cantidades extensas, sino tambien al tiempo.

Estas consideraciones conducen á concebir la generación de las cantidades positivas y negativas por un movimiento de traslación, es decir, en línea recta, ya en una dirección, ya en su opuesto” (p. 9).

Estos párrafos presentan tres ideas de interés:

- El autor utiliza una representación grafica para dar la noción de la naturaleza de las cantidades negativas, además ratifica lo dicho en **TSN2**; las cantidades son llamadas magnitudes. Positivas y negativas tienen un carácter de opuestas entre sí.

- Induce una generalización de las cantidades negativas, pues éstas representan magnitudes de longitud e, incluso, de tiempo.

- Ofrece una explicación geométrica de la naturaleza de las cantidades negativas: éstas surgen de un movimiento de traslación en dirección contraria a las positivas; por lo tanto hay un origen dinámico de ellas.

Esta representación geométrica conecta con los complejos:

“Las cantidades positivas ó negativas que han figurado hasta el presente como únicas reales, es decir, que corresponde á objetos, existen en contraposicion á las imaginarias, llamadas así desde que se conocieron, porque no se hallaba correspondencia entre ellas y los objetos reales ó existentes.

Esta dificultad nacía de que sólo se consideraban dos modos opuestos en la existencia de las cantidades, mientras que es fácil observar una inmensa variedad de modos de existencia distintos del positivo y negativo.” (p. 9).

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.
“En las cantidades, además de su valor numérico, hay que distinguir su cualidad, entendiéndose por cualidad de la cantidad aquel modo de ser ó aquella particular afección que las hace concurrir de diversas y aún opuestas maneras á los fines intentados por el cálculo” (p. 8).

En este párrafo se indica la poca ingerencia del calculador como elemento determinante en la cualidad de las cantidades, esta cualidad es distinta del valor numérico que representa dicha cantidad.

García Galdeano también destaca la procedencia de los números como resultado de la extensión de las operaciones:

> *"El cuadro siguiente expresa los casos de la generación primitiva de los números y de las diversas especies de éstos que entran en los dominios del Álgebra, juntamente con las operaciones que originan cada especie"* (p.12).

GENERACION PRIMITIVA.

Forma general de los algoritmos.	Operaciones correspondientes.	Clases de números engendrados.
1.—*Sumacion* $a+b=c$	ADICION. . .	números *positivos*.
	SUSTRACCION.	números *negativos*.
2.—*Reproduccion* $a \times b = c$	MULTIPLICACION. . .	números *enteros*.
	DIVISION. . .	números *fraccionarios*.
Graduacion $a^b = c$	ELEVACION Á POTENCIAS	números *racionales*. { *reales*. / *imaginarios*.
	EXTRACCION DE RAICES.	números *irracionales*.

(Texto original)

> *"El Álgebra puede concebirse de dos maneras, que permiten dividirla en abstracta y concreta. La primera es un estudio á PRIORI de las combinaciones de las operaciones sin ocuparse de su significacion, ni naturaleza, y su objeto se reduce á transformar unas expresiones en otras equivalentes, según las definiciones que son su punto de partida. La segunda es un estudio á POSTERIORI de las operaciones, deducido de la sucesiva generalización de los conceptos aritméticos, generalización que se obtiene dando una significacion concreta ó representacion geométrica á las cantidades y á las operaciones.*
>
> *Hasta ahora ha predominado casi exclusivamente el modo de exposicion derivado del estudio á priori de las combinaciones del cálculo, según el cual las cantidades negativas é imaginarias concebidas simplemente en abstracto, sin significado real, sólo han tenido una existencia convencional como simbolos de imposibilidad de los problemas algébricos y no han tenido otra razon para ser admitidas que la necesidad de mantener la regularidad de las reglas del cálculo.*
>
> *En el estado actual de la ciencia matemática, conviene adoptar el segundo modo de exposicion, aplicando, en primer lugar, las operaciones á cantidades puramente numéricas, es decir, abstractas,*

para después aplicarlas á las cantidades con cierto modo de ser ó cualidad, lo que se conseguirá fijando la significación geométrica de unas y otras." (p. 44).

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.
"Se dice que las cantidades negativas son menores que cero, y esto debe entenderse, no con respecto al cero absoluto, que no puede ser comparable con las cantidades sino con respecto al cero relativo de la serie
.........–5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ...
Que comprende los números enteros, positivos y negativos." (p. 8).

Se destacan los siguientes aspectos:

- Hay dos tipos de ceros: el absoluto y el relativo.
- Las cantidades negativas son menores que cero cuando se considera a éste como un número de la serie de los enteros.
- Existe un orden entre las mismas cantidades negativas entre sí; con respecto a cero; y también con relación a las positivas.
- Las cantidades negativas se consideran números enteros.

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.
"Así, por ejemplo, muchas veces no basta la consideración de una distancia, pues se necesita saber si se ha de contar hácia el Norte ó hácia el Sur, hácia un sentido determinado ó hácia su opuesto. No es lo mismo diez grados sobre cero del termómetro que diez grados bajo cero; se cuentan en la historia años ántes de J. C. Y años después de J. C.; una cantidad de dinero nada es ni significa en el balance de un capital, si no se concibe como perteneciente al debe ó al haber. Se observan, pues en la cantidad afecciones ó modos de ser opuestos que permiten dividirlas en positivas y negativas." (p. 8).

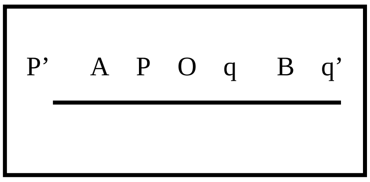
"Si el agua que entra en un estanque se considera como positiva, el agua que sale del mismo se considerará como negativa, y debe entenderse que las denominaciones de positivas ó negativas, aplicadas á las cantidades, son puramente relativas, pues lo que una vez se ha considerado como positivo puede considerarse en otra ocasión como negativo, y entonces lo negativo pasa á ser positivo y recíprocamente." (p. 8).

Se ilustran las cantidades negativas mediante situaciones que se modelizan a través de los números enteros (desplazamientos, temperaturas, periodos históricos) así como con situaciones físicas reales y cotidianas, pero de carácter relativo (deudas, llenado y vaciado de recipientes).

TSN7: Regla de los signos.
Para la suma:

"82. ***Regla general de la adición****.- Para sumar cantidades algebraicas, se colocan los sumandos unos á continuacion de otros, de manera que todos sus términos conserven los signos que tenian, y despues se simplifica el resultado, si hay términos semejantes, de manera que cada término de un sumando afecta á la suma* EN SU VALOR NUMÉRICO Y SEGÚN SU AFECCION Ó CUALIDAD*.*

83. ***Casos que ocurren en la suma de monomios****.*



(Fig. 13)

$1^{o}\ +a + (+b) = a + b$
$2^{o}\ +a + (-b) = a - b$
$3^{o}\ -a + (+b) = -a + b$
$4^{o}\ -a + (-b) = -a - b$

En efecto, el sumando +b ó –b tiene que influir sobre el primero +a ó –a, según su valor numérico y su modo de ser, que en el primer caso es aditivo y en el segundo sustractivo.

84. ***Interpretación geométrica****.- 1.ᵉʳ caso. Tómese OQ = +a (fig. 13), y a continuación QB = + b; la suma estará representada por la longitud OB. 2º caso. Tómese OQ' = +a, y en direccion contraria, Q0B = –b; la suma estará representada por la longitud OB. 3ᵉʳ caso. Tómese en la direccion OP de las cantidades negativas, la longitud OP' = –a, y á continuacion, en la de las positivas, la longitud P'A; la suma estará representada por OA. 4º caso. Tomándose OP = –a y á continuacion PA = –b, la longitud OA representará la suma"* (pp. 46-47).

Para la resta:

"87. ***Regla de la sustracción****.- Para restar dos cantidades algébricas, una de otra, se coloca el minuendo y á continuacion el sustraendo con signo contrario, de manera que* CADA TÉRMINO DEL SUSTRAENDO AFECTA AL RESTO*,* SEGÚN SU VALOR NUMÉRICO Y CON OPUESTA AFECCION Ó CUALIDAD*.*

88. ***Casos que ocurren en la resta de monomios.***

$1^{o}\ +a - (+b) = a - b$
$2^{o}\ +a - (-b) = a + b$
$3^{o}\ -a - (+b) = -a - b$
$4^{o}\ -a - (-b) = -a + b$

En efecto; al sumar el resto con el sustraendo, la cantidad +b ó –b desaparecerá, por entrar con signos contrarios, y sólo quedará el minuendo a" (p. 48).

Para el producto:

"Si los factores de un producto tienen igual signo, el producto será positivo, y negativo, si tienen signos contrarios, lo que se enuncia abreviadamente diciendo:

+ X + *da* +, + X – *da* –

– X – da –, *– X – da +*

En efecto: según la definición el signo del producto es, respecto al del multiplicando, lo que el del multiplicador es respecto al de la unidad positiva; luego si ésta tiene el signo +, el del producto será igual al del multiplicando, es decir, que llamando a, b y p al multiplicando, multiplicador y producto, se tendrá

$+a \times +b = +p,$ $\quad -a \times +b = -p;$

y si el multiplicador es negativo, el producto tendrá signo contrario al del multiplicando, es decir, que

$+a \times -b = -p,$ $\quad -a \times -b = +p$.*"* (pp. 49-50).

Se enuncia una regla para la simplificación de signos en una multiplicación y luego se utilizan cantidades generales *a*, *b* y *p* para ilustrarlo.

*"**Interpretación geométrica**. Teniendo que estar formado el producto con el multiplicando, como el multiplicador lo está con la unidad positiva; si se representa el valor multiplicado por la distancia OQ (fig. 13) positiva, ó la distancia OP negativa, la multiplicación se reducirá:*

1º. En cuanto al valor numérico, á tomar la recta OQ ó la OP tantas veces como unidades tiene el multiplicador.

Por ejemplo:

Si el multiplicando es positivo y está representado por la recta OQ, el producto se obtendrá tomando al multiplicando desde el orígen O hácia la derecha ó hácia la izquierda, tantas veces como unidades tiene el multiplicador, según que éste sea positivo ó negativo.

2º. En cuanto al signo, á tomarla en el mismo sentido ó el sentido contrario al que tiene, respecto al orígen, según que el multiplicador sea positivo o negativo.

Por ejemplo:

Si el multiplicando es negativo, y está representado por la recta OP, el producto se obtendrá tomando al multiplicando desde el orígen O hácia la izquierda o hácia la derecha, tantas veces como unidades tiene el multiplicador, según que éste sea positivo o negativo" (pp. 50-51).

Recurre a la representación e interpretación geométrica para ilustrar y justificar la regla de los signos para la multiplicación, tomando en consideración bien el signo o bien el valor numérico.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

"En las cantidades, además de su valor numérico, hay que distinguir su cualidad [...]" (p. 8).

Como ya se ha comentado en **TSN5**, el autor distingue entre el valor numérico (absoluto) y la cualidad (valor relativo) de una cantidad.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

"De dos cantidades negativas es menor la que tiene mayor valor

absoluto. En efecto, á –5 le falta más que á –2 para llegar á cualquier número positivo 3, por ejemplo.” (p. 8).

En **TSN5** se ha indicado que el valor absoluto es lo que determina el orden entre las cantidades. El orden que se indica es el orden de los números enteros.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

*“86.- **Serie entera**. Si se colocan en fila todos los números positivos y negativos, á contar desde el cero, la serie*

…. –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …..

será el lugar ó dominio de todas las sumas enteras, de manera que los sumando y la sumas se hallarán á la vez en la misma serie” (p. 48).

95. La serie

… –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …..

contiene simultáneamente los factores enteros y sus productos respectivos; es, pues, el lugar, region ó dominio de los productos enteros, y en ella, lo mismo que en la línea de la figura 13, se encontrarán los productos de factores cualesquiera, practicando las mismas operaciones respecto al valor numérico y á la cualidad” (p. 51).

Está claro que, para Galdeano, la suma y el producto de enteros son leyes de composición interna.

“El estudio de las operaciones se hace por la sucesiva generalización de sus conceptos y los de las cantidades á las que se aplican, de manera que cada grado de generalización comprenda á los anteriores como casos particulares. […] El Álgebra […] da una nueva generalidad al concepto de número al que agrega el de cualidad, para hacer de él una entidad concreta con nuevos atributos que modifican los conceptos de las operaciones aritméticas, reemplazándolos por los mas superiores de las operaciones algébricas. […]

*293. La generalización sucesiva del concepto de las operaciones está subordinada a un principio que es el **Principio de Hankel**.- (Principio de PERMANENCIA de las reglas del cálculo). Todo cálculo efectuado para cantidades generalizadas debe aplicarse también á cantidades de orden inferior, sin que la generalización pueda introducir nuevas propiedades, ni originar nuevas reglas que no resulten de las propiedades ya admitidas. […]*

295. Las propiedades generales más importantes de las operaciones, son: La uniformidad, la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad ó propiedad distributiva.”(pp. 201-202).

García Galdeano considera los números negativos como resultado de una generalización de los naturales, al incorporar al concepto abstracto de número la cualidad o dirección. Este nuevo conjunto se caracteriza por extender las operaciones de suma y producto.

También considera 0 y 1 como elementos neutros, a los que García llama módulos, respectivamente, para ambas operaciones:

> *"305. Definición.- Se llama* MÓDULO DE UNA OPERACIÓN $*$ *, un objeto* m *que, combinado por la operación* $*$ *con un objeto cualquiera, reproduce el objeto* a*, es decir, que* a $*$ m = a*.*
> *Ejemplos: Para la adición, se tiene* m = 0*, y, para la multiplicación* m = 1*."* (p. 207).

La noción de simétrico la establece a partir de la idea de operación inversa:

> *"Definición: Si un objeto* c *está dado por otros dos, mediante la operación* $*$ *que origina la igualdad:* a $*$ b = c*, la operación que sirve para hallar* b *conociendo* a *y* c*, ó* a*, conociendo* b *y* c *se llama operacion inversa de la operación directa representada por el signo* $*$*. […]*
> Ejemplos:
> 1º De a + b = c, resulta a = c – b ó bien b = c – a.
> 2º De a x b = c, resulta a = c : b ó b = c : a." (p. 205).

> *"Se llama* OBJETO RECÍPROCO *de un objeto* a*, al resultado de combinar el modulo* m *con* a *mediante la operación inversa […] Ejemplo: para la adición, el objeto recíproco de* a es 0 – a*."* (p. 209).

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.

"Como puede observarse en la fig. 35, el signo – de la incógnita expresa que dicho valor existe en la region correspondiente á las cantidades negativas, es decir, á la izquierda del origen O." (p. 248).

"Ejemplo: la ecuación –77x=255 se convierte en 77x = –255.

Regla para resolver una ecuación. Para resolver una ecuación, ya preparada, se dividen los dos miembros por el coeficiente que tiene la incógnita en el primero. Así, de la última ecuación se deduce

$$x = -\frac{255}{77}.\text{"} \quad \text{(p. 242).}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 9(5.1 - 2.4) - 6(8.1 - 5.7) + 3(8.4 - 5.7) \qquad \text{" (p. 73)}$$

$$= (9 \times -3) - (6 \times -6) + (3 \times -3) = -27 + 38 - 9 = -3$$

Destacamos lo siguiente:

- Se interpretan direcciones contrarias para las cantidades negativas
- Se acepta un valor negativo como valor de una incógnita en la resolución de un problema, sin cuestionar su significado.
- Los negativos son considerados números.
- Los negativos surgen al efectuar diversos tipos de operaciones matemáticas.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

La principal utilidad es la de dotar de significado a las operaciones que antes parecían no tenerlo:

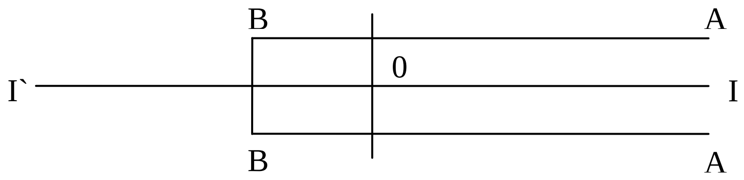
> *"[...] y ahora, en el Álgebra, desaparecen tambien las sustracciones imposibles, en el caso de ser sustraendo mayor que el minuendo y las raíces imposibles, en el caso de ser el grado par y los números de que se extraen negativos, en cuanto se da una nueva generalización á la idea de número, no solamente concebido como entero, fraccionario é inconmensurable, sino además como positivo ó negativo, como real ó imaginario."* (pp. 43-44).

TSN13: Otros.

> *"Hasta ahora ha predominado casi exclusivamente el modo de exposición derivado del estudio á priori de las combinaciones del cálculo, según el cual las cantidades negativas é imaginarias concebidas simplemente en abstracto, sin significado real, sólo han tenido una existencia convencional como símbolos de imposibilidad de los problemas algébricos y no han tenido otra razón para ser admitidas que la necesidad de mantener la regularidad de las reglas del cálculo"* (p. 44).

Las cantidades negativas son consideradas como números negativos y particularmente como números enteros. Así cualquier sustracción puede efectuarse sin importar el valor numérico del sustraendo o el minuendo; con lo cual se hace evidente el carácter algebraico de los negativos.

> *"[…] supóngase un punto móvil, cuyas posiciones sucesivas en la recta I o I` que recorre desde el infinito negativo al positivo, corresponden á la infinidad de los valores reales de la variable x."* (p. 266).



Este párrafo señala la posibilidad de obtener valores reales inferiores y superiores a cero; también queda implícita la existencia de valores continuos en la recta, siendo estos positivos o negativos.

> *"[...] podrá ocurrir que los términos del quebrado resultante sean á su vez fraccionarios y estén afectados de los signos + ó –"* (p. 79).

Se admiten las cantidades fraccionarias positivas y negativas.

7.4.4 Análisis

7.4.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

- ***Número***

Para el autor, el número es sinónimo de cantidad abstracta y surge de comparar las cantidades con unidades de su especie. El número mide la cantidad. El número cuando se considera en abstracto, es esencialmente entero, expresa grados en la escala de la pluralidad y es la base del contar (**CCO1**).

La noción de número surge con la representación de la cantidad. Utilizó una simbología algebraica para representar de manera general un número determinado: $n\varphi$ donde n es el módulo que mide la cantidad y φ indica la especie de cantidad que se mide.

Cuando considera el número sin referirse a una cantidad concreta, indica que, en matemáticas, este número es abstracto sin hacer referencia a ninguna cantidad (**CCO1**). El número es el resultado de una acción, puesto que es quien *"mide la cantidad"* (p. 7). Más en particular, establece que el número natural surge por abstracción de todas las propiedades de la cantidad y expresa grados en la escala de la pluralidad (**CCO3**).

En términos generales, considera un concepto amplio de número, una nueva noción estructural, que llega a comprender no sólo a los reales y los complejos, sino también los cuaterniones y los números transfinitos.

- ***Cantidad***

La noción primitiva para García Galdeano es la noción de cantidad, que es concreta, surge de la experiencia y se presenta esencialmente bajo las formas del espacio y el tiempo. Se trata de una noción positivista, de base empírica y sostenida por las representaciones primitivas de nuestra intuición, dadas por el espacio y el tiempo racionalistas.

La noción de cantidad abstracta es el concepto de cantidad discreta, que es el concepto más elemental, por su simplicidad conceptual. La cantidad abstracta se basa en la igualdad de todas sus unidades. Se postula, pues, que hay una unidad –abstracta- cuya reiteración genera dichas cantidades discretas. En este caso, número y cantidad son sinónimos, noción de tipo positivista, al considerar sólo la comparación y sus transformaciones, siguiendo los planteamientos de Augusto Comte (Maz, 2000).

> *"La comparación de las cantidades abstractas y sus mútuas transformaciones se reducen á las transformaciones de sus números correspondientes, por esta razón el concepto de cantidades abstractas y el de número pueden considerarse como sinónimos"* (p. 213).

Pero la cantidad concreta, la que percibimos por medio del espacio y el tiempo, es continua y para su determinación numérica se necesitan las fracciones de la unidad y el paso al límite. Las cantidades abstractas coinciden con los naturales (o con los enteros), mientras que las cantidades concretas, que son continuas y, por ello, divisibles, coinciden con los reales (**CCO2**):

> *"… la divisibilidad de la unidad permite interpolar entre la serie de números enteros séries de números fraccionarios, […] que incluye entre sus términos todos los cocientes de números enteros, y, hace posible, para todos los casos, la división de números abstractos. […] pero no sucede lo mismo con las raíces y los logaritmos, pues […] estos valores son inconmensurables y […] se tratan por una série de valores aproximados que convergen hácia aquéllos, como a sus límites, según una ley dada, que permite el tránsito de los números conmensurables á los inconmensurables"* (p. 215).

El autor utiliza la noción de Wronski (García de Galdeano, 1907) según la cual toda cantidad consta de dos elementos:

a) El número que resulta de compararlas con una unidad.

b) La designación del tipo de especie de la cual es la cantidad (**CCO2**).

Aquí tenemos una noción relacional de número, como expresión de la medida de una cantidad, con una fundamentación positivista y racionalista de la cantidad; una vez identificados número y cantidad, deriva, finalmente, a una caracterización estructuralista.

En la conceptualización del Álgebra, García Galdeano considera tres conceptos centrales: Cantidad, Orden y Combinaciones (Operaciones) que le permiten el estudio de las leyes u operaciones generales como fundamento de la Teoría de la Cantidad. Lleva así a cabo el estudio de las estructuras algebraicas, derivado de las estructuras numéricas. El planteamiento estructuralista de García Galdeano se desarrolla en el Tercer Libro de la Sección Segunda (**CCO4**).

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Para el autor, las cantidades positivas y negativas proceden de una generalización tanto del concepto de número como de las operaciones (**TSN4**). Estas cantidades se presentan como contrarias u opuestas; en esta primera presentación no tienen entidad propia (**TSN2**). En **TSN3** se subraya su representación en la recta numérica, mediante traslaciones en direcciones opuestas. Luego, en la Segunda Parte, cuando se aborda la teoría general de las operaciones y de las cantidades se presenta el principio de permanencia, justificando la existencia de números positivos y negativos en la recta numérica que, a su vez, hacen parte de un conjunto numérico mayor (**TSN4**, **TSN10**).

En los apartados **TSN3, TSN4** y **TSN10** se proponen varios argumentos para justificar el origen de los negativos: el primero es una explicación geométrica, al indicar que las cantidades negativas surgen de un movimiento de traslación en una dirección o en su opuesto; el segundo es debido a las operaciones de adición y sustracción algebraica; el tercero es consecuencia de la aplicación del principio de permanencia de las leyes formales de Hankel.

De otra parte, el propósito del calculador es un elemento sin importancia para determinar la cualidad de la cantidad, como se aprecia en **TSN4**. Las cantidades negativas son consideradas números enteros.

7.4.4.2 Análisis básico de contenidos

- ***Conceptos básicos***

El autor asume que los signos más (+) y menos (–) son suficientemente conocidos por los lectores, lo cual le permite afirmar que estos signos son modificadores cualitativos de una cantidad, se oponen en dirección y expresan cantidades continuas y dirigidas. Luego, en **TSN4**, se indica que estos signos se generan por un movimiento de traslación sobre una recta, bien en un sentido o en su opuesto; de esta manera se asumen como cantidades dirigidas.

En **TSN5** hay una distinción entre el cero absoluto y el cero numérico de la serie de los números allí mostrada. Las cantidades negativas son consideradas como menores que cero cuando se toman como elementos de la serie de los números enteros. No hay consideraciones o reflexiones de campos ajenos a las matemáticas sobre estas ideas.

Como ya hemos comentado en **CCO5** se tratan detalladamente las cantidades generales. Como es un texto de álgebra también hay utilización de incógnitas y generalización de expresiones mediante ecuaciones.

- ***Fenomenología/Justificación***

Los ejemplos utilizados en **TSN6** son tanto situaciones que se modelizan a través de los números enteros (desplazamientos, temperaturas, años cronológicos) como situaciones cotidianas reales de carácter relativo asociadas a distancias, deudas, llenado y vaciado de recipientes. También recurre a las transformaciones geométricas para justificar su origen.

El autor hace uso en **TSN3** de la representaciones grafica, numérica y algebraica para dar una explicación de las cantidades negativas, indicando desplazamientos y traslaciones.

Hay en **TSN5** una secuencia numérica que clarifica el orden en las cantidades positivas negativas.

- ***Estructura de orden***

A través de **TSN8** y **TSN9** se deduce que en el texto se distingue la cualidad de su valor numérico; los ejemplos utilizados en **TSN5** y **TSN9** permiten deducir que se está considerando el orden normal de los números enteros.

- ***Estructura algebraica***

En **TSN7** se enuncian de manera general las leyes de las operaciones suma, resta y producto con números enteros. En todas las operaciones se comienza por enunciar la regla, se plantean y resuelven los distintos casos y, finalmente, se lleva a cabo la interpretación geométrica. La ley de simplificación de signos en la multiplicación, se fundamenta sobre la interpretación geométrica como una semejanza

La generalización de la idea de número y su consideración como expresión abstracta de la cantidad permite en el álgebra que desaparezcan *"las sustracciones imposibles"* y las raíces imposibles, como se ve en **TSN12**.

Se indica en **TSN10** que la suma y el producto son leyes de composición interna dentro del dominio de los números enteros. Al generalizar el concepto de número añadiendo la cualidad, el Álgebra extiende la operación aritmética a la noción superior de operación algebraica, que se atiene al Principio de Hankel sobre extensión de las leyes formales.

Propiedades generales son: uniforme, asociativa, conmutativa y distributiva. Los números 0 y 1 son neutros, respectivamente, para las operaciones suma y producto. La operación suma tiene como recíproca la resta, y todo elemento *a* tiene un recíproco *0 – a*.

El planteamiento de García Galdeano para los negativos es estructuralista: considera estos números como resultado de una generalización de los naturales, al incorporar al concepto abstracto de número la cualidad o dirección. Este nuevo conjunto se caracteriza por extender las operaciones de suma y producto, que conservan sus propiedades formales.

- ***Uso algebraico***

Las cantidades negativas cuando se consideran números, aparecen como resultados de cálculos y como valores posibles de las incógnitas en distintos tipos de ecuaciones y situaciones. Por otra parte, es aceptada la solución negativa al resolver un problema, pero no genera reflexiones sobre su significado. La noción de cantidad negativa se extiende para cualquier valor real.

La utilización del signo menos antecediendo a un número tan sólo indica la región derecha o izquierda a la cual corresponde tal valor.

7.4.5 Identificación de las diferencias lógico formales entre Z y N_r*

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1**. En **TSN5** se indica que *"las cantidades negativas son menores que cero"* atribuyendo un significado determinado para números enteros. La representación grafica de **TSN3** permite identificar que cada región tiene una valoración fija, la cual está relacionada con la posición que ocupa respecto a la recta numérica (González, p. 214); esto señala que el autor está utilizando el campo numérico entero.

Segundo indicador: **a_2**. Una característica de las regiones naturales relativas es que no son en ningún caso comparables entre sí (González, p. 216), pero en **TSN2** se efectúa una comparación entre las cantidades positivas y negativas, lo cual apunta al campo de los enteros. Además, en **TSN1** y **TSN3** se reitera el modo de ser opuestas las magnitudes positivas y negativas en la recta siendo esto una comparación global determinada para medidas enteras de las dos regiones.

Tercer indicador: **a_3**. En **TSN9** afirma *"De dos cantidades negativas es menor la que tiene mayor valor absoluto"* revelando el orden usual entre números negativos, determinado que la comparación entre valores negativos

* Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

se rige por el orden entre los enteros.

Cuarto indicador: a_4. En los ejemplos presentados en **TSN6** hay comparaciones entre medidas con valores numéricos de diferente signo o región, así vemos comparaciones entre temperaturas y periodos históricos en los cuales se observa la existencia de conexión y homogeneidad entre las regiones típica del campo numérico entero.

Como balance para esta primera diferencia D_1, afirmamos que no se cumple para el campo natural relativo en este trabajo de García de Galdeano,

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador: b_1. Sobre la naturaleza de los números y de las situaciones presenta significados asociados a los números enteros en **TSN6** *"No es lo mismo diez grados sobre cero del termómetro que diez grados bajo cero"*. En **TSN5** presenta una serie donde evidencia la existencia de valores inferiores y superiores a cero *"… –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 …"*, esto en coherencia con **TSN13**, donde se indica la existencia de un infinito negativo y otro positivo negando con ello la existencia de limites inferiores, es una aplicación de la estructura numérica de los enteros.

Segundo indicador: b_2. La representación utilizada para los números negativos en este texto es simbólica en **TSN4** *"+n ó –n"* y con simbolización matemática en **TSN10** *"X=–255/77"*, ambas son conocidas y determinadas para los números enteros.

Tercer indicador: b_3. Las transformaciones cuantitativas y métricas con cantidades negativas las hallamos en **TSN10**, allí se observa como un determinante puede sufrir transformaciones a través de operaciones matemáticas para adquirir un valor negativo; también en **TSN13** se plantea la posibilidad de que un móvil adquiera cualquier valor numérico real al desplazarse de forma continua sobre la recta numérica. Esto denota ausencia de primer elemento y unicidad de la serie numérica, por lo cual estas situaciones se desarrollan en el campo numérico entero.

La valoración de esta segunda diferencia D_2 indica que no hay indicios de cumplimiento para el campo natural relativo.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

Los ejemplos se presentan bajo una notación y estructura algebraica, representando en su mayoría los valores negativos de manera literal asumiendo la generalidad de estos; en **TSN7** los ejercicios y ejemplos indican la continuidad de medidas al cruzar el cero, reafirmándose esto mediante el ejemplo del móvil que *"recorre desde el infinito negativo al positivo"* en **TSN13**.

Como balance de esta tercera diferencia **D_3**, afirmamos que ésta no se cumple para el campo natural relativo.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).

No hay evidencias para sostener que en esta obra, García de Galdeano trabaje con un doble cero, puesto que los negativos reciben un tratamiento algorítmico y algebraico formal donde no tiene cabida la existencia de dos orígenes como se observa en **TSN2**, **TSN10** y **TSN13**.

Consideramos que no se cumple esta cuarta diferencia **D_4** para el campo de los números naturales relativos.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

Como se ha mencionado el tratamiento algebraico de los negativos en el texto señala una composición aditiva propia de los números enteros. Un aspecto que lo confirma es la consideración que en **TSN13** hace del principio de permanencia de las leyes formales de Hankel el cual utiliza como apoyo para presentar algunas propiedades de las operaciones numéricas del campo numérico natural ampliado, esto es, el campo numérico de los enteros.

Consideramos que la quinta diferencia **D_5** no se cumple para el campo de los números naturales relativos.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Zoel García de Galdeano en relación con las diferencias:

*Tabla 7.1 Diferencias entre **Z** y **N**$_r$ en el Tratado de Álgebra de García de Galdeano.*

Autor	**D_1**					**D_2**				**D_3**	**D_4**	**D_5**
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**		**b_1**	**b_2**	**b_3**				
García de Galdeano	**No**	**No**	**No**	**No**	No	**No**	**No**	**No**	No	No	No	No

7.4.6 Tratamiento global de los negativos en el *Tratado de Álgebra*

Zoel García de Galdeano considera la posibilidad de efectuar operaciones con números enteros; aunque en algunos apartados se refiere a situaciones de capitales (debe, haber), entrada y salida de agua, éstas se hallan inscritas en contextos de tipo algebraico y, trata de modelizarlas, no a través de relaciones aritméticas, sino, de relaciones algebraicas. No se realizan cuestionamientos o reflexiones filosóficas sobre el significado de los números negativos; se acepta con naturalidad su aparición.

Los números negativos son tratados por García de Galdeano como números enteros; inicialmente en su presentación se hace como opuestos a los positivos.

El texto presenta una doble naturaleza para el origen de los negativos: como resultado de operaciones algebraicas y como desplazamientos geométricos. Esta doble naturaleza y la ampliación del concepto de número le permiten realizar una generalización de los negativos, representando no solo magnitudes, sino también, tiempo.

El autor se desliga de consideraciones filosóficas para aceptar y plantear que los negativos son menores que cero; argumenta que esto es válido bajo consideraciones numéricas de cero como elemento de una serie.

La fenomenología contemplada para los negativos es geométrica y algebraica; se soporta en ejemplos de situaciones cotidianas reales modelizadas por los números enteros y, cuando recurre a situaciones con cantidades relativas, indica que deben tomarse en cuenta sólo en su significado. Estos fenómenos son de desplazamientos, de capacidad, térmicos, contables, algebraicos, aritméticos y geométricos.

Los sistemas de representación utilizados para explicar y dar ejemplo de los números negativos están asociados a los distintos tipos de situaciones fenomenológicas; estos son verbales (explicaciones retóricas), numéricas (números y signos), algebraicas (letras, números y signos) y, gráficos (líneas y rectas).

7.5 Elementos de Aritmética Universal. Parte primera. Calculatoria, 1900.

7.5.1 Autor

Luís Octavio de Toledo y Zulueta (Madrid, 1857 – Madrid, 1934) (**CA1**). Estudia la segunda enseñanza en Madrid en el Colegio Hispano-Romano de Nuestra Señora de la Esperanza y en el Instituto de San Isidro. Realiza estudios universitarios en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, obteniendo el grado de doctor en Ciencias Exactas en 1882 (**CA2**, **CA3**).

En 1882 gana por oposición la cátedra de Matemáticas en el Instituto de León; en 1890 la de Geometría y Geometría Analítica en la Universidad

de Sevilla. En 1893 es nombrado catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Zaragoza y, finalmente, en 1898 obtiene la cátedra de la misma disciplina en la Universidad Central de Madrid (**CA4**). Es nombrado decano de la Facultad de Ciencias en 1917 desempeñándose como tal hasta el año 1929 (Enciclopedia Espasa-Calpe, 1929).

Tiene como profesores a Agustín Montreal, Emilio Ruiz de Salazar, Antonio Aguilar y Eduardo Torroja, todos ellos competentes en sus campos pero cuyas contribuciones científicas no se consideran relevantes (**CA5**).

La larga vida de Octavio de Toledo se inicia el mismo año de la promulgación de la ley Moyano; en su juventud conoce las libertades instauradas durante el sexenio democrático. Vive el derrocamiento de Isabel II, la primera República y la vuelta de Alfonso XII al trono, la dictadura de Primo de Rivera y fallece durante la II República. De tal manera que vivió bajo todas las formas de gobierno que se sucedieron en España en los años de cambios y transformaciones de la segunda mitad del siglo XIX y primer tercio del siglo XX. La influencia del krausismo en su juventud, la relación con la Institución Libre de Enseñanza y el compromiso con el desarrollo cultural, matemático y científico, hacen de Luis Octavio de Toledo un destacado personaje de la universidad española de estos años (**CA4**).

Su participación en actividades científicas y académicas es destacada; fue vicepresidente y presidente de la sección de Matemáticas de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias y miembro numerario de la Real Academia de Ciencias en 1914 (Hormigón, 1988).

Hizo parte de ese destacado grupo de matemáticos españoles que, a finales del siglo XIX, aglutinó la Universidad de Zaragoza y fue motor de desarrollo y difusión de las matemáticas españolas (**CA4**, **CA7**).

En 1911 participa como miembro de la comisión organizadora para la fundación de la Sociedad Matemática Española junto al general Benítez, catedrático de la Universidad Central, Cecilio Jiménez Rueda y Rey Pastor; en 1919 es elegido vicepresidente y en 1924 presidente de la Sociedad (Peralta, 1999; Hormigón, 1988). Fue delegado en España de la *Commission Internationale pour l`Enseignement Mathématique* (Enciclopedia Espasa-Calpe, 1929) (**CA5**, **CA7**).

El reconocimiento de su autoridad en el círculo matemático español de la época lo hallamos, por ejemplo, cuando Julio Rey Pastor lo señala como referencia para apoyar algunas de las afirmaciones que hace durante el discurso inaugural del Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, celebrado en Valladolid en 1915.

Con motivo de la celebración en 1912 del V Congreso Internacional de Matemática en Cambridge la delegación española redacta un informe sobre la situación de las matemáticas en España en la cual Octavio de Toledo escribe una memoria titulada *Los cursos de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias* (Peralta, 2004; Hormigón, 1988) (**CA7**).

Como afirma Peralta (2004), Octavio de Toledo fue un destacado matemático que jugó un papel sobresaliente durante el primer tercio del siglo XX en la Sociedad Matemática Española; no sólo escribió textos universitarios sino que también se interesó por la enseñanza así como por la historia de las matemáticas.

Publicó numerosos artículos las revistas especializadas de la época, sobre todo en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, *El Progreso Matemático* y la *Revista Matemática Hispano-Americana*; algunos de estos son *Teoría formal de las progresiones, Propiedades del Wronskiano* y *La historia de la Matemática pura en España* (Peralta, 2004; Hormigón 1988)

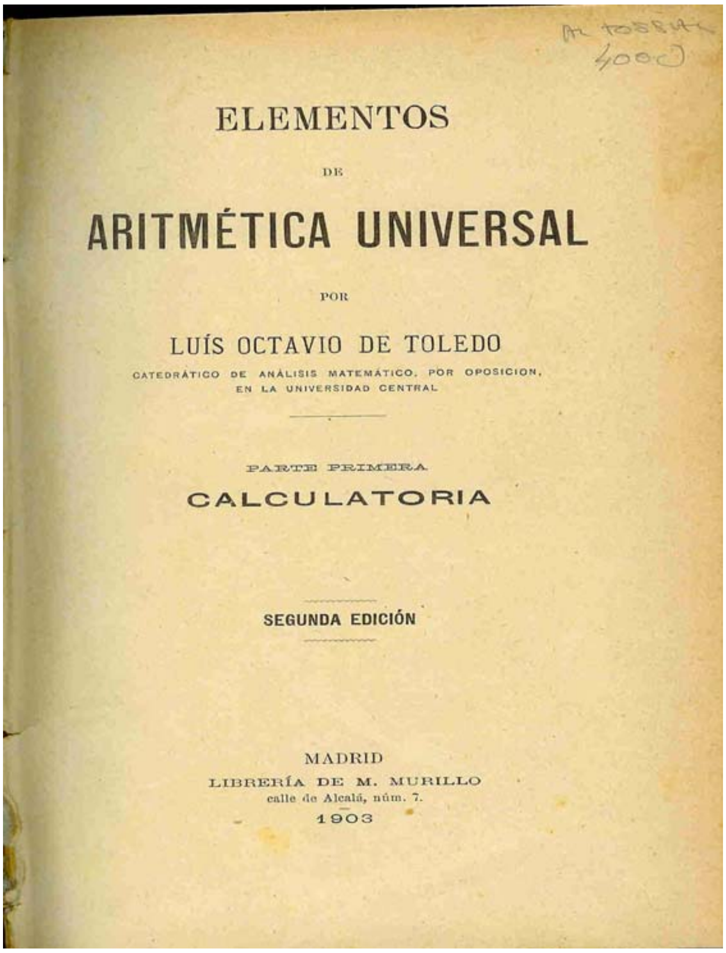
Entre sus libros publicados destacan: *Elementos de la teoría de las formas* (1889), *Tratado de trigonometría rectilínea y esférica* (1903), *Tratado de Álgebra* (1905), *Estudios de análisis matemático I. Introducción al estudio de las funciones de variable compleja* (1907), los dos tomos del tratado *Elementos de aritmética universal* (*Calculatoria*, 1900-1902 y *Coordinatoria. Determinantes. Algoritmos ilimitados*, 1916), y *Algunos de los descubrimientos realizados en la teoría y resolución de las ecuaciones durante el siglo XIX* (1914), trabajo este último que fue preparado como discurso, leído ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en su recepción pública como académico (Palau y Dulcet, 1971) (**CA6**).

Se pueden hallar más referencias a la vida y obra de Luis Octavio de Toledo en la Enciclopedia Espasa-Calpe (1929), Barinaga (1934), Hormigón (1988), Peralta (1999, 2003 y 2004) y Palau y Dulcet (1971) (**CA8**).

7.5.2 Caracterización del texto

Elementos de Aritmética Universal. Parte primera. Calculatoria. (1900). Madrid: Imprenta de Fortanet, (Palau, 1971) (**CGO1**, **CGO2**). En este estudio hemos trabajado con la segunda edición de 1903, editado por la Librería de M. Murillo en la imprenta de Fortanet.

El texto tiene 726 páginas en octavo, distribuidas en veintidós capítulos. Incluye además una introducción general al estudio de la Matemática y otra al estudio de la Aritmética (**CGO3**).



Después de presentar la teoría general de las operaciones, el texto trata cada una de las operaciones aritméticas, el sistema de numeración, las propiedades de los polinomios enteros, de los números fraccionarios y de los números enteros. También aborda el estudio de las congruencias, la teoría de la divisibilidad, la potenciación y radicación, números inconmensurables, números aproximados, los logaritmos y las progresiones. Dedica un capitulo a los números imaginarios y cita la obra de Rey y Heredia (**CGO3**, **CCO6**).

El objetivo de la obra es servir de manual para la enseñanza de las matemáticas y su finalidad didáctica está claramente definida por el propio autor cuando expresa su intención de:

> *"Hacer partir al alumno de los conceptos más simples y puramente intuitivos, ya por él conocidos más o menos perfectamente, irle conduciendo paulatinamente de estos conceptos á otros cada vez más*

> *elevados hasta hacerle llegar insensiblemente y por lenta graduación al concepto general y complejo de número, ofrece tan innegables ventajas, que en realidad la vacilación y la duda no nos eran permitidas"* (p. 25) (**CGO4**).

Como se observa no sólo utiliza el método inductivo a partir de nociones intuitivas primarias, sino que encuentra el germen de un incipiente constructivismo educativo.

Octavio de Toledo retoma la costumbre, ya casi perdida durante la segunda mitad del siglo XIX, de mencionar los autores y fuentes bibliográficas de donde toma las ideas matemáticas. Menciona a Rey y Heredia, Jiménez Rueda, Jiménez E., Lagrange, Rubini, Chrystal, Mier, Buckhard, Glaisher, Gauss, Lucas, Kronecker, Dirichlet, Ricardo Vázquez, Sánchez Vidal, Lasala, Lefebure de Fourcy, Amadeo, Capella, Cesáro, Tannery y, Villafañe. Recurre tanto a obras antiguas como es el caso del *Curso completo* de Lacroix como a obras recientes como es el caso del *Collage Álgebra* de Boyd publicada en Chicago en 1901. El trabajo que estudiamos es un libro de divulgación, que presenta los avances conocidos sobre estructuras numéricas a finales del siglo XIX (**CGO5, CGO6**).

En la Introducción general al estudio de la Matemática trata como nociones iniciales las de igualdad y desigualdad, continúa con el concepto de cantidad y sus tipos, la noción de ciencia y la de matemática, las partes de la matemática. Concluye esta introducción con una serie de definiciones generales, que incluyen los conceptos de atención, percepción, idea, juicio, proposición, raciocinio, método, definición, división, demostración, axioma, postulado y teorema. Estas nociones y su encadenamiento formal, muestran que para Octavio de Toledo el conocimiento –incluido el matemático- procede de la experiencia. La clasificación de las ciencias en experimentales y abstractas o especulativas, sitúa las matemáticas en el campo de las ciencias especulativas, si bien considera que, además de las matemáticas puras o abstractas, también tienen importancia las matemáticas aplicadas o ciencias físico- matemáticas, de las cuales el autor no se ocupa. La cantidad y el orden son los objetos de estudio de las matemáticas (**CGO5**).

El autor define de manera clara, concisa y metódica cada uno de los conceptos matemáticos elementales que utilizará luego para apoyar la exposición de otros más complejos; de la siguiente forma enuncia qué es cantidad, magnitud y número:

Cantidad: *"Se llama CANTIDAD toda cualidad de los seres ú objetos que siendo susceptible de aumento y disminución, sea por su naturaleza mensurable"* (p. 6) (**CCO2**).

Después de esta definición revisa distintas cualidades de los seres u objetos que pueden compararse y señala dos grados: aquéllas que sólo pueden compararse mediante las relaciones de igualdad o desigualdad y aquéllas otras en las que se puede establecer cuánto es mayor o menor una que otra. A partir de ahí establece:

Magnitud: *Se llama MAGNITUD á toda cualidad de los seres ú objetos que los hace ser iguales ó desiguales á otros con los cuales se les compara"* (p. 6); *"se llama CANTIDAD á toda magnitud determinable"* (p. 6) (**CCO2**).

Precisa con cierta finura que no son las cosas las susceptibles de aumento o disminución, sino la cualidad en abstracto; también critica las limitaciones de la definición.

> *"La referida definición [de cantidad] no es exacta, por comprender en sí muchas cosas susceptibles del más y del menos, y que, sin embargo, no son cantidades, cual sucede con la voluntad, el conocimiento y otra porción de fenómenos y actos de conciencia que no se pueden apreciar cuantitativamente, á pesar de ser susceptibles de aumento y disminución.*
>
> *Para nosotros, pues, constituye la esencia de la cantidad la mensurabilidad, es decir, la propiedad de poder relacionarse con otra de su misma especie; sin esta condición no puede existir cantidad, […] por extensión suelen denominarse cantidades, y nosotros así lo haremos algunas veces, á las cualidades de los seres que sean susceptibles de determinación cuantitativa; así diremos que los pesos, las longitudes, los volúmenes, etc., son cantidades; pero entendiendo siempre que la verdadera cantidad no es el peso, ni la longitud, ni el volumen, et., sino la propiedad en virtud de la cual son susceptibles de relacionarse ó compararse"* (p. 7) (**CCO2**).

Por mensurabilidad entiende no solo la posibilidad de establecer la comparación de una cantidad con otra de su misma especie *"sino también la de poder constituir la primera por la repetición y agregación sucesiva de cantidades iguales a la segunda, que es la propiedad que distingue a la divisibilidad"* (p. 7).

De ahí deriva que toda cantidad está constituida o formada por la agregación de una serie de cantidades de su misma especie, lo cual permite establecer especies o clases de cantidades. Retrato de una noción claramente positivista.

Indica que hay dos clases de cantidades: *"CANTIDAD DISCRETA es la constituida por elementos individuales independientes entre si. CANTIDAD CONTINUA es la formada por el acrecimiento constante de elementos homogéneos enlazados por términos comunes"* (p. 8) (**CCO2**).

Prosigue señalando que *"en las cantidades se debe atender, no sólo á su magnitud, sino también a su manera particular de existir, á su cualidad, ó sea, á aquel modo de ser ó aquella particular afección que las hace concurrir de diversa y aun opuesta manera á los fines intentados por el cálculo"* (p. 20), citando al matemático español Rey y Heredia

Para Octavio de Toledo la noción de número es un concepto derivado del concepto de cantidad, que surge o bien de la consideración de cantidades discretas, o bien de la consideración de cantidades continuas:

Número: *"De dos maneras diferentes podemos adquirir la idea de número: por la contemplación de seres diferentes entre sí pero homogéneos, esto es, de la misma especie, y por la mensuración de una cantidad cualquiera, es decir, que la idea de número puede adquirirla nuestra inteligencia, ó por la idea de multitud o pluralidad, o por la de comparación o mensuración"* (p. 16) (**CCO1**).

También establece el orden como una segunda característica para el número que procede de la pluralidad:

> *"Cuando nos detenemos a considerar los seres distintos que nos rodean, adquirimos dos ideas diferentes: la de pluralidad y la de orden. Adquirimos la idea de pluralidad por cuanto la impresión que recibimos nos acusa la presencia simultánea de más de un ser; y adquirimos la idea de orden por cuanto las impresiones que de cada objeto recibimos nos acusa una diversa colocación en los seres que contemplamos; y además, porque en esas mismas impresiones hay una cierta sucesión"* (p. 16).
>
> *"Considerada de este modo la multitud ó pluralidad, constituye una cantidad discreta; el objeto cuya repetición o aglomeración forma la cantidad recibe el nombre de unidad: la operación en virtud de la cual queda la cantidad determinada por la unidad se llama contar; y los signos representativos de los resultados de esta determinación se llaman números. […] La idea de número es la de representación de cuantas veces es preciso repetir la unidad para que la cantidad quede determinada, y por consiguiente: número es la expresión de un conjunto ó agrupación de unidades. Como consecuencia de esta definición observaremos que el número, así considerado, es esencialmente abstracto; es además entero desde el momento que se limita á expresar las veces que la unidad aquí considerada se une á sí misma para formar la pluralidad; y por último, que la unidad aquí considerada es abstracta é indivisible, es una entidad simple."* (p. 17) (**CCO1**, **CCO3**).

El autor distingue entre la acción de contar y el número: *"Se llama CONTAR á determinar una pluralidad de cosas separadas. Y que se llama NÚMERO la expresión de un conjunto ó agregación de unidades"*. (p. 17);

"NÚMERO es el resultado de comparar una cantidad con su unidad" (p. 18). (**CCO1**). Además diferencia varias clases de números, entre ellos: *"NÚMERO ENTERO es el que consta de una ó varias unidades"* (**CCO3**), *"NÚMERO FRACCIONARIO es el que consta de una ó varias partes iguales de la unidad. NÚMERO INCOMENSURABLE es el que no puede expresarse por un conjunto de unidades ni de partes iguales de unidad"* (p. 20) (**CCO1**).

Octavio de Toledo indica que *"MATEMÁTICA es la ciencia que tiene por objeto el estudio de la cantidad."* (p. 9). Señala la división de las matemáticas en pura o abstracta y mixta o aplicada. Define lo que son aritmética y análisis matemático:

Aritmética es la *"ciencia que se ocupa del estudio de la cantidad discreta ó numérica"* (p. 1). *"ARITMÉTICA es la ciencia que estudia los números"* (p. 23).

Dentro de la Aritmética considera dos parte: Aritmética vulgar y Aritmética universal, y establece que:

> *"La ARITMÉTICA UNIVERSAL […] estudia las leyes de combinación y propiedades de los números en general, o sea, expresados en su pleno y total concepto"* (p. 24).

Análisis matemático es la *"ciencia que se ocupa del estudio de la cantidad en general, ó sea, bajo su doble concepto de numérica y extensiva"* (p. 10).

El Capítulo II se dedica a la Teoría general de las operaciones. La noción de operación la sostiene sobre base empírica:

> *"Dase el nombre de operación, en general, al procedimiento por medio del cual se transforma un fenómeno en otro; y en particular, denominase operación en Aritmética al procedimiento por cuyo medio se combinan ó enlazan entre sí varios números"* (p. 34).

También en este capítulo se presentan las leyes generales de carácter formal (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.) mediante notación algebraica para las operaciones aritméticas apoyándose en el principio de la permanencia de la leyes formales enunciado por Hankel, afirmando que éste permite la generalización de las definiciones de los números (p. 47) (**CGO7**).

En el Capítulo III, dedicado a la Notación, la generalidad está tratada mediante expresiones literales, las cuales llama algorítmicas o algebraicas y transcendentes. Estas expresiones sirven *"para representar de una manera general los números, y por consiguiente, las cantidades"* (p. 55). Las nociones de incógnita y de ecuación no se tratan en esta primera parte de la obra (**CCO4**).

Los números negativos se tratan en los capítulos IV, V y VI , dedicados a la adición, sustracción, multiplicación y división, como parte de la serie completa de los números enteros; esta serie queda establecida en las páginas 74 y siguientes (**CCO5**).

La obra esta escrita en un lenguaje moderno y casi actual. Utiliza una notación algebraica y formal (**CCO4**). Tuvo una gran acogida entre otros aspectos por la introducción de la teoría de números inconmensurables (**CGO6**, **CGO7**).

7.5.3 Tratamiento dado a los negativos

Algunos de los párrafos seleccionados y ordenados son:

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.
"Para expresar que dos ó más números han de sumarse, se coloca entre ellos el signo +, que se lee mas" (p. 37).

"para expresar que la operación de la sustracción se emplea el signo –, que se lee menos ..." (p. 37).

"... por medio de los signos + ó – de la adición y sustracción." (p. 57).

"… a la indicación de la existencia de un sustraendo de c unidades que carece de minuendo de donde restarse, ó que debe restarse del minuendo cero, y como para indicar que de un número cualquiera, incluso del cero, han de restarse c unidades, se antepone al símbolo c el signo menos de la sustracción, …" (p. 78).

Los signos más (+) y menos (–) se utilizan para expresar que se deben realizar las operaciones de adición o de sustracción; incluso el signo – que representa los números negativos, procede de, e indica, una sustracción.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.
"Son POSITIVAS las cantidades que tienen un modo de existir particular, cualquiera que éste sea; son NEGATIVAS aquellas cuyo modo de existir sea contrario, opuesto al de las positivas; y son IMAGINARIAS Ó INDIRECTAS aquellas cuyo modo de existir sea distinto del positivo y del negativo. Estas denominaciones no tienen nada de absoluto, son puramente relativas" (p. 22).

La presentación de los negativos es semejante a la hecha por García de Galdeano. Estos se presentan como cantidades con existencia propia pero contrarias a las positivas y, a la vez, subordinadas al modo determinado que asuman las positivas, existiendo por tanto un carácter relacional entre positivos y negativos, relativos los unos a los otros. No se recurre a ninguna vinculación de los negativos con fenómenos físicos particulares, sino que la noción de cantidad negativa procede de un análisis de los tipos de cualidad que puede tener una cantidad general, como vemos en el apartado siguiente.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.
"Las afecciones de la cualidad de la cantidad son tres, pues dada en un ser ú objeto una afección o modo de existir cualquiera, todos los demás seres ú objetos podrán poseer esa afección de igual modo que aquél, podrán poseerla de modo completamente opuesto, ó podrán poseerla de una cualquiera de las infinitas maneras diversas que entre ambas median […]
El primer modo de considerar esa afección, que es el que tomamos por base de referencia cualitativa, se le llama afirmativo, porque afirmamos la existencia de aquella particular afección; y las cantidades que poseen ese modo de existir reciben el nombre de positivas.
El segundo modo de considerar esa afección recibe el nombre de oposición ó negación, porque no solo negamos aquella manera de existir, sino que afirmamos la existencia del modo contrario ú opuesto; y las cantidades que poseen la afección referida en esta nueva forma reciben el nombre de opuestas ó negativa" (p. 21).

Negativo es uno de los tres modos de cualificar cualquier cantidad. El autor señala la naturaleza de tipo lógico de las cantidades positivas y negativas al indicar el carácter de afirmación o negación de unas y otras.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas. En el estudio de las propiedades formales de las operaciones surgen las nociones de operaciones inversas, objetos recíprocos y series recíprocas:

"Suponiendo que $\cap$ designa una operación conmutativa, asociativa y de módulo m, acabamos de ver que cada una de las combinaciones $a\cap m$, $m\cap a$, $a\cup m$ se reducen á a; pero la combinación $m\cup a$ no tiene ya la misma propiedad, y define un nuevo objeto que se denomina recíproco del a, y se representa por la notación $\bar{a}$; es decir, que por definición se tiene

$$m \cup a = \bar{a}\,.$$

De la definición de objeto recíproco y de la segunda de las igualdades (3`) se deduce

$$\left.\begin{array}{l} a \cap \bar{a} = a \cap (m \cup a) = m \\ \bar{a} \cap a = (m \cup a) \cap a = m \end{array}\right\} \quad (9)"$$

(pp. 49-50)

"[…] hemos supuesto implícitamente que la operación directa $\cap$ verificada sobre una serie de objetos

$$a, b, c, d\ldots, \quad (A)$$

era siempre posible, y daba por resultado un objeto perteneciente á esa misma serie, que llamaremos serie directa; suponíamos además que constituida una nueva serie con los objetos recíprocos de los de la serie (A), la serie

$$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \bar{d},\ldots, \qquad (\bar{A})$$

que llamaremos serie recíproca;" (pp. 52-53)

Los negativos surgen como recíprocos de los elementos positivos de una serie sobre la que se efectúa una operación directa.

"Si recordamos (n.^{os} 15 y 16) el modo de constituirse la serie fundamental 0, 1, 2, 3, 4, 5, ….,(1)
y recordamos además que el carácter distintivo de los números escritos en ella consiste en que cada número tiene una unidad $\begin{Bmatrix} mas \\ menos \end{Bmatrix}$ que el número que le $\begin{Bmatrix} antecede \\ sigue \end{Bmatrix}$, ocurre inmediatamente la idea de prolongar la serie indefinidamente hacia la izquierda del cero, colocando los mismos números situados á la derecha de éste, dispuestos en el mismo orden, y con un signo cualquiera que sirva para distinguirlos de estos últimos; este signo podría ser el – colocado encima de cada número; así $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$,…..,$\bar{a}$, leyendo éstos símbolos uno negativo, dos negativo,…, a negativo: la serie (1) se convertirá en la así

$$\ldots\bar{4},\ \bar{3},\bar{2},\bar{1},\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots(2)$$

No olvidando que por definición los números de esta serie conservan el carácter distintivo de los números de la serie (1); es decir, que por definición cada número escrito en la serie (2) tiene una unidad $\begin{Bmatrix} mas \\ menos \end{Bmatrix}$ que el número que le $\begin{Bmatrix} antecede \\ sigue \end{Bmatrix}$. Así tendíamos, por ejemplo,

$$\bar{4}+1=\bar{3},\ \bar{3}+1=\bar{2},\ \bar{2}+1=\bar{1},\ \bar{1}+1=0, \text{ y al contrario,}$$
$$0-1=\bar{1},\ \bar{1}-1=\bar{2},\ \bar{2}-1=\bar{3},\ \bar{3}-1=\bar{4}, \text{ etc.}$$

Los números escritos en la serie (2) a la izquierda del cero reciben el nombre de números negativos, y por contraposición, los escritos á la derecha el de números positivos, y suele distinguírseles de los negativos colocando encima de cada uno de ellos el signo +; así que la serie (2) se presentara bajo la forma

$$\ldots,\bar{a},\ldots,\ \bar{4},\ \bar{3},\ \bar{2},\ \bar{1},\ 0,\ \overset{+}{1},\ \overset{+}{2},\ \overset{+}{3},\ \overset{+}{4},\ \ldots,\ \overset{+}{a},\ldots,(3)$$

denominándose esta última serie natural completa de los números enteros. Al número $\overset{+}{1}$ se le llama unidad positiva, ó simplemente unidad, y al $\bar{1}$ se le denomina unidad negativa." (pp. 75-76).

Los números negativos surgen como ampliación de la serie de los números naturales mediante la sustracción sucesiva de una unidad a cero. Estos valores negativos tienen una notación propia que los diferencia de los positivos.

> *"Números negativos: origen algorítmico y significación.—Ampliada la serie fundamental de los números enteros absolutos con la creación de estos nuevos símbolos que hemos llamado números negativos, veamos ahora si la operación de sustracción es ya posible en todos los casos, y veamos qué significación debemos dar á estos símbolos que acabamos de crear. Para ello, designemos por a y b el minuendo y sustraendo de una sustracción y estudiemos separadamente los tres casos diferentes que se pueden presentar, según sea a mayor, igual ó menor que b.*
>
> *1.^{er} caso. a>b. —En este caso podemos hacer a=b+c, y se tendrá*
>
> $$a—b=(b+c)—b;$$
>
> *y para verificar la sustracción será suficiente buscar en la serie (1) el minuendo a=b+c, retroceder desde a, b lugares, ó sea contar b lugares hacia la izquierda, y el numero de la serie en que nos detengamos, que será el c, expresará la diferencia entre los números a y b; así que tendremos*
>
> $$a—b = (b+c)—b = c.$$
>
> *Es evidente que si hubiéramos operado sobre la serie (3) en vez de hacerlo sobre la (1), habríamos llegado al número $\overset{+}{c}$, que es el mismo c de la serie (1).*
>
> *2º caso. a=b. —En este caso podríamos hacer, a=b+0 (nº 40), y tendríamos entonces*
>
> $$a – b=(b+0) – b = 0,$$
>
> *pues para obtener la diferencia a – b en este caso debemos partir de cero y contar a lugares hacia la derecha para hallar el minuendo, contar después á partir de a hacia la izquierda tantos lugares como unidades tiene el sustraendo b, y por ser a=b, volveremos al punto de partida, ó sea al número cero. Es evidente que es indiferente operar sobre la serie (1) ó sobre la (3).*
>
> *3.^{er} caso. a<b. —Si hacemos en este caso b=a+c, se tendrá*
>
> $$a – b = a – (a+c).$$
>
> *En este caso la operación es imposible en la serie (1), pues debiéndose recorrer a lugares hacia la derecha á contar del cero para hallar el minuendo, al retroceder otros a lugares hacia la izquierda llegaremos nuevamente al cero, y no podríamos seguir retrocediendo los c lugares que exigen las c unidades del sustraendo que aún faltan por restar. Pero si operamos sobre la serie (3), no se nos presentará ninguna dificultad, pues al avanzar a lugares hacia la derecha para hallar el minuendo, y retroceder después a+c lugares, tantos como unidades tiene el sustraendo, llegaremos al número negativo $\overset{-}{c}$, y éste será el resultado de la sustracción, pudiendo escribir por consiguiente*

$$a - b = a - (a+c) = \bar{c}.$$

Para interpretar este resultado de una manera lógica, y conseguir que el número $\bar{c}$, y por consiguiente todos los números negativos tengan una significación algorítmica perfectamente clara y definida y que no encierre contradicción alguna, observemos que el procedimiento empleado para verificar la sustracción en todos los casos ha consistido en buscar la serie (3) el minuendo a y retroceder de derecha á izquierda tantos lugares como unidades tiene el sustraendo b; pero por la definición y constitución de la serie (3) al retroceder del número a al que le precede hemos restado de a una unidad, al retroceder dos lugares hemos restado de a dos unidades,…. y al retroceder b lugares hemos restado de a, b unidades: en los dos primeros casos la cuestión no presenta dificultad alguna, según hemos visto, y respecto al tercero podemos observar que siendo b=a+c, al partir a y tener que retroceder a+c lugares, podemos retroceder primero a lugares y habremos llegado al cero; y como todavía tenemos que retroceder c lugares, ó sea, tenemos que restar de cero c unidades, y esta operación no es posible, nos limitamos á dejar indicada la sustracción de esas c unidades mediante el símbolo $\bar{c}$*, que será equivalente, por lo tanto, á la indicación de la existencia de un sustraendo de c unidades que carece de minuendo de donde restarse, ó que debe restarse del minuendo cero; y como para indicar que de un número cualquiera, incluso del cero, han de restarse c unidades, se antepone al número c el signo – de la sustracción, los dos símbolos* $\bar{c}$ *y –c serán equivalentes, tendrán una misma significación y podrán sustituirse mutuamente: así que podremos establecer*

$$\bar{c} = -c,$$

y por consiguiente la relación (a) se convertirá en

$$a - b = a - (a+c) = \bar{c} = -c.$$

Por tanto, todo número negativo no es otra cosa más que un sustraendo que carece actualmente de minuendo, ó que tiene el minuendo cero, y que está dispuesto á restarse de cualquier minuendo que operaciones ulteriores puedan proporcionarle.

La identidad de los símbolos $\bar{c}$ *y –c permite escribir la serie (3) en una forma algo diversa de la empleada hasta ahora y que presenta ventajas indudables bajo el punto de vista algorítmico; los números negativos se escriben bajo nueva forma que acabamos de explicar, ó sea anteponiéndoles el signo – en lugar de colocárselo en su parte superior, y en los números positivos se omite el signo +; la nueva forma de la serie fundamental, que será la que adoptemos de ahora en adelante, será por consiguiente:*

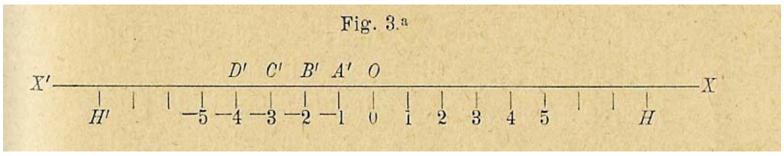
$$\ldots -a, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, \ldots \quad (4)$$

Podemos observar en esta serie que, así como los números positivos están constituidos por la agregación ó repetición de la unidad positiva +1, los números negativos están constituidos por la repetición de la

unidad negativa –1, pues por definición tenemos
–1–1=–2, –2–1=–3, –3–1=–4, …–a–1=–(a+1)” (pp. 76-79).

Los números negativos amplían y generalizan la sustracción; para ello, en la ampliación del campo numérico se recurre a los postulados del principio de permanencia de Hankel, esto es, que las leyes que se cumplen para el campo numérico original se trasladan y verifican también el campo numérico expandido.

> *“Interpretación geométrica de la serie completa de los números enteros.—De la serie (4) se puede dar una imagen gráfica ó geométrica análoga á la dada (nº 17) para los números absolutos. Supongamos para ello que sobre una recta indefinida XX´ (fig. 3ª), y a partir de un punto O que miraremos como origen, y hacia su derecha construimos la imagen de los números positivo; llevemos después, á partir del mismo punto y hacia su izquierda, distancias iguales a las 01, 02, 03,…, y hagamos corresponder á cada uno de los puntos A`, B`,C`, D`, … el número que expresa la medida de su distancia al punto fijo O, pero afectado del signo –; y entre los números de la serie fundamental (4) y los puntos de la serie XX` habremos establecido una correspondencia inequívoca de tal naturaleza, que designado un punto de la serie XX` podremos designar sin vacilación el número positivo ó negativo de la serie (4) que le corresponde, y al contrario. No tendremos más que observar que todo punto cuya distancia al origen esté expresada por un número* $\begin{Bmatrix}\textit{positivo}\\ \textit{negativo}\end{Bmatrix}$ *estará situado á la* $\begin{Bmatrix}\textit{derecha}\\ \textit{izquierda}\end{Bmatrix}$ *del punto O. Y puede observarse también, como ya lo hicimos precedentemente (nº 17), que al punto O corresponderá el número cero.*



(pp. 79-81).

Octavio de Toledo recurre a una representación geométrica para mostrar tanto la posición de los números negativos en la recta numérica respecto a cero como para ilustrar la correspondencia existente entre distintos puntos en ella con los valores numéricos negativos.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.

En el texto no se ha encontrado referencia alguna a esta categoría; esto se debe a que el autor hace un tratamiento de los números negativos de tipo algebraico, donde los números están sujetos al cumplimiento de reglas formales.

TSN6: Ejemplificación.

"10. […] Muchos ejemplos pudiéramos citar de las cantidades en las cuales no es suficiente expresar el cuánto para que de ellas formemos exacto y cabal concepto: no expresan lo mismo cierto número de grados termométricos si se cuentan sobre el cero ó bajo el cero; no influye de igual manera en el estado de un capital una suma de dinero, si el poseedor de ese capital debe percibirla ó si debe abonarla; no indica la misma época un número de años contado antes ó contados después del comienzo de nuestra era; no expresa igual situación sobre la superficie de la Tierra un punto que diste de otro determinado número de kilómetros, si éstos han de recorrerse de Norte á Sur, de Sur a Norte, ó en otra cualquiera de las infinitas direcciones en que podrían ser recorridos, etc. Puede observarse que en los primeros ejemplos hay dos maneras de existir opuestas y perfectamente determinadas, y que en el último hay una multitud de ellas comprendidas en las tres antes fundamentalmente definidas." (pp. 22-23)

"48 […] En el terreno concreto se encuentran numerosas especies de cantidades que presentan la misma oposición; en los mismos ejemplos citados anteriormente (nº. 10), un ascenso y un descenso de cierto número de grados termométricos, la percepción y la entrega de una cierta suma de dinero, el recorrido de un número de kilómetros en una dirección y en su opuesta, son ejemplos bien claros y patentes de cantidades opuestas." (p. 82).

Los ejemplos presentados corresponden a fenómenos modelizados mediante los números enteros; estos enfatizan el carácter de opuestos relativos entre los positivos y los negativos. También recurre a fenómenos físicos como el desplazamiento; sin embargo, el autor aclara lo que se debe entender por opuesto según el contexto en el que se utilicen unos y otros, como en el caso de los desplazamientos en una u otra dirección.

TSN7: Regla de los signos

Adición y Sustracción:

"49. Adición y sustracción en general.— La introducción de los números negativos lleva consigo la necesidad de ampliar las definiciones todas de la adición y sustracción, de tal manera que las nuevas definiciones puedan contener las operaciones verificadas con los nuevos símbolos sin dejar de contener las verificadas con los números positivos. Definida la operación de la sustracción como inversa de la adición será suficiente ampliar la definición de esta última operación, pues una vez conseguida esta ampliación ampliada quedará también la definición de la sustracción.

Para conseguir el fin que nos proponemos, recordemos que por definición el número –1 es el opuesto de +1, ó sea, es el objeto reciproco (nº. 29) de la unidad positiva con relación al módulo de la adición; luego si representamos por a´ el número que en la serie (4) *precede al a, se tendrá de*

$$a-1=a', \qquad \textit{se deducirá} \qquad a=a'+1$$

y añadiendo á los dos miembros de esta igualdad el número –1, se tendrá

$$a+(-1)=a'+1+(-1),$$

y como por definición

$$+1+(-1)=0,$$

obtendremos, por último,

$$a+(-1)=a'=a-1;$$

lo que nos dice que: todo número de la serie (4) es la suma del que está situado á su derecha y de la unidad negativa; y de análoga manera se demostraría que: todo número de la serie (4) es la diferencia entre el número que está situado á su izquierda y la unidad negativa; es decir que

$$a-(-1)=a+1.$$

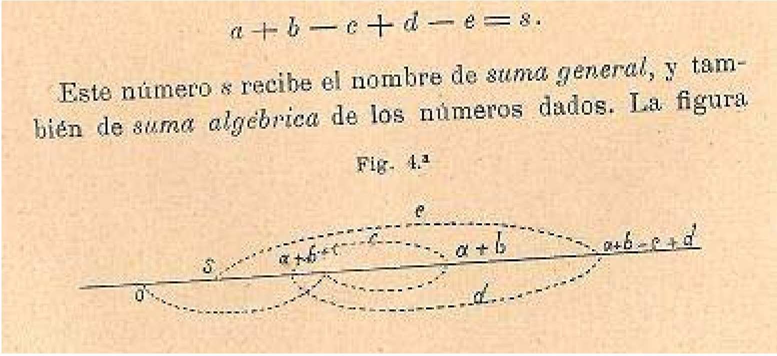
De aquí se deduce inmediatamente que pasar en la serie (4) del número a al que esta situado b lugares á su $\begin{Bmatrix} \textit{derecha} \\ \textit{izquierda} \end{Bmatrix}$*, quiere decir lo mismo que* $\begin{Bmatrix} \textit{añadirle} \\ \textit{restarle} \end{Bmatrix}$ *b unidades positivas, ó que* $\begin{Bmatrix} \textit{restarle} \\ \textit{añadirle} \end{Bmatrix}$ *b unidades negativas; y por consiguiente, que* $\begin{Bmatrix} \textit{sumarle} \\ \textit{restarle} \end{Bmatrix}$ *á un número cualquiera a, un número negativo –b, es lo mismo que* $\begin{Bmatrix} \textit{restarle} \\ \textit{sumarle} \end{Bmatrix}$ *el número opuesto +b; ó lo que es igual, que cada una de las operaciones de primera categoría se transforma en su inversa al verificarse con un número negativo por segundo elemento.*

Así que si ponemos de manifiesto los signos de cada uno de los elementos de las operaciones de primera categoría, se tendrá

$$\begin{array}{ll} (+a)+(+b)=a+b, & (+a)+(-b)=a-b, \\ (+a)-(+b)=a-b, & (+a)-(-b)=a+b, \\ (-a)+(+b)=-a+b, & (-a)+(-b)=-a-b, \\ (-a)-(+b)=-a-b, & (-a)-(-b)=-a+b. \end{array}$$

En virtud de estas observaciones, podemos decir que la adición general es una operación que tiene por objeto, dados varios números positivos ó negativos, verificar la $\begin{Bmatrix} \textit{adición} \\ \textit{sustracción} \end{Bmatrix}$ *del primero con el segundo; la del resultado obtenido con el tercero, y así sucesivamente hasta llegar al último números."* (pp. 82-84).

La definición de las operaciones entre números enteros se hace a partir de la consideración de que *el anterior* de cualquier entero *a* es resultado de sumarle -1: a + (-1), mientras que *el siguiente de a* es el resultado de sumarle +1: *a + (+1).*



$$a + b - c + d - e = s.$$

Este número *s* recibe el nombre de *suma general*, y también de *suma algebráica* de los números dados. La figura

Fig. 4.ª

Igualmente, la adición algebraica es representada sobre la recta; este aspecto de ilustrar geométricamente la operación es una muestra del deseo didáctico de presentar los conceptos de una forma que puedan ser comprendidos por los estudiantes; para ello recurre al uso de distintos sistemas de representación para una misma situación, en este caso el algebraico y el geométrico.

Esto permite destacar el pensamiento educativo moderno de Octavio de Toledo en su época.

Multiplicación y división

*“**Multiplicador negativo: concepto.**— Para formarnos un concepto claro y perfectamente definido de lo que significa un multiplicador negativo, podemos observar, en primer lugar, que dentro de las definiciones hasta ahora aceptadas de la multiplicación, un multiplicador negativo no tiene ni puede tener significación alguna, pues limitándose este elemento del producto á indicar cuántos sumandos iguales al multiplicando hay que agregar al módulo de la adicción para formarle, la agregación de un número negativo de sumandos no tiene significación alguna; y además podemos observar también que como todo número negativo está constituido con la unidad negativa –1 de la misma manera que su opuesto está constituido con la unidad positiva +1 (nº. 44), si nosotros pudiéramos dar una significación perfectamente definida á la operación de multiplicar un número por –1, podríamos de ella deducir inmediatamente la que tiene la operación de multiplicar por un número negativo cualquiera.*

Veamos, por consiguiente lo que significa multiplicar un número por –1. Recordemos para ello que, así como el número +1 se forma por la adicción al cero de una unidad, el número –1 se forma por la sustracción, operación inversa de la adición, del cero de una unidad; y como multiplicar un número por +1 significar sumar al módulo de la adicción este número, podremos decir que multiplicar un número por –1 significa restar, operación inversa al sumar, del módulo de la adicción el número propuesto; así que cualquiera que sea el signo y el valor numérico del número a podremos escribir

$$a \times (+1) = 0 + a = a, \qquad a \times (-1) = 0 - a = -a;$$

y, por consiguiente, podremos decir: que multiplicar un número por –1 quiere decir lo mismo que cambiar de signo al número dado. La multiplicación de un número por –1 se puede interpretar como una operación que tiene por objeto transformar un número cualquiera de la serie fundamental (4) (nº. 44) en su opuesto; y geométricamente podría mirarse como una operación que tuviese por fin verificar la rotación de un segmento cualquiera OH (fig. 3.ª, nº. 45) alrededor del origen O, en el mismo sentido ó en contrario sentido al de las agujas de un reloj, hasta venir á superponerse sobre su segmento opuesto OH`.

En virtud de esta interpretación dada al multiplicador –1, fácil es ahora deducir lo que hemos de entender, y el significado que debemos dar á la expresión de multiplicar un número por un multiplicador negativo; pues formándose un número negativo –b con la unidad negativa –1 del mismo modo que el número positivo +b se forma con la unidad positiva +1, así como multiplicar un número a, cualquiera que sea su signo, por +b significa sumar al cero b sumandos iguales á a, multiplicar el mismo número a por –b significará restar de cero b sumandos iguales á a, y, por consiguiente, cualquiera que sea el signo de a se tendrá:
$a\times(+b)=0+a^{(1}+a^{(2}+a^{(3}+\ldots+a^{(b}=0+ab$, $a\times(-b)=0-a^{(1}-a^{(2}-a^{(3}-\ldots-a^{(b}= 0-(a^{(1}+a^{(2}+a^{(3}+\ldots+a^{(b})= 0-ab=ab.$
De aquí deducimos: 1º., que multiplicar un número cualquiera por un número negativo, quiere decir lo mismo que multiplicar el primero por el valor absoluto del segundo, y cambiar de signo el resultado obtenido; 2º., que el producto de un número positivo por uno negativo será un número negativo, y el de un número negativo por otro también negativo será un número positivo, es decir, que

$$(+a)\times(-b)=-ab, \qquad (-a)\times(-b)= +ab.$$

Regla de los signos.*—Si reunimos las dos expresiones que acabamos de obtener con las obtenidas anteriormente en el caso de ser positivo el multiplicando (nº. 59), formaremos el siguiente cuadro:*

$$\left.\begin{array}{c}(+a)\times(+b)=+ab\\(-a)\times(+b)=-ab\\(+a)\times(-b)=-ab\\(-a)\times(-b)=+ab\end{array}\right.$$

cuadro en el cual está contenida la llamada regla de los signos de la multiplicación, regla que puede traducirse al lenguaje vulgar bajo la forma siguiente el producto de dos números de igual signo es un número positivo; y el producto de dos números de distinto signo es un número negativo.” (pp. 112-114).

A diferencia de lo que ocurre con la suma, la definición del producto de un número por –1 no tiene justificación algebraica, sino que se establece en base a un convenio, que parte de una interpretación.

En estos párrafos el origen de las cantidades negativas se manifiesta como resultado de la aplicación de una operación aritmética y por otra parte se ofrece una interpretación geométrica de la multiplicación de un número positivo por otro negativo, ésta interpretación se apoya en la rotación de los segmentos alrededor de un punto en sentido contrario a las manecillas del reloj. El autor también enuncia una regla formal para la simplificación de signos en la multiplicación.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

"Llamase valor absoluto ó modulo de un número de la serie (4) al número mismo considerado independientemente de su signo. Dedúcese de esta definición que á excepción del cero, el módulo de un número cualquiera es siempre un número positivo.

Si el número entero se representa por medio de una letra sin signo alguno, a por ejemplo, su módulo se representará con el símbolo mod. a (notación de Cauchy), ó bien con la misma letra encerrada entre dos barras verticales, así /a/ (notación de Weierstrass). Si la letra representativa del número lleva de manifiesto su signo, entonces la misma letra sin signo alguno representará el módulo. Así

$$/-a/ = a, \qquad /+a/ = a.$$
$$\text{mód.}(-a) = a, \qquad \text{mód.}(+a) = a.$$

Definición.—dos números que tienen el mismo módulo ó valor absoluto y signos distintos se llaman números opuestos, porque están situados á igual distancia del cero sobre la serie (4), uno á la derecha y otro á la izquierda de éste. Así el número opuesto á +a será –a.

Corolario.—I. Un número positivo es igual á su módulo: así +a = a.

II. Un número negativo es opuesto á su módulo así –a es opuesto á a." (p. 80)

El autor distingue entre el valor numérico y el valor absoluto de un número; utiliza dos notaciones diferentes para el valor absoluto, reflejando la actualidad de sus conocimientos matemáticos, dejando escoger al lector aquella que mejor le parezca.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

"1ª Los números negativos son menores que cualquier número absoluto ó positivo.

2ª. Todo número negativo es menor que cero.

3ª. De dos números negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto"

Pero entiéndase bien que lo que aquí queremos significar realmente es que por la ley de formación de la serie (4) cualquier número escrito en ella es mayor que todos los escritos á su izquierda, y menor que todos los escritos á su derecha, y solo en este sentido deben entenderse las proposiciones anteriores. La traducción algorítmica de estas *proposiciones es la siguiente:*

$-a<+b$, $-a<0$, $-(a+b)<-a$. (p. 81).

Se manifiesta de forma explícita que todo número negativo es menor que cero. Los números negativos son un conjunto numérico ordenado y su orden corresponde al de los números enteros.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

Como se ha mencionado en **TSN5** los negativos surgen como consecuencia de una operación aritmética reciproca.

> *"[…] La definición de la sustracción lleva consigo implícitamente una condición sin la cual la operación no es, en realidad, comprensible: la de que el minuendo tiene que ser necesariamente mayor que el sustraendo, pues el minuendo es una suma y el sustraendo es uno de los sumandos de esta suma, pudiéndose admitir también que minuendo y sustraendo sean iguales, si se tiene en cuenta el valor del módulo de la adición (nº, 40). Si se cumple una de estas dos condiciones, la sustracción es posible dentro del campo limitado de la serie (1) (nº. 36); pero si el minuendo es menor que el sustraendo, la sustracción es imposible dentro de ese campo, y la serie (1) debe ser ampliada en forma tal que la serie de ella deducida contenga nuevos números que hagan posible la operación de la sustracción en todos los casos, y que satisfagan á la vez la condición de no estar en contradicción con ninguna de las definiciones admitidas ni de las propiedades hasta ahora demostradas.*
>
> *Si recordamos (n.os 15 y 16) el modo de constituirse la serie fundamental*
>
> $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$ (1)
>
> *y recordamos además que el carácter distintivo de los números escritos en ella consiste en que cada número tiene una unidad* $\begin{Bmatrix} mas \\ menos \end{Bmatrix}$ *que el número que le* $\begin{Bmatrix} antecede \\ sigue \end{Bmatrix}$*, ocurre inmediatamente la idea de prolongar la serie indefinidamente hacia la izquierda del cero, colocando los mismos números situados á la derecha de éste, dispuestos en el mismo orden, y con un signo cualquiera que sirva para distinguirlos de estos últimos; este signo podría ser el – colocado encima de cada número; así* $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$,…..., $\bar{a}$*, leyendo éstos símbolos uno negativo, dos negativo,…, a negativo: la serie (1) se convertirá en la así*
>
> $\ldots, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ *(2)"* (pp. 74-75)

Se reitera el carácter de los negativos como conjunto numérico ampliado, como ya se ha mencionado en **TSN4**. Los negativos son los recíprocos de los positivos. El ampliar la serie natural permite también efectuar una ampliación de la definición de sustracción, de tal manera que ésta pasa a ser un caso particular de la operación de adición.

Al ampliar el conjunto numérico se plantea la generalización de sus operaciones:

> *"Generalizada la definición de la adición para el caso en que existan uno ó varios sumandos negativos […] las leyes formales de la adición son completamente generales y se aplican del mismo modo que cuando los sumandos son positivos.*
>
> *Teorema I La adición o suma general es una operación uniforme o de significación única.*
>
> *Teorema II. La adición general es una operación conmutativa.*
>
> *Teorema III. La adición general es una operación asociativa.*
>
> *Teorema IV. El módulo de la adición general es el número 0".*
>
> (pp. 82-92).

Finalmente, también se llega a la definición de multiplicación para los enteros:

> *"La multiplicación de dos números (multiplicando y multiplicador) es una operación que tiene por objeto formar un número (producto) que esté contituido con el multiplicando como el multiplicador está constituido con la unidad positiva. […]*
>
> *Teorema I La multiplicación es una operación uniforme o de significación única.*
>
> *Teorema II. La multiplicación es una operación conmutativa.*
>
> *Teorema III. La multiplicación es una operación asociativa.*
>
> *Teorema IV. La multiplicación es una operación distributiva respecto de la adición y sustracción.*
>
> *Teorema V. El módulo de la multiplicación es el número uno."*
>
> (pp. 115- 119).

TSN11: Interpretación de los resultados obtenidos.

Como hemos señalado en **TSN5** los negativos son asumidos y tratados como un conjunto numérico bajo reglas formales, por lo que los resultados negativos no requieren de explicaciones más allá del cumplimiento de las leyes.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

La principal utilidad de las cantidades negativas consiste en dar solución a la resta de dos naturales cualesquiera:

> *"la serie (1) debe ser ampliada en forma tal que la serie de ella deducida contenga nuevos números que hagan posible la operación de la sustracción en todos los casos, y que satisfagan á la vez la condición de no estar en contradicción con ninguna de las definiciones admitidas ni de las propiedades hasta ahora demostradas"* (p. 74).

TSN13: Otros.

"Interpretación en concreto de los números negativos. Si tenemos en cuenta que los números no son más que la expresión de la cantidad discreta (nº. 8), y tenemos en cuenta también las diversas afecciones cualitativas de que es ésta susceptible, los números negativos tienen en el terreno concreto una interpretación que no solo no se opone ni contradice á la que por su origen algorítmico acabamos de señalar, sino que la comprueba y confirma.

Al estudiar las afecciones cualitativas de la cantidad (nº. 10) vimos que las cantidades pueden ser afirmativas ó positivas, opuestas ó negativas é indirectas ó imaginarias; y, prescindiendo por ahora de estas últimas, puede observarse en general y en todos sus casos principales, entre el minuendo y el sustraendo existe una oposición mutua según la cual, el menor de ambos, si son desiguales, neutraliza ó destruye en el otro una parte igual á él, y le neutraliza ó destruye por completo si ambos son iguales." (pp. 81-.82).

Se reitera que los negativos tienen un origen algorítmico como consecuencia de la ampliación del campo numérico natural; además tienen cualidad de opuestos a los positivos así como un componente lógico de negación.

$$\left.\begin{array}{l}\cdots -a,\ \cdots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots a,\ \cdots\\ \cdots -a\frac{1}{2}, \cdots -3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, 0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \cdots a\frac{1}{2}, \cdots\\ \cdots -a\frac{1}{3}, \cdots -3\frac{1}{3}, -2\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}, 0\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, \cdots a\frac{1}{3}, \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots -a\frac{1}{n}, \cdots -3\frac{1}{n}, -2\frac{1}{n}, -1\frac{1}{n}, 0\frac{1}{n}, 1\frac{1}{n}, 2\frac{1}{n}, 3\frac{1}{n}, \cdots a\frac{1}{n}, \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} ;\ (10)$$

Los negativos pueden pertenecer a series numéricas y además pueden ser enteros o fraccionarios.

7.5.4 Análisis

7.5.4.1 Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

Número

Octavio de Toledo presenta el número como noción derivada de la de cantidad, ya que consiste en la representación de cuántas veces debe repetirse la unidad para determinar una cantidad. El número surge de la mensuración de cantidades o de la consideración de una pluralidad de objetos homogéneos, por lo que afirma que es *"la expresión de un conjunto o agrupación de unidades"* que es una noción de base euclidiana (la cual ya hemos caracterizado en el apartado 4.1.4.1).

Al considerar el número sin referirse a una cantidad concreta, este número es abstracto (**CCO1**) y se considera entero, en cuanto expresa el número de veces que una unidad se repite. Se trata de una noción conjuntista, que Octavio de Toledo basa en la cardinalidad y en el orden, sostenida empíricamente por la acción de contar y por la elección de la unidad.

Los planteamientos del autor llevan considerar el significado del número desde dos perspectivas: de una parte retoma la idea de García Galdeano de que es la medida de la cantidad; esto refleja su origen en la pluralidad. Por otra parte es la expresión de un conjunto de unidades, es decir que se refiere a la comparación y por tanto existen connotaciones relacionales entre el número y la cantidad.

- ***Cantidad***

Para este concepto el autor sigue los planteamientos positivistas de Augusto Comte (Maz, 2000), ya utilizados por Rey y Heredia y García de Galdeano. Para ello, Octavio de Toledo se centra en las cantidades extensivas y mensurables, que se relacionan con otra de su misma especie.

La cantidad es considerada una *"cualidad de los seres ú objetos susceptible de aumento y disminución, sea por su naturaleza mensurable"*. En esta definición están presentes los tres elementos que caracterizan la noción positivista de la cantidad, estos son: la comparación, el aumento y la disminución, y la medida.

Distingue entre magnitud y cantidad; la magnitud la identifica con la cualidad que admite la igualdad o la desigualdad; la cantidad la identifica con la medida, con la cuantificación. Critica la imprecisión de la noción y distingue el aumento o disminución como variación de la cualidad, no la del objeto que al variar dejaría de ser el mismo. Afirma que el aspecto esencial de la cantidad es la medida; de esta forma la propiedad de compararse implica una noción relacional del número y de la cantidad como expresión de su medida, con una fundamentación positivista y racionalista de la cantidad.

La esencia de la mensurabilidad está en la divisibilidad, que no se limita a comparar dos cantidades sino que permite constituir una de ellas por reiteración o agregación sucesiva de cantidades iguales. Consecuencia de esto es que una cantidad es siempre un agregado de cantidades de su misma especie –unidades-. Según el modo de agregación establece las cantidades discretas o continuas.

La noción de cantidad de partida procede de la filosofía crítica de Kant, que somete a análisis para establecer distintos niveles de ideas que configuran esta noción. El origen lo sitúa en los fenómenos o cualidades de los objetos, pero a continuación estudia con detalle las relaciones que se pueden establecer entre esas cualidades y la experiencia de la mensurabilidad.

- ***Cantidad positiva y cantidad negativa***

Las cantidades positivas y negativas son presentadas como cantidades con existencia propia, pero asociadas unas a las otras. El autor afirma en **TSN2** la existencia de una cualidad contraria a otra sobre una determinada cantidad, lo cual da lugar a la existencia de cantidades negativas, en un sentido derivado del análisis fenomenológico de Kant. Las negativas están en dependencia del comportamiento de las positivas; se trata de cantidades relativas.

Observamos como el autor en **TSN3** y **TSN13** las vincula a una naturaleza lógica, asociada a la afirmación o a la negación.

Pero la justificación que hace Octavio de Toledo sobre los negativos es de naturaleza esencialmente algebraica. La formalización de las operaciones sustenta la justificación de las cantidades negativas y su tratamiento aritmético. Esto se hace en el Capítulo II del libro, mediante el estudio de la teoría general de las operaciones.

En el estudio de las leyes formales, es decir, de las propiedades que cumplen aquellas operaciones que satisfacen los principios de uniformidad, asociatividad y conmutatividad, surge la noción de módulo de una operación (elemento neutro en la denominación actual), las operaciones inversas, así como los objetos recíprocos (elementos simétricos) y las series recíprocas en una operación formal. Los negativos surgen como consecuencia de la aplicación de la operación reciproca de la suma sobre la serie de los naturales (**TSN4**). Los negativos prolongan la serie numérica hacia la izquierda. Para obtenerlos se recurre a un proceso algorítmico; éste consiste en la realización de sustracciones sucesivas de una unidad a cero, logrando de esta forma una nueva serie con los valores negativos.

El planteamiento y la justificación de los negativos es, fundamentalmente, algebraico y su fin principal consiste en extender la resta como ley de composición interna al conjunto ampliado, con solución para cualquier pareja de valores. Un negativo es un sustraendo con minuendo 0; los negativos están constituidos por agregación de la unidad negativa. Los números negativos incorporan una notación propia y diferente de la de los positivos (**TSN4**). Estos permiten la ampliación y generalización de la resta, pasando esta operación a ser un caso particular de la adición.

Estos números pueden ser representados en la recta numérica y asociárseles longitudes de segmentos respecto a cero.

De manera general los números negativos y las operaciones que se cumplen en ellos tienen justificación en la ampliación de la serie de los números naturales y sus operaciones. Como se ha mencionado en **TSN4**, ello es posible por el principio de permanencia de las leyes formales de Hankel.

Octavio de Toledo les dota de características numéricas sometidas al cumplimiento de las leyes formales propias de los números enteros.

7.5.4.2 Análisis básico de contenidos

- ***Conceptos básicos***

El autor señala que los signos más (+) y menos (–) son los encargados de señalar las operaciones de adición y sustracción; el signo (–) indica sustracción, incluso cuando representa un número negativo (**TSN1**).

En esta obra no se tratan las ecuaciones aunque si se consideran las cantidades generales, por cuanto se definen leyes y propiedades generales usándose para ello la notación algebraica de números, letras y signos.

De manera categórica se afirma que todo número negativo es menor que cero; este número es un elemento de la serie de los números enteros.

- ***Fenomenología/Justificación***

Los ejemplos utilizados en **TSN6** para mostrar los números negativos son fenómenos usuales en los que se presentan cantidades opuestas; plantean situaciones que se modelizan a través de los números enteros (desplazamientos, temperaturas, años cronológicos) en los que se enfatiza el carácter de opuestos respecto a los positivos; puntualiza que en algunas situaciones la oposición está más relacionada con la dirección que con el sentido en que se tomen los valores numéricos.

En **TSN7** emplea la rotación de segmentos de manera contraria al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de un punto para interpretar la multiplicación de un número positivo por otro negativo.

Los fenómenos algebraicos y geométricos en los que intervienen los negativos se presentan a través de representaciones gráficas en la recta numérica, como se observa en **TSN7** y **TSN10**.

El autor hace uso de las representaciones retóricas, graficas numéricas y algebraicas para dar una explicación de las cantidades negativas.

- ***Estructura de orden***

A través de **TSN8** y **TSN9** se deduce que en el texto se distingue un número entero de su valor absoluto en **TSN9** están definidas las propiedades de orden que cumplen los negativos. De allí se deduce que son un conjunto numérico ordenado y que dicho orden corresponde al orden entre los números enteros.

- ***Estructura algebraica***

En todos los casos se empieza definiendo un objeto matemático, bien sea un concepto o un conjunto numérico, luego son planteadas sus propiedades, se definen las leyes que cumplen y son mostrados ejemplos. En algunos casos se recurre a una representación gráfica para afianzar y fortalecer la explicación.

El origen de los enteros está en la sustracción y en la necesidad de hacer posible la resta de dos números cualesquiera.

La generalización y ampliación de la adición a todo el sistema numérico de los enteros permite establecer leyes y otorgarle una estructura algebraica.

La suma y el producto son consideradas leyes de composición interna dentro del dominio de los números enteros en **TSN10**.

Las nociones de anterior y siguiente de un número sirven para establecer la justificación algebraica de los distintos casos de la suma de enteros. La justificación del producto se hace mediante un convenio, del cual se proporciona una interpretación gráfica en **TSN7.**

Al igual que García Galdeano, el planteamiento que hace Octavio de Toledo para los negativos es estructuralista: considera estos números como resultado de una ampliación de los naturales, como inversos a estos **TSN11**. Este nuevo conjunto se caracteriza por extender las operaciones de suma y producto, que conservan sus propiedades formales aplicando el principio de permanencia de las leyes formales enunciado por Hankel.

- ***Uso algebraico***

Las cantidades negativas cuando se consideran números, aparecen como resultados de cálculos, pero el autor no genera reflexiones sobre su significado más allá del numérico. La noción de cantidad negativa se extiende para cualquier valor real.

Los negativos son recíprocos de los positivos y además todo número negativo es opuesto a su módulo. Se utilizan como elementos de series numéricas, como puntos en la recta numérica, como exponente, etc., en general, como valores numéricos.

7.5.5 Diferencias lógico formales entre Z y N_r*

Primera diferencia. Orden total - orden parcial o doble natural con inversión en la región negativa.

Primer indicador: **a_1**. En **TSN9** se afirma que *"todo número negativo es menor que cero"* y en **TSN4**, mediante la recta numérica, las regiones positiva y negativa son representadas a la derecha e izquierda del cero respectivamente. Por lo tanto es evidente que cada región tiene asignada una valoración fija en la recta numérica, lo que indica que la atribución de significados duales asignada a las regiones es justa y determinada para números enteros.

Segundo indicador: **a_2**. Una característica de las regiones naturales relativas es que en ningún caso son comparables entre sí (González, p. 216), pero en **TSN9** se efectúa una comparación entre las cantidades positivas y negativas, puesto que se afirma *"Los números negativos son menores que cualquier número absoluto o positivo"* y esto solo es posible en el campo de los números enteros.

Tercer indicador: **a_3**. Afirma que *"De dos números negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto"* y señala que *"$-(a+b)<-a$"*, estos dos aspectos y el resto de los señalados en **TSN9** muestran que los negativos son un conjunto numérico ordenado y determinado, en el que la comparación entre valores negativos se rige por el orden entre los números enteros.

Cuarto indicador: **a_4**. En los ejemplos presentados en **TSN6** hay comparaciones entre medidas con valores numéricos de diferente signo o región, así vemos comparaciones entre temperaturas y periodos históricos en los cuales se observa la existencia de conexión y homogeneidad entre las regiones típica del campo numérico entero.

También en **TSN4** se utiliza una serie numérica y una representación gráfica en la recta numérica, las cuales permiten observar la conexión entre las regiones positiva y negativa.

Como balance para esta primera diferencia **D_1**, afirmamos que en esta obra de Octavio de Toledo no se cumple para el campo natural relativo.

* Las referencias en este apartado se hacen a González Marí (1995) por lo que se indicara (González, p); las diferencias han sido explicadas en 1.4.1 y 4.1.5.

Segunda diferencia: Sin primer elemento - con primer elemento.

Primer indicador: $\mathbf{b_1}$. Sobre la naturaleza de los números y de las situaciones presenta significados asociados a los números enteros en **TSN6** *"No es lo mismo cierto número de grados termométricos si se cuentan sobre cero ó bajo el cero"*.

En **TSN4** presenta una serie donde se evidencia la existencia de valores inferiores y superiores a cero *"…–a,…, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, …"* y también en la representación de los valores positivos y negativos en la recta numérica indican la inexistencia de limites inferiores, esto refleja un uso del campo numérico de los enteros.

Segundo indicador: $\mathbf{b_2}$. La representación utilizada para los números negativos en este texto es simbólica en **TSN4** "$\bar{c}=-c$" y con simbolización matemática en **TSN10** *"–1–1=–2, –2–1=–3, –3–1=–4…"*, ambas son conocidas y determinadas para los números enteros.

Tercer indicador: $\mathbf{b_3}$. Las transformaciones cuantitativas y métricas con cantidades negativas las hallamos en **TSN7** cuando se enuncian las reglas de los signos para la adición y para la multiplicación y se muestra como al sumar un positivo a un negativo o al multiplicar dos cantidades negativas, se obtiene una positiva; en **TSN13** se observa cómo, al efectuar una operación sucesiva sobre un número, éste puede ser transformado desde los valores negativos hasta los positivos y viceversa.

Estas situaciones denotan la ausencia de un primer elemento y la unicidad de la serie numérica, por lo cual estas transformaciones se desarrollan en el campo numérico entero.

La valoración de esta segunda diferencia $\mathbf{D_2}$ indica que no hay indicios de cumplimiento para el campo natural relativo.

Tercera diferencia: Continuidad de medidas - discontinuidad de medidas (al cruzar el cero).

Los negativos se presentan bajo una notación y estructura formal, representándose en su mayoría de manera literal asumiendo la generalidad de estos; los ejemplos presentados en **TSN6** indican la continuidad de medidas al cruzar el cero, reafirmándose esto mediante las series numéricas de **TSN4** y **TSN13**.

Como balance de esta tercera diferencia $\mathbf{D_3}$, afirmamos que ésta no se cumple para el campo natural relativo.

Cuarta diferencia: Cero único - cero doble (natural relativo).

No hay evidencias para sostener que en esta obra se consideren dos ceros. El autor no sólo les presenta y opera con ellos de forma algorítmica si no que en **TSN8** afirma *"á excepción del cero, el módulo de un número cualquiera es siempre un número positivo"* deduciéndose de ello que únicamente considera un cero. La forma en que se amplía la serie numérica que da origen a los negativos es claramente formal, donde no tiene cabida la existencia de dos ceros u orígenes para los positivo y negativos (**TSN10**).

Consideramos que no se cumple esta cuarta diferencia $\mathbf{D_4}$ para el campo de los números naturales relativos.

Quinta Diferencia: Composición aditiva: adición entera – adición natural y anulación-composición.

La composición aditiva que se utiliza en esta obra es la adición entera como se deduce de las propiedades formales que cumple esta operación y son demostradas por el autor. Asimismo, la representación grafica en la recta numérica de la adición algebraica de números cualesquiera permite tal conclusión.

Este hecho queda reafirmado por la utilización del principio de permanencia para la ampliar la sustracción a cualquier número.

Consideramos que la quinta diferencia $\mathbf{D_5}$ no se cumple para el campo de los números naturales relativos.

La siguiente tabla muestra el resumen del análisis hecho al texto de Luís Octavio de Toledo, en relación con las diferencias de González Marí:

Tabla 7.2 Diferencias entre $\mathbf{Z}$ *y* $\mathbf{N}_r$ *en los Elementos de Aritmética universal. Calculatoria de Luís Octavio de Toledo.*

Autor	**D_1**					**D_2**				**D_3**	**D_4**	**D_5**
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**		**b_1**	**b_2**	**b_3**				
Octavio de Toledo	**No**	**No**	**No**	**No**	No	**No**	**No**	**No**	No	No	No	No

7.5.6 Tratamiento global de los negativos en los *Elementos de Aritmética universal. Calculatoria.*

Los números negativos son considerados con existencia real y propia. Al igual que los positivos, están sujetos a leyes formales y, por tanto, se les otorga un mismo tratamiento como números enteros.

Aunque Octavio de Toledo emplea sólidos fundamentos filosóficos en los *Elementos*, las justificaciones y argumentos para la introducción de los números negativos no dependen de razonamientos filosóficos, si no que responden a necesidades operativas para la generalización de operaciones matemáticas. Su origen por tanto, es de tipo estructural y algebraico.

Los ejemplos permiten mostrar el uso que se puede hacer de ellos. La fenomenología asociada para los negativos es de tipo geométrica, aritmética, algebraica y física; se soporta en ejemplos de situaciones cotidianas reales modelizadas por los números enteros y, cuando recurre a situaciones con cantidades relativas, indica que deben tomarse en cuenta sólo en su significado, en especial cuando se trata de desplazamientos, pues en ellos no existe una única oposición sino que ésta depende de la dirección no solo del valor o el sentido. Estos fenómenos son de desplazamientos, térmicos, contables, algebraicos, aritméticos y geométricos.

Los sistemas de representación utilizados para explicar y dar ejemplo de los números negativos están asociados a los distintos tipos de situaciones fenomenológicas utilizadas; estos son verbales (explicaciones retóricas), numéricas (números y signos), algebraicas (letras, números y signos) y, gráficos (líneas y rectas).

7.6 Los documentos

Los libros estudiados en el periodo de la Restauración son: *Tratado de Álgebra* (1883), de Zoel García de Galdeano y Yaguas y *Elementos de Aritmética Universal. Calculatoria* (1900), de Luís Octavio de Toledo.

La publicación de los dos libros esta separada por dos décadas; el primero se escribe al inicio del periodo de la Restauración bajo el reinado de Alfonso XII y el segundo durante el último año de la Regencia de Maria Cristina de Habsburgo, fecha que la mayoría de historiadores señalan como fin de dicho periodo.

El *Tratado de Álgebra* sale a la luz en un momento histórico en el cual la *Institución de Libre Enseñanza* se erige como estandarte de la renovación pedagógica e intelectual en España. Se escribe desde la universidad, por un catedrático de instituto que llega a catedrático de universidad; sus propósitos didácticos, así como su planteamiento y desarrollo, resultan innovadores para la época.

Los *Elementos de Aritmética* también son producto del trabajo de un catedrático de universidad, quien previamente ha trabajado en la enseñanza secundaria, con gran prestigio e influencia en el medio académico español. Incorpora los avances matemáticos del momento, refleja además la influencia de los debates en torno a la ciencia en el ámbito académico y social español.

Ambos autores se inician como catedráticos de Geometría y, posteriormente, pasan a la desempeñar las cátedras de Cálculo Infinitesimal o Análisis Matemático, respectivamente. En sus obras incluyen referencias a los textos de donde han tomado algunas de las ideas expuestas, reflejando un conocimiento de los trabajos de autores como Wronski, Lagrange, Kronecker o Boyd. Los dos libros fueron escritos con el propósito de servir de texto para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Representan un claro ejemplo de cómo, ya en esta época, empieza a alcanzarse en España una gran difusión de los avances científicos, como lo refleja el uso y aplicación en ambos textos del principio de permanencia de Hankel, o la notación de Weierstrass, por mencionar algunos. Es normal en ellos hablar del elemento recíproco o del módulo de una operación. También coinciden en buscar, apoyar y reforzar muchas veces las explicaciones de los conceptos mediante recursos geométricos.

Estas obras están escritas en un lenguaje moderno y formal, incorporando la notación algebraica. Conjugan la difusión de los avances matemáticos de la época con los propósitos de enseñar matemáticas. Podemos decir que estas obras tienen una finalidad didáctica y pedagógica. Globalmente, estos dos libros reflejan un posicionamiento positivista de sus autores respecto a la ciencia y el conocimiento.

7.7 Análisis conceptual de los negativos en el periodo de la Restauración

Siguiendo los análisis básicos de contenidos realizados a cada una de las obras abordamos el análisis conceptual conjunto de los textos seleccionados en el período de la Restauración; para ello nos basamos en las nociones de Número, Cantidad y Cantidad Negativa, cuya caracterización se ha presentado en el Apartado 3.1.2.

7.7.1 Concepto de número

Estos autores en sus obras presentan varias ideas de número. García de Galdeano presenta nociones de tipo relacional en aritmética y formal cuando trabaja el álgebra. Octavio de Toledo también utiliza las nociones euclidea, relacional y la preconjuntista. Para ambos el número es abstracto y entero, en cuanto mide la cantidad.

Tabla 7.3 Noción de número durante el periodo de la Restauración en España.

Autor	Noción Euclidea	Noción relacional	Noción cardinal o preconjuntista	Noción algebraica o formalista
Zoel García de Galdeano		X	X	X
Luís Octavio de Toledo	X	X	X	

Estos autores sitúan su concepto de número en distintos ámbitos, García de Galdeano en el Álgebra y Octavio de Toledo en la Aritmética. Coinciden en su consideración del número como relación y también como cardinal, resultado de la acción de contar. Se diferencian por la insistencia de Octavio de Toledo sobre una referencia escueta a la pluralidad, referencia de raíz euclidiana, mientras que García insiste en su carácter abstracto, que *expresa simplemente grados en la escala de la pluralidad*, y que abarca una noción más amplia de número.

7.7.2 Concepto de cantidad

El concepto de cantidad en ambos autores es asumido desde una posición positivista, es decir se asume como cantidad la magnitud que es comparable con otra de su misma especie; esto implica una relación de orden y una insistencia en la mensurabilidad. Como ya se ha mencionado en el Apartado 6.10, es una mejora de la definición de cantidad propuesta por Euler.

Tabla 7.4 Noción de cantidad durante el periodo de la Restauración en España.

Autor	Noción Positivista	Cantidad abstracta como Sinónimo de número
Zoel García de Galdeano	X	X
Luís Octavio de Toledo	X	X

Es importante la declaración explícita que hace García de Galdeano sobre que la noción de cantidad abstracta es sinónima de la de número natural, mientras que se hacen coincidir las cantidades concretas con la experiencia, que procede del espacio y del tiempo, es decir con las cantidades continuas. También Octavio de Toledo asume esta distinción cuando se refiere a cantidades discretas y continuas.

7.7.3 Cantidades positivas y negativas

García de Galdeano considera que las operaciones aritméticas generan valores negativos, sin embargo las operaciones algebraicas tienen un sentido diferente a las aritméticas, por ello, a los negativos en un principio les otorga una naturaleza dual; cuando deja de lado la aritmética los negativos reciben un estatus algebraico al estar sometidos a sus leyes.

Finalmente, incorpora el principio de permanencia de las leyes formales de Hankel para asumir la existencia y naturaleza de los negativos como consecuencia de la ampliación del campo numérico natural. También Octavio de Toledo comparte estas consideraciones, la consideración inicial que hace de los positivos y negativos se sustenta sobre la idea kantiana de cantidades contrarias o relativas, destacando así la naturaleza dual inicial de cantidades positivas y negativas. La peculiaridad de este autor es que se sustenta en una justificación de carácter lógico, de tal manera que las primeras representan la afirmación y las segundas la negación de una misma cualidad; esta reducción de la dualidad a una noción de naturaleza lógica ya había sido expresada por varios autores considerados en este estudio.

Tabla 7.5 Nociones de cantidad negativa

Autor	Naturaleza dual: carácter relativo	Justificación geométrica	Estatus algebraico	Ampliación del campo numérico natural
Zoel García de Galdeano	X	X	X	X
Luís Octavio de Toledo	X		X	X

Ambos autores reiteran la naturaleza real de las cantidades negativas y no escatiman esfuerzos en dotarles de una estructura formal, para lo cual cobra importancia la aplicación de operaciones inversas.

7.8 Análisis de Contenido

Llevamos a cabo el análisis de contenido de los autores estudiados en este periodo atendiendo a la estructura conceptual, la fenomenología, los problemas planteados y los sistemas de representación utilizados, según indicamos en el Apartado 1.9.

7.8.1 Estructura conceptual

Nociones básicas. Números enteros

Garcia de Galdeano otorga variadas significaciones a los signos más y menos, mientras que Octavio de Toledo solamente les considera como los encargados de señalar las operaciones de adicción y sustracción.

Los dos autores presentan en sus textos la secuencia de los números enteros y, a su vez, operan con cantidades enteras de forma general.

Tabla 7.6 Nociones básicas y concepto de entero

Autor	Signos como acciones	Signos como operaciones	Signos como oposición	Representación en la recta numérica	Presencia de la secuencia de los enteros	Consideración de cantidades enteras en general
Zoel García de Galdeano	X	X	X	X	X	X
Luís Octavio de Toledo		X	X	X	X	X

Las cantidades negativas, que surgen por extensión de las leyes recíprocas de la adición, son los elementos simétricos de los positivos. Octavio de Toledo afirma que –m es un sustraendo con minuendo 0. Ambos autores dan especial importancia a la representación de los negativos en la recta numérica.

Definición de la suma de enteros

La suma tiene una justificación algebraica en ambos autores. Inicialmente se indican reglas para efectuar la resta pero, como consecuencia de la aplicación del principio de permanencia de Hankel, la resta pasa ser un caso particular de la suma.

Octavio de Toledo incorpora la recta numérica para señalar como afecta la aplicación de la adición a determinados valores numéricos; también hace uso de las nociones de anterior y siguiente de un número entero para definir las operaciones de suma y resta.

Tabla 7.7 Suma de enteros

Autor	Justificación Algebraica	Justificación Geométrica	Reglas propias para la resta	Resta como caso de la suma
Zoel García de Galdeano	X		X	X
Luís Octavio de Toledo	X	X	X	X

Estructura aditiva

Los dos autores consideran la suma como una operación de composición interna en el dominio de los números enteros; por tal motivo demuestran para esta operación el cumplimiento de las leyes de cerradura, asociativa y conmutativa y la existencia tanto del modulo como del inverso aditivo.

Orden entre los enteros

Los autores conocen y presentan la definición de valor absoluto de un número. También son conscientes de las dificultades que ha planteado la noción de orden para los números negativos, por ello García Galdeano se esfuerza por precisar el sentido de la expresión *“cantidad menor que cero”*.

El concepto de orden utilizado por estos autores está directamente relacionado con el concepto de número negativo y, por lo tanto, con el número entero. Si atendemos a la sistemática utilización que hacen del principio de permanencia de la leyes formales de Hankel, es lógico que el orden reflejado en los textos corresponda al orden entre los números enteros; es decir, establecen comparaciones adecuadas de los negativos con 0, de los negativos entre sí y de los negativos con los positivos.

Tabla 7.8 Relación de orden utilizada

Autor	Valor Absoluto	Orden entero
Zoel García de Galdeano	X	X
Luís Octavio de Toledo	*X*	*X*

Definición del producto

Tanto Galdeano como Toledo justifican mediante un convenio el producto de enteros. Galdeano incorpora una interpretación geométrica para aclarar el signo resultante al efectuar una multiplicación, para la misma situación. Toledo considera al multiplicador igual a la unidad. Ninguno de los autores se sostiene sobre una justificación algebraica sino que buscan un convenio de fácil comprensión, mediante el cual justificar la regla de los signos.

Tabla 7.9 Producto de enteros

Autor	Interpretación geométrica	Carácter relativo del multiplicador igual a la unidad	Justificación mediante convenio
Zoel García de Galdeano	X		X
Luís Octavio de Toledo		X	X

Estructura multiplicativa

Al igual que para la suma ambos autores consideran la multiplicación como una operación interna en el campo numérico entero y definen tanto el modulo como el reciproco; ambos consideran que es una operación uniforme, conmutativa asociativa y distributiva respecto a la adición. Todo ello indica que los autores están efectuando operaciones multiplicativas con números enteros.

7.8.2 Fenomenología

Los autores analizados toman situaciones de su entorno cotidiano así como de tipo matemático que se modelizan a través de los números negativos; se distinguen tres tipologías de fenómenos en los textos:

- ***Fenómenos físicos:*** parece que éstos ofrecen una opción para mostrar la presencia de los números negativos en situaciones de familiaridad para los alumnos; se manifiestan tres clases:
    a) Desplazamientos (avances, retrocesos; e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
    b) Temperaturas (e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
    c) Capacidad (entrada y salida de productos o sustancias; e.g. García de Galdeano).

- ***Fenómenos contables:*** están relacionados con el manejo de capitales mediante la relación debe-haber o deudas y ganancias (e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).

- ***Fenómenos matemáticos:*** se recurre a los objetos del mundo matemático para ilustrar los negativos por medio de:
    a) Comparaciones (a través de la relación de orden < ó >; e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
    b) Operaciones aritméticas (a través de adiciones; e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo),
    c) Operaciones algebraicas (e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
    d) Secuencias numéricas (e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
    e) Representaciones geométricas (e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).

7.8.3 Problemas planteados

Los textos presentan variados tipos de problemas pero siempre a modo de ejemplos con el propósito de aclarar o verificar el cumplimiento de propiedades y operaciones. En el *Tratado* Galdeano deja de lado las aplicaciones y se centra más en los conceptos. En los *Elementos* Octavio de Toledo señala que un problema es una proposición de carácter práctico en que se pide su solución.

7.8.4 Representaciones

La variedad de situaciones fenomenológicas utilizadas hace que estén presentes diversos sistemas de representación para los negativos; éstos son:

- ***Verbales*** (explicaciones verbales; e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
- ***Numéricos*** (números y signos e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
- ***Algebraicos*** (letras, números y signos; e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).
- ***Gráficos*** (líneas y rectas; e.g. García de Galdeano y Octavio de Toledo).

7.9 Números relativos

El análisis de las diferencias entre la estructura de los números enteros y los números naturales relativos (González Marí, 1995) arroja los siguientes resultados:

*Tabla 7.10 Comparación de autores y diferencias entre **Z** y $\mathbf{N_r}$.*

Autor	D_1					D_2				D_3	D_4	D_5
	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3				
Zoel García de Galdeano	No	No	No	No	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**
Luís Octavio de Toledo	No	No	No	No	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**

Sí =se cumple la diferencia en el campo de los números naturales relativos; No =la diferencia no se cumple en el campo de los relativos; ¿?=no hay evidencias de una u otra estructura; P = cumplimiento parcial de la diferencia en el campo de los naturales relativos.

Los resultados que presenta la tabla anterior permiten señalar que no hay cumplimiento de ninguna de las diferencias planteadas por González Mari (1995). Esto permite concluir que el conjunto numérico que consideraban estos autores es el de los números enteros. El único aspecto no justificado formalmente es la regla de los signos para el producto.

7.10 Consideraciones didácticas

Los dos textos analizados tienen una finalidad educativa para la enseñanza de las matemáticas, por lo cual guardan una secuencia didáctica en su desarrollo.

Como ya se ha mencionado en los apartados 7.8.2 y 7.8.4 la preocupación didáctica de los autores por presentar de manera clara y comprensible los conceptos se revela en la utilización de múltiples sistemas de representación así como por emplear contextos y situaciones que permiten ser modeladas mediante los conceptos matemáticos presentes en los textos.

El método inductivo está presente en estos textos como apuesta didáctica para exposición de los contenidos, así como también lo son el orden y el rigor. A continuación presentamos una tabla con los indicadores de la actividad didáctica

Tabla 6.11 Indicadores de actividad didáctica

Autor	Actualización	Originalidad	Rigor y precisión	Interés social de las matemáticas	Principios filosóficos	Principios didácticos
Zoel García de Galdeano	x	x	x	x	x	x
Luís Octavio de Toledo	X	x	x	x	x	x

7.11 Actividad Científica

En las reseñas bibliográficas podemos observar que tanto García de Galdeano como Octavio de Toledo tienen una copiosa actividad docente y como autores de textos; reflejan la influencia que los profesores universitarios empiezan a tener en la producción de textos matemáticos destinados a la enseñanza, porque este campo había estado ampliamente dominado por profesores de institutos y de academias militares.

Estos dos autores fueron profesores de Julio Rey Pastor; ambos son reconocidos por la comunidad científica española como autoridades académicas dentro del ámbito de las matemáticas.

Son representantes de la nueva mentalidad científica española preocupada por la difusión de los avances en el conocimiento que se suceden a nivel mundial; esto les lleva a participar en eventos internacionales como por ejemplo el *Cuarto Congreso Internacional de Matemáticas de Roma* y el *V Congreso Internacional de Matemáticos en Cambridge*; participan en la creación de la *Commission Internationale pour l'Enseigment Mathématique* (CIEM). Así mismo son asiduos autores de artículos matemáticos que se publican en revistas nacionales e internacionales como *L'Enseignement Mathématique* o la *Revista Matemática Hispano-Americana.*

Como ya se ha mencionado García de Galdeano funda *El progreso matemático,* primera revista española científica dedicada a las matemáticas.

Participaron en las sociedades científicas españolas de la época, bien interviniendo en su fundación o como socios, como por ejemplo en la *Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales*, la *Sociedad Matemática Española* (actual Real Sociedad Matemática Española), la *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias* y la *Real Academia de Ciencias.*

7.12 Balance final

En conclusión, las principales ideas que podemos destacar sobre el tratamiento de los números negativos durante este periodo por estos autores y en estos textos, son:

1. El uso de diversas fuentes documentales hace que afloren diversas nociones de número en uno y otro autor auque comparten las nociones cardinal y relacional.
2. Los números negativos son considerados con existencia real y propia. Su presentación ya no está ligada a fenómenos físicos aunque se recurre a ellos para mostrar la utilización de los valores negativos.
3. La influencia del pensamiento positivista, que empieza a ser adoptado por los círculos académicos y científicos en España, tiene reflejo en los textos, tanto en el planteamiento como en la adopción de ciertos conceptos como el de cantidad.
4. Desde el punto de vista operacional los negativos reciben un tratamiento de tipo algebraico y por tanto están sujetos a cumplir reglas formales.
5. El principio de permanencia de las leyes formales de Hankel es totalmente aceptado e incorporado por los autores, quienes lo utilizan para ampliar el campo numérico natural y de esta forma justificar el origen de los números negativos.
6. La ampliación del campo numérico natural hace que los negativos cumplan las mismas leyes y propiedades de los positivos; por lo tanto, los números negativos se hallan ordenados y cumplen con la relación de orden de los enteros
7. Los aspectos filosóficos sobre el origen o significado de los negativos no tienen cabida debido a su naturaleza abstracta y formal.
8. La suma de enteros es considerada una operación interna; tiene justificación algebraica y debido a la ampliación del campo numérico natural los dos autores pasan a considerar la resta como un caso particular de la suma.
9. El producto es considerado una operación interna que cumple

determinadas leyes formales, sin embargo la justificación de la regla de los signos no tiene fundamento algebraico, sino que se proporcionan interpretaciones geométricas o basadas en una interpretación relativa de la unidad negativa.

10. En estos autores no se encuentran evidencias de los números relativos según las diferencias de González Marí. Ellos plantean y operan con números enteros.
11. Desde el punto de vista pedagógico los indicadores didácticos revelan que estos autores presentan obras más elaboradas para la enseñanza de las matemáticas, con un nivel de conocimientos y actualización correspondiente a su época.

CAPÍTULO 8: Conclusiones

En esta investigación hemos efectuado un análisis sobre la presencia y el tratamiento dado a los números negativos por autores de textos publicados en España en el periodo comprendido entre 1700 y 1900. Para ello hemos descrito el entorno científico y académico general de la época (Capitulo 2); además, llevamos a cabo tanto una revisión histórico-crítica como un análisis conceptual de los documentos estudiados (Capítulos 4, 5, 6 y 7). Igualmente, hemos identificado la presencia de números naturales relativos, en algunos casos compartiendo estatus con los números enteros, tanto en procesos operativos como en la explicación de fenómenos de naturaleza real y concreta. Para identificar la presencia de los naturales relativos se han utilizado los criterios propuestos por González Marí (1995).

8.1 Autores y sociedad

La contextualización que hemos realizado en el Capítulo 2 y en los apartados 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 7.1 y 7.2, de la sociedad y el conocimiento científico así como de las corrientes filosóficas de los distintos períodos establecidos en la época objeto de estudio, han permitido identificar aspectos característicos de indudable influencia en la transmisión de los conocimientos matemáticos en el sistema educativo español por medio de los autores de textos matemáticos.

8.1.1 Evolución social y educación científica

Como se ha mencionado en los Apartados 2.1, 2.3 y 4.1 la nueva dinastía reinante incorpora técnicos, médicos y científicos extranjeros a la sociedad española de principios del siglo XVIII; esto sirve como punto de partida para la renovación de las ideas científicas en España. Hemos indicado en el Apartado 2.2 como en este periodo, de señalada influencia jesuita, la conexión inicial de los autores con los novatores marca el compromiso de estos autores con la renovación, el progreso y el cambio intelectual que resultan de las nuevas ideas derivadas de los cambios políticos y sociales del momento, destacando en este aspecto Vicente Tosca. Los autores considerados trabajan en universidades, colegios y otras instituciones de educación superior; se dedican a la docencia y dedican sus trabajos a la juventud, en cuya formación se encuentran empeñados.

En los apartados 2.4 y 4.1 señalamos cómo la Compañía de Jesús acapara en gran medida la educación de las clases altas y la burguesía; esta situación hace que tengan gran influencia tanto en la política como en la administración. El contacto de la congregación con sus miembros en el extranjero permite estar al tanto de cuanto avance y descubrimiento se da en Europa.

Como se ha destacado en el apartado 2.4.2, la expulsión jesuita origina grandes cambios en la organización de las instituciones académicas y educativas. El déficit de profesores cualificados se solventa en parte mediante el fortalecimiento de las Academias militares (mostrado en el Apartado 2.7.1) y el envío de personal al extranjero para que se capacite, tal como sucedió con Benito Bails. También se emprenden reformas en las universidades del reino, como se ha puesto de manifiesto en el Apartado 2. 6.4.

Los autores del periodo Ilustrado son protagonistas de su tiempo, prototipos de intelectuales de una clase media emergente, que asumen la responsabilidad de conocer, sintetizar, promover y difundir los conocimientos matemáticos y científicos de su época. Actúan con la integridad de ciudadanos progresistas, comprometidos social y políticamente que, cuando es necesario, se resisten a los poderes establecidos.

Como se ha destacado en el Apartado 5.13 el trabajo principal de los autores ilustrados es el de recopiladores y divulgadores del conocimiento científico más avanzado. Son agentes sociales, convencidos de que la regeneración de España pasa por un esfuerzo educativo e intelectual que incluye el conocimiento y dominio de las herramientas matemáticas al uso. Entre las muchas tareas que realizan su aportación a la difusión de la ciencia en España es mucho más que notable. Destacan principalmente Benito Bails y José Mariano Vallejo, no sólo como autores de textos sino también por la labor que realizaron en ámbitos no educativos, estos personajes son representantes del ciudadano español ilustrado de la época.

Ya se ha señalado en los Apartados 2.1, 2.8 y 6.1 cómo el retorno de Fernando VII al trono marca el inicio de un largo periodo en la vida española caracterizado por profundos cambios en los gobiernos, lo cual se refleja en el sistema educativo, que hemos denominado Romántico.

Los apartados 6.4.1, 6.5.1, 6.6.1, 6.7.1, 6.8.1 y 6.9 revelan que los autores estudiados son miembros activos de la sociedad liberal, de la burguesía emergente del siglo XIX, pero no son científicos destacados. Los cuatro primeros no son investigadores sino sólo compiladores y difusores de las ideas matemáticas y científicas de su época; el quinto autor se malogró tempranamente y no consiguió difundir en vida sus aportaciones a la construcción del conjunto de los números complejos y tampoco participar en los debates científicos que tenían lugar durante esos años sobre los fundamentos y construcción de las estructuras numéricas.

La influencia de autores y textos analizados es local, pero es importante. No se puede valorar con parámetros actuales los esfuerzos que hubo que realizar en condiciones ciertamente precarias; los méritos de estos autores son mayores de lo que podemos suponer y su principal logro fue la contribución de todos ellos, junto con muchos otros, a la normalización científica del país. Sin embargo debemos destacar a José Maria Rey y Heredia quién, a partir de las ideas kantianas, presenta una obra novedosa con un tratamiento original convirtiéndose en una aportación única en el panorama intelectual español para el desarrollo de la teoría de números imaginarios.

En los Apartados 2.10 y 2.11.2 señalamos cómo en este período la producción española de textos de matemáticas está centrada en libros para la enseñanza secundaria. Hay escasa producción para los incipientes niveles universitarios; este espacio se reserva para autores consagrados, como Vallejo, o para la traducción de textos de autores franceses, que mantienen su influencia en nuestro país. Los primeros investigadores que surgen de la naciente clase de funcionarios de la enseñanza media, formados muchos de ellos como licenciados en matemáticas, comienzan aisladamente sus trabajos; habrá que esperar algunos años para establecer contactos regulares y tener presencia en la comunidad internacional.

Como se ha mencionado en los Apartados 2.1 y 7.1 el periodo de la Restauración, que se inicia con el ascenso de Alfonso XII al trono español, acentúa el control estatal sobre el sistema educativo. Se restringen considerablemente las libertades educativas obtenidas bajo el sexenio democrático.

Hemos señalado en los Apartados 2.9.5, 2.9.10 y 7.2 que las ideas

Krausistas, que habían triunfado en los círculos académicos españoles durante el periodo Romántico, alcanzan su clímax con la fundación de la Institución Libre de Enseñanza. Sin embargo, el pensamiento científico en la Restauración se desplaza hacia el positivismo, como se observa en los Apartados 2.9.4 y 7.2.

Es durante este período cuando el profesorado universitario, a través de sus más destacados catedráticos, irrumpe en la producción de textos para la enseñanza de las matemáticas mediante planteamiento y desarrollo didáctico de los contenidos.

Al final de este periodo la ciencia española empieza a tener presencia en el ámbito internacional, basta mencionar a Santiago Ramón y Cajal en medicina o a Zoel García de Galdeano en matemáticas.

8.1.2 Los autores y las obras

Los autores escogidos representan claramente a los autores de libros de matemáticas de los periodos estudiados bien por el contenido de sus trabajos, bien por la difusión e influencia de sus obras y también por su presencia en las principales instituciones académicas y educativas de la España de la época. Hemos visto en cada momento la producción científica y hemos destacado el papel que desempeñan los autores escogidos, así como su vinculación con las instituciones educativas principales en cada etapa. La representatividad de estos autores no es estadística sino, principalmente, cultural, ya que permiten mostrar la presencia de ideas en la producción matemática del periodo analizado, como hemos tratado de poner de manifiesto en los Apartados 4.2, 4.3, 4.12, 5.2, 5.3, 5.13, 6.3, 6.3, 6.14, 7.2, 7.3 y 7.11.

Por su título y contenido podemos caracterizar los documentos atendiendo a diversos campos:

Tabla 8.1. Caracterización general de los textos

Autor	**Denominación**	**Campo general**	**Tratamiento de la Aritmética y el Álgebra**	**Otros contenidos tratados**
Pedro de Ulloa	Elementos	Matemáticas	Aritmética + Álgebra	Geometría
Vicente Tosca	Compendio	Matemáticas	Aritmética y Álgebra	X
Thomas Cerdá	Elementos	Matemáticas	Aritmética y Álgebra	X
Benito Bails	Elementos	Matemáticas	Aritmética y Álgebra	Física, Geometría, Arquitectura, Ingeniería, etc.

Juan Justo García	Elementos	Aritmética/ Álgebra	Aritmética y Álgebra	Geometría
Francisco Verdejo	Compendio	Matemáticas	Aritmética + Álgebra	Geometría, Trigonometría
José Mariano Vallejo	Tratado Elemental	Matemáticas	Aritmética y Álgebra	Geometría, Trigonometría
José de Odriozola	Curso	Matemáticas	Aritmética y Álgebra	Geometría, Trigonometría
Jacinto Feliú	Tratado Elemental	Matemáticas	Aritmética y Álgebra	X
A. Fernández Vallín y Bustillo	Elementos	Matemáticas	Aritmética y Álgebra	Geometría, Trigonometría, Topografía
J. Fernández y Cardín	Elementos	Matemáticas	Álgebra	X
José Mª Rey y Heredia	Teoría Trascendental	Cantidades imaginarias	Álgebra	X
Z. García de Galdeano	Tratado Elemental	Álgebra	Álgebra	X
L. Octavio de Toledo	Elementos	Aritmética Universal	Álgebra	Aritmética, Álgebra

Los diez primeros autores dedican un apartado de su obra a la aritmética; los cuatro últimos son libros exclusivamente de álgebra, si bien la elección de Octavio de Toledo de mostrar el álgebra como una *aritmética universal*, le lleva incluir actualizaciones de cuestiones clásicas de la aritmética. A partir de finales del XVIII los autores incluyen en su obra un apartado dedicado a la Geometría, que comprende también la trigonometría. Ulloa y Verdejo tratan conjuntamente la Aritmética y el Álgebra, mientras que la mayor parte de los autores tratan separadamente estas dos materias, muchas veces en tomos o partes distintas. Desde mediados del XIX las obras son más especializadas y tratan sólo de Álgebra. Mención aparte merece la obra de Bails, que tiene una ambición enciclopédica, lo cual se muestra por la diversidad y amplitud de temas y por el número de tomos que abarca.

También debemos señalar que las referencias bibliográficas que presentan los textos permiten reconocer tanto las influencias como el estado de actualidad de los conocimientos que poseía cada autor. De los 14 textos analizados, cinco no aportan ninguna mención sobre los autores en los que se fundamentaron para redactarlos. Estos corresponden a los escritos por Francisco Verdejo, José de Odriozola, Jacinto Feliú y Joaquín Mª Fernández y Cardín; Pedro de Ulloa tan sólo cita a Euclides y Theodosio. Thomas Cerdá, Benito Bails, José Mª Rey y Heredia, Asisclo Fernández Vallín, Zoel García de Galdeano y Luís Octavio de Toledo son quienes ofrecen un mayor número de autores citados.

Juan Justo García y Acisclo Fernández Vallín y Bustillo realizan una breve historia de las matemáticas, el primero al inicio del texto y el segundo en notas a pie de página.

Tomando en consideración los textos seleccionados y analizados, podemos afirmar que los autores matemáticos españoles del XVIII estaban al tanto de los conocimientos europeos en el área tal como lo demuestran las referencias a Cardano, Descartes, Harriot, Newton, Mclaurin, Riccati, De Moivre, Euler, Saunnderson, Clairaut, Simpson, y Bezout.

Los autores del diecinueve son menos propensos a indicar sus fuentes. Vale la pena destacar que Juan Justo García recomienda leer los textos de Bails y Vallejo; asimismo, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo menciona autores españoles como Jorge Juan, Antonio de Ulloa, Gabriel Ciscar, Agustín Pedrayes y José Mª Rey y Heredia. Es innegable la influencia de Silvestre Lacroix en los autores matemáticos españoles de la primera mitad del siglo XIX.

La mayor parte de estos autores siguen los manuales franceses y, aunque parecen seguir las mismas metodologías y estrategias didácticas, difieren en que lo prioritario está en las aplicaciones prácticas de estos conocimientos; como se mostró en los Apartados 2.10 y 2.11, generalmente estos textos estaban dirigidos a Academias Militares o instituciones formadoras de Ingenieros. Durante el ultimo cuarto del siglo XIX los autores citan en sus obras textos actuales y de diversas procedencia como, por ejemplo, de Norteamérica.

Debemos recordar que Ulloa es el primer autor español que cita a Descartes, y lo hace con una diferencia de 70 años respecto de la publicación de la Geometría; Bails consulta y utiliza las obras de Euler pocos años después de su publicación; García Galdeano cita a Hankel sólo 16 años después, y Octavio de Toledo incluye referencias relevantes de sólo 2 años de antigüedad. La vinculación con los autores europeos de cada época va mejorando y se ajusta progresivamente al momento de publicación de las obras.

Al revisar la edad en la que estos autores publican sus obras se observa que tiene una media de 41 años, esta es una edad en la que ya se ha alcanzado una madurez académica; sin embargo destaca la juventud de Juan Justo García y Acisclo Vallín y Bustillo, en contrate con la ya avanzada edad de Jacinto Feliú o Vicente Thosca. Los autores proceden de la práctica totalidad de regiones españolas, si bien destacan algunas con mayor tradición científica o técnica.

Los matemáticos españoles siempre aparecen vinculados con los centros de actividad intelectual de cada época y su situación es la de miembros de una institución religiosa o militar, o bien la de funcionarios de algún centro o estamento educativo

En el Anexo 1 se puede ver en una tabla el desarrollo cronológico de los acontecimientos más relevantes durante los siglos XVIII y XIX en relación con los autores estudiados y la historia española. A continuación presentamos las conclusiones generales a las que hemos llegado respecto a los números negativos y conceptos asociados.

8.2 Análisis Conceptual del número negativo

El concepto de número negativo se ha revelado como un potente catalizador intelectual de alguna de las ideas científicas básicas del periodo que se estudia. La complejidad de los tratamientos y la diversidad de aproximaciones detectadas para la presentación y estudio de este concepto, a partir de unas pocas nociones básicas, permite mostrar buena parte de la evolución científica y cultura de los matemáticos españoles de estos dos siglos. Para mostrar esta complejidad nos hemos ayudado del análisis conceptual de tres nociones centrales: cantidad, número y cantidad negativa. Los Apartados 4.8, 5.9, 6.10 y 7.7 recogen el análisis conceptual del número negativo y los conceptos relacionados en cada uno de los periodos históricos estudiados. A partir de estos análisis efectuamos un balance que recoge los resultados de manera transversal durante los siglos XVIII y XIX.

8.2.1 Noción de cantidad

A través de los textos sometidos a estudio, hallamos la presencia de cuatro nociones de cantidad. Estas son las distintas nociones:

- ***Noción aristotélica***:

Esta centrada en concebir las cantidades como todo aquello que se puede contar y medir. De esta manera la cantidad tiene que ver con lo continuo y lo discreto. Se identifica por medio de la definición dada por Aristóteles en la Metafísica, tal como indicamos en los Apartados 1.3.1 y 4.4.4.1; Pedro de Ulloa y Juan Justo García utilizan esta noción en sus obras.

- ***Noción Empirista***:

Se fundamenta sobre la idea de considerar la cantidad como equivalente a magnitud. Está basada en la definición dada por Stevin, como señalamos en 1.3.2 y 4.6.4.1 Al no considerarse el carácter discreto del número se elude la dicotomía griega del continuo para la medida y el discreto para el número. Esta noción es la presentada por Cerdá.

- **Noción Fenoménica:**

Como se ha indicado en el apartado 3.1.2 esta idea esta basada en la noción de cantidad hecha por Kant, y en su vinculación con la noción de cualidad. La noción de cantidad es un concepto puro del entendimiento, los objetos la experiencia son cuantificables y es, precisamente, la categoría de cantidad la que posibilita la forma matemática, tal como vimos en el Apartado 1.3.3.

La cantidad es un concepto de comparación; la magnitud es una determinación relacional. La cantidad como acto sintético se constituye en tres momentos: unidad, pluralidad y totalidad (CRP, A 80, B 106).

Esta noción esta presente en los textos de Benito Bails, Francisco Verdejo, Juan Justo García, Mariano Vallejo, José Mª Fernández y Cardín y José Mª Rey y Heredia

- ***Noción de Euler***:

Considera que cantidad es todo lo que sufre aumento o disminución. Surge a partir de la definición de Euler, la cual indicamos en los Apartados 1.3.3 y 5.4.4.1 Esta noción fue muy popular y estuvo muy difundida en la época que consideramos; sin embargo, es poco precisa y estuvo sometida a crítica. El principal inconveniente es que cosas de tipo afectivo y anímico, tales como el dolor, la felicidad, etc., pueden sufrir aumento o disminución, pero no es posible determinar el valor de tal aumento o disminución, es decir, no son magnitudes.

Esta la noción es utilizada por Benito Bails, José Mariano Vallejo, José de Odriozola y Jacinto Feliú.

- ***Noción Positivista***:

Surge a partir de la crítica anterior. Esta noción asume como cantidad la magnitud que es comparable con otra de su misma especie. Por lo tanto, las cantidades pueden ser ordenadas respecto a otras, mediante una relación de orden. Esta noción se puede observar en el planteamiento que Comte (1998) hace en su *Filosofía Positivista*. La utilizan José Mª Fernández y Cardín, Zoel García de Galdeano y Luís Octavio de Toledo.

La tabla 8.2 muestra las distintas nociones de cantidad y los autores que las utilizaron, en ella se observa que las nociones de Euler y fenoménica son las más utilizadas por los autores; la primera está influenciada por las ideas de Kant, revelándose en los autores de finales del siglo XVIII hasta los de mediados del XIX, perdiendo luego vigencia en favor de la noción positivista, la cual fue utilizada por los autores de la segunda mitad del siglo

XIX, como consecuencia lógica del pensamiento científico español de la época, tal como argumentamos en los Apartados 2.9.4, 7.2 y 7.12.

La noción de Euler es la segunda más utilizada por los autores estudiados, lo cual no es de sorprender dada su notable autoridad y prestigio en el mundo matemático. La noción aristotélica aparece durante la primera parte del siglo XVII, auque aún pervive de manera aislada al final de dicho siglo en Juan Justo García, ésta se evidencia en los autores de formación religiosa reflejando su pensamiento basado en las clásicos griegos.

Tabla 8.2. Noción de cantidad utilizada en los textos españoles (1700-1902).

Autor	Aristotélica	Empirista	Fenoménica	De Euler	Positivista
Pedro de Ulloa	X				
Vicente Tosca	X				
Thomas Cerdá		X		X	
Benito Bails			X	X	
Francisco Verdejo			X		
Juan Justo García	X		X		
José Mariano Vallejo			X	X	
José de Odriozola				X	
Jacinto Feliú				X	
A. Fernández Vallín y Bustillo			X	X	
J. Mª Fernández y Cardín			X		X
José Mª Rey y Heredia			X		
Z. García de Galdeano					X
L. Octavio de Toledo					X

Observamos que los autores de cada época están condicionados por las ideas predominantes en cada momento respecto a la noción de cantidad; su formación filosófica y científica se muestra con claridad en esta noción.

8.2.2 Noción de número

Hemos hallado varias ideas o nociones de número utilizadas por los autores de esta época; estas ideas no se presentan aisladas, en algunos autores están mezcladas o acompañadas de otras, lo que consideramos como expresión de transición entre una y otra. Hemos identificado cinco nociones distintas de número.

- ***Noción euclídea***:

Esta noción corresponde a la segunda definición que viene dada en el libro séptimo de los Elementos de Euclídes. Esta dice *“Un número es una* *pluridad compuesta de unidades"*, Como expresamos en 4.4.4.1 en esta concepción la agrupación de unidades genera el número. Así mismo esta idea de número lo asocia a objetos tangibles, y está referida a lo discreto. En sus versiones más primitivas no consideran 1 como número.

Esta noción es utilizada por Pedro de Ulloa, Vicente Tosca, Thomas Cerdá, Benito Bails y Juan Justo García. Esta idea se manifiesta a lo largo de todo el siglo XVIII.

- ***El número como relación***:

La idea está asociada a considerar los números como la relación que se establece entre una cantidad con otra o con varias cantidades. Hemos realizado una caracterización de esta noción en el apartado 4.6.4.1; allí indicamos que la idea relacional del número surge con Stevin, cuando el número pasa a explicar la cantidad. Más adelante, Newton da una definición más precisa de número en términos de una relación abstracta entre dos cantidades. Las dos diferencias entre esta noción y la euclídea son en primer lugar, que las definiciones de Stevin y Newton abarcan lo continuo, mientras que la definición de Euclides trata exclusivamente de lo discreto; en segundo término la definición relacional de Newton indica que se trata de relaciones *"abstractas"*, mientras que la euclídea tiene que ver con los objetos concretos. Es la noción con más presencia en los trabajos analizados.

Conviene recordar que García Galdeano considera las cantidades discretas como abstractas, respecto a las continuas, que las valora como concretas.

Dentro de los autores que utilizaron esta idea de número están: Thomas Cerdá, Benito Bails, Francisco Verdejo, José Mariano Vallejo, José de Odriozola, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, Zoel García de Galdeano y Luís Octavio de Toledo; también parece haber indicios en el trabajo de Jacinto Feliú, aunque no está muy clara la noción de este autor.

- ***Idea algebraica o formalista***:

Esta noción concibe al número como un objeto que pertenece a un sistema, y en tal sistema está sujeto a reglas establecidas. Es decir, el número es producto de una estructura algebraica. Este formalismo pretende obtener un lenguaje controlado que evite las ambigüedades e interpretaciones erróneas al presentar los contenidos.

García de Galdeano evidencia esta noción y, pese a que no es tan clara la utilización de esta noción, creemos que también la concebían José de Odriozola y Jacinto Feliú. Octavio de Toledo no declara esta consideración pero todo el tratamiento numérico que realiza se basa en este supuesto.

- ***Noción cardinal o preconjuntista***:

Esta es una idea precantoriana o quizá prefregeana, según la cual el número es un cardinal. El número es señalado como lo que denota una colección de objetos, y como cardinal designa cuántos hechos de una misma naturaleza hay reunidos en un conjunto. No importa cuales son los hechos u objetos que forman los conjuntos. El número no diferencia la naturaleza de los elementos de un conjunto, sólo requiere que sean de componente común. Bajo esta concepción encontramos los textos de Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, José Mª Rey y Heredia y Luís Octavio de Toledo. Joaquín Mª Fernández y Cardin también presenta indicios de esta noción.

- ***Noción Inductiva***

Esta noción inductiva de número natural, se caracteriza porque plantea que cada término se obtiene de manera recurrente, *por síntesis sucesiva de la unidad consigo misma*. José Maria Rey y Heredia es el único autor que expone esta noción, que extrae de Kant.

Estas concepciones en los autores españoles de la época se precisan en la tabla siguiente:

Tabla 8.3. Noción de número utilizada en los textos españoles (1700-1902).

Autor	Euclídea	Relacional	Inductiva	Cardinal o preconjuntista	Algebraica o formalista
Pedro de Ulloa	X				
Vicente Tosca	X				
Thomas Cerdá	X	X			
Benito Bails	X	X			
Francisco Verdejo		X			
Juan Justo García	X				
José Mariano Vallejo	X	X			
José de Odriozola		X			?
Jacinto Feliú		?			?
A.Fernández Vallín y Bustillo		X		X	
J. Mª Fernández y Cardín				?	
José Mª Rey y Heredia			X	X	
Z. García de Galdeano		X			X
Luís Octavio de Toledo		X		X	X

La noción euclidea se evidencia en los autores del XVIII lo cual es coherente con la citación a los *Elementos* que prácticamente todos ellos hacen en sus obras, aunque los vientos de la ilustración se hacen sentir a partir de la segunda mitad del siglo, al empezar a aceptar y utilizar los planteamientos relacionales de Newton y Stevin. Esta noción relacional es la predominante entre estos autores, y se halla tanto entre los de la segunda mitad del siglo XVIII como en los de la primera del XIX.

Los avances matemáticos en la teoría de los números que se suceden en el ámbito internacional llegan hasta España, como lo demuestra el tratamiento cardinal del número que hacen estos autores durante la segunda mitad del siglo XIX.

8.2.3 Consideración de cantidad positiva y cantidad negativa

El análisis histórico-crítico y el análisis conceptual realizado en este estudio ponen de manifiesto una complejidad de ideas y conceptos, que permiten concluir que no hay uniformidad en los autores de este periodo para dar tratamiento a las cantidades negativas; sin embargo, podemos destacar algunos aspectos que consideramos significativos y que agrupamos bajo las siguientes nociones de cantidades negativas:

1. Cantidades falsas*, *absurdas o menores que nada:

Esta idea surge cuando sirve para justificar la existencia de soluciones negativas en una ecuación; los valores negativos se interpretan como raíces a la izquierda de 0, a los que llaman “falsos” o “menores que nada”. Esta es la posición que sobre los negativos Descartes ha planteado en la *Geométrie*.

El conflicto tiene que ver con la asociación de las cantidades a situaciones concretas, con lo que se llega a la consideración de que cero es lo mismo que nada. La posición de los autores respecto a esta consideración está ligada a la noción euclidea de número como se constata en las tablas 8.3 y 8.4. Por lo tanto, el razonamiento que origina las contradicciones es el siguiente: si el cero representa la ausencia de la cantidad no se le puede quitar ningún valor; surgen entonces una serie de interrogantes: ¿Cómo se puede quitar algo de donde ya no hay nada? ¿Cómo pueden tener existencia unas cantidades que son menores que cero? Esto lleva a llamarles *absurdas* por ser cantidades menores que nada. Los matemáticos franceses del siglo XVIII, encabezados por D´Alambert y Lacroix, presentan reparos a aceptar los negativos por esta aparente contradicción.

2. Negación lógica

Las cantidades tanto positivas como negativas son presentadas a partir de valores proposicionales de afirmación y negación de una cantidad y no están asociadas a ningún tipo de fenómeno. Los negativos tienen su justificación en la negación, son juicios negativos; de tal forma, los positivos y negativos son opuestos o contrarios, negando unos se afirman los otros. La fundamentación/diferencia entre positivo y negativo hay que entenderla como de orden lógico: lo positivo incluye a un sujeto en un predicado, lo negativo excluye a ese mismo sujeto del predicado, esto es, la inclusión y la exclusión son funciones antitéticas, sin valor intermedio posible

3. Son el resultado de operaciones aritméticas o algebraicas

En esta noción las cantidades negativas surgen a partir de algoritmos para resolver problemas y, cuando aparecen estas cantidades negativas, se recurre a la reinterpretación de los resultados para dar sentido a tales soluciones. Proceden a justificar la existencia de las cantidades negativas mediante la ejecución de cálculos y operaciones formales con números, tan sólo establecen un orden para los negativos que son llamados cantidades negativas. Los procesos que conllevan la aplicación de operaciones para obtener la solución de las ecuaciones algebraicas producen resultados numéricos con valores negativos que satisfacen las condiciones de los problemas. Existe una tendencia a interpretar las soluciones negativas como un indicador de que se tiene un error en el planteamiento o que se deben reinterpretar el problema y en último término tomar en forma contraria la solución obtenida. Como se ha señalado en el Apartado 1.3.4 Lacroix se sitúa en esta posición.

4. Magnitudes relativas:

Se presentan cuando, a partir de un tratamiento aritmético, se reconoce el carácter relacional de cantidades positivas y negativas para algunas magnitudes. Surgen del análisis kantiano de la noción de número relativo y de las magnitudes negativas. Se establece la existencia real de las cantidades negativas en relación con las cantidades positivas correspondientes. A la noción tradicional de cantidad se añade la de cualidad, que determina el carácter afirmativo o negativo de la cantidad. Cuando hay incapacidad para demostrar el surgimiento de las cantidades negativas o justificar situaciones numéricas concretas, se recurre a planteamientos del tipo *"son cantidades que conspiran"* al fin propuesto por el calculador. También se deja a la conveniencia de quien manipula las cantidades para determinar la cualidad de positiva o negativa de las cantidades. Hemos llamado también fenoménica o fenomenológica a esta consideración.

5. Entidades de naturaleza dual (aritmética-algebraica):

Además de la existencia del estatus aritmético también hay un estatus algebraico sostenido por leyes formales. Las cantidades negativas se justifican mediante una ampliación de la sustracción. En este caso se considera que las cantidades negativas surgen de sustracciones donde el minuendo es menor que el sustraendo, y se les llama cantidades sustractivas. Cuando se trabaja en aritmética las cantidades son opuestas, o cantidades adjetivas, es decir números naturales relativos, mientras que cuando se trabaja bajo las leyes formales del álgebra se utilizan los números enteros.

6. Justificación geométrica

Hay distintas consideraciones geométricas para los números negativos; en una se utiliza una analogía que recuerda operaciones vectoriales en las leyes de la física dinámica. Se basa en la interpretación geométrica de los números reales como segmentos orientados y de los productos como superficies.

En otra se muestra la interpretación de la posición de las cantidades positivas y negativas sobre una misma recta, como resultado de considerar dos semirrectas con el mismo origen y direcciones opuestas. Para ello se impone la necesidad de considerar una doble dirección en la recta entera para hacer compatible la representación gráfica con la relación de orden independiente entre cantidades positivas y negativas.

También es asumida la rotación de segmentos de manera contraria al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de un punto para interpretar la multiplicación de un número positivo por otro negativo, es decir, ésta interpretación se apoya en la rotación de los segmentos alrededor de un eje puntual justificándose así la regla de los signos para el producto.

7. Estatus algebraico:

Bajo esta noción el tratamiento que se da a las cantidades negativas esta asociada al álgebra. Establece con claridad que las operaciones algebraicas (entre números enteros) tienen un sentido diferente que la suma y la resta aritméticas (entre naturales). Las cantidades están sometidas a reglas y leyes. Un aspecto a destacar es la aceptación de los negativos como solución a problemas y ecuaciones tal como han sido planteados.

8. Ampliación del campo numérico natural:

La aplicación del principio de permanencia de las leyes formales permite ampliar el campo numérico natural mediante el cumplimiento específico de las leyes de uniformidad, elemento neutro (módulo), existencia del inverso (recíprocos) y la conmutatividad; bajo esta estructura autores como García de Galdeano y Octavio de Toledo emplean los números negativos, pasando a ser considerados objetos abstractos y formales de origen matemático.

En la tabla 8.4 ubicamos las distintas consideraciones que los autores hacían de las cantidades positivas y negativas.

Se observa que la noción con mayor presencia en estos autores es que los negativos surgen como resultado de operaciones aritméticas o algebraicas, seguida de su consideración como magnitudes relativas.

Tabla 8.4 Noción de número negativo utilizada en los textos españoles (1700-1902).

Autor	Cantidades falsas, absurdas o menores que nada	Negación lógica	Magnitudes relativas	Resultado de operaciones Aritméticas o algebraicas	Naturaleza dual: carácter relativo	Justificación geométrica	Estatus algebraico	Ampliación del campo numérico natural
Pedro de Ulloa	X	X						
Vicente Tosca	X	X						
Thomas Cerdá	X	X		X				
Benito Bails	X		X	X	X			
J.J. García			X	X				
F. Verdejo			X	X	X			
J. M. Vallejo			X	X	X			
J. de Odriozola				X				
J. Feliú			X	X				
A. F. Vallín y Bustillo			X	X				
J. Fernandez y Cardín			X	X				
J. M. Rey y Heredia		X	X			X		
Z. Garcia de Galdeano					X	X	X	X
L. Octavio de Toledo					X		X	X

Ulloa, Cerdá, Tosca y Bails presentan cierta coherencia en sus nociones del negativo como cantidades falsas o absurdas puesto que la noción de número que utilizan es euclidea en la cual el número se asocia a la pluralidad y a las magnitudes tangibles y nada no es tangible ni plural por lo tanto no es posible quitar algo de ella. En este sentido, la presencia de las ideas de Descartes es evidente en estos autores.

Destacamos que de los ocho autores que consideran a los negativos como resultado de operaciones aritméticas o algebraicas, seis de ellos, Bails, Verdejo, J. J. García, Vallejo, Fernández Vallín y Fernández Cardín comparten también la noción fenoménica de la cantidad; a su vez Bails, Verdejo, Vallejo, Odriozola, Feliú y Fernández Vallín evidencian una noción relacional para el concepto de número. De todos ellos, cuatro presentan al mismo tiempo una idea fenoménica de cantidad y relacional de número.

Se observa cómo el estatus algebraico de la noción de número negativo y su consideración como ampliación del campo numérico natural sólo se presenta en los autores del último tercio del siglo XIX, en coherencia con los avances matemáticos que por la época se realizan sobre la formalización del número.

Ningún autor presenta una noción única para las cantidades negativas, a lo menos consideran dos; a medida que se avanza en el tiempo la variedad de consideraciones aumenta en los autores.

8.3 Análisis de contenido

El análisis de contenido que se establece en el Apartado 1.9 como método para el estudio que se realiza en los libros sobre los números negativos, y que hemos llevado a cabo en los Apartados 4.9, 5.10, 6.11 y 7.8 para cada periodo, revela lo siguiente:

8.3.1 Estructura conceptual

Nociones básicas. Números enteros

En relación al significado que otorgan a los signos, más (+) y menos (–) tenemos:

1. Operaciones: Los signos + y – representan tan sólo las operaciones de suma y resta. Podemos ubicar aquí a Bails, Verdejo, García, Vallejo, Odriozola, Feliú, Rey Heredia, Fernández Cardín y, Fernández Vallín y Bustillo.

2. Signos como oposición lógica: Los signos más y menos son contrarios y se oponen uno a otro.

3. Signos abstractos: Tan solo son signos sin significación, es decir representan signos abstractos. Ulloa y Tosca dan esta interpretación.

4. Cualidad de las cantidades: Los signos + y – indican el carácter de cantidad positiva o cantidad negativa. Es utilizada esta significación por Toscá, Cerdá, Verdejo, García, Vallejo, Odriozola, Rey Heredia, García de Galdeano, Fernández y Cardín, Fernández Vallín y Bustillo.

Hemos determinado tres indicadores para identificar la manifestación de los números enteros en los textos:

a) **Presencia de la secuencia de los números enteros**: la aparición de la secuencia ….–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …, indica que el autor opera y utiliza los números negativos y positivos conjuntamente, aunque no lo manifieste expresamente.
b) **Consideración de cantidades enteras en general**: este aspecto esta ligado al tratamiento algebraico, puesto que la generalidad

permite trabajar con un determinado valor sin entrar en consideraciones sobre su significado.

c) **Representación en la recta numérica**: este indicador señala cómo ubica el autor los valores numéricos sobre una recta permitiendo conocer, entre otros aspectos, el orden y de qué manera buscan apoyo en la geometría para justificar los valores negativos.

Todos los autores estudiados asocian el significado de los signos más y menos a indicadores de operaciones; la mayoría les otorgan un estatus lógico fundamentado en la oposición. Buena parte de la dificultad en la gestión de los negativos se encuentra en los diversos significados que se atribuyen a los signos, los cuales, a veces, hacen incurrir a los autores en contradicciones o los llevan a situaciones cerradas.

La secuencia de los números enteros esta presente en ocho de los autores, aunque muchos de ellos tan sólo la presentan cuando explican los logaritmos sin establecer relación con los positivos o negativos.

La consideración de cantidades enteras en general está justificada y se presenta principalmente en aquellas obras que corresponden a álgebra.

Tabla 8.5 Nociones básicas y concepto de enteros en España (1700-1092)

Autor	Expresión de la cualidad de una cantidad	Signos como relaciones	Signos como operaciones	Signos como oposición lógica	Presencia de la secuencia de los enteros	Consideración de cantidades enteras en general	Representación en la recta numérica
P. Ulloa	X		X	X			
V. Tosca	X	X	X	X			
T. Cerdá	X	X	X				
B. Bails		X	X	X	X		
J. J. García			X	X	X		
F. Verdejo		X	X	X	X	X	
J. M. Vallejo			X	X		X	
J. Odriozola		X	X		x		
J. Feliú		X	X		X		
A. Fernández Vallín			X	X	X	X	
J. Fernández y Cardin			X	X			
J. Rey y Heredia			X	X		X	
Z. García de Galdeano			X	X	X	X	X
L. Octavio de Toledo			X	X	X	X	X

Los autores del último periodo presentan de manera explicita representaciones en la recta numérica, además se observa que estos son los que resuelven correctamente la relación de orden y presentan en su totalidad los indicadores para los números enteros.

Definición de la suma

Prácticamente todos los autores manifiestan la utilización de la anulación compensación cuando efectúan adiciones numéricas entre positivos y negativos. La tabla 8.6 muestra como se produce una evolución desde la justificación aritmética hacia la justificación algebraica; algunos autores presentan indicios de los dos tipos, pero finalmente prevalece la algebraica. Aunque a lo largo de los dos siglos estudiados se enuncian reglas propias para la resta, es a partir de la segunda mitad del siglo XIX cuando se empieza a considerar la resta como un caso particular de la suma.

Solamente un autor del último periodo, hacia finales del siglo XIX, da justificaciones geométricas para la suma. Indica de qué manera se afecta a las posiciones de los valores numéricos en la recta cuando se someten a operaciones de suma o resta.

Tabla 8.6 Suma

Autor	Presencia de la anulación-compensación	Justificación aritmética	Justificación algebraica	Reglas propias para la resta	Resta como caso de la suma	Justificación geométrica
P. Ulloa	X	X		X		
V. Tosca	X	X		X		
T. Cerdá	X	X			X	
Benito Bails	X	X	X	X		
J. J. García	X	X	X	X		
Francisco Verdejo	X		X	X		
J.M. Vallejo	X		X	X		
Odriozola	X	X		X		
Feliú	X		X	X	X	
Fernández Vallín	X		X	X	X	
Fernández y Cardín	X		X			
Rey y Heredia	X				X	X
Z. García de Galdeano			X	X	X	
L. Octavio de Toledo			X	X	X	X

Estructura aditiva

Solamente cinco autores, Feliú, Fernández Vallín, Fernández Cardín, García de Galdeano y Octavio de Toledo consideran explícitamente que la suma y la resta de cantidades entera son leyes de composición interna. Sin embargo, son los dos últimos quienes definen las propiedades formales de estas operaciones.

Orden en los números negativos

A lo largo del análisis conceptual realizado, encontramos que no hay uniformidad respecto al orden de los números negativos tratados; por ejemplo, Ulloa ni siquiera de detiene a hacer consideraciones sobre este aspecto. Cerdá establece un orden para los negativos y un orden para los positivos, cada uno corresponde al orden parcial de los enteros, pero no establecen ninguna relación o comparación entre estos ordenes. Rey y Heredia indica que los negativos y los positivos no son comparables con el cero, por lo tanto no es posible establecer un orden entre ambas cantidades; una posición similar es la de Fernández y Cardín y, Fernández Vallín y Bustillo.

Bails indica un orden para los negativos respecto a cero, pero no menciona cómo es este orden respecto a positivos. Por su parte Tosca, Vallejo y Cortázar establecen un orden parcial de los enteros a los negativos pero no lo relacionan con el orden de los positivos. Vallejo, Odriozola, Feliú, Odriozola, García de Galdeano, Octavio de Toledo establecen el orden de los enteros para los números positivos y negativos.

Por lo que hemos expresado anteriormente, podemos identificar seis niveles respecto al orden entre las cantidades negativas. Estos son:

a) ***Nivel 1: Orden relativo***.

No existe una asignación fija de significados y valores (indicador a_1); la comparación entre positivos y negativos es arbitraria y no son comparables entre sí (indicador a_2).

b) ***Nivel 2: Orden entre cantidades negativas*****.**

Se aplica un orden inverso al entero considerándose los valores negativos como naturales con sentido contrario (indicador a_3), pero no son comparables respecto al cero.

c) ***Nivel 3: Orden en las cantidades negativas respecto a cero.***

Se cumple la condición anterior pero ya se toma en consideración el cero, indicándose que los negativos son menores que cero. No se establece ninguna relación o comparación con los positivos.

d) ***Nivel 4: Orden en las cantidades positivas y negativas, pero no son comparables entre sí.***

Al cumplimiento del punto anterior se agrega el mismo tratamiento a los positivos, pero sigue sin existir relación o comparación entre ambos tipos de cantidades.

e) Nivel 5: Orden y comparación entre positivos y negativos.

Los números positivos y negativos se ordenan correctamente con respecto a cero y se estable la comparación entre ellos, indicando que los positivos son mayores que los negativos.

f) *Nivel 6: Orden total entero.*

Además del correcto orden respecto a cero y establecerse que los positivos son mayores que los negativos o que los negativos son menores que cualquier positivo, se enuncia el principio de tricotomía y se definen propiedades.

Tabla 8.7 Niveles de orden respecto a las cantidades negativas

Autor	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Pedro de Ulloa	X					
Vicente Tosca	X					
Thomas Cerdá				X		
Benito Bails		X	¿?			
Juan J. García	-	-	-	-	-	-
Francisco Verdejo	-	-	-	-	-	-
J. Mariano Vallejo			X			
José de Odriozola						X
Jacinto Feliú						X
J. Fernández Vallín				X		
A. Fernández y Cardín					X	
J. Mª. Rey y Heredia				X		
Z. García de Galdeano						X
L. Octavio de Toledo						X

Debe mencionarse que el valor absoluto es considerado de manera explícita por la mayoría de autores. Ninguno de los autores del primer periodo estudiado, el de influencia jesuita, hace mención al valor absoluto y lo mismo ocurre con dos del segundo periodo, el ilustrado. A partir de principios del siglo XIX, ya todos los autores utilizan el valor absoluto y lo plantean entre los conceptos a explicar.

Definición del producto

Todos los autores tratan la regla de los signos para el producto cuando se incluyen los negativos. El producto tan sólo es considerado como una operación interna en el campo numérico entero y por los autores del periodo de la Restauración, definiendo tanto el modulo como el reciproco; además exponen las propiedades conmutativa asociativa y distributiva respecto a la adición.

Los autores del principios del siglo XVII, de influencia jesuita, recurren a una interpretación lógica para justificar la regla de los signos, de tal forma que el carácter de negación lógica atribuyen al signo menos (–) les permite justificar la regla de los signos, porque dos negaciones equivalen a una afirmación.

Durante el periodo Ilustrado la interpretación que prevalece es la justificación de los resultados de los distintos casos del producto mediante argumentos que tratan de interpretar el carácter relativo del multiplicador. Esta interpretación se evidencia a lo largo de todos periodos.

Los autores del período Romántico comparten tanto la justificación algebraica para el producto como la consideración del multiplicador igual a la unidad.

Es en el período de la Restauración cuando los autores buscan un convenio de fácil comprensión mediante el cual justificar la regla de los signos. Además, incorporan una justificación de tipo geométrico para simplificar los signos en el producto.

Tabla 8.8 Regla de los signos

Autor	Interpretación lógica para justificar los regla de los signos	Interpretación del carácter relativo del multiplicador	Multiplicador igual a la unidad	Justificación algebraica	Interpretación geométrica	Justificación mediante convenio
Pedro de Ulloa	X					
Vicente Tosca	X					
Thomas Cerdá		X				
Benito Bails		X				
Juan J. García		X				
Francisco Verdejo		X				
J. Mariano Vallejo		X	X	X		
José de Odriozola				X		
Jacinto Feliú			X			
J. Fernández Vallín		X				
A. Fernández y Cardín			X			
J. Mª. Rey y Heredia				X	X	
Z. García de Galdeano					X	X
L. Octavio de Toledo			X			X

8.3.2 Fenomenología

En un trabajo previo ya hemos presentado algunas caracterizaciones (Maz, 2002). Los autores justifican los números de diversas formas, desde la interpretación de situaciones concretas tales como desplazamientos, hasta la ampliación formal de la sustracción, pasando por interpretaciones operativas, y explicaciones retóricas propias de la aritmética.

Las situaciones que son utilizadas para ejemplificar y caracterizar a las cantidades negativas se agrupan de manera global en tres grupos, fenómenos físicos, contables y matemáticos; veamos cada uno de ellos (Fig. 8.1):

- ***Fenómenos físicos:*** los autores recurren a fenómenos que se dan en la naturaleza y son explicados mediante leyes físicas. Se manifiesten cinco clases de ellos:
  a) *Desplazamientos.* Se apoyan en situaciones de avances o retrocesos de objetos. Estos son comparaciones de medidas dirigidas con sentidos opuestos
  b) *Deformaciones.* Presentan contextos en los que algunos cuerpos son sometidos a una determinada fuerza en una u otra dirección.
  c) *Fuerzas.* Se presentan analogías entre la acción y reacción de la tercera ley de Newton y las cantidades positivas y negativas.
  d) *Temperaturas.* Las variaciones térmicas medidas en el termómetro respecto al valor del cero se utilizan para compararlas con el paso de valores positivos a los negativos a lo largo de la recta numérica.
  e) *Capacidad.* La entrada y salida de productos o sustancias en lugares o recipientes sirve para suscitar símiles con los números negativos y positivos al efectuarse una operación matemática sobre ellos.

- ***Fenómenos contables:*** están relacionados con el manejo de capitales mediante la relación debe-haber o deudas y ganancias; sirven tanto para dar significado a las situaciones negativas como para ilustrar lo que entienden los autores por una cantidad menor que nada.

- ***Fenómenos matemáticos:*** recurren a los objetos del mundo matemático para ilustrar los negativos. Se manifiesten cinco clases de ellos:
  a) Comparaciones de orden. A través de comparaciones entre valores numéricos.
  b) *Operaciones aritméticas*. Mediante adiciones o sustracciones.
  c) *Operaciones algebraicas*. Se recurre a la extracción de raíces de expresiones algebraicas y a la resolución de problemas.

d) <u>*Secuencias numéricas*</u>. Las sucesiones y series permiten observar el posicionamiento de los valores numérico según su signo y valor.

e) <u>*Posiciones o desplazamientos geométricos*</u>. La recta numérica y los desplazamientos sobre ella, así como las traslaciones sobre utilizando la circunferencia permiten "explicar" a algunos autores el cambio de signo en los números.

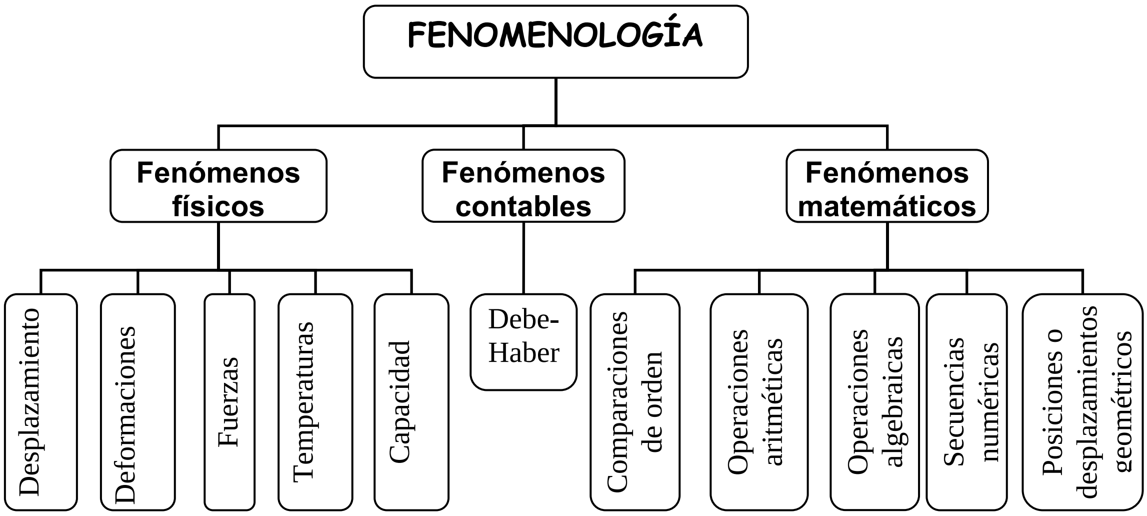


Figura 8.1 Tipologías fenomenológicas

8.3.3 Sistemas de representación

Los sistemas de representación permiten al autor hacer presentes y comunicar a los lectores o alumnos las ideas matemáticas que quiere transmitirles, en nuestro caso tenemos acceso a las representaciones escritas. El análisis de textos ha permitido identificar cuatro tipos de representaciones utilizadas:

a) ***Verbales:*** el autor recurre a dar explicaciones de los fenómenos donde intervienen los números negativos mediante descripciones verbales con una alta carga retórica.

b) ***Numéricas:*** sólo se utilizan combinaciones de números y signos para dar idea y explicar las cantidades negativas. Absolutamente todos los autores utilizan notaciones numéricas para presentarlas.

c) ***Gráficas***: se recurre a la gráfica por medio de una recta, la cual contiene generalmente letras que indican lugares o posiciones. Aunque el esquema gráfico es el mismo en varios autores, si comparamos la representación gráfica de Ulloa en 1706 con la de Cortázar en 1892, es prácticamente la misma, sin embargo varían los argumentos utilizados para justificar la cantidad negativa que surge de allí.

d) ***Algebraicas***: estas representaciones combinan los números con los signos y las letras; se utilizan las ecuaciones como recurso para mostrar como surgen y se operan las cantidades negativas.

8.4 Diferencias lógico-formales entre Z y N_r

Uno de los propósitos de esté estudio era calibrar la potencia de las diferencias lógico formales establecidas por González Marí, cómo categorías de análisis del paso de los números naturales, hacia la formalización de los enteros, con la presencia de los números naturales relativos.

Tabla 8.9 Identificación de las diferencias entre Z y N_r en los textos seleccionados.

Autor/Texto	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
Elementos matemáticos. *Pedro de Ulloa*	Si	Si	Si	¿?	Si
Compendio mathematico. *Thomas Vicente Tosca*	No	P	No	No	P
Liciones de Mathematica, o Elementos generales de arithmetica, y ... *Thomas Cerdá.*	No	No	No	No	P
Elementos de aritmética. *Benito Bails*	P	Si	P	No	Si
Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría. *Juan Justo García*	Si	P	No	No	Si
Compendio de Matemáticas puras y mixtas. *Francisco Verdejo González*	P	P	No	No	P
Tratado elemental de matemáticas. *José Mariano Vallejo*	Si	P	No	No	Si
Curso completo de Matemáticas puras. *José de Odriozola*	No	No	No	No	P
Tratado elemental de Matemáticas. *Jacinto Feliz*	No	No	No	No	Sí
Elementos de Matemáticas. *Aciscio Fernández Vallín y Bustillo*	P	No	No	No	P
Elementos de matemáticas *Joaquín Mª Fernández y Cardin*	Sí	No	No	No	Sí
Teoría transcendental de las Cantidades Imaginarias. *José María Rey y Heredia*	Sí	No	Sí	P	Sí
Tratado de Álgebra . *Zoel García de Galdeano.*	No	No	No	No	No
Elementos de Aritmética Universal. Calculatoria. *Luís Octavio de Toledo*	No	No	No	No	No

El símbolo ¿? indica que no se hallaron evidencias que permitan emitir un juicio.

Por medio del análisis de los textos y como se ha señalado en los apartados 4.12, 5.12, 6.13 y 7.10 hemos constatado la presencia de indicadores explícitos de los números naturales relativos aún cuando ya se dominen algunos aspectos formales de los números enteros, como es el caso de Fernández y Cardín, Fernández Vallín y Bustillo, Cerdá, y Odriozola.

También se halló un autor, Ulloa, que presenta en su trabajo cuatro de las cinco diferencias lógico-formales; en el extremo opuesto situamos a García de Galdeano y Octavio de Toledo en quienes no encontramos evidencias de la presencia de alguno de los indicadores o diferencias establecidas, ya que trabajan con números enteros.

La quinta de las diferencias (D_5) es la que se presenta en mayor número de autores, siete completamente y cinco parcialmente, seguida de la primera (D_1) la cual se presenta totalmente en cinco y parcialmente en tres; la diferencia se reconoce en dos textos con claridad y se presenta en otros cuatro (D_2), mientras que la diferencia tres (D_3) sólo tiene presencia en dos autores. La cuarta diferencia (D_4) no se cumple en ninguno de los autores.

Algunos autores muestran evidencias de trabajar con números naturales relativos, pero no fue posible ubicarles en las diferencias lógico-formales; esta dificultad muestra lo complejo de algunos conceptos, que no son claramente detectables por las diferencias mencionadas.

Las diferencias planteadas por González Marí (1995) se identifican en la mitad de los textos analizados, especialmente para ilustrar o dar ejemplo de las cantidades negativas con fines didácticos, aunque si se tiene en cuenta la presencia parcial tenemos que estas diferencias se manifiestan en doce de los catorces textos analizados.

Al comparar la tabla 8.7 con la tabla 8.4 se observa que los autores cuyas obras no revelan la presencia de ninguna de las diferencias son aquellos cuyo concepto y tratamiento de los negativos se hace como un conjunto numérico con estructura de grupo abeliano. Además, en aquellos que reflejan una idea de los negativos asociados al álgebra, no se da un cumplimiento total de la quinta diferencia (D_5), exceptuando a Feliú.

El análisis de los textos ha revelado que las cinco diferencias lógico-formales postuladas por González Marí y que distinguen a los enteros de los números naturales relativos no son suficientes para establecer la presencia o ausencia de los relativos. Estas se concentran principalmente en la relación de orden y, parcialmente, en la suma y dejan de lado otros aspectos que, en cierta medida, se reflejan frecuentemente en los textos, como ocurre con la consideración de la resta o la justificación de la regla de los signos.

Algunos de los puntos que aportan información adicional para distinguir a los números relativos están asociados a la consideración de la adición y la sustracción como una ley de composición interna. En los relativos estas operaciones están asociadas al aumento o la disminución, sin embargo, en los enteros tienen por objeto aplicar una operación matemática directa para reunir en bajo un mismo número los valores numéricos dados.

También en la explicación de la regla de los signos para el producto se hallan indicios para su distinción. Cuando la justificación se realiza mediante explicaciones verbales o asumiendo que el sentido de +1 es el natural y se trata de interpretar el multiplicando negativo lógicamente, o bien como un operador que indica el sentido en que debe tomarse el multiplicador respecto a +1, se está en el terreno de los números relativos, mientras que en el momento en que la regla de los signos se justifica a través del cumplimiento de determinadas leyes esto se aborda desde el campo numérico de los enteros.

El análisis de la tabla 8.7 respecto a las tablas 8.2, 8.3 y 8.4 revela algunas relaciones entre estas. Los autores que evidencian, aunque sea de forma parcial, la utilización de los números naturales relativos respecto al orden parcial (natural doble con inversión en la región negativa) correspondiente a la primera diferencia (D_1) de González Marí, utilizan de forma mayoritaria un concepto fenoménico de la cantidad y una noción de número negativo asociada a las magnitudes relativas.

Asimismo, los autores que evidencian, aunque sea parcialmente, la presencia de un primer elemento para los números negativos, correspondiendo esto a la segunda diferencia (D_2), presentan de manera general una noción de número de corte euclídea.

Los autores que reflejan total o parcialmente la composición aditiva del tipo anulación-compensación para los positivos y negativos, correspondiente a la quinta diferencia (D_5), reflejan mayoritariamente para los números negativos el uso de las nociones asociadas a magnitudes relativas y como resultado de operaciones aritméticas o algebraicas; sin embargo quienes no presentan indicios de esta quinta diferencia, revelan una idea positivista de la cantidad y la consideración del número negativo bajo un estatus algebraico o como ampliación del campo numérico natural.

A la luz de los resultados parece que la quinta diferencia (D_5) es la que presenta mayores dificultades para ser superada y sólo cuando comprenden y dominan las leyes y propiedades algebraicas los autores están en capacidad de superarla.

8.5 Logro de objetivos

De acuerdo a los objetivos planteados para este estudio en el Apartado 3.2 se concluye:

Objetivos Generales

a) **Objetivo 1**:

Caracterizar el entorno social, cultural, científico y académico en que se ubican los matemáticos españoles autores de libros de texto en los siglos XVIII y XIX.

Objetivos parciales

- **O1$_1$:** Identificar los presupuestos sociales, políticos e institucionales de cada uno de los autores estudiados, que los ubican en su época.

Por lo realizado en el Capítulo 2 y los apartados 4.1, 4.2, 4.12, 5.1, 5.2, 5.13, 6.1, 6.2, 6.14, 7.1, 7.2 y 7.11, afirmamos que este objetivo parcial se ha cumplido.

- **O1$_2$:** Identificar los presupuestos filosóficos, intelectuales, educativos y matemáticos de cada uno de los autores estudiados.

Mediante el estudio hecho en los Apartados 2.2, 2.9, 2.10, 2.11, 4.3, 5.3, 6.3, 7.3 y las conclusiones mostradas en 8.2.1, 8.2.2 y 8.2.3 afirmamos que esta objetivo parcial se alcanzado plenamente.

- **O1$_3$:** Identificar documentos, textos y autores que influyeron en los autores españoles de textos matemáticos de este periodo.

El balance de lo realizado en los Apartados 4.4.1, 4.4.2, 4.5.1, 4.5.2, 4.6.1, 4.6.2, 4 4.7, 5.4.1, 5.4.2, 5.5.1, 5.5.2, 5.6.1, 5.6.2, 5.7.1, 5.7.2, 5.8, 6.4.1, 6.4.2, 6.5.1, 6.5.2, 6.6.1, 6.6.2, 6.7.1, 6.7.2, 6.8.1, 6.8.2, 6.9, 7.4.1, 7.4.2. 7.5.1, 7.5.2 y 7.6 permite señalar que este tercer objetivo parcial se ha alcanzado.

Como hemos mostrado al alcanzarse cada uno de los objetivos parciales planteados para este primer objetivo general, lo damos por cumplido.

a) **Objetivo O2**:

Establecer el tratamiento dado a los números negativos en textos publicados en España durante los siglos XVIII y XIX, mediante su análisis conceptual y de contenido.

Objetivos parciales

- **O2$_1$**: Caracterizar el tratamiento y desarrollo de los conceptos de cantidad, cantidad negativa, número y número entero en España, mediante un análisis conceptual basado en técnicas histórico-críticas.

Este objetivo se ha alcanzado por medio del análisis conceptual y de las caracterizaciones realizadas en los Apartados 4.8, 5.9, 6.10, 7.7 y 8.2.

- **O2$_2$**: Caracterizar la estructura algebraica establecida para los números negativos en cada autor.

Este objetivo se ha alcanzado por medio de las caracterizaciones realizadas en los Apartados 4.4.4.2, 4.5.4.2, 4.6.42, 4.9.1, 5.4.42, 5.5.4.2, 5.6.4.2, 5.7.4.2, 5.10.1, 6.4.4.2, 6.5.4.2, 6.6.4.2, 6.7.4.2, 6.8.4.2, 6.11.1, 7.4.4.2, 7.5.4.1 y 7.8.1.

- **O2$_3$**: Identificar los fenómenos, contextos y situaciones utilizados para presentar las cantidades y números negativos en los textos en este período.

La consecución de este objetivo parcial se alcanzo mediante los Apartados 4.9.2, 5.10.2, 6.11.2, 7.8.2 y 8.3.2.

- **O2$_4$**: Identificar y enumerar los tipos de representaciones utilizadas.

Este objetivo parcial se ha alcanzado de manera satisfactoria como se deduce de los Apartados 4.9.4, 5.10.4, 6.11.4, 7.8.4 y 8.4.

- **O2$_5$**: Caracterizar los problemas y procesos de modelización manejados en las aplicaciones de los diferentes conceptos de número negativo, detectados en los textos analizados.

A lo largo de los Apartados 4.9.2, 4.9.3, 5.10.2, 5.10.3, 6.11.2, 6.11.3 7.8.2, 7.8.3 y 8.3.2 se ha mostrado el logro de este objetivo parcial.

La consecución de cada uno de los cinco objetivos parciales planteados para este segundo objetivo, señala el cumplimiento total del objetivo general.

b) <u>Objetivo O3:</u>

Falsar la conjetura de González Marí sobre la presencia de dos estructuras formales para presentar el concepto de número negativo en los libros de texto de matemáticas con manuales de estos siglos.

Objetivos parciales

- **O3$_1$**: Establecer las diferencias lógico-formales entre los números enteros y los números naturales relativos, de acuerdo con los hallazgos obtenidos en caracterizaciones hechas en investigaciones previas.

Mediante el desarrollo de los Apartados 4.10, 5.11, 6.12, 7.9 y 8.4 se han analizado la presencia de las diferencias lógico-formales y, por tanto, se ha alcanzado este objetivo parcial.

- **O3$_2$**: Establecer el tipo de estructura algebraica y estructura de orden utilizada para los números negativos en los libros de matemáticas en España en los siglos XVIII y XIX.

Este objetivo parcial se ha alcanzado como se muestra en los apartados 4.9.1, 5.10.1, 6.11.1, 7.8.1 y 8.3.1.

Como se ha mostrado, el cumplimiento de estos dos objetivos parciales definidos para este tercer objetivo general señala la consecución y cumplimiento total del objetivo.

8.6 Conclusiones sobre las hipótesis

Hipótesis 1*: el concepto de número que utilizan los autores, conlleva a que los números negativos se presenten asociados a una noción de cantidad en situaciones reales.*

En el análisis de la noción de número utilizada por autores españoles de los textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX –presentado en la tabla 8.2– se ha podido constatar el predominio del concepto relacional de número en 8 de los 14 autores y la noción euclídea en seis, lo cual muestra la pervivencia de estas nociones a lo largo del tiempo. Se ha expresado reiteradamente en este trabajo que la mayoría de ejemplos y situaciones que se hacen de los números negativos tienen que ver con situaciones reales, este hecho esta relacionado con la dificultad para justificar la regla de los signos tanto en la adición como en la multiplicación; asimismo, la asociación a situaciones fenomenológicas reales (físicas) es utilizada con el propósito tanto de utilizar situaciones familiares y conocidas por el lector como para facilitar su representación gráfica mediante símiles. Este hecho está reforzado por una amplia presencia de la noción fenoménica de cantidad, como se señaló en los apartados 4.8, 4.11, 4.12, 5.9, 5.11, 5.12, 6.10, 6.12, 6.13, 6.15, 7.5, 7.7 y 7.9. Así hemos verificado esta primera hipótesis.

***Hipótesis 2**: La estructura algebraica, utilizada en este periodo en los textos no es la estructura aditiva convencional de los números enteros sino la estructura de adición de los números naturales y la anulación-compensación de los números naturales relativos.*

Por los análisis efectuados a cada texto de acuerdo a los campos determinados, así como por medio de la tabla 8.6, en la cual podemos apreciar la presencia reiterada en mas de la mitad de los textos analizados de la quinta diferencia (D_5), correspondiente a la estructura aditiva natural o anulación-compensación, podemos verificar que en efecto la estructura aditiva utilizada en este periodo no era la estructura aditiva de los números enteros, situación que sólo encontramos en los autores del último periodo. Por lo anterior y lo expuesto en el Apartado 8.4 confirmamos la segunda hipótesis.

***Hipótesis 3**: La estructura de orden, utilizada en este periodo en los textos no corresponde al orden de los números enteros sino al orden de los números naturales relativos.*

Como se aprecia en los análisis de los textos, y por lo afirmado sobre la existencia de una variedad de planteamientos acerca del orden de los negativos, especialmente por la asignación tanto de un orden entero total por algunos autores, como un orden parcial por otros, esto reveló la presencia de diversos niveles en la estructura de la relación de orden, como señalamos en el Apartado 8.3.1. El orden de los números naturales relativos solamente se manifiesta cuando el autor pretende dar explicación a situaciones aritméticas asociadas a esquemas duales opuestos como debe-haber, ganar perder, etc. Por tal motivo y por lo expresado el Apartado 8.3.1 no se confirma esta tercera hipótesis. Pero si detectamos una complejidad en la relación de orden cuando intervienen números negativos que hacen que la mayor parte de los autores se encuentre en transición entre el orden relativo establecido por González Marí y el orden entero.

8.7 Aportaciones de la investigación

Esta tesis aporta a la comunidad investigadora en Educación Matemática unos elementos de utilidad en futuras investigaciones centradas en conceptos numéricos. Estas son:

- Tres parrillas validadas para seleccionar y organizar la información obtenida sobre un determinado autor, texto, o un concepto dado.

- Una metodología para llevar a cabo análisis de textos; estos análisis integran una metodología de tipo conceptual, histórico y epistemológico.

- Apertura un tópico de investigación de tipo histórico-epistemológica dentro de la línea de investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico.

- Presenta un modelo de investigación en el que muestra de qué manera la presentación de los conceptos matemáticos, en textos cuya finalidad es la enseñanza, se ven afectados por el contexto social, cultural y científico en que se desenvuelve el autor.

- Este estudio rescata aspectos culturales, políticos y científicos de los autores mostrando como su compromiso social algunas veces iba más allá del ámbito académico.

8.8. Algunas perspectivas

Una vez cerrada esta investigación quedan abiertos algunos aspectos relacionados con el tema que son de interés para el área de Didáctica de la Matemática. Estos aspectos son:

- Profundizar en el desarrollo del concepto de cantidad, número y número entero, tomando en consideración las aportaciones de la filosofía de la matemática y autores de trascendencia internacional.

- Parece conveniente realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el tratamiento dado a los enteros en textos de la misma época por autores no españoles, pero cuyas obras fueron traducidas y empleadas en la enseñanza, para establecer en qué medida estos tratamientos influenciaron en las publicaciones españolas de matemáticas posteriores.

- Resultaría de mucho interés y utilidad realizar un estudio como el que hemos llevado a cabo pero con libros de textos escolares actuales.

- Una alternativa que llama la atención es indagar en alumnos de secundaria sobre cuales son sus respuestas ante los conflictos detectados en el estudio histórico sobre las nociones de número, cantidad, número entero.

- También se plantea la posibilidad de investigar con maestros en ejercicio sobre las respuestas que brinden ante los conflictos detectados en el presente estudio histórico sobre los conceptos cantidad, número y número entero. Además caracterizar las representaciones y ejemplificaciones que utilizan para la enseñanza de los enteros.

- Una perspectiva inmediata de trabajo es investigar si en los textos escolares actuales se manifiestan los cinco niveles de conceptualización de la relación de orden entre números enteros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABELLÁN, J. L. (1981*). Historia crítica del pensamiento español. Tomo III. Del Barroco a la ilustración (siglos XVII y XVIII).* Madrid: Espasa-Calpe.

ABELLÁN, J. L. (1984)*. Historia crítica del pensamiento español. Tomo IV.* Madrid: Espasa-Calpe.

AGUILAR PIÑAL, F. (1983). *Bibliografía de Autores españoles del siglo XVIII*. Tomos, I al VIII. Madrid: CSIC.

AGUILAR PIÑAL, F. (1995). *Bibliografía de Autores españoles del siglo XVIII*. Tomos IX y X. Madrid: CSIC.

ALBARES ALBARES, R. (1996). Los primeros momentos de la recepción de Kant en España: Toribio Núñez Sesse (1776-1834). *El Basilisco*. Nº 21. pp. 31-33.

ALVAREZ de MIRANDA, P. (1992). *Palabras e ideas: el léxico de la ilustración temprana en España (1768-1760).* Madrid: Rialp.

ÁLVAREZ JUNCO, J. (2002). La conformación de una identidad. En Gómez-Ferrer, G. (coord.) *La Época de la Restauración (1875-1902) Civilización y Cultura. Historia de España de Menéndez Pidal Tomo XXXVI- 2.* Madrid: Espasa Calpe.

ALBARRACÍN, A. (1988). Las ciencias biomédicas en España, de 1800 a 1936. En Sánchez Ron, J. M. (ed.) *Ciencia y sociedad en España*. Madrid: El Arquero/CSIC. Pp. 143-156.

AMALRIC, J. P. y DOMERGUE L. (2001). *La España de la ilustración*. Barcelona: Crítica.

ARCAVI. A. (1991). Two benefits of using history. *For the learning of mathematics.* Vol. 2, 4. p. 11.

ARENZANA, V. (1987). *La enseñanza de las matemáticas en España en el siglo XVIII. La escuela de Matemáticas de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País.* Tesis doctoral. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

ARGÜELLES, J. (1989). *Historia de la matemática*. Madrid: Akal.

ARIAS DE SAVEDRA, I. (2002). *Ciencia e Ilustración en las lecturas de un* *matemático: La Biblioteca de Benito Bails.* Granada: Editorial Universidad de Granada y Reiá Académa de Bones Lletres de Barcelona.

ARISTÓTELES (1998). *Metafísica*. Introducción y notas de T. Calvo. Madrid Gredos.

ARISTÓTELES (1999). *Categorías*. Madrid. Tecnos.

ARÓSTEGUI, J. (1994). *La investigación histórica: teoría y método*. Barcelona: Crítica.

AUSEJO, E., y HORMIGON, M. (2002). Spanish initiatives to bring mathematics in Spain into the international mainstream. En K. Parshall, y A. Rice (eds.) (2002) *Mathematics unbound: the Evolution of an International Mathematical Research Community 1800-1945. "History of Mathematics", 23*. (45-60). London: American Mathematical Society y London Mathematical Society

BAILS, B. (1779a). *Elementos de arismética*. Tomo I. Madrid: D. Joaquín Ibarra, Impresor de la cámara de S.M.

BAILS, B. (1779b). *Elementos de arismética*. Tomo II. Madrid: D. Joaquín Ibarra, Impresor de la cámara de S.M.

BAILS, B. (1795). *Principios de arismética de la Real Academia de San Fernando*. Tomo I. Tercera Edición. Madrid: Imprenta de la Vda. de Joaquín Ibarra.

BAILS, B. (1797). *Principios de arismética de la Real academia de San Fernando*. Tomo II. Tercera edición. Madrid: Imprenta de la Vda. de Joaquín Ibarra.

BARDIN, L. (1986). *El análisis de contenido.* España: Ediciones Akal.

BARINAGA, J. (1934). D. Luis Octavio de Toledo y Zulueta. *Anales de la Universidad de Madrid*. Tomo III (ciencias), 1-8.

BARROW-GREEN, J. (1998). History of mathematics. Resources on the word wide web. *Mathematics in school*. Vol. 27 Nº 4. London pp. 16-21.

BELL, A. (1979). Developmental studies in the additive composition of numbers. *Recherches en didactique des mathematiques.* (pp. 113-141).

BELL, E. T. (1999). *Historia de las matemáticas.* Cuarta reimpresión. México:

Fondo de Cultura Económica.

BERNAL, A. (1979). *La lucha por la tierra en la crisis del Antiguo Régimen.* Madrid: Taurus.

BEZOUT, M. (1769). *Cours de mathématiques, a l´usage des gardes du Pavillon de la Marine:* París.

BISHOP, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Madrid : Paidos.

BISQUERRA, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. CEAC

BLANCHÉ, R. (1973). *La epistemología.* Traducción de A. Giralt. España: Oikos-tau.

BORDA, R. E. (1995). Understading and operating with integers: difficulties and obstacles. *PME-19*. Recife. Vol. II. (pp. 226-233).

BRITO, A.; CARDOSO, V. C. (1997). Uma abordagen histórico-pedagógica dos fundamentos do cálculo diferencial: Reflexões metodológicas. *Zetetike*. Campiñas: Unicamp. V. 5, nº 7. pp.129-14.

BRIOT, C. A. (1880). *Lecciones de álgebra elemental y superior*. Traducido por C. Sebastián y B. Portuondo. Madrid: Imprenta de la Vda. e hijo de D. E. Aguado.

BRUNO, A. (1990). *Análisis epistemológico y didáctico de los números enteros*. Memoria de Licenciatura. Universidad de la Laguna.

BROOKS, E. (1880). *The philosophie of Arithmetic*. Washington: Lancaster.

BRUNO, A. (1997). *La enseñanza de los números negativos desde una perspectiva unitaria*. Tesis doctoral. La Laguna: Universidad de La Laguna.

BRUNO, A.; ESPINEL, M. C., y MARTINÓN, A. (1997). Propestive teachers solve additive problems with negative numbers. *Focus on learning problems in mathematics.* Vol. 19, Nº 4. (Pp.36-55).

BURRIEZA, J. (2004). Los ministerios de la Compañía. En Egido, T. (Coord): *Los jesuitas en España y en el mundo hispanico.* Madrid: Marcial Pors.

CAMACHO, A. (2000). *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios* *mexicanos del siglo XIX de la noción de cantidad al concepto de límite.* Tesis doctoral. Cinvestav. México D. F.

CAÑÓN, C. (1993). *La matemática creación y descubrimiento*. Publicaciones de la Universidad Pontificia Comillas.

CAPITÁN DÍAZ, A. (1991). *Historia de la educación en España. Tomo I. De los orígenes al reglamento general de instrucción pública (1821).* Madrid: Dykinson.

CAPITÁN DíAZ, A. (2000). *Educación en la España contemporánea*. Barcelona: Ariel.

CAPEL, H. (1982). *Geografía y Matemáticas en la España del Siglo XVIII.* Barcelona: Oikos-tav

CARRILLO, D. (1996). La aritmética en los inicios de la escuela normal en España. *En Actas del IX Coloquio de historia de la educación. El currículum: historia de una mediación social y cultural*. Vol. 1. Granada: Osuna. (pp. 231-240).

CARR, R. (1970). *España 1808-1939*. Barcelona: Edición Ariel.

CARRO, V. (1929). Filosofía y filósofos españoles (1900 a 1928). *Revista de las Españas*. 2ª época, número 31-32, pp. 95-103.

CHACÓN, R. (1996). Comentario-resumen de mi tesis sobre Don Fernando de Castro y el problema del catolicismo liberal español. *El Basilisco*. nº 21. (pp. 36-38)

CEA, M. A. (1996). *Metodología cuantitativa: estrategias y técnicas de investigación social.* Madrid: Síntesis.

CEMEN, P. B. (1993). Teacher to teacher: adding and subtraction integers on the number line. *Aritmetic teacher.* Vol. 40. (7). (pp. 388-389).

CERDÁ, T. (1758). *Liciones de Mathematica, o Elementos generales de arithmetica, y algebra para el uso de la clase*. Tomo primero. Barcelona: Francisco Suriá, Impresor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad.

COBOS, J. M., y FERNÁNDEZ, C. (1997). *El cálculo infinitesimal en los ilustrados españoles: Francisco de Villalpando y Juan Justo García.* Cáceres: Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones

COCKCROFT, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. El informe Cockcroft.* Madrid: Mec.

COHEN, L., y MANION, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

COLLETTE, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas*. Vol. I. Madrid: Siglo Veintiuno.

COMTE, A. (1998). *La filosofía positiva*. Séptima edición. Proemio, estudio introductivo, selección y análisis de los textos por F. Larroyo. México: Porrúa.

CORTÁZAR, J. (1892). *Tratado de álgebra elemental.* Trigésima primera edición. Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

COSTA, J. (1982). *Oligarquía y Caciquismo como la forma actual de Gobierno en España: urgencia y modo de cambiarla*. Zaragoza: Guara Editorial

CUESTA DUTARI, N. (1974). *El maestro Juan Justo García*. Salamanca: Universidad de Salamanca.

DARDÉ, C. (1996). La Restauración 1875-1902, Alfonso XII y La Regencia de Maria Cristina. Historia de España. Madrid: Historia 16.

DE AVENDAÑO, J. (1880). *Manual de instrucción primaria elemental y superior: para uso de los aspirantes a maestros, y especialmente de los alumnos de las escuelas normales de provincia.* Quinta edición. Tomo tercero. Madrid.

DE GUZMAN, M. (2001). *Tendencias innovadoras en Educación matemática.* (*http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tendencia/ensen.htm*) (Agosto 20 de2001).

DENNIS, D. (2000). The role of historical studies in mathematics and sciences educational research. En A. Kelly, y R. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

DESCARTES, R. (1981). *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometrías.* Prólogo, Traducción y notas de Guillermo Quintás Alonso. Madrid: Edición Alfaguara.

DE SOUZA, A. C. ; MOMETTI, A. L.; SCAVAZZA, H. A., y BALDINO, R. R.

(1995). *Games for integers: conceptual or semantic fiels?* PME-19. Recife. Vol. II. (pp. 232-239).

DHOMBRES, J.; DAHAN-DALMEDICO, A.; BKOUCHE, R.; HOUZEL, C. Y GUILLEMOT, M. (1987). *Mathematiques au fil des âges.* París: Gauthier-Villars.

DOMÍNGUEZ, M. (1996). Los currículos en las escuelas normales de maestros. *Actas del IX Coloquio de historia de la Educación. El currículum: Historia de una mediación social y cultural*. Granada: Osuna. Pp. 287-297.

EGIDO, T. (2004). *Los jesuitas en España y en el mundo hispánico*. Madrid: Marcial Pons.

ENCICLOPEDIA UNIVERSAL ILUSTRADA. EUROPEA AMERICANA (1929). Madrid: Espasa-Calpe, S. A.

ERNEST, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in school*. Vol. 27, Nº 4, pp. 25-27.

ESCOLANO, **A.** (Ed.) (1997). *Historia ilustrada del libro escolar en España. Del antiguo régimen a la segunda republica*. Bajo la dirección de Agustín Escolano Benito. Madrid: fundación German Sánchez Ruiperez. pp. 30-34.

ESCRIBANO, J. J. (1998). El imaginarismo según Rey y Heredia. Llull, vol. 21 (42). 653-676

ESPASA: (1957). *Diccionario Enciclopédico Abreviado Tomo IV.* Madrid: Espasa Calpe.

EUCLÍDES (1994). *Elementos*. Libros V-IX. Traducción y notas de M. L. Puentes. Madrid: Gredos.

EULER, L. (1797). *Algebra. Translated from the french with tre critical and historical notes of M. Bernoulli. To wich are added the additions of : De La Grange.* Vol 1. London: Printed for J. Johnson, St Paul´s Church-Yard

EULER, L. (1840/1984). *Elements of Algebra.* Translated by Rev. John Hewlett. Quinta edición. Reimpreso por Springer-Verlag.

FAUVEL, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning problems in matehematics*, 11 (2). Pp.3-6.

FAUVEL, J. y VAN MAANAN, J. (2000). *History in Mathematics Education. Dordrecht*: Kluver Academics Publishes.

FEATHERSTONE, H. (2000). "-Pat + Pat=0": Intellectual play in elementary mathematics. *For the learning of mathematics*. Vol. 20 (2). (pp. 14-23).

FELIU, J. (1847). *Tratado elemental de Matemáticas. Para uso del colegio general militar*. Tomo II Algebra. Madrid: Imprenta de José M. Gomez Colon y compañía.

FERNÁNDEZ, R. (1996). *La España de los Borbones. Las reformas del siglo XVIII.* Colección Historia 16. Nº 18. Madrid.

FERNÁNDEZ-CARUAJAL, R. (2003). *El Pensamiento español en el siglo XIX,* Murcia: Nausicaä.

FERNÁNDEZ CANO, A. (1995). Metodologías de la investigación en Educación Matemática. En Berenguer, L.; Berenguer, Mª. y Berenguer, J. (eds.) *Investigación en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM Thales. (Pp. 47-65).

FERNÁNDEZ CANO, A. (2003). *Métodos de análisis conceptual y de contenido.* Comunicación personal. Granada.

FERNÁNDEZ CANO, A., y RICO, L. (1992). *Prensa y educación matemática.* Madrid: Síntesis.

FERNÁNDEZ SANZ, A. (1996). La utopía solucionista de Jovellanos. *El Basilisco.* Oviedo. Nº 21, pp. 25-27.

FERNÁNDEZ SANZ, A. (2002). Tradición y modernidad ilustrada. En Maceiros, M (ed.). *Pensamiento filosófico español. Vol II. Del barroco a nuestros días.* (Pp. 77-130).

FERNÁNDEZ SARASOLA, I. (2002). *Estado, constitución y forma de gobierno en Jovellanos.* URL: http://www.uniovi.es/~constitucional/miemb/ignacio/jovino2.htm (marzo 2 de 2002).

FERNÁNDEZ Y CARDÍN, J. M. (1884). *Elementos de Matemáticas. Obra de texto para segunda enseñanza. Álgebra.* Decimocuarta edición notablemente mejorada. Madrid: Imprenta de la Viuda é hija de Fuentenebro.

FERNANDEZ VALLIN Y BUSTILLO, A. (1857). *Elementos de Matemáticas.*

Aritmética y Álgebra. Geografía, Trigonometría y Nociones de Topografía. Madrid: Imprenta de Santiago Aguado.

FILLOY, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

FOX, D. (1980). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Universidad de Navarra

FREGE, G. (1973). *Los Fundamentos de la Aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número.* Barcelona: Lala.

FREUDENTHAL, H. (1987). *Philosophie implicite de l´historie des mathématiques et de leur enseignet.* En M. Carmagnole (ed.) Fragments d´histoire des mathématiques II. París: A. P. M. E. P.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Mathematics as an educational task*. Chapter XII. Dordrech: Reidel.

FRIEDELMEYER, J. P. (1998). Introduction et objetives pédagogiques. En Boye et al. (eds.) *Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique por l´introduction des nombres complexes*. París: Ellipses.

FURINGHETTI, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies in linking different domains. *For the learning of mathematics.* Vol. 17 Nº 1. Montreal 55-61

GALL, M.; BORG, W.; GALL, J. (1996). *Educational research. An introduction*. Sixth edition. New York: Longman.

GASSIOT I MATAS, L. (1997). Tomas Cerdá. I els inicis de l´Academia de Ciencies de Barcelona. En G. Blanes et al. (coords): *Actes de les IV Trobades d´Historia de la Ciencia i de las Técnica – Alcoi* – Barcelona : Societat Catalana d´Historia de la Ciencia i de la Técnica.

GALLARDO, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis doctoral. México, D. F.: Cinvestav.

GARCÍA DE GALDEANO, Z. (1883). *Tratado de Álgebra. Parte primera. Tratado Elemental*. Madrid: Gregorio Juste.

GARCÍA DE GALDEANO, Z. (1907). *Algunas consideraciones sobre Filosofía y Enseñanza de la Matemática*. Zaragoza: Emilio Casañal

GARCÍA, J. J. (1814). *Elementos de álgebra y geometría. Quarta impresión. Tomo Primero.* Salamanca: Vicente Blanco.

GARCÍA, J. y BEAS, M. (1995). Análisis histórico del libro de texto. En Figueres, J. y Beas M. (eds). *Libros de texto y construcción de materiales curriculares.* Granada: Proyecto sur.

GARCÍA CAMARERO, E. Y GARCÍA CAMARERO, E. (1970). *La polémica de la Ciencia Española.* Madrid: Alianza Editorial.

GARMA, S. (1988). Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. En J. M. Sánchez Ron, (eds.) *Ciencia y sociedad en España: De la Ilustración a la Guerra Civil*, Pp.93-129. Madrid: El Arquero-CSIC

GARMA, S. (1995). Adiciones a la biografía de D. Josef Mariano Vallejo. *Arbor*. Pp. 9-22.

GARMA, S. (2000). *El final de las Matemáticas del siglo XIX: Echegaray. E*n Matemáticos Madrileños. Madrid: Anaya, 141-181.

GARMA, S. (2002). La Enseñanza de las matemáticas. *En* Peset, J. L. (Dir.) (2002*) Historia de las Ciencia y de la Tecnología en la Corona de Castilla.* Tomo IV. Siglo XVIII. Salamanca: Juntas de Castilla y León, Consejería y Cultura.

GENTIL, J. M. (1999). Nuevos datos sobre la vida y la obra de José Mariano Vallejo y Ortega (1779-1846). *Llull.* Vol. 22. pp. 381-404.

GHEVERSGHESE, G. (1998). La cresta del pavo real. Pirámide, Madrid

GLAESER, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 2 (39), 303-346.

GÓMEZ, B. (1993). *Numeración y cálculo*. Madrid: síntesis.

GÓMEZ, B. (1999). Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud. En Díaz M. (Coord.) *Actas de las 9AS JAEM. Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.* Lugo.

GÓMEZ, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En A. Martinón (Ed.). *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*. (pp. 77-80). Madrid: Nivola

GÓMEZ, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto:¿por qué menos por menos es mas? En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada: Editorial Universidad de Granada. pp. 257-275.

GÓMEZ, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*. Vol. 7, Nº 3, pp. 251-292.

GONZÁLEZ, Mª. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

GONZÁLEZ MARÍ, J. L.; IRIARTE, Mª D.; JIMENO, M; ORTIZ, A.; ORTIZ A.; SANZ, E., y VARGAS-MACHUCA, I. (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

GONZÁLEZ MARÍ, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

GRACIA NORIEGA, J. I. (2001). Entrevistas en la historia: el pintor Tomás García Sampedro. *La Nueva España. Diario independiente de Asturias.* http://www.lanuevaespaña.es/archivo/2001/AGO/06/periodico/PR06PB1.htm. (12 de marzo 2002).

GRUGNETTI, L. (1991). L´Histoire dês mathématique. Une expérience interdisciplinaire fondée sur l´Histoire des mathématique. *Plot.* Nº 60. Orleans. pp. 17-21.

GUTÍERREZ, A., y MAZ, A. (2001). Cimentando un proyecto de investigación: la revisión de literatura. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada: Editorial Universidad de Granada.

HANKEL, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen zahlen und ihrefunctionen.* Leipzig: Leopold Voss.

HAYES, B. (1996). Investigating the teaching and learning of negative number concepts and operations. En Clarckson, P. (ed.), *Technology in mathematics education proceedings.* Melbourne. (pp. 245-252).

HATIVA, N., y COHEN, D. (1995). Self learning of negatives number concepts by lower division elementary students though solving computer-provided numerical problems. *Educational studies in mathematics.* Vol. 28 (4). (pp. 401-431).

HEFENDEHL-HEBERKER, L. (1991). Negative numbers: obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructos. *For the learning in Mahematics*. Vol II (1), pp. 16-31.

HEREDIA, A. (1989) La Filosofía. En Jurestchke. (coord). *Historia de España Menéndez Pidal. Tomo XXV. La Época del Romanticismo* (1808-1874). Madrid: Espasa- Calpe.

HERNANZ, J. M., y MEDRANO, J. (1990). José Mariano Vallejo: notas para una biografía científica. *Llull.* Vol. 13. pp. 427-446.

HERR, R. (1988). *España y la Revolución del Siglo XVIII*. (Trad. de Elena Fernandez). Madrid: Aguilas.

HORMIGÓN, M. (1988). Las matemáticas en el primer tercio dell siglo XX. En J. M. Sánchez Rom (ed): *Ciencia y sociedad en España,* pp. 213-282. Madrid: El Arquero/CSIC.

HORMIGÓN, M. (1991). *Las matemáticas en el siglo XIX.* Historia de la ciencia y de la técnica. Nº 38. Madrid: Akal.

HORMIGÓN, M. (1993). Garcia de Galdeano and El Progreso matemático. En Messengers of Mathematics, *European Mathematical Journal* 1800-1946. Zaragoza: Siglo XIX p. 95-115

IMBERTI, C. (1973). Los números reales. En Frege, G. *Los Fundamentos de la Aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número.* Barcelona: Lala.

IRIARTE, Mª.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma.* 7. pp. 13-18.

JURESTCHKE, J. (1989)(coord.). *Historia de España Menéndez Pidal. Tomo XXV. La Época del Romanticismo (1808-1874*). Madrid: Espasa- Calpe.

JIMENEZ, A. (1987). *El krausismo y la institución Libre de Enseñanza*. Madrid: Cincel.

KANT, E. (1992). Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía. En Kant, I. *Opúsculos de filosofía natural*. Madrid: Alianza.

KANT, E. (1781). *Critica de la Razón Pura*. Madrid: Alfaguara, edición de 1997.

KATZ, V. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the learning of mathematics.* Vol. 17. Nº 1. Montreal. Pp. 62-63.

KINGER, H. & HILGEMANN, W. (1981). *Atlas Histórico Mundial. Tomo II*. Madrid: Ediciones Istmo.

KLINE, M. (1972) *Pensamiento matemático. De la antigüedad a nuestros días*. Tomo I. Madrid: Alianza.

KRIPPENDORFF, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido.* Barcelona: Paídos.

LACROIX, S. F. (1837). *Curso completo elemental de matemáticas puras*. Tomo II. Quinta edición. Traducido por José Rebollo Morales. Madrid: Imprenta Nacional.

LAKATOS, I. (1987). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza.

LINARDI, P. y BALDINO, R. R. (1998). More games for integers. *PME-22*. Stellenbosch, South Africa. Vol. III. (pp. 207-214).

LITLE, P. A. (1994). Investigation of a model based on the neutralization of oppositers to teach integer addition and subtraction. *PME-18*. Lisboa: Vol. III. (pp. 192-199).

LIZCANO, E. (1993) *Imaginario colectivo. La construcción social del número y el infinito*. Paidos.

LLOPIS, J., Y CARRASCO, Mª. V. (1983). *Ilustración y educación en la España del siglo VIII.* Valencia: Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E. G. B.

LÓPEZ PIÑERO, J. (1969). *La introducción de la ciencia moderna en España.* Barcelona: Ariel.

LÓPEZ PIÑERO, J. (1979). *Ciencia y técnica en la sociedad española de los siglos XVI y XVII*. Barcelona: Labor-Universitaria.

LÓPEZ PIÑERO, J. M., GLICK, T. F., NAVARRO, V., y PORTELA, E. (1983). *Diccionario histórico de la ciencia moderna en España*. Vol I. Barcelona: Península.

LÓPEZ TORRIJO, M. (1991). *Las Sociedades Económicas de Amigos del País* *y la educación ilustrada. El modelo valenciano.* En Calatayud, R., Fernández, J., Lázaro, L., López, R., López, M. Palacio, I., y Ruiz, C. (eds.), Cuestiones histórico–educativas. España. Siglos XVIII-XX. Valencia: Universidad de Valencia.

MALDONADO, J. L. Y GARCIA, A. (2002). *La España de la técnica y de la ciencia.* Madrid: Acento.

MARTIN, A. (2002). Matemáticas, Física y Química. En J.M. Jover Zamora (Dir): *Historia de España. Menéndez Pidal. Tomo XXXVI. La época de la Restauración (1875-1902). Civilización y Cultura* Madrid: ESPASA CALPE.

MARTÍN MUNICIO, A. (2002). Matemáticas, Física y Química. En Gómez-Ferrer, G. (ccord.) *Historia General de España Menéndez Pidal, Tomo XXXVI. La época de la Restauración (1875-1902). Civilización y Cultura.* Madrid: Espasa Calpe

MARTÍNEZ NAVEIRA, A. (1998). Sobre la historia de las Matemáticas en Valencia y en los países mediterráneos http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/naveira1998-99.doc (10 de agosto de 2003).

MARTINEZ SHAW, C. (1996). *El siglo de las luces. Las bases intelectuales del reformismo.* Colección Historia 16. Nº 19. Madrid.

MARTZLOFF, J. C. (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag.

MATTHEWS, M. R. (1992). History, Philosophy and Science Teaching: The Present Rapprochement, *Science and Education* 1 (1), 11- 48

MAZ, A. (1999). “Historia de las matemáticas en clase: ¿por qué?, ¿para qué?”. En Berenguer, I., Cardeñoso, D. y Toquero, M. (eds). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Universidad de Granada y Sociedad Thales.

MAZ, A. (2000). *Tratamiento dado a los números negativos en libros de texto publicados en España en los siglos XVIII y XIX.* Granada: Universidad de Granada.

MAZ, A. (2002). *Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX*. Comunicación al VI Seminario de investigación en pensamiento numérico y algebraico.

Universidad de Santiago de Compostela.

MAZ, A. y RICO, L. (2001). Una visión histórica de cambios en el concepto de número en los textos: ¿un reto para la educación matemática? En Berenguer et al. (eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI*. Granada: SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática. (Pp.159-165).

MAZ, A. Y RICO, L. (2004). Concepto de cantidad, número y número negativo durante la época de influencia jesuita en España (1700-1767). En E. Castro y E. de la Torre (Eds.): *Investigación en educación matemática. Octavo Simposio de la Sociedad española de investigación en educación matemática.* La Coruña: Universidad da Coruña.

MEC. (1979). *Historia de la educación en España. Textos y documentos. Tomo I*. Madrid. MEC.

MÉNDEZ BEJARANO, M. (1927). *Historia de la filosofía en España hasta el siglo XX.* http://www.filosofa.org/aut/mmb/hfe1711.htm. Noviembre 16 de 2001.

MENÉNDEZ PELAYO, (1963).Historia de los *heterodoxos españoles*. Tomo V, segunda edición. Madrid: C.S.I.C.

MENÉNDEZ PELAYO (1954). *La ciencia española*. Tomo III. Madrid: C.S.I.C.

MENÉNDEZ, E. Y VÁZQUEZ-ROMERO, J. (2002) El pensamiento y las ideas. En Gómez-Ferrer, G. (coord.) *La Época de la Restauración (1875-1902) Civilización y Cultura. Historia de España de Menéndez Pidal Tomo XXXVI- 2.* Capítulo II. Madrid: Espasa Calpe.

MERTON, R. K. (1984). *Ciencia, Tecnología y Sociedad en la Inglaterra del Siglo XVII.* Madrid: Alicanza.

MESTRE, A. (1976). *Despotismo e Ilustración en España.* Barcelona: Ariel.

MONTUCLA, J. F. (1968). *Histoire des Mathématiques.* Nouveau Tirage. París: Libraire Scientifique et Technique Albert Blanchard.

MORENO, A. (1998). *Una ciencia en cuarentena. La física académica en España (1750-1900)*. Madrid: C.S.I.C.

MURO, J. I. (2002). Ingenieros militares en España en el siglo XIX. Del arte de la guerra en general a la profesión del ingeniero particular. *Scripta Nova.*

Revista electrónica de geografía y ciencias sociales. Vol VI, num. 119 (93). (http://www.ub.es/geocrit/sn/sn119_93.htm)

NAVARRO, C. y CALVO, T. (1988). *Historia de la filosofía*. Madrid: Anaya.

NEWTON, I. (1802). *Arithmétique universelle. Traduite du latin en français, avec des notes explicatives par Noel Beaudeux. Tome Premier*. París: Chez Bernard, Libraire quai des Augustins, Nº 31.

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1900). *Elementos de Aritmética universal. Parte primera. Calculatoria*. Madrid: Imprenta de Fortanet.

ODRIOZOLA, J. (1844). *Curso completo de Matemáticas Puras. Aritmética y Álgebra elemental*. Tercera Edición. Madrid: Imprenta de la Sra. Viuda de Jordan e Hijos.

ORTEGA Y GASSET, J. (1962). *España Invertebrada. Obras Completas Tomo III.* Madrid: Revista de Occidente.

ORTIZ, J. J. (1998). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en libros de texto de bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

OTERO, L. E. (1998). Realidad y Mito del 98: las distorsiones de la percepción, Ciencia y Pensamiento en España (1875-1923). En J. G. Cayuela (Coords): *Un Siglo de España: Centenario, 1898-1998.* pp. 527-552. Cuenca: Universidad de Castilla la Mancha y Cortes de Castilla la Mancha.

PALAU, A. (1975). Manual del Librero Hispanoamericano, Tomo XXVI. Barcelona: Palau.

PALAU Y DULCET, A. (1971). *Manual del librero hispanoamericano*. Tomo XXIII. Segunda edición. Barcelona-Oxford: Antonio Palau Dulcet-The Dolphin Co.

PARSHALL, K. (1996). How we got where weare: An international Overview of mathematics in National contexts (1975-1980) *Notices of AMS*. Vol. 43 (3) pp. 287-296.

PESET, J. L. (Dir.) (2002*). Historia de las Ciencia y de la Tecnología en la Corona de Castilla.* Tomo IV. Siglo XVIII. Salamanca: Juntas de Castilla y León, Consejería y Cultura.

PERALTA, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo*

XIX. Madrid: Nivola.

PERALTA, J. (2003). *La matemática en el panorama español de 1800 a 1936*. En Matemáticos Madrileños. Madrid: Anaya.

PERALTA, J. (2004). Luís Octavio de Toledo (1857-1934). En http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateEspaniolak/LuisOctavioToledo.asp (30 de Septiembre de 2004)

PESET, J. L., GARMA, S. y PÉREZ GARZÓN, J. S. (1978). *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa.* Madrid: Siglo Veintiuno.

PIAGET, J. (1973). *Tratado de lógica y conocimiento científico. Volumen I. Naturaleza y métodos de la epistemología*. Buenos Aires: Paidos.

PIAGET, J. (1975). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático.* Buenos Aires: Paidos.

PIAGET, J. (1979). *Naturaleza y métodos de la epistemología.* Buenos Aires: Paidos.

PICATOSTE y RODRIGUEZ, F. (1862). *Vocabulario Matemático-etimológico*. Madrid: Imprenta y librería de D. E. Aguado.

PINILLOS, J. L. (2002). Las Ciencias Humanas. Las ciencias Sociales. En J.M. Jouer (dir): *Historia de España. Menéndez Pidal. Tomo XXXVI. La época de la Restauración (1875-1902) civilización y cultura*: pp. 197-222. Madrid: ESPASA CALPA S. A.

PNA (2002). http://www.ugr.es/~dpto_did/gpnumerico/numerico_es.html (Octubre 10 de 2002).

POY Y COMES, M. (1786). *Elementos de Aritmética numérica y Álgebra.* Barcelona: Impresor del Rey N. Sr, Calle de la Paja.

POY Y COMES, M. (1819). *Elementos de Aritmética numérica y literal al estilo del comercio.* Tomo I. Quinta edición. Barcelona.

PUIG, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudental. En H. Freundental: *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (textos seleccionados).* Segunda edición. México: CINVESTAV.

PUIG, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.): *La educación* *matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

PYCIOR, H. M. (1981). George Peacock and the British origins of symbolical algebra. *Historia matemática.* 8, pp. 23-45.

QUESADA, S. (2004). *Historia intelectual de España*. Boadilla del Monte (Madrid): Acento.

RADFORD, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. En N. Bednaz, C. Kieran, y L. Lee (eds.): *Approaches to álgebra perspectivas for research and teaching* (pp. 39.54). Durdrech: Kluwer Academic Press.

RADFORD, L. (2001). The historical origins of algebra thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (eds.): *Perspectivas on school álgebra* (pp. 13-36). Dordrech: Kluwer Academia Press.

RÁMIREZ, B. A. (1863). *Diccionario de Bibliografía Agronómica de toda clase de escritos relacionados con la Agricultura*. Madrid: Imprenta de Rivadeneyra

REID, D. A. (1998). Working group: Advaced mathematical thinkink. En Olivier, A. y Newatead, K. (eds). *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education. PME 22.* Stellenbosch, South Africa. (p. 267).

REED, D. (1995). *Figures of Thougt. Mathematics and mathematical texts.* London: Routledge.

REY PASTOR, J. (1915). *¿Es el progreso de España en la Ciencia, ó es el progreso de las Ciencias en España?* Madrid: Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

REY Y HEREDIA, J. M. (1865). *Teoría transcendental de las Cantidades Imaginarias*. Madrid: Imprenta Nacional.

RIBEIRO, R. (1997). On the epistemology of integers. *Recherches en didactique des Mathématiques.* Vol. 17, nº 2. (pp. 211-250).

RICO, L. (2001). Análisis conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez, P. y Rico L, (eds.) *Iniciación a la investigación en educación matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.

RICO, L. (1999) Matemáticas, Universidad y Formación del Profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* nº 34, pp. 245-262.

RICO, L. (1997) (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona:Horsori.

RICO, L. y SIERRA, M. (1994). Educación matemática en la España del Siglo XX. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Sierra, M. *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Síntesis.

RICO, L.; CASTRO, E.; CASTRO, E.; CORIAT, M., y SEGOVIA, I. (1998). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En Rico, L. (ed.). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación secundaria.* Madrid: Síntesis.

ROGERS, L. (1993). The historical construction of mathematical knowledge. En Lalande, F.; Jaboeuf, F., y Nouazé, Y. (eds.) *History and epistemology in mathematics education. First european summer university proceedings.* Montpellier. IREM de Montpellier. Pp. 105-112.

ROSENTAL, M. M., Y LUDIN, P. F. (1965). *Diccionario filosófico.* Montevideo: Pueblos Unidos.

RUIZ BERRIO, J. (1997). El método histórico en la investigación histórico-educativa. En De Gabriel, N.; Viñao, A. (eds.) *La investigación histórico-educativa.* Barcelona: Ronsel.

RUIZ DE AZUA, E. (2002). El bachillerato y la Universidad. En J.M. Jover Zamora (Dir): *Historia de España. Menéndez Pidal. Tomo XXXVI. La época de la Restauración (1875-1902). Civilización y Cultura,* pp.335-359 Madrid: ESPASA CALPE

RUSSELL, B. (1973). *Ciencia y filosofía*. Madrid: Aguilar.

SALA, J. (1988). Ciencia biológica y polémica de la ciencia en la España de la restauración. En Sánchez Ron, J.M. (ed.) *Ciencia y sociedad en España*. Madrid: El Arquero/CSIC. Pp 157-177

SÁNCHEZ AGESTA, L. (1953). *El pensamiento político del despotismo ilustrado.* Madrid: Artola.

SÁNCHEZ RON, J. M. (1988). *Ciencia y sociedad en España.* Madrid: El Arquero/CSIC.

SANZ, I. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de los libros escolares de matemáticas. Configuraciones gráficas de textos.* Tesis doctoral. Universidad del Pais Vasco.

SCHUBRING, G. (1986). Ruptures dans le statut mathematique des nombres negatifs. *Petit X*. Nº 12, pp. 5-32.

SCHUBRING, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the learning of mathematics*. Vol 7 Nº 3. Montreal. 41-51.

SCHUBRING, G. (1988). *Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation das les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845*. Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l´informatique. Editions La Pensée Sauvage.

SCHUBRING, G. (1991). Categorías teóricas para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos. *Epsilon*. Nº 19. (pp. 100-104).

SCHUBRING, G. (1993). Les enjeux épistémologiques des nombres négatifs. En Barbin, E. (ed.). *Histoire et épistémologie dans l´éducation mathématique. Actes de la première université d´été européenne*. Monptellier: IREM de Monptellier. (pp. 443 – 449).

SERRES, M. (Ed.) (1991). *Historia de las ciencias*. Madrid: Cátedra

SEGOVIA, I., y RICO, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed): *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria*; 11. 83-104. Madrid: Síntesis.

SELANDER, S. (1995). Análisis del texto pedagógico. En Figueres, J. y Beas M. (eds). *Libros de texto y construcción de materiales curriculares.* Granada: Proyecto Sur.

SIERRA, M. (1990). El coloquio de Royamont (1959). *Epsilon*, 16, pp. 31-34.

SIERRA, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En Martinón, A. (Ed.). *Las matemáticas del siglo XX*. Pp. 93-96. La Laguna: Nivela.

SIERRA, M.; GONZÁLEZ, M. T., y LÓPEZ, C. (1999). Evolución del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 17 (3). (pp. 463-476).

SMITH, D. E. (1958). *History of Mathematics*. Volumen I. New York: Dover

STREEFLAND, L. (1996). Negative numbers: Reflections of a learning research. *Journal of mathematical behavior*, 15. (pp. 57-77).

STEVIN, S. (1585). *Le Premier Livre D´Arithmetique. Des Definitions.* 1ª edición en francés del editor Girard Leyden, 1625.

SWETZ, F. J. (1993). Back to the present: ruminations on an old arithmetic text. *The mathematics teacher*. Vol. 86 (6). (pp. 491-494).

TERRERO, D. (1894). *Lecciones de aritmética y de álgebra elemental.* Cuarta edición. Oviedo: imp. de Pardo Gusano y Compañía.

TIANA, A. (1988). *La investigación histórico-educativa actual. Enfoques y métodos.* Madrid : UNED

TOSCA, V. (1707) *Compendio mathemático*. Tomo I y II. Madrid: Imprenta de Antonio Marín.

TORRALBO, M. (2001). *Análisis cientimétrico, conceptual y metodológico de las tesis doctorales españolas en educación matemática (1976-1998).* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

TRIGUEROS, G. (1996). La reforma de los planes de estudio en la universidad española durante la I república. *Actas del IX Coloquio de historia de la Educación. El currículum: Historia de una mediación social y cultural*. Granada: Osuna. (pp. 435-441).

TUÑÓN DE LARA, M. (1973). *Medio siglo de cultura Española.* Madrid: Tecnos.

TURÉGANO, P. (1994) *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal.* Tesis doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.

ULLOA, P. DE (1706). *Elementos matemáticos*. Tomo I. Madrid: Antonio Gonçalez, editor.

VALLEJO, J. M. (1840a). *Compendio de matemáticas puras y mistas*. Tomos I. y II. Cuarta edición. Madrid: Imprenta Garrasayaza.

VALLEJO, J. M. (1813). *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo I. Mallorca: Imprenta Felipe Guasp.

VALLEJO, J. M. (1841). *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo I. Cuarta edición. Madrid: Imprenta Garrasayaza

VALLÍN Y BUSTILLO, A. F. (1868). *Elementos de Matemáticas*. Madrid: Imprenta de Santiago Aguado.

VAN DALEN, D. B., y MEYER, W. J. (1981). Manual de técnica de la investigación educacional. Barcelona: Paidós.

VAN DER WAERDEN, B. L. (1980). *A History of Algebra*. Berlin: Springer-Verlag.

VEA, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España (s. XIX).* Zaragoza: Universidad de Zaragoza. Pp. 151-155

VERA, F. (1935). *Los historiadores de la matemática española*. Edición fascimil de 2000. Badajoz. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

VERDEJO, J. (1794) *Compendio de matemáticas puras y mixtas*. Madrid: Imprenta de la viuda Ibarra.

VERNET, J. (1989) Ciencia y pensamiento Científico. En Jurestchke, H. (coord). *Historia de España Ramón Menéndez Pidal Tomo XXV. La Época del Romanticismo* (1808-1875). Madrid: Espasa Calpe.

VERNET, J. (1998). *Historia de la ciencia española*. Barcelona: Alta Fulla.

VIDAL SCHUCH, L. (1866*). La filosofía Española*. Madrid.

VILLAPANDO, F. (1778). *Tractatus Praeliminaris Mathe maticarum Disciplinarum Elementi in usum Phidicae Candidatorum.* Madrid: Imprenta J. Ibarra

VIÑAO, A. (1997). De la importancia y utilidad de la historia de la educación (o la responsabilidad moral del historiador). En De Gabriel, N.; Viñao, A. (eds.) L*a investigación histórico-educativa*. Barcelona: Ronsel.

VISAUTA, B. (1989). *Técnicas de investigación social. Recogida de datos.* Barcelona: PPU.

WUSSING, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

WAGNER-DÖBLER, R. y BERG, J. (1996). Nineteenth-Century Mathematics in the mirror of its literature: A Quantitative Approach. *Historia Matemática*, 23, 288-318.

Anexo 1. Tabla cronológica de eventos sociales, políticos y académicos durante los siglos XVIII y XIX

Autores de textos matemáticas españoles seleccionados para el estudio	**Contexto histórico español**	**Periodo**
	1700 Felipe V es coronado rey.	**Influencia Jesuita**
1706 Ulloa publica *Elementos de matemáticas.* 1707 *Compendio matemático* de Toscá.		
1715 Nace Thomas Cerdá.	1717 Fundación de la Universidad de Cervera.	
	1720 Se abre la Academia Militar de Matemáticas.	
1721 Muere Pedro de Ulloa. *Compendiun Philosophicun praecipuas…,* de Toscá		
1723 Muere Vicente Toscá.		
1730 Nace Benito Bails.	1726 *Teatro Crítico Universal* de Feijoo	
1732 Cerdá ingresa en la Compañía de Jesús.		
1738 Se funda el *Mercurio histórico y político*.		
	1746 Muere Felipe V. Fernando VI inicia su reinado 1747 *Avisos del Parnaso* de Corachán publicada en castellano por Mayans.	
1752 Nace Juan Justo García 1753 Cerdá es enviado a Francia a perfeccionar sus matemáticas. 1758 *Elementos generales de aritmética y álgebra* de Thomas Cerdá.	1759 Muere Fernando VI. 1759 Carlos III inicia su reinado.	
	1764 Muere Feijoo. Se funda la Real Academia de Ciencias Naturales y Artes.	
1764 *Lecciones de artillería* de Cerdá	1767 Expulsión de los jesuitas	
1767 Cerdá es expulsado de España con la Compañía de Jesús.		

1772 *Elementos de Arismetica* de Benito Bails.		**Periodo Ilustrado**
1773 Juan Justo García se hace Bachiller en artes.		
1774 Juan Justo García es nombrado catedrático en la Universidad de Salamanca.	1774 Academia de Nobles de Madrid.	
	1778 Pablo de Olavide es condenado por la Inquisición.	
1779 Nace José Mariano Vallejo.		
	1780 Extinción de la Hermandad de San Casiano.	
	1781 Muere Gregorio Mayans.	
1782 *Elementos de aritmetica, álgebra y geometría* de J. J. García.	Aparece el *Censor* revista crítica.	
1785 Nace José de Odriozola.		
1787 Nace Jacinto Feliú.	1788 Muere Carlos III.	
	Carlos IV es coronado rey.	
1791 Muere Italia Thomas Cerdá.		
1792 Bails es desterrado a Granada.		
1794 *Compendio de matemáticas puras y mixtas* de Francisco Verdejo.		
1797 Muere Benito Bails.		
1801 Vallejo es sustituto de la cátedra de matemáticas en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando.	1802 Muere Campomanes.	
1802 Vallejo obtiene la cátedra de matemáticas, ataque.., en el Real Seminario de Nobles de Madrid.		
	1807 Fundación del Real Instituto Pestalozziano.	
	1808 Las abdicaciones de Bayona de Carlos IV y Fernando VII.	
	Napoleón ocupa Madrid.	
	José Bonaparte rey de España.	
	1811 Muere Jovellanos.	
1812 *Tratado elemental de matemáticas* de Vallejo.	1812 Constitución de las Cortes de Cádiz	
Tratado completo del arte militar de Vallejo.	Constitución liberal	
1813 Vallejo se posesiona como Diputado en la Cortes de Cádiz.		

1814 *Principios de arismetica y geometría* de J. J: García. 4ª edición de los *Elementos de álgebra* de J. J. García. 1815 *Compendio de Mecánica* de Vallejo.	1814 Restauración de Fernando VII	**Periodo Romántico**
1818 Nace José Maria Rey y Heredia.		
1820 Nace Joaquín Maria Fernández y Cardín. 1821 *Elementos de Verdadera Lógica….*, de J. J. García.	1820 Levantamiento de Riego. Inicio del trienio liberal.	
1823 Vallejo se exilia de Madrid. 1824 *Teoria de la lectura* de Vallejo. 1825 Nace Acisclo Fernández Vallín y Bustillo. Vallejo se exilia de España. 1829 *Curso completo de matemáticas puras* de Odriozola. 1830 Muere Juan Justo García. 1832 Vallejo Regresa de su exilio. 1833 *Tratado de Mecánica* de Odriozola.	1823 Restauración absolutista.	
	1833 Muerte de Fernando VII. Inicia la Regencia Mª Cristina. 1ª guerra Carlista. 1835 Desamortización de Mendizábal. 1838 Plan de Instrucción Primaria 1840 Regencia de Espartero. 1843 Mayoría de edad de Isabel II. Sanz del Rio Viaja a Alemania.	
1844 *Nueva construcción de carros de hierro* de Vallejo. 1846 Muere José Mariano Vallejo. Nace Zoel García de Galdeano. *Tratado de álgebra elemental* de Cortazar.		
1847 *Tratado elemental de matemáticas* de Feliu. *Tablas de logaritmos* de Feliu. Fernández Vallín y Bustillo obtiene la cátedra en el Instituto de Valladolid. 1849 *Psicología y lógica* de Rey y Heredia y Monlau.	1847 2ª guerra Carlista. Real Academia de Ciencias exactas. Físicas y naturales.	
1854 Rey y Heredia se licencia de jurisprudencia. 1857 Rey y Heredia se licencia en filosofía y letras. Nace Luís Octavio de Toledo 1861 Muere José Maria Rey y Heredia. 1864 Muere José de Odriozola. 1865 *Teoría trascendental de las cantidades imaginarias*, obra póstuma de Rey y Heredia.	1851 Publicación del primer escalafón de catedráticos de universidad. 1857 Ley Moyano 1864 Enciclica *Quanta Cura y el Syllabius* de Pio IX.	
1867 Muere Jacinto Feliu.	1866 Salmerón funda el Colegio Internacional.	
1871 García de Galdeano se licencia en filosofía. 1872 García de Galdeano ingresa como profesor de cálculo en la Facultad de Ciencias.	1868 Derrocamiento de Isabel II. 1869 Cortes Constituyentes. Sufragio Universal. 1871 Reinado de Amadeo de Saboya. 1872 3ª guerra Carlista.	
1874 se publica la vigésima séptima edición del *Tratado de aritmética* de Cortazar.	1873 La Segunda Republica. Matemáticas, física y química e historia natural como nuevas titulaciones.	

	1875 Alfonso XII inicia su reinado. 1876 *Institución de Libre Enseñanza*. 1879 Fundación del PSOE. Se hace obligatorio el sistema métrico decimal.	**Periodo de la Restauración**
1881 García de Galdeano aprueba las oposiciones en el Instituto de Ciudad Real. 1883 *Tratado de álgebra* de García de Galdeano. 1884 *Elementos de matemáticas. Álgebra* de Fernández y Cardín.	1885 Muere Alfonso XII. Regencia de Mª Cristina.	
1886 *Tratado de álgebra con arreglo a las teorías modernas* de García de Galdeano.		
	1888 primer congreso del PSOE. Fundación de la UGT.	
1889 García de Galdeano gana la cátedra de geometría general y analítica. 1890 *Armonias del mundo físico* de García de Galdeano. 1891 García de Galdeano funda el *Progreso Matemático.* 1893 Muere Joaquin Maria Fernández y Cardín. *Las matemáticas en España* por García de Galdeano. 1896 Muere Acisclo Fernández Vallín y Bustillo. García de Galdeano gana la cátedra de cálculo infinitesimal.	1898 Pérdida de Cuba y Filipinas.	
1899 *Ciencia, educación y enseñanza* de García de Galdeano. 1900 Octavio de Toledo Publica *“Elementos de Matemáticas Universal. Calculatoria”*		