SIGNIFICADOS DE LA RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD DE MAESTROS EN FORMACIÓN MANIFESTADOS EN EL DESARROLLO DE UN MODELO DE ENSEÑANZA

Ángel Alberto López

Tesis Doctoral

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Dirigida por:

Dra. Encarnación Castro Martínez Dra. María Consuelo Cañadas Santiago

Granada, 2015

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

SIGNIFICADOS DE LA RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD DE MAESTROS EN FORMACIÓN MANIFESTADOS EN EL DESARROLLO DE UN MODELO DE ENSEÑANZA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de la Doctora Encarnación Castro Martínez y la Doctora María Consuelo Cañadas Santiago del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Ángel Alberto López para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada.

FDO.: ÁNGEL ALBERTO LÓPEZ

VºBº de las Directoras

FDO.: DRA. ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ   FDO.: DRA. MARÍA CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO

A la memoria de mi querida hermana Magalys cuya inesperada partida me ha dejado un vacío que solo su presencia podría llenar.

A Osmer y Vane que con su amor me dan fortaleza para seguir siempre adelante.

A Marle mi incondicional compañera de vida.

A mi madre; ejemplo de dignidad y perseverancia.

A mis hermanos: Carlos, José Luis y Trina.

A mis sobrinos.

Agradecimiento

Quiero expresar especial agradecimiento a mis Directoras de tesis: Dra. Encarnación Castro Martínez y Dra. María Consuelo Cañadas Santiago. Por su inestimable dedicación y sabios consejos en los momentos apropiados que me permitieron llevar a feliz término este trabajo.

A los profesores del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada por su valioso aporte académico durante mi etapa de formación.

A mis compañeros latinoamericanos y europeos por brindarme su amistad y sobre todo por mostrarse solidarios en momentos difíciles, especialmente a José Antonio, Carmen Gloria, Hilbert, Elizabeth y Cristian.

A mis compañeros del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Carabobo por su constante apoyo.

A la Universidad de Carabobo por el financiamiento que hizo posible mi estancia en la hermosa ciudad de Granada.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de tablas

Presentación

La memoria de investigación que presentamos en este documento recoge la investigación realizada por el autor como requisito para obtener el título de Doctor por la Universidad de Granada, en el Programa Oficial de Doctorado en Ciencias de la Educación.

Para la realización de esta investigación he contado con el apoyo institucional de la Universidad de Carabobo en Venezuela. Ese apoyo se traduce principalmente en dos aspectos: en primer lugar, el permiso para ausentarme de mis actividades académicas en la Facultad de Ciencias y Tecnología de dicha Universidad; y en segundo lugar, por la financiación, a través de una beca de cuatro años que comprendió los periodos académicos de 2010 a 2014 de mi estancia en Granada.

Esta investigación ha sido dirigida por las Doctoras Encarnación Castro Martínez y María Consuelo Cañadas Santiago, del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La línea de investigación en la cual se incardina esta investigación es "Educación Matemática: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico".

La investigación que realizamos, en términos generales, aborda el problema de los significados de la divisibilidad de maestros en formación. Comenzamos haciendo un estudio piloto (anexo P) con ciento cuatro maestros en formación que en el periodo académico 2011-2012 estaban inscritos en la asignatura Bases Matemáticas para Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada. El estudio piloto sirvió para establecer un diagnóstico sobre los significados de las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" de este grupo de maestros en formación. Este diagnóstico permitió comparar los resultados obtenidos con nuestros antecedentes y tomar decisiones para ser aplicadas en un estudio posterior.

En el estudio posterior al diagnóstico, realizamos un experimento de enseñanza (dentro del paradigma de la investigación de diseño). Para realizar el experimento de enseñanza escogimos intencionalmente un grupo de 40 maestros en formación, que en el periodo 2012-2013 estaban matriculados en la asignatura

Bases Matemáticas para Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada y cuya profesora era una de las directoras de este trabajo.

El diseño instruccional de nuestra investigación está constituido por un conjunto de secuencias de aprendizaje orientadas a mostrar la divisibilidad como una relación de orden y no como una expresión para referirse a un tipo de operación aritmética. Hemos utilizado el análisis didáctico en dos sentidos: el primero de ellos, como una técnica para el diseño y elaboración de secuencias de aprendizaje del experimento de enseñanza (Rico y Fernández-Cano, 2013); y como un marco para interpretar, con base en los organizadores del currículo, los significados en las matemáticas escolares (Gómez, 2007; Rico, 1997b).

Consideramos la investigación organizada en tres etapas generales que, si bien no son separadas entre sí, en cada una de ellas predomina unas actividades sobre otras. En la tabla 1.1 mostramos las etapas y las actividades realizadas en la investigación.

Tabla 1.1
Etapas y actividades de la investigación

Etapa	Actividades realizadas
1	Revisión bibliográfica y estado del arte
	Estudio diagnóstico
	Diseño de la investigación
	Intervención en el aula y recolección de datos
	Aplicación de instrumentos (recolección, codificación y análisis)
	Análisis de la información
2	Producción de resultados
	Interpretación de resultados
	Análisis
3	Redacción de la Memoria de Tesis Doctoral

Grupo de investigación en el que sitúa nuestra investigación

Esta investigación ha sido desarrollada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, inscrito en el Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía.

En este grupo se desarrollan investigaciones centradas en distintas líneas de investigación entre las que se encuentran pensamiento numérico y formación de profesores; en las que se enmarca esta investigación.

Entre los focos de atención de la línea de investigación formación de profesores está la formación inicial de profesores de matemáticas basada mayoritariamente en la puesta en marcha del análisis didáctico previo a la programación de aula.

La prioridad de los trabajos realizados en la línea Pensamiento Numérico se establece sobre los contenidos matemáticos. Su campo de reflexión considera la aritmética escolar y las nociones básicas de número, incluye los sistemas numéricos superiores (enteros, racionales y decimales) y se extiende al estudio sistemático de las relaciones y estructuras numéricas, la teoría de números, el inicio del álgebra, entre otros. Actualmente se están desarrollando investigaciones sobre el razonamiento inductivo, pensamiento pre-algebraico y algebraico, así como sobre las nociones de límite y continuidad. Por otra parte los estudios sobre análisis de contenido están, igualmente, centrados en temas escolares de pensamiento numérico.

En vista de las consideraciones previas, indicamos que nuestro interés por estudiar los significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza, implica que nuestro estudio se enmarque en estas dos líneas de investigación.

Organización del documento

Las actividades correspondientes a la primera y segunda etapa, que mostramos a nivel general en la tabla 1.1, las hemos desarrollado con detalle en esta tesis y, para su mejor lectura la hemos estructurado en capítulos.

Esta memoria de tesis está estructurada en ocho capítulos, seguido del listado de las referencias bibliográficas utilizadas y de la lista de los anexos, los cuales se han incluido en el CD que acompaña a este documento. A continuación describimos brevemente el contenido de cada uno de los capítulos.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

En este capítulo describimos el problema de investigación. Comenzamos señalando la presencia de la divisibilidad en el currículo español, tanto en educación primaria como en educación secundaria. También señalamos algunas consideraciones sobre la incorporación de la teoría elemental de números en la formación de profesores. Discutimos sobre el uso del lenguaje asociado a la divisibilidad y sobre la representación de relaciones equivalentes e inversas desde una misma estructura multiplicativa. Centramos nuestro interés en el conocimiento matemático sobre divisibilidad de maestros en formación, y, formulamos los objetivos generales y específicos que guiaron nuestro estudio.

Capítulo 2. Antecedentes
En este capítulo presentamos una síntesis de las investigaciones previas que guardan relación con la nuestra con el objetivo de presentar el "estado de la cuestión" que tratamos de investigar.

Capítulo 3. Fundamentación teórica
Abordamos los dos referentes conceptuales que fundamentan el desarrollo de nuestra investigación. La divisibilidad como conocimiento matemático en el contexto de la formación de profesores y el análisis didáctico. El capítulo lo organizamos en cuatro partes: el contenido matemático de la divisibilidad desde la ciencia matemática, el contexto formación de profesores, el análisis didáctico y la noción de significado de un concepto matemático.

Capítulo 4. Análisis didáctico de la divisibilidad
En este capítulo desarrollamos el análisis didáctico de la divisibilidad. Específicamente tres de los análisis que lo estructuran: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción. Los dos análisis restantes los desarrollamos en los capítulos 3 (el análisis conceptual) y 7 (el análisis evaluativo).

Capítulo 5. Marco metodológico
En este capítulo describimos los aspectos metodológicos que seguimos en el estudio. Describimos el diseño de la investigación, los aspectos metodológicos del experimento de enseñanza, las características de los participantes en el experimento de enseñanza, describimos las diferentes fuentes de información y el proceso de recogida de datos en la investigación, las categorías propuestas para el análisis de la información así como el proceso de codificación, la organización de los datos y especificamos los tipos de análisis de datos que realizamos en nuestro estudio.

Capítulo 6. El experimento de enseñanza
En este capítulo describimos el experimento de enseñanza que hemos llevado a cabo. Exponemos cada una de las tres fases que lo componen: planificación, implementación y análisis retrospectivo de los datos. Para cada fase, nos referimos a cada una de las tres sesiones. Detallamos cada sesión según su naturaleza y características.

Capítulo 7. Análisis retrospectivo de los datos
En este capítulo describimos el análisis retrospectivo de los datos que recogimos en el experimento de enseñanza realizado. Este análisis lo organizamos tomando en cuenta los significados que fueron puestos de manifiesto por los maestros en formación sobre la divisibilidad durante el desarrollo de las sesiones del experimento de enseñanza. Realizamos un análisis de frecuencia y un análisis clúster.

Capítulo 8. Conclusiones

Presentamos las conclusiones que se derivan de esta investigación. En primer lugar las conclusiones sobre el logro de cada uno de los objetivos que nos planteamos en el capítulo 1. Planteamos algunas conclusiones referidas al análisis didáctico, señalamos las limitaciones de esta investigación y finalmente recogemos algunas líneas abiertas con proyección para el desarrollo de otras investigaciones.

Capitulo 1. Planteamiento del problema

[...]Sin embargo, hay que recordar que las normas no enseñan; los maestros enseñan (NCTM, 2014).

Con esta investigación tratamos de indagar en dos ámbitos diferenciados. Por una parte, constatar si un trabajo sistemático, en el aula, en el que se haga énfasis en la divisibilidad como relación, permite a los maestros en formación el desarrollo de conocimientos sólidos sobre el tema de divisibilidad y reducir las dificultades que se detectan en la práctica y que son destacadas por investigaciones realizadas en el área de didáctica de las matemáticas. Por otra parte, describir y caracterizar los significados que ponen de manifiesto un grupo de maestros en formación cuando resuelven tareas sobre divisibilidad, durante el desarrollo de la secuencia de trabajo preparadas para el experimento de enseñanza.

De manera general investigamos sobre cuáles son sus significados que en cuestiones asociadas a la relación de divisibilidad han sido informadas en diferentes investigaciones y cuáles identificamos en las secuencias de trabajo en el aula.

El trabajo de investigación que abordamos en esta tesis doctoral se centra en los significados que ponen de manifiesto un grupo de maestros en formación durante una secuencia de trabajo focalizada en la divisibilidad como una relación.

En este capítulo justificamos el interés de este estudio, su relevancia y pertinencia, y, concretamos el problema de investigación presentando las preguntas que lo motivaron y los objetivos de investigación que nos propusimos abordar.

1.1. Justificación

Nos enfocamos en tres ámbitos, en primer lugar, en la formación de profesores; en la necesidad de tener conocimientos matemáticos sólidos para poder enseñar matemáticas en los diferentes niveles educativos y en la importancia que se le ha dado, en la literatura de investigación en Educación Matemática, al conocimiento matemático de los maestros - tanto en formación como en ejercicio - sobre la relación de divisibilidad. En segundo lugar, desde el ámbito curricular; identificamos desde el aspecto curricular la relevancia del contenido matemático al que hacemos referencia y su enfoque desde la teoría de números. En tercer lugar, desde el ámbito del grupo de investigación FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada en el seno del cual se realiza este trabajo. Por el interés en realizar investigaciones centradas en los contenidos matemáticos, en la formación inicial de profesores; basadas mayoritariamente en el análisis didáctico, en los sistemas de representación; indagar sobre las representaciones que los estudiantes hacen de los conceptos matemáticos, así como, los significados de conceptos matemáticos puestos de manifiesto por estudiantes.

Formación del profesor

En este apartado señalamos dos aspectos, la importancia de la formación en contenido matemático del profesor y el desarrollo de investigaciones sobre el conocimiento matemático de profesores.

Formación en contenido matemático del profesor

Son muchas las organizaciones, o proyectos, que a nivel internacional destacan la importancia de la formación de profesores y su influencia para lograr una educación de calidad (UNESCO, 2012; 2014; OEI[1], 2010; TEDS-M[2]; NCTM[3] 1981; 2000; 2013; 2014).

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura (UNESCO, por su siglas en inglés), por ejemplo, en el undécimo informe de seguimiento de la educación para todos en el mundo "Enseñanza y Aprendizaje: Lograr la calidad para todos" (2014), entre otras cosas, señala que la calidad de un sistema educativo depende de la calidad de los docentes. Ade-

[1] Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

[2] El proyecto TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) fue diseñado para centrarse en los resultados de la preparación matemática de los maestros en los niveles de primaria y secundaria y para servir como una herramienta valiosa para ayudar a informar y desarrollar la política de la preparación del profesor de matemáticas para futuros profesores de matemáticas (Tatto, 2014, p. 586).

[3] *National Council of Teachers of Mathematics.*

más, considera que la calidad de la educación depende de que se imparta a los maestros la mejor formación posible. En el informe de esta organización también se enfatiza sobre el conocimiento que deben tener los docentes para poder enseñar, considera que los alumnos cuyos maestros tienen escasos conocimientos de las asignaturas que enseñan tropiezan inevitablemente con dificultades en el aprendizaje (p. 262).

La UNESCO en un informe anterior (*Challenges in basic mathematics education*, 2012) destaca la importancia del conocimiento en la formación de profesores. Entre otros aspectos, se reconocen algunas categorías propuestas para describir los tipos de conocimientos que deben desarrollar los profesores, tales como: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento pedagógico (Shulman, 1987). También reconocen otras categorías derivadas de este modelo, a saber, el conocimiento del contenido común (esencialmente el conocimiento de matemáticas dirigido por el plan de estudios), el conocimiento del contenido especializado (utilizado por el profesor y que trasciende el currículo en sí), el conocimiento de los alumnos y el contenido (conocimiento en relación con los alumnos) y conocimiento de la enseñanza y el contenido (conocimiento de la enseñanza y su organización) (Ball, Hill y Bass, 2005). En el informe se enfatiza que la vinculación de estos diversos tipos de conocimiento deben ser abordados de manera explícita en la formación docente de calidad por medios adecuados y debe actualizarse en la práctica.

Siguiendo las ideas expresadas en Shulman (1987), sobre los tipos de conocimiento, en el proyecto TEDS-M consideran dos tipos de conocimientos en su estudio, a saber, el conocimiento del contenido (en este caso el conocimiento del contenido matemático) y el conocimiento didáctico del contenido (en este caso el conocimiento didáctico del contenido matemático).

Por su parte en NCTM (2000) destaca que la eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los estudiantes son aprendices y disponer de adecuadas estrategias pedagógicas (NCTM, 2000, p. 18).

La formación de los profesores es una cuestión determinante, de vital importancia para el logro de una educación de calidad. Por lo que realizar investigaciones empíricas y teóricas que aborden los diferentes focos de interés relacionados con su formación (su conocimiento, los programas en los que se forman, su práctica, entre otros aspectos), revisten de relevancia en el ámbito de la educación matemática.

En nuestra investigación nos centramos en el conocimiento del contenido matemático de los maestros en formación en lo que se refiere a la relación de divisibilidad.

Teoría de números y formación de maestros en los contenidos de la divisibilidad
A propósito del informe del NCTM (1981) que trata de la preparación de los profesores de matemáticas, Ball (1988) cuestiona dos aspectos sobre la preparación que deben recibir los maestros en formación y profesores de matemáticas, y, que no aparecen en dicho informe. Uno de ellos está referido a la formación de maestros de Educación Primaria sobre la teoría de números. Posteriormente el NCTM (1989) sugiere incluir el estudio de la teoría elemental de números en el currículo de matemáticas porque, entre otras cosas, proporciona una comprensión profunda de las propiedades y las estructuras numéricas, a los maestros. El informe de la *Conference Board of the Mathematical Sciences* (CBMS, 2001) incide sobre la misma recomendación, pero referida a la formación de profesores de Secundaria. Destaca que "los cursos de formación para los futuros profesores de Secundaria debería conducirlos a comprender y ser capaces de explicar ideas fundamentales de teoría de números aplicadas a las matemáticas de enseñanza Secundaria" (p. 28).

La teoría de números es una de las ramas más antiguas de la matemática y que ha desempeñado un papel protagónico en el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Recientemente se han hecho investigaciones que apuntan hacia la teoría de números como una puerta abierta y de fácil acceso a los estudiantes de diferentes niveles educativos para explorar los principios y patrones matemáticos y, en consecuencia, para que los profesores cultiven una comprensión profunda y fundamental de las matemáticas (Zazkis y Campbell, 2006).

Algunas investigaciones sobre esta temática se orientan hacia la comprensión de conceptos particulares relacionados con la divisibilidad (Bodí, Valls y Llinares, 2007; Brown, Thomas y Tolias, 2002; Campbell, 2006; Feldman, 2012; López y Cañadas, 2013; López, Castro y Cañadas, 2013a, 2013b, en prensa; Zazkis y Campbell, 1996a, 1996b; Zazkis, Sinclair y Liljedahl, 2013). Otras investigaciones en este campo se orientan hacia el papel de la teoría elemental de números, como contexto, para hacer exploraciones sobre el razonamiento matemático (Lavy, 2006; Liljedahl, 2006; Martin y Herel, 1989; Mason, 2006).

La mayoría de estas investigaciones se han realizado con maestros en formación y sus autores insisten en la necesidad de continuar indagando sobre teoría elemental de números, por la contribución que puede suponer para la forma de trabajar estas nociones en la formación de maestros y su repercusión posterior en su profesión como docentes de Educación Primaria.

En el capítulo 2 de esta memoria de tesis describimos un conjunto de investigaciones que consideramos como antecedentes de nuestra investigación porque comparten tópicos sobre teoría elemental de números y algunas de ellas se han realizado con maestros en formación.

Divisibilidad en el currículo

En este apartado hacemos un breve recorrido por el currículo español, a través de la promulgación de diferentes leyes educativas que regulan el currículo y señalamos el tratamiento dado a la divisibilidad en ellas. Por otra parte, señalamos el tratamiento dado a la divisibilidad en libros de texto de Educación Primaria, Educación Secundaria y en libros de texto para la formación de profesores.

La divisibilidad en el currículo de Educación Primaria y Secundaria en España
El currículo de matemática en España ha experimentado cambios importantes desde finales de los años 50 de esto da cuenta la aprobación de más de siete leyes educativas desde entonces. Los cambios han obedecido a diversos factores, entre otros podemos mencionar los cambios de tipo pedagógico, psicológicos, sociológicos o epistemológicos.

Los cambios sociológicos afectan la parte social, las relaciones entre los seres humanos, la visión de la educación matemática en cada periodo histórico y básicamente responden, entre otras, a decisiones políticas, culturales y económicas. Por otra parte los cambios epistemológicos están orientados hacia el conocimiento científico, en este caso, sobre las matemáticas y las matemáticas escolares como disciplina científica (Callejo y Cañón, 1996).

Producto de estos cambios curriculares algunos contenidos matemáticos ya no forman parte de las matemáticas escolares, por ejemplo, la teoría de conjuntos y hay otros que han mantenido su vigencia a pesar de los años y los cambios, como el caso de la divisibilidad.

La divisibilidad ha estado presente en el currículo español desde antes de la promulgación de la Ley General de Educación[4] en 1970 y aún se mantiene como un contenido matemático vigente en los documentos oficiales actuales (Bodí, 2006; Bruno y Martinón, 2000; Nortes, 1994; Sierra, González, García y González, 1989).

A partir de la promulgación de la LGE los contenidos asociados a la divisibilidad fueron ubicados en 5º curso de Educación General Básica[5]. Posteriormente, con la división en tres ciclos de la EGB, propuesta en 1981, se hicieron algunas reformas en los programas anteriores. Los nuevos programas plantean, entre otros, cambios en la distribución de los contenidos pasando la divisibilidad de 5º de EGB a 6º curso, correspondiente al nuevo ciclo superior de EGB. En este programa se distribuyen ocho bloques temáticos y el segundo bloque co-

[4] En adelante para referimos a la Ley General de Educación promulgada en 1970 en España utilizaremos las siglas LGE..

[5] En adelante utilizaremos las siglas EGB para referirnos a la Educación General Básica.

rresponde explícitamente al estudio de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

El currículo español contempla explícitamente, tanto para Educación Primaria como para Educación Secundaria, la divisibilidad como parte de los contenidos matemáticos que los alumnos deben aprender. En la tabla 1.2 mostramos los contenidos matemáticos asociados a la divisibilidad según el nivel académico. Para ello hemos tomado como referencia el Real Decreto 1513/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas en Educación Primaria, así como la orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria. Igualmente el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas en Educación Secundaria Obligatoria y la orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria obligatoria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b).

Tabla 1.2
Contenidos sobre divisibilidad en el currículo

	Contenidos	
Bloque	Educación Primaria	Educación Secundaria
Números y Operaciones (Educación Primaria). Números (Educación Secundaria).	Múltiplos y divisores. Iniciación a la divisibilidad. Números primos. Números compuestos.	Divisibilidad de números naturales. Múltiplos y divisores de un número. Usos de criterios de divisibilidad. Números primos. Números compuestos. Descomposición en factores primos. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo: procedimientos de cálculo. Aplicaciones a la divisibilidad y uso de mínimo común múltiplo y máximo común divisor en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas.

Actualmente, en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de Educación Primaria, y en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se plantean nuevas modificaciones. Sin embargo, en el bloque dedicado a números, en el caso de Educación Primaria y en el bloque de números y álgebra para el caso de Educación Secundaria y Bachillerato está incluida la divisibilidad. En los contenidos del bloque de números, aparecen términos tales como: múltiplos, divisores, números primos y compuestos, criterios de divisibilidad, obtención de los primeros múltiplos de un número dado y la obtención de todos los divisores de cualquier número menor que 100. En los estándares de aprendizaje evaluables del currículo de Educación Primaria destacamos: conoce y aplica los criterios de divisibilidad de 2, 3, 5, 9 y 10; construye series numéricas, ascendentes y descendentes, de cadencias 2, 10, 100 a partir de cualquier número y de cadencias 5, 25 y 50 a partir de múltiplos de 5, 25 y 50; identifica múltiplos y divisores, utilizando las tablas de multiplicar; calcula los primeros múltiplos de un número dado; calcula todos los divisores de cualquier número menor que 100. En los contenidos del bloque de números y álgebra está divisibilidad de los números naturales, criterios de divisibilidad, números primos y compuestos, descomposición de un número en factores primos, múltiplos y divisores comunes a varios números, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o mas números naturales. En los estándares de aprendizaje evaluables del currículo de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato destacamos: conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014a, 2014b).

Como hemos visto en los párrafos precedentes, el contenido asociado a la divisibilidad prácticamente no ha variado si lo comparamos con la dinámica seguida por los métodos de enseñanza, orientaciones pedagógicas, temporalización de estos contenidos para la enseñanza, relación entre el contenido matemático y las edades de los estudiantes, etc. Con esta reflexión, queremos destacar que a pesar de producirse cambios importantes en el sistema educativo español, motivados por diversas razones, a lo largo de algo más de seis décadas, la divisibilidad como contenido matemático ha resistido a estos cambios y mantiene su vigencia en los documentos oficiales actuales.

Aparte de los documentos curriculares, los docentes utilizan libros de texto como una guía para desarrollar sus clases. En ese sentido consideramos destacar el tratamiento que dan algunos libros de textos al tema de la divisibilidad. No pretendemos hacer un estudio exhaustivo de los libros, no es nuestro objetivo, solo queremos señalar el tratamiento dado en los mismos a la divisibilidad, por ser los libros de textos un instrumento muy cercano que tienen los docentes para la concreción del currículo oficial a través de las unidades didácticas.

Divisibilidad en libros de textos Educación Primaria

En este apartado hacemos referencia a dos libros de textos correspondientes al tercer ciclo de primaria. La selección de estos dos libros responde básicamente a la frecuencia de uso en los centros educativos. Se trata de los textos de las editoriales: ANAYA y Santillana muy usados en España en Educación Primaria.

Tratamiento dado a la divisibilidad en el libro de la editorial ANAYA. El texto indica que forma parte de un proyecto educativo, de esa casa editorial, llamado "Deja Huella" para el Tercer Ciclo de Educación Primaria: Andalucía. La unidad que se corresponde con la divisibilidad lleva por título Múltiplos y Divisores y el contenido que se desarrolla trata de múltiplos de un número, mínimo común múltiplo, divisores de un número, criterios de divisibilidad, y, números primos y compuestos.

El desarrollo de los contenidos está muy marcado por la realización de operaciones aritméticas. En la figura 1.1 mostramos lo que está expresado en el libro de texto sobre múltiplos de un número y divisores de un número.

Múltiplos de un número

Así buscamos múltiplos de un número

- **Múltiplo** de un número es otro número que se obtiene al multiplicarlo por un número natural.

Los números 4, 8, 12 y 16 son múltiplos de 4 porque 4 x 1 = 4 , 4 x 2 = 8, 4 x 3 = 12 y 4 x 4 = 16 .

- Para calcular múltiplos de un número, por ejemplo, de 5, lo multiplicamos por números naturales.

5 x 1 = 5   5 x 2 = 10   5 x 3 = 15   5 x 4 = 20

Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20...

Divisores de un número

Así buscamos los divisores de un número

- Los **divisores** de un número son todos los números que caben en él una cantidad exacta de veces.

18 | 6, resto 0, cociente 3 → 6 es divisor de 18 porque la división 18 : 6 es exacta.

18 | 5, resto 3, cociente 3 → 5 no es divisor de 18 porque la división 18 : 5 no es exacta (el resto es distinto de cero).

- Para calcular los divisores de un número, por ejemplo, de 12, buscamos todas las divisiones exactas que tengan al número como dividendo.

Dividendo	12	12	12	12	12	12
Divisor	1	2	3	4	6	12
Resto	0	0	0	0	0	0
Cociente	12	6	4	3	2	1

Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Figura 1.1 Múltiplos y divisores de un número (6º de Primaria. Tercer ciclo. Matemáticas, ANAYA, 2006, p. 36)

En ambos casos podemos observar que se destaca la expresión "Así buscamos" tanto para múltiplo como para divisores (véase figura 1.1), lo que muestra el carácter procedimental con que se trata el tema. La expresión "Así buscamos" da una orientación directa sobre el cálculo de los múltiplos o de los divisores de un número.

Sobre múltiplo de un número expresa que "se obtiene al multiplicarlo". Esta expresión es consecuencia de una acción realizada; haber multiplicado dos números. En los ejemplos también se indica que para calcular los múltiplos de un número "multiplicamos" por números naturales. La expresión "multiplicamos" se refiere también a la acción de multiplicar.

Con respecto a los divisores de un número, la orientación es explícita sobre la operación aritmética de división. En los ejemplos efectúan la división y luego concluyen sobre si son o no divisores del número.

Queremos señalar que en el caso del ejemplo sobre divisores, después de realizar la división (18 entre 6) se expresa que el número 6 es divisor de 18, la justificación dada es “porque la división es exacta”. Sin embargo, no se dice nada del número 3 que también es divisor de 18 y que es el cociente de la operación de división realizada. En este caso la afirmación de que 6 es divisor de 18 se basa y coincide con la afirmación de que 6 es el divisor en la operación realizada. Consideramos que este tipo de afirmaciones refuerza la idea de la divisibilidad en términos de la operación aritmética de división, en detrimento de la divisibilidad en términos de relación entre números.

Otro aspecto que queremos destacar es el uso del singular cuando hacen referencia a múltiplos y del plural cuando se refieren a divisores. En ambos casos, en el párrafo que aparece punteado, se indica en plural: “buscamos múltiplos” o “buscamos divisores”. Sin embargo, cuando hacen referencia a múltiplo expresan “múltiplo de un número es otro número...”, mientras que en divisores expresan “divisores de un número son todos los números…”.

El segundo libro al que hacemos referencia es “Matemática 6. Entre Amigos Santillana” (véase figura 1.2). La unidad que se corresponde con la divisibilidad es llamada, como en el libro anterior, Múltiplos y Divisores y los contenidos desarrollado en el libro son: múltiplos de un número, mínimo común múltiplo, divisores de un número, criterios de divisibilidad, números primos y números compuestos.

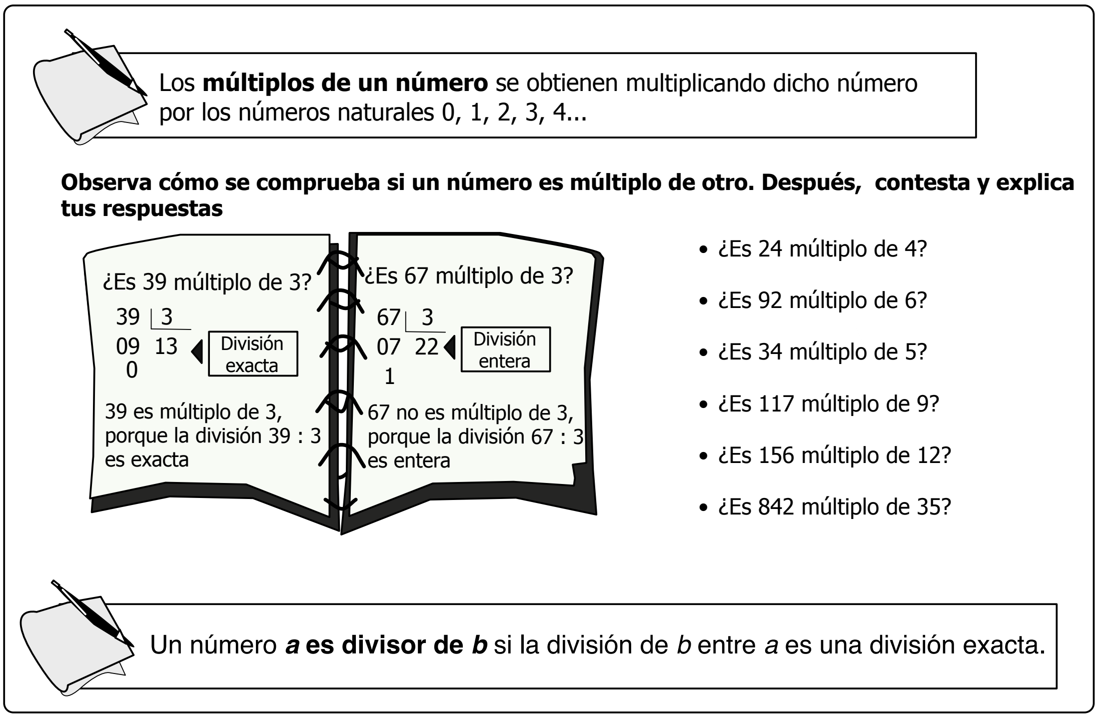


Figura 1.2. Múltiplos y divisores de un número (Primaria 6. Matemáticas, Santillana, 2002, p. 32-34)

En los múltiplos hacen referencia a cómo se obtienen y la orientación es hacia la realización de la operación de multiplicación. Señalan que la operación de multiplicación se realiza en el conjunto de los números naturales. Sin embargo, introducen la operación de división como un instrumento para probar la veracidad de los múltiplos de un número.

Con respecto a divisor, después de realizar varias divisiones (exactas y enteras) entre números, afirman que un número es divisor de otro si la división es exacta y lo representan con letras.

Divisibilidad en los libros de textos Educación Secundaria

En este apartado hacemos referencia a dos libros de textos correspondientes a primero de ESO. Los libros de textos de las editoriales ANAYA y el segundo de la editorial Guadiel.

Comenzaremos mencionando que el libro de la editorial ANAYA titula “La Relación de Divisibilidad” en su primera página del módulo correspondiente a la divisibilidad. Expresa que la divisibilidad es la relación entre dos números y pone de manifiesto que los elementos que pertenecen a esa relación cabe una cantidad exacta de veces y coloca como contexto un aparcamiento de autobuses. En un apartado a la izquierda de la imagen, señala explícitamente la forma de hacer la división, usando letras en vez de números (véase figura 1.3).

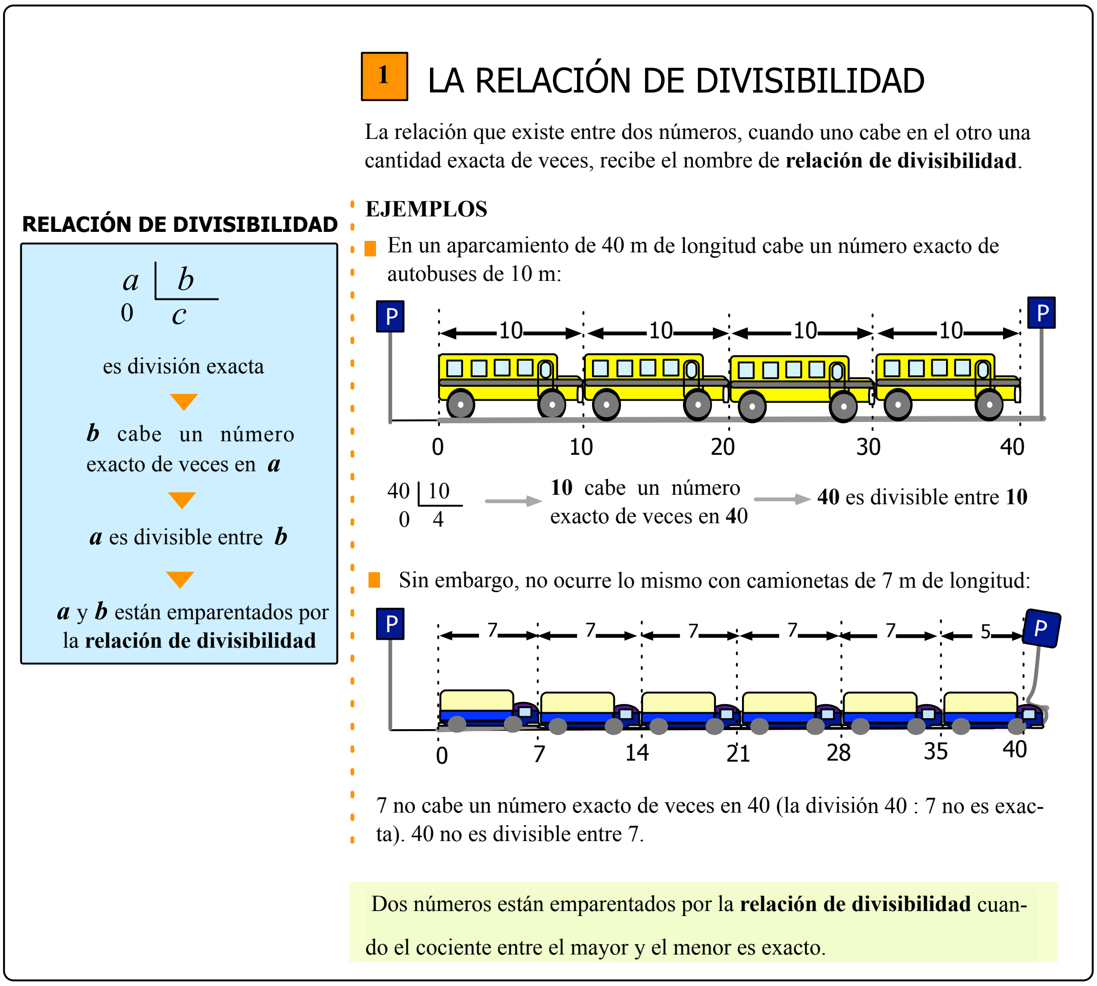


Figura 1.3. Relación de divisibilidad, múltiplo y divisores (1º ESO Matemáticas, ANAYA, 2002, p. 48)

En el libro de la editorial Guadiel no hacen referencia a la relación de divisibilidad en forma explícita. El título que utilizan para la unidad es “Múltiplos y Divisores”. Sobre el múltiplo plantean que se obtiene multiplicando y sobre divisor plantean hacer la división y que resulte exacta. Utilizan los símbolos de la teoría de números para los múltiplos y divisores (véase figura 1.4). Plantean la relación que existe entre múltiplo y divisor.

Observamos que 15, 30, 45 y 60 son resultados de multiplicar 15 por otro número natural. Diremos que son *múltiplos* de 15.

Un número es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un número natural

Ya sabemos cuándo un número es múltiplo de otro. Observa en los siguientes ejemplos cómo se indica en lenguaje matemático *ser múltiplo de*.

15 *es múltiplo de* 15 se escribe 15 = $\dot{15}$.
30 *es múltiplo de* 15 se escribe 30 = $\dot{15}$.
45 *es múltiplo de* 15 se escribe 45 = $\dot{15}$.

Un número es **divisor** de otro, si al dividir el segundo entre el primero, la división es exacta. También podemos decir que el segundo número es **divisible** por el primero

En lenguaje matemático *es divisor de* se indica mediante una barra vertical. Así:

3 *es divisor* de 45 se escribe 3 | 45.
2 *es divisor* de 30 se escribe 2 | 30.

Observa la relación entre múltiplos y divisores:

- Si un número es múltiplo de otro, éste es divisor del primero.
- Si un número es divisor de otro, éste es múltiplo del primero.

Así, tenemos:

9 = $\dot{3}$ ⇒ 3 | 9
6 | 18 ⇒ 18 | $\dot{6}$

Figura 1.4. Múltiplo y divisor (1º ESO Matemáticas, Guadiel, 2002, pp. 32-33)

Divisibilidad en libros de textos para la formación de profesores

En este apartado hacemos referencia a tres libros que tratan los conceptos asociados al contenido matemático de divisibilidad.

Libro de Prada y Rodríguez (1982) cuyo título es “Como Enseñar Divisibilidad”. Este libro tiene orientaciones para los maestros en formación y en ejercicio, está dividido en 7 capítulos; tres dedicados a los contenidos matemáticos y los restantes a aspectos didácticos. El primer capítulo se define la divisibilidad como una relación de orden parcial en el conjunto de los números naturales. Se recogen las demostraciones de las propiedades de la relación de orden. También definen el mínimo común múltiplo, máximo común divisor y tratan la existencia y la unicidad de la descomposición en factores primos. En el segundo capítulo se extiende el estudio de la divisibilidad al conjunto de los números enteros, destacando las diferencias y semejanzas de la relación de divisibilidad entre los dos conjuntos numéricos. En el tercer capítulo se presenta el estudio de la relación de congruencia y el criterio general de divisibilidad en cualquier sistema de numeración. En los siguientes capítulos los autores abordan aspectos didácticos, que consideramos de interés para nuestra investigación, sobre los contenidos desarrollados en los tres primeros capítulos. Los elementos didácticos desarrollados comienzan con un listado de ejercicios resueltos sobre los contenidos de divisibilidad ya tratados, posteriormente señalan algunos aspectos que los autores han llamado “aspectos psicoevolutivos y didácticos de la divisibilidad” y finalmente desarrollan un ejemplo de una planificación de una clase de divisibilidad indicando la motivación al tema, los objetivos específicos, los materiales a utilizar, el desarrollo del tema, las estrategias a seguir y algunas pautas para la evaluación.

Libro escrito por Sierra, González, García y González (1989) y cuyo título es Divisibilidad. Este libro se publica en el marco de un proyecto editorial denominado “Matemáticas, Cultura y Aprendizaje”. El libro consta de 6 capítulos en los cuales los autores hacen un tratamiento de la divisibilidad que contempla: hechos y fenómenos asociados a la divisibilidad, análisis histórico sobre el tratamiento recibido en los planes de estudio en España a lo largo de treinta años al tema de divisibilidad, una aproximación al estudio de la divisibilidad desde el nivel preescolar hasta el nivel medio, analizan el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos asociados a la divisibilidad e incluyen algunas actividades y recursos que los autores consideran de interés para ser desarrolladas y utilizados en el aula. Finalmente hacen un desarrollo matemático esquematizado de la teoría de la divisibilidad en un anillo.

Libro recomendado en la bibliografía fundamental propuesta en la Guía Docente de la asignatura “Bases Matemáticas para la Educación Primaria”, que por lo general siguen los maestros en formación de la Universidad de Granada en el primer curso de su formación, curso al que pertenecen los sujetos de nuestro estudio. En la redacción de dicho texto han participado 21 profesores vinculados al grupo de investigación de “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. En este manual Segovia y Rico (2011) coordinan su publicación y redacción. Consta de 17 capítulos de los cuales uno de ellos es introductorio sobre la matemática y el maestro de primaria, ocho temas son de aritmética, cuatro de geometría, dos de medida, uno de estadística y otro de probabilidad. Exceptuando el capítulo introductorio, en cada capítulo del libro se hace un análisis de contenido sobre un tema matemático de las matemáticas escolares, particularmente de cada uno de los bloques de contenidos de Educación Primaria: números naturales, enteros y racionales, geometría del plano y del espacio, magnitudes y su medida, estadística y probabilidad. Los organizadores del currículo estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología están presentes en cada uno de los capítulos, que tratan temas de las matemáticas escolares, como elementos del análisis de contenido para determinar los significados de un tema de las matemáticas escolares. En este manual Castro y Molina (2011) desarrollan un capítulo titulado “Introducción a la Divisibilidad”. El manual está dirigido a los estudiantes de primer curso del Grado de Maestro de Primaria en la Universidad de Granada. En este capítulo las autoras utilizan el análisis de contenido como una herramienta técnica para estudiar y establecer los significados de la divisibilidad. Aparte de los organizadores del currículo estructura conceptual y fenomenología desarrollados en el capítulo, destacamos las representaciones de divisores y múltiplos mediante modelos de representación: discreto o de conjunto, lineal y de área. También queremos destacar las distintas representaciones que hacen de los números naturales mediante las operaciones aritméticas estableciendo equivalencias entre los números naturales representados en el sistema de representación posicional en base diez y su equivalente utilizando las estructuras aditiva o multiplicativa, así como la representación tabular para facilitar la obtención de los divisores de un número.

Hemos puesto de manifiesto que el contenido matemático de la divisibilidad mantiene vigencia en los documentos oficiales tanto de Educación Primaria como de Educación Secundaria, y, que los cambios o reformas que se han hecho del currículo solo han movilizado este contenido de un grado a otro, y, sin pretender ser exhaustivos hemos recogido una pequeña muestra de libros de texto y describimos el tratamiento dado al contenido matemático de la divisibilidad. En ese sentido creemos que hay un gran consenso en considerar que los contenidos matemáticos asociados a la divisibilidad contribuyen notablemente en el desarrollo de una comprensión profunda de la estructura numérica.

Grupo de investigación FQM-193

En el grupo de investigación FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada se han realizado un conjunto de investigaciones en las cuales se estudian los significados de conceptos matemáticos (v.g., Castro-Rodríguez, 2015; Fernández-Plaza, 2015; Gómez, 2007), se han escrito libros en los cuales se utiliza el análisis didáctico desde sus diversas funciones (v.g., Flores y Rico, 2015; Rico, Cañadas, Gutiérrez, Molina y Segovia, 2013; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013; Segovia y Rico, 2011), se han realizado investigaciones utilizando experimentos de enseñanza (v.g., Molina, 2006; Valverde, 2012; Vega, 2013). En ese sentido, en nuestra investigación estudiamos los significados del concepto matemático de divisibilidad de maestros en formación, utilizamos el análisis didáctico como herramienta para la planificación y puesta en práctica de secuencias de aprendizaje y, para estudiar los significados en el contexto de un experimento de enseñanza.

1.2. Definición del problema

En los apartados anteriores hemos puesto de manifiesto aspectos que dan relevancia y pertinencia a este estudio, a saber, la necesidad de formar maestros con un conocimiento profundo del contenido matemático, un conjunto de investigaciones[6] recientes que dan cuenta del estado de la cuestión sobre el contenido matemático de divisibilidad en la formación de maestros y la presencia por más de seis décadas de los contenidos matemáticos asociados a la divisibilidad en el currículo.

[6] En el capítulo dos de esta memoria de tesis ampliamos el conjunto de investigaciones que hemos considerado como antecedentes de este trabajo. Este conjunto de investigaciones las hemos separados en tres tipos según la naturaleza de las mismas: a) formadas por el conjunto de investigaciones sobre la comprensión de tópicos de teoría de números centradas en la formación de profesores, b) el conjunto de investigaciones sobre la comprensión de conceptos asociados a la divisibilidad en contextos escolares y c) un conjunto de investigaciones que dan cuenta de el papel de las representaciones numéricas en los tópicos sobre teoría de números.

Es un hecho reconocido la relación que existe entre el currículo en las matemáticas escolares y los programas de formación de maestros en España, tal como lo describen Rico y Sierra (1996). Esta relación también está presente entre los temas del programa correspondiente a la asignatura "Bases Matemáticas para la Educación Primaria" del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada, correspondiente al curso 2012-2013, y el currículo vigente de las matemáticas escolares. Los siete temas[7] que constituyen el contenido de este programa de formación están incluidos en el currículo de las matemáticas escolares.

El estudio de la divisibilidad, por ejemplo, está distribuida en Educación Primaria y Educación Secundaria del currículo español y también lo contempla entre sus contenidos este programa para formar maestros de Educación Primaria. La relación entre los contenidos del currículo y este programa de formación de maestros no está exenta de algunas dificultades, entre otras, derivadas del contenido matemático o del proceso de instrucción que se sigue.

La divisibilidad se define desde la estructura de los números enteros y en el caso de las matemáticas escolares se restringe al caso de los enteros positivos. Para definir la divisibilidad se utiliza la estructura multiplicativa, de ahí la importancia que los maestros en formación comprendan la estructura multiplicativa en los números enteros positivos y su relación con la divisibilidad. Sin embargo, la comprensión de la divisibilidad pasa por advertir que desde la misma estructura multiplicativa se definen relaciones que son equivalentes entre sí, como divisor-factor o múltiplo-divisible, y otras que son inversas, como múltiplo-divisor o divisible-factor. Todas estas relaciones, asociadas a la divisibilidad, se definen desde la misma estructura multiplicativa, lo cual supone una dificultad en la comprensión de las mismas.

Otra situación que se presenta con la estructura multiplicativa y la divisibilidad tiene que ver con el teorema fundamental de la aritmética. Los problemas multiplicativos suponen las propiedades de divisibilidad de enteros, y con frecuencia es planteada en esos términos. El teorema fundamental de la aritmética es utilizado en la divisibilidad, entre otros usos, para representar los números como producto único de factores primos y no en la forma de representación posicional en base diez. Esta forma de representar los números supone conocer la equivalencia entre ambas representaciones y así poder expresar un número entero positivo cualquiera como producto único de factores primos. Un obstáculo para la comprensión conceptual de los números primos es la falta de una representación transparente de los mismos (Zazkis y Liljedahl, 2004).

[7] El programa tiene siete temas. Tema 1: El número natural. Sistemas de numeración. Tema 2: Aritmética. Tema 3: Números racionales. Tema 4: Figuras geométricas. Tema 5: Transformaciones geométricas. Tema 6: Medida. Tema 7: Introducción a la estadística y probabilidad. El programa completo se puede ver en el anexo A de esta memoria de tesis.

La representación de un número como el producto de factores primos tiene asociado un conjunto de factores-divisores que son explícitos y otros que no. Algunos de estos factores-divisores no explícitos son resultados de productos internos en la descomposición canónica del número y en ocasiones los estudiantes tienden a no considerarlos como factores-divisores del número; por no estar explícitos en la representación canónica del número (López y Cañadas, 2013).

Por otra parte, la divisibilidad tiene asociados términos como divisor y factor que también son términos asociados a las operaciones aritméticas. Esto supone una ambigüedad de significado; dada por la homonimia de los términos. Estos términos tienen un significado en las operaciones aritméticas y otro en la divisibilidad. En la operación de multiplicación, por ejemplo, al multiplicador y al multiplicando habitualmente se les denomina factores y en la operación de división el término divisor es usado para llamar a uno de los elementos que participan en una división (dividendo, divisor, cociente y resto). En la divisibilidad factor y divisor son usados para determinar una relación de orden entre números.

En las aulas de Educación Primaria, la divisibilidad se trabaja después de que los escolares conozcan la división, exacta y entera, sus términos, y el algoritmo de la división. Este conocimiento previo puede obstaculizar el aprendizaje de la divisibilidad como relación, perdurando solamente la idea de la división exacta. Por ejemplo, algunos estudiantes, para conocer si 7 es divisor de $3\times7\times2$, realizan los productos y dividen el resultado obtenido por 7, para dar la respuesta después de comprobar si la división es o no exacta (López, Castro y Cañadas, 2013a).

En esta investigación distinguimos la relación de divisibilidad de la operación de división. Por ejemplo, cuando se escribe $12+1$, 4×5, $12\div3$, se hace una clara referencia a una operación aritmética entre los números. En cada caso, se obtiene un resultado numérico de la expresión. Sin embargo, cuando se escribe doce es mayor que tres, se expresa una relación entre esos dos números. En general, podemos decir que para cualquier par de números "a" y "b", $a>b$ puede ser verdadera o falsa y no un número. De forma análoga sucede con la división y la divisibilidad. Si la pregunta es ¿cuál es el resultado de la operación $12\div3$? la respuesta es claramente 4, pero si la pregunta es ¿3 divide a 12? o ¿3 es divisor de 12? la respuesta no sería el número 4, ni siquiera es un número. La diferencia entre las dos expresiones es clara; en una se pregunta por la respuesta de una operación aritmética y en la otra se pregunta por la relación entre dos números.

Conjeturamos que la mayoría de las dificultades asociadas al estudio y la comprensión de la divisibilidad se producen por asociar la divisibilidad como una operación aritmética y no como corresponde: una relación entre números.

Desde nuestra perspectiva como docentes, con esta investigación, queremos reivindicar el estudio de la divisibilidad en los términos que corresponde. En nuestro estudio promovemos el mismo significado que le ha sido asignado a la divisibilidad desde la teoría de números y que lamentablemente se ha ido transformando en las aulas, en el devenir de los años, en un significado diferente; que no le corresponde. Que un maestro comprenda los conceptos relacionados con la teoría de números y específicamente con los conceptos asociados a la divisibilidad significa que abre grandes posibilidades a sus estudiantes y para el mismo, a la comprensión profunda de la estructura matemática. En caso contrario tendremos maestros o estudiantes que se pregunten para qué estudiar la divisibilidad si es lo mismo que la división pero con otro nombre, o como el caso de los maestros en formación que participaron en el estudio de Zazkis, Sinclair, y Liljedahl, (2013) que preguntaron muchas veces "por qué las reglas de divisibilidad se encuentran todavía en el plan de estudios cuando la cuestión de la divisibilidad se puede responder con rapidez y precisión con una calculadora" (p. 58).

Por todo lo expuesto anteriormente, y, teniendo en cuenta lo expresado por el NCTM (2014) cuando afirma que existen algunas realidades inquietantes e improductivas en muchas aulas, escuelas y distritos, tales como, demasiada atención centrada en los procedimientos de aprendizaje sin ninguna conexión con el significado, la comprensión, o las aplicaciones que requieren estos procedimientos. Nos propusimos elaborar un modelo para promover el aprendizaje centrado en la divisibilidad como una relación de orden, en el cual abordamos las dificultades planteadas anteriormente.

Realizamos este trabajo de investigación motivados por la convicción de que el estudio de los significados que los futuros maestros ponen de manifiesto al realizar tareas de divisibilidad, que han sido diseñadas con el propósito de promover su aprendizaje sobre este tópico desde un contexto relacional, pueden dar luces sobre propuestas o instrucciones que contribuyan en la formación de maestros con conocimientos matemáticos sólidos requeridos para enseñar matemáticas.

1.3. Preguntas de investigación

Hemos descrito en el apartado anterior dificultades que han sido detectadas en investigaciones sobre la comprensión de la divisibilidad. A partir de esta información nos planteamos un conjunto de preguntas generales que nos guiaron en el desarrollo de la investigación.

¿Qué características debe tener un modelo de aprendizaje para que los maestros en formación comprendan la divisibilidad como una relación entre números enteros positivos y no como una operación aritmética?

¿Cómo son los significados que muestran los maestros en formación y qué elementos los caracterizan conceptualmente, cómo los representan y con cuáles fenómenos matemáticos se corresponden?

¿Qué representación utilizan los maestros en formación para organizar y comunicar sus ideas matemáticas sobre divisibilidad, qué operaciones realizan entre las representaciones utilizadas?

¿Cómo influyen las diferentes representaciones en la forma de expresar los conceptos asociados a la divisibilidad?

¿Cuál es la comprensión que tiene un grupo de maestros en formación de los números naturales, enteros, y, qué relaciones o vínculos manifiestan entre estos conjuntos numéricos?

1.4. Objetivos de investigación

En esta investigación nos interesamos por el proceso de aprendizaje de un grupo de maestros en formación cuando estudian el tema de divisibilidad. Diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza que se caracteriza por una secuencia de trabajo en las que se promueve el estudio de la divisibilidad como una relación de orden. Estudiamos los significados mostrados por un grupo de maestros en formación en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada en la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria. En este contexto de investigación, nos propusimos dar respuestas a algunas de las preguntas que nos han surgido mediante el logro dos objetivos generales que definimos a continuación.

Objetivos Generales

OG1. Estudiar el proceso de diseño, puesta en práctica y análisis de una secuencia de trabajo en la que se aborda la divisibilidad desde una perspectiva relacional.

OG2. Describir y caracterizar los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación a partir de la implementación de una secuencia de trabajo centrada en la divisibilidad como relación de orden.

Estos objetivos generales se concretan en ocho objetivos específicos.

Objetivos específicos

En este apartado definimos los objetivos específicos con los que se concretan nuestros objetivos generales.

El objetivo OG1 lo abordamos a través de los siguientes objetivos específicos.

OE1. Hacer un diagnóstico en el cual se estudien las categorías propuestas en la literatura de investigación sobre la comprensión de la relación ser múltiplo y ser divisor.

OE2. Realizar un análisis didáctico de los contenidos asociados a la divisibilidad para planificar el diseño de las secuencias de trabajo.

OE3. Promover mediante el desarrollo de las secuencias de trabajo el conocimiento matemático de la divisibilidad como una relación de orden.

OE4. Describir la actuación de los maestros en formación durante el desarrollo de las secuencias de trabajo con base en las expectativas de aprendizaje formuladas.

OE5. Describir la actuación de los maestros en formación durante el desarrollo de las secuencias de trabajo con base en la formulación de dudas, de afirmaciones matemáticas y de las interacciones que se generan.

Para el logro del objetivo general número OG2 definimos los siguientes objetivos específicos.

OE6. Construir una estructura de categorías que permitan describir los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación a partir de la terna formada por los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

OE7. Analizar las producciones de los maestros en formación utilizando la estructura de categorías propuesta.

OE8. Determinar las características distintivas de los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación en sus producciones.

Capítulo 2. Antecedentes

[...]Concepto y relación son las piedras fundamentales sobre las que construyo mi edificio. Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925)

En este capítulo presentamos una síntesis de las investigaciones recopiladas que guardan relación con la nuestra con el objetivo de presentar el "estado de la cuestión" que tratamos de investigar. Aunque no es mucha la investigación realizada en este tema, la mayoría de los trabajos a los que hacemos referencia comparten tópicos sobre teoría de números y se han llevado a cabo en contextos escolares y en formación de profesores o maestros de educación primaria. Algunos estudios se han llevado a cabo con maestros o profesores en ejercicio que tratan la comprensión de conceptos particulares relacionados con la estructura numérica y la teoría de números cuyo foco principal de contenido es la divisibilidad en el conjunto de los enteros positivos. Hemos considerado otras investigaciones que resultan de interés para nuestra investigación bien sea por el aspecto metodológico o por el marco teórico en el que se fundamentan.

Todas las investigaciones a las que hacemos referencia en este capítulo proporcionan información destacada que nos permite establecer un punto de partida para nuestra investigación.

2.1. Investigaciones en Educación Matemática centradas en tópicos de teoría de números

Las investigaciones que señalamos en este apartado se han realizado sobre tópicos de teoría de números y las hemos organizado en tres grupos. El primer grupo está formado por aquellas investigaciones que se han llevado a cabo con maestros en formación o profesores en formación (estudiantes para maestros de primaria o estudiantes para profesores de secundaria). En el segundo grupo incluimos investigaciones que se han realizado en contextos escolares, que incluye: estudiantes de secundaria y profesores o maestros en ejercicio. En el tercer grupo de investigaciones destacamos aquellas que independiente del contexto académico en el cual se realizan estudian el papel de los sistemas de representación en tópicos de teoría de números.

Centradas en la formación de profesores

Martin y Harel (1989) hacen un estudio en el cual utilizaron nociones de divisibilidad como contexto para determinar la comprensión de las demostraciones matemáticas con maestros en formación. Estos autores plantearon preguntas relacionadas con la exactitud matemática de verificación inductiva y deductiva a 101 maestros en formación que estaban matriculados en un curso de matemáticas, correspondiente al segundo año de su plan de estudios. En este estudio se muestra el criterio de divisibilidad del número tres, como ejemplo de una generalización familiar; y la propiedad transitiva de la relación ser divisor expresada en el sistema de representación de simbolismo algebraico, como una generalización no familiar. En los resultados, estos autores plantean que en los esquemas personales de demostración de los maestros en formación (en cuestiones de divisibilidad) más de la mitad de ellos aceptaba un argumento empírico-inductivo como demostración matemática válida. Sin embargo, en los contextos que los autores definieron como familiares, el 38% de los maestros en formación aceptaron un razonamiento deductivo incorrecto como matemáticamente correcto y en los contextos definidos como no familiares el 52%. En esta investigación los autores solo han utilizado afirmaciones o sentencias sobre divisibilidad.

Zazkis y Campbell (1996a) realizan una investigación cuyos sujetos son maestros en formación y tópico la divisibilidad y la estructura multiplicativa de los números naturales. El propósito de esta investigación es diseñar y ayudar a la implementación de métodos pedagógicos que satisfagan el desarrollo profesional y contemporáneo de los estándares de profesores en la comprensión de conceptos matemáticos. El principal foco de contenido es el concepto de divisibilidad y su relación con la división, multiplicación, números primos y compuestos, factorización, reglas de divisibilidad y descomposición prima. Utilizan el marco teórico constructivista *Action-Process-Object* (APO) para analizar e interpretar los datos obtenidos en las entrevistas clínicas a 21 maestros en formación que asistieron voluntariamente al curso *Foundations of Mathematics for Teachers*. Durante dos semanas trabajaron los tópicos: factorización, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, números primos y compuestos, descomposición prima y el teorema fundamental de la aritmética, divisibilidad y reglas de divisibilidad de los números 2, 3, 5 y 9. Una semana después hicieron entrevistas clínicas a los maestros en formación. El instrumento (véase figura 2.1) fue diseñado con el propósito de revelar la capacidad de los participantes para hacer frente a los problemas usando la memoria o construyendo conexiones entre los contenidos. Los investigadores señalan que las preguntas del instrumento buscan describir la comprensión que tienen los participantes sobre los conceptos y procedimientos relacionados a la divisibilidad; e indagar sobre las conexiones o inferencias a partir de esos conceptos o procedimientos. En todas las cuestiones usan ejemplos de números específicos para minimizar una complejidad adicional, dada por la abstracción algebraica.

Question Set 1

Consider the number $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.
Is M divisible by 7? Explain.
Is M divisible by 5, 2, 9, 63, 11, 15? Explain.

Question Set 2

(a) Is 391 divisible by 23?

(b) Is 391 divisible by 46?

Question Set 3

Consider the numbers 12 358 and 12 368. Is there a number between these two numbers that is divisible by 7? By 12?

Question Set 4

(a) The number 15 has exactly four divisors. Can you list them all? Can you think of several other numbers that have exactly four divisors?
(b) The number 45 has exactly six divisors. Can you list them all? Can you think of several other numbers that have exactly six divisors?

Figura 2.1. Instrumento sobre divisibilidad (Zazkis y Campbell, 1996a, pp. 542-543)

De este estudio, adaptamos las preguntas 1 y 4 para usarlas en nuestra investigación. En el capítulo seis de esta memoria, específicamente en la fase de planificación de la segunda sesión, describimos las modificaciones que realizamos para utilizar estas tareas en nuestro estudio.

Bolte (1999) expone pautas que se pueden seguir para la formalización individual o colectiva de mapas conceptuales sobre temas de matemáticas en general. La autora hace el planteamiento a los maestros en formación de la construcción de un mapa conceptual a partir de 20 términos asociados a la teoría de números y divisibilidad (véase figura 2.2). La idea era que establecieran y organizaran las relaciones entre los conceptos a través de nodos y líneas. No hay un mapa correcto a construirse; los estudiantes podían omitir cualquiera de los términos o agregar términos en caso de ser necesario. El objetivo es que los alumnos construyan un mapa que tenga sentido para ellos como un medio de construir su propio conocimiento.

NUMBER THEORY

Factor	factor tree	composite	intersection of sets
remainder	prime	divisor	least common multiple
factorization	multiple	product	division by primes
integer	even	relatively prime	Euclidean algorithm
odd	divisible	prime factorization	greatest common divisor

Figura 2.2. Términos asociados a la divisibilidad (Bolte, 1999, p. 171)

Después de completar un borrador de su mapa conceptual, los estudiantes debían escribir un ensayo interpretativo en el que aclararan y ampliaran las relaciones expresadas en los mapas. Estos ensayos tienen el propósito de dar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre las relaciones ilustradas en su mapa conceptual, refinar sus propuestas y explicar cómo se organiza el mapa. El mapa conceptual que mostramos en la figura 2.3 recibió una puntuación de nueve, en una escala de cero a diez. La organización fue excelente, en función de las siguientes características: la relación entre divisor, factor y divisibilidad se indican claramente, la notación utilizada fue la correcta para mostrar la divisibilidad y el algoritmo de Euclides, el teorema fundamental de la aritmética no estaba en el listado inicial de términos y fue añadido, las agrupaciones eran relacionadas y bien organizadas, y, las palabras de enlace indican una comprensión profunda de las relaciones entre los términos. En este mapa conceptual hay muy pocos errores, por ejemplo, que todos los números primos son impares. En ese sentido la precisión fue calificada como fluida en lugar de excelente (sin errores). El ensayo interpretativo que el estudiante escribió para aclarar y ampliar las relaciones recibió una puntuación de 10. Trató las relaciones matemáticas de una manera clara y sistemática. Cabe señalar que el estudiante escribió en su ensayo que “los números primos son siempre impares”. Esta afirmación indica que el error es sobre la definición de números primos y no en la construcción del mapa. En las conclusiones, la autora señala que aunque la inclusión de palabras de enlace es fundamental para hilvanar la interpretación, los estudiantes tienen la tendencia a omitir estas etiquetas porque es difícil para ellos especificar algunas de las relaciones.

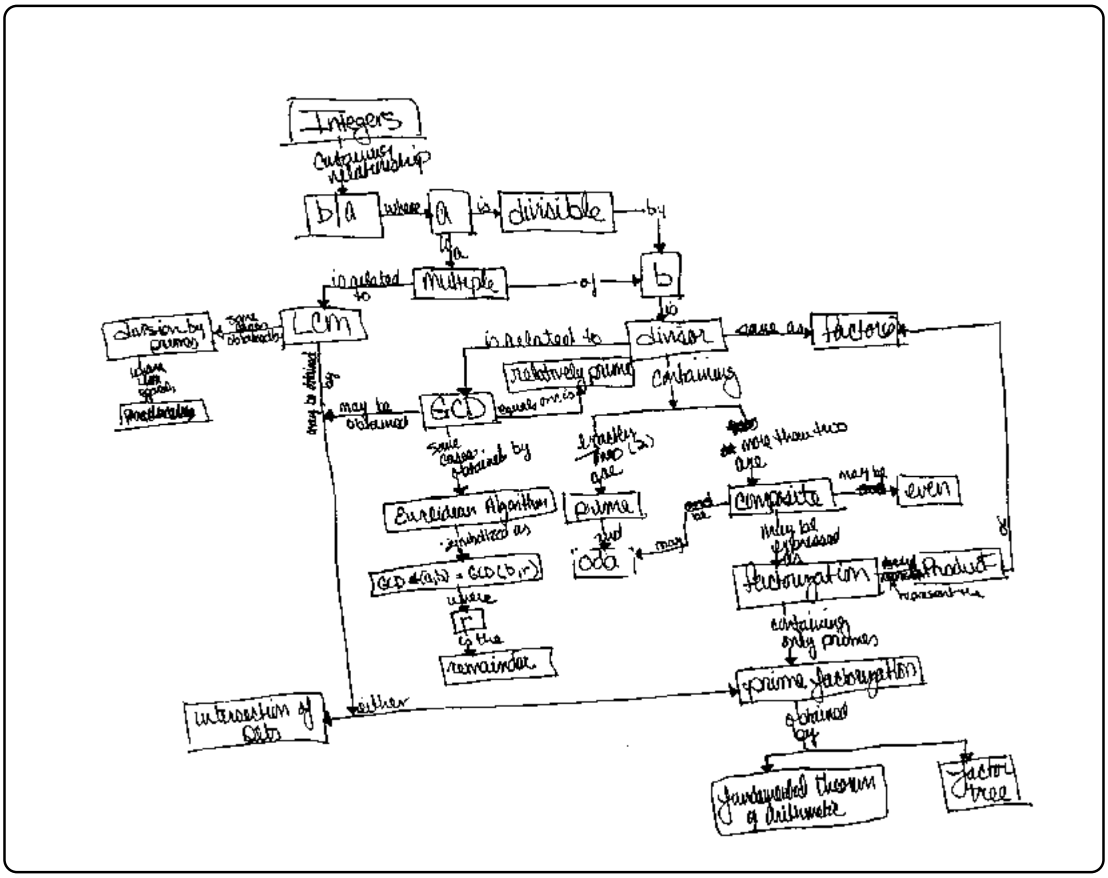


Figura 2.3. Mapa conceptual elaborado por un estudiante (Bolte, 1999, p. 169)

Zazkis (2001) explora la red de conexiones entre los términos asociados a la divisibilidad (múltiplos, divisores y factores) que ponen de manifiesto un grupo de 19 maestros en formación voluntarios del curso "Principios de Matemática para Profesores". Los temas incluían números compuestos, números primos, factorización en números primos, el algoritmo de la división, divisores, factores, múltiplos, reglas de divisibilidad y divisibilidad, así como mínimo común múltiplo y máximo común divisor. El conjunto de preguntas de la entrevista (véase figura 2.4) que analizaron en este artículo estaban referidas a múltiplos, factores y divisores. En este trabajo se considera la equivalencia entre las relaciones "b es un factor de a", "b es un divisor de a", "a es un múltiplo de b". En los resultados expresa que los maestros en formación asignan significados diferentes a los asignados por los matemáticos en el contexto de la teoría de números, y que las conexiones que establecen entre estos conceptos son la mayoría de las veces débiles o incompletos.

Conjunto de Preguntas 1
Observa los siguientes términos:
Número entero, números naturales, suma, producto, divisor, factor, número primo, número compuesto, múltiplo (se presenta una tarjeta con esta lista).
¿Te suenan familiares? ¿Qué significa cada una de esas palabras? ¿Puedes ejemplificarlas?

Conjunto de Preguntas 2
¿Cuáles son los factores primos de 117? ¿Puedes listarlos todos?
¿Cuáles son los factores de $117=3^2 x13$? ¿Puedes listarlos todos?
¿Cuáles son los divisores de $117=3^2 x13$? ¿Puedes listarlos todos?
¿De qué número 117 es un múltiplo ?
¿117 es múltiplo de 26?
¿Puedes dar un ejemplo de un múltiplo de 117?
¿Tienes alguna observación?
¿Puedes pensar en un factor que no sea divisor?
¿Puedes pensar en un divisor que no sea factor? ¿Puedes explicarlo?
¿Puedes pensar en un número que sea tanto múltiplo como divisor de 117? ¿Algún otro?

Figura 2.4. Conjunto de preguntas (Zazkis, 2001, p. 66)

Campbell (2002) reporta resultados de una investigación con maestros en formación sobre la comprensión de la diferencia entre la división con números enteros y la división con números racionales. El autor también señala las dificultades que encontraron para llegar a un acuerdo con estas dos situaciones matemáticas. Entrevistó a 21 maestros en formación, voluntarios y que estaban matriculados en un curso que cubría aspectos básicos de la teoría elemental de números, tales como divisibilidad, factorización, descomposición prima, etc. con el propósito de estudiar la comprensión de la división y divisibilidad. A los maestros en formación le presentaron cinco tipos de cuestiones (véase figura 2.5), algunas de ellas asociadas a la operación de división y otras relacionadas con la factorización prima y divisibilidad.

Question set 1:	If you divide 21 by 2, what would the quotient be? What would be the remainder?
Question set 2:	Consider $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. If you divide M by 15, what would the remainder be? What would be the quotient?
Question set 3:	Suppose you're asked to perform division with remainder on 10561 divided by 24. Will your calculator help you? How?
Question set 4:	Consider the number $6 \times 147 + 1$, which we will refer to as A. (a) If you divide A by 6, what would be the remainder? What would be the quotient? (b) If you divide A by 2, what would be the remainder? What would be the quotient? (c) Consider the number $6 \times 147 + 2$. When it is divided by 2, what is the remainder? What is the quotient?
Question set 5:	What does it mean to you to say that division is an inverse of multiplication? Is there any way in which you see division with remainder as being an inverse to multiplication?

Figura 2.5. Conjunto de cuestiones (Campbell, 2002, pp. 18-19)

Los resultados ponen de manifiesto que el conocimiento del contenido de los maestros en formación sobre la división aritmética y otros procedimientos y conceptos asociados a la aritmética son un tanto rudimentarios y frágiles en contextos más abstractos. La mayoría de los maestros en formación que participaron en este estudio mostraron orientaciones procedimentales en su comprensión de la divisibilidad. Este investigador reporta también que los conocimientos del contenido de los maestros en formación, que participaron en este estudio, esta fragmentado o desconectado. Finalmente, el autor sugiere algunas razones de los errores y de las respuestas incorrectas en relación con la imposibilidad de los participantes a distinguir entre la división racional y división de números enteros con un resto. Este autor también señala la tendencia a prolongar indebidamente la aplicabilidad de procedimientos familiares que se utilizan correctamente en ciertas actividades a situaciones nuevas, y en la excesiva dependencia de la interpretación de los referentes formales de división aritmética utilizando un lenguaje informal.

Brown, Thomas y Tolias (2002) indagan sobre la comprensión de los conceptos básicos de la teoría elemental de números de maestros en formación. El trabajo está orientado a cómo los maestros en formación aplican sus conceptos de multiplicación y división en situaciones de problemas relacionados con la divisibilidad. El marco teórico combina la teoría *Action-Process-Object-Schema* (APOS) con un modelo adaptado sobre las etapas descritas en Piaget. Las autoras están interesadas en la capacidad del individuo para pasar de responder a las cuestiones orientados principalmente por una acción, con poco conocimiento de los conceptos matemáticos subyacentes, a responder con el razonamiento deductivo basado explícitamente en la comprensión de las operaciones matemáticas y propiedades. El objetivo general de este estudio es conocer cómo los maestros en formación aplican sus esquemas de estructura multiplicativa a las tareas de divisibilidad. La intención de las autoras es utilizar estos conocimientos en futuros esfuerzos para formular un análisis más completo y útil del esquema de divisibilidad. Los participantes en este estudio fueron los estudiantes inscritos en los cursos de matemáticas para los futuros maestros de primaria impartidos por dos de las autoras de dos universidades regionales en el medio oeste de Estados Unidos. Un total de 73 estudiantes se matricularon en estos cursos, 10 de ellos fueron voluntarios para las entrevistas al final del curso. Este curso de matemáticas se centra en los fundamentos de la aritmética. Utilizaron un método de enseñanza basado, generalmente, en una teoría constructivista del aprendizaje. Los estudiantes deben asumir un papel activo en su aprendizaje de las matemáticas, trabajando tareas específicas en pequeños grupos al explicar sus soluciones a los miembros de su grupo, a discutir el sentido de las soluciones de los demás y discutir las explicaciones erróneas. Aunque las clases impartidas por las dos autoras siguieron este enfoque general de instrucción, los cursos difieren en la naturaleza de los recursos. En los resultados, las autoras hacen algunas sugerencias pedagógicas para apoyar la práctica. En primer lugar, sugieren que se debe hacer más énfasis en el rol de la multiplicación ya que esto podría contribuir a reducir la tendencia centrada en realizar la operación de división en las tareas de divisibilidad. Otro aspecto que señalan las autoras es el fortalecimiento del rol de la división como proceso inverso de la multiplicación. También hacen sugerencias sobre la relación entre la estructura multiplicativa y la descomposición en factores primos. Manifiestan que para utilizar la estructura multiplicativa en el razonamiento se debe tratar con flexibilidad los factores primos; para ser capaz de identificar múltiplos y divisores.

Feldman (2012) desarrolla una tesis doctoral en *Boston University*, en la cual describe el proceso en la comprensión de tópicos de teoría de números con un grupo de maestros en formación. En los tópicos sobre teoría de números incluye: factores, divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. El estudio se llevó a cabo durante tres semanas de instrucción con 59 maestros en formación en un curso de matemáticas en *Boston University*. Se realizaron también entrevistas clínicas a seis participantes en el estudio y cada entrevista fue grabada y transcrita. Para describir la comprensión de los participantes sobre los tópicos de teoría de números durante la instrucción, Feldman utilizó la teoría *Action-Process-Object-Schema* (APOS). Al analizar los resultados, esta investigadora señala que al contrario de investigaciones previas, este estudio proporciona evidencia de que los maestros en formación pueden desarrollar una comprensión profunda y conectada de temas de teoría de números. También señala que en investigaciones futuras, sobre comprensión de tópicos de teoría de números por maestros en formación, debe prestarse atención al trabajo que los mismos desarrollan durante los periodos de instrucción en el aula. Además, las tareas de matemáticas que requieren de la descomposición en factores primos, como herramienta fundamental de la teoría de números, deben ser investigadas por sus efectos en la comprensión de los maestros en formación.

Zazkis, Sinclair y Liljedahl (2013) publican resultados de una investigación en la cual presentan algunas cuestiones sobre un supuesto diálogo entre un profesor y un estudiante en una hipotética entrevista sobre el tema de divisibilidad. Los maestros en formación deben completar los diálogos con justificaciones, actuando como los supuestos estudiantes o como los supuestos profesores según sea el caso. El primer “acto” de esta “obra de teatro” se ha escrito sobre la base de tres cuestiones (véase figura 2.6).

There is a conversation between the teacher and a student. There are 20–25 other students in the room.

(1)
T: Why do you say that 462 is divisible by 4?
S: Because the sum of the digits is divisible by 4.
(2)
T: Why do you say that 354 is divisible by 4?
S: Because the sum of the digits is divisible by 4.
(3)
T: Why do you say that 354 is divisible by 4?
S: Because …

Figura 2.6. Cuestiones presentadas a los maestros en formación (Zazkis, Sinclair y Lildejalh, 2013, p. 53)

Las cuestiones 2 y 3 son variaciones de la cuestión 1. Pidieron a los maestros en formación escribir un párrafo en el que analizaran el error y luego presentaran una interacción entre el supuesto profesor y los supuestos estudiantes en forma de una obra de teatro. Analizaron 17 producciones escritas sobre la primera cuestión, 36 producciones escritas de la segunda cuestión y 35 producciones escritas de la tercera cuestión. En los resultados, los investigadores reportan que los maestros en formación describen propiedades de los números que se pueden utilizar para determinar si el resultado de la división es un número entero. Sin embargo, en las "obras" de la lección de los maestros en formación la divisibilidad no fue tratada como una propiedad o una relación.

En los ejemplos de las producciones escritas que proporcionan estos investigadores se pone en evidencia que la divisibilidad se percibe ya sea como resultado de la división, como un procedimiento para memorizar o un truco. Los maestros en formación preguntaron muchas veces por qué las reglas de divisibilidad se encuentran todavía en el plan de estudios cuando la cuestión de la divisibilidad se puede responder con rapidez y precisión con una calculadora. Los investigadores, ante esta pregunta, señalan que argumentaron expresando que proporcionan una excelente oportunidad para explorar y entender las relaciones entre los números. En las conclusiones estos investigadores reportan que el concepto de divisibilidad resultó ser difícil ya que los maestros en formación no lo expresan de una manera precisa y clara. En particular, tendían a confundir la divisibilidad, una relación que implica números enteros, con la división, una operación que no implica exclusivamente números enteros.

Centradas en contextos escolares

Leikin (2006) analiza cómo se evidencia el desarrollo de los conocimientos de los maestros. Este estudio se basa en la suposición de que los profesores aprenden cuando ellos enseñan y refleja la complejidad de los conocimientos de los maestros en un modelo que considera de tres dimensiones (3-D): el tipo de conocimiento del profesor, fuentes de conocimiento, y las formas y condiciones del conocimiento. Este modelo lo sugiere como un marco para el análisis del aprendizaje a través de la enseñanza. En esta investigación participaron 7 maestros de primaria y 22 profesores de secundaria. La experiencia de los profesores era variable, entre 3 y 17 años dedicados a la docencia. La autora presenta los resultados de un estudio de caso con una maestra de primaria con siete años de experiencia en la enseñanza.

A la maestra le entregaron un conjunto de materiales didácticos (incluyendo hojas de trabajo y páginas web) para preparar una lección sobre números primos y compuestos y le pidieron elegir los materiales que considerara convenientes para hacer la lección según sus preferencias personales. Entre otros materiales, eligió la criba de Eratóstenes para introducir la lección de números primos a sus estudiantes. Este es uno de los temas en el plan de estudios de cuarto grado y que la maestra aún no había trabajado. Después de la elección de los materiales didácticos, entrevistó a la maestra para preguntarle sobre su elección. Le pidió dar una explicación y hacer una discusión de los conceptos matemáticos antes de desarrollar la lección con sus estudiantes. A la maestra se le preguntó sobre los conocimientos previos necesarios de los estudiantes, que les permitan realizar las tareas que propone, y qué nuevos conocimientos deben desarrollar durante la lección.

En las conclusiones de esta investigación, la autora destaca que el caso de esta maestra ejemplifica el desarrollo de su conocimiento mientras enseña los números primos usando la criba de Eratóstenes. En la planificación de la lección, la maestra expresó claramente su necesidad de conocer el material lo suficientemente bien y su necesidad de predecir en los estudiantes posibles dificultades, preguntas y respuestas. La autora sostiene que la maestra aprendió los números primos mientras ella preparaba la lección. Muestra como evidencia de esta afirmación uno de los episodios de la entrevista en la cual la maestra mostró confusión para decidir si la potencia de un número primo es primo. Durante la aplicación de la lección, esta idea apareció entre las dudas de los estudiantes (si la potencia de un número primo es también primo) la maestra no tuvo ninguna dificultad para identificar la confusión de los estudiantes y les ayudó a resolverlo. La autora expresa que la rapidez de su respuesta a las dudas de los alumnos puede verse como una evidencia del aprendizaje de la maestra ya que en la entrevista (antes de la lección) sobre esta cuestión necesitó mucho tiempo para resolverla.

Bodí (2006) desarrolla una tesis doctoral en la Universidad de Alicante sobre el análisis de la comprensión de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. En esta investigación, el autor se plantea dos objetivos centrales. El primero es estudiar las formas de conocer la divisibilidad en el conjunto de los números naturales y los mecanismos que utilizan los alumnos de 12 a 17 años, usando el marco teórico constructivista *Action-Process-Object-Schema* (APOS). El segundo objetivo es caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de divisibilidad en el conjunto de los números naturales en alumnos de 12 a 17 años. Para el logro de los objetivos, realiza un análisis psicométrico a las respuestas de 94 estudiantes (1º de ESO, 4º de ESO y 1º de bachillerato) a un cuestionario piloto que aplicó y seis entrevistas clínicas. A partir de estos resultados, construye el cuestionario definitivo, que lo aplicó a 371 estudiantes distribuidos en los tres ciclos de educación secundaria 1º de ESO (120), 4º de ESO (137) y 1º de bachillerato (114) de centros públicos de las provincias de Alicante y Valencia. También realizó entrevistas a 63 alumnos de este mismo grupo. Entre los resultados de esta investigación, destacamos el análisis psicométrico del instrumento sobre divisibilidad y que los elementos del esquema de divisibilidad se caracterizan principalmente porque los alumnos vinculan la divisibilidad a los diferentes modos de representación.

Roig, Llinares y Penalva (2010) realizan una investigación con 71 estudiantes del último curso de educación secundaria obligatoria (15-16 años). El objetivo de esta investigación es caracterizar el proceso de construcción del concepto de múltiplo común de dos números naturales como parte del esquema de divisibilidad en estudiantes de educación secundaria. Los resultados de esta investigación aportan información sobre la construcción del significado por parte de los alumnos de la idea de múltiplo común y de la estructura multiplicativa en el conjunto de los números naturales. Entre las líneas de investigación abiertas que plantean estos autores está la realización de estudios en los cuales se centre la atención en la relación entre el algoritmo de cálculo del mínimo común múltiplo, basado en la descomposición factorial de los números, y el significado de la idea de múltiplo.

Centradas en la importancia de las representaciones

Zazkis y Campbell (1996b) estudian los aspectos procedimentales y conceptuales en la comprensión de maestros en formación del teorema fundamental de la aritmética. Recogieron los datos por medio de un cuestionario y de entrevistas individuales. Los resultados sugieren que la idea de unicidad de la descomposición prima es muy difícil de comprender. Estos autores plantean como hipótesis que muchos maestros en formación están familiarizados con el teorema, puede enunciar y explicar su significado, pero no lo aplican en diferentes situaciones de resolución de problemas. El objetivo de este estudio es investigar este fenómeno específico, con el fin de contribuir a una mejor comprensión pedagógica de la construcción del conocimiento de los números naturales y su estructura multiplicativa. Los datos obtenidos se basan en las respuestas presentadas por escrito de 54 maestros en formación voluntarios en tres preguntas del cuestionario y en las subsiguientes entrevistas clínicas que se llevaron a cabo después de que los temas de la teoría elemental de números estaban cubiertos en el curso llamado *Foundations of Mathematics for Teachers*. En este curso, incluyen temas tales como números primos y compuestos, árbol de factores, la descomposición de factores primos y teorema fundamental de la aritmética, divisibilidad y reglas de divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, entre otros. Las tres preguntas de evaluación se administraron en tres ocasiones en un período de 2 semanas de tiempo y los participantes no estaban restringidos en el tiempo para dar respuesta a las cuestiones planteadas. Entre los resultados estos investigadores señalan que se debe prestar atención pedagógica a la descomposición en factores de un número y a la descomposición en factores primos. Esta diferencia entre las dos descomposiciones suele confundir a los maestros en formación sobre la unicidad del teorema fundamental de la aritmética. Señalan que puede darse el caso que esta dificultad se deriva de las experiencias previas de los alumnos de expresar números compuestos como productos.

Entre las conclusiones, destacan que si los conceptos de números primos y compuestos no se han construido adecuadamente, probablemente inhiban cualquier conceptualización significativa de descomposición factorial. Además, plantean que una adecuada comprensión del concepto de descomposición factorial es central para la comprensión de la estructura de números enteros.

Zazkis y Gadowsky (2001) destacan diferentes características de las representaciones de los números naturales en tareas de teoría de números. Estudiaron tres tipos de representaciones: las representaciones en factores, las representaciones fundamentadas en el algoritmo de la división y las representaciones basadas en la propiedad distributiva (véase figura 2.7). Trabajaron con maestros en formación y con alumnos de enseñanza media. En las tres representaciones los participantes prefirieron determinar el valor del número en su representación posicional de base diez y hacer una operación aritmética para decidir.

Attending to Factors and Multiples

Consider the number $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. Is M divisible by 7?

Attending to the Structure of the Division Algorithm

Consider the number $K = 6 \times 147 + 1$. What is the quotient and the remainder in the division of K by 6?

Recognizing Perfect and Imperfect Squares

Is 71^2 a perfect square?
Naturally, It is represented as such.
Is 71^6 a perfect square?

Attending to Distributivity

Consider the number $A = 15 \times 5623 + 60$. Can you represent it as a multiple of 15?

Figura 2.7. Cuestiones sobre los tipos de representación (Zazkis y Gadowsky, 2001, pp. 45-47)

Para el caso de las cuestiones cuya representación fue dada en factores, los participantes determinaron el valor de M y luego dividieron para responder. En las cuestiones dadas por la representación fundamentada en el algoritmo de la división la preferencia de los participantes fue determinar la representación decimal de K y hacer la división y en las cuestiones con representaciones basadas en la propiedad distributiva obtuvieron el valor de A en su representación decimal y dividían por 15 para responder. Entre las conclusiones, las autoras refieren que en la escuela se da mayor énfasis a los cálculos en detrimento del estudio de la estructura y de las características de las representaciones de los números. Advierten sobre la necesidad de estudiar las representaciones de los números. Plantean que se expongan en diferentes expresiones y situaciones estimulando a los alumnos con representaciones que excedan a las capacidades de cálculo de las calculadoras. Expresan que la elección de actividades con esas características puede ayudar a los estudiantes en la comprensión de las propiedades de los números naturales en especial de la estructura multiplicativa.

Brown (2002) estudia las dificultades que tienen los maestros en formación para encontrar múltiplos comunes entre números descompuestos en factores primos. Presenta una secuencia de números representados en descomposición de factores primos y pregunta a los alumnos por otros términos de la secuencia. La secuencia numérica presentada es: $2^2 \times 3^4$, $2^3 \times 3^4$, $2^2 \times 3^5$, $2^4 \times 3^5$, $2^4 \times 3^4$, $2^3 \times 3^5$, ..., a partir de la cual se pidió a los estudiantes que buscaran los seis términos siguientes y que expresaran, en producto de factores primos, el término que ocupaba la posición 200, y, describir mediante la representación en factores primos el método de obtención del término enésimo. En los resultados de esta investigación se reporta que la mayoría de los estudiantes obtienen la representación decimal de los números y, posteriormente, buscaban la representación en factores primos para ofrecer la respuesta.

Zazkis y Liljedahl (2004) estudian el papel de la representación en la comprensión de los números primos por parte de los estudiantes para maestros de escuela elemental (maestros en formación). La representación de las propiedades de los números sirvió como "lente" para el análisis de las respuestas dadas por los participantes. Los autores sugieren que la falta de una representación transparente para un número primo puede ser un obstáculo para la comprensión de este concepto. Las autores plantean que la comprensión de los estudiantes sobre los números primos está conectada a la comprensión de las relaciones multiplicativas entre números naturales, factores, múltiplos, números compuestos y divisibilidad. Estos autores expresan que la comprensión del concepto de número primo por un maestro de escuela primaria debe incluir al menos tres aspectos: (a) la conciencia de que cualquier número natural mayor que uno es primo o compuesto y la capacidad de distinguir y explicar la definición de un número primo, (b) entender que si un número se representa como un producto entonces es compuesto a menos que los factores sean la unidad y un primo y (c) la conciencia de que los números compuestos tienen una descomposición prima única y que el número de primos es infinito (aunque no necesariamente estén en la capacidad de proporcionar una prueba matemática formal para estas afirmaciones). El objetivo de esta investigación es establecer la influencia que ejerce la representación factorial en las respuestas de los estudiantes. Para el logro de este objetivo plantearon tres cuestiones (véase figura 2.8) y estudiaron las respuestas de los estudiantes.

(1) How do you describe a prime number? A composite number? What is the relationship between prime and composite numbers?

(2) Consider $F = 151 \times 157$. Is F a prime number? Circle YES/NO, and explain your decision.

(3) Consider $m(2k + 1)$, where m and k are whole numbers. Is this number prime? Can it ever be prime?

Figura 2.8. Cuestiones sobre número primo y representaciones (Zazkis y Liljedahl, 2004, pp. 169-170)

Entre las conclusiones, estos autores señalan que los estudiantes pueden conocer la definición de número primo y sin embargo no ser capaces de utilizar este conocimiento en una situación problema. Adicionalmente afirman que una forma de construir una comprensión adecuada del concepto de número primo está relacionada con la descomposición factorial de los números. Indican que es necesario involucrar a los estudiantes en la consideración de grandes números que van más allá de la capacidad de cálculo de una calculadora de bolsillo. En esta afirmación coinciden con el trabajo Zazkis y Gadowsky (2001) descrito anteriormente.

2.2. Reflexiones

Si consideramos que los tópicos sobre teoría de números han estado presentes en el currículo español por algo más de un siglo y, que aún mantienen vigencia en los documentos oficiales, podemos afirmar que se ha investigado muy poco sobre el tema. Probablemente este hecho significativo tenga que ver con ciertas interpretaciones sobre estos tópicos. Por ejemplo, considerar la divisibilidad asociada exclusivamente a la operación aritmética de dividir, tal como en el cuestionamiento que hizo el grupo de maestros en formación que participó en la investigación de Zazkis, Sinclair y Lildejalh (2013) y que hemos descrito anteriormente.

El conjunto de investigaciones descritas anteriormente nos permiten tener un acercamiento al estado de la cuestión sobre la divisibilidad y maestros en formación. En ese sentido, podemos indicar que la mayoría de las investigaciones a las que hemos hecho referencia anteriormente sobre tópicos de teoría de números y maestros en formación han tratado de caracterizar la comprensión de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales utilizando el marco teórico *Action-Process-Object-Schema* (APOS). En estas investigaciones, el centro de estudio está focalizado en el sujeto y en la descripción de la construcción de los conceptos asociados a la divisibilidad, pero no da cuenta del proceso formativo que han seguido. En ese sentido la reflexión hecha por Feldman (2012) en la cual plantea que en investigaciones futuras, sobre comprensión de tópicos de teoría de números con maestros en formación, debe prestarse atención al trabajo que los mismos desarrollan durante los periodos de instrucción en el aula, cobra importancia para en el desarrollo de nuestra investigación.

Por otra parte, el conjunto de investigaciones a las que hemos hecho referencia y que han caracterizado la comprensión de la divisibilidad siguiendo el marco teórico *Action-Process-Object-Scheme* (APOS), han clasificado a los sujetos en conjuntos discretos {A}, {P}, {O}, {S}, según su nivel de comprensión (*Action-Process-Object-Scheme),* y, por ser esta clasificación discreta, se pierde la idea de proximidad entre los conjuntos, es decir, que la información entre los niveles, si existiera, queda oculta; no se puede determinar. Así por ejemplo, si un estudiante ha sido clasificado en el nivel A no podemos saber que tanto se aproxima al nivel P, o que tanto se aleja de el. La única información es que está ubicado en un nivel determinado. No pretendemos, con esto, hacer una crítica a este marco teórico. Naturalmente los resultados que presentan estas investigaciones son coherentes con el marco teórico que fueron analizadas.

En estas investigaciones existe un consenso sobre la necesidad de comprender la descomposición en factores primos y la conexión entre la representación decimal y factorial. Pero nos preguntamos ¿qué significa comprender la descomposición factorial?, ¿es solo un algoritmo o es algo más?, ¿qué equivalencias entre números se pueden establecer que sean diferentes a la decimal y factorial?, ¿qué operaciones se pueden definir entre sistemas de representación?.

Con respecto a las operaciones aritméticas de multiplicación y división, en la divisibilidad, entre los autores de las investigaciones señaladas no hay un consenso sobre el orden de las mismas. Algunos autores como Zazkis y Campbell (1996a) establecen el mismo nivel de importancia para ambas operaciones en su caracterización, mientras que Brown et al. (2002) establecen prioridades en estas operaciones aritméticas.

Tomando en cuenta los resultados de las investigaciones previas sobre divisibilidad, las líneas abiertas de estas investigaciones, nuestra experiencia en docencia, investigación y en formación de profesores, nos planteamos diseñar e implementar una secuencia de trabajo, en la cual, consideramos la divisibilidad como una relación y no como una operación aritmética. En esta secuencia de trabajo definimos la estructura conceptual de la divisibilidad, establecemos los sistemas de representación asociados a la divisibilidad y concretamos las operaciones que los maestros en formación realizan sobre los diferentes sistemas de representación; como parte de los significados que ponen de manifiesto durante el desarrollo de la secuencia de trabajo. También consideramos los fenómenos matemáticos que los maestros en formación asocian a un contexto determinado y a una subestructura matemática.

Capítulo 3. Marco teórico

[...] Sobre esta facultad mental de comparar una cosa w con una cosa w', o relacionar w con w', o hacer corresponder a w w', sin la cual no es posible en absoluto pensar, descansa también, como intentaré demostrar en otro lugar, la ciencia entera de los números. Richard Dedekind (1831-1916)

Nuestro trabajo se fundamenta en dos pilares: la divisibilidad como conocimiento matemático en el contexto de la formación de profesores y el análisis didáctico. Esta investigación forma parte del grupo de investigaciones desarrolladas en el seno del grupo de investigación "FQM-193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. En ese sentido, asumimos el análisis didáctico desde la perspectiva teórica desarrollada por este grupo (Cañadas y Castro, 2013; Gómez, 2007; Gómez y Cañadas, 2012; Lupiáñez, 2009; Rico, 2013a, 2013b; Rico y Fernández-Cano, 2013, Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

Este capítulo lo organizamos en cuatro partes. En la primera parte presentamos el contenido matemático de la divisibilidad visto desde la ciencia matemática, en la segunda parte el contexto formación de profesores, en la tercera parte describimos los cinco análisis que conforman el análisis didáctico y finalmente desarrollamos el análisis de contenido del análisis didáctico para interpretar los significados de un concepto de las matemáticas escolares.

3.1. Divisibilidad en el anillo de los enteros

Abordamos aquí los focos de contenido matemático de este trabajo. La consulta de los términos divisibilidad, divisible, divisor, factor, múltiplo, número compuesto, número primo y teorema de la factorización única (teorema fundamental de la aritmética). La evolución histórica de la teoría de la divisibilidad, como era concebida y como se fue desarrollando en el tiempo, con los nuevos descubrimientos matemáticos que en cada época surgían. Los significados que le han sido asignados o atribuidos en el transcurso de los años nos permiten tener un acercamiento a estos conceptos desde su evolución histórica, para profundizar sobre la comprensión de la divisibilidad. También abordamos el origen de la divisibilidad desde los Elementos de Euclides. Posteriormente concretamos los términos y las definiciones de la divisibilidad que utilizamos en esa investigación con maestros en formación.

Conceptos y términos básicos

En este apartado identificamos algunos términos y conceptos relacionados con la divisibilidad en diccionarios de matemáticas y en libros especializados de teoría de números.

El diccionario de matemáticas de Vera (1960) que define divisibilidad numérica y plantea un conjunto de teoremas en los que se funda la divisibilidad.

Divisibilidad numérica

Parte de la aritmética que estudia las condiciones que debe satisfacer un número para ser divisible por otro, es decir: para que el cociente de su división sea exacto. Los teoremas en que se funda la divisibilidad aritmética son los siguientes:

1. T1. Si un número divide a varios, divide a su suma. De este teorema se derivan los corolarios:
   1º. Si un número divide a otro, divide a sus múltiplos.
   2º. Si un número divide a otro, también divide a sus potencias
2. T2. Si un número divide a dos, divide a su diferencia. De este teorema se derivan los corolarios
   1º. Si un número divide al dividendo y al divisor, divide al resto por defecto y por exceso de la división.
   2º. Si divide al divisor y al resto por defecto o por exceso, divide al dividendo.
   3º. Si un número divide al dividendo y al resto por defecto y por exceso, divide también al producto del divisor por el cociente.
3. T3. Si un número no divide a varios, dividirá, no obstante a su suma, si divide a la suma de los restos que den los sumandos.
4. T4. si un número divide a uno de los sumandos de una suma y no divide al otro, tampoco divide a la suma y el resto de la división es el sumando no divisible.
5. T5. Si un número no divide al minuendo ni al sustraendo de una sustracción, sustracción divide a la diferencia si los restos de sus términos son iguales.

6. T6. Si un número divide al minuendo-sustraendo de una sustracción y no divide al sustraendo-minuendo tampoco divide a la diferencia y el resto de la división es la diferencia-el mismo que entre el divisor y el resto del sustraendo-da el minuendo.
7. T7. Si un número no divide a varios, divide a su producto si divide al producto de los restos de los factores (pp. 181-183).

Divisible
Que se puede dividir en partes iguales (p. 183).

Divisor
Número que divide a otro. Factor. Submúltiplo.

I. Para que un número sea divisor de otro es necesario y suficiente que no contenga ningún factor primo que no esté contenido en el que ha de ser divisible y que ninguno esté elevado a mayor potencia.

En efecto, si a es el número que divide a n, se tiene:

$$n=aq$$

y para que se verifique esta igualdad es necesario:

1º. Que a no contenga ningún factor primo distinto de los que hay en n, pues si lo contuviera, este factor dividiría al primer miembro de la igualdad anterior y al segundo no.

2º. Que a no contenga factores primos elevados a mayores potencias que los de n, pues resultaría el mismo absurdo que en el caso anterior.

Estas condiciones son también suficientes porque conteniendo n todos los factores de a elevados por lo menos a una potencia igual a la que en a tienen, siempre podremos descomponer n en un producto de dos factores: uno, el formado por todos los factores de a, es decir: el mismo número a, y otro, el formado por todos los factores restantes de n.

II. Si queremos encontrar todos los divisores de un número

$$n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}$$

descompuesto en sus factores primos, resulta que si formamos el producto

$$\begin{aligned}&(1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha})\\ &\times(1+b+b^2+\ldots.+b^{\beta})\\ &\times(1+c+c^2+\ldots.+c^{\gamma})\\ &\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\times(1+l+l^2+\ldots..+l^{\lambda})\end{aligned}\qquad[1]$$

un término cualquiera de este producto es del tipo

$$a^i b^j c^k \ldots l^h,\qquad[2]$$

pudiendo ser nulos algunos exponentes; y siendo

$$i \leq \alpha,\ j \leq \beta\ ,\ k \leq \gamma,\ \dots,\ h \leq \lambda$$

y, por tanto, satisfaciéndose las condiciones [I], es [2] un divisor de n, y recíprocamente, todo divisor de n no puede contener factores distintos de los a, b, .., l, luego es de la forma [2].

III. De aquí se deduce que para obtener todos los divisores de n, se escriben en una fila la unidad y las potencias sucesivas de a hasta a^{α}; luego se multiplican estos números por b, b^2, b^3,..., b^{β}; después se forman los productos de estos números por c, c^2, c^3,..., c^{γ}, y así se continúa hasta multiplicar por l^{λ}

IV. Un número tiene tantos divisores como unidades el producto de los exponentes de las potencias de sus factores primos aumentados en una unidad. (pp. 191-193)

Divisor elemental

El número mayor que la unidad que divide a otro (p. 193)

Factor

Cada uno de los términos de un producto. Multiplicador. Divisor. Submúltiplo (p. 263)

Número compuesto

El que tiene un divisor distinto de él mismo y de la unidad. Todo número compuesto se puede descomponer de un modo único en producto de factores primos (p. 471)

Número primo

El que solo es divisible por él mismo y la por unidad, como el 5, 17, 23, etc. De aquí se deduce que:

1º. El divisor elemental de un número n es primo.
2º. Un número primo es primo con todos los números excepto con sus múltiplos.
3º. Un número primo es primo con todos los números menores que él.
4º. Dos números consecutivos son primos entre sí.
5º. Dos números que no son primos entre sí, admiten un factor primo común.

Además de estas propiedades inmediatas, los números primos tienen las siguientes, que son fundamentales en la teoría:

I. Todo número primo que divide a un producto de varios factores, divide por lo menos a uno de ellos.
II. De aquí resulta:
   a) Todo número primo que divide a una potencia, divide a la base.
   b) Las potencias de los números primos entre sí, son primas entre sí.

III. Todo número primo con los factores de un producto es primo con éste.
IV. La sucesión de los números primos es ilimitada.
V. Un número es primo cuando no es divisible por ninguno de los números primos cuyos cuadrados no le superan (p. 481).

El diccionario razonado de matemáticas de Warusfel (1972) se refiere a la divisibilidad como una relación de orden parcial en los números naturales.

Divisibilidad
[1] La relación de divisibilidad que se expresa de la forma $a|b$ (a divide a b), se define en el conjunto N de los número naturales, y con frecuencia en Z, anillo de los números enteros. Por definición $a|b$ si existe un número entero c tal que $b{=}a{\times}c$, a es un divisor de b, el cual es múltiplo de a. Esta relación es una relación de orden parcial.
[2] Existe un cierto número de teoremas sobre la divisibilidad. Citemos primero los criterios válidos en el sistema decimal de numeración:

1. n es divisible por 2 si termina por 0, 2,4,6 u 8.
2. n es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.
3. n es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 (por ejemplo, 324, 109.728, etc.).
4. n es divisible por 5 si acaba en 0 o 5.
5. n es divisible por 8 si sus tres últimas cifras constituyen un múltiplo de 8.
6. n es divisible por 9 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9 (por ejemplo, 37.521: $3{+}7{+}5{+}2{+}1{=}18{=}9{\times}2$).

[3] Todas las recíprocas de estas leyes son ciertas; son características.
Número primo
Un número primo es un número natural p que no es divisible más que por 1 y por p. Un número no primo es compuesto.

Teorema fundamental de la aritmética
Siendo primo el menor divisor de un número, todo número puede escribirse de forma única como producto de factores primos (eventualmente elevados a una cierta potencia) (pp. 170-176).

El diccionario de Valiente (1988) está dirigido a nivel de bachillerato.

Divisibilidad
[Reglas de divisibilidad] (p. 77)

Divisor
Operador de una división que indica en cuántas partes iguales va a ser dividido el dividendo. Uno de los factores de una multiplicación (p. 78).

Divisores de un número
Todos y cada uno de los números naturales que dividen exactamente a un número propuesto. Todo número admite en principio como divisor a la unidad y al mismo número, pero si únicamente admite esos dos divisores, el número se llama primo (p. 79).

Factores de un número
Factores en que se puede descomponer un número. Ejemplos: como 24 $=6\times4$, 6 y 4 son factores de 24, como $18=2\times9$, 2 y 9 son factores de 18 (p. 103).

Factores primos
Factores en lo que se puede descomponer un número natural, siendo cada uno de ellos un número primo. Toda factorización (descomposición) de un número en sus factores primos es única (p. 103).

Número primo
[Número simple] [Número absoluto]. Número natural mayor que uno y que solo admite dos divisores; el mismo y la unidad (p. 176).

Número compuesto
Número que tiene, al menos, un divisor distinto de la unidad y de sí mismo (p. 176).

Otro diccionario que consultamos fue la traducción al español de Verlag (1977).

Divisibilidad de números
Un número natural n es divisible por el natural m precisamente si existe un número natural k, de forma que sea $n=k\times m$. La divisibilidad con resto ("módulo" un número) es de gran significado en el álgebra moderna o la teoría de números (p. 76).

Divisor
[1] El número por el cual se divide al hacer una división.
[2] Un número natural a se dice divisor del número natural b si, en la igualdad $b=m\times a$, m es un número natural. En este caso, b es un múltiplo de a (p. 77).

Factor
Se dice de las magnitudes que componen un producto (p. 94).

Factores primos
Los números primos que componen multiplicativamente un número no primo. Todo número natural solo puede representarse de una única forma como producto de factores primos (p. 94).

Múltiplo
[mínimo común múltiplo] (p. 141).

Número compuesto
Se dice de un número natural que puede representarse como producto de otros de otros número naturales; entonces posee, al menos, dos números naturales como divisores, distintos de 1 y de sí mismo. Los números primos no son números compuestos (p. 144).

Número primo
Todos los números enteros positivos (excepto el 1), que solo son divisibles (sin resto) por sí mismos y por 1. Hay infinitos números primos que, al avanzar en la serie de números naturales, se hacen cada vez más raros. Todos los números naturales se pueden descomponer de forma única en un producto de potencias de números primos (factores primos) (p. 147).

El diccionario de términos matemáticos de García (1992) plantea la divisibilidad como un conjunto de reglas generales.

Divisibilidad
Conjunto de reglas que permiten establecer si un número entero es divisible por otro, es decir, si lo contiene un número exacto de veces (p. 56).

Divisible
Cantidad que contiene a otra un número exacto de veces (p. 57).

Divisor
[1] Cantidad por la que ha de dividirse otra.
[2] Número por el que se divide el dividendo.
[3] También se denomina divisor, al denominador de una fracción, cuando se la toma como un cociente indicado (p. 58).

El diccionario de matemática de EGB a COU de Santamaría (1995) plantea los siguiente.

Divisibilidad
[Criterios] (p 134).

Divisible
Un número entero, a, es divisible por otro, b, si la división del valor absoluto de a entre el valor absoluto de b es exacta (p. 135).

Divisor
[1] Es uno de los elementos de la división que indica el número de veces por las que ha de dividirse el dividendo.

[2] El divisor de un número a es otro número b que está contenido un número exacto de veces , siendo a por lo tanto múltiplo de b (p. 144).

Factor
Es un número que multiplica. Los términos de la multiplicación, por tanto, se llaman factores (p. 164).

Factores primos
Son los factores que solo son divisibles entre ellos mismos y la unidad (p. 164).

Múltiplo
[1] Un número entero, a, es múltiplo de otro, b, si hay un número entero n que al multiplicarlo por b nos da a.

$$a{=}b\times n$$

A la vez se puede decir que a es divisible por b y que b es divisor de a, luego también puede ser definido como el número natural que contiene a otro un número exacto de veces, de tal manera que a es múltiplo de b si $b\times c{=}a$
[2] En las unidades del sistema métrico decimal se llama múltiplo a la unidad de medida mayor que la que se toma por unidad.
[3] Propiedades:

1º. Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.
2º. El cero es múltiplo de cualquier número natural.
3º. La suma de varios múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.
4º. La diferencia de dos múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número
5º. Si un número a es múltiplo de otro, b y b es múltiplo de otro c, entonces a es múltiplo de c.
6º. El conjunto de los múltiplos de un número es infinito y se obtiene multiplicando el número por la serie de los números naturales.
7º. El conjunto de los múltiplos comunes a dos o mas números es infinito.
8º. Si a es múltiplo común de dos o más números, $n\times a$ es también múltiplo común a esos números (p. 249).

Número compuesto
Es aquel que se puede descomponer en factores primos, es decir, tiene más de dos divisores (p. 253).

Número primo
Es todo número que solo es divisible por él mismo y por la unidad (p. 258).

El diccionario de matemáticas de la colección Oxford-Complutense de Clapham (1998) se plantea la divisibilidad en los siguientes términos.

Divisor
Sean a y b dos elementos de un anillo conmutativo, por ejemplo el de los enteros; se dice que a divide a b, o que a es un divisor de b, y que b es divisible por a, o que es un múltiplo de a, si existe otro elemento del anillo, c, tal que $a \times c = b$. Si el anillo no fuera conmutativo, hay divisores y múltiplos por la derecha y por la izquierda (p. 114).

Factor
Ver divisor (p. 143).

Múltiplo
Ver divisor (p. 243).

Número primo
Un entero positivo p es primo si $p \neq 1$ y sus únicos divisores positivos son 1 y él mismo (p. 286).

En el diccionario básico de matemáticas de Díaz (1980) editado por la editorial Anaya plantean la divisibilidad a partir de la expresión "contiene".

Divisibilidad
Reglas que permiten establecer si un número es divisible por otro, es decir, si lo contiene o no un número exacto de veces: tales reglas son las siguientes: un número es divisible por:

2, si termina en 0 o cifra par.

3, si lo es la suma de sus cifras.

4 y 25, si lo es el número formado por sus dos últimas cifras, o bien si termina en dos ceros.

5, si la última cifra es cero o cinco.

6, si lo es por dos y por tres.

8 y 125, si lo es el número formado por las tres últimas cifras o termina en tres ceros.

9, si lo es la suma de sus cifras.

11, si lo es la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y las cifras de lugar impar.

10, 100, 1000,... si termina en uno, dos, tres,...ceros.

Para que un número sea divisible por otro es necesario y suficiente que el primero contenga todos los factores primos del segundo con exponentes iguales o mayores (p. 54).

Divisible
[1] Que puede dividirse exactamente.
[2] Cantidad que contiene a otra exactamente un cierto número de veces (p. 54).

Factor
Cada uno de los términos que se multiplican por otro en una multiplicación (p. 68).

Factor primo
Factor de un número que es número primo (p. 68).

Número compuesto
Número que tiene más factores comunes que él mismo y la unidad; es decir, no es primo (p. 113).

Número primo
Número natural, que no es divisible más que por él mismo y la unidad (p. 114).

En el diccionario de matemáticas de Chambadal (1984) publicado por la editorial Grijalbo tarta la divisibilidad desde la estructura general de anillo íntegro.

Divisibilidad
Sea A un anillo integro. La relación binaria en A*=A-{0} definida por los pares (x,y) tales que x es divisor de y es relación de pre orden, llamada relación de divisibilidad y denotada por $x|y$ (p. 98).

Divisible
Ver divisor (p. 98).

Divisor
Sean a y b elementos de un anillo A. se dice que b es un divisor de a si existe un elemento q de A que a=$b\times q$. Se dice también que b divide a a, que a es divisible por b, o también que a es múltiplo de b (p. 98).

Múltiplo
Sean a un elemento de un monoide aditivo E y n un entero natural. Se llama múltiplo n-ésimo de a y se denota $n\times a$ el compuesto de una sucesión de n elementos iguales a a. Los elementos $2a$ y $3a$ se llaman doble y triple de a (p. 191).

Número primo
Elemento primo, o irreducible, del anillo Z de los enteros. Por ejemplo, 2 y 5 son números primos ; 1 y 4 no lo son (p. 219).

El libro de Apostol (1980) es un libro especializado en la teoría analítica de números y el tratamiento dado a la divisibilidad responde a una teoría bien elaborada y con conexiones entre los conceptos, propiedades y teoremas.

Divisibilidad

Diremos que d divide a n y escribiremos $d|n$ si $n{=}cd$ para un c. Diremos también que n es múltiplo de d, que d es un divisor de n, o que d es un factor de n. Si d no divide a n escribimos $d \nmid n$.

La divisibilidad establece una relación binaria entre enteros con las siguientes propiedades elementales. El conjunto de propiedades las llama teorema 1 y lo enuncia como sigue. La divisibilidad verifica las siguientes propiedades:

a) $n|n$ (propiedad reflexiva)
b) $d|n$ y $n|m$ implica $d|m$ (propiedad transitiva)
c) $d|n$ y $d|m$ implica que $d|(an{+}bm)$ (propiedad lineal)
d) $d|n$ implica $ad|an$ (propiedad de multiplicación)
e) $ad|an$ y $a \neq 0$ implica que $d|n$ (propiedad de simplificación)
f) $1|n$ (1 divide a todos los enteros)
g) $n|0$ (cada entero divide a cero)
h) $0|n$ implica que $n = 0$ (el cero solo divide al cero)
i) $d|n$ y $n \neq 0$ implica $|d| \leq |n|$ (propiedad de comparación)
j) $d|n$ y $n|d$ implica que $|d|{=}|n|$
k) $d|n$ y $d \neq 0$ implica $(n|d)|n$

Nota. Si $d|n$ entonces $n|d$ se llama el divisor conjugado de d (p. 16).

Números primos

Un número entero n se llama primo si $n > 1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si $n > 1$ y n no es primo, entonces se llama compuesto (p. 19).

Teoremas

- Teorema 2: Cada entero $n > 1$ o es primo o es producto de números primos
- Teorema 3: Euclides. Existe una infinidad de números primos.
- Teorema 4: Si un primo p divide a ab, entonces $p|a$ o $p|b$. En general, si un primo p divide a un producto $a_1 \ldots\ldots a_n$, entonces p divide a uno, por lo menos, de los factores.
- Teorema 5 (Teorema fundamental de la aritmética): Cada entero $n > 1$ se puede representar como el producto de factores primos de forma única, salvo el orden de los factores (p. 20).
- Teorema 6: Si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{ai}$, el conjunto de los divisores positivos de n es el conjunto de los números de la forma $\prod_{i=1}^{r} p_i^{ci}$, en donde $0 \leq c_i \leq a_i$, para $i = 1, 2, \ldots, r$ (p. 21).

Otro libro especializado que consultamos fue la traducción al español de Vinogradov (1977) que plantea como la teoría de la divisibilidad.

Conceptos y teoremas fundamentales

- La teoría de números se dedica al estudio de las propiedades de los números enteros. La suma, diferencia y producto de dos enteros a y b también serán enteros, pero el cociente de la división de a por b (si b es distinto de cero) puede ser tanto entero como no entero.
- Si el cociente de la división de a por b es entero, designándole con la letra q, se tiene $a{=}bq$, es decir, a es igual al producto de b por un entero. Diremos entonces que a es divisible por b o que b divide a a. En este caso, a se llama múltiplo de b y b se llama divisor de a. El hecho que b divide a a se escribe $b|a$.

Subsisten los dos teoremas siguientes:

1) Si a es múltiplo de m y m es múltiplo de b, a es múltiplo de b.
2) Si en una igualdad de la forma $k + l + ... + n = p + q + ... + s$, respecto de todos los términos, a excepción de uno cualquiera de ellos, se sabe que son múltiplos de b, entonces este término también es múltiplo de b.

- En el caso general, que incluye particularmente el caso en que a es divisible por b, se tiene el teorema: todo entero a se expresa de un modo único mediante un entero positivo b de la forma:

$$a = bq + r\ ; \quad 0\ \leq r \leq b \qquad \text{(pp. 13-14)}$$

Números primos

a) El número 1 solo tiene un divisor positivo, precisamente 1. En este sentido el número 1 en la sucesión de los números naturales, es particular. Todo entero mayor que 1 tiene al menos dos divisores, precisamente 1 y él mismo: si con estos divisores se agotan todos los divisores del número entero, este se llama primo. Un entero mayor que 1, que tenga además de 1 y de sí mismo otros divisores positivos, se llama compuesto.
b) El divisor menor, distinto de la unidad, de un entero mayor que la unidad, es un número primo.
c) El divisor menor, distinto de la unidad, de un número compuesto a (según b, tiene ser primo) no es superior a $\sqrt{a}$
d) La cantidad de números primos es infinita.

Unicidad de la descomposición en factores primos

a) Todo entero a, o es primo con un número primo dado p, o es divisible por p.
b) Si el producto de varios factores es divisible por p, al menos uno de los factores es divisible por p.

c) Todo entero, mayor que la unidad, se descompone en un producto de factores primos y, además de modo único, si no se tiene en cuenta el orden de los factores.
d) En la descomposición del número *a* en factores primos algunos de ellos pueden repetirse. Designando con las letras p_1, p_2, ..., p_k los primos distintos que figuran en dicha descomposición y con las letras α_1, α_2,.., α_k sus órdenes de multiplicidad en *a*, obtenemos la llamada descomposición canónica del número *a* en factores:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

e) Sea $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica del número *a*. Entonces todos los divisores de *a* son todos los números de la forma

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}; \qquad [1]$$

$$0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 , \quad 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2 , \dots , \quad 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$$

Recíprocamente, todo número *d* de la forma [1] es, evidentemente, un divisor de *a* (pp. 25-29).

El otro libro que consultamos fue la traducción al español del libro *Elementary Theory of Number;* LeVeque (1968). La divisibilidad, en este libro, es planteada como una consecuencia de la aplicación del algoritmo de Euclides en el conjunto de los números enteros.

Divisibilidad

Considérense *a* diferente de cero y *b* arbitraria. Entonces, si existe una *c* tal que $b=ac$, decimos que *a* divide a *b* o que *a* es un divisor de *b*, y se escribe $a|b$ (la negación se escribe $a \nmid b$).

Las siguientes proposiciones son consecuencias inmediatas de esta definición:

1. Para toda $a \neq 0$, $a|0$ y $a|a$. Para toda *b*, $\pm 1|b$.
2. Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.
3. Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(bx+cy)$ para cada *x*, *y*. (Si $a|b$ y $a|c$, se dice que *a* es un divisor común de *b* y *c*).
4. Si $a|b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$ (p. 27)

Teorema de factorización única

Todo entero $a > 1$ puede ser representado como un producto de uno o más primos. (Se acostumbra a admitir productos que contengan únicamente un factor y sumas que contengan únicamente un término en virtud de que esto simplifica los enunciados de los teoremas) (p. 31).

La generalización de la divisibilidad

Dedekind generaliza la definición de divisibilidad a partir de un nuevo tipo de objetos matemáticos; los ideales. Los ideales se definen en un anillo conmutativo y con elemento unidad, por ejemplo, en el anillo de los enteros Z. Para el caso particular de los enteros Z los ideales son de la forma aZ, es decir, son los múltiplos de cualquier entero.

Elementos asociados
Dos elementos x y x' se llaman asociados si difieren en factores unidad. En Z son asociados cada elemento y su opuesto.

Divisores: impropios, propios
Los divisores impropios son los elementos asociados y las unidades. Por ejemplo, los divisores impropios de 12 son: 12, -12., -1 y 1. Los divisores propios son todos los demás: 2, -2, 2, -3, 6 y -6.

Elemento irreducible
Un elemento x se dice que es irreducible si no tiene divisores propios y no es un elemento unidad. En el caso del conjunto Z el concepto de irreducible nos lleva al concepto de número primo que utilizamos en las matemáticas escolares.

En el caso de la divisibilidad generalizada, la expresión "2 divide a 6" es equivalente a decir que la clase de todos los enteros múltiplos de 2 contiene a la clase de todos los enteros múltiplos de 6. Si a y b son números enteros dados, la clase de todos los enteros múltiplos de a, contiene a la clase de todos los enteros múltiplos de b si, y solo si, a divide a b.

Para efectos de la divisibilidad generalizada las afirmaciones 3|6 y -3|6 son equivalentes, porque al ser 3 y -3 elementos asociados, es el ideal (3)=(-3) el que divide a 6 y no los número enteros 3 y -3. Podemos escribir entonces que (3)|6 [el ideal tres divide a seis].

Aproximación histórico-crítica
El desarrollo del concepto de número, a lo largo de los años, ha marcado el estudio de la divisibilidad. Con los griegos el estudio de la divisibilidad estuvo asociado a la medida y a la representación de un número como el segmento de recta. Por el descubrimiento de los inconmensurables por parte de los pitagóricos, al tratar de determinar la longitud de la diagonal del cuadrado cuyo lado mide la unidad, se conocía que no era posible representar todos los segmentos como números, sin embargo, si podían representar todo número (conocido por ellos) mediante un segmento de recta. Este resultado lo utiliza Euclides en los Elementos para representar un número.

Otro matemático griego que contribuyó al desarrollo de la aritmética fue Diofanto (siglo III d.C.). A diferencia de Euclides, Diofanto utilizó una representación alejada de la geométrica y más cercana a lo que posteriormente se desarrolló como álgebra.

Después de los matemáticos griegos Pitágoras (siglo VI a.C.), Euclides (siglo IV a.C.) y Diofanto (siglo III d.C.) el avance sobre el estudio de la aritmética cayó en un pronunciado letargo, hasta el siglo XVII que Pierre Fermat (1601-1665) y otros[1], estudian algunas traducciones sobre los libros de Diofanto y reconocen el valor del trabajo de este matemático griego. El trabajo de Fermat se sitúa en el contexto del avance en la matemática como resultado del estudio y desarrollo del cálculo y, de la geometría analítica.

El contexto sobre la definición de número, el avance de la matemática motivada por el cálculo y las representaciones dadas por el simbolismo algebraico, desarrollado, entre otros, por Viète[2] y Stevin[3] en el siglo XVI, constituyen un nuevo elemento para la interpretación y desarrollo de la aritmética de los griegos. Las ternas pitagóricas, números primos, la teoría de divisibilidad, entre otros temas, fueron abordados por Fermat.

Fermat planteó un teorema que se hizo famoso, último teorema de Fermat, por haber pasado cerca de 350 años sin que pudiera ser demostrado.

Después de Fermat, un siglo después, Euler[4] hace contribuciones importantes en la aritmética y en general a la matemática. Una de sus contribuciones generales a las matemáticas, entre otras, son las notaciones que utilizamos actualmente para representar series, números complejos, funciones, sumatorias de potencias, exponenciales, en las representaciones. "Euler descubrió relaciones sorprendentes entre el análisis y la teoría de números demostró que la divergencia de la serie armónica implica el teorema euclídeo de la existencia de infinitos primos" (Boyer, 1986, p. 561). En el siglo XVIII ya la aritmética que comenzó con los griegos tiene un rumbo diferente, con las herramientas del cálculo y el nacimiento del análisis, la aritmética toma la dirección de la teoría analítica de números. Aquí podemos hacer una diferenciación, dada por el uso de las herramientas del análisis en la aritmética. Así la teoría elemental de números se diferencia de la teoría analítica de números en el sentido de uso de o no de las herramientas del análisis en la resolución de problemas.

Dos matemáticos que hicieron aportes a la teoría de números, después de Euler, fueron el matemático italiano Joseph Lagrange (1736-1813) y el matemático francés Andrien Legendre (1752-1833). Entre los aportes más importantes de Lagrange a la teoría de números están algunas demostraciones sobre teoremas que fueron planteados por Fermat y que no fueron resueltos por Euler y en los aportes más importantes de Legendre está la publicación de un ensayo sobre teoría de números en el cual se plantea la representación de los números primos a través de la ley de reciprocidad cuadrática.

---

[1] Pierre de Carcavi (1600-1684), Marin Mersenne (1588-1648), Blaise Pascal (1623-1662).

[2] Matemático francés que vivió entre los años 1540-1603 y uno de los principales precursores del álgebra.

[3] Matemático belga que vivió entre los años 1548-1620. Reconoce los números negativos como raíces y coeficientes, utilizándolos como herramienta de cálculo (Maz, 2005).

[4] Matemático suizo que vivó entre los años 1707-1783

La aritmética o teoría de números hasta ahora no ofrecía un tipo de conocimiento estructurado más allá de una serie de resultados y demostraciones interesantes con algunos artificios ingeniosos. “En aritmética el problema correspondiente más sencillo es el de la resolución en términos enteros de las de ecuaciones de dos incógnitas con sus coeficientes enteros, y sobre él no hay nada que se acerque a una teoría completa” (Bell, 1985, p. 165).

El matemático Gauss (1777-1855), considerado uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, publica la obra llamada *Disquisitiones Arithmeticae* y sentó las bases de la teoría de números como una disciplina consistente. Gauss demuestra el teorema de factorización única (teorema fundamental de la aritmética) que Euclides en el siglo IV a.C. había hecho una aproximación con las demostraciones de las proposiciones 30, 31 y 32 del libro VII y con la demostración de la proposición 14 del libro IX. Otro aspecto que destacar de la obra de Gauss fue el estudio de las congruencias y de los números primos.

Con la generalización que hicieron de los números enteros racionales Gauss, Kummer (1810-1893), Dirichlet (1805-1859), Kronecker (1823-1891) y Dedekind (1831-1916) crearon nuevos números enteros: “los enteros gaussianos” y los “enteros algebraicos”, así como, la introducción por parte de Kummer y Dedekind en la aritmética del concepto de ideal, y con la creación de los “ideales” y la teoría de los ideales por parte de Dedekind se completa la generalización de la divisibilidad en un anillo.

Génesis epistemológica

Aunque civilizaciones muy antiguas como las situadas en Mesopotamia, Mesoamérica, India, China, tenían cierto conocimiento de los números y en general de las matemáticas son los griegos quienes le dan formalismo al conocimiento matemático y quienes inician el estudio de la aritmética.

Euclides, que vivó en el siglo IV a.C., demostró algunos teoremas sobre la divisibilidad que contribuyeron muchos siglos después en la construcción de la teoría de números y en la generalización de la aritmética, como hemos visto en el apartado anterior. De los trece libros que conforman la obra de Euclides tres están dedicados a la aritmética: los libros VII, VIII y IX.

En el libro VII hay en total 23 definiciones, de las cuales ocho están relacionadas con la divisibilidad.

1. Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas es llamada una (definición 1).
2. Un número es una pluralidad compuesta de unidades (definición 2).
3. Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor (definición 3).

4. Pero partes cuando no lo mide[5] (definición 4).
5. Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido[6] por el menor (definición 5).
6. Un número primo es el medido por la sola unidad (definición 12).
7. Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común (definición 13).
8. Número compuesto es el medido por algún número (definición 14) (pp. 112 -116).

De las 39 proposiciones del libro VII de los Elementos ocho están asociadas a la divisibilidad.

1. Dados dos números desiguales y restándoles sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí (proposición 1).
2. Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima (proposición 2).
3. Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor (proposición 4).
4. Todo número primo es primo con respecto a todo (número) al que no mide (proposición 29).
5. Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) y algún número primo mide a su producto, también medirá a uno de los iniciales (proposición 30).
6. Todo número compuesto es medido por algún número primo (proposición 31).
7. Todo número o es primo o es medido por algún primo (proposición 32).
8. Dados dos números, hallar el menor número al que miden (proposición 34) (pp. 111-156)

En el libro IX de los Elementos la proposición 14 establece que: "si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde un principio" (p. 218).

La ocho definiciones y las nueve proposiciones que hemos señalado de la obra de Euclides son el inicio del estudio de la divisibilidad y que han sido referencia en los trabajos posteriores, muchos siglos después, tal como hemos señalado anteriormente.

[5] Si por "parte" en la definición anterior se entiende una parte alícuota o submúltiplo, con el plural "partes", en esta definición, Euclides alude a un número de partes alícuotas o lo que nosotros llamamos una fracción propia. De modo que, por ejemplo, el número 2 es parte del número 6, pero el número 4 no es parte sino partes de este mismo número 6 [Nota de la traductora].

[6] La expresión "es medido" es el equivalente actual de es múltiplo.

La divisibilidad en nuestra investigación

Lo que hemos expuesto anteriormente sobre la divisibilidad en libros de texto (capítulo 1), en investigaciones realizadas (capítulo 2), en diccionarios de matemáticas y en libros de teoría de números, da cuenta que el estudio de la divisibilidad y los conceptos asociados a ella no siempre son definidos o tratados de la misma manera.

En algunos casos son tratados como elementos aislados o como un conjunto de términos que se definen y no se vinculan entre sí y habitualmente identificados con la división. Mientras que en otros casos la divisibilidad es tratada como un conjunto de términos, conceptos, propiedades y teoremas, con conexiones entre ellos que establecen una coherencia como estructura matemática y como una teoría en sí misma.

Como lo describimos en el capítulo 1, en nuestra investigación la divisibilidad la estudiamos desde el anillo de los enteros como una relación de orden (parcial) y no como una operación aritmética cuyo interés es determinar el resultado de la operación. En ese sentido vemos la divisibilidad como una teoría bien definida y elaborada, en la cual, definiciones, teoremas, propiedades están vinculadas entre sí y se pueden inferir unas de otras.

La divisibilidad en esta investigación la entendemos en los términos que plantea Dedekind; como una teoría general que se desarrolla en un anillo, en nuestro caso la restringimos al anillo de los enteros Z. Así mismo, en la planificación de las tareas del experimento de enseñanza hemos considerado el conjunto de los enteros positivos Z^+.

3.2. Formación de profesores

Existe un gran consenso sobre la importancia que representa la formación de profesores para la consecución de los fines educativos. Nuestro interés, en esta investigación, está dirigido al conocimiento que se construye en el proceso formativo con maestros en formación.

Shulman (1987) crea un modelo que integra el conocimiento del contenido con el conocimiento pedagógico. Centra la atención en el profesor (que debe enseñar un contenido) y describe el conocimiento del profesor a través de siete categorías: el conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines educativos.

A partir de los trabajos de Shulman (1986, 1987) se generan muchas investigaciones cuyos focos de interés son el conocimiento del profesor y los programas en los que él se desarrolla profesionalmente (Ball, 2004; Beijaard, Korthagen y Verloop, 2007; Bromme, 1994; Cavanagh y Garvey, 2012; Hill, Ball y Shilling, 2008; Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Hurrell, 2013).

En nuestro caso nos centramos en el conocimiento del contenido matemático, específicamente, en el conocimiento del contenido matemático escolar, de maestros en formación, en el dominio de la divisibilidad. Asumimos el conocimiento sobre un contenido matemático escolar "como el dominio de los significados matemáticos básicos de un contenido, necesarios para su trabajo profesional" (Rico, 2015, p. 31).

Existe una diferencia entre conocer los significados de un concepto matemático y conocer un concepto matemático. Conocer el concepto de divisibilidad, por ejemplo, es conocer su definición, sus propiedades y su utilización en la resolución de problemas, mientras que conocer el significado del concepto de divisibilidad requiere verlo desde la estructura matemática que la contiene, conocer sus diferentes formas de representación, conocer las diferentes aplicaciones y los sentidos con que se emplea. Conocer el significado de un concepto matemático es más complejo. "Este nivel de dominio marca el conocimiento del profesor sobre un contenido matemático" (Rico, 2015, p. 31). En el aparatado 3.4 abordamos los significados de un concepto matemático desde el análisis de contenido.

3.3. Análisis didáctico

La noción de análisis didáctico ha sido utilizada en España en la formación del profesorado, investigación y proyectos editoriales desde la década de los setenta, y, a partir de la década de los noventa se generan nuevas nociones que mejoran y desarrollan el análisis didáctico sobre el desarrollo de las bases teóricas de la didáctica de la matemática como disciplina científica (Rico, 2013).

La noción de análisis didáctico en didáctica de la matemática ha sido utilizada por diferentes autores y con sentidos diferentes: el análisis didáctico como un procedimiento metodológico, no empírico, (Gallardo y González, 2006; González, 1995; 1999) (véase figura 3.1), (2) el análisis didáctico como el análisis de los contenidos matemáticos (Puig, 1997; Puig y Cerdán, 1988) y (3) el análisis didáctico como un nivel de currículo de matemáticas y que puede ser utilizado para el diseño y desarrollo de unidades didácticas para la formación de profesores (Gómez, 2002, 2007, 2009; Rico, 1992, 1997b).

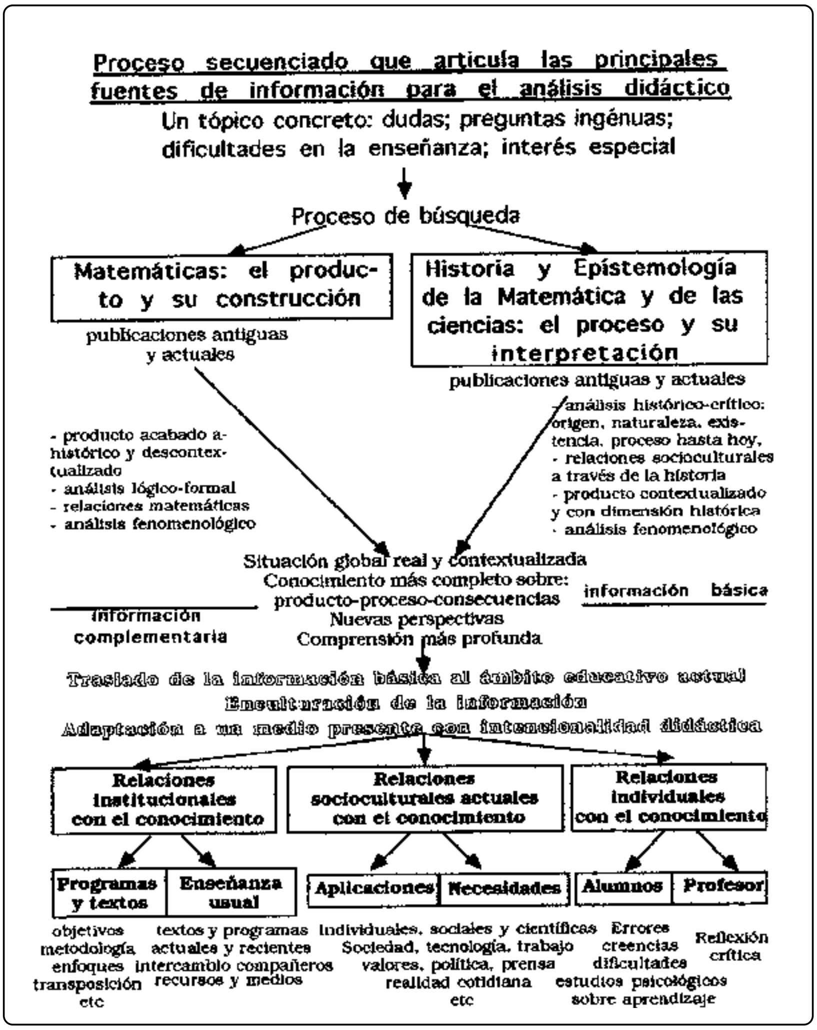


Figura 3.1. Esquema de aplicación práctica del análisis didáctico del contenido matemático. Fuente: (González, 1995)

Para Puig (1997) el análisis didáctico "es el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos" (p. 61).

Para Gómez (2007) el análisis didáctico esta compuesto por 4 etapas o análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (pp. 30-31). En la figura 3.2 mostramos el ciclo del análisis didáctico propuesto por Gómez (2007).

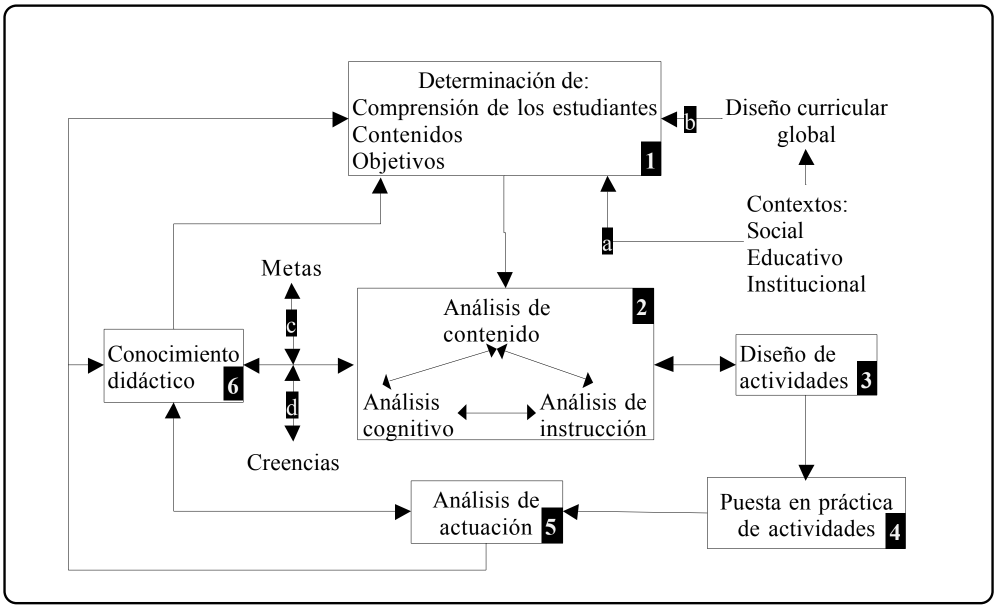


Figura 3.2. Ciclo de análisis didáctico. Fuente (Gómez 2007)

Para Rico y Fernández-Cano (2013) el análisis didáctico, desde la didáctica de la matemática,

> *es un procedimiento cíclico con cinco componentes: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo. Estas componentes acontecen de modo completo o parcial, transcurren de manera diacrónica o sincrónica y sostienen una dialéctica de análisis-síntesis* (p. 13).

El análisis didáctico se considera integrado por estos cinco análisis diferentes. Se diferencian en las categorías que emplean, esto es, los elementos organizadores que se ajustan a las dimensiones conceptual, cognitiva, formativa y social con la que Rico (1997a) ha estructurado la noción de currículo (Rico, 2012). Estas componentes del análisis didáctico han sido utilizadas en diversidad de investigaciones: como herramienta para analizar textos (Picado, 2012), diseño de experimentos de enseñanza (Valverde, 2012), identificar significados (Fernández-plaza, 2011, 2015; Ortiz, 2002; Vílchez, 2014), conocimientos didácticos de los contenidos matemáticos (Castro-Rodríguez, 2015).

En nuestra investigación abordamos el análisis didáctico desde la perspectiva planteada por Rico y Fernández-Cano (2013), consideramos dos de sus funciones: la curricular y la metodológica. Desde el ámbito curricular, como un método o técnica prescriptiva normativa que nos sirve de guía el la planificación de secuencias de aprendizaje y su posterior puesta en práctica en las sesiones del experimento de enseñanza (función curricular). Desde el ámbito investigador, nos permite describir e interpretar los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación cuando realizan las tareas que hemos propuesto (función metodológica).

Para la planificación y puesta en práctica de las secuencias de aprendizaje hemos realizado los cinco análisis que conforman el ciclo del análisis didáctico y para estudiar los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación hacemos uso del análisis de contenido desde los organizadores curriculares que se ponen de manifiesto en la realización de las tareas realizadas.

Ciclo del análisis didáctico

El ciclo del análisis didáctico está constituido por cinco análisis: (1) análisis conceptual, (2) análisis de contenido, (3) análisis cognitivo, (4) análisis de instrucción y (5) análisis evaluativo (véase figura 3.3).

> *El análisis conceptual y el análisis de contenido matemático que están en el comienzo del análisis didáctico, responden a una concepción reductiva o disgregadora, se propone establecer qué conocimientos se consideran, dar respuesta a la cuestión curricular inicial: ¿qué conocimientos?* (Rico y Fernández-Cano 2013, p. 16).

En ese sentido, el análisis conceptual y el análisis de contenido son considerados el inicio del ciclo. El análisis conceptual constituye una visión general y profunda del tema matemático a desarrollar, mientras que el análisis de contenido se elabora sobre la base del contenido matemático del currículo.

El análisis cognitivo, de instrucción y evaluativo se basan en las dimensiones del currículo descritas en Rico (1997a): cognitiva o de desarrollo, ética o formativa y la social, respectivamente.

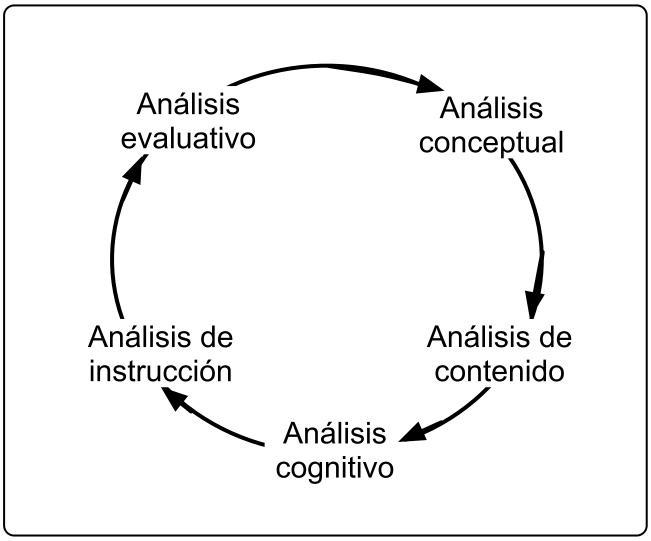


Figura 3.3. Ciclo del análisis didáctico. Fuente: (Rico y Fernández-Cano 2013)

Estructura del análisis didáctico

Cada uno de los análisis que conforman el ciclo dependen de diferentes elementos organizadores. Estos organizadores son las categorías de cada uno de los análisis del análisis didáctico. El conjunto de las categorías, fundamentadas en el marco curricular (organizadores del currículo), estructuran el procedimiento de análisis-síntesis llamado análisis didáctico.

El proceso que seguimos en cada componente del ciclo es de análisis-síntesis (véase figura 3.4). “A cada uno de los componentes del análisis didáctico le sigue el correspondiente proceso de síntesis, que recoge datos relevantes, a partir de los cuales cierra su ciclo y da paso al siguiente componente del análisis didáctico” (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 17).

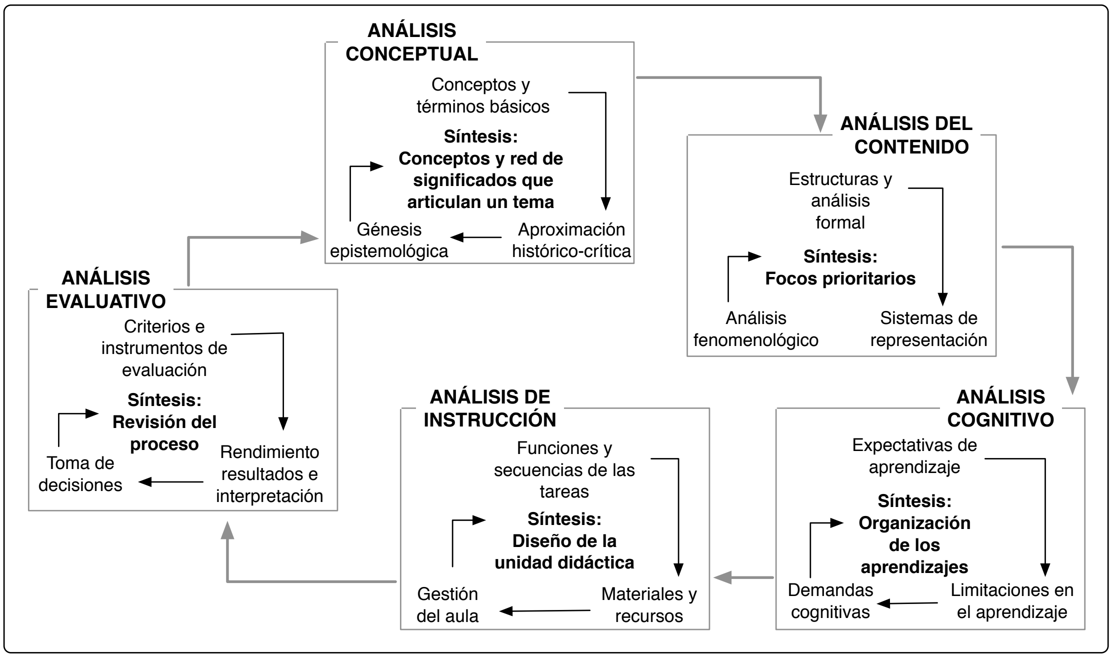


Figura 3.4. Estructura del análisis didáctico. Fuente: (Rico y Fernández-Cano 2013)

Cada uno de los análisis está compuesto de organizadores del currículo (Gómez y González 2013; Rico, 1997b). Un organizador del currículo es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática y permite analizar un tema de las matemáticas escolares con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997b).

En el análisis conceptual se compone de los organizadores del currículo: conceptos y términos, aproximación histórica crítica a esos conceptos y de una génesis epistemológica (véase figura 3.4). La reunión de estos tres organizadores sintetizan este análisis. El análisis de contenido está compuesto por los organizadores: estructuras y análisis formal, que en adelante denominaremos estructura conceptual, sistemas de representación y el análisis fenomenológico (véase figura 3.4). En el apartado 3.3 abordamos el análisis de contenido como una metodología para estudiar los significados. En el análisis cognitivo se concreta la organización de los aprendizajes y está compuesto por las expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y las demandas cognitivas. En el análisis de instrucción se establecen las secuencias de tareas, se definen materiales y recursos y la gestión general de aula. En el análisis evaluativo se sintetiza en la revisión del proceso, se establecen parámetros para evaluar y tomar decisiones.

3.4. Significado de un concepto en la matemática escolar

La palabra significado en el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001) tiene cuatro acepciones: (1) conocido, importante, reputado; (2) sentido de una palabra o de una frase; (3) cosa que se significa de algún modo; (4) concepto (representación mental). Esta última acepción como sinónimo de un concepto, entendiendo la palabra concepto como un representación mental, nos da una idea de la complejidad de estudiar el significado y de la necesidad de construir un marco que nos permita interpretar los significados de un concepto matemático.

La forma de acceder al significado que un estudiante posee acerca de un concepto matemático es mediante la comunicación; mediada por múltiples instrumentos (cuestionarios, entrevistas, observación de actuaciones, experiencia de aula, gestualidad, etc.) (Fernández-Plaza, 2015, p. 22). En el proceso de comunicación que ocurre en el aula de clase se negocian y materializan significados. Las discusiones y participaciones de los grupos forman parte de esta negociación de significados y una forma de materializarlos es a través de las producciones escritas de los estudiantes (Arias, 2014).

Siguiendo las ideas propuestas por Frege en el siglo diecinueve sobre el significado de un concepto desde el triángulo semántico, Rico y colaboradores hacen una aproximación a los significados de las matemáticas escolares. Esta aproximación de significado, en las matemáticas escolares, queda modelada por tres dimensiones, asociadas a los organizadores del currículo estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Gómez, 2007; Rico 2012; Rico, 1997b; Romero, 1997; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

El análisis de contenido está formado por los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología (modo de uso del concepto). En la figura 3.5 recogemos un esquema del análisis de contenido en el contexto del análisis didáctico y los elementos de los tres organizadores que utilizaremos como herramienta para el análisis de los significados de la divisibilidad.

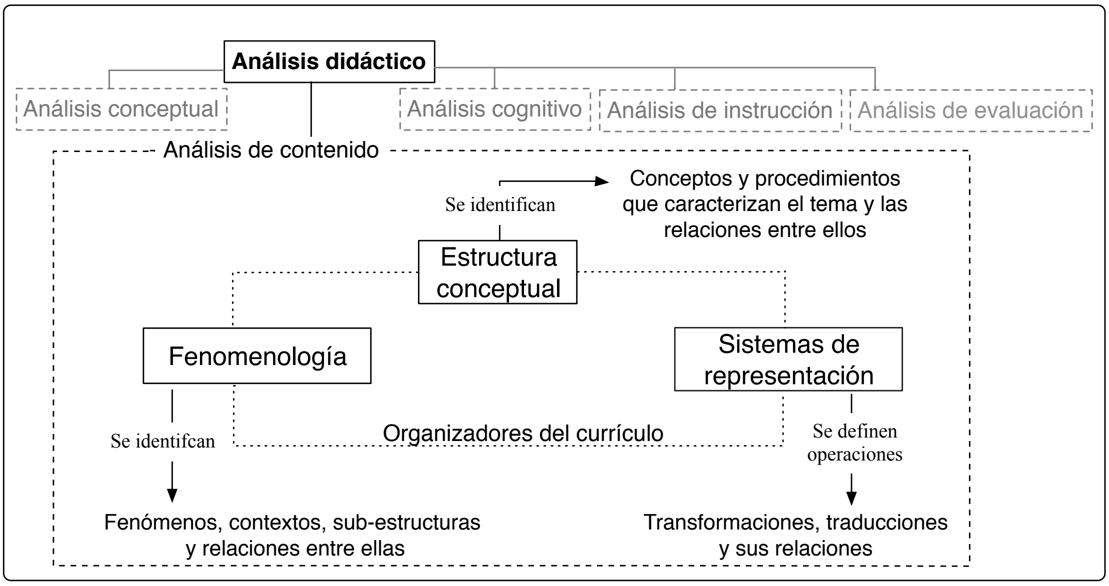


Figura 3.5. Análisis de contenido y organizadores del currículo

Estructura conceptual

Abordar los significados de un tema desde la perspectiva de su estructura conceptual consiste en identificar y organizar los conceptos y procedimientos que lo caracterizan y las relaciones entre ellos (Gómez, 2007). Para construir la estructura conceptual del tema, es necesario abordar dos dimensiones complementarias. Por un lado, considerar la estructura matemática de la cual el tema forma parte. Por otro, identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos. De acuerdo con el análisis didáctico, la primera dimensión permite delimitar las estructuras matemáticas a las que pertenece el concepto matemático y aquellas con las que se relaciona. La segunda dimensión permite entrar en un mayor nivel de detalle, es decir, profundizar en la propia estructura matemática que configura el concepto matemático.

Sistemas de representación

Las representaciones han sido objeto de estudio en la educación matemática desde distintos puntos de vista (Castro y Castro, 1997; Duval, 1993, 2006; Goldin y Janvier, 1998; Kaput, 1987, 1992, 1998; Kieran y Filloy, 1989). Sin embargo hay un acuerdo sobre la idea que un concepto matemático requiere de diversas representaciones para que pueda ser comprendido.

En este trabajo utilizamos la definición de sistemas de representación en el sentido expresado en Kaput (1992), como un sistema de reglas para: (a) identificar o crear signos, (b) operar sobre ellos y con ellos y (c) determinar relaciones entre ellos. Gómez (2007) hace una adaptación a la propuesta de Kaput (1992) sobre las actividades matemáticas que tienen lugar en el discurso del aula, al contexto de los sistemas de representación como dimensión del significado de un concepto matemático. Define cuatro categorías para caracterizar las operaciones que se pueden realizar sobre los signos que pertenecen a esos sistemas de representación (Gómez, 2007, p. 43).

De las cuatro operaciones (o relaciones) entre sistemas de representación que se consideran (Gómez, 2007), distinguimos dos tipos: traducción y transformación. La traducción se da cuando un mismo objeto es expresado, equivalentemente, en diferentes sistemas de representación. La transformación se da cuando el cambio de expresión se produce dentro del mismo sistema de representación. La transformación puede ser invariante o variante. La transformación invariante se caracteriza por escribir un objeto matemático en forma equivalente en el mismo sistema de representación. La transformación variante se caracteriza por el cambio que se produce en el objeto representado.

Los proceso de traducción, o transformación, entre distintas formas de expresión no son una cuestión trivial (Castro y Castro, 1997). En ese sentido, mostramos en la figura 3.6 el proceso de traducción y transformación de un objeto general.

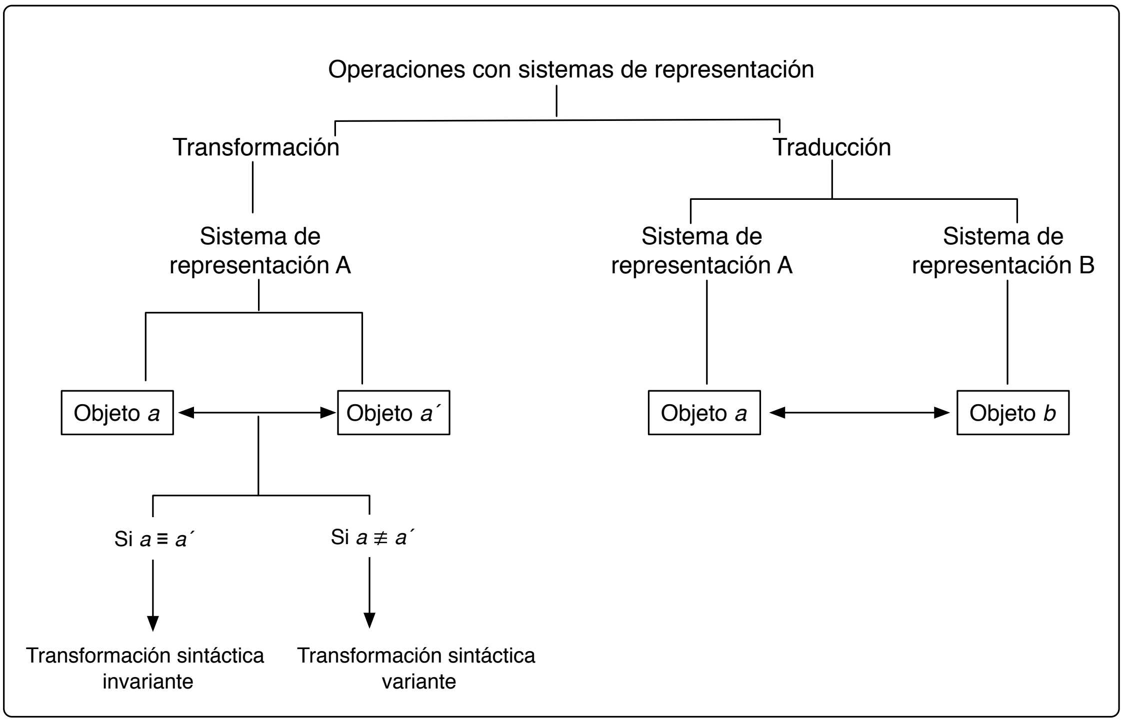


Figura 3.6. Operaciones con sistemas de representación

Fenomenología

En este apartado abordamos la fenomenología como la tercera componente del análisis de contenido para interpretar el significado de un concepto en las matemáticas escolares. Freudenthal (1983) hace una caracterización de la estructura multiplicativa en los números naturales. Plantea el estudio de la estructura multiplicativa $a{\times}b{=}c$ y asocia una cantidad de fenómenos que pueden ser modelados desde esta estructura. En esta investigación consideramos los fenómenos desde el contexto matemático, es decir, las relaciones matemáticas que se pueden generar desde esta estructura multiplicativa.

La fenomenología está caracterizada en el análisis de contenido por los fenómenos, contextos y la sub estructura matemática (véase figura 3.5). Cuando hacemos el análisis fenomenológico de una estructura matemática implica la identificación de las subestructuras correspondientes a esa estructura matemática, los fenómenos organizados por cada una de ellas y la relación entre subestructuras y fenómenos. Estableciéndose una relación de equivalencia en la cual cada una de las clases organiza los fenómenos en un contexto. En la figura 3.7 mostramos en un esquema esta relación.

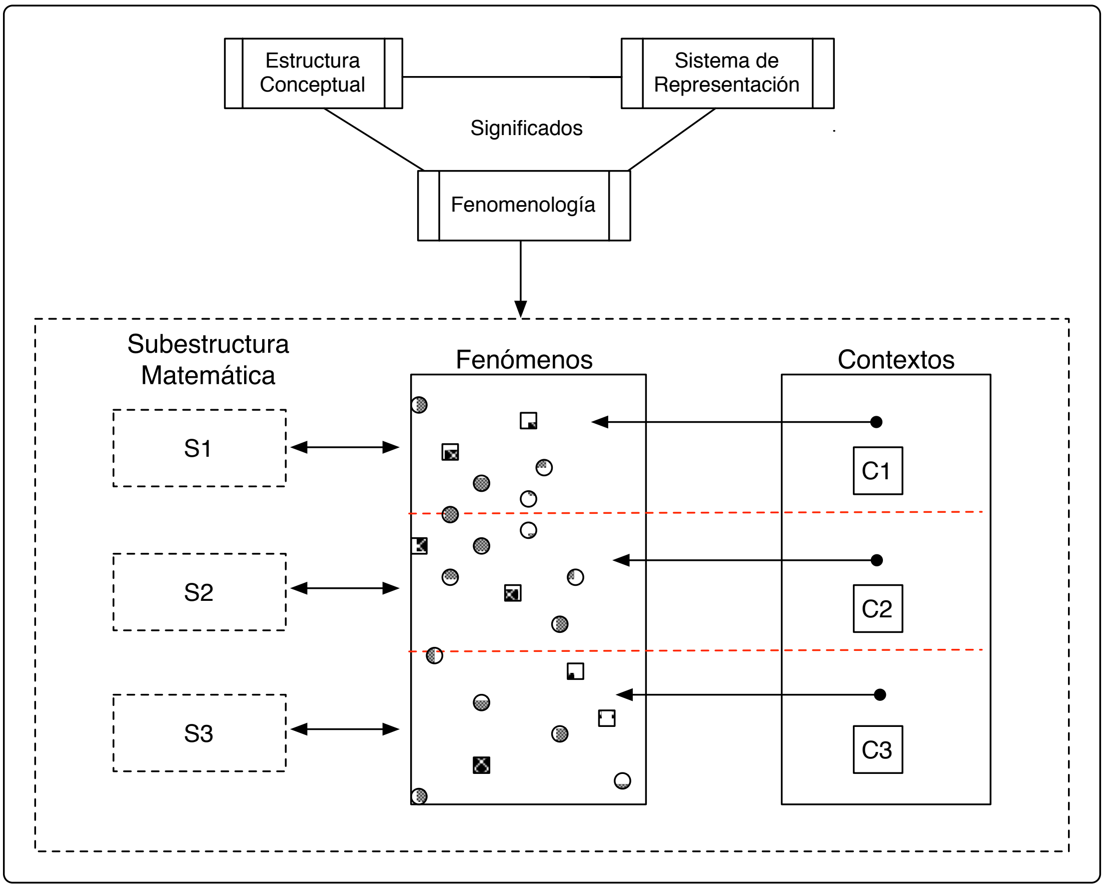


Figura 3.7. Proceso de análisis fenomenológico

Capítulo 4. Análisis didáctico de la divisibilidad

Empezamos por el fundamento de toda la aritmética: calcular con números enteros positivos. Aquí, como haremos siempre a lo largo de estas clases, nos plantearemos primero cómo se enseña este tema en las escuelas y luego examinaremos qué implica esto cuando se analiza desde un punto de vista superior
Félix Klein (1849-1925)

Consideramos la utilidad del análisis didáctico en dos sentidos: por una parte para la planificación, puesta en práctica y evaluación de la secuencia de trabajo implementada con los maestros en formación, y por otra parte, para explorar y describir los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación al realizar las tareas sobre divisibilidad. En nuestro estudio, tal y como lo describimos en el apartado 3.3 de esta memoria de tesis, hacemos referencia al análisis didáctico desde dos de sus funciones: curricular y de investigación.

Abordamos aspectos vinculados con el análisis didáctico desde su perspectiva curricular al diseñar las secuencias de trabajo con las que proyectamos promover el aprendizaje de la divisibilidad como relación de orden.

De los cinco análisis que componen el ciclo del análisis didáctico (Rico y Fernández-Cano, 2013), en este capítulo, hacemos referencia a tres de ellos: (1) el análisis de contenido, (2) el análisis cognitivo y (3) el análisis de instrucción. En cuanto al análisis conceptual ya lo hemos abordado en el apartado 3.1 de esta memoria de tesis. Allí hemos descrito los elementos conceptuales de la teoría de la divisibilidad en el anillo de los números enteros, hicimos una aproximación histórica-crítica y génesis epistemológica de la divisibilidad. En cuanto al análisis evaluativo lo abordamos en el capítulo 6 de esta memoria de tesis; en el que aludimos al análisis retrospectivo por sesiones y al análisis general.

Organizamos este capítulo en cuatro apartados. En el primer apartado, describimos los aspectos curriculares vinculados con los elementos sobre divisibilidad que abordamos en las sesiones de aula. Los tres apartados que siguen aluden al desarrollo de cada uno de los análisis considerados en este capítulo.

4.1. ASPECTOS CURRICULARES SOBRE DIVISIBILIDAD

Como hemos descrito en el planteamiento del problema, en el apartado 1.1, los contenidos de divisibilidad son abordados en la educación primaria y en la educación secundaria en el currículo español. También hemos puesto de manifiesto el contexto de nuestro estudio está en los lineamientos curriculares de la formación de maestros en elementos vinculados a la teoría de números en general y, en particular, a la divisibilidad. Dado que estos estudiantes provienen en su mayoría de una formación previa, recogemos en la tabla 4.1 un extracto de los contenidos sobre divisibilidad identificados en los textos en los niveles educativos previos a la formación de maestros y durante la misma que hemos destacado anteriormente.

Tabla 4.1
Contenidos sobre divisibilidad en el currículo

Contenidos	Currículo					
	EP	ES	MF	TP	TS	TM
Múltiplos	*	*	*	*	*	*
Divisores	*	*	*	*	*	*
Factores			*	*	*	*
Divisible			*	*	*	*
Relación de Divisibilidad	*	*	*	*	*	*
Números primos y compuestos	*	*	*	*	*	*
Criterios de divisibilidad		*	*	*	*	*
Descomposición en factores primos		*	*	*	*	*

Nota. EP = educación primaria; ES = educación secundaria; MF = maestros en formación; TP = textos de educación primaria; TP = textos de educación secundaria; TM = texto recomendado en la formación de maestros.

4.2. Análisis de contenido de divisibilidad

Con el propósito de identificar los diferentes significados asociados a la divisibilidad realizamos el análisis de contenido de este tópico. Siguiendo la propuesta de Gómez (2007), en este análisis ponemos en juego tres organizadores del currículo: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología (véase figura 3.5). En el apartado 3.4 de esta memoria de tesis, hemos descrito los aspectos conceptuales de cada uno de estos organizadores del currículo.

Estructura conceptual

Tal como lo pusimos de manifiesto en el apartado 3.4, abordar los significados de un tema desde la perspectiva de su estructura conceptual consiste en identificar y organizar los conceptos y procedimientos que lo caracterizan y las relaciones entre ellos (Gómez, 2007). Para construir la estructura conceptual del tema, es necesario abordar dos dimensiones complementarias. Por un lado, considerar la estructura matemática de la cual el tema forma parte, en este caso los números enteros. Por otro, identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos. De acuerdo con el análisis didáctico, la primera dimensión permite delimitar las estructuras matemáticas a las que pertenece la divisibilidad y aquellas con las que se relaciona. La segunda dimensión permite entrar en un mayor nivel de detalle, es decir, profundizar en la propia estructura matemática que configura la divisibilidad.

Estructuras matemáticas relacionadas con la divisibilidad (o que la contienen)
La divisibilidad como estructura matemática forma parte de una más amplia; la estructura matemática de los números enteros. En la figura 4.1 mostramos de manera general la estructura matemática de los números enteros. Igualmente, señalamos (con línea más gruesa, en la figura 4.1) los focos de contenido, ligados a los números enteros y la divisibilidad, que son objeto de nuestro estudio.

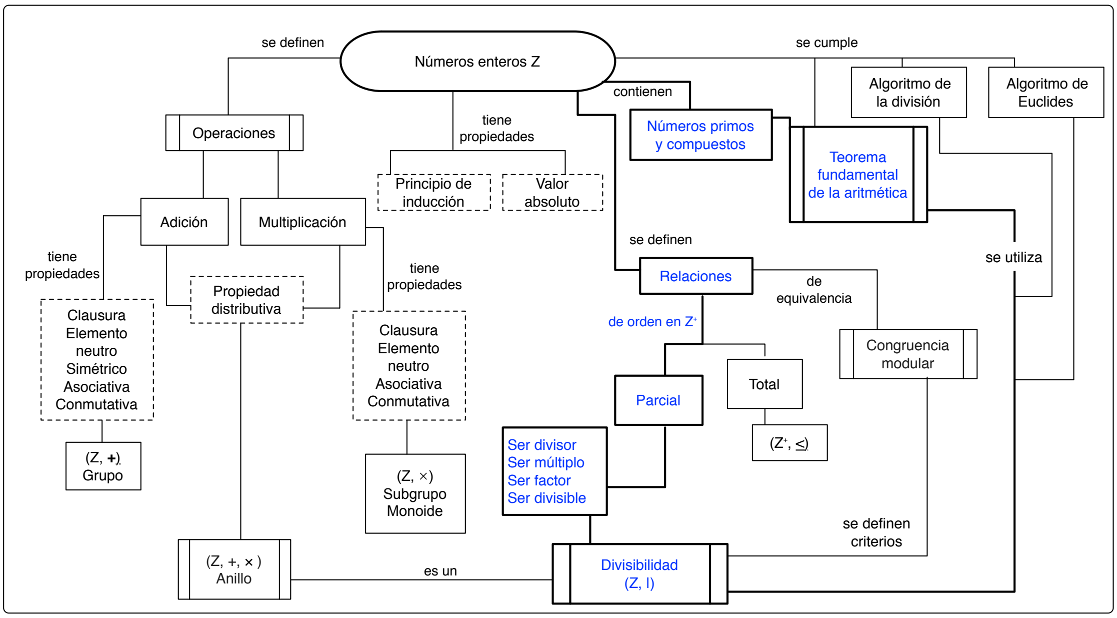


Figura 4.1. Estructuras matemáticas relacionadas con la divisibilidad

La estructura conceptual de la divisibilidad

Distinguimos en la estructura de la divisibilidad tanto elementos conceptuales como elementos procedimentales. Cada uno de estos conjuntos de elementos se subdividen por niveles. En el caso de los elementos conceptuales destacamos los hechos, conceptos y estructuras que componen la estructura conceptual de la divisibilidad. En cuanto a los elementos del campo procedimental, destacamos las destrezas, estrategias y razonamientos que constituyen el tema que nos ocupa. A continuación, hacemos referencia a los elementos que conforman ambos campos de la estructura matemática de la divisibilidad. Listamos los elementos de los campos conceptual y procedimental de la divisibilidad en la tabla 4.2.

Tabla 4.2

Elementos de la estructura conceptual de la divisibilidad

Campo conceptual		
Hechos	Conceptos	Estructuras
Son las unidades más pequeñas de información dentro de un tema matemático. Los hechos están compuestos por términos, notaciones, convenios, y resultados (en la tabla 4.3 describimos los	Número primo Número compuesto Relación ser divisor Relación ser múltiplo Relación ser divisible Relación ser factor Divisores propios	Existencia y unicidad del teorema fundamental de la aritmética Relaciones de orden parcial La divisibilidad en el anillo (Z,+, ×)

Tabla 4.2
Elementos de la estructura conceptual de la divisibilidad

términos, convenios, notaciones y resultados de la divisibilidad)	Divisores impropios Teorema fundamental de la aritmética	
	Campo procedimental	
Destrezas	Razonamientos	Estrategias
Determinar si un número es primo o compuesto Descomponer un número en factores primos Establecer equivalencias entre un número escrito en sistema de representación decimal y escrito en su descomposición canónica	Inductivo Deductivo	Utiliza la descomposición en factores primos Utiliza la estructura multiplicativa $b=a\times c$ para determinar los múltiplos y divisores de un número dado Utiliza la multiplicación o la división para responder a las cuestiones de divisibilidad

A su vez los hechos se subdividen en términos, notaciones, convenios y resultados. Hemos organizado en la tabla 4.3 los elementos que constituyen los hechos referidos a la divisibilidad.

Tabla 4.3
Hechos vinculados a la divisibilidad

Tipo	Elementos
Términos	Múltiplo, divisor, divisible, factor, relación, multiplicando, multiplicador, primos, irreducibles, compuesto, potencia, entero, exponente, natural, positivo, resto, cociente, dividendo, nulo, cero, unidad, división y producto.
Notaciones	a^n; $a\|b$; $p > 1$; Z^+; $b=\mathring{a}$; p
Convenios	$a\|b$ se lee a divide a b, $b=\mathring{a}$ se lee b es múltiplo de a, Z^+ representa el conjunto de todos los números enteros positivos, p representa un número primo cualquiera

Tabla 4.3
Hechos vinculados a la divisibilidad

Tipo	Elementos
Resultados	b=a×c, donde a, b y $c \in$ Z
	Todo número compuesto puede ser escrito como el producto de factores primos, la descomposición es única.
	Si un número primo p divide a un producto a×b, entonces $p\|a$ o $p\|b$. En general, si un número primo p divide a un producto $a_1 \ldots a_n$, entonces p divide al menos a uno de los factores.
	Propiedad reflexiva: $a\|a$.
	Propiedad transitiva: si $a\|b$ y $b\|m$, implica que $a\|m$.
	Propiedad lineal: si $a\|b$ y $a\|m$, implica que $a\|(c\times b + d\times m)$
	Propiedad de multiplicación: si $a\|b$ implica $c\times a\|c\times b$
	Propiedad de simplificación: si $c\times a\|c\times b$ y $c \neq 0$ implica $a\|b$
	La unidad divide a todos los enteros
	Todo entero divide a cero: $b\|0$, $b \in$ Z$^+$
	El cero solo divide al cero: $0\|b$ implica que $b = 0$
	Propiedad de comparación: si $a\|b$ y $b \neq 0$ implica $\|a\| \leq \|b\|$
	Si $a\|b$ y $b\|a$ implica que $\|a\| = \|b\|$

Presentamos un mapa conceptual de la estructura conceptual de la divisibilidad en la figura 4.2. En el mapa conceptual distinguimos los elementos principales de la estructura conceptual de la divisibilidad y representamos las relaciones entre ellos.

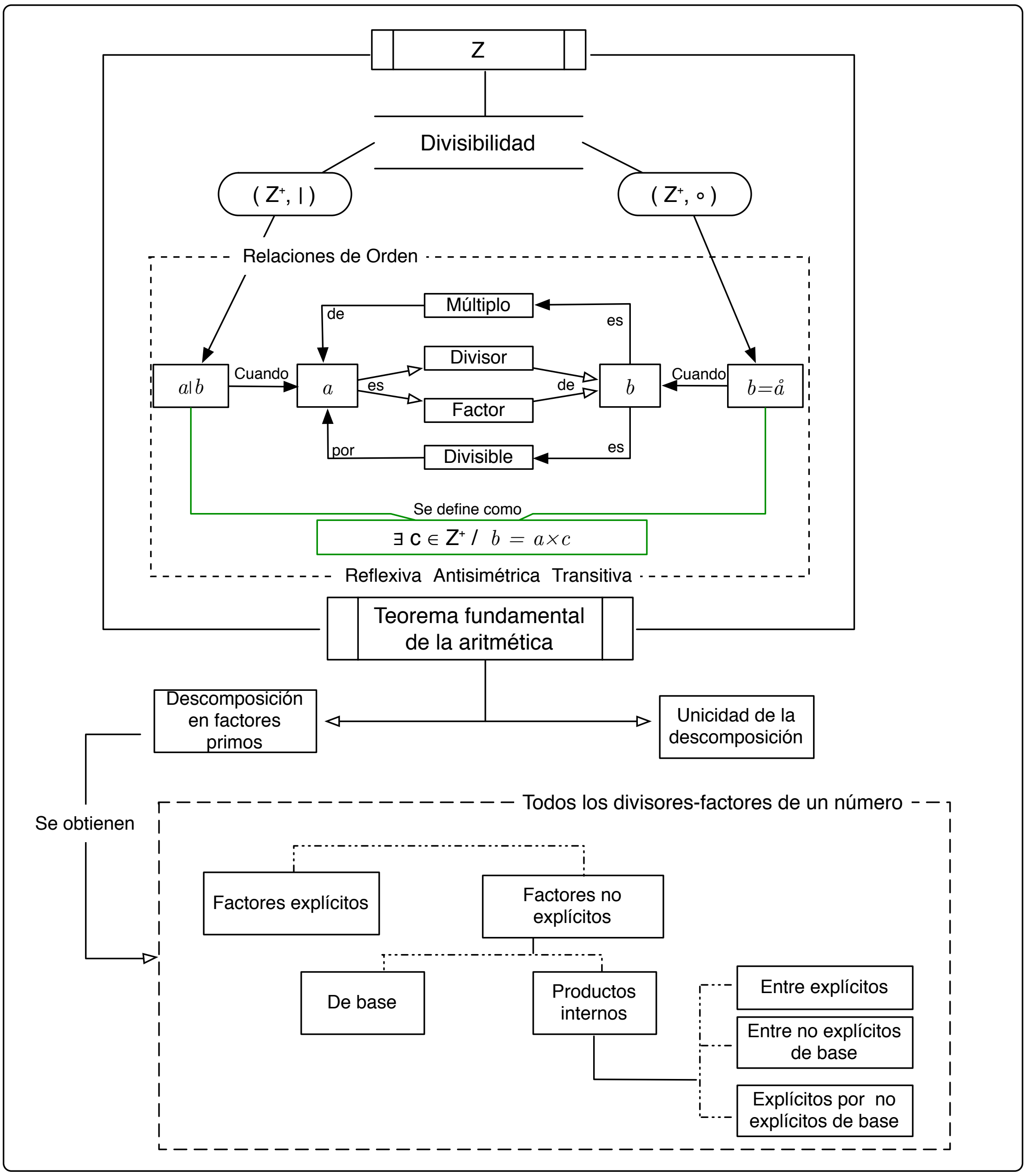


Figura 4.2. Estructura conceptual de la divisibilidad

El teorema fundamental de la aritmética garantiza que la descomposición de un número entero positivo en sus factores primos es única. Después de hacer la descomposición en factores primos, se pueden determinar todos los divisores-factores de ese número. Estos divisores/factores serán: los mismos factores primos de esa descomposición y otros factores, no primos, que se obtienen haciendo los productos de todas las combinaciones posibles entre los números de esa descomposición. Con la garantía de que la descomposición en factores primos es única, dada por el teorema fundamental de la aritmética, no existirán otros divisores/factores distintos de los obtenidos por este procedimiento. En la figura 4.3 mostramos, a manera de ejemplo, el procedimiento de cómo a partir de una descomposición canónica, se obtienen todos los factores-divisores de un número.

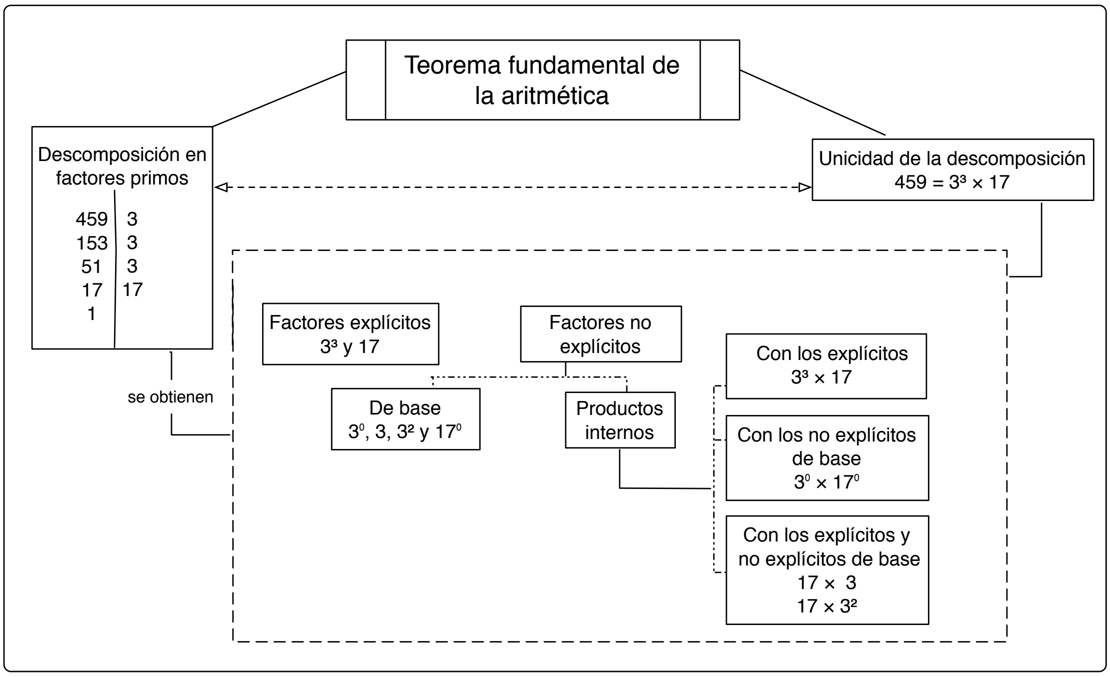


Figura 4.3. Ejemplo de procedimiento para obtener todos los factores-divisores de un número, a partir de su descomposición canónica

Sistemas de representación en la divisibilidad

Presentamos los sistemas de representación que consideramos pueden ser utilizados en la divisibilidad: simbólico (numérico y simbolismo algebraico), verbal, tabular, gráfico y manipulativo. Igualmente, indicamos dos operaciones en los sistemas de representación: traducciones y transformaciones (véase figura 3.6).

Sistema de representación simbólico (numérico)

El sistema posicional de base diez establece una forma de representar números utilizando solo diez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Con estos diez dígitos se pueden escribir todos los números atendiendo a la agrupación de diez unidades, cada diez unidades se forma otra de orden superior. El valor de cada dígito es relativo y depende de la posición que ocupe. El número 222, por ejemplo, está formado por el dígito 2 ubicado en diferentes posiciones: 2 centenas, 2 decenas y 2 unidades, se puede escribir $222 = 2\times10^2+2\times10^1+2\times10^0$. El número 459 está formado por 4 centenas 5 decenas y 9 unidades y se puede escribir $459=4\times10^2+5\times10^1+9\times10^0$.

En el sistema de representación numérico se pueden establecer algunas transformaciones sintácticas entre los números. Estas transformaciones sintácticas pueden ser variantes o invariantes. Las transformaciones invariantes son equivalentes entre sí. El número 459, por ejemplo, se puede escribir desde la estructura multiplicativa, como el producto de números $459 = 9\times51$ o como $459=27\times17$. También se puede utilizar la descomposición única, dada desde el teorema fundamental de la aritmética, para escribir el número $459 = 3^3 \times 17$. Mientras que en las transformaciones variantes se modifica el objeto matemático. Por ejemplo, al escribir $3^4 \times 17$ como un múltiplo del número $3^3 \times 17$, los dos números no son equivalentes, en ese sentido hay una variación.

Sistema de representación simbólico (simbolismo algebraico)
Este sistema de representación es utilizado habitualmente para escribir las relaciones, conceptos y procedimientos mediante símbolos asociados al álgebra. Por ejemplo, la escritura de a, b y c que $\in Z^+$ en la estructura multiplicativa $b=a\times c$ determinan la relación de divisibilidad, la estructura algebraica (Z, +, $\times$) es una forma de representar el anillo de los enteros (véase figura 4.4). Esta forma de representación de relaciones, conceptos y procedimientos sintetiza una cantidad considerable de información, es por ello que este sistema de representación ha alcanzado un uso destacado en matemáticas.

Sistema de representación verbal
En este sistema de representación se hace uso de terminología y convenios propios de la divisibilidad y que son expresados en el lenguaje habitual. Por ejemplo, el enunciado "todo número entero positivo puede ser escrito como producto de factores primos en forma única" es una forma verbal de expresar el teorema fundamental de la aritmética que luego se puede expresar en términos generales también mediante el simbolismo algebraico o en el simbólico numérico (véase figura 4.4).

Sistema de representación tabular
Este sistema de representación es utilizado, por ejemplo, habitualmente para introducir los números primos mediante la criba de Eratóstenes. También es frecuente la utilización de las tablas de multiplicar o de dividir para verificar si un número es múltiplo de otro o divisor de otro. Asimismo, este sistema de representación se utiliza como algoritmo que organiza la descomposición canónica en una tabla de doble entrada para determinar todos los factores o divisores de un número (véase figura 4.4). La utilidad de este sistema de representación puede favorecer en algunos casos la visualización o identificación de propiedades, conceptos o algoritmos asociados a la divisibilidad.

Sistema de representación gráfico
Este sistema de representación puede ser de gran ayuda para visualizar algunos conceptos, relaciones, propiedades o procedimientos; comprende una diversidad da maneras de representar. En la recta numérica, por ejemplo, se pueden representar múltiplos de números como se muestra en la figura 4.4. Con los diagramas de Hasse es posible representar conjuntos parcialmente ordenados finitos como la relación ser divisor. En este caso se representa el conjunto de divisores

de un número, y se pueden observar la propiedad reflexiva y la transitiva de las relaciones de orden parcial. En el caso de los diagramas de Venn se puede observar el operador multiplicador y divisor (véase figura 4.4).

Sistema de representación manipulativo
Este sistema de representación permite visualizar algunas relaciones físicamente o virtualmente, y, que pueden ser utilizadas para establecer isomorfismos con otros sistemas de representación. Las regletas de Cuissenaire, por ejemplo, se pueden utilizar para asociar las medidas de las longitudes de las regletas con la relación de divisibilidad, estableciendo el isomorfismos entre la representación física del fenómeno (cuántas veces cabe la regleta más corta en una de las otras) y la representación del mismo fenómeno en otro sistema de representación.

Traducciones entre los sistemas de representación anteriormente recogidos
Entre los sistemas de representación descritos anteriormente (simbólico [numérico y simbolismo algebraico], verbal, tabular, gráfico y manipulativo) se pueden establecer traducciones, dándose todas las combinaciones posibles. En la figura 4.4 hemos destacado con líneas punteadas y doble implicación las traducciones entre los diferentes sistemas de representación. Estas traducciones determinan las diferentes relaciones entre los sistemas de representación, así como, las relaciones entre los conceptos y procedimientos asociados a la divisibilidad.

La traducción la identificamos cuando se expresa en diferentes sistemas de representación un mismo objeto (véase figura 3.6). Por ejemplo, cambiar la expresión verbal del teorema fundamental de la aritmética y expresarlo mediante simbolismo algebraico (véase figura 4.4).

Las traducciones y las transformaciones sintácticas variantes e invariantes en los sistemas de representación permiten establecer o visualizar relaciones y propiedades entre conceptos y procedimientos en un tema matemático, en este caso sobre la divisibilidad.

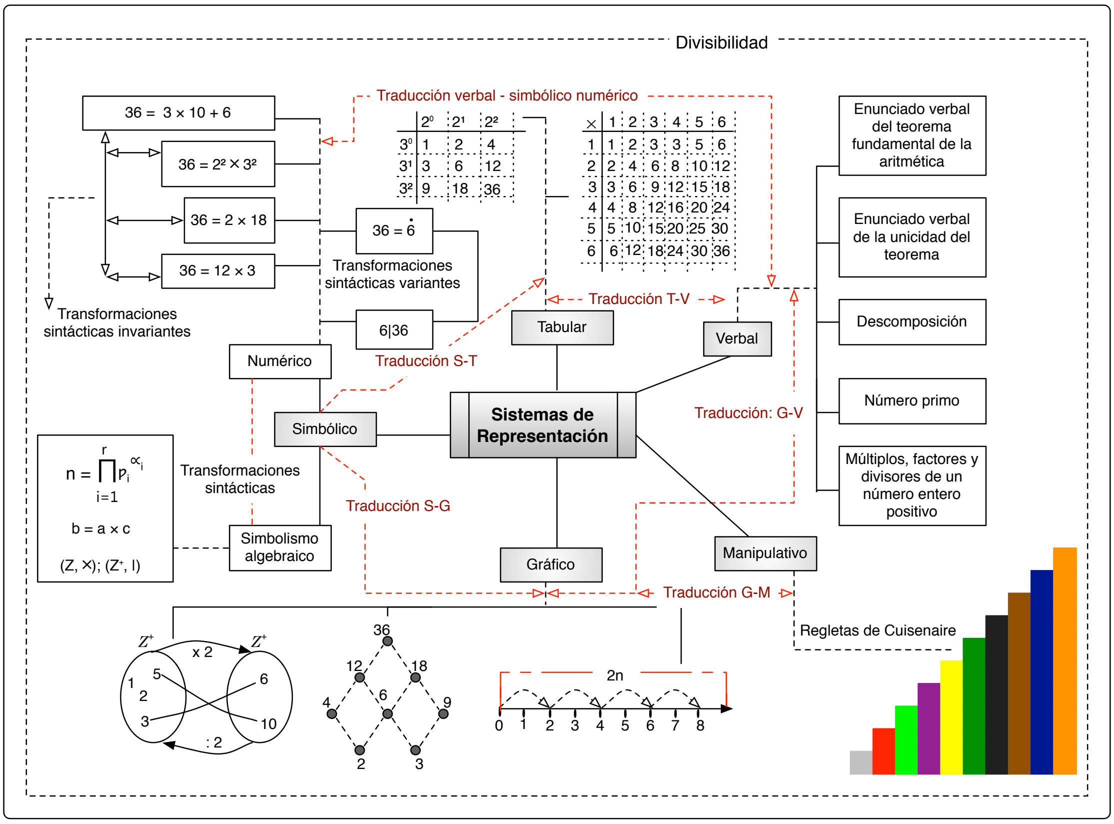


Figura 4.4. Sistemas de representación asociados a la divisibilidad

Fenomenología de la divisibilidad

Listamos una serie de fenómenos que están relacionados con la divisibilidad tomando la estructura multiplicativa $b{=}a{\times}c$ como la generadora de las diferentes situaciones o actividades (Freudenthal, 1983). Igualmente, determinamos los contextos y las subestructuras matemáticas asociadas a la divisibilidad. En la figura 4.5 podemos ver las relaciones entre los fenómenos, los contextos y las subestructuras matemáticas.

Fenómenos

Entre los fenómenos asociados a la divisibilidad encontramos: dividir dos números, multiplicar dos números, descomponer un número en factores, que un número divida a otro, que un número sea factor de otro, que un número sea múltiplo de otro, que un número es divisible de otro, que un número se divida a sí mismo y las distintas propiedades de la divisibilidad que se pueden generar desde la estructura multiplicativa $b{=}a{\times}c$ (véase figura 4.5).

Contextos

Distinguimos cuatro contextos que organizan los fenómenos antes mencionados: operaciones aritméticas, relación ser divisor, relación ser múltiplo y cardinal (véase figura 4.5).

Subestructura matemática
Identificamos cuatro subestructuras matemáticas vinculadas con la divisibilidad: la subestructura multiplicativa (Z, $\times$), la subestructura (Z^+, $|$), la subestructura (Z^+, $\circ$) y el teorema fundamental de la aritmética (véase figura 4.5).

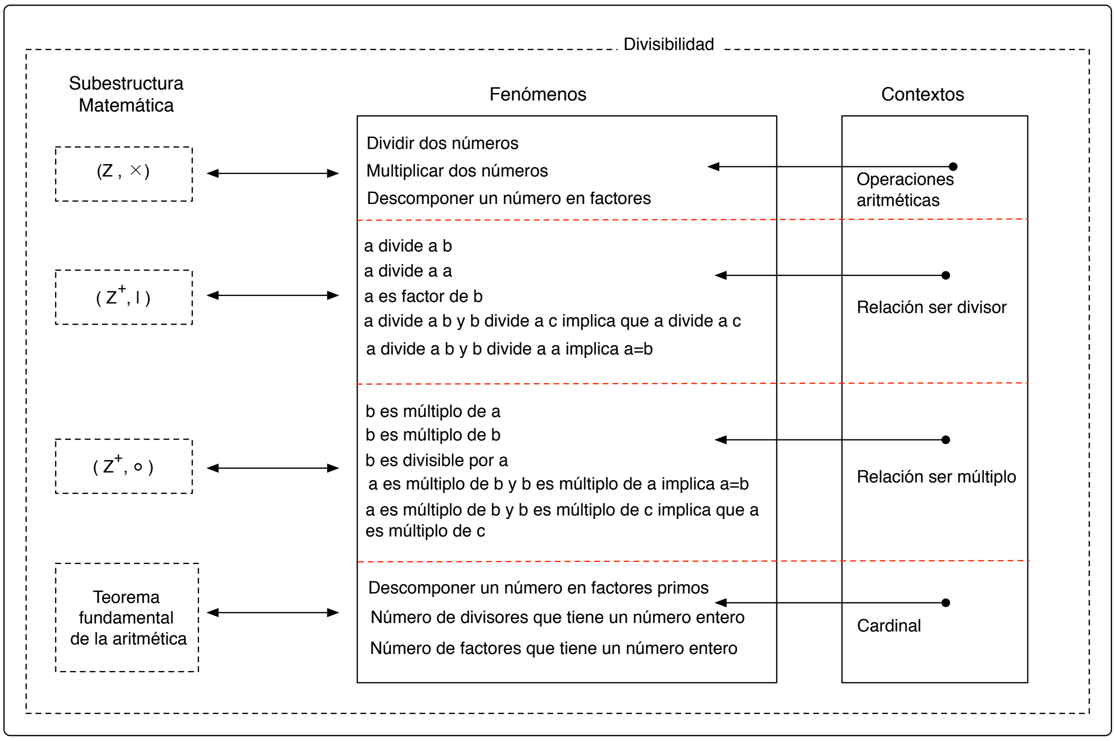


Figura 4.5. Fenomenología asociada a la divisibilidad

4.3. Análisis cognitivo de divisibilidad

A continuación, presentamos el análisis cognitivo de la divisibilidad. Este análisis se fundamenta en las expectativas y previsiones de los profesores sobre el aprendizaje de sus alumnos (Gómez, 2007). Nos centramos los organizadores del currículo que componen el análisis cognitivo: (a) expectativas de aprendizaje sobre divisibilidad, (b) dificultades y errores, y, (c) demandas cognitivas para adaptación y diseño de las tareas. La información que obtenemos a través de estos organizadores es de utilidad para planificar las tareas que abordaremos en las sesiones de clase y para establecer esquemas que permitan describir las producciones de los estudiantes (en nuestro caso los maestros en formación).

Expectativas de aprendizaje sobre divisibilidad
Haremos referencia a los dos niveles de expectativas de aprendizaje que tienen implicaciones para esta investigación: objetivos y capacidades. Comenzamos por enunciar los objetivos específicos y listamos las capacidades asociadas con la divisibilidad correspondientes a cada objetivo específico.

Objetivos

Con respecto al aprendizaje de la divisibilidad hemos considerado los siguientes objetivos específicos.

1. Expresar adecuadamente la relación ser múltiplo, ser divisor, ser divisible y ser factor.
2. Reconocer y expresar la relación directa entre los términos múltiplo y divisible.
3. Reconocer y expresar adecuadamente la relación directa entre los términos divisor y factor.
4. Reconocer y expresar adecuadamente la relación inversa entre los términos múltiplo-divisible con los términos factor-divisor.
5. Reconocer y utilizar las propiedades de las relaciones de orden: ser múltiplo, ser divisor, ser factor y ser divisible.
6. Identificar y diferenciar número primo y número compuesto.
7. Reconocer el teorema fundamental de la aritmética.
8. Identificar si un número es múltiplo, divisor, divisible o factor de otro a partir de la escritura de los números en su representación canónica.
9. Reconocer y determinar los factores-divisores explícitos y no explícitos de un número, a partir de su representación canónica.
10. Determinar múltiplos de un número, a partir de su representación canónica.

Capacidades

Las capacidades son el segundo nivel de las expectativas de aprendizaje y está referido a la expectativa del profesor sobre la actuación de los estudiantes durante el desarrollo de una tarea. Las capacidades están relacionadas con tareas rutinarias que realizan los estudiantes para poder lograr un objetivo. Por ejemplo, para que un estudiante reconozca y determine los factores explícitos y no explícitos de un número, a partir de su representación canónica, entre otras cosas debe ser capaz de identificar factores explícitos en una descomposición canónica dada.

En el anexo O recogemos el listado de capacidades asociadas a los objetivos para el tema que nos ocupa. En el citado anexo se presentan las capacidades vinculadas a un código (Ci) compuesto de la inicial de la palabra capacidades, en mayúscula, y un número comprendido entre 1 y 78 inclusive ($0<i<79$) y a las relaciones entre conceptos y procedimientos que permiten caracterizar la estructura conceptual del tema.

En la tabla 4.5 mostramos las capacidades asociadas al tercer objetivo formulado. El resto de las tablas están disponibles en el anexo O.

Tabla 4.5
Listado de capacidades asociadas al objetivo 3

Objetivo 3. Reconocer y expresar adecuadamente la relación directa entre los términos divisor y factor.

Capacidades	Relación	Código
Identificar en una estructura multiplicativa concreta, expresada en el sistema de representación posicional de base diez, cuáles son sus divisores	C-C	C24
Identificar en una estructura multiplicativa concreta, expresada en el sistema de representación posicional de base diez, cuáles son sus factores	C-C	C25
Identificar en una estructura multiplicativa concreta, en la cual se expresa la equivalencia entre la representación posicional base diez y la representación canónica, cuáles son sus divisores	C-C	C26
Identificar en una estructura multiplicativa concreta, en la cual se expresa la equivalencia entre la representación posicional base diez y la representación canónica, cuáles son sus factores	C-C	C27
Distinguir en una estructura multiplicativa concreta que divisores y factores son términos equivalentes	C-P	C28
Justificar por escrito la equivalencia entre los términos divisores y factores (en una estructura multiplicativa concreta)	C-P	C29
Reconocer en una estructura multiplicativa abstracta, expresada en el sistema de representación de simbolismo algebraico, la equivalencia entre los términos divisores y factores	C-C	C30

Nota. C-C = relaciona conceptos; C-P = relaciona conceptos y procedimientos; P-P = relaciona procedimientos.

Limitaciones de aprendizaje

En este apartado hacemos referencia a los errores y dificultades como limitaciones de aprendizaje. Presentamos la descripción de posibles errores y dificultades asociadas al estudio de la divisibilidad, tomando como referencia las limitaciones de aprendizaje expuestas en investigaciones previas y la experiencia del equipo investigador.

En nuestro estudio consideramos tres de las cinco categorías generales que propone Socas (1997) sobre tipos de dificultades: (a) dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, conflictos sobre la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, (b) dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático que se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y (c) dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.

Para el caso de las dificultades asociadas al estudio de la divisibilidad, además de las limitaciones de aprendizaje de los antecedentes, consideramos el diagnóstico que hemos realizado. Identificamos nueve dificultades[1] asociadas a la divisibilidad que, posteriormente, relacionamos con las categorías generales de Socas.

Consideramos cuatro de las dificultades identificadas por Sierra et al. (1989), pues se vinculan de manera directa con el foco de contenido que hemos abordado: (D1) asociada a las equivalencias que se pueden establecer entre las componentes de la estructura multiplicativa $b=a\times c$; (D2) la terminología usada también es fuente de dificultades debido al doble sentido de las palabras. Por ejemplo, en el caso de la palabra "divisor", es utilizada como un término en la división y como "divisor de" en el sentido de la divisibilidad; (D3) referida a la propiedad reflexiva "ser múltiplo de" y la propiedad que tiene el cero de ser múltiplo de cualquier número. Por ejemplo, los dos primeros términos de la serie de múltiplos de un número quedan determinados por estas propiedades y (D4) referida al uso de la propiedad reflexiva y la propiedad de la unidad como divisor de cualquier número, para determinar los dos primeros elementos de la serie de los divisores de un número.

En segundo lugar, identificamos en el trabajo de Zazkis y Campbell (1996a) una dificultad (D5) asociada al uso del teorema fundamental de la aritmética, y, en tercer lugar, en el diagnóstico que realizamos identificamos otras dificultades que mencionamos a continuación: (D6) asociada uso las operaciones aritméticas y sus propiedades, (D7) la realización de operaciones aritméticas con números escritos en descomposición canónica, (D8) dificultad para escribir un número a

[1] En adelante, para referirnos a las nueve dificultades asociadas a la divisibilidad utilizaremos D1 para la primera, D2 para la segunda y así sucesivamente hasta D9.

partir del número de divisores de este, y, (D9) dificultad para determinar divisores no explícitos en una descomposición canónica.

En la tabla 4.6 presentamos las dificultades y errores con los que se relacionan.

Tabla 4.6
Listado de dificultades y errores

Dificultad	Error
D1	E1: No distinguir en la estructura multiplicativa $b{=}a{\times}c$ que a y c divisores de b
	E2: No identificar que si b es múltiplo de a y c, entonces a y c son divisores de b
D2	E3: No reconocer la equivalencia entre $b{=}a{\times}c$; y las expresiones $b{:}a{=}c$ y $b{:}c{=}a$
	E4: Interpretar divisor solo como el elemento de una división
	E5: Considerar que los divisores de un número es solo aquel que se obtiene de la operación de división y que representa el término divisor de dicha operación
D3	E6: Omitir o no reconocer que un número es múltiplo de si mismo
	E7: Desconocer el cero como múltiplo de todos los números
	E8: Omitir o no reconocer que un número es divisor de si mismo
	E9: No considerar el 0 y el 1 como los dos primeros elementos generadores del conjunto de los múltiplos de un número
D4	E10: Omitir o no reconocer que un número es divisor de si mismo
	E11: Omitir o no reconocer que un número es factor de si mismo
	E12: Omitir o no reconocer el número uno como divisor de un número dado
	E13: No considerar el 1 y el mismo número como elementos del conjunto de los divisores de un número
D5	E14: Manifestar que es posible más de una descomposición en factores primos
	E15: No distinguir número primo de uno compuesto
D6	E16: Utilizar la propiedad conmutativa en la división
D7	E17: No considerar el factor a^0 como elemento de la factorización

Tabla 4.6
Listado de dificultades y errores

Dificultad	Error
D8	E18: Calcular potencias como productos
	E19: Escoger una cantidad de números primos, realizar el producto de estos y expresar que la cantidad de números primos escogidos coincide con el número de divisores del número
D9	E20: No considerar que un número primo divide a sus potencias (mayores o iguales)
	E21: No considerar que en una descomposición canónica los productos internos que se generen, son divididos necesariamente por algunos de los factores primos de esta

Una vez hecha la concreción de las dificultades asociadas a la divisibilidad, indicamos la relación de estas con los categorías generales indicadas por socas tipos de dificultades generales de Socas (1997). En la tabla 4.7 señalamos la relación entre estas dificultades. Las dificultadas asociadas al estudio de la divisibilidad las hemos colocado en la tabla manteniendo la misma numeración que seguimos cuando las identificamos, anteriormente.

Tabla 4.7
Relación entre las categorías generales de dificultades y las dificultades específicas de la divisibilidad

Dificultades generales	Dificultades específicas								
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas	*	*	*	*	*				
Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático							*	*	*
Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza: contenidos previos						*			

Demandas cognitivas

En este apartado damos cuenta de las tareas que seleccionamos de la literatura de investigación, así como, las modificaciones que consideramos necesarias para ajustarlas a nuestro propósito. La adaptación y diseño de las tareas lo hacemos con la intención de promover, mediante su implementación, el logro del aprendizaje de la divisibilidad como relación de orden.

En nuestro experimento de enseñanza utilizamos un total de 26 tareas. Para la selección de dichas tareas, realizamos una búsqueda exhaustiva en la literatura de investigación y encontramos un conjunto de tareas que han sido aplicadas en distintas investigaciones con maestros en formación y que coinciden en algunos aspectos con nuestro propósito de investigación (Bodí, Valls y Llinares, 2005; Brown, Thomas y Tolias, 2002; Zazkis, 2001; Zazkis y Campbell, 1996a, 1996b; Zazkis y Gadowsky, 2001). Estas tareas las hemos traducido y adaptado según el interés de nuestra investigación.

Por otra parte hemos seleccionado y adaptado algunas tareas, sobre divisibilidad, que están en el libro de texto recomendado, en la bibliografía de la asignatura (Castro y Molina, 2011). En el capítulo 6 de esta memoria de tesis presentamos las sesiones, describiendo las adaptaciones que hemos hecho de este conjunto de tareas para utilizarlas en nuestro trabajo.

Utilizamos los resultados de la prueba diagnóstico que realizamos para hacer ajustes y modificaciones en algunas tareas. Presentamos los resultados de la prueba diagnóstico en el anexo P.

Las variables de tarea que hemos utilizado para la selección y adaptación de las tareas son las siguientes:

- Contenido matemático de la tarea: múltiplo, divisible, factor, divisor, equivalencias entre las componentes de la estructura multiplicativa $b=a\times c$, teorema fundamental de la aritmética y su relación con la divisibilidad, y, propiedades de la relación de orden.
- Vínculos entre relaciones: ser múltiplo y ser divisible, ser múltiplo y ser divisor, ser divisor y ser factor, ser divisor y ser divisible.
- Conjunto numérico: enteros positivos.
- Sistemas de representación: verbal, simbólico (numérico y simbolismo algebraico), tabular y gráfico.
- Operaciones con sistemas de representación: traducción y transformación.

Consideramos dos aspectos adicionales para la selección y, en particular, para la adaptación de las tareas. Uno de ellos es la fenomenología. En este sentido, destacamos que los fenómenos que consideramos son aquellos en los que interviene el conjunto de relaciones y propiedades, asociadas a la divisibilidad, desde la estructura multiplicativa $b=a\times c$, en los enteros positivos. En el análisis de contenido de la divisibilidad, realizado en el apartado 4.2, hemos descrito las posibles relaciones y propiedades asociadas a la divisibilidad, a partir de la estructura multiplicativa $b=a\times c$. El otro aspecto es el referido a errores y dificultades. En ese sentido, en la adaptación de las tareas, hemos previsto, algunas situaciones reportadas sobre dificultades asociadas a la divisibilidad como el caso de la equivalencia entre la estructura multiplicativa $b=a\times c$ con $b:a=c$ y con $b:c=a$.

Las 26 tareas que utilizamos en el experimento de enseñanza se pueden ver en el anexo C de esta memoria de tesis. Para referirnos a las tareas, en adelante, las identificaremos como T*i*.

Una vez realizado el análisis de contenido y el análisis cognitivo, las tareas deben ser coherentes con estos dos análisis previos. En la tabla 4.8 presentamos los descriptores que hemos considerado para cada una de las tareas que proponemos. Estos descriptores caracterizan las diferentes tareas y nos permiten estudiar la coherencia de las tareas con los análisis previos (Marín, 2013).

Tabla 4.8
Descriptores de las tareas

Descriptor	Tareas																									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Contenido																										
Divisores y múltiplos	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
N. primos y compuestos			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*			*	*	*	*	*	*	*
T. F. de la aritmética			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*			*	*	*	*	*	*	*
Obtención de divisores y múltiplos															*	*	*			*	*	*	*	*	*	*
Sistema de Representación y sus operaciones																										
Simbólico	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*
Verbal	*	*	*	*											*	*		*	*	*	*			*		
Tabular																										
Gráfico																										
Traducción	*	*	*	*											*	*		*	*	*	*			*		
Transformación	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Objetivo																										

Tabla 4.8
Descriptores de las tareas

Descriptor	Tareas																									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
O1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*				*	*	*	*			*	*	*
O2	*	*	*	*					*												*			*	*	*
O3	*	*	*	*						*											*			*	*	*
O4	*	*	*	*							*	*	*	*							*			*	*	*
O5									*	*	*	*	*	*											*	*
O6			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*
O7			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*
O8			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*					*			*	*	*
O9			*	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*	*				*	*		*	*	*	*
O10																	*			*		*		*	*	*

4.4. Análisis de instrucción

En este análisis nos aproximamos a las sesiones de clase en nuestro experimento de enseñanza. Describimos, en primer lugar, las funciones y secuencias de las tareas que diseñamos en el análisis cognitivo para su implementación, posteriormente señalamos los materiales o recursos y, finalmente, abordamos la gestión del aula.

Funciones y secuencias de las tareas

Las tareas son instrumentos que permiten activar ciertas capacidades de los maestros en formación, esas capacidades están directamente relacionadas con los contenidos, los objetivos o expectativas de aprendizaje.

Para cada una de las sesiones del experimento de enseñanza se establecieron unas expectativas de aprendizaje y unos contenidos matemáticos, y, en cada una de las tres sesiones se estableció una secuencia de tareas según esas expectativas y contenidos planteados. En el capítulo 6 de esta memoria de tesis describimos la secuencia de las tareas en el aula, según el propósito de cada una de las sesiones del experimento de enseñanza.

Materiales y recursos

En este apartado hacemos referencia a la utilización de materiales y recursos para el desarrollo de las sesiones del experimento de enseñanza. Hemos usado material escrito, ficha, apuntes del tablón de docencia, en el capítulo 6 describimos estos materiales en cada una de las sesiones. Por otra parte, hemos diseñado un diagrama específico para su utilización, como recurso, para presentar las relaciones asociadas a la divisibilidad (véase figura 4.6).

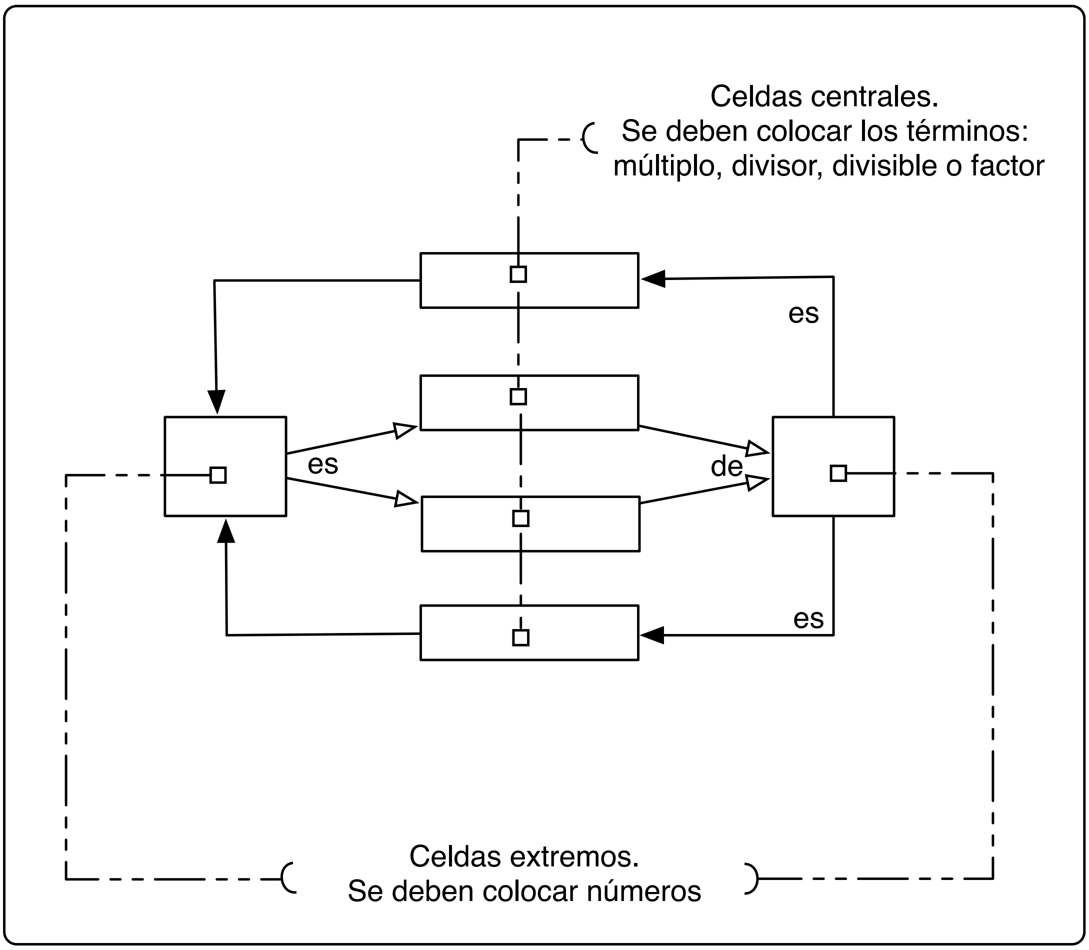


Figura 4.6. Diagrama utilizado en tareas sobre divisibilidad

El diagrama general está compuesto por cuatro celdas centrales en las cuales se deben escribir los términos: múltiplo, divisible, factor y divisor, según sea el caso. Dos celdas en los extremos, una a la izquierda y otra a la derecha, de las celdas centrales, en las cuales se deben escribir los números que cumplen la relación que se indica. Cada flecha establecen un vínculo entre los números que se relacionan, ya sea de forma directa o inversa. Indican la orientación que se tiene que seguir para leer, evaluar una afirmación, o para establecer una relación directa como ser divisor-factor o inversa como ser divisor-múltiplo entre números.

Con respecto a su utilización, el diagrama permite flexibilidad para colocar las relaciones asociadas a la divisibilidad según sea el caso. Es dinámico, por ejemplo, al cambiar el sentido de alguna flecha afecta a todo el conjunto de términos, o cambiar algún número de posición también afecta a todo el conjunto. El diagrama está hecho con el propósito de mantener en forma explícita las relaciones asociadas a la divisibilidad.

El uso de este diagrama nos permitió mantener la independencia del signo de igualdad, es decir, no es necesario plantear una igualdad desde la estructura multiplicativa para establecer las relaciones de divisibilidad entre términos. En ese sentido, tenemos una variable interviniente menos; la igualdad en el estudio de las relaciones asociadas a la divisibilidad. Esta situación nos permite suponer, que los maestros en formación puedan pensar en las relaciones asociadas a la divisibilidad en forma independiente de algunos cálculos numéricos; promovidos por algunos de los significados asociados a la igualdad (Castro y Molina, 2007).

Gestión del aula

Con respecto a la gestión de clases, seguimos la metodología del curso que está descrita en la Guía Docente de la Asignatura (anexo B). En ella se plantean cinco puntos, a saber: lecciones magistrales, actividades prácticas, actividades no presenciales individuales, actividades no presenciales grupales y tutorías académicas. Las sesiones del experimento de enseñanza se desarrollaron con las lecciones magistrales y las actividades prácticas.

A continuación recogemos la descripción de cada una de ellas tal como está establecido en la Guía Docente de la asignatura.

1. Lecciones magistrales (clases teóricas-expositivas, en gran grupo). La lección magistral tiene dos niveles, el de conferencia al gran grupo y el desarrollo teórico con el grupo mediano. En el primer caso, el profesor presentará, orientará y sintetizará algunos de los temas básicos del programa; en algunos casos, se contará con la colaboración de profesionales especialistas invitados. En el segundo caso, el profesor presentará los temas del programa, facilitando la comprensión de aquellos contenidos teóricos que tengan mayor complejidad, guiando las reflexiones y análisis de los alumnos basadas en las lecturas de los textos recomendados en la bibliografía y moderará posibles debates; en este caso además, los alumnos tendrán la oportunidad de resolver tareas matemáticas que pueden ejemplificar o introducir los contenidos tratados.
2. Actividades prácticas (Clases prácticas o grupos de trabajo). Las actividades prácticas podrán tener dos orientaciones, laboratorio e informática. En las prácticas de laboratorio, el alumno trabajará con materiales didácticos manipulativos y las prácticas desarrolladas en el aula de informática, se centrarán en el manejo de software educativo y recursos de Internet. En ambos casos, los materiales y recursos considerados se centran en los contenidos del temario y promueven la adquisición de conceptos y el desarrollo de destrezas que debe dominar un maestro en relación con la enseñanza de las matemáticas (análisis semántico de problemas, justifica-

ción de propiedades o técnicas matemáticas, entre otras). En estas prácticas se priorizará la actuación de los alumnos, primero individualmente, y luego en grupos de 4 ó 5 alumnos. El profesor presentará las actividades, atenderá a las dudas, animará y orientará el trabajo de los alumnos y las puestas en común. Para ello se requiere de algún documento mediador que sirva de guía a las prácticas, tales como cuadernos, guiones u otros, que proporcionen instrucciones y muestren las actividades pertinentes.

3. Actividades no presenciales individuales (Trabajo autónomo y estudio individual). La actividad básica es el estudio, por parte del alumno, de los contenidos indicados en el temario, empleando los documentos recomendados, así como la resolución de tareas correspondientes a esos contenidos. La elaboración de resúmenes e informes que sinteticen la información básica de cada tema, también forma parte del trabajo individual y facilitará y promoverá su memorización y comprensión. Estos informes deberán presentarse con una ortografía y redacción cuidada. Por otro lado, los alumnos realizarás trabajos en los que afrontarán un problema, recopilarán y organizarán información para resolverlo y redactarán el informe correspondiente. Algunos trabajos podrán tener carácter transversal participando distintas áreas de conocimiento.
4. Actividades no presenciales grupales (estudio y trabajo en grupo). Estas actividades implicarán la reflexión, discusión, debate y redacción de informes con los medios tecnológicos adecuados por parte de todos los miembros del equipo de los trabajos de prácticas y otros trabajos como los que se sugieren en las prácticas de exteriores.
5. Tutorías académicas. Reuniones periódicas individuales y/o grupales entre el profesorado y el alumnado para guiar, supervisar y orientar las distintas actividades académicas propuestas (con un número mínimo de reuniones obligatorias). Algunas estas acciones tutoriales se llevarán a cabo mediante plataformas virtuales.

La sesión 1 del experimento de enseñanza se desarrolló en la modalidad de conferencia al gran grupo. Las sesiones 2 y 3 en la modalidad de actividades prácticas. Las actividades no presenciales y las tutorías se siguieron realizando con normalidad durante el desarrollo de las sesiones del experimento de enseñanza. Las actividades no presenciales usualmente se basan en el estudio individual de cada estudiante y en las sesiones de trabajo que normalmente organizan para trabajar en las prácticas. A las tutorías con la profesora, los estudiantes acuden ocasionalmente a preguntar dudas puntuales. En esta investigación no es objeto de investigación ni las actividades no presenciales ni las tutorías.

Las actividades prácticas según la Guía Docente de la asignatura son “Clases prácticas o grupos de trabajo” y en el Programa de la Asignatura se definen claramente la conformación de los grupos de trabajo y son llamados "Seminarios".

En los seminarios se llevan a cabo una serie de prácticas. La sesión 2 se dedicó al desarrollo de una práctica individual[2] que contenía un conjunto de tareas que los maestros en formación resolvían y luego compartían con sus compañeros del subgrupo al cual pertenecen en el seminario. Mientras que en la sesión 3 fue una puesta en común de los trabajos realizados, por parte de los grupos, sobre la práctica de divisibilidad realizada en el cuaderno individual de prácticas[3].

[2] La práctica individual que resolvieron los maestros en formación durante la sesión 2 del experimento de enseñanza contiene quince tareas. Esta práctica individual está disponible en el anexo E de esta memoria de tesis.

[3] El cuaderno individual de práctica es un documento mediador que sirve de guía en las actividades prácticas. En nuestro caso, este documento contiene siete tareas. Este documento está en el anexo F de esta memoria de tesis.

Capítulo 5. Metodología

[...] O sea, a la aritmética en su sentido estricto, y comenzamos recordando las cuestiones relativas a esta ciencia que aparecen en el currículo escolar [...]. El primer problema de la teoría de números es la divisibilidad: ¿es o no un número divisible por otro?
Félix Klein[1] (1849-1925).

En este capítulo presentamos la metodología que seguimos para el desarrollo de esta investigación. Estructuramos este capítulo en siete apartados. En el primer apartado describimos el diseño de la investigación. En el segundo, los aspectos metodológicos del experimento de enseñanza. En el tercer apartado, destacamos las características de los participantes en el experimento de enseñanza. En el cuarto apartado, describimos las diferentes fuentes de información y el proceso de recogida de datos en la investigación. Las categorías propuestas para el análisis de la información así como el proceso de codificación lo recogemos en el apartado quinto. En el apartado sexto, describimos cómo hemos organizado los datos obtenidos de cada una de las sesiones que conforman el experimento de enseñanza. Por último, en el apartado siete, especificamos los tipos de análisis de datos que realizamos en nuestro estudio.

5.1. Diseño de la investigación

La investigación que realizamos y que presentamos es un Experimento de Enseñanza, que se encuadra en el paradigma de la Investigación de Diseño. La investigación basada en diseño (*design-based research*, DBR por sus siglas en inglés)

[1] Félix Christian Klein escribió el libro matemática elemental desde un punto de vista superior (volumen I). El contenido matemático del libro es Aritmética, Álgebra y Análisis. El libro estaba dirigido a profesores de matemática de secundaria y fue publicado originalmente en alemán entre 1906 y 1908. Traducido al español por Roberto Araujo en 1926 editado por la editorial Springer. En el año 2006 la editorial Nivola, publica otra traducción al español de este libro.

o investigación de diseño es un paradigma metodológico emergente en la investigación educativa y ha sido desarrollada por y para educadores con el propósito de abordar la investigación desde un contexto educativo real (Anderson y Shattuck, 2012).

Desde que Brown (1992) publicara su artículo sobre diseño de experimento y Collins (1992) el capítulo de un libro en el cual argumentaba que la educación debe ser vista como una ciencia de diseño, el uso de la metodología de investigación de diseño se ha ido incrementando en investigaciones en contextos educativos y ambientes de aprendizaje.

Este impulso se ha hecho evidente a través de números especiales en revistas, tales como: *Educational Researcher* (2003, 31(1)), *Journal of the Learning Sciences* (2004, 13(1)), *Educational Psychologist* (2004, 39(4)) y *Educational Technology* (2005, 45(1)). Adicionalmente, a través de artículos en revistas e informes especializados (e.g. Basham, Meyer y Perry, 2010; Reynolds y Caperton, 2011; Xie y Shrama, 2011), así como libros (e.g. Kelly y Lesh, 2000; Kelly, Lesh, y Baek, 2008; McKenney y Reeves, 2014; Spector, Merril, Elen y Bishop, 2014; Akker, Gravemeijer, McKenney y Nieveen, 2006). Otro aspecto que queremos destacar es el uso de esta metodología en tesis doctorales (e.g. Brar, 2010; Drexler, 2010; Oh, 2011). En el seno del grupo de investigación FQM-193 de *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, en el cual se desarrolla esta investigación, también se ha utilizado la metodología de diseño en tesis doctorales (e.g. Molina, 2006; Ramírez, 2012; Valverde, 2012; Vega, 2013).

En la figura 5.1 mostramos el interés continuo que desde el año 2000 ha tenido la investigación de diseño y que se ve reflejado en publicaciones de artículos y en bases de datos (Anderson y Shattuck, 2012).

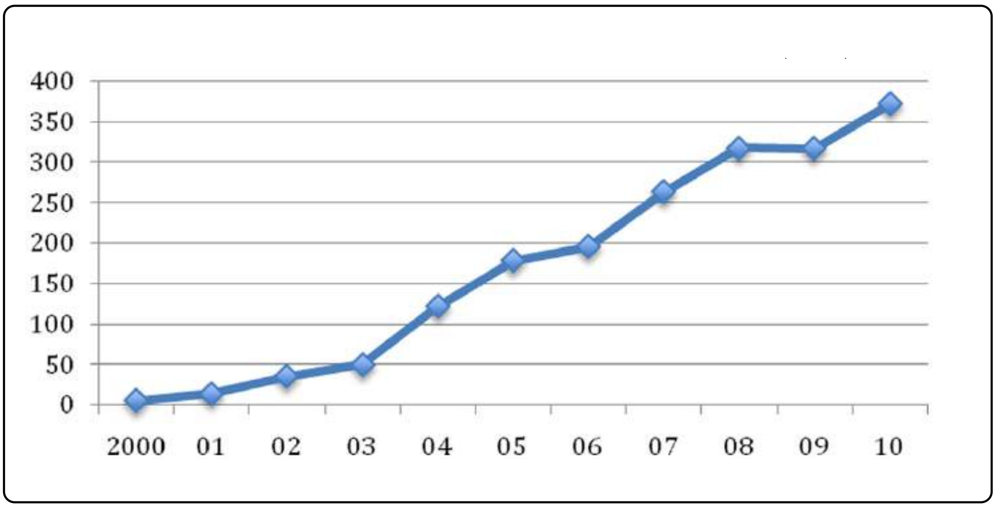


Figura 5.1. Incremento de artículos sobre investigación de diseño (Anderson y Shattuck, 2012)

El objetivo de esta metodología es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

En los estudios de diseño, los instrumentos de investigación empleados pueden ser de tipo mixto, con resultados de ambas mediciones: cualitativas y cuantitativas (e.g. Brown, 1992; Koehler, Mishra, y Yahya, 2007; Looi, Chung y Ng, 2010).

El proceso de investigación que se sigue en una investigación de diseño es cíclico y sistemático, como todos los procesos de diseño educativo y de instrucción. En ese sentido varios autores han representado de diferentes maneras el proceso. En la figura 5.2 mostramos, a manera de ejemplo, un modelo genérico creado por McKenney y Reeves (2014) para la investigación de diseño. Este modelo solo muestra los elementos básicos de un proceso flexible en las tres etapas: análisis, diseño y evaluación, que tienen lugar en la intervención con la práctica y generando dos salidas: conocimiento e intervención.

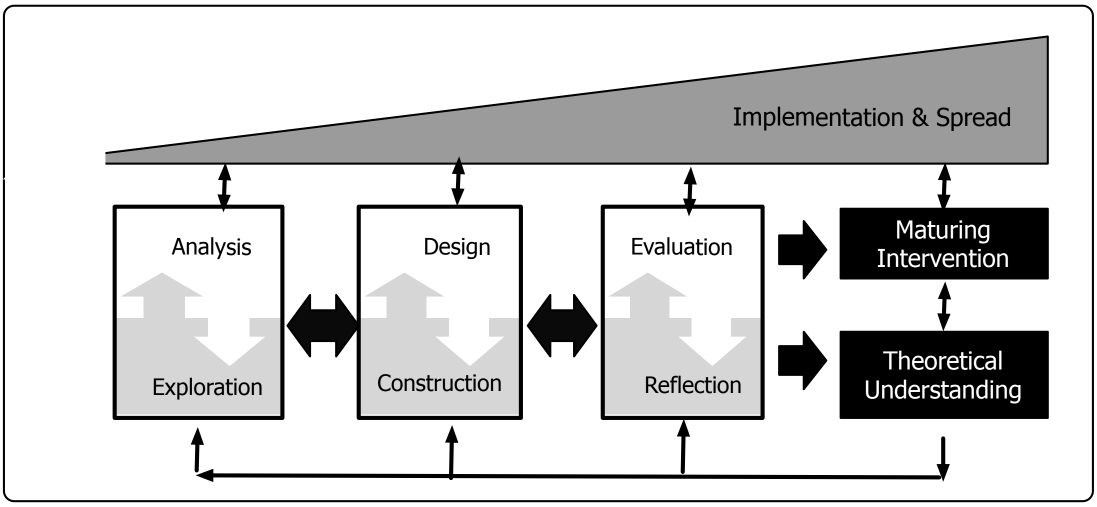


Figura 5.2. Modelo general para la realización de la investigación de diseño "(Fuente: McKenney y Reeves, 2014, p.135)".

En nuestra investigación seguimos el modelo denominado estructura general de una investigación de diseño propuesto por Molina et al. (2011) y que ha sido desarrollado en el marco del grupo de investigación FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada en el cual se enmarca esta investigación (véase figura 5.3). Consideramos que este modelo establece descriptores de las componentes en una investigación de diseño y da cuenta de su nivel de complejidad.

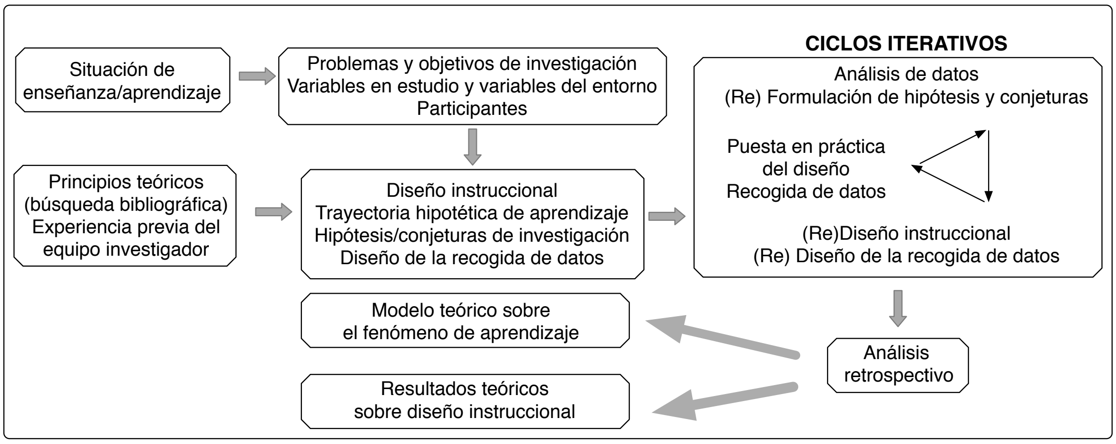


Figura 5.3. Estructura general de una investigación de diseño (Molina et al., 2011)

5.2. Experimento de enseñanza

Como lo mencionamos anteriormente, los experimentos de enseñanza se enmarcan dentro del paradigma de la investigación de diseño. Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000, citado en Molina et al., 2011). El experimento de enseñanza consta de tres fases: (a) preparación, (b) experimentación[2] y (c) análisis (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la tabla 5.1 mostramos las acciones a desarrollar en cada una de las tres fases del experimento de enseñanza.

Tabla 5.1
Acciones a realizar en las fases del experimento de enseñanza

Fase de preparación
Definir el problema y los objetivos de investigación.
Identificar los objetivos instruccionales.
Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos.
Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos.

[2] En nuestra investigación a la fase de experimentación también la llamaremos implementación. En ese sentido usaremos los términos experimentación e implementación para referirnos indistintamente a la segunda fase del experimento del enseñanza.

Tabla 5.1

Acciones a realizar en las fases del experimento de enseñanza

<table>
<tr><td colspan="2">Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diseñar la recogida de datos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Fase de implementación</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Antes de cada intervención</td><td>Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos.</td></tr>
<tr><td>Identificar los objetivos instruccionales de la intervención.</td></tr>
<tr><td>Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible.</td></tr>
<tr><td>Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención.</td></tr>
<tr><td>Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos.</td></tr>
<tr><td>Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">En cada intervención</td><td>Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención.</td></tr>
<tr><td>Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.</td></tr>
<tr><td>Después de cada intervención</td><td>Analizar los datos recogidos en la intervención.</td></tr>
</table>

Tabla 5.1

Acciones a realizar en las fases del experimento de enseñanza

<table>
<tr><td></td><td>Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase de análisis</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recopilar y organizar toda la información recogida.

Analizar el conjunto de los datos, lo que implica:

a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad.

b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.</td></tr>
</table>

Nota: Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza. Fuente: (Molina et al., 2011).

En la figura 5.4 mostramos el desarrollo la primera fase del experimento de enseñanza.

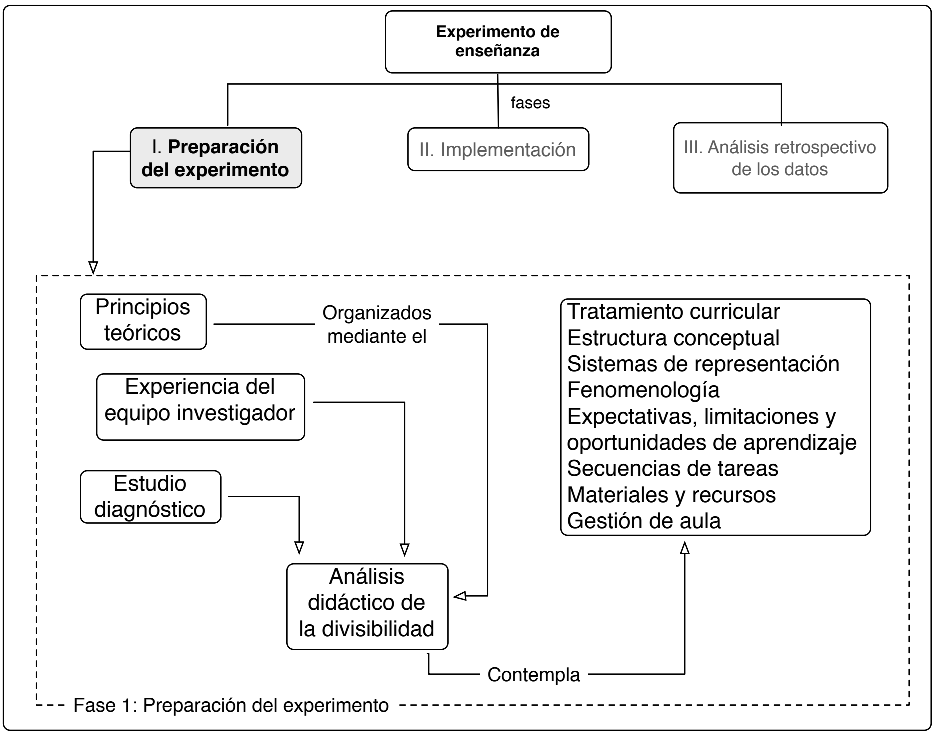


Figura 5.4. Desarrollo de la primera fase del experimento de enseñanza

En la figura 5.5 mostramos el desarrollo de la segunda fase del experimento de enseñanza. En esta fase abordamos los focos de contenido, en tres sesiones, mediante las secuencias de intervención en el aula, desde la metodología docente propia de la asignatura (véase capítulo 6).

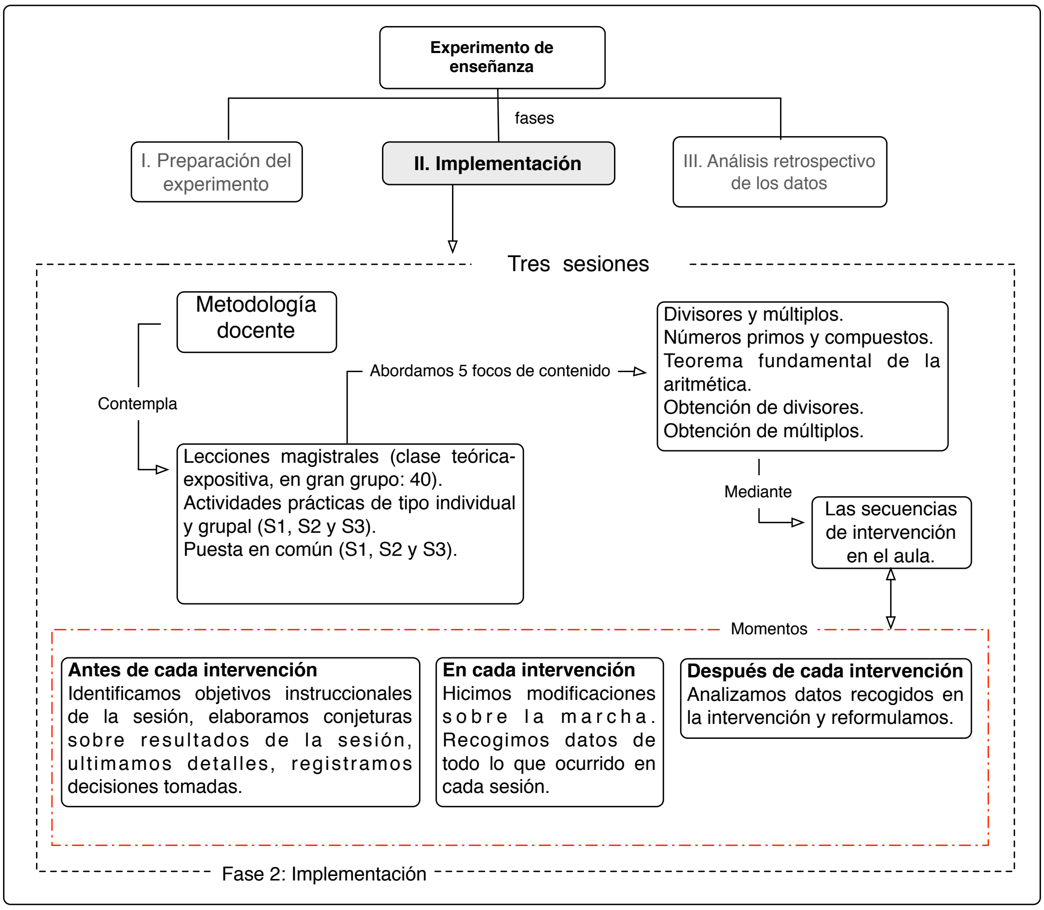


Figura 5.5. Desarrollo de la segunda fase del experimento de enseñanza

En la figura 5.6 mostramos el desarrollo de la tercera fase del experimento de enseñanza.

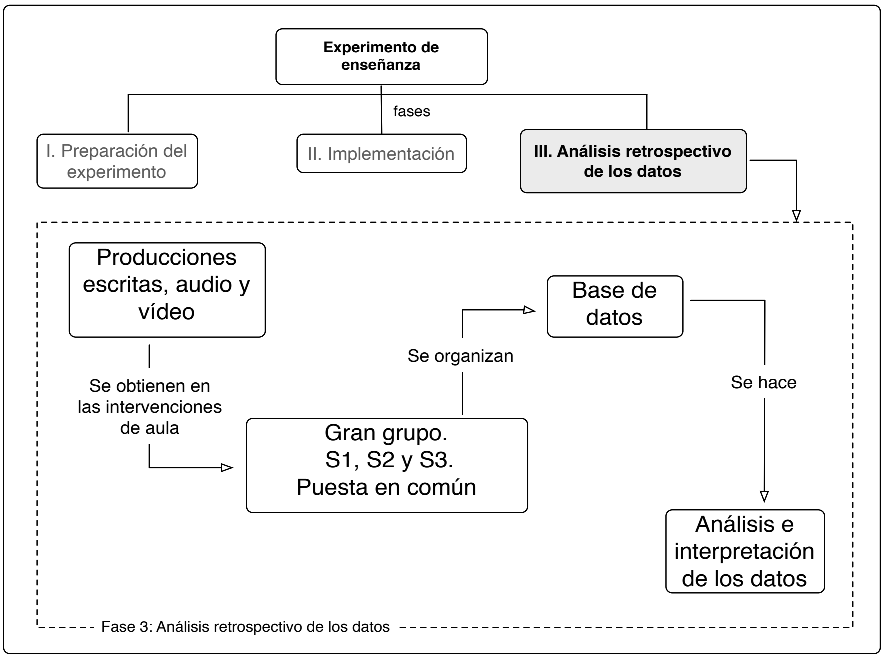


Figura 5.6 Desarrollo de la tercera fase del experimento de enseñanza

5.3. Participantes

Los sujetos de estudio fueron 40 maestros en formación, tomados intencionalmente, del curso académico 2012-2013, alumnos de la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Estos estudiantes provenían de diferentes modalidades de bachillerato (véase tabla 5.2) y 3 de formación profesional (FP). El promedio de su edad era de 21,5 años. En las tres sesiones del experimento de enseñanza la asistencia varió entre 37 y 40 estudiantes, en el capítulo 6 de esta memoria de tesis indicamos el número de asistentes a cada una de las tres sesiones.

Tabla 5.2
Número de estudiantes por modalidad de bachillerato

Modalidad de bachillerato	Nº
Artes	1
Ciencias Naturales	5
Ciencia y Tecnología	5
Humanidades y Ciencias Sociales	26

5.4. Fuentes de información y recogida de datos

Como es habitual en los experimentos de enseñanza, en cada sesión se genera una cantidad considerable de información. Esta información proviene de diversas fuentes. En esta investigación, la información proviene de: intervenciones de los maestros en formación en cada sesión (preguntas, dudas, afirmaciones, etc.), intervención de la profesora, discusión en pequeños grupos, puesta en común, producciones escritas, grabaciones de audio y de vídeo, entre otras.

Recogimos las producciones escritas de los maestros en formación y grabamos en audio o en vídeo las sesiones. En la tabla 5.3 mostramos un balance de los datos recogidos en las sesiones.

Tabla 5.3
Datos recogidos en las sesiones del experimento de enseñanza

Fuente de información	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3
Producción escrita individual. Resolución de tareas	*	*	
Producción escrita grupal. Resolución de tareas			*
Intervenciones orales (de los maestros en formación y profesora)	*	*	*
Grabación de audio	*	*	*
Grabación de vídeo	*		*

Nuestro propósito es describir los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación durante la implementación del experimento de enseñanza. En ese sentido, centramos nuestra atención, para el estudio de los significados, en las producciones escritas de los maestros en formación y, de manera complementaria, en las fuentes de información de audio y vídeo que recogen las intervenciones orales.

Para poder analizar la cantidad de datos recogidos en las tres sesiones del experimento de enseñanza, hemos desarrollado un sistema de categorías, códigos y descriptores que nos permiten procesar los datos de manera organizada.

5.5. Categorías y codificación

Para guiar el proceso de codificación en las producciones de los maestros en formación utilizamos la técnica del análisis de contenido (Bardin, 2002; Cabrera, 2009; Krippendorff, 1990). Nos basamos en la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990) para definir las categorías, subcategorías y el proceso de codificación.

Para el estudio de los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación, hemos considerado la estructura general de categorías que señalamos en la figura 5.7. Para la codificación de los datos, tenemos en cuenta dos dimensiones. En la primera, nos centramos en el énfasis en la conclusión o justificación dada en cada respuesta, en la figura 5.7 la hemos llamado Xi. En la segunda, nos centramos en el desarrollo de las producciones de los estudiantes. En este caso, consideramos como categorías los organizadores del currículo estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología.

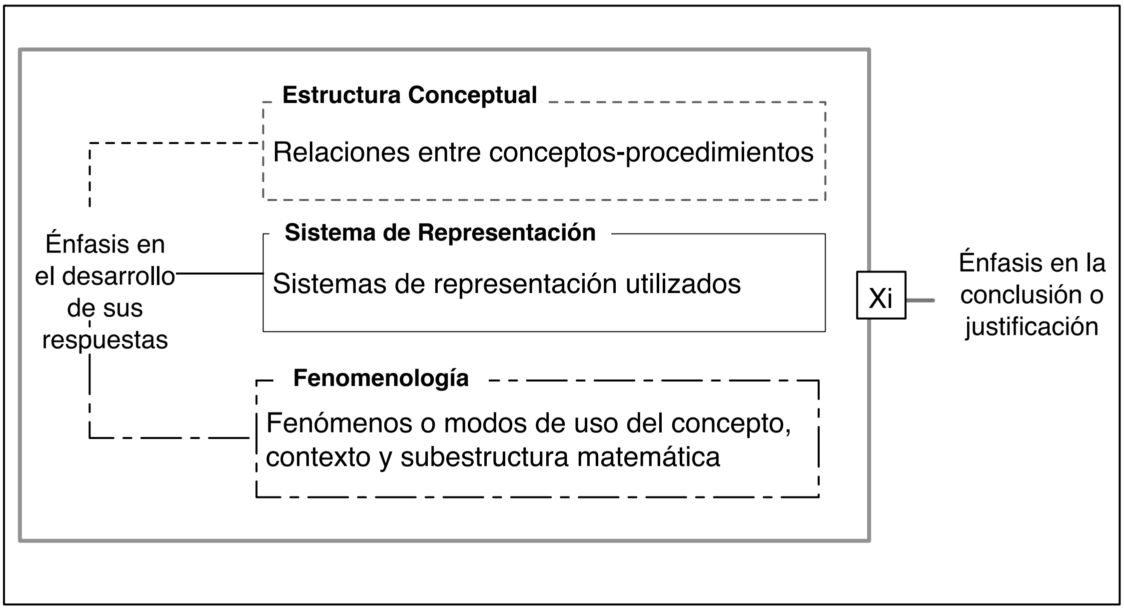


Figura 5.7. Estructura general de codificación

Las categorías surgen de tres fuentes de información: (a) los organizadores del currículo, que caracterizan al análisis de contenido dentro del análisis didáctico de la divisibilidad (estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología), (b) la revisión de la literatura y (c) la revisión de las producciones de los maestros en formación. En la figura 5.8 mostramos las categorías y su procedencia.

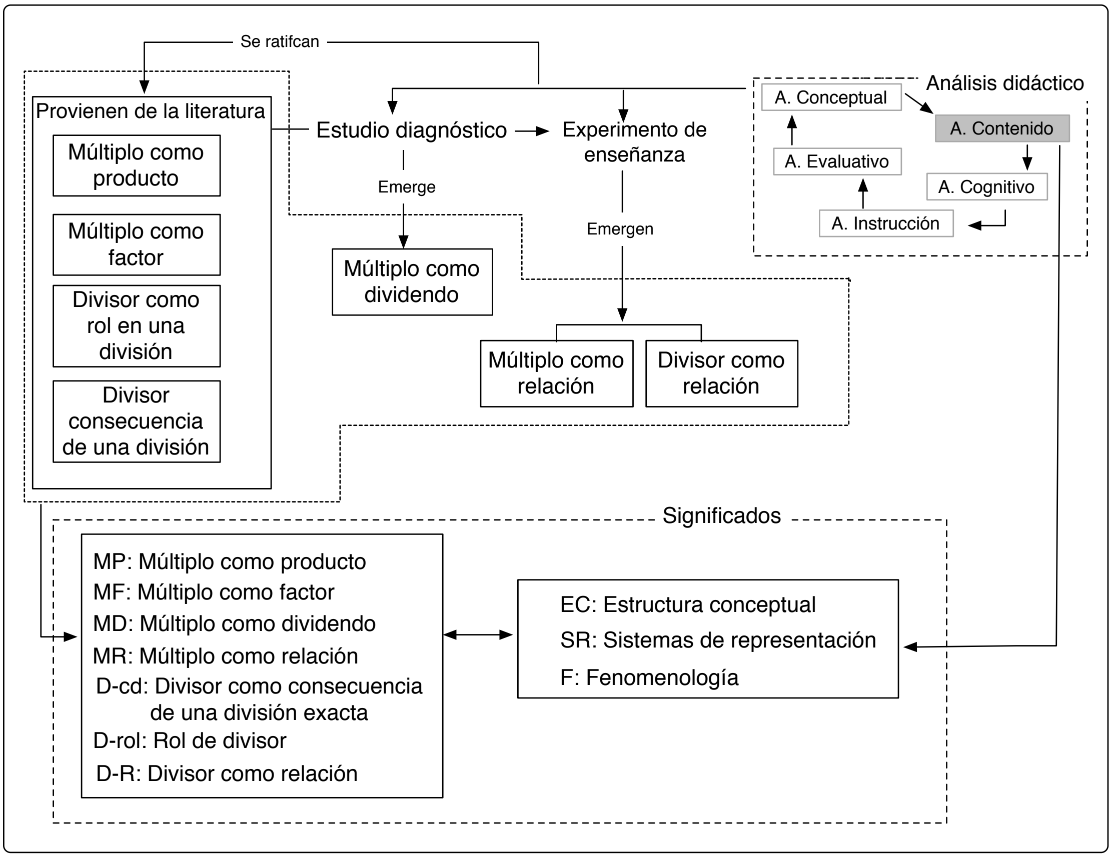


Figura 5.8. Procedencia y construcción de categorías

Como hemos mencionado anteriormente, tenemos en cuenta dos dimensiones para la codificación de los datos. En el caso de la relación ser múltiplo, en la primera observación obtenemos las categorías múltiplo como producto (MP), múltiplo como relación (MR), múltiplo como dividendo en una división (MD) y múltiplo como factor (MF). En la segunda, nos centramos en el desarrollo de las producciones de los maestros en formación. En este caso, consideramos como categorías los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología.

En la figura 5.9, se pueden observar, para la relación ser múltiplo, las dos dimensiones (énfasis en el desarrollo de las respuestas y énfasis en la conclusión o justificación) que utilizamos en la codificación de las respuestas de los maestros en formación, así como las categorías derivadas en sus producciones.

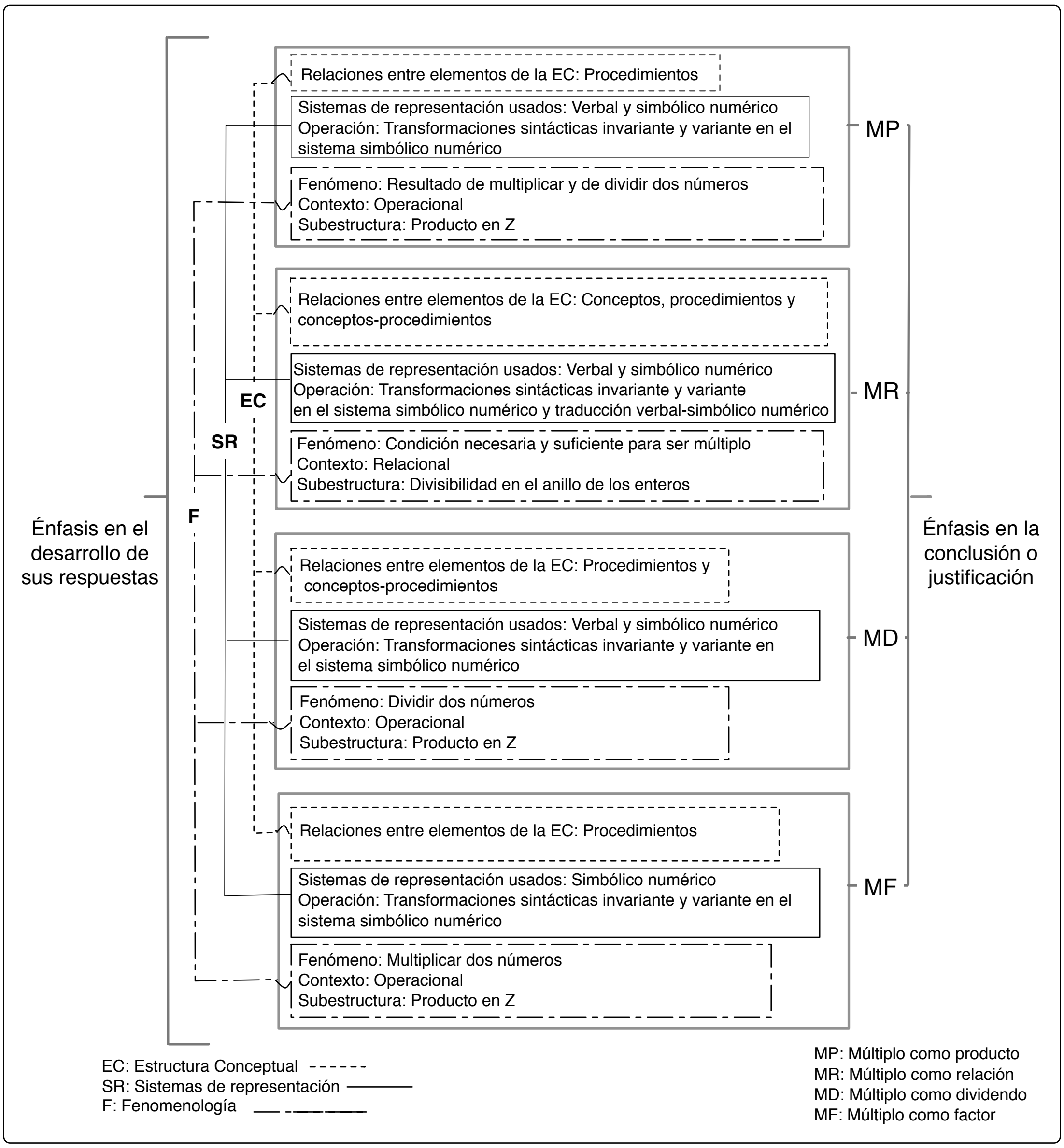
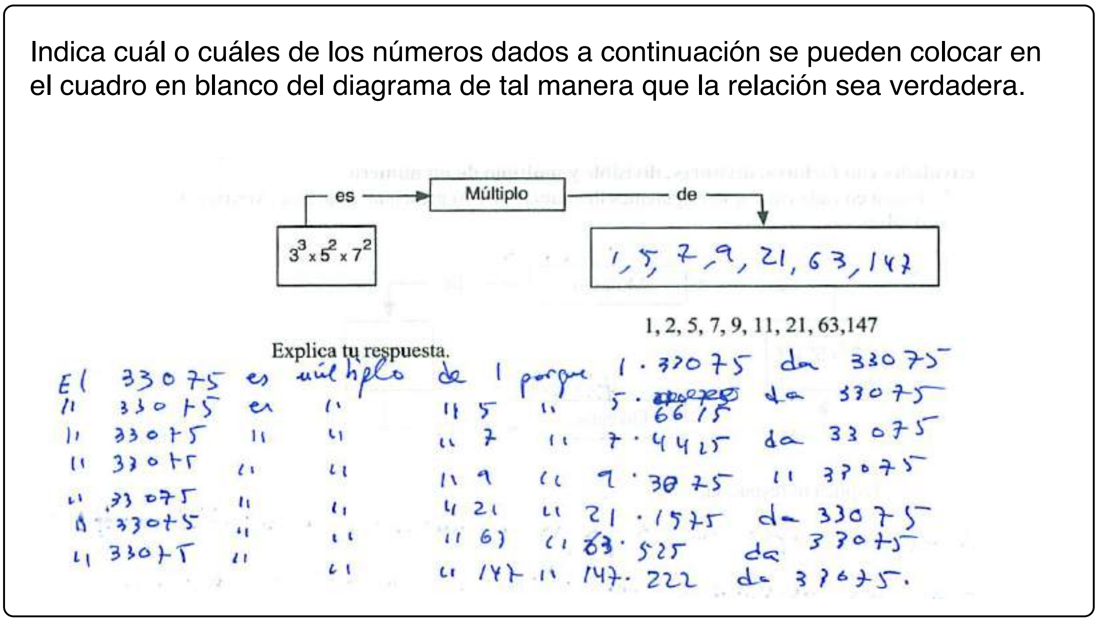


Figura 5.9. Codificación para la relación ser múltiplo

Para dar cuenta del proceso de codificación, mostramos un ejemplo de la codificación que realizamos en una tarea desarrollada por un maestro en formación al que llamaremos (E01) (véase figura 5.10). Observamos que E01 justifica que el número dado es múltiplo porque es el resultado de una multiplicación, esto es, múltiplo como producto (MP). Atendiendo al desarrollo de la respuesta dada por E01, vemos que establece relación solo entre los procedimientos asociados a las operaciones aritméticas que ha realizado. Hace transformaciones sintácticas invariantes en el sistema de representación simbólico numérico cuando dado el número en su descomposición canónica, lo pasa a su equivalente en la representación posicional en base diez. El fenómeno o modo de uso del concepto es la multiplicación de dos números que está ubicado en un contexto estrictamente operacional y asociado a la subestructura matemática (Z, $\times$).


Indica cuál o cuáles de los números dados a continuación se pueden colocar en el cuadro en blanco del diagrama de tal manera que la relación sea verdadera.

1, 2, 5, 7, 9, 11, 21, 63,147

Explica tu respuesta.

El 33075 es múltiplo de 1 porque 1 · 33075 da 33075
" 33075 es " " 5 " 5 · 6615 da 33075
" 33075 " " " 7 " 7 · 4425 da 33075
" 33075 " " " 9 " 9 · 3675 " 33075
" 33075 " " " 21 " 21 · 1575 da 33075
" 33075 " " " 63 " 63 · 525 da 33075
" 33075 " " " 147 " 147 · 225 da 33075.

Figura 5.10. Respuesta dada por E01 a la tarea T1a de la segunda sesión

En el caso de la relación ser divisor, atendiendo a la primera dimensión, obtenemos las categorías: (a) divisor como consecuencia de haber efectuado una división y que esta resulte exacta (D-cd), (b) divisor como el rol de un número en la operación de división (D-rol) y (c) divisor como la relación ser divisor (D-R). Al igual que en el caso de la relación ser múltiplo, consideramos como categorías para el análisis de las producciones de los maestros en formación, los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología.

En la figura 5.11 se pueden observar, para la relación ser divisor, las dos dimensiones (énfasis en el desarrollo de las respuestas y énfasis en la conclusión o justificación) que consideramos en la codificación de las respuestas de los maestros en formación, así como las categorías derivadas en sus producciones.

Con las dimensiones y categorías descritas, codificamos las producciones de los maestros en formación para estudiar los significados que ponen de manifiesto sobre las relaciones asociadas a la divisibilidad en el experimento de enseñanza.

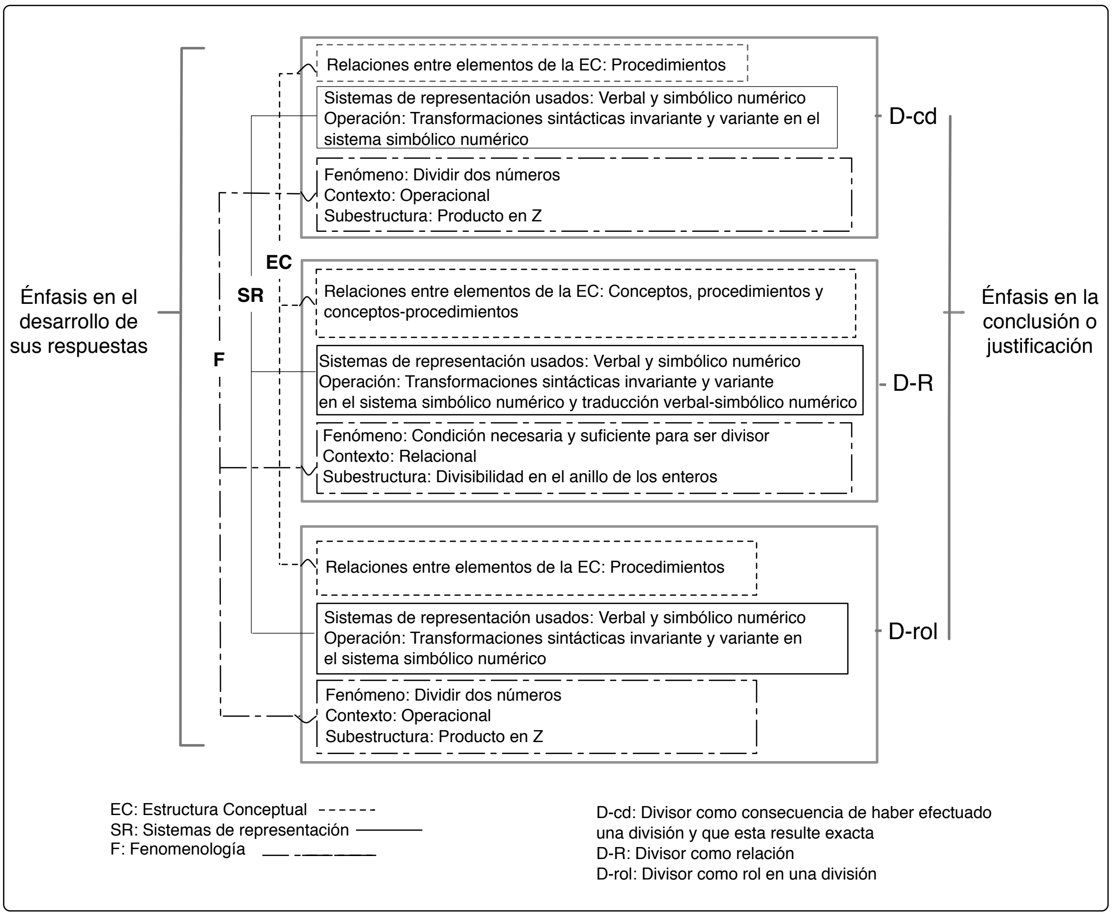


Figura 5.11. Codificación para la relación ser divisor

Llevamos a cabo una triangulación por contrastación entre los tres investigadores implicados en el trabajo, con el fin de verificar la claridad y coherencia de la codificación. En la figura 5.12 representamos el proceso de triangulación realizado.

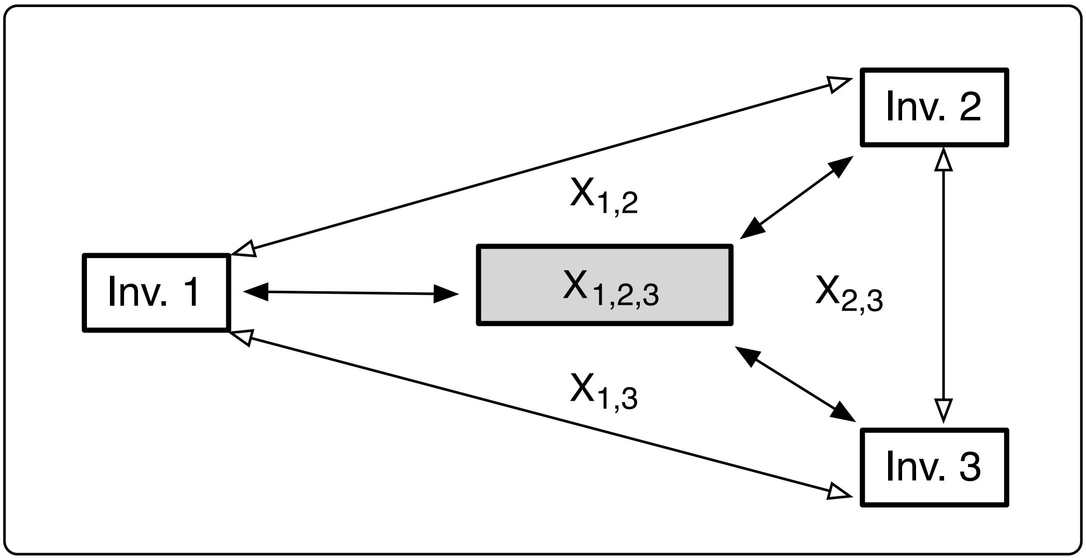


Figura 5.12. Proceso de triangulación entre los investigadores

Los Xij, de la figura 5.12, representan los momentos de discusión en pares de investigadores expresando su punto de vista y la forma como se debía codificar los datos. El recuadro identificado como Xijk representa los momentos en que se llega a un consenso y acuerdo sobre las categorías y códigos asociados a los datos. Con este proceso determinamos las categorías y los códigos definitivos con lo que llevamos a cabo la codificación. El proceso nos permitió determinar una estructura de categorías y códigos clara y coherente, la cual no daba lugar a interpretaciones diferentes.

Con el propósito de profundizar en la descripción de la representación (como componente de los significados) que utilizan los maestros en formación, decidimos tomar las tareas T4 y T5 de la segunda sesión del experimento de enseñanza (véanse figuras 6.10 y 6.11) para describir el uso que los maestros en formación hacen del teorema fundamental de la aritmética. Decidimos tomar estas tareas porque demandan el conocimiento de atributos que consideramos de interés en la representación del concepto de divisibilidad, a saber: distinguir números primos y números compuestos, descomposición canónica de un número y unicidad de la descomposición canónica. Igualmente, requieren que se identifiquen los factores/divisores explícitos y que se determinen los factores/divisores no explícitos en una descomposición canónica y, explorar en la estructura numérica para buscar propiedades o regularidades. En la figura 5.13 mostramos la estructura de los descriptores que hemos definido para hacer la descripción del uso que los maestros en formación hacen del teorema fundamental de la aritmética, en tareas de divisibilidad (López y Cañadas, 2013).

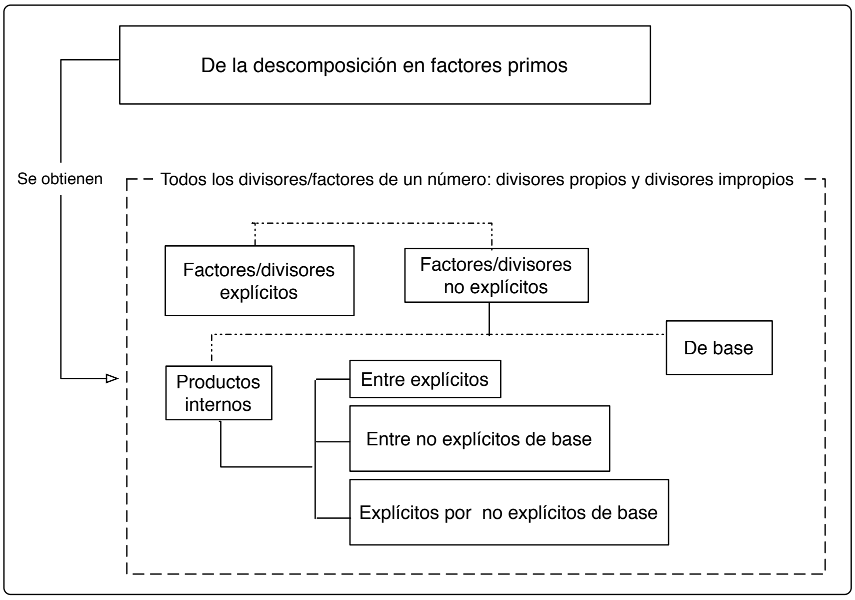


Figura 5.13. Descriptores sobre el uso del teorema fundamental de la aritmética

En las dos tareas, T4 y T5 de la segunda sesión, indagamos sobre el uso o no del teorema fundamental de la aritmética y la consideración de los factores explícitos y no explícitos en la descomposición canónica de un número. Esta información la complementamos con las grabaciones de audio y vídeo que realizamos en la segunda y tercera sesión del experimento de enseñanza.

Con base en nuestros intereses investigadores, el marco teórico y una revisión preliminar de las producciones de los maestros en formación, codificamos las respuestas a las tareas T4 y T5, de la segunda sesión, de la siguiente manera: utiliza el teorema fundamental de la aritmética (UTFA), identifica los factores explícitos en la descomposición canónica (FE), reconoce los factores no explícitos de base en la descomposición canónica (FNEB), determina los factores no explícitos de productos internos en una descomposición canónica (FNEPI). En la figura 5.14 mostramos, a manera de ejemplo, la codificación de una respuesta de un estudiante E34 a una de las dos tareas indicadas.

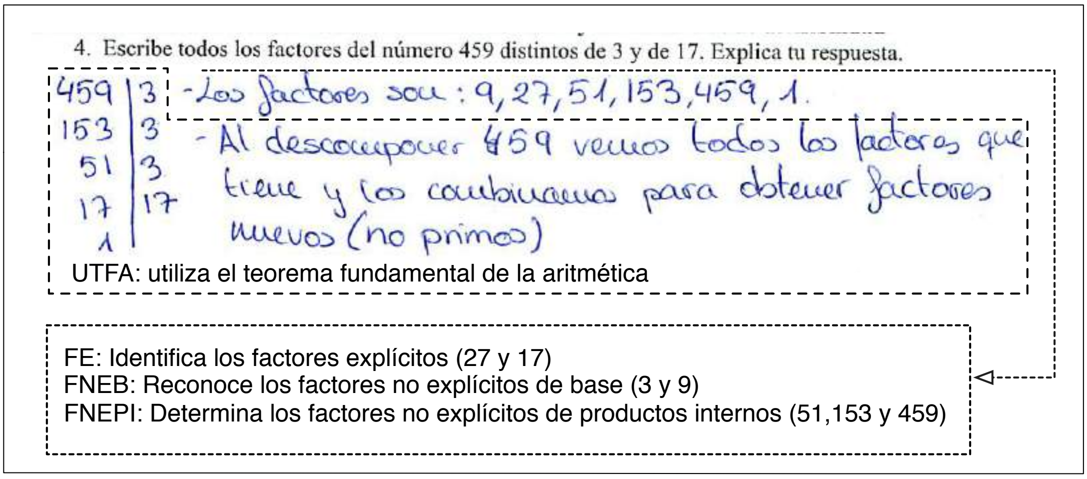


Figura 5.14. Respuesta de E34 a la tarea T4 de la segunda sesión

5.6. Organización de los datos

Para la organización de los datos, construimos una base de datos en el programa FileMaker. La base de datos quedó organizada por 17 campos y 555 registros para un total de 9435 observaciones. En la figura 5.15 mostramos los campos que consideramos en la construcción de la base de datos.

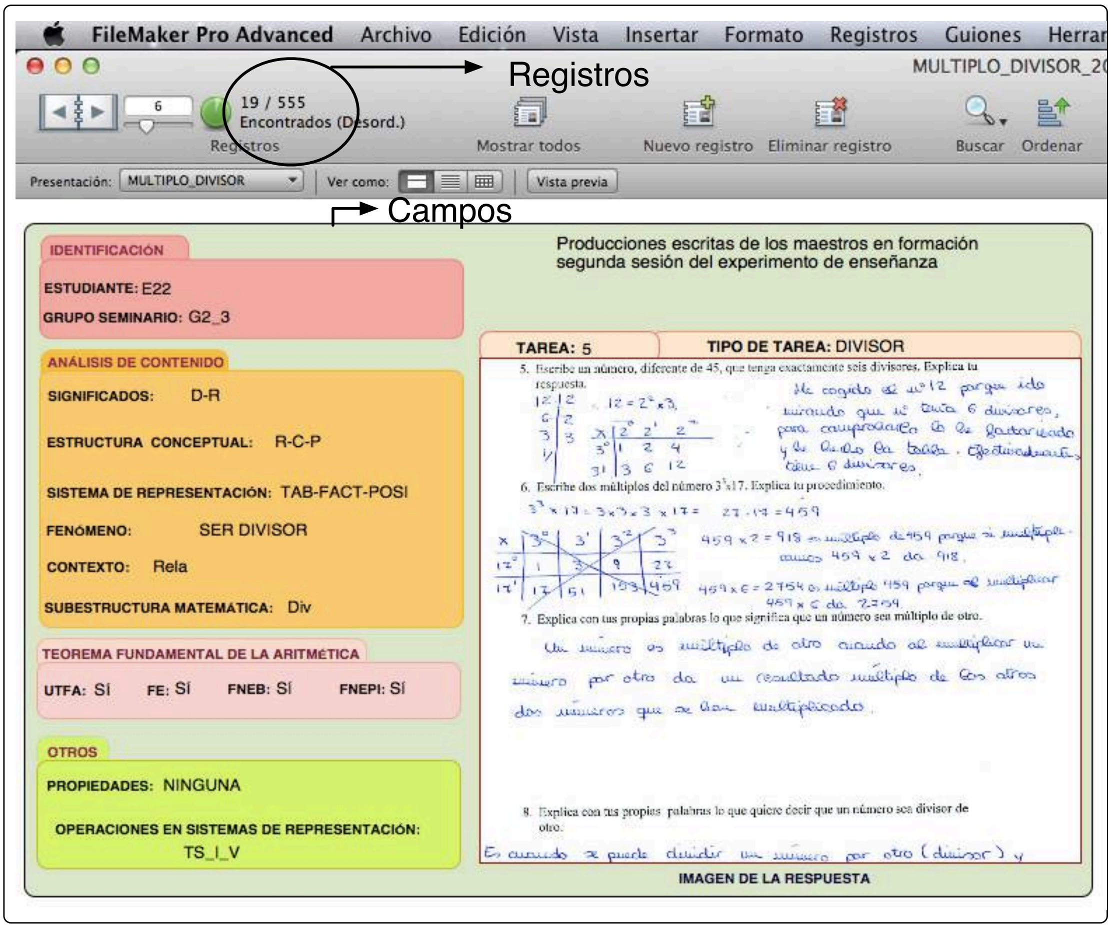


Figura 5.15. Registros y campos de la base de datos

La organización de la codificación en la base de datos nos facilitó la organización, el almacenamiento y manipulación del conjunto de datos. Con la base de datos pudimos acceder a una cantidad mayor de información porque minimiza la redundancia de los datos y con solo indicar la relación entre datos se obtiene la información requerida.

En la base de datos construida, generamos una matriz con valores de ceros y unos. Cero representa la ausencia del valor en la variable y uno representa la presencia del valor en la variable. Esta matriz la utilizamos posteriormente en el software estadístico SPSS para realizar los análisis requeridos. En la figura 5.16 mostramos, a manera de ejemplo, la forma general de la matriz que generamos desde la base de datos en la relación ser múltiplo; para su posterior procesamiento en el software estadístico.

	Estudiante				Cuestión					Significado						Estructura conceptual			Sistemas de representación							Fenómenos				Contextos		Sub. Mat	
Nº	E01	E02	E03	E37	1B	2A	3C	6	7	MP	MR	MF	MD	O	NR	PP	CC	CP	P	PV	V	FPV	FP	FV	VS	M	D	MyD	R	OP	RE	OA	DI
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Figura 5.16. Forma general de la matriz de datos para el caso de la relación ser múltiplo

También utilizamos la base de datos para la organización y almacenamiento de los datos referidos a la descripción del uso del teorema fundamental de la aritmética y para la relación ser divisor.

5.7. Análisis de los datos

Realizamos diferentes procedimientos para el análisis de los datos. En el caso de los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación sobre las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" consideramos dos tipos de análisis: análisis de frecuencias y análisis clúster.

Realizamos el análisis de frecuencias atendiendo a la primera dimensión (según el énfasis en la justificación de la respuesta). Esto nos permitió cuantificar los porcentajes de las respuestas, sobre múltiplo como producto, múltiplo como dividendo en una división, múltiplo como relación, múltiplo como factor, divisor como consecuencia de una división, divisor como relación y divisor como el rol que juega en una división.

Hicimos el análisis clúster, específicamente el análisis de conglomerados[3] no jerárquicos, con el algoritmo de k medias, atendiendo a las dos dimensiones descritas anteriormente (véanse figuras 5.9 y 5.11). El objetivo es agrupar a los estudiantes de manera que los conglomerados sean lo más homogéneos posible entre sí, en relación con la variable significado; y lo más heterogéneos posible entre ellos.

La decisión sobre el número de conglomerados la tomamos a partir de la observación de las varianzas totales para grupos con 2, 3, ..., n-2, n-1, n conglomerados. Cuando los conglomerados se estabilizaron, es decir, no hay variaciones a partir de un n determinado, entonces asumimos este número n de conglomerados para aplicar el algoritmo k medias.

[3] Análisis de conglomerados (clúster): el análisis de conglomerados tiene por objeto agrupar elementos en grupos homogéneos en función de las similitudes o similaridades entre ellos (Peña, 2002, p. 219).

A pesar de que el procedimiento para determinar conglomerados trata de formar grupos que difieran, hemos considerado el estadístico F del análisis de varianza (ANOVA). Este estadístico proporciona información sobre la contribución de cada variable en la formación de los clúster. El análisis clúster nos permitió ver, de forma global, los significados que muestran los maestros en formación sobre las relaciones ser múltiplo y ser divisor, independientemente de las características particulares de cada una de las tareas.

Con respecto a la descripción del uso del teorema fundamental de la aritmética y sobre los vínculos entre las relaciones de múltiplo, divisor, factor y divisible realizamos un análisis de frecuencia tomando en cuenta el desarrollo en las producciones de los maestros en formación. Complementamos este análisis con las grabaciones de audio y vídeo de las discusiones de grupo y de la puesta en común que los maestros en formación hicieron en las sesiones del experimento de enseñanza.

Capítulo 6. El experimento de enseñanza

La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas. Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

En este capítulo describimos el experimento de enseñanza que hemos llevado a cabo. Exponemos cada una de las tres fases que lo componen: planificación, implementación y análisis retrospectivo de los datos. Para cada fase, nos referimos a cada una de las tres sesiones. Detallamos cada sesión según su naturaleza y características.

6.1. Fase I: planificación

En esta primera fase del experimento de enseñanza describimos la planificación que realizamos para cada una de las tres sesiones. En la planificación de las sesiones, consideramos algunos aspectos generales que tienen en común cada una de ellas y también aquellos aspectos que son propios de cada sesión. La descripción de esta fase la hacemos en el siguiente orden: número de la sesión, tipo de grupo que asistió a la sesión, expectativas de aprendizaje, contenidos desarrollados, tareas que hicieron los maestros en formación durante el desarrollo de la sesión y la metodología seguida en el aula.

Sesión 1

Objetivo
El objetivo de investigación en esta primera sesión es poner en contacto a los estudiantes con los conceptos asociados a la divisibilidad desde una perspectiva relacional y detectar dificultades sobre el tema.

Tipo de grupo
Para la primera sesión se planificó una clase de grupo completo definida así en el programa de la asignatura (anexo A) y en la Guía Docente de la Asignatura (anexo B). Se prevé la participación de estudiantes asignados administrativamente a un grupo específico, en este caso al grupo B. La clase de grupo completo es una clase teórica en la cual participan todos los estudiantes asignados administrativamente al grupo B.

Expectativas de aprendizaje
Para esta primera sesión hemos planteado ocho objetivos instruccionales que se desprenden del análisis didáctico sobre divisibilidad; que hemos realizado y descrito en el apartado 4.3 .

1. Reconocer y expresar adecuadamente la relación directa entre los términos: múltiplo y divisible.
2. Reconocer y expresar adecuadamente la relación directa entre los términos divisor y factor.
3. Reconocer y expresar adecuadamente la relación inversa entre los términos múltiplo-divisible con los términos factor-divisor.
4. Identificar y diferenciar número primo y número compuesto.
5. Reconocer el teorema fundamental de la aritmética
6. Utilizar el procedimiento para descomponer cualquier número natural, mayor que uno, en producto de factores primos.
7. Reconocer los factores-divisores explícitos en una descomposición canónica.
8. Determinar los factores-divisores no explícitos en una descomposición canónica.

Contenidos
En la tabla 6.1 mostramos los contenidos matemáticos que se desarrollaron en la primera sesión.

Tabla 6.1
Contenidos matemáticos de la primera sesión

Divisores y múltiplos	Definición de la relación “a es divisor de b”.
	Definición de la relación “a es factor de b”.
	Definición de la relación “b es múltiplo de a”.
	Definición de la relación “b es divisible por a”.
	Relación entre: divisores, factor, múltiplo y divisible.
	Representaciones de divisores y múltiplos mediante modelos

Tabla 6.1

Contenidos matemáticos de la primera sesión

	(modelo lineal).
	Propiedades: divisores y múltiplos
Números primos y compuestos	Definición de número primo. Definición de número compuesto. Procedimiento para determinar si un número es primo.
Teorema Fundamental de la Aritmética	Enunciado del teorema decir cual. Unicidad del teorema igual que arriba. Procedimiento para escribir un número compuesto como el producto de factores primos. Criterios de divisibilidad.
Obtención de divisores y múltiplos	Procedimientos para determinar todos los divisores de un número a partir de su descomposición en factores primos. conjunto finito de los divisores de un número y conjunto infinito de los múltiplos de un número. Procedimientos para determinar múltiplos de un número a partir de su descomposición en factores primos.

Tareas

Diseñamos un total de seis tareas para esta primera sesión. En la tabla 6.2 mostramos la asociación de las tareas con los contenidos planificados en función de las expectativas de aprendizaje.

Tabla 6.2

Asociación entre contenidos y tareas

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Relación múltiplo divisible	*	*	*	*	*	*
Relación factor divisor	*	*	*	*	*	*
Relaciones: múltiplo-factor y factor-divisor	*	*	*	*	*	*
Números primos y compuestos					*	*
Teorema fundamental de la Aritmética					*	*

Estas tareas son para introducir el tema de divisibilidad. En ese sentido la estructura multiplicativa concreta que hemos utilizado en el diseño de las tareas es muy sencilla y la presentamos con dos factores, cuyo cálculo no amerita instrumento alguno ($24 = 6 \times 4$). También utilizamos la misma estructura multiplicativa escrita en su descomposición canónica $24 = 2^3 \times 3$.

- Tarea 1.

La primera tarea (véase figura 6.1) la denotamos T1. Esta tarea que hemos seleccionado es una adaptación que hicimos del primer ejemplo sobre relaciones de divisibilidad que aparece del libro recomendado, en la bibliografía fundamental, en la Guía Docente de la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria del año lectivo 2012-2013. En esta tarea presentamos las relaciones asociadas a la divisibilidad desde una estructura multiplicativa concreta. Decidimos comenzar con esta tarea por su sencillez y claridad para mostrar desde la estructura multiplicativa las relaciones asociadas a la divisibilidad. Las relaciones de divisibilidad en las matemáticas escolares, sobre todo en primaria, están ligadas en abrumadora mayoría a las operaciones aritméticas de división o multiplicación, y con esta tarea nos proponemos mostrar la divisibilidad como relación entre números; desde un ejemplo concreto.

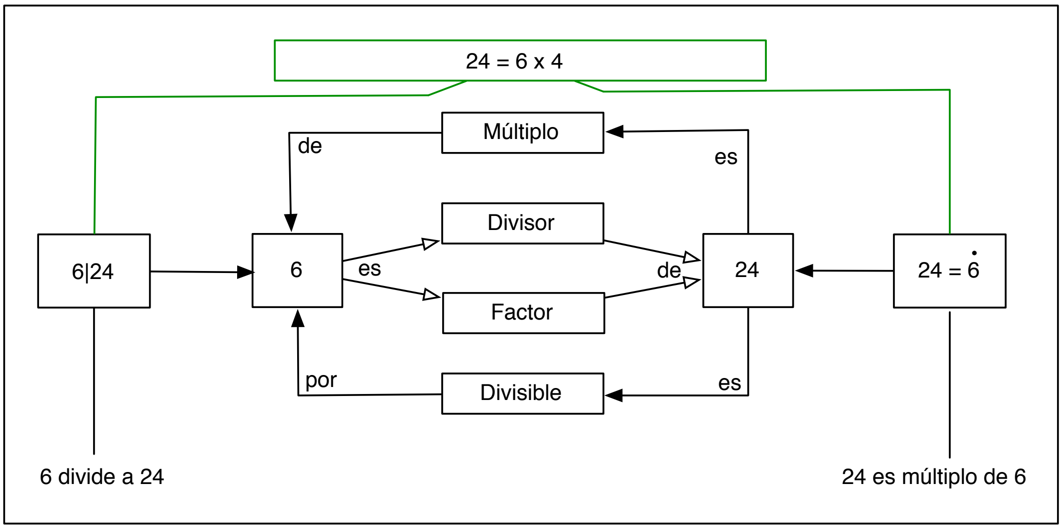


Figura 6.1. Tarea 1: T1

En esta primera tarea se plantean distintas formas de leer la estructura multiplicativa. La intención de colocar la estructura multiplicativa en el diagrama es tratar de romper la lectura de izquierda a derecha que tradicionalmente se hace y que se ve reforzada con la escritura y lectura dada por las reglas del lenguaje. Una lectura de la estructura multiplicativa más general permite identificar y descubrir información importante sobre los términos múltiplo, factor, divisor o divisible en la estructura multiplicativa dada. En esta tarea también destacamos las notaciones dadas desde la teoría de números para las relaciones de divisibilidad. El sistema de representación que hemos utilizado es el numérico posicional de base diez.

- Tarea 2.

Con la segunda tarea (véase figura 6.2) pretendemos mostrar que la lectura de la estructura multiplicativa desde el diagrama es dinámica. Para lograr esto hemos utilizado los mismos números, el mismo diagrama que en la tarea T1 y la misma estructura multiplicativa. Sin embargo, hemos modificado la ubicación de los números dados en la estructura multiplicativa en el diagrama y dejado en blanco los espacios para escribir los términos múltiplo, divisible, factor y divisor según sea la relación entre los números que forman la estructura multiplicativa dada.

Otro aspecto que destacamos en esta tarea es que la atención la queremos centrar en la relación entre los números dados en la estructura multiplicativa y no en el cálculo con operaciones aritméticas con esos números. Esta tarea la desarrollan los maestros en formación y las producciones escritas son recogidas para el posterior análisis de la sesión.

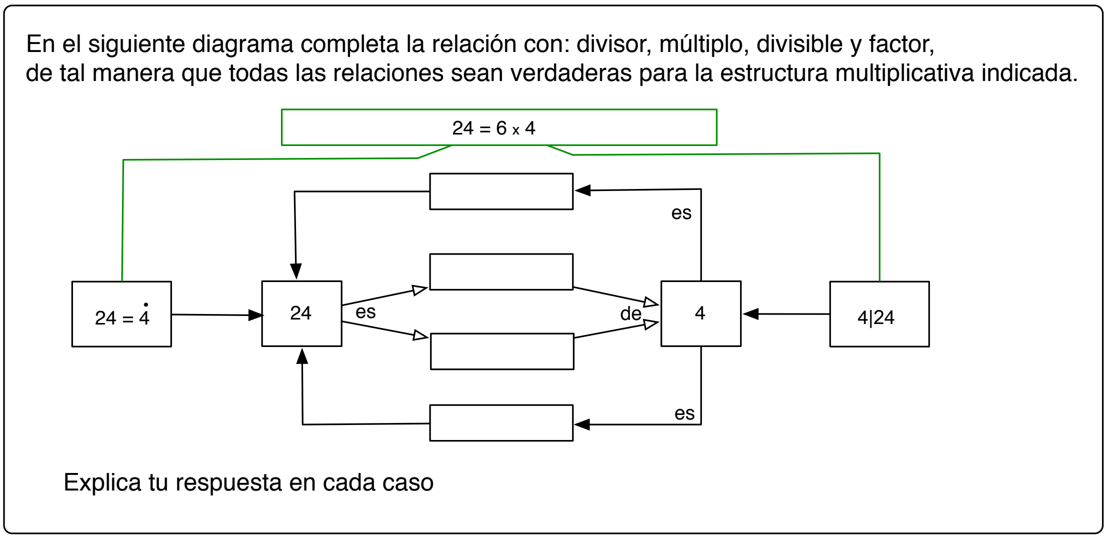


Figura 6.2. Tarea 2: T2

- Tarea 3.

En esta tarea T3 (véase figura 6.3) utilizamos el diagrama para colocar la estructura multiplicativa general y no un caso particular. La intención en esta tarea es tratar de consolidar la lectura en el diagrama de las relaciones de divisibilidad y de la estructura multiplicativa general.

En esta tarea T3 la escritura de la estructura multiplicativa la hemos hecho utilizando el sistema de representación simbólico (simbolismo algebraico). Con esta tarea pretendemos también que los estudiantes identifiquen cada uno de los elementos de la estructura multiplicativa general y puedan compararlos con los casos específicos dados en las dos tareas anteriores.

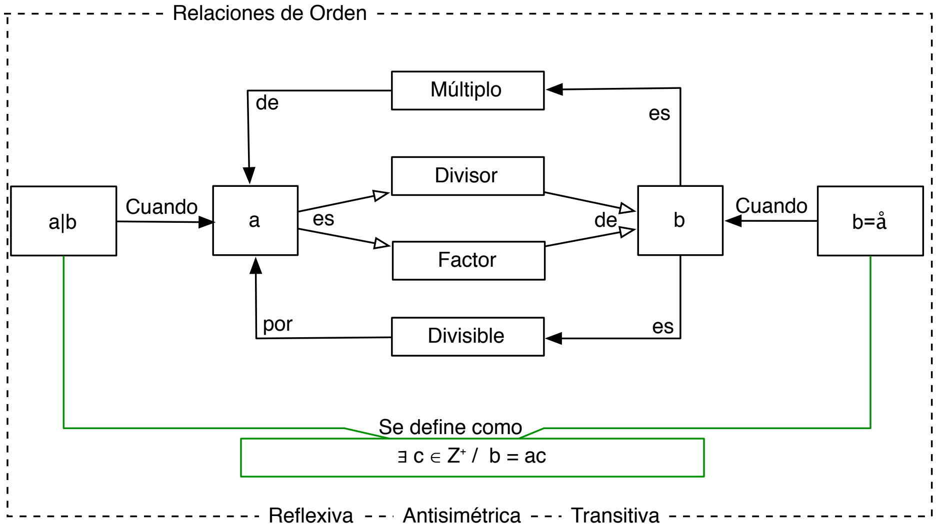


Figura 6.3. Tarea 3: T3

- Tarea 4.

En la tarea T4 (véase figura 6.4) nos proponemos mostrar desde el diagrama lo dinámico de la lectura y escritura de la estructura multiplicativa. Para esta tarea T4, sobre el mismo diagrama de la tarea T3, hemos cambiado la ubicación de las relaciones y los estudiantes tienen que escribir en los espacios en blanco los términos múltiplo, factor, divisor y divisible; según sea el caso. La estructura multiplicativa general está escrita en el sistema de representación simbólico (simbolismo algebraico). Esta tarea la desarrollan los estudiantes y las producciones escritas son recogidas para el análisis retrospectivo de la sesión.

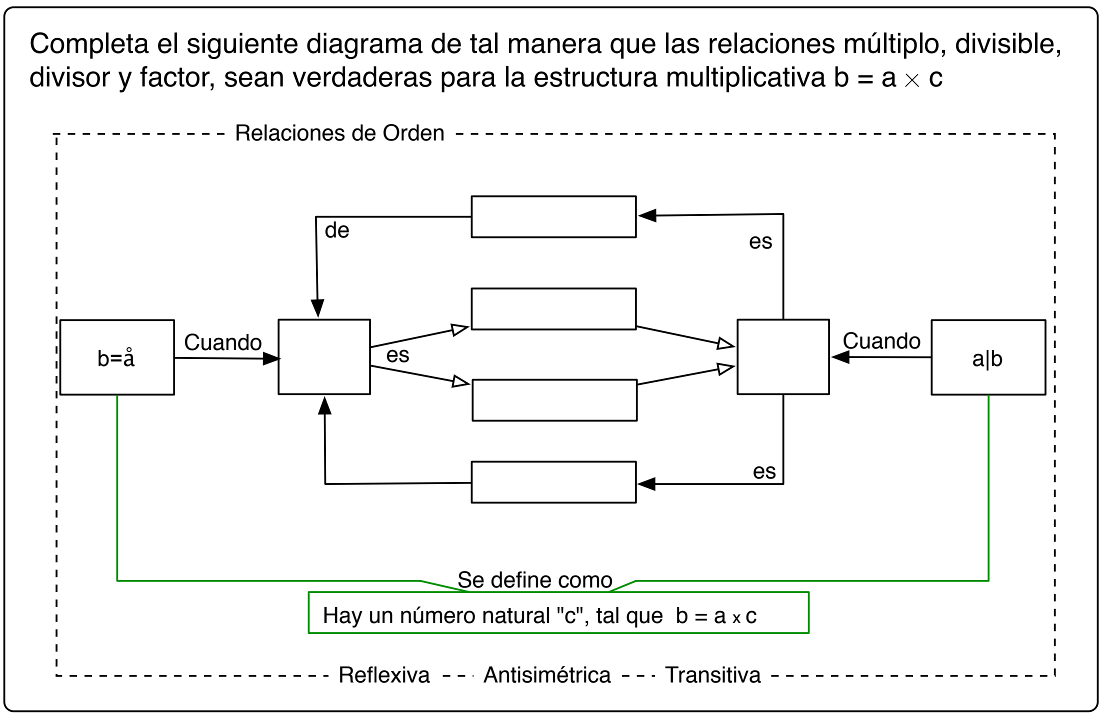


Figura 6.4. Tarea 4: T4

- Tarea 5.

En esta tarea T5 (véase figura 6.5) utilizamos el diagrama y la estructura multiplicativa la hemos escrito en su descomposición canónica. Con esta tarea pretendemos acercar a los estudiantes a la estructura multiplicativa desde otra forma de representación numérica, así como, establecer las relaciones de divisibilidad desde la escritura en factores primos. Igualmente consideramos la lectura de la igualdad desde el segundo miembro hacia el primero, esto es, una lectura de derecha a izquierda de la estructura multiplicativa. Los estudiantes desarrollan esta tarea y recogemos las producciones escritas para el análisis retrospectivo de la sesión.

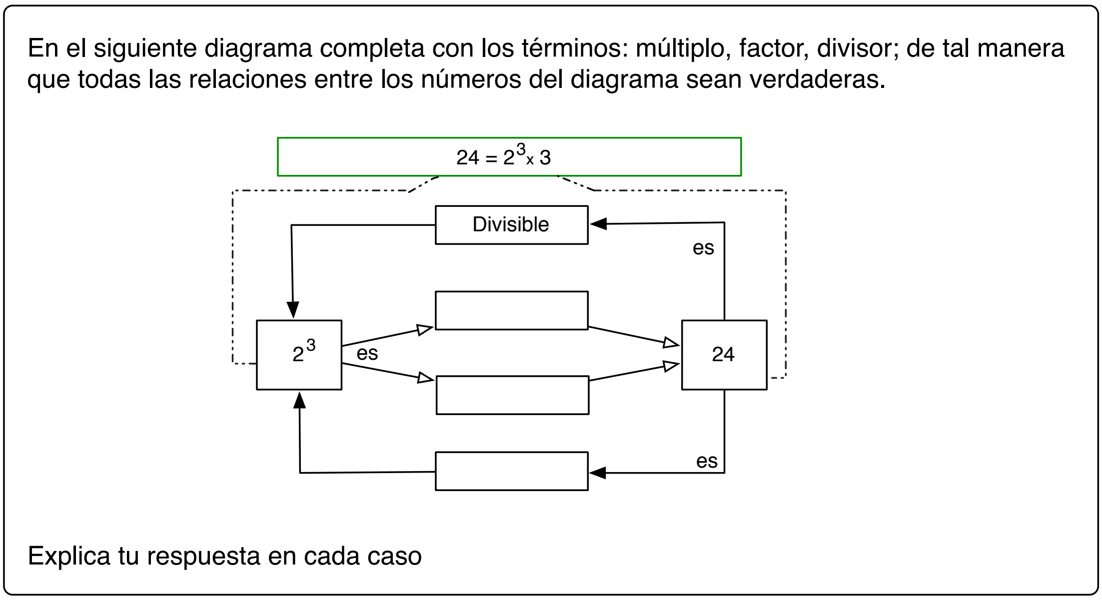
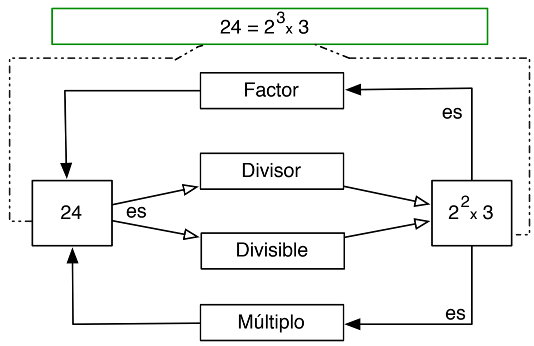


Figura 6.5. Tarea 5: T5

- Tarea 6.

En la tarea T6 (véase figura 6.6) el diagrama está cumplimentado con las relaciones de divisibilidad dadas por la estructura multiplicativa. Expresamos la estructura multiplicativa en su representación numérica canónica y pedimos a los estudiantes que decidan sobre la veracidad de cada una de las cuatro afirmaciones dadas, y que justifiquen su respuesta en cada caso.

Observa el siguiente diagrama, luego indica en cada caso, si la relación dada es verdadera o falsa. Explica tu respuesta.



a) 24 es Divisor de $2^2 \times 3$

b) 24 es Divisible de $2^2 \times 3$

c) $2^2 \times 3$ es Factor de 24

d) $2^2 \times 3$ es Múltiplo de 24

Figura 6.6. Tarea 6: T6

Metodología

En esta sesión se dio el primer contacto formal, de la investigación, con el grupo de estudiantes. Una de las investigadoras es la docente habitual de la asignatura, los otros dos los podemos considerar investigadores externos. Una semana antes del inicio de la investigación la profesora de la asignatura (docente-investigadora) presentó al grupo al investigador-autor de esta tesis doctoral y justificó su presencia en el aula durante las próximas sesiones de clase, como observador.

En la primera sesión, la docente explicó los objetivos de la investigación y manifestó la necesidad de efectuar grabaciones tanto de audio como en vídeo de las sesiones.

Una vez hecha la introducción y establecido el protocolo sobre las grabaciones de las sesiones, comenzamos con las actividades planificadas para esta primera sesión del experimento de enseñanza.

La metodología seguida fue la lección magistral (clases teóricas-expositivas en gran grupo) definida así en la Guía Docente de la Asignatura (anexo B). La primera sesión la planificamos para el gran grupo. En esta lección magistral la profesora presenta, orienta y sintetiza los temas asociados a la divisibilidad. Los alumnos reciben un Guión del tema (anexo D) que pretende orientar el trabajo en el aula y el estudio del tema. Los guiones están disponibles en la plataforma virtual (SWAD) de la UGR. Los alumnos disponen de un archivo en *PowerPoint*, que denominamos Guión del Tema (anexo D), cuya intención es que hagan anotaciones a la luz de las explicaciones de la profesora, este archivo ha sido preparado por los investigadores

En los contenidos teóricos que suponen mayor complejidad para los alumnos la profesora actúa guiando las reflexiones y análisis de los alumnos basadas en las lecturas de los textos recomendados en la bibliografía y modera posibles debates; en este caso además, los alumnos tienen la oportunidad de resolver tareas matemáticas que ejemplifican o introducen los contenidos tratados.

Sesión 2

Objetivo

El objetivo de investigación en esta sesión es estudiar dos aspectos en las producciones escritas. Por un parte, caracterizar los significados, que muestran los estudiantes, asociados a la divisibilidad con base en la terna formada por los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología, y por otra parte, describir los vínculos que sobre los términos asociados a la divisibilidad ponen de manifiesto los maestros en formación.

Tipo de grupo

El grupo que asistió a esta sesión es el de seminario; definida así en el programa de la asignatura (anexo A). Para formar el grupo de seminario el grupo completo se divide en tres subgrupos de seminario S1, S2 y S3. Cada subgrupo tiene su propio horario de trabajo. Dentro de cada subgrupo de seminario, los estudiantes están organizados en tres o cuatro personas.

La organización de tres o cuatro estudiantes en cada subgrupo de seminario la distinguimos indicando primero el seminario al que pertenece y luego el orden de la organización dentro del seminario. Así, por ejemplo S1_G1 significa que es el primer grupo que se ha organizado en el seminario uno; S2_G1 es el primer grupo que se ha organizado en el seminario dos; y S3_G2 es el segundo grupo que se ha organizado del seminario tres.

Expectativas de aprendizaje

Para la segunda sesión planteamos siete objetivos instruccionales que se desprenden del análisis didáctico sobre divisibilidad; que hemos realizado y descrito en el apartado 4.3 del capítulo 4.

1. Reconocer y expresar adecuadamente la relación directa entre los términos: múltiplo y divisible.
2. Reconocer y expresar adecuadamente la relación directa entre los términos divisor y factor.
3. Reconocer y expresar adecuadamente la relación inversa entre los términos múltiplo-divisible con los términos factor-divisor.
4. Reconocer y utilizar las propiedades de las relaciones de orden: ser múltiplo, ser divisor, ser factor y ser divisible.
5. Identificar y diferenciar número primo y número compuesto.

6. Calcular los divisores explícitos y no explícitos de un número, a partir de su representación dada por el teorema fundamental de la aritmética.
7. Calcular múltiplos de un número, a partir de su representación dada por el teorema fundamental de la aritmética.

Contenidos
En la tabla 6.3 mostramos los contenidos matemáticos para la segunda sesión.

Tabla 6.3
Contenidos matemáticos de la segunda sesión

Divisores, factores, divisible y múltiplo	Relación "*a* es divisor de *b*".
	Relación "*a* es factor de *b*".
	Relación "*b* es múltiplo de *a*".
	Relación "*b* es divisible por *a*".
	Vínculos entre las relaciones: ser múltiplo y ser divisible, ser divisor y ser factor, ser divisible y ser factor, ser múltiplo y ser divisor.
	Propiedades de las relaciones de orden.
Teorema fundamental de la aritmética	Procedimiento para escribir un número compuesto como el producto único de factores primos. Criterios de divisibilidad.
Obtención de divisores, factores y múltiplos	Procedimientos para determinar todos los divisores-factores de un número.
	Procedimientos para determinar múltiplos de un número.

Tareas
Diseñamos un total de ocho tareas para esta segunda sesión. Las tres primeras tareas T1, T2 y T3 están compuestas por más de una cuestión no así las restantes tareas. La tarea T1, por ejemplo, está compuesta por T1a, T1b, T1c y T1d (véase figura 6.7).

En la tabla 6.4 mostramos la asociación de las tareas con los contenidos planificados en función de las expectativas de aprendizaje.

Tabla 6.4
Asociación entre contenidos y tareas

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Relación ser múltiplo	*	*	*			*	*	

Tabla 6.4
Asociación entre contenidos y tareas

Relación ser divisible	*	*	*					
Relación ser divisor	*	*	*		*			*
Relación ser factor	*	*	*	*				
Vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad	*	*	*					
Teorema fundamental de la Aritmética	*	*	*	*	*	*		

A continuación describimos las ocho tareas que planificamos para la segunda sesión.

- Tarea 1

Esta tarea es una traducción y adaptación de una tarea planteada en el trabajo *prime decomposition: understanding uniqueness* de Zazkis y Campbell (1996) de la *Simon Fraser University* de Canadá. Incluimos parte del diagrama de la estructura conceptual de la divisibilidad que desarrollamos en el capítulo 4 (véase figura 4.3) y modificamos uno de los exponentes del número que está escrito en su descomposición canónica. También incluimos en la tarea la referencia explícita a la relación de divisibilidad; cuando pedimos que coloquen el número de tal manera que la relación sea siempre verdadera (véase figura 6.7). La tarea está orientada a que los maestros en formación identifiquen y justifiquen cuál o cuáles de los números dados hacen que las relaciones asociadas a la divisibilidad sean verdaderas. La resolución de la tarea está centrada en los vínculos entre las relaciones: ser divisible, ser múltiplo, ser factor y ser divisor.

Con respecto a las variables de tareas hemos incluido el diagrama de la estructura conceptual de la divisibilidad porque consideramos que centra la atención en la divisibilidad como una relación de orden y no como una operación aritmética. También utilizamos el sistema de representación simbólico numérico para la escritura de los números tanto en su forma posicional de base diez como en su descomposición canónica. Consideramos que la descomposición canónica del número permite un acercamiento a la divisibilidad, desde la perspectiva fenomenológica, diferente de las operaciones aritméticas; de los fenómenos de dividir o multiplicar dos números, y, más cerca de la relación de orden; determinar la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por otro, múltiplo de otro, divisor de otro o factor de otro.

1. Indica cuál o cuáles de los números dados a continuación se pueden colocar en el cuadro en blanco de los diagramas (a, b, c y d) de tal manera que la relación sea verdadera.

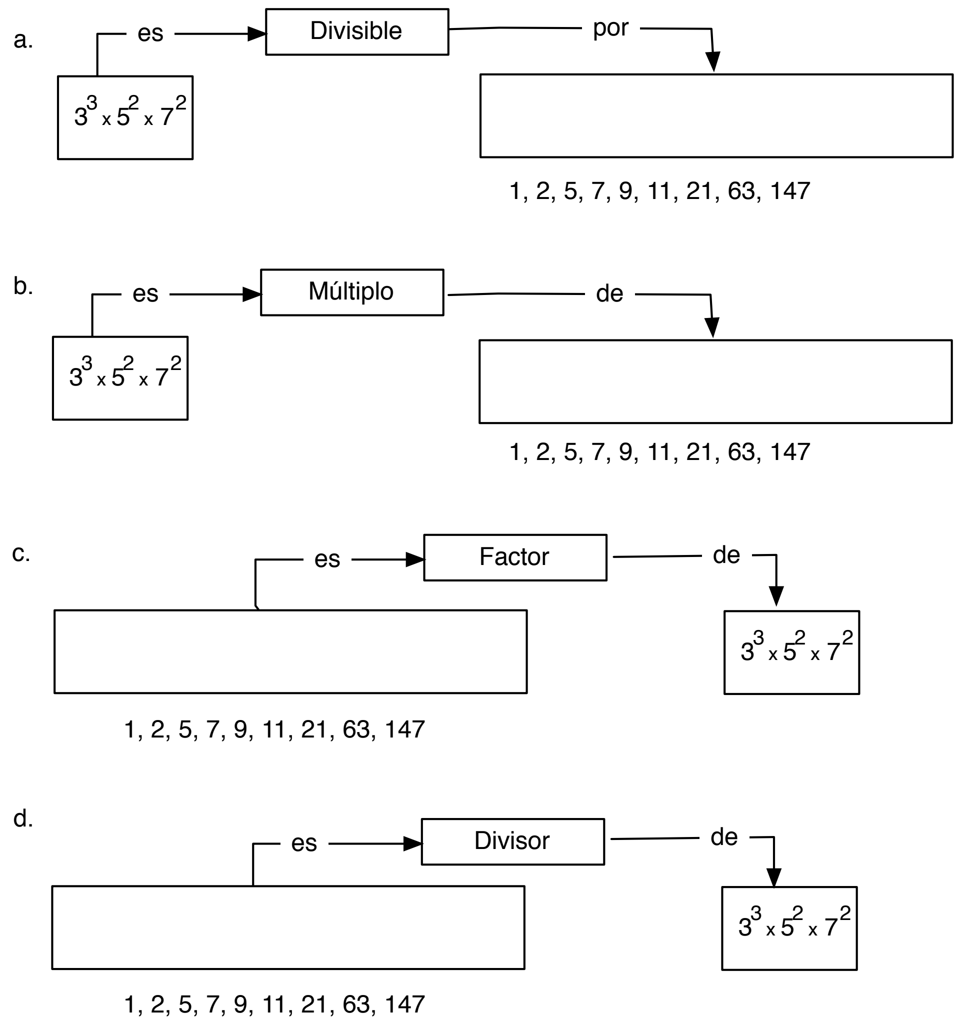


Figura 6.7. Tarea 1: T1a, T1b, T1c y T1d segunda sesión

La tarea demanda establecer vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad y conocer las condiciones necesarias y suficientes para que un número sea: divisible por otro, múltiplo de otro, factor de otro o divisor de otro. Es probable que los estudiantes también manifiesten en sus producciones las relaciones asociadas a la divisibilidad como el resultado de algunas operaciones aritméticas y no como la relación de orden.

- Tarea 2

En esta tarea los números que hemos utilizado y la representación en descomposición canónica son exactamente los mismos que la actividad planteada en el trabajo de (Zazkis y Campbell, 1999a). En la adaptación que hicimos de esta tarea incluimos dos relaciones en cada diagrama de la estructura conceptual. Las dos relaciones en cada diagrama son equivalentes entre sí ("ser múltiplo - ser divisible" y "ser divisor - ser factor") y la lectura de ellos, siguiendo las flechas, nos lleva a una contradicción (véase figura 6.8). Esta contradicción es producto de una de las propiedades de la relación de orden; la propiedad antisimétrica. Las propiedades de la relación de divisibilidad las hemos descrito en el capítulo 3 de esta memoria de tesis. La tarea está orientada a que los maestros en formación puedan identificar y establecer los vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad.

Con respecto a las variables de tarea, al igual que en la tarea 1 de esta sesión, hemos incluido el diagrama de la estructura conceptual de la divisibilidad porque consideramos que centra la atención en la divisibilidad como una relación de orden. También utilizamos el sistema de representación simbólico numérico, destacando la escritura de uno de los números en su descomposición canónica.

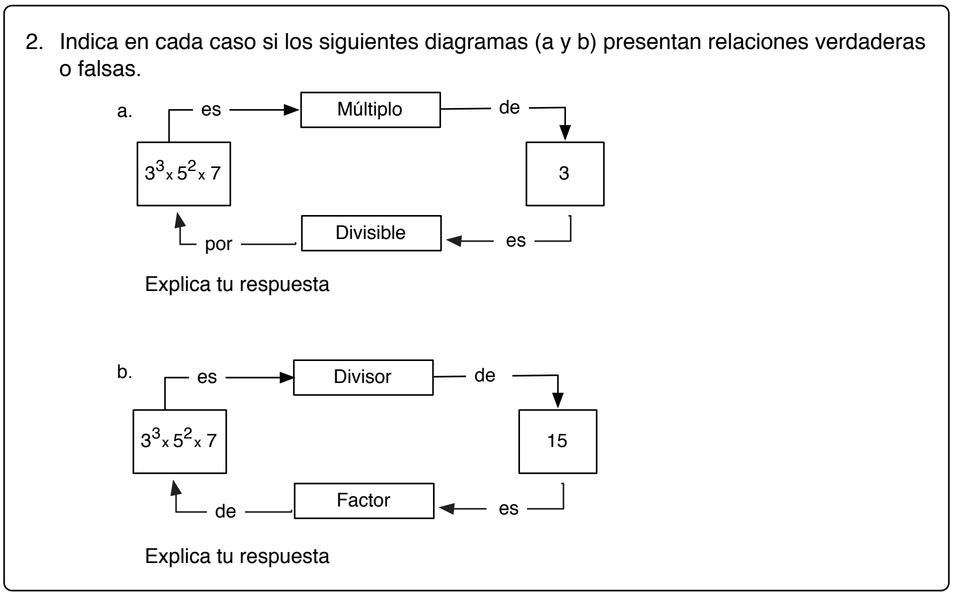


Figura 6.8. Tarea 2: T2a y T2b segunda sesión

La tarea demanda en primer lugar identificar las relaciones ser múltiplo y ser divisible como equivalentes entre sí, al igual que ser divisor y ser factor. A partir de la identificación de estas equivalencias, los maestros en formación tienen que determinar las implicaciones que se pueden o no hacer en relación con los números colocados en el diagrama. Así por ejemplo, que un número "b" sea múltiplo de otro número "a", implica que el número "b" es también divisible por el número "a", pero no que el número "a" sea divisible por "b". Aunque no descartamos que utilicen otros procedimientos diferentes en la resolución de la tarea.

- Tarea 3

En la tercera tarea de la segunda sesión (véase figura 6.9) consideramos combinaciones de dos relaciones. En cada caso, las relaciones que hemos utilizado son inversas entre sí. Igual que en las tareas anteriores hemos dispuesto del diagrama dado por la estructura conceptual de la divisibilidad, producto del análisis de contenido del análisis didáctico que desarrollamos en el capítulo 4. En esta tarea la condición de inversas entre sí queda al margen por ser los números dados equivalentes. La tarea está orientada a que los estudiantes puedan identificar y establecer los vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad, a partir de la propiedad reflexiva de la divisibilidad.

Con respecto a las variables de tarea, al igual que en las tareas anteriores de esta sesión, hemos incluido el diagrama de la estructura conceptual de la divisibilidad porque consideramos que centra la atención en la divisibilidad como una relación de orden. También utilizamos el sistema de representación simbólico numérico para expresar los números en su representación canónica y posicional de base diez.

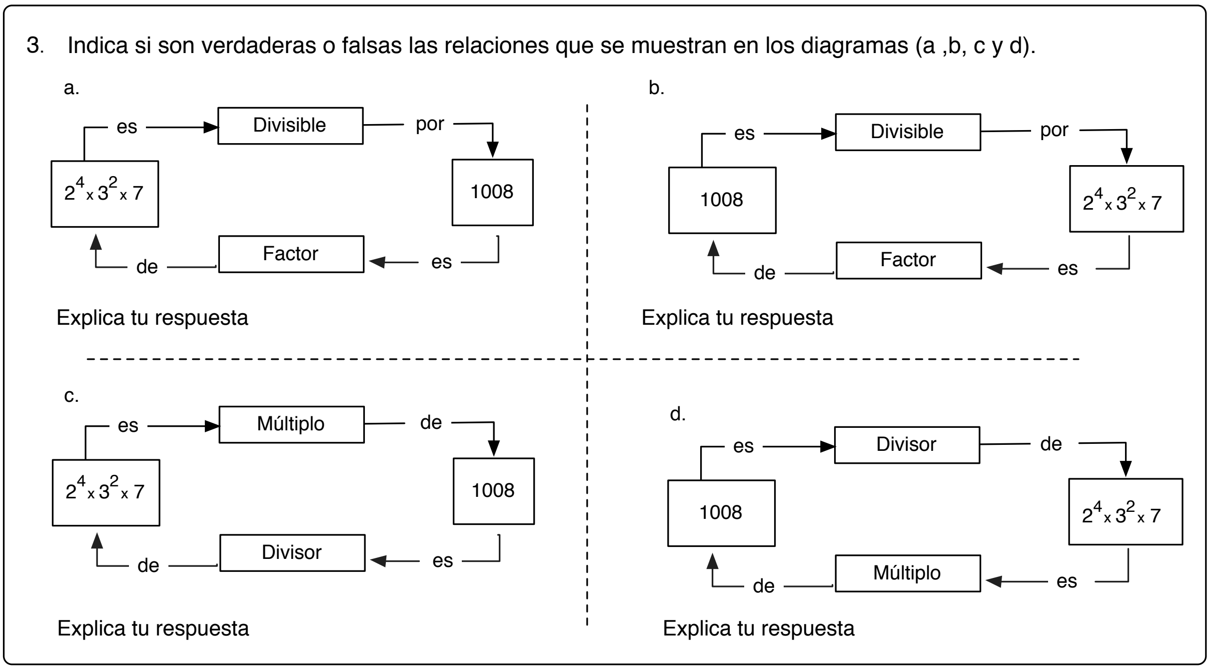


Figura 6.9. Tarea 3: T3a, T3b, T3c y T3d sesión 2

La tarea demanda identificar los vínculos entre las relaciones de divisibilidad y conocer las propiedades. Al ser los números equivalentes entre sí la propiedad reflexiva de la relación de orden puede ser de gran ayuda para resolver la tarea. Sin embargo, no descartamos que los estudiantes no identifiquen la propiedad reflexiva de las relaciones de orden y utilicen otros procedimientos más laboriosos, complicados y menos eficientes para resolver la tarea.

- Tarea 4

En esta tarea preguntamos por el conjunto de todos los números que son factores de un número dado (véase figura 6.10). Como el conjunto de todos los factores de un número entero positivo es finito, entonces es posible determinar ese conjunto. La tarea está orientada para que los maestros en formación utilicen la información dada de los dos factores primos y hagan la descomposición para luego responder.

Con respecto a las variables de tarea, consideramos el sistema de representación simbólico numérico, números primos y compuestos. También consideramos la asociación entre la descomposición en factores primos y la relación de orden "ser factor".

4. Escribe todos los factores del número 459 distintos de 3 y 17. Explica tu respuesta.

Figura 6.10. Tarea 4: T4 sesión 2

La tarea demanda distinguir números primos y números compuestos, así como la descomposición canónica de un número. Igualmente requiere que se identifiquen los factores explícitos y que se determinen los factores no explícitos en una descomposición canónica. Es probable que los estudiantes hagan la descomposición canónica del número dado y que identifiquen los factores explícitos del número sin mayores inconvenientes, pero que tengan dificultades para determinar los factores no explícitos de los productos internos en la descomposición canónica.

- Tarea 5

En esta tarea preguntamos por el conjunto finito de los divisores de un número. El número debe cumplir con la exigencia de que tenga exactamente un número determinado de divisores (seis divisores) y damos un ejemplo de otro número que cumple con las condiciones requeridas (véase figura 6.11). La tarea está orientada para que los estudiantes exploren el número dado en el ejemplo y a partir de esa exploración puedan generar diversas respuestas. Resulta de interés para nuestra investigación conocer las estrategias seguidas por los maestros en formación cuando responden a la tarea.

Con respecto a las variables de tarea, consideramos una tarea abierta cuya solución no es única. La naturaleza de la tarea da lugar a diversas respuestas. También consideramos la condición para determinar los divisores de un número y el tipo de estrategia seguido para resolver la tarea.

5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

Figura 6.11. Tarea 5: T5 sesión 2

La tarea demanda utilizar la descomposición canónica del número dado en el ejemplo y a partir de allí explorar en la estructura numérica para buscar propiedades o regularidades que se puedan extrapolar para conseguir uno de los números que cumpla con las condiciones requeridas. Es probable que los estudiantes utilicen también otros procedimientos para responder la tarea.

- Tarea 6

En esta tarea preguntamos por múltiplo a partir de una descomposición canónica. La tarea está orientada para que los maestros en formación determinen a partir de la descomposición canónica dada, sin hacer otros cálculos, dos múltiplos del número dado (véase figura 6.12).

Con respecto a las variables de tarea, consideramos el sistema de representación simbólico numérico al escribir el número en su descomposición canónica. También consideramos la condición, necesaria y suficiente, para que un número sea múltiplo de otro. La tarea es abierta y su solución no es única.

6. Escribe dos múltiplos del número $3^3 \times 17$. Explica tu procedimiento.

Figura 6.12. Tarea 6: T6 sesión 2

La tarea demanda hacer uso de la descomposición canónica para determinar los múltiplos del número dado. Aunque es probable que los maestros en formación utilicen la descomposición canónica en otro sentido, esto es, para calcular el número equivalente en su representación posicional de base diez y a partir de allí tomar las decisiones sobre múltiplo. El procedimiento seguido por los maestros en formación y su explicación al resolver la tarea es de interés para nuestra investigación. Al ser una tarea abierta esperamos una considerable diversidad de respuestas y procedimientos.

- Tarea 7

En esta tarea preguntamos sobre el significado de la relación "ser múltiplo". El significado al cual hacemos referencia en esta tarea es el significado personal de la expresión "que un número sea múltiplo de otro" (véase figura 6.13).

Con respecto a las variables de tarea, consideramos el sistema de representación verbal, así como la condición que debe cumplirse para que un número sea múltiplo de otro. Es una tarea abierta y los maestros en formación pueden expresar por escrito sus ideas, creencias, opiniones significados, etc. sobre la relación ser múltiplo.

7. Explica con tus propias palabras lo que significa que un número sea múltiplo de otro.

Figura 6.13. Tarea 7: T7 sesión 2

La tarea requiere conocer el término múltiplo y a partir de esto plantear la condición, necesaria y suficiente, que debe cumplirse para que un número sea múltiplo de otro. No descartamos que los estudiantes utilicen el término múltiplo asociado a una operación aritmética y no a la relación de orden "ser múltiplo" en el conjunto de los números enteros positivos.

- Tarea 8

En esta tarea preguntamos sobre el significado de la relación "ser divisor". El significado al cual hacemos referencia en esta tarea es el significado personal de la expresión "que un número sea divisor de otro" (véase figura 6.14).

Con respecto a las variables de tarea, consideramos el sistema de representación verbal, así como la condición que debe cumplirse para que un número sea divisor de otro. Es una tarea abierta y los estudiantes pueden expresar libremente y por escrito sus ideas, creencias, opiniones significados, etc. sobre la relación ser divisor.

8. Explica con tus propias palabras lo que quiere decir que un número sea divisor de otro.

Figura 6.14. Tarea 8: T8 sesión 2

La tarea requiere tener precisión con el término divisor por la ambigüedad que supone. El divisor puede ser visto o interpretado como el nombre que recibe uno de los números que participa en una división (dividendo, divisor, cociente y resto). También se usa divisor para expresar la relación ser divisor, este el sentido que pretendemos explorar en las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, es muy probable que en dichas respuestas estén presentes los otros dos tipos de significado e incluso el doble papel de divisor.

Metodología

La segunda sesión la planificamos para el grupo de seminario. El grupo de seminario como hemos visto en el apartado de *tipo de grupo* correspondiente a esta sesión, está conformado por tres subgrupos. La metodología seguida en esta sesión es las clases de prácticas o grupos de trabajo, definida así en la Guía Docente de la Asignatura (anexo B). En las prácticas la profesora presenta un documento mediador que sirvió como guía de prácticas (anexo E). Los maestros en formación resolvieron individualmente las tareas y luego compartieron sus impresiones con los tres o cuatro compañeros de grupo. La profesora atendió algunas dudas expresadas por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.

Sesión 3

Objetivo

El objetivo de investigación en esta sesión es complementar la información que recogimos en la sesión anterior, mediante la puesta en común, en la cual discutimos los significados de divisibilidad.

Tipo de grupo
Para la tercera sesión se planificó una puesta en común para los grupos de seminario. Cada grupo de seminario está conformado por un tercio del gran grupo, llamados S1, S2 y S3 tal como lo hemos descrito en el apartado *tipo de grupo* en la sesión 2.

Expectativas de aprendizaje
Para la tercera sesión hemos planteado seis objetivos instruccionales que se desprenden del análisis didáctico sobre divisibilidad; que hemos realizado y descrito en el capítulo 4 de esta memoria de tesis.

1. Identificar si un número es múltiplo, divisor, divisible o factor de otro a partir de la escritura de los números en su representación canónica.
2. Expresar adecuadamente la relación ser múltiplo, ser divisor, ser divisible y ser factor.
3. Establecer los vínculos entre las relaciones ser múltiplo, ser divisor, ser divisible y ser factor.
4. Identificar y diferenciar número primo y número compuesto.
5. Calcular los factores-divisores explícitos y no explícitos de un número, a partir de su representación dada por el teorema fundamental de la aritmética.
6. Calcular múltiplos de un número, a partir de su representación dada por el teorema fundamental de la aritmética.

Contenidos
En la tabla 6.5 mostramos los contenidos matemáticos para la tercera sesión.

Tabla 6.5
Contenidos matemáticos de la tercera sesión

Divisores, factores, divisible y múltiplo	Relación a es divisor de b.
	Relación a es factor de b.
	Relación "b es múltiplo de a".
	Relación "b es divisible por a".
	Vínculos entre las relaciones: ser múltiplo y ser divisible, ser divisor y ser factor, ser divisible y ser factor, ser múltiplo y ser divisor.
	El conjunto finito de los divisores.
Teorema fundamental de la aritmética	Unicidad de la descomposición en factores primos. Criterios de divisibilidad.

Tabla 6.5
Contenidos matemáticos de la tercera sesión

Obtención de divisores, factores y múltiplos	Procedimientos para determinar todos los divisores-factores de un número. Procedimientos para determinar múltiplos de un número.

Tareas
Diseñamos un total de seis tareas para esta tercera sesión. La tarea seis T6 está compuesta por más de una cuestión no así las restantes.

En la tabla 6.6 mostramos la asociación de las tareas con los contenidos planificados en función de las expectativas de aprendizaje.

Tabla 6.6
Asociación entre contenidos y tareas

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Relación ser múltiplo	*	*	*		*	*
Relación ser divisible		*			*	*
Relación ser divisor		*		*	*	*
Relación ser factor		*				*
Vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad	*	*			*	*
Teorema fundamental de la aritmética	*	*	*	*	*	*

A continuación describimos las seis tareas que planificamos para esta tercera sesión.

- Tarea 1

Esta tarea está originalmente planteada en el conjunto de preguntas dos del trabajo de Zazkis (2001) en el cual explora la red de conexiones entre los términos asociados a la divisibilidad, y al que hacemos referencia en el capítulo 2 de esta memoria de tesis (véase figura 2.4). Esta tarea la adaptamos según nuestros intereses de investigación. Utilizamos el mismo número 117 pero no presentamos la descomposición canónica del número en la tarea, como se hace en el trabajo de Zazkis (2001). En esta tarea les pedimos un listado de números (que son los factores o divisores de 117) y no preguntamos directamente por ellos, sino que utilizamos la conexión entre los términos asociados a la divisibilidad para utilizar el término múltiplo. Aunque no damos la descomposición canónica del número, al pedirles que señalen cuáles de los números del listado son primos o no, estamos haciendo una sugerencia implícita a la descomposición canónica del número (véase figura 6.15).

Con respecto a las variables de tarea, consideramos, desde el punto de vista de la estructura conceptual, los números primos y compuestos así como el conjunto finito de factores-divisores de un número y el conjunto infinito de los múltiplos de un número. El sistema de representación que utilizamos es el verbal y los fenómenos están asociados al contexto relacional.

1. Elaborad un listado de todos los número de los cuales el número 117 es múltiplo y señalad los que son primos y los que no lo son. Justificad vuestra respuesta.

Figura 6.15. Tarea 1: T1 sesión 3

La tarea demanda establecer vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad y conocer las condiciones necesarias y suficientes para que un número sea: divisible por otro, múltiplo de otro, factor de otro o divisor de otro. Es probable que los estudiantes también manifiesten en sus producciones algunas operaciones aritméticas para "probar" la divisibilidad.

- Tarea 2

En la segunda tarea de la sesión (véase figura 6.16) preguntamos por las relaciones asociadas a la divisibilidad y los números los hemos escrito en su descomposición canónica de tal manera que hacer los cálculos para representarlos en el sistema posicional de base diez no sea fácil, aún utilizando algún instrumento de cálculo. Otro aspecto que consideramos en esta tarea y que pretendemos obtener información es sobre el uso que los estudiantes hacen del teorema fundamental de la Aritmética.

Con respecto a las variables de tareas, consideramos el teorema fundamental de la aritmética (tanto la existencia como la unicidad) en la estructura conceptual, así como los números primos y compuestos; y, los vínculos entre las relaciones de divisibilidad. El sistema de representación que utilizamos es el simbólico numérico.

2. Indicad si el número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$ es: múltiplo, factor, divisor, divisible; del número $3^2 \times 5^2 \times 7$. Justificad vuestra respuesta.

Figura 6.16. Tarea 2: T2 sesión 3

La tarea demanda la comprensión del teorema fundamental de la aritmética, hacer operaciones en el sistema de representación simbólico numérico (transformaciones sintácticas variantes e invariantes), la identificación de factores-divisores explícitos en una descomposición canónica y determinar los factores divisores no explícitos en la descomposición canónica, la infinitud del conjunto de múltiplos de un número y conocer que el conjunto de factores-divisores de un número es finito.

- Tarea 3

En esta tarea preguntamos por múltiplos de un número dado (véase figura 6.17). Pretendemos que los estudiantes utilicen la descomposición canónica del número para responder a la tarea sin hacer cálculos complicados e innecesarios. El número dado está escrito en su representación canónica de tal manera que hacer los cálculos para representarlos en el sistema posicional de base diez no sea fácil, aún utilizando algún instrumento de cálculo.

Con respecto a las variables de tarea, consideramos el teorema fundamental de la aritmética (tanto la existencia como la unicidad) y el contenido de múltiplo en la estructura conceptual, así como los números primos y compuestos. El sistema de representación que utilizamos es el simbólico numérico.

3. Escribid tres múltiplos del número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$. Justificad vuestra respuesta.

Figura 6.17. Tarea 3: T3 sesión 3

La tarea demanda la comprensión de múltiplo (como una relación entre números), igualmente la comprensión del teorema fundamental de la aritmética, hacer operaciones en el sistema de representación simbólico numérico (transformaciones sintácticas variantes) y la infinitud del conjunto de múltiplos de un número.

- Tarea 4

En esta tarea pedimos que escriban divisores no primos de un número dado. El número lo hemos escrito en su representación canónica de tal manera que hacer los cálculos para representarlos en el sistema posicional de base diez no sea fácil, aún utilizando algún instrumento de cálculo. Con esta tarea pretendemos determinar si los estudiantes reconocen los divisores explícitos y no explícitos a partir de su descomposición canónica.

Con respecto a las variables de tarea, consideramos el contenido matemático del teorema fundamental de la aritmética (tanto la existencia como la unicidad) y de divisor en la estructura conceptual, así como los números primos y compuestos. El sistema de representación que utilizamos es el simbólico numérico. La solución a esta tarea no es única.

4. Escribid tres divisores no primos del número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$. Justificad vuestra respuesta.

Figura 6.18. Tarea 4: T4 sesión 3

La tarea demanda la comprensión de divisor (como una relación entre números), igualmente la comprensión del teorema fundamental de la aritmética y del conjunto de divisores de un número, y, hacer operaciones en el sistema de representación simbólico numérico (transformaciones sintácticas variantes e invariantes).

- Tarea 5

En esta tarea pedimos a los maestros en formación que escriban un número que cumpla con tres condiciones (véase figura 6.19). Estas condiciones requeridas están asociadas a establecer vínculos entre las relaciones divisor, múltiplo y divisible.

Con respecto a las variables de tarea, es una tarea abierta y cuya solución no es única. Igualmente consideramos el teorema fundamental de la aritmética (tanto la existencia como la unicidad), así como los números primos y compuestos, y, los vínculos entre las relaciones de divisibilidad. El sistema de representación que utilizamos es el verbal y simbólico numérico. Aunque es posible que algunos maestros en formación utilicen el sistema de representación tabular para organizar sus respuestas. No descartamos que utilicen la estrategia de ensayo y error haciendo operaciones aritméticas para decidir o rechazar posibilidades.

5. Escribid un número que cumpla con las siguientes condiciones:
Justificad vuestra respuesta.

a) Que tenga exactamente seis divisores.

b) Que no sea múltiplo de 3.

c) Que no sea divisible por 5.

Figura 6.19. Tarea 5: T5 sesión 3

La tarea demanda conocer muy bien los vínculos entre las relaciones de divisibilidad, así como, un conocimiento sólido sobre el uso del teorema fundamental de la aritmética (existencia y unicidad).

- Tarea 6

Esta tarea está compuesta de dos cuestiones (véase figura 6.20). Pedimos cumplimentar el diagrama en el cual hemos colocado un número y un término asociado a la relación de divisibilidad. A partir de los vínculos entre las relaciones divisible, divisor, factor y múltiplo, los maestros en formación deben tomar una decisión de tal manera que al cumplimentar el diagrama todas las relaciones resulten verdaderas.

Con respecto a las variables de tarea, esta es una tarea cuya solución no es única y que queda condicionada por la restricción que tiene sobre la relación dada en el diagrama (divisible, divisor). El número dado lo escribimos en su representación canónica dada por el teorema fundamental de la aritmética.

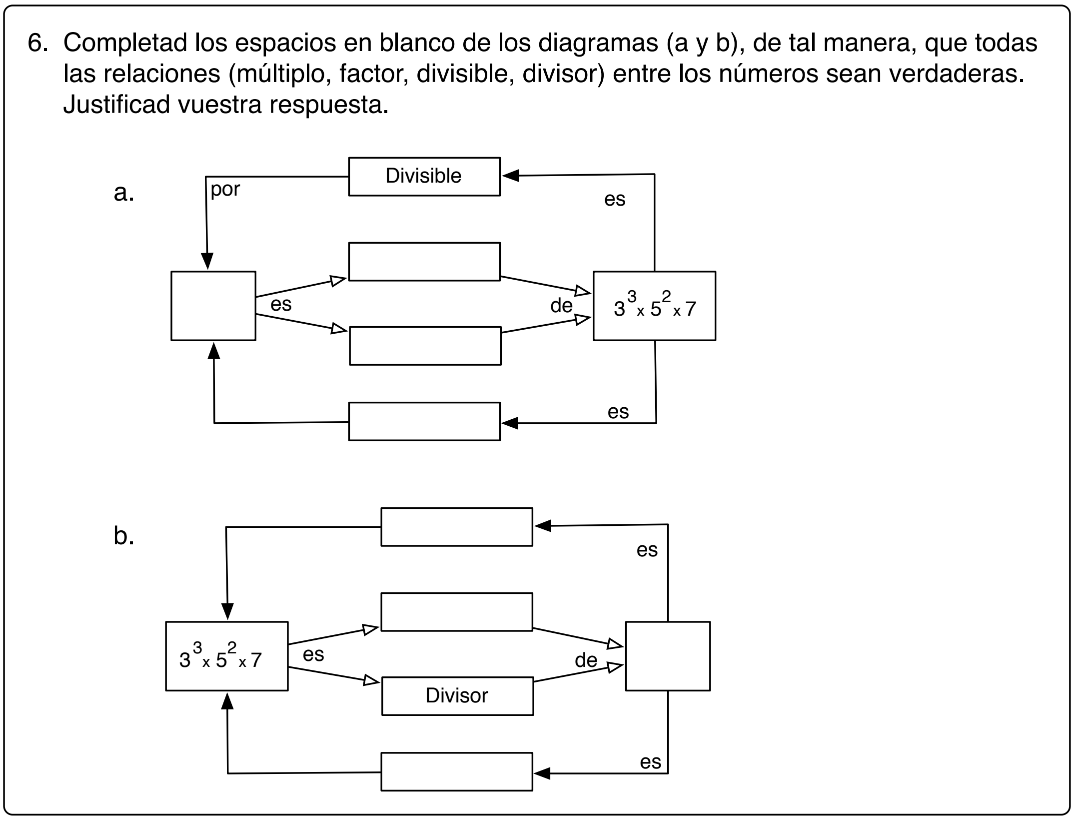


Figura 6.20. Tarea 6: T6a y T6b sesión 3

La realización de la tarea requiere conocer muy bien los vínculos entre las relaciones de divisibilidad y determinar las relaciones inversas y las que no lo son para poder completar la información requerida en el diagrama. El número que los maestros en formación deben colocar también debe responder a esas relaciones entre números.

Metodología

Para la tercera sesión planificamos una puesta en común con el grupo de los seminarios. El grupo se subdividió en tres subgrupos. Cada subgrupo está compuesto por tres o cuatro maestros en formación. En la plataforma digital SWAD se pone a disposición un cuaderno individual de trabajo (anexo F) que los maestros en formación deben ir llenando mientras realizan la práctica. Cada grupo produce un cuaderno de grupo. Se hizo una puesta en común. En cada uno de los seminarios S1, S2 y S3 un grupo seleccionado previamente (en la segunda sesión) presenta algunas tareas y las expone.

6.2. Fase II: implementación

En esta fase del experimento de enseñanza especificamos la implementación que realizamos de cada una de las sesiones. Señalamos el número de estudiantes que asistieron a cada una de las sesiones. Describimos la actuación de la profesora-investigadora y de los maestros en formación durante el desarrollo de cada sesión. Igualmente indicamos las decisiones que tomamos antes de la segunda y tercera sesión; producto del análisis que realizamos una vez finalizada la primera y la segunda sesión.

Sesión 1. Clase teórica

En esta clase de grupo completo seguimos la metodología de clases teóricas-expositivas en gran grupo, definida así, en la Guía Docente de la Asignatura (anexo B). También resolvemos las dudas que los maestros en formación plantean, durante la clase o tras la revisión de las actividades propuestas en el Guión del Tema (anexo D). Los maestros en formación pueden participar libremente en el instante de la clase que lo requieran.

La sesión se llevó a cabo el día 30 de octubre de 2012, en el horario usual de la clase, el periodo académico 2012-2013. La asistencia a la clase de grupo completo fue de 40 estudiantes.

En la sesión la profesora-investigadora presentó el contenido de divisibilidad a los estudiantes y los orientó sobre el uso de los términos y relaciones asociados a la divisibilidad. En aquellos términos, conceptos, propiedades o relaciones que los estudiantes manifestaron dificultad para entenderlos la profesora promovió la interacción entre los estudiantes para discutir o debatir sobre estas cuestiones. La interacción la promueve desde la propia duda de los estudiantes transformando la duda o dificultad de los estudiantes en objeto de estudio.

La docente comienza la sesión haciendo un breve repaso con los alumnos sobre la estructura aditiva. Posteriormente sobre la estructura multiplicativa; los alumnos participan respondiendo preguntas que sobre la estructura multiplicativa hace la docente. Después de discutir dos ejemplos sobre la estructura multiplicativa y de establecer la relación entre los elementos de una división (dividendo, divisor, cociente y resto) con los términos múltiplo, divisible, divisor y factor con los estudiantes, la profesora presenta una transparencia (véase figura 6.21) que tiene escrita la igualdad $24 = 6 \times 4$ y cuatro expresiones escritas con los términos factor, divisor, divisible y múltiplo que los estudiantes deben cumplimentar de acuerdo a la igualdad presentada.

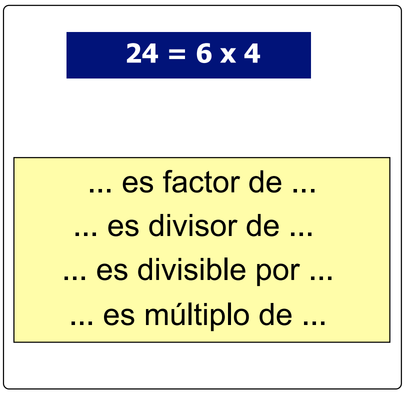


Figura 6.21. Diapositiva 1. Estructura multiplicativa y relaciones de divisibilidad

En el siguiente episodio[1] recogemos la participación de la docente (D) y los estudiantes (E) sobre la transparencia colocada.

1.1	D:	Yo he colocado aquí la expresión $24 = 6 \times 4$, entonces se pide que cumplimentéis esos puntos suspensivos. ¿Qué pondríais?
1.2	E1:	6 es factor de 24.
1.3	D:	Está bien, ahora otra.
1.4	E2:	¿En cuál?
1.5	D:	En cualquiera.
1.6	E2:	Cuatro es factor de veinticuatro. [E2 es el mismo estudiante que ha preguntado antes]
1.7	D:	También es válida. ¿Quién se anima con la siguiente?
1.8	E3:	Cuatro es divisor de veinticuatro.
1.9	D:	Vale.
1.10	E4:	Veinticuatro es divisor de cuatro y de seis.
1.11	E5:	¿Cómo? [pausa]
1.12	D:	Alguien se lo explica a...
1.13	E5:	[...] Seis no se puede dividir entre veinticuatro [pausa] bueno sí pero no da un número exacto.

[1] Los episodios están enumerados de forma general como (n.m); el primer número que se lee de izquierda a derecha (n) representa el número de episodio siguiendo el orden natural de aparición en esta memoria de tesis y en el otro (m) el número de línea en la transcripción del respectivo episodio. Así por ejemplo 3.1 significa que estamos haciendo referencia al tercer episodio y la primera línea. La letra D la utilizamos para señalar intervención del docente y la letra E a los estudiantes, los números que acompañan la letra E son para seguir el orden de intervención de los estudiantes. Por ejemplo E3 significa que es el tercer estudiante que participa en el episodio.

1.14 D: La división no es exacta, no te da un cociente entero y en el resto no es cero [pausa] ¿Quién más dice algo?

1.15 E6: Veinticuatro es divisible por cuatro.

1.16 E7: ¿Cuál digo, de múltiplo?

1.17 D: [...] Pues vamos por aquí [señala la expresión "es divisible por" de la figura 6.21] de divisible han dicho dos si quieres completar puedes decir de ese también.

1.18 E7: Veinticuatro es divisible por veinticuatro también.

1.19 D: Válido, aceptamos ¿no?... [pausa] no está escrito con esa descomposición pero nadie puede negar que veinticuatro es divisible por veinticuatro.

1.20 E8: Cuatro es múltiplo de veinticuatro.

1.21 E9: Yo tengo escrito de otra manera pero no sé.

1.21 D: Cuatro es múltiplo de veinticuatro [pausa]... ¿tu crees que cuatro es múltiplo de veinticuatro?

1.22 E9: ¡No! [pausa] veinticuatro es múltiplo de cuatro.

1.23 D: Vale [pausa] todavía no he dicho ninguna relación general que os permita identificar qué significa, por ejemplo, divisible por o múltiplo de, pero ya vais viendo que tenéis... voy viendo que tenéis ahí pues alguna idea. Fijaros [pausa] he colocado en este esquema (véase figura 6.1) alguna de las ideas que vosotros habéis dicho.

Al final de la línea 23 la docente hace referencia al diagrama de la tarea 1 (véase figura 6.1). Con la tarea T1 visible en la pantalla, la docente hizo el recorrido (siguiendo las flechas del diagrama) de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. La profesora explica la colocación de los números en el diagrama, lo que representan los símbolos (divide a... y múltiplo de...) y su lectura, e indica las relaciones (siguiendo las flechas) ser múltiplo, ser divisor, ser factor y ser divisible. Con la presentación del diagrama y la forma de lectura, la docente vuelve sobre la duda aparecida en la línea 20 del episodio anterior. En el siguiente episodio recogemos la discusión que se dio sobre la afirmación hecha por E8 en 1.20 (episodio 1 y línea 20) sobre la relación de ser múltiplo.

2.1 D: [...] Por eso la idea de antes [pausa] ¿qué pongo veinticuatro es múltiplo de cuatro o cuatro es múltiplo de veinticuatro?. Decías tu ¿no? [dirigiéndose a E8].

2.2 E1: Yo he dicho que cuatro es múltiplo de veinticuatro.

2.3 D: Ese no se puede poner ¿por qué? [pausa] sí existe un número que haga que cuatro sea igual a veinticuatro por ese número; pero no es un número natural, y lo que andamos buscando ahí es un número natural.

2.4 E2: Y porqué seis es múltiplo de veinticuatro y cuatro no; si es lo mismo.

2.5 D: ¡No!, es que seis tampoco es múltiplo de veinticuatro. Con seis tengo el mismo problema [...]veinticuatro sí es múltiplo de cuatro y de seis, pero ni seis ni cuatro son múltiplos de veinticuatro [...] si alguien lo ha dicho y lo hemos dado por válido ha sido error no puede ser.

A continuación la docente hace la presentación de la tarea 2 (véase figura 6.2) y explica en qué consiste. Adicionalmente plantea que la actividad la deben hacer en forma individual. Antes de entregar la tarea 2 a los estudiantes, la docente pregunta si hay alguna duda sobre la tarea anterior y los estudiantes responden que sí. A continuación presentamos el episodio en el cual los alumnos hicieron algunas preguntas sobre el diagrama y sobre las relaciones de divisibilidad.

3.1 D: [..] Antes de eso, ¿tenéis algo de este esquema [señalando la figura 6.1 en la diapositiva] que no sepáis, ¿cómo se lee o qué significa? [pausa] echadle un vistazo y me decís si [pausa] algo no veis.

3.2 E1: ¿Lo de factor y divisor es lo mismo?

3.3 D: Sí [pausa] aquellos dos números [señalando en pizarra la expresión $8=2\times4$] cuando ponemos ocho igual a dos por cuatro, el dos y el cuatro se puede decir que son factores o que son divisores de ocho [señalando ahora en la figura 6.1 la expresión $24=6\times4$] si seis es factor o divisor de veinticuatro significa que yo puedo poner el veinticuatro como seis por otro número natural y si aquí [señalando la parte izquierda del diagrama de la figura 6.1 donde está el número 6] en vez de seis estuviera cuatro pudiera decir lo mismo.

3.4 E2: Lo que no entiendo es la palabra factor a que [pausa]

3.5 D: Factor en este caso [señalando la expresión $8=2\times4$] dos y cuatro son factores de ocho.

3.6 E2: Porque son los que se consiguen multiplicando.

3.7 D: Porque multiplicando esos números consigo el otro [pausa] el grande como si dijéramos [pausa] el mayor [pausa] que no tiene por que ser el mayor porque hace un rato E7 decía que veinticuatro es factor de veinticuatro, porque yo puedo poner veinticuatro por uno y me da veinticuatro.

Luego de aclarar las dudas sobre la tarea 1, la docente entrega la tarea 2 (véase figura 6.2) a los estudiantes y ellos la hacen . En esta tarea los estudiantes no formularon preguntas y la terminan en cinco minutos aproximadamente, la docente recoge las producciones.

Siguiendo la misma idea de discusión que se ha hecho con los estudiantes en la diapositiva 1 (véase figura 6.21), la profesora introduce en forma general la estructura multiplicativa con la expresión $a \times c = b$. Luego presenta una diapositiva (véase figura 6.22) y hace la lectura de cada una de las afirmaciones que allí se presentan y justifica cada una de ellas.

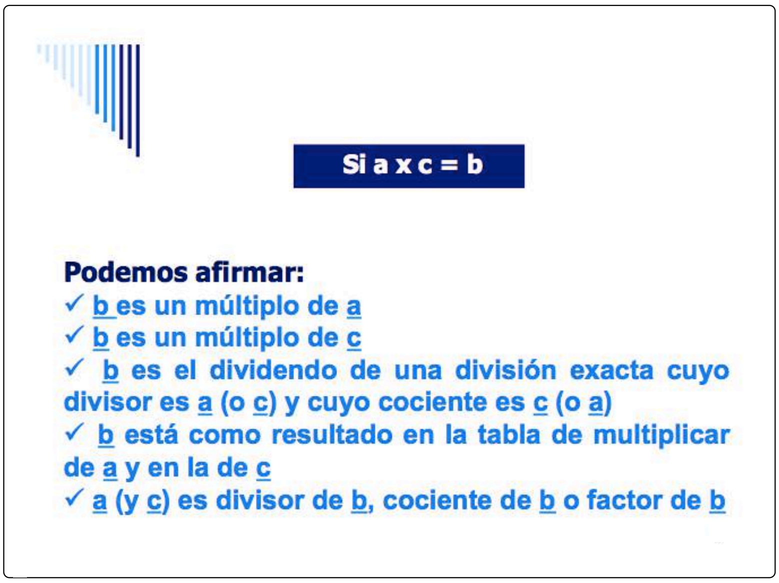


Figura 6.22. Diapositiva 2. Estructura multiplicativa y relaciones de divisibilidad

Después de explicar cada una de las afirmaciones presentes en la diapositiva 2 (véase figura 6.22) y preguntar a los alumnos si tienen dudas sobre la ubicación en la escritura de la estructura multiplicativa general de cada uno de los elementos, los términos utilizados y la relación entre cada uno de ellos, la profesora presenta la tarea 3 (véase figura 6.3) y hace referencia a la analogía de este diagrama con el anterior (véase figura 6.2) y destaca la generalización en este nuevo diagrama presentado.

En el siguiente episodio describimos cómo fue discutida con los alumnos esta tarea.

4.1 D: [...] Aquí es un esquema análogo al anterior, pero está escrito de manera genérica. Aquí [señalando la expresión $a|b$ en la parte izquierda del diagrama] ya lo habíamos puesto antes [pausa] esto

¿qué significaba?

4.2 *Es:* Que "a" divide a "b" [en forma simultánea varios estudiantes].

4.3 *D:* Que "a" divide a "b" sí [pausa] eso lo habíamos puesto antes y ¿esto? [señala en la parte derecha del diagrama la expresión $b = \mathring{a}$].

4.4 *Es:* Que "b" es múltiplo de "a" [en forma simultánea varios estudiantes].

4.5 *D:* Sí, [pausa] que "b" es múltiplo de "a" [pausa] en general esto que habíamos dicho antes pero que no había quedado escrito [refiriéndose a la expresión $b{=}a{\times}c$] ¿cuándo puedo yo decir que "a" divide a "b"? [pausa] cuando yo puedo poner "b" como "a" por otro número natural, eso es lo que viene a decir aquí [señalando la última parte del diagrama en la cual está escrita la estructura multiplicativa en forma general]. La docente escribe en la pizarra la expresión $a|b$ y la lee en voz alta ("a" divide a "b") ¿eso qué significa?, que yo puedo poner "b" como "a" por "c" [escribe la expresión $b{=}a{\times}c$ destacando en la escritura la letra "c"] siendo este "c" un número natural. Entonces toda la relación matemática que está aquí detrás [señalando el diagrama (véase figura 6.3)] es esta [señala la última parte del diagrama en la cual está escrita la estructura multiplicativa] y vuelve sobre la lectura completa del diagrama siguiendo las flechas y estableciendo la relación entre los términos factor, divisor, dividendo y múltiplo con la estructura multiplicativa que está escrita en el esquema.

Con la tarea 3 (véase figura 6.3) colocada en la pantalla, la docente pide a los alumnos que observen el diagrama igual que hicieron en la primera tarea (véase figura 6.1), y los invita a que hagan algunas afirmaciones a partir de la observación del diagrama (véase figura 6.3). Esta tarea es muy parecida a la primera (T1). La diferencia es que en esta actividad las relaciones asociadas a la divisibilidad están expresadas en el sistema de representación del simbolismo algebraico y por ende en forma general, mientras que en la primera tarea (véase figura 6.1) la estructura multiplicativa estaba escrita para un caso particular y en el sistema de representación simbólico-numérico.

Después de una pausa reflexiva, en la cual los alumnos están observando la tarea 3 (véase figura 6.3), la docente pregunta a los alumnos por las afirmaciones que ellos pueden formular, después de observar la tarea (véase figura 6.3). A continuación señalamos el episodio en el cual se dan las afirmaciones de los maestros en formación y la intervención de la profesora en esta actividad.

5.1 E1: Que "a" divide a "b" cuando "a" es divisor de "b".

5.2 D: Vale [señala en el diagrama, siguiendo las flechas, la lectura hecha por E1]. ¿Alguna otra?

5.3 E2: "b" es múltiplo de "a" cuando "b" [pausa].

El estudiante E2 interrumpe su afirmación. Está tratando de leer en el esquema de derecha a izquierda la expresión $b=\mathring{a}$. Esta expresión está escrita en el sistema de representación de simbolismo algebraico y el estudiante está tratando de hacer una traducción al sistema de representación verbal. Ante el silencio prolongado de E2, la docente interviene y pregunta al grupo sobre la lectura correcta de la expresión. En el siguiente episodio recogemos esta discusión.

6.1 *D:* ¿Esto significa "b" es múltiplo de "a"? [señalando la expresión $b=\mathring{a}$]

6.2 *Es:* "a" es múltiplo de "b" [varios estudiantes afirman esto en forma simultánea]

6.3 *D:* A ver pensad que tiene que ser consistente con lo que pone aquí [señala en el diagrama las direcciones de las flechas con sus respectivas afirmaciones sobre las relaciones asociadas a la divisibilidad]

Ante la duda persistente sobre la lectura de la expresión $b=\mathring{a}$, la docente vuelve a explicar desde la figura 6.3 la lectura de $a|b$ ("a" divide a "b") y trata que los estudiantes se orienten por las propias relaciones que están escritas en el diagrama para hacer la lectura de la expresión $b=\mathring{a}$. Sin embargo, esto no fue suficiente; cuando vuelve a preguntar algunos siguen afirmando que "a" es múltiplo de "b" en la expresión $b=\mathring{a}$. Después de este esfuerzo por tratar de explicar la lectura de la expresión $b=\mathring{a}$ siguiendo las relaciones dadas en el diagrama, la docente cambia la estrategia y ahora vuelve sobre la tarea 1 (véase figura 6.1) en la cual está expresada la misma relación pero a nivel concreto. Vuelve sobre la estructura multiplicativa $24=6\times4$ y a la escritura y lectura de la misma en el diagrama (véase figura 6.1).

En el siguiente episodio describimos lo ocurrido cuando la docente introduce la misma expresión pero a nivel concreto con la estructura multiplicativa dada (véase figura 6.1).

7.1 *D:* [...] esto significa "a" divide a "b" [señalando $a|b$ en el diagrama] pero aquí ha surgido la duda [señalando $b=\mathring{a}$ en el diagrama]. Si "a" divide a "b" hemos dicho que eso significa que existe un número natural "c" de forma que yo puedo poner "b" como "a" por "c" [señalando la parte baja del diagrama donde está escrito]. Si yo puedo poner "b" como "a" por "c" significa que ¿"b" es múltiplo de "a" o que "a" es múltiplo de "b"?

7.2 *Es:* "a" es múltiplo de "b" [simultáneamente varios estudiantes].

7.3 *D:* Cuando yo tenía esto [señala la expresión 24=6×4 que está escrita en la pizarra] ¿quién es múltiplo de quién?

7.4 *Es:* Veinticuatro es múltiplo de cuatro [simultáneamente varios estudiantes].

7.5 *D:* ¡Veinticuatro es múltiplo de cuatro! [pausa] está en su tabla de multiplicar [pausa] veinticuatro está en la tabla de multiplicar del cuatro. Pues aquí es exactamente igual [señalando la expresión $b = a\times c$] "b" es el que es múltiplo de "a".

Después de este episodio la docente vuelve sobre el esquema para tratar de aclarar las relaciones de divisibilidad en forma general. Hace la lectura de nuevo sobre la expresión $a|b$ ("a" divide a "b") y establece la relación con la estructura multiplicativa $b=a\times c$ y posteriormente hace lo mismo con la expresión $b=\mathring{a}$. En el siguiente episodio podemos notar lo ocurrido.

8.1 *D:* El "a" puede ser divisor de "b" o factor de "b" [leyendo sobre el diagrama; siguiendo las flechas indicadas], lo que tengo que tener en cuenta es esta propiedad [señalando sobre el diagrama la expresión existe un "c" tal que $b=a\times c$]. Si "a" divide a "b" es porque existe un número que ocurre esto [señalando sobre el diagrama la expresión existe un "c" tal que $b=a\times c$] [...]. Si llegamos aquí [señalando en el esquema la expresión $b=\mathring{a}$] y tenemos dudas no puede ser que lo tenemos aquí sea una relación totalmente distinta a la que hay allí porque estamos diciendo exactamente lo mismo [haciendo referencia a la expresión existe un "c" tal que $b=a\times c$], entonces en este caso sería que "b" es múltiplo de "a" y también de "c" [pausa]. Dudas [...].

Los estudiantes no manifestaron dudas sobre la relación "ser múltiplo" después de esta explicación. Sin embargo, la docente insistió en establecer la similitud sobre la estructura multiplicativa concreta 24=6×4 y la estructura multiplicativa general $b=a\times c$ indicando que en la estructura multiplicativa general está contenida la estructura multiplicativa concreta.

La profesora continúa leyendo, de la figura 6.3, las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva de las relaciones asociadas a la divisibilidad señaladas en el diagrama y coloca algunos ejemplos concretos sobre las tres propiedades de la relación de orden.

En el siguiente episodio recogemos la intervención de la profesora y de los alumnos sobre la propiedad reflexiva.

9.1	*D:*	[...] Reflexiva que todo número es divisor del mismo y todo número es múltiplo de si mismo [...] si yo cojo el siete.
9.2	*E1:*	[Interrumpiendo a la profesora]. Lo que hemos dicho antes de veinticuatro multiplicado por uno.
9.3	*D:*	¡Claro! el veinticuatro que ha salido en el ejemplo [pausa] el veinticuatro es factor de veinticuatro; es factor del mismo y cuando hablamos de múltiplo el veinticuatro también es múltiplo de veinticuatro porque lo podemos poner como el mismo por la unidad [pausa] eso significa que es una relación reflexiva...

Después de explicar las tres propiedades algunos estudiantes manifestaron dudas sobre la propiedad antisimétrica. La profesora vuelve sobre esta propiedad para tratar de aclarar la duda. Esta vez la profesora utiliza como estrategia, para explicar la propiedad antisimétrica, un razonamiento inverso. Es decir, supone que la relación ser divisor-factor es simétrica y coloca un ejemplo concreto. A partir de esta suposición desarrolla la explicación para llegar a la contradicción del supuesto original. A continuación mostramos parte de la explicación y de la intervención de los alumnos.

10.1	E1:	[...] Yo la antisimétrica no la [pausa] no la he entendido.
10.2	D:	Si fuera simétrica daría igual en que sentido leyera yo la relación [escribe en la pizarra 3 es factor de 9] yo diría pues [pausa] tres es factor de nueve ¿yo puedo leer esta relación cambiando los números de sitio; nueve es factor de tres?
10.3	Es:	¡noooo! [simultáneamente varios estudiantes].
10.4	D:	Yo me tendría que preguntar ¿nueve es factor de tres? [pausa] y habéis dicho todos ¡nooo! [pausa] yo lo que puedo decir es que nueve es múltiplo de tres, pero ya estoy cambiando esto. Entonces por eso se dice que es antisimétrica. Sobre todo [pausa] esto es importante que lo tengáis en cuenta a la hora de que no podéis cambiar [gesticula con los brazos para apoyar lo que está diciendo verbalmente] las posiciones de los números, cuando decimos que un número es múltiplo de otro no se puede leer en el otro sentido porque ya estoy cambiando la relación.

Sobre la propiedad reflexiva y transitiva los estudiantes no manifestaron dudas. A continuación la profesora introduce la tarea 4 (véase figura 6.4) indicando que esta tarea es similar a la anterior pero que esta vez ellos tienen que cumplimentar la información requerida. La profesora entrega la tarea número 4 a cada uno de los estudiantes, ellos la hacen en cinco minutos aproximadamente, posteriormente la entregan a la docente.

Para continuar con la clase, la profesora introduce el concepto de número primo y compuesto. Estos conceptos los introduce haciendo preguntas a los estudiantes sobre el significado personal de número primo y número compuesto. Los estudiantes participan respondiendo lo que ellos recuerdan sobre cada uno de estos dos conceptos. En el siguiente episodio describimos lo ocurrido en las intervenciones.

11.1	D:	[...] Hasta ahora no había salido la idea ni de número primo ni de número compuesto que aparece aquí, la idea de primo [pausa] alguien me pudiera decir a que suena eso [pausa] en el ámbito de la aritmética, número primo.
11.2	E1:	Los que hayan sido divididos por uno y por el mismo y la división te sale exacta.
11.3	D:	¿Eso lo puedes decir utilizando los términos que hemos utilizado antes?
11.4	E2:	Todos los que tienen como divisores a el mismo y a la unidad.
11.5	D:	Solo [pausa] a el mismo y la unidad; porque cualquier número se puede dividir por el mismo y por la unidad, lo que le pasa a los primos es que solo tiene a esos dos como divisores o como factores lo podéis decir de diferente forma [pausa] estamos hablando dentro de los números naturales no nos hemos salido de los números naturales [pausa] y número compuesto es cuando tiene más de dos divisores.

Después de la explicación dada en el episodio 11.5, la profesora coloca algunos ejemplos de números primos y de números compuestos y explica la razón por la cual se puede afirmar que es un número primo o un número compuesto. Los estudiantes también participan señalando algunos números primos o compuestos y preguntando o justificando que el número que ellos dicen es primo o no. Por ejemplo, uno de los estudiantes pregunta por el número 117 si es primo o no y otro estudiante le dice que no porque también lo divide el 3.

Con el apoyo de una diapositiva (véase figura 6.23), en la cual están escritas las definiciones de número primo y de número compuesto, la profesora reafirma en cada ejemplo que se discute las definiciones de número primo y de número compuesto.

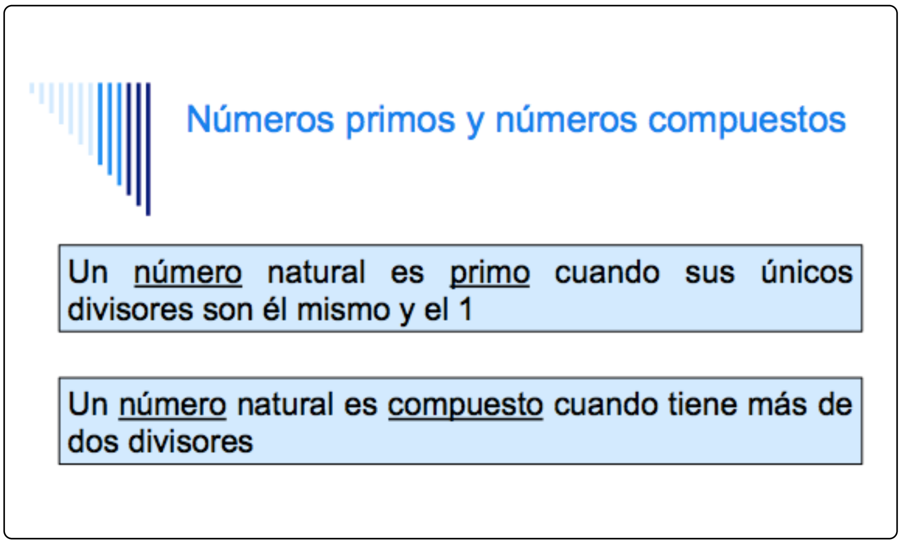


Figura 6.23. Diapositiva sobre números primos y compuestos

A continuación la profesora introduce la idea del teorema fundamental de la aritmética y la relación de este teorema con la divisibilidad. Enuncia el teorema y se apoya en otra diapositiva (véase figura 6.24) en la cual tiene escrito, en los sistemas de representación verbal y simbólico, el teorema fundamental de la aritmética. Destaca que los factores deben ser necesariamente números primos y que la descomposición que se haga es única. Coloca dos ejemplos: el número 21 y el número 12. El 21 lo escribe como $21=3\times7$, destaca que el número 3 es primo y que el número 7 también es primo y además indica que no hay otra manera de ponerlo (exceptuando la conmutatividad) como producto de factores primos. Para el número 12 utiliza el algoritmo (divisiones sucesivas por divisores-factores primos de menor a mayor) para descomponer un número en factores primos. Los estudiantes ponen de manifiesto conocer bien este algoritmo. De la misma manera que con el ejemplo del número 21 la profesora destaca que los factores, al descomponer el número 12, son primos y que la descomposición es única.

Después de explicar el ejemplo señala que esto es general para cualquier número natural. Igualmente hace énfasis en que para todo número natural siempre hay una única manera de ponerlos como productos de factores primos. La profesora hace un comentario sobre la potenciación y coloca dos ejemplos para mostrar (por si alguien tiene dudas) que 3^2 es 9 y que $7^3 = 7\times7\times7$.

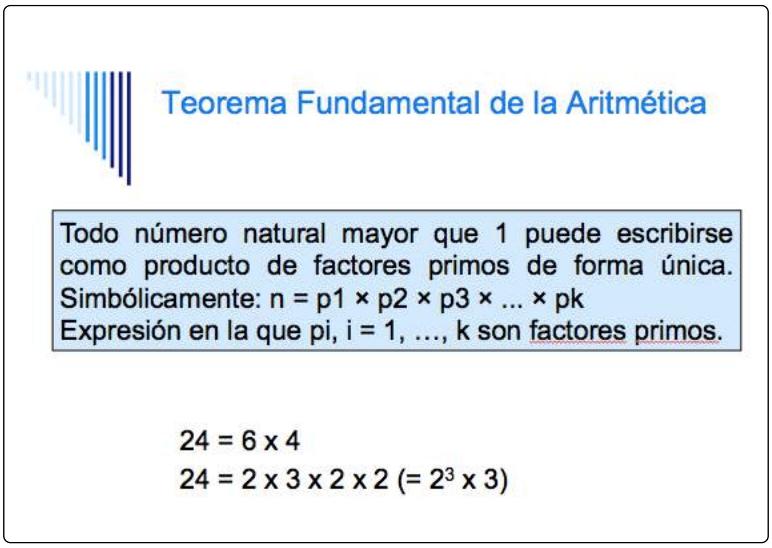


Figura 6.24. Diapositiva sobre teorema fundamental de la aritmética

Después de esta dispositiva (figura 6.24) la profesora explica cómo funciona la criba de Eratóstenes para determinar los números primos. Presenta una diapositiva con la tabla que contiene los números desde el 1 hasta el 100 (véase figura 6.25) y va explicando el procedimiento para determinar los números primos a partir de la tabla cien.

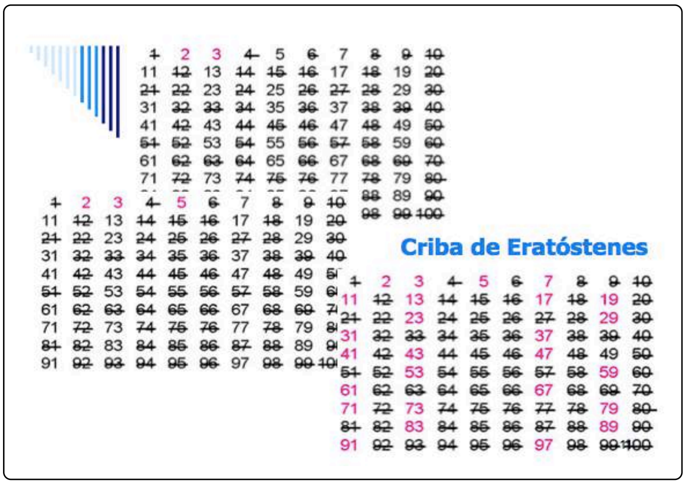


Figura 6.25. Diapositiva sobre Criba de Eratóstenes

Posteriormente vuelve sobre el ejemplo de la estructura multiplicativa de la primera diapositiva (véase figura 6.21) pero esta vez escrita en su descomposición canónica, esto es, $24=2^3\times3$ y plantea dos preguntas: una sobre los factores primos y la otra sobre los factores en general (primos o no primos), en la descomposición canónica del número 24 (véase figura 6.26). Cuando plantea las preguntas los alumnos intervienen para responder y la docente va aclarando algunas dudas que ponen de manifiesto los estudiantes.

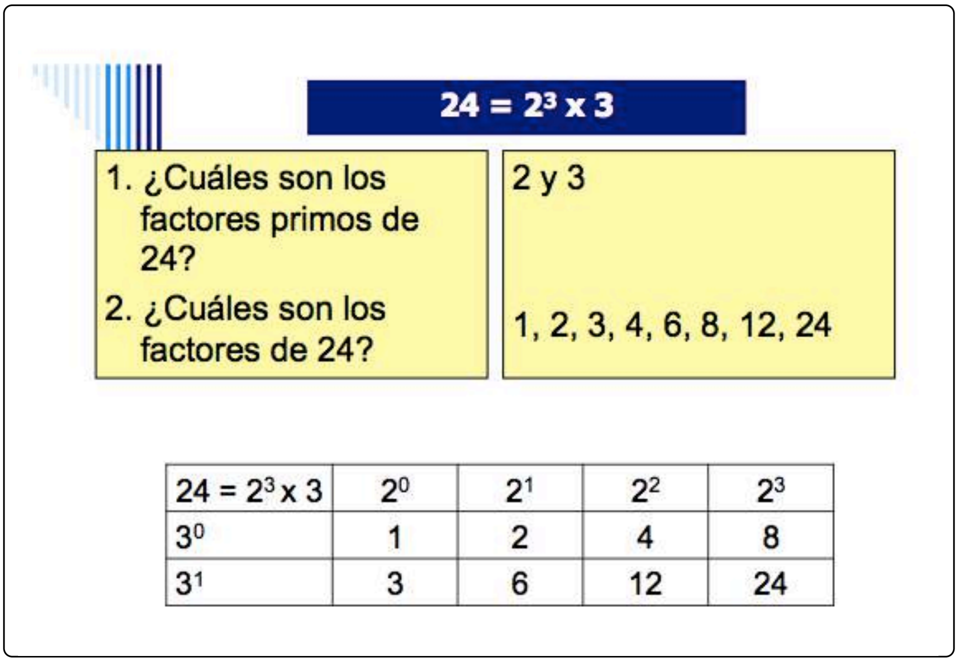


Figura 6.26. Diapositiva sobre procedimiento para determinar los factores de un número

En el siguiente episodio describimos lo ocurrido con las intervenciones tanto de la profesora como la de los alumnos sobre el procedimiento para determinar los factores de un número.

12.1	D:	[...] El veinticuatro lo he escrito de otra manera [señala en la diapositiva la estructura multiplicativa $24=2^3\times 3$] y he puesto dos preguntas [lee las preguntas que están en la diapositiva (figura 6.26)] a ver E1 tu qué dirías ¿cuáles son los factores primos de veinticuatro?
12.2	E1:	Doce [pausa larga].
12.3	D:	Doce es factor de veinticuatro estamos de acuerdo, la pregunta es ¿el doce es primo? ¿para que sea primo que tiene que pasar?
12.4	E2	Que solo sea divisible por el mismo y por uno.
12.5	D:	[...] ¿El doce por ejemplo? [pausa] el doce no porque además lo divide el dos y el seis.
12.6	E3:	El trece, el tres [...].
12.7	D:	A ver vamos a cambiar el orden de las preguntas [pausa] ¿cuáles son los factores de veinticuatro?
12.8	E4:	Tenemos que descomponer el veinticuatro en factores primos [pausa] como lo hemos hecho antes.
12.9	D:	Vale [pausa] y ahora que ¿cuáles son los factores primos de vein-

ticuatro?

12.10 E5: Dos elevado a tres por tres [pausa] es que no se.

12.11 Es: Dos y tres [varios alumnos responden simultáneamente].

12.12 D: ¿Estáis de acuerdo en el que el dos y tres son los factores primos de veinticuatro? [pausa] ¿seguro?

12.13 E6: No lo entiendo.

12.14 D: [Dirigiéndose a un estudiante]. ¿Lo puedes explicar?

12.15 E7: En la descomposición de veinticuatro el dos y el tres son los únicos primos, no el dos elevado al cubo porque es ocho y ocho lo divide el cuatro; no es un número primo. Al descomponerlo son los únicos primos que da.

12.16 D: Ahora yo pregunto ¿hay más divisores de veinticuatro?

12.17 Es: Sí [varios alumnos responden simultáneamente].

12.18 Es: Uno, dos, tres, cuatro [simultáneamente varios estudiantes].

12.19 D: El dos y el tres están aquí [señalando que ya los han considerado como factores primos].

12.20 Es: Uno, cuatro, seis, ocho, doce y veinticuatro.

12.21 E8: [...] ¡Y el uno! [pausa] ¿no va en los primos?

12.22 D: ¡Es un factor!, no se considera primo porque el mismo y la unidad es el mismo número.

Después que han determinado los factores primos y no primos del número 24, la profesora explica una forma ordenada para obtener todos los factores de un número. Para ello presenta en la diapositiva (véase figura 6.26) el número 24 descompuesto en factores primos y utiliza el sistema de representación tabular para escribir todos los factores del número. Explica a los alumnos la forma de colocar los factores con sus respectivas potencias en la filas y en las columnas y posteriormente explica la forma de llenar las celdas de la tabla con los factores del número.

Finalmente la profesora entrega a los alumnos las tareas 5 (véase figura 6.5) y 6 (véase figura 6.6). Los alumnos hacen las dos tareas en doce minutos aproximadamente y las entregan a la docente que las recoge para su posterior análisis.

Sesión 2. Práctica individual

En esta sesión se realizó la clase práctica para el grupo de seminario. La sesión se llevó a cabo el miércoles 31 de octubre de 2012. Los tres subgrupos del seminario asistieron a la sesión planificada para ese día. En el primer bloque de horario, de 18:30 a 20:00, asistieron 28 estudiantes que pertenecen a los seminarios S1 y S2. En el segundo bloque de horario, de 20:00 a 21:30 asistieron 9, que pertenecen al seminario S3. El total de maestros en formación que asistieron a la segunda sesión fueron 37.

Para la implementación de esta sesión consideramos las observaciones que hicimos en la implementación de la sesión 1. En el apartado de toma de decisiones de la sesión 1 (fase III del experimento de enseñanza) describimos las modificaciones requeridas; producto del análisis de dicha sesión.

La profesora entregó a los estudiantes un documento mediador (anexo E) que contenía ocho tareas. En esta sesión trabajaron las ocho tareas. Estas tareas estaban compuestas por quince cuestiones, tal como lo hemos puesto de manifiesto en el la fase de planificación de la sesión 2. Las tareas que desarrollaron los maestros en formación fueron: T1a, T1b, T1c, T1d, T2a, T2b, T3a, T3b, T3c, T3d, T4, T5, T6, T7 y T8 (véanse figuras: 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13 y 6.14).

El tiempo empleado en la realización de las tareas fue de 1,5 horas. Durante la resolución individual de las tareas, los estudiantes manifestaron dudas sobre la relación de divisibilidad que compartieron y discutieron en grupos de tres o cuatro y, en muy pocas ocasiones con la profesora-investigadora. Esas discusiones fueron grabadas en audio. Mostramos, a manera de ejemplo, un episodio como parte de las discusiones del grupo S2_G3[2] formado por tres maestros en formación cuando resolvían la tarea 1 (véase figura 6.7).

13.1	*E1:*	[...]Pero bueno ¿y esto no lo podemos hacer con una tabla?
13.2	*E2:*	Lo podemos hacer con el móvil.
13.3	*E3:*	¡Si los números los tenéis aquí!
13.4	*E1:*	Pero escucha bien [pausa] ¿con el móvil cómo lo haces?
13.5	*E2:*	Pues con la calculadora.
13.6	*E2:*	[...] Hay que factorizarlo, hay que factorizarlo [...] este es [...] escucha treinta y tres mil setenta y cinco [33 075]. El treinta y tres mil setenta y cinco hay que factorizar y los números que te den hay que ponerlos.
13.7	*E1:*	Sí, [pausa] pero que también el treinta y tres mil setenta y cinco [pausa] coges y lo divides entre este, este y este [hace referencia a los números 1,2,3,7,9,11,21,63, 147 que están escritos en la tarea] y si la división te sale exacto es porque ese número

[2] S2_G3: corresponde el tercer grupo formado en el seminario 2, tal como lo hemos definido en el tipo de grupo de la fase de planificación de sesión 2.

se puede multiplicar. Por ejemplo si tu divides el 33 075 por 5 te da [pausa] 10 vamos a poner.

13.8 *E2:* [interrumpe a E1] pero ¡es que no hay que dividirlo!

13.9 *E1:* Bueno pero te da diez un número exacto, con lo cual, este cinco que tu usarías multiplicado por el diez que da de resultado te da este número; lo cual es un múltiplo, es un factor [...] ¿no?

13.10 *E2:* O sea, vamos a ver, si tú lo factorizas te pone aquí unos números y luego los de haberlo factorizado [...] con lo que te venga de la factorización tienen que salir estos y los que salgan de estos los pones.

13.11 *E1:* Pero que es lo mismo que si tú divides por cada uno de los números y te da un número exacto. En el momento en que te da un número exacto es porque se puede multiplicar [...] volvemos a lo mismo.

13.12 *E2:* Es que es lo mismo, es que lo hemos dividido cuando es divisible [haciendo referencia a la tarea T5].

13.13 *E1:* Porque ahora tú coges el número [33075] lo divides entre cinco [hace la división que le da como resultado 6 615]. Entonces ¿qué pasa? el cinco es factor de esto; porque el cinco multiplicado por otro número que sería este te da como resultado [33 075], entonces al dividir todos los que te den de resto cero [...].

13.14 *E2:* Claro, pues vamos a hacerlo. El cinco ya sabemos que es, el uno también.

13.15 *E3:* Es que son los mismos números.

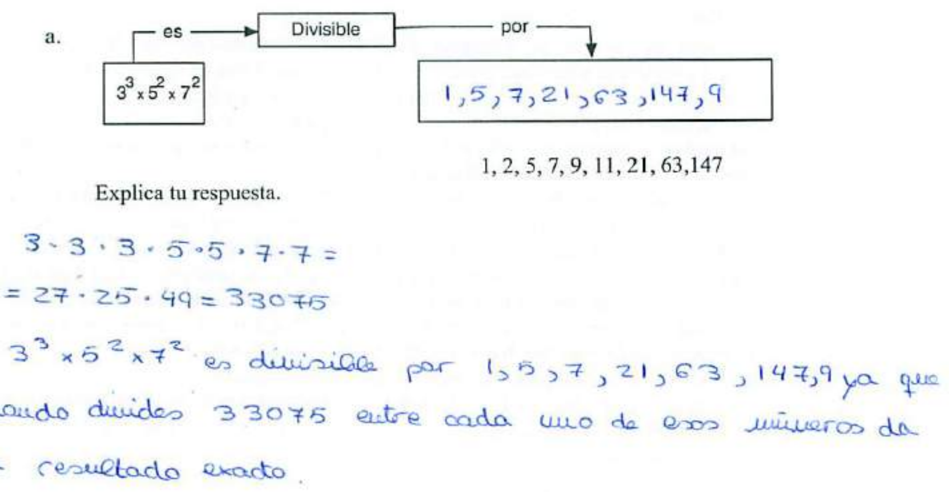
13.16 *E2:* Has tú el siete, yo veintiuno [...]

13.17 *E1:* Vamos a ver. Yo hago los tres primeros, tú los otros tres [dirigiéndose a E2] y ella los otros tres [dirigiéndose a E3] y el que sobra pues el que termine antes.

Como resultado del proceso de discusión, los estudiantes entregaron por escrito las respuestas a cada una de las tareas propuestas. Por ejemplo, en la figura 6.27 mostramos la respuesta dada por el estudiante (E1) a la tarea (T1a). La participación de E1 en la discusión se evidencia en las líneas 1, 4, 7, 9, 11, 13 y 17 del episodio 13.

Tarea 1

Indica cuál o cuáles de los números dados a continuación se pueden colocar en el cuadro en blanco del diagrama de tal manera que la relación sea verdadera.



a. $3^3 \times 5^2 \times 7^2$ es Divisible por 1, 5, 7, 21, 63, 147, 9

1, 2, 5, 7, 9, 11, 21, 63,147

Explica tu respuesta.

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 =$

$= 27 \cdot 25 \cdot 49 = 33075$

$3^3 \times 5^2 \times 7^2$ es divisible por 1, 5, 7, 21, 63, 147, 9 ya que cuando divides 33075 entre cada uno de esos números da un resultado exacto.

Figura 6.27. Respuesta dada a la tarea T1a por E1

Todos los maestros en formación que asistieron a la sesión entregaron el documento mediador con sus respuestas en el tiempo planificado. Estos documentos entregados por los maestros en formación los analizamos en el capítulo siete de esta memoria de tesis.

Durante la implementación de esta sesión la docente-investigadora informó sobre los grupos que participarían en la puesta en común de la siguiente sesión.

Sesión 3. Puesta en común

En esta sesión se hizo la puesta en común de los trabajos realizados por los grupos. Los grupos asignados son dos por cada seminario: S1: G3 y G4, S2: G2 y G4 y S3: G2 y G4. En este apartado recogemos la puesta en común de un grupo por cada seminario. Del seminario S1 el grupo cuatro (S1_G4), del seminario S2 el grupo 2 (S2_G2) y del seminario S3 el grupo 2 (S3_G2). La decisión de colocar la transcripción de la puesta en común de estos tres grupos obedece a que esta combinación nos permitió observar las siete tareas que fueron discutidas en la puesta en común, en forma general.

La puesta en común del seminario S1 y S2 se realizó el día miércoles 7 de noviembre de 2012 en el horario habitual de la clase y la puesta en común del seminario S3 se realizó el día viernes 09 de noviembre de 2012, en el horario habitual de clase.

La asistencia a la sesión 3 fue de un total 37 maestros en formación. En el seminario S1 asistieron 16, , en el seminario S2 asistieron 13 y al seminario S3 asistieron 8.

Para la implementación de esta sesión consideramos las observaciones que hicimos en la implementación de la sesión 2. En el apartado de toma de decisiones de la sesión 2 (fase III del experimento de enseñanza) describimos las modificaciones requeridas; producto del análisis de dicha sesión.

Los estudiantes tenían a disposición en el entorno virtual (SWAD[3]), desde la semana previa a la realización de la sesión, las tareas para la puesta en común en el cuaderno individual de trabajo (anexo F).

Los grupos hicieron la puesta en común de dos o cuatro tareas según lo indicamos en la tabla 6.7.

Tabla 6.7

Tareas discutidas por los grupos durante la puesta en común

Grupo	T1	T2	T3	T4	T5	T6
S1_G3		*				*
S1_G4	*	*			*	
S2_G2	*	*	*		*	
S2_G4		*			*	*
S3_G2	*	*	*		*	
S3_G4				*	*	*

Seminario 1. Grupo 4 (S1_G4)

La sesión comienza con la asignación por parte de la profesora-investigadora de las tareas T1, T2 y T5 para la puesta en común. El estudiante E1[4] toma la palabra para comenzar a hacer la explicación de la tarea. E2 lee en voz alta el enunciado de la tarea. En la tarea T1 pedimos que elaboren un listado de todos los números de los cuales el número 117 es múltiplo y que señalen cuales son primos y cuales no (véase figura 6.15).

14.1 *E1:* Lo primero que hay que hacer es descomponer 117 en factores. Para ello utilizamos la reglas de divisibilidad. Vemos que este número es divisible por 3, porque si sumamos las tres cifras nos da múltiplo de 3 …[hace la descomposición en factores primos del número 117 y escribe $117=3^2\times 13$] para saber todos sus facto-

[3] SWAD es una plataforma virtual ofrecida por la Universidad de Granada que el profesorado puede utilizar como recurso para el desarrollo de las asignaturas

[4] Los maestros en formación del grupo S1_G4 los enumeramos como E1, E2, E3 y E4. La asignación es por el orden de intervención durante la puesta en común. Igualmente, en este seminario, enumeramos las intervenciones de los maestros en formación que no forman parte del grupo a partir de E5 según el orden de la intervención.

res [pausa] hacemos la tabla como hicimos anteriormente en la semana anterior en la clase [escribe en representación tabular la combinación de los factores: en las filas coloca el 13^0 y 13 y en las columnas coloca 3^0, 3 y 3^2]. Ya hemos sacado todos los factores [pausa] los factores primos serían el 3 y el 13, el 1 sería [pausa] no se cuenta como factores y los factores no primos que serían el 13, 39, el 1 y el 117 [pausa] el 117 es múltiplo de todos estos factores porque al multiplicar uno de estos factores por otro número nos da 117. Por ejemplo si multiplicamos 39 por 3 nos daría 117.

14.2 *D:* Dudas comentarios [pausa] ¿alguien que lo haya hecho de otra forma?

14.3 *E5:* En los factores primos falta el 9 o ¿así está bien? [E5 es un estudiante que pertenece a otro grupo].

14.4 *E6:* En los factores compuestos [E6 pertenece a otro grupo].

14.5 *E1:* Si va en los compuestos [lo agrega a la lista final].

El tiempo de duración de la discusión sobre la tarea T1 fue de 3' 35'' (tres minutos y treinta y cinco segundos).

La profesora-investigadora pregunta si hay alguna duda o si alguien lo ha hecho de otra manera. Ninguno de los estudiantes responde, entonces le indica al grupo que continúen con la siguiente tarea T2.

Para la puesta en común de la tarea T2, el estudiante E2 toma la palabra para comenzar a hacer la explicación de la tarea. Lee en voz alta el enunciado de la tarea.

En la tarea pedimos indicar si el número $3^4\times5^5\times7^2\times13^{15}$ es: múltiplo, factor, divisor, divisible del número $3^2\times5^2\times7$ (véase figura 6.16).

15.1 *E2:* Lo que hemos hecho ha sido poner esos números y lo exponentes ir quitándolos, restándolos [escribe el número $3\times3\times3\times3\times5\times5\times5\times5\times5\times7\times7\times13^{15}$ y el número $3\times3\times5\times5\times7\times7$ luego va quitando los factores que están repetidos en los dos números dados. Quita dos veces el 3 del primer número y del segundo número y así sucesivamente con los factores que están repetidos en ambos números] entonces quedarían los restantes que serían [escribe el número $3^2\times5^2\times7\times13^{15}$] este número es que utilizamos como factor para multiplicarlo por $3^2\times5^2\times7$ y que nos de el otro; para saber si es múltiplo, pero también se puede dividir.. [al escribir el número, en la pizarra, se equivoca y escribe otro que no es, sus compañeros de equipo intervienen para corregir la escritura del número $3^2\times5^3\times7\times13^{15}$].

En este punto la docente-investigadora interviene para preguntar a los demás estudiantes si han entendido el procedimiento seguido por E2 en la explicación. Ninguno de los estudiantes participa. Ante el silencio prolongado, otro miembro del grupo E1 vuelve a tomar la palabra y dice que el lo va a explicar. La intervención de E1 la recogemos en el siguiente episodio.

16.1 *E1:* Yo lo voy a explicar, lo voy a explicar por si alguien no lo ha entendido y no lo quiere decir. Pues para saber si este número [$3^4\times5^5\times7^2\times13^{15}$] es múltiplo de este [$3^2\times5^2\times7$] lo que hemos hecho es dividir este número [señala en la pizarra el número $3^4\times5^5\times7^2\times13^{15}$] entre este [señala en la pizarra el número $3^2\times5^2\times7$], entonces para dividirlo hemos utilizado los números que tienen la misma base, y en esa división al tener la misma base restamos los exponentes; que es lo que hemos hecho aquí lo hemos desarrollado y hemos restado, pues, los que se repetían [pausa] y nos han quedado estos [señala el número $3^2\times5^3\times7\times13^{15}$]. Este [señala el número $3^2\times5^3\times7\times13^{15}$] sería el factor que al multiplicarlo por este otro factor [señala en la pizarra el número $3^2\times5^2\times7$] nos daría este [señala el número $3^4\times5^5\times7^2\times13^{15}$] por lo tanto este número [$3^4\times5^5\times7^2\times13^{15}$] es múltiplo de estos dos [señala el número $3^2\times5^2\times7$ y al número $3^2\times5^3\times7\times13^{15}$].

El tiempo de duración de la discusión sobre la tarea T2 fue de 5’ 51’’ (cinco minutos y cincuenta y un segundos).

La profesora-investigadora indica al grupo que siga con la tarea T5; en vista que no hay dudas o comentarios por parte del resto de los asistentes.

La tarea T5 la presenta otro integrante del grupo E3. Esta tarea es abierta y la solución no es única (véase figura 6.19). Antes de comenzar la discusión E3 lee las condiciones requeridas en la tarea T5 y posteriormente explica el procedimiento que siguió para resolverla. En el siguiente episodio recogemos la discusión de la tarea.

17.1 *E3:* Lo primero es que hemos considerado un divisor la unidad, o sea, que luego tenemos en cuenta esto. Luego, pues hemos hecho un [pausa] una tabla para hacer un poco una criba de los números múltiplos de tres.

La docente-investigadora interrumpe a E3 y le indica que vaya escribiendo algo en la pizarra porque “por ahora te seguimos pero dentro de cinco minutos ya no podremos”. En este momento otro integrante del grupo E2 comienza a escribir en la pizarra un listado de números naturales consecutivos que comienza con el número uno y termina en el número quince. Distribuye los números en tres filas y cinco columnas. En este punto la profesora-investigadora interrumpe a E2 y pregunta para qué ha hecho esa tabla. En el siguiente episodio recogemos la respuesta dada por E2 y E3 a la pregunta formulada.

18.1 *E2:* Para que se vea más claro. Vamos tachando las características que pone ahí para encontrar los números que al final son los que tenemos que combinar para encontrar el final.

18.2 *E3:* Aquí simplemente los múltiplos de tres lo hemos tachado, los hemos quitado del medio simplemente. Los múltiplos de tres y los que no sean divisibles [pausa] divisibles por cinco [E2 sigue escribiendo números en la tabla hasta llegar al número 30 y le da el marcador al E3 que comienza a explicar el procedimiento]. Por ejemplo, múltiplo de tres [con el marcador va tachando el tres, el seis, nueve y así hasta tachar el 30], también tenemos que tachar los divisibles por cinco [tacha el 5, 10, 20, 25]. Una vez obtenido esto, también podemos sacar de lógica que los números primos al solo dividirse por uno y el mismo tampoco cumplía los requisitos de tener seis divisores, entonces los números primos serían: el uno, el dos, el siete [pausa]. Pues una vez hecho esto nos quedarían potencialmente siete números en los treinta primeros [encierra en un círculo los números 4, 8, 14, 16, 22, 26 y 28]. Vamos a hacer un muestreo para ver si en esos sale un número que tenga seis divisores pues ya está. Ahora mismo lo que hacemos es factorizar los que nos han quedado...

Una vez que E3 ha explicado el procedimiento coloca tres números (4, 16 y 28) de la lista de siete y los escribe en su descomposición canónica. Posteriormente indica que hay que buscar una fórmula o una regla para saber el número de divisores que tiene cada factorización. A continuación mostramos el episodio en el cual E3 introduce una fórmula para obtener el número de divisores de un número desde un descomposición canónica.

19.1 *E3:* Si esto fuera una factorización de números primos, por ejemplo, calcularíamos el número de divisores de la siguiente manera. [escribe en la pizarra $A^a \times B^b \times C^c$ y la fórmula $(a+1)\times(b+1)\times(c+1)$]. Una vez hecho esto vamos a ver por ejemplo con el 4. Siguiendo esta fórmula sería 2+1 porque la a correspondería aquí con el 2, entonces tendría tres divisores, ¡no!. ¿Lo entendemos? [pausa] ¿lo entendemos? [pausa] ¿dónde nos hemos quedado? [risas de los asistentes].

19.2 *E5:* ¡En las letras! [risas] [E5 no forma parte del grupo S1_G4].

19.3 *E3:* Vale [pausa] ¿en las letras?. Lo que debéis tener claro es que esta a mayúscula y esta a minúscula lo que representa. En este caso esta a es el exponente [señala la letra a minúscula en la fórmula escrita]. Esto sería un número con [pausa] desarrollado por ejemplo dos al cuadrado por siete [$2^2 \times 7$]. El dos [señala el número 2 de la base] sería la a [mayúscula] y el 7 sería la be [mayúscula]. ¿Eso más o menos lo entendemos?

Ante esta situación la profesora-investigadora interviene para indicar cuáles son los números que están representados por las letras mayúsculas y cuáles por las letras minúsculas en la fórmula escrita por E3 y plantear algunas dudas que han surgido; producto de la explicación. Esta interacción entre la profesora-investigadora y el estudiante E3 la recogemos a continuación en el episodio número veinte.

20.1 *D:* A ver. La a, be y ce mayúsculas son los factores primos.

20.2 *E3:* Exactamente [pausa] sí.

20.3 *D:* La a, be y ce minúsculas son los exponentes.

20.4 *E3:* O sea, que estos son los factores primos [señala las letras a, be y ce mayúsculas en la fórmula] y estos los exponentes [señala la letras a, be y c minúsculas en la fórmula], entonces simplemente tenemos que representar aquí [señala la fórmula escrita].

20.5 *D:* Pero entonces la duda que creo que te estaban preguntando y yo también la tengo es ¿cómo sabes que $(a+1)\times(b+1)\times(c+1)$ [pausa] o sea, de dónde sacas el más 1?

20.6 *E3:* ¿El más 1?

20.7 *D:* Creo que es la duda que hay.

En este momento intervienen algunos estudiantes que no forman parte del grupo y afirman que esa efectivamente es la duda; que no saben la fórmula. Inmediatamente la otra integrante del grupo E4 interviene para tratar de justificar el uso de la fórmula. En el siguiente episodio mostramos la interacción que se dio sobre el uso de esta fórmula.

21.1 *E4:* Bueno [pausa] pues porque esa es la fórmula.

21.2 *D:* ¿Qué fórmula? [pausa] yo no he dado [pausa] yo no he dado ninguna fórmula de esas. Si yo veo una fórmula ahí no la voy a rechazar pero tengo que saber de dónde sale.

21.3 *E3:* [pausa] Ya [asiente con la cabeza].

21.4 *D:* La debería de saber. Utilizar una fórmula y no saber de dónde sale.

21.5 *E3:* A lo mejor lo podemos sacar por la lógica pero en principio no lo sabemos de que [pausa].

21.6 *D:* Pero ¿de dónde habéis sacado vosotros la fórmula?

21.7 *E3:* Yo [pausa] de un libro [risas].

21.8 *D:* Pues entonces tienes que explicar la fórmula si la utilizas. Yo no tengo problemas en que utilicéis fórmulas o información que salgan de otro sitio, pero es importante que sepáis explicar por qué eso es así.

Después de una larga pausa, E3 hace algunas afirmaciones dubitativas y la profesora-investigadora interviene y, reconduce la discusión hacia el desarrollo de la tarea que originalmente pretenden resolver. En esa discusión hace referencia a la forma de calcular la cantidad de divisores de un número como el caso de la tarea T1 en la cual calcularon, utilizando una tabla, todos los números de los cuales el 117 es múltiplo. Después de esta discusión, E1 toma de nuevo la palabra para explicar la tarea. Dibuja en la pizarra una tabla de dos filas por tres columnas y coloca el factor 2 (en las columnas) y el factor 7 (en las filas) con sus respectivos exponentes hasta llenar las celdas de la tabla. En el siguiente episodio mostramos como finaliza, el grupo, la resolución de la tarea T5.

22.1 *E1:* Lo que hemos hecho [pausa] con las indicaciones que no has dicho [pausa] pues hemos aplicado las reglas de divisibilidad, por ejemplo, la del dos, la del tres, la del siete. Entonces si no puede ser ni tres ni múltiplo de tres, entonces de esa regla de divisibilidad hay que eliminar el tres y todos sus múltiplos. Del cinco pues todos los múltiplos de cinco serían eliminados y así hasta que nos salen el dos y el siete. Para que me de seis divisores los coloco en la tabla y me da los divisores-factores.

Como la tarea T5 no tiene solución única, la profesora-investigadora pregunta si a todos les ha dado el mismo número (28), como en el caso del grupo S1_G4. Los maestros en formación responden que no. Posteriormente indica que digan el número que les ha dado como respuesta y que expliquen cómo lo han hecho. En forma voluntaria una estudiante E6 explica el procedimiento que han seguido en su grupo para responder a esta tarea. En el siguiente episodio recogemos la discusión.

23.1 *E6:* Pues resulta que nosotros hemos escogido números primos. Números primos significa que solo pueden ser divisibles entre el mismo y la unidad. El 2, 13, 29, 37, 47 y 61 los hemos multiplicado entre si y nos ha dado un número bastante grande. Al ser primos pues no es ni múltiplo de tres ni divisible por cinco.

Ante esta respuesta, la profesora-investigadora interviene para preguntar al grupo en general si están de acuerdo con la afirmación hecha por E6. En este momento en al aula se escucha un murmullo que es interrumpido por la profesora. Indica que se tiene que entender las preguntas y las intervenciones de cada uno. En el siguiente episodio recogemos las intervenciones de dos estudiantes, del grupo que está haciendo la puesta en común: E2 y E3, hechas ante la afirmación de E6 sobre el procedimiento para hacer la tarea T24.

24.1 *E2:* ¿Pero no dice seis divisores exactos?

24.2 *E6:* Si seis divisores exactos. Ahora multiplicamos los primos y nos da un número y ese número tiene los seis divisores.

24.3 *E3:* Y [pausa] ¿cómo lo sabes que tiene seis? [risas].

24.4 *E6:* Porque lo hemos comprobado, hemos dividido.

24.5 *E2:* Pero es que no entiendo porqué los ha multiplicado. Eso es lo que yo no entiendo.

En este punto hay otra intervención, en este caso, un estudiante E7 que pertenece al mismo grupo de E6. Esta intervención es para leer el número que ha resultado de la multiplicación de los seis números primos que han utilizado. Al leer el número “setenta y nueve millones novecientos ochenta y tres mil quinientos sesenta y seis” (79 983 566) se producen risas y murmullos en el aula. En este momento la profesora-investigadora interviene para centrar la discusión más allá de lo anecdótico del número en si mismo. En el episodio que sigue recogemos la intervención.

25.1 *D:* A ver. No es tan importante el resultado sino el procedimiento que ha seguido. Si dice que es el producto de los números que han dicho pues es válido. Lo que creo que no se ha entendido [pausa] ¿es correcto el procedimiento?, o sea, lo que creo que no se ha entendido bien es ¿cuál es el razonamiento que hay detrás?

Después de esta intervención E6 vuelve a tomar la palabra para explicar el procedimiento seguido por ellos. En la explicación vuelve sobre lo que ha dicho en el episodio 23 y en 24.2 (línea 2 del episodio 24). En este momento la profesora-investigadora interviene y plantea algunas preguntas sobre el procedimiento seguido por E6 con el fin de aclarar si es válido o no el número que han conseguido y si el procedimiento puede conducir exactamente a dar la solución a la tarea T5. En el siguiente episodio recogemos la intervención de la profesora-investigadora.

26.1 *D:* [...] Se cumplen dos de esas tres características [haciendo referen-

> cia a las condiciones expresadas en la tarea T5] hay una que no se cumple [...] ¿cuántos divisores tiene ese número que habéis puesto?

En este momento los estudiantes discuten entre ellos sobre la pregunta formulada por la profesora. La discusión que se da es imposible de entender porque lo hacen al mismo tiempo y solo se escucha el murmullo general en el aula. Después de un minuto aproximadamente la profesora interrumpe las discusiones y plantea otra pregunta. Los estudiantes responden y finalmente se concluye que el número de divisores de ese número es mayor que seis. En el siguiente episodio mostramos parte de esa discusión.

27.1	*D:*	[...] La pregunta sería ¿tiene algún divisor más de los que se han considerado?
27.2	*E1:*	Sí.
27.3	*D:*	¿Cuál? [...] no, hay que decir cuál y no es difícil...
27.4	*E6:*	La unidad y el mismo.
27.5	*E3:*	El mismo número exactamente.
27.6	*D:*	Entonces sobra algo allí. Algunos de los divisores sobra; el número que tengáis a final siempre va a tener como divisor a el mismo y a la unidad.

En este punto los estudiantes del grupo al cual pertenece E6 plantean que entonces el procedimiento es colocar cuatro números primos y multiplicarlos entre si, en vez de seis como habían hecho originalmente. En ese momento un integrante (E7) de otro grupo diferente de los dos anteriores interrumpe y dice que la tarea T5 la han hecho de otra manera y da un número como respuesta a la tarea. En el episodio 28 recogemos la discusión generada a partir de la intervención de E7.

28.1	*E7:*	[...] Nosotros hemos cogido números de 1 a 100 y hemos probado con dos y tres y nos ha salido el 64 y lo hemos factorizado y nos salen seis divisores.
28.2	*D:*	El sesenta y cuatro ¿cuáles son los divisores de 64?
28.3	*E7:*	Dos, dieciséis, ocho, cuatro, treinta y dos, y, sesenta y cuatro.
28.4	*D:*	[después de un larga pausa] No los va e explicar E3. Vamos a ver por aquí dicen que dos elevado a seis es otro número que cumple las características que se piden [...] ¿dos elevado a seis sería válido? [...] ¿cuánto divisores tiene dos elevado a seis? [...] ¿cuales son los divisores o los factores de dos elevado a seis?

28.5 *E3:* [escribe en la pizarra el procedimiento para hacer la descomposición en factores primos, aplicando los criterios de divisibilidad] son siete divisores [señala los resultados de cada una de las divisiones que ha hecho del número 64] los divisores son: dos, cuatro, ocho, dieciséis, treinta y dos, sesenta y cuatro, y, el uno. Que son siete divisores.

28.6 *E2:* Por lo tanto la respuesta sería falsa; no serían seis divisores.

28.7 *E6:* ¡Ah! [pausa] es verdad; falta el uno.

La profesora-investigadora plantea otra pregunta al grupo que está haciendo la puesta en común (S1_G4). La pregunta está orientada a buscar un número que cumpla con las condiciones de la tarea T5 pero agregando una cuarta condición que solo haya un factor primo. En el episodio 29 recogemos la interacción que se dio respecto a esta pregunta.

29.1 *D:* Si quisiera encontrar un número pero con un solo factor primo [pausa] a ver pensadlo, pensadlo un poco [dirigiéndose a E3].

29.2 *E3:* [después de discutir con su grupo por un tiempo aproximado de tres minutos y medio] ¿no sería multiplicar un número primo por otro no primo? [dirigiéndose al resto de los estudiantes].

29.3 *D:* ¿Lo tenéis en la pizarra? [pausa larga] ¿E7 tenéis algo?, [pausa larga] ¿E10 tenéis algo?, [pausa larga] ¿E12 que nos cuentas algo?

29.4 *E3:* Creo que es imposible [pausa] ¿Hay solución o no?

Después de cinco minutos, aproximadamente, un estudiante E8 da una solución particular y que luego con la intervención de la profesora se genera una discusión encaminada a dar una solución general a la tarea T5. En el episodio 30 recogemos la interacción entre los estudiantes y la profesora.

30.1 *D:* Aquí [E8] tiene una respuesta general.

30.2 *E8:* Cualquier número primo multiplicado por dos.

30.3 *E9:* ¡No! multiplicado por dos no [pausa] por cuatro.

30.4 *E8:* Por cuatro listo.

30.5 *D:* Por un número primo elevado al cuadrado, tu lo has hecho dos por siete elevado al cuadrado.

La profesora-investigadora cierra la puesta en común del grupo S1_G4 haciendo una reflexión sobre esta tarea.

31.1 *D:* Esa es la típica pregunta que debería salir así [gesticula con los

> dedos de la mano] si habéis entendido lo de antes [...] porque el dos elevado a la sexta me acababais de decir que tenía siete factores [...] y ¿que habéis hecho? decirle a este otro grupo que no estaba bien porque tenía siete factores, que tenían que rebajarle un exponente a la potencia de dos. Pues y si ahora estoy pidiendo que tenga tres y uno de ellos que sea primo pues eso tenía que salir pero rápido. Vale, ese tipo de cosas son las que debéis tener en cuenta.

La puesta en común del grupo S1_G4 duró aproximadamente cuarenta minutos.

Seminario 2. Grupo 4 (S2_G2)
La sesión comienza con la asignación por parte de la profesora-investigadora de las tareas T1, T2, T3 y T5 para la puesta en común. La numeración de los integrantes de este grupo, así como la numeración de las intervenciones en la puesta en común la hicimos siguiendo el mismo criterio del seminario 1. En ese sentido, los integrantes del grupo cuatro del seminario 2 (S2_G2) son E1, E2, E3 y E4.

La primera tarea que este grupo discute es la tarea T1 (véase figura 6.15). El estudiante E1 toma la palabra para comenzar a hacer la explicación de la tarea. Lo primero que hace es leer en voz alta el enunciado de la tarea y luego escribe en la pizarra el listado de los números que son múltiplos de 117 y justifica diciendo que "son los únicos números que al dividirlos con el mismo número 117 sale un número exacto". También señala el 3 y el 13 como primos y el resto como no primos. La profesora-investigadora interrumpe para preguntarles cómo han llegado a ese resultado. En el siguiente episodio recogemos la interacción que se originó a partir de la pregunta formulada.

32.1	*D:*	¿Cómo habéis llegado a ese listado de divisores?
32.2	*E1:*	Ese listado, pues hemos hecho lo de la tabla y hemos ido tachando los que eran; los que son múltiplo y los que no y estos son los al final nos han quedado.
32.3	*D:*	La tabla cuál habéis hecho [pausa] de números.
32.3	*E1:*	Sí, de números.
32.4	*E2:*	[interrumpiendo a E1]. Es que lo hemos hecho de diferentes formas. También hemos hecho una tabla y hemos puesto 117 entre 3 y nos salía.
32.5	*D:*	Y cómo lo habéis hecho los demás ¿igual?

Ante esta pregunta, casi todos responden que lo han hecho factorizando el 117 y que les han salido los mismos números.

En vista de que no fueron puestas de manifiesto dudas o preguntas relacionadas con esta tarea, la profesora indica que continúen con la tarea T2 (véase figura 6.16).

Para discutir la tarea T2, el estudiante E2 toma la palabra, lee el enunciado y explica el procedimiento, verbalmente, de cómo han llegado al resultado. En el episodio 33 recogemos la explicación dada por el grupo y la interacción que se dio durante la resolución de esta tarea.

33.1	*E2:*	Pues [pausa] nosotros hemos puesto que es múltiplo porque los siguientes números contienen a los factores del segundo, es decir, que el primer número contiene a los otros números a los más chicos, se puede dividir el primero por el segundo y sale un número exacto.
33.2	*D:*	A ver explicarnos un poco más cómo la habéis hecho.
33.3	*E2:*	El número es [escribe en la pizarra $3^4{\times}5^5{\times}7^2{\times}13^{15}$ y también escribe el número $3^2{\times}5^2{\times}7$] entonces este número [señala el $3^4{\times}5^5{\times}7^2{\times}13^{15}$] recoge a estos números [señala a $3^2{\times}5^2{\times}7$].
33.3	*E1:*	Al descomponerlo tiene que salir este número, la descomposición tiene que ser esa entonces por eso es múltiplo.
33.4	*E2:*	Si se descompone en factores más chicos entonces sale este número.

En este punto la profesora-investigadora interviene y pregunta a los demás asistentes al seminario si lo han hecho igual o de otra forma. Una integrante de otro grupo E5 explica verbalmente mediante la condición necesaria y suficiente la relación ser múltiplo, hace referencia explícita a la estructura multiplicativa. En el episodio 34 recogemos la intervención de E5.

34.1	*E5:*	El número a es $3^4{\times}5^5{\times}7^2{\times}13^{15}$ y b es $3^2{\times}5^2{\times}7$ y hemos dicho que a es múltiplo de b si existe un número c que al multiplicarlo por b nos da a.
34.2	*D:*	Y ¿cuál es ese número?
34.3	*E5:*	Pues ese número lo hemos conseguido dividiendo a entre b.
34.4	*D:*	Estáis de acuerdo o no [pausa] hacedlo en la pizarra [invita a E5 que escriba lo que ha dicho verbalmente].

En la pizarra, E5 escribe los números que están colocados en la tarea T2 y explica que el número c lo obtiene dividiendo potencias de igual base, finalmente escribe el número que resultó de la división de potencias de igual base. En este punto la profesora-investigadora pregunta al grupo en general si alguien lo ha hecho de otra forma.

Un integrante de otro grupo, diferente de E5, interviene para explicar el procedimiento que ellos siguieron. En el episodio 35 recogemos la intervención.

35.1 *E6:* Nosotros lo único que no [pausa] que no dividimos, o sea directamente hicimos la multiplicación y lo obtuvimos así. Pero claro la división sería el proceso para obtener ese número.

La profesora se dirige al grupo que está haciendo la puesta en común e indica que hagan los que faltan de la tarea T2: factor, divisor y divisible. Sugiere que continúen otros integrantes del grupo, diferentes de E1 y E2, que han participado ya de la puesta en común. En el siguiente episodio recogemos la intervención de E3 sobre la relación ser divisible.

36.1 *E3:* Pues hemos puesto que también es divisible porque al dividirlo da una división exacta, el resultado da resto cero.

En este punto la profesora-investigadora hace una aclaratoria sobre la expresión "se puede dividir" que han utilizado en varias ocasiones algunos de los maestros en formación y sobre una posible confusión sobre cuál es resultado de una división. En el episodio 37 recogemos esa intervención.

37.1 *D:* Tenéis mucho cuidado [pausa] lo digo por si alguien lo tiene en mente con la idea esta de [pausa] se puede dividir. Poderse dividir [pausa] se pueden dividir todos lo números, pero la idea es que la división sea exacta. Pues significa que el resultado sea un número natural y el resto sea cero. El cociente o resultado ese es el que tiene que ser un número natural. Porque hay otros números que se pueden dividir lo que pasa es que no da una división exacta. En este caso lo que estamos buscando es justamente eso.

Después de esta aclaración, toma la palabra el cuarto integrante del grupo que participa de la puesta en común E4 para explicar la relación ser factor. El estudiante E4 lee en voz baja lo que tiene escrito sobre ser factor, la lectura que ha hecho no se percibe muy bien. La profesora interviene y le indica que repita lo que ha dicho. Vuelve a leer, esta vez en voz alta, lo que tiene escrito sobre ser factor. En este punto la profesora pregunta al resto de los estudiantes si ha entendido lo expresado por E4. Los estudiantes responden que no y comienza una interacción entre E4, la profesora y el resto de los estudiantes que recogemos en el episodio 38.

38.1 *D:* [...] Deja que E4 [pausa] deja que se explique.

38.2 *E4:* Por que al ser este número más grande [pausa] al descomponerlo [pausa] al descomponer el segundo en factores te sale [pausa].

38.3 *D:* Me has dicho tres veces lo mismo, o sea, lo que tienes escrito allí. ¿Lo puedes decir de otra forma? Por favor. Tu imagínate que yo soy una niña de primaria y me están explicando eso, y, yo digo ¡maestro no lo entiendo! y me lo repites otra vez igual, ¡maestro no lo entiendo! y me lo repites otra vez igual. Si me lo dices tres veces igual y no te entiendo a la primera a la segunda seguramente que tampoco lo entienda a la tercera. ¿Cómo me dirías eso? [silencio de 15 segundos aproximadamente] porque tu entiendes lo que estás leyendo.

38.4 *E4:* Si pero no sé como explicarlo [silencio de aproximadamente 11 segundos].

La profesora-investigadora interviene para indicarle a E1 que ayude a explicar la tarea. En el episodio 39 mostramos la interacción entre E1 y la profesora.

39.1 *D:* Venga E1 ayúdale, explícalo.

39.2 *E1:* Al ser este número más pequeño al descomponerlo es imposible que salga un número mayor. Tiene que ser siempre un número más pequeño; al descomponerlo.

39.3 *D:* ¿Siempre los factores de un número son menores que ese número? [pausa] tienen que ser menores o iguales.

Después de aclarar la duda sobre los factores, la profesora le pide al grupo que continúe con la tarea T3 (véase figura 6.17). En este momento E4 lee, en voz alta, la tarea T3 y E2 toma la palabra para explicar la tarea en la pizarra. En el siguiente episodio recogemos la explicación.

40.1 *E2:* Nosotros lo que hemos hecho con ese número es que hemos multiplicado el número [señala el número $3^4\times5^5\times7^2\times13^{15}$] por dos y por cinco y ese mismo número por la unidad, entonces nos salen tres múltiplos, como los números son más grandes serían múltiplos de ese número.

La profesora-investigadora pregunta al grupo S2_G2 cómo han hecho la tarea T5 (véase figura 6.19). El estudiante E2 responde que lo han hecho "probando y probando números hasta encontrar un número que cumple las condiciones" y menciona el número 28. En este punto la profesora-investigadora le indica al grupo que deben explicar el procedimiento para que se pueda entender. En el episodio 41 recogemos la intervención de la profesora.

41.1 *D:* Pero ¿habéis empezado el uno, el dos, el tres [...]?

41.2 *E2:* No.

41.3 *D:* Ahora vais a explicar el razonamiento completo [pausa] porque probando, probando [pausa] no habéis empezado número por número: este si, este no, este si, este no [...]. Entonces vamos por parte, ¿habéis seguido algún tipo de criterios para probar con los números?. Contadnos qué criterios habéis seguido.

En el procedimiento que E2 comienza a contar hace referencia a los números primos, y, a partir de allí, se genera una discusión sobre la definición de número primo que E2 ha considerado. En el episodio 42 recogemos esta discusión.

42.1 *E2:* Es que hemos cogido [pausa] al principio estábamos cogiendo los números primos, pero eso nos salió que eran múltiplos de tres entonces no nos servían. Luego hemos cogido [la profesora interrumpe a E2].

42.2 *D:* Pero perdona [pausa] ¡pero si son primos no pueden ser múltiplos de tres!

42.3 *E2:* No sé cómo ha salido pero nos ha salido uno así.

42.4 *D:* ¡Si son primos no pueden ser múltiplos de tres; es por definición!

42.5 *E2:* No sé cómo ha salido pero ha salido uno primo.

Ante esta confusión por parte de E2 sobre el procedimiento que han seguido y sobre la definición de número primo, otro integrante de su grupo el estudiante E1 interviene para explicar el procedimiento que han seguido con los números primos. En el episodio 43 recogemos esta intervención.

43.1 *E1:* ¡No! Los números primos los hemos multiplicado por dos, por cuatro, por cinco, a ver si nos salía un número que tenga los seis divisores y que no fuera divisible entre tres ni entre cinco.

A pesar de esta aclaratoria sobre el procedimiento, la justificación del número 28 como respuesta de la tarea T5 seguía siendo "probando, probando hasta llegar al 28". En este punto la profesora-investigadora pregunta si alguien en el aula lo ha hecho de otra manera. Una estudiante E5 (la misma estudiante que participó en el episodio 34) dice que ellos han seguido un procedimiento diferente. La profesora le indica que pase a la pizarra y explique a todos cómo lo han hecho. En el episodio 44 recogemos esta intervención.

44.1 *E5:* Lo primero que hicimos fue coger los tres primeros número primos que no son ni el tres ni el cinco: cogimos el dos, el siete y el once, y, los multiplicamos. Esto nos da ciento cincuenta y cuatro [escribe los números en la pizarra y el resultado de su multiplicación]. Ahora el ciento cincuenta y cuatro lo factorizamos [escribe el número 154 y hace las divisiones sucesivas por 2, 7 y 11] pero nos dimos cuenta que tiene más divisores [cuenta los divisores en la descomposición, primero cuenta los de la parte izquierda y luego los de la parte derecha] el ciento cincuenta y cuatro, el setenta y siete, el once, el uno, el dos, el catorce y el siete. Entonces nos dimos cuenta que eso así no nos servía. Pero pensamos que si aquí [señala el producto de factores primos 2×7×11] aparecía siempre la misma cifra, si nos daría la cuenta. Entonces cogimos el dos elevado a cinco [escribe en la pizarra 2^5=2×2×2×2×2] que es igual a treinta y dos. Luego lo factorizamos [escribe el 32 y coloca los resultados de las divisiones sucesivas, verticalmente] entre dos dieciséis, entre dos ocho, entre dos cuatro, entre dos uno. Ahora si nos salen seis factores que son: el uno, el dos, el cuatro, el ocho, el dieciséis y el treinta y dos.

En este punto la profesora pregunta si ese número (32) es válido como respuesta de la tarea T5, es decir, que cumpla con las tres condiciones requeridas. La estudiante E5 manifiesta que lo comprobaron. En el episodio 45 recogemos la prueba que la estudiante E5 hace en la pizarra sobre el cumplimiento de las tres condiciones requeridas en la tarea T5.

45.1 *E5:* Lo comprobamos [pausa] ¡sí!. Entonces decimos el treinta y dos no es múltiplo de tres; porque no existe un número que multiplicado por tres de treinta y dos, donde *a* sería treinta y dos dividido entre tres y no da un número natural; sale diez coma seis [escribe la fórmula b=a×c]. Y decimos que no es divisible por cinco porque si dividimos treinta y dos entre cinco nos saldría seis coma cuatro; entonces cumple todas las condiciones.

La profesora-investigadora manifiesta que tiene solo "un comentario menor". El comentario está referido al número de divisores del primer número que E5 escribió (154); cuando comenzó a explicar cómo habían hecho la tarea T5. En el episodio 46 recogemos el comentario.

46.1 *D:* Solo un comentario menor. En el número que habéis tomado a la izquierda [indica el número 154 que está escrito en la pizarra] ¿cuántos divisores has dicho que tenía?

46.2 *E5:* [Vuelve a contar en voz alta los divisores en el mismo orden que lo hizo anteriormente y que lo señalamos en el episodio 44] siete divisores.

46.3 *D:* Yo pregunto [pausa] ¿y el veintidós?

46.4 *E5:* ¡Ah! bueno si [pausa] tenía mas, [risas] si es verdad el veintidós se me ha olvidado, el veintidós también si.

46.5 *D:* Para que tengáis en cuenta, ahí en esa tabla [señala la descomposición en factores primos del número 154 que está escrita en la pizarra] te salen algunos. Pero son todas las combinaciones de todos los productos de las combinaciones que se puedan hacer con esos factores.

46.6 *E5:* Se me ha olvidado [risas].

En este momento otra estudiante E7 manifiesta que ellos han seguido otro procedimiento diferente a los anteriores. En el episodio 47 recogemos la intervención.

47.1 *E7:* Nosotros tenemos otra forma de hallarlo, que de hecho salió en la práctica del otro día. Con el número cuarenta y cinco, ¿recordáis la del número cuarenta y cinco?. Es que detectamos que si al factorizar un número siempre en [pausa] los factores uno de ellos está elevado al cuadrado y otro es el número primo siempre va a tener seis divisores.

47.2 *D:* Ese es como un razonamiento general al que habéis llegado.

47.3 *E7:* ¡Sí! [pausa] que llegamos el otro día haciendo la práctica y que es muy fácil de hacerlo. Es cualquier número primo elevado a dos por un número primo, y, como no tiene que ser ni múltiplo de tres ni divisible por cinco [pausa] pues cualquier número primo que no sea ni tres ni cinco. Por ejemplo, puede ser dos elevado a dos por once [escribe en la pizarra varios ejemplos $2^2\times 11$, $2^2\times 7$, $2^2\times 13$] todo eso da seis divisores, seis factores y no tiene ni el tres ni el cinco.

47.4 *E5:* Nosotros [pausa] nuestra idea general es [pausa] que cualquier número primo elevado a una potencia, por ejemplo a cinco nos da seis divisores, elevado a seis nos da siete divisores. Hemos comprobado [risas] creemos que si, esa es nuestra idea general. El tres no lo hemos cogido porque no podía ser múltiplo de tres pero el tres elevado a cinco nos salen también seis divisores.

En este momento la profesora-investigadora pregunta al grupo en general si lo han hecho de otra manera. Dos estudiantes, de diferentes grupos, explican cómo lo han hecho. Ellos plantean que han ido probando con números y les han salido el número 28. La profesora-investigadora interviene para aclarar que el procedimiento debería ser más ordenado. En el episodio 48 recogemos la intervención de la profesora-investigadora.

48.1 *D:* Esa prueba debería ser algo sistemática. Vosotros la habéis reconocido antes [...] en esos casos si os ayuda hacer la tablita cuando tiene dos factores. Al hacer la tablita os dais cuenta que os salen seis celdas.

La puesta en común de la tarea T5 por parte del grupo S2_G2 duró aproximadamente treinta minutos.

Seminario 3. Grupo 4 (S3_G4)
La sesión comienza con la asignación por parte de la profesora-investigadora de las tareas T4, T5, y T6 para la puesta en común. La numeración de los integrantes de este grupo, así como la numeración de las intervenciones de los maestros en formación la hicimos siguiendo el mismo criterio de los dos seminarios anteriores. En ese sentido, los integrantes del grupo cuatro del seminario 3 (S3_G4) son: E1, E2, E3 y E4.

La primera tarea que este grupo discute es la tarea T5 (véase figura 6.19). El estudiante E1 toma la palabra para comenzar a hacer la explicación de la tarea.

Este grupo de estudiantes tiene una presentación (*power point*) en la cual tiene resueltas todas las tareas. En la presentación tienen como respuesta a la tarea T5 el número 28. Sin embargo, E1 dice que la va a explicar con un número diferente de 28. En el siguiente episodio recogemos la discusión de la tarea T5.

49.1 *E1:* Lo primero que hicimos para que no sea múltiplo de tres y no sea divisible por cinco [pausa] pues no utilizamos esos dos números como factores para calcular ese número. Porque ya entendemos que si es factor el cinco y es múltiplo de tres; pues son divisibles por esos números. Entonces vamos a coger el dos elevado a dos por once [escribe en la pizarra $2^2 \times 11=44$]. Entonces cómo calculamos los divisores; lo que hacemos es que factorizamos ese número [escribe en la pizarra los resultados de las divisiones sucesivas del número 44] dos, veintidós; dos, once y once, uno. Ahora que pasa [pausa] lo que hacíamos era combinábamos los factores primos [...] bueno los factores los combinábamos para obtener todos sus divisores. Entonces el primer divisor vamos a tomar como la unidad; la unidad divide cualquier número, luego tendríamos el dos, luego cuatro, luego tendríamos el once y ahora que nos faltaría el veintidós y por último el cuarenta y cuatro. Ahora contamos [cuenta los divisores en voz alta] uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis. Ya tenemos los seis divisores.

En este punto la profesora-investigadora interviene para preguntar a E1 si agregando una nueva condición la tarea T5 tendría solución. En el episodio 50 recogemos la interacción que se da entre E1, la profesora y el resto de los maestros en formación.

50.1	*D:*	Ahí nos daban tres condiciones. Si hubiéramos añadido una más que dijera que los seis divisores [pausa larga].
50.2	*E1:*	¿Fueran todos primos?
50.3	*D:*	Por ejemplo.
50.4	*E1:*	Pues no nos saldría [escribe seis factores primos] que lo dijimos que al multiplicarlos nos darían más.
50.5	*D:*	Y si dijera que tenga un solo factor primo [...] que tenga todas las condiciones que tenemos; las tres esas que tenemos pero además que dijera que sea solo un factor primo [...] bueno por aquí hay dos grupos que lo tienen [se dirige a E6 y le indica que lo haga].
50.6	*E6:*	Nosotros hemos cogido, por ejemplo, el treinta y dos que salen seis divisores y al descomponer el treinta y dos te sale el mismo.
50.7	*E1:*	Pero no cumple [pausa] ¿el treinta y dos?
50.8	*E6:*	Hazlo, hazlo [E1 descompone el número 32 en factores primos].
50.9	*D:*	¿Cumple ese la regla?
50.10	*E1:*	Si [pausa] vale [...] ¡ah!. Lo que quiere decir que si cojo de exponente cinco [pausa] cualquier número primo me va a salir [pausa] seis divisores.
50.11	*D:*	¿Alguien ha encontrado [pausa] un número que cumpla esas características siguiendo otra estrategia? [pausa] ¿no?

Ninguno de los estudiantes responde, sin embargo, una estudiante E7 plantea el problema de la tarea T5 y trata de encontrar una regla general para un número determinado de divisores, por ejemplo, para siete divisores. En el episodio 51 recogemos la intervención de la estudiante E7.

51.1	*E7:*	Si tú nos pides [pausa] en este caso porque son seis divisores, pero por ejemplo, nos pides siete divisores sería dos elevado a seis [...] es el número de divisores menos uno y ya sabemos [pausa] es más o menos la regla que hemos sacado.
51.2	*D:*	Si lo podéis colocar así.

La profesora-investigadora indica al grupo que continúe con la tarea T4. En esta tarea pedimos que escriban tres divisores de un número que está escrito en su representación canónica (véase figura 6.18).

El estudiante E2 toma la palabra para explicar la tarea. Primero lee en voz alta la tarea T4, escribe en la pizarra el número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$ y los números 3^2, 5^2 y 13^2. Comienza a explicar el procedimiento que ellos utilizaron para resolverla. En el episodio 52 recogemos la explicación.

52.1	*E2:*	[...] Teníamos que sacar de aquí tres divisores no primos, para ello hemos elegido el tres elevado a dos que da nueve. Porque al ser un número que se encuentra integrado en este número [señala el número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$] quiere decir que puede dividirlo. Porque esto es: tres elevado a dos por tres elevado a dos [señalando el factor 3^4] entonces si está dentro de la ecuación quiere decir que lo puede dividir y nueve no es un número primo.
52.2	*D:*	El que lo pueda dividir [pausa] cualquier número puede dividir a otro, entonces como puede decir eso [pausa] mejor.
52.3	*E2:*	Que es divisible [pausa] que este número [señala el número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$] es divisible por este [señala el número nueve].
52.4	*D:*	¿Por qué?
52.5	*E2:*	Porque este número tres elevado a dos se encuentra dentro de la fracción un número exacto de veces.
52.6	*D:*	¿Qué significa eso de que se encuentra dentro?
52.7	*E2:*	Porque al descomponer esto [señala el factor 3^4 en el número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$] podríamos descomponer como que esto es [escribe en la pizarra el factor 3^4 como $3 \times 3 \times 3 \times 3$] entonces usando las propiedades pondríamos esto así [utiliza paréntesis para asociar los factores diferentes de tres y escribe $3^4 \times (5^5 \times 7^2 \times 13^{15})$] y el resultado de esto si lo dividiésemos por tres elevado a dos sería [escribe en la pizarra el número $3^2 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$]. Igual hacemos lo mismo con estos dos números [señala los números 5^2 y 13^2] para que no sea primo tendremos que elevarlo al cuadrado porque al multiplicar un número primo o cualquier número por otro sale un número no primo.

La profesora-investigadora indica otras combinaciones entre los factores del número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$ que son divisores también y no son primos. A continuación plantea la resolución de la tarea T6.

El estudiante E3 toma la palabra, lee la tarea T6a y dibuja en la pizarra el diagrama tal cual está en propuesto en la tarea (véase figura 6.20). Posteriormente coloca en los recuadros en blanco los términos: factor, divisor y múltiplo, en ese orden, sin haber colocado algún número en la parte izquierda del diagrama (véase figura 6.28).

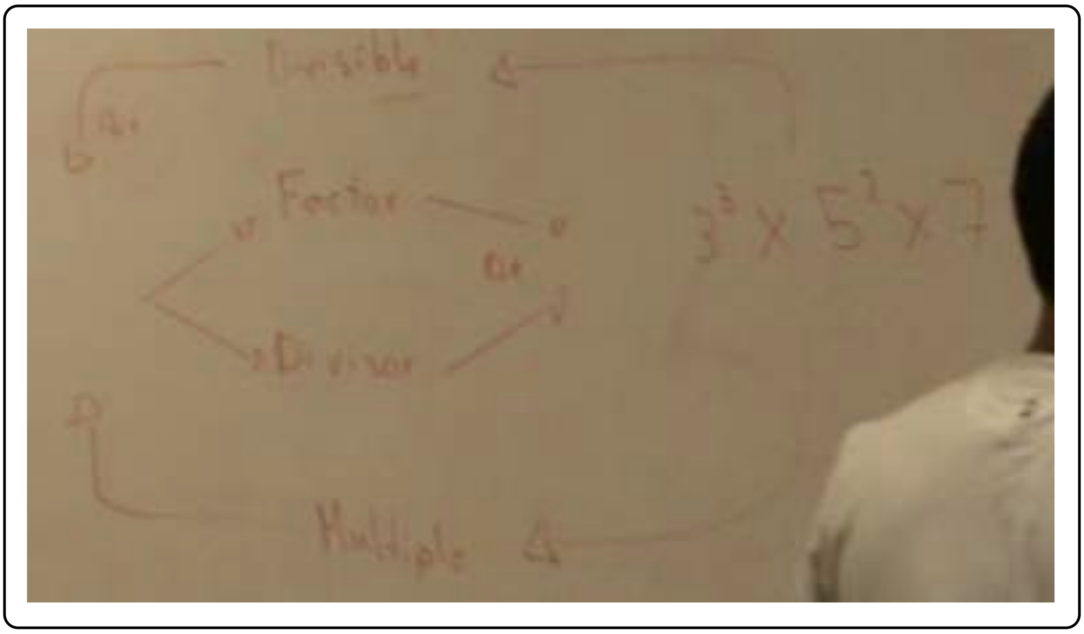


Figura 6.28. Respuesta dada por E3 a la tarea T6a

Una vez que ha dibujado el diagrama y colocado los términos expresa que puede colocar varios números para completar el diagrama, de tal manera, que esos números satisfagan las relaciones colocadas en el mismo. En el episodio 53 recogemos la expuesto por el estudiante E3.

53.1 *E3:* [...] Dice que coloquemos un número aquí [señala la parte izquierda del diagrama] de tal manera que sea verdad todo, entonces nosotros hemos puesto aquí el nueve, pero también pudimos haber colocado cualquier combinación de estas; de las que tenemos aquí [señala el número $3^3 \times 5^2 \times 7$]. Este número es divisible por nueve porque como en el problema anterior este número [señala el número 9] está dentro de este otro [señala el número $3^3 \times 5^2 \times 7$].

53.2 *D:* Esa idea de estar dentro cómo se expresa en términos de la divisibilidad.

53.3 *E3:* Este número total [señalando el número $3^3 \times 5^2 \times 7$] cuando lo factorizamos [hace las divisiones sucesivas] te da todos los divisores. Entonces nosotros hemos puesto uno de los divisores que te puede dar al factorizarlo. Pero también digo que podemos haber puesto tres elevado a tres que es veintisiete, tres [...].

53.4 *D:* Esta bien todo eso, estoy de acuerdo; son todos divisores [...] tu has escogido el nueve, ahora yo te digo [pausa] explica por qué.

53.5 *E3:* [...] Y nueve multiplicado por tres, por cinco elevado a dos, por siete [$9 \times 3 \times 5^2 \times 7$] da exacto [hace referencia al número $3^3 \times 5^2 \times 7$].

En este punto interviene una estudiante de otro grupo e indica que ellos han colocado el número 3×5^2. La profesora pregunta al estudiante E3 si esa afirmación es válida. La respuesta de E3 es que sí, que está bien, y adicionalmente señala que se pueden agotar todas las posibilidades desde la descomposición del número. Posteriormente, la profesora pregunta sobre la posibilidad de colocar el número $3^3 \times 5^2 \times 7$ como respuesta. En el episodio 54 recogemos esta interacción.

54.1 *E3:* Si es válido [...] también puedes poner tres elevado a dos por siete [$3^2 \times 7$].

54.2 *D:* Y [pausa] ¿podrías poner tres elevado al cubo, por cinco al cuadrado, por siete? [$3^3 \times 5^2 \times 7$].

54.3 *E3:* Claro [...].

54.4 *D:* Entonces si yo coloco el número [$3^3 \times 5^2 \times 7$] ese número [pausa] sería factor de [$3^3 \times 5^2 \times 7$] ¿me estás diciendo?

54.5 *E3:* Claro [pausa] si colocamos este número aquí [señala el número $3^3 \times 5^2 \times 7$] y lo multiplicamos por uno nos da el mismo [$3^3 \times 5^2 \times 7$].

Como ningún estudiante planteó dudas, la profesora-investigadora indica al grupo que continúe con la segunda cuestión de la tarea T6.

La estudiante E4 dibuja en la pizarra el diagrama tal como está en la tarea T6b (véase figura 6.20) y comienza a hacer la explicación. Lo primero que hace en la resolución de la tarea es completar con los términos: divisible, factor y múltiplo los espacios en blanco del diagrama sin colocar algún número para verificar si la relación es cierta o no. Esta situación llama la atención de la profesora-investigadora que pregunta sobre ello. En el episodio 55 recogemos la explicación dada por la estudiante E4 a la tarea T6b y la intervención de la profesora.

55.1 *E4:* [...] Lo que tenía que hacer era rellenar todos los recuadros [...] haciéndolo he puesto lo que falta aquí [señala los espacios en blanco del diagrama en el cual deben colocar los términos asociados a la divisibilidad que faltan] y después ya he sacado el número [escribe en el primer recuadro en blanco el término divisible, en el segundo el término divisor y en el último recuadro en blanco coloca el termino múltiplo].

55.2 *D:* Y cómo puedes rellenar eso sin poner nada a la derecha [hace referencia al espacio en blanco del diagrama que se debe rellenar con un número de tal manera que se cumpla la relación].

55.3 *E4:* Porque yo he supuesto que aquí [señala el espacio en blanco del diagrama donde debe ir un número que haga que las relaciones sean verdaderas] irá un número que será múltiplo de éste [señala el número $3^3 \times 5^2 \times 7$ que está puesto en la izquierda del diagrama], un número que aún así también cumpla ser múltiplo, ser divisible ante este [señala el número $3^3 \times 5^2 \times 7$] y como aquí me ponía que era divisor por lo tanto debería factor aquí también. O sea, mas o menos así por lógica y con lo del anterior ejercicio [hace referencia a la tarea T6a] me hizo calcular. Entonces el problema, por así decirlo, ha sido poner el número aquí ¿no? [señala el espacio en blanco del diagrama] entonces voy a poner lo que he puesto y ahora explico porqué. [escribe el número $3^4 \times 5^3 \times 7^2$ en el recuadro en blanco]

La explicación de la estudiante E4 generó una discusión sobre el concepto de múltiplo y sobre la operación de división. Esta operación interpretada como el número de veces que un número contiene a otro, un número determinado de veces. En la discusión E4 presentó confusión al tratar de aplicar el algoritmo de la división cuando los números están escritos en su representación canónica y no en su representación posicional de base diez. En el episodio 56 recogemos la interacción que se dio entre la estudiante E4 y la profesora-investigadora al respecto.

56.1 *E4:* [...] Yo he puesto este número [$3^4 \times 5^3 \times 7^2$] porque principalmente al ser múltiplo y divisible de este [$3^3 \times 5^2 \times 7$] tiene que ser un número mayor. Por lo tanto he puesto un número que contenga este número [$3^3 \times 5^2 \times 7$] un número más de veces. O sea, me explico: lo he multiplicado por así decirlo por [pausa] o sea [pausa] bueno no lo he multiplicado. Que le he añadido un número más a cada exponente para que así este [$3^3 \times 5^2 \times 7$] esté aquí incluido [señala el número $3^4 \times 5^3 \times 7^2$] junto con otro más, o sea, ¡es que no me explico bien!. Que si yo por ejemplo divido ese número este [$3^4 \times 5^3 \times 7^2$] entre este [$3^3 \times 5^2 \times 7$] me va a salir [escribe el número $3 \times 5 \times 7$] por lo tanto puedo decir que es divisible y múltiplo.

56.2 *D:* ¿Por qué?

56.3 *E4:* Es divisible porque si divido este [$3^4 \times 5^3 \times 7^2$] entre este [$3^3 \times 5^2 \times 7$] me sale una división exacta o sea un cociente natural con resto cero.

56.4 *D:* ¿Cuál es el cociente?

56.5 *E4:* El cociente es este [$3 \times 5 \times 7$] [...] luego es múltiplo porque [pausa] este número [$3^4 \times 5^3 \times 7^2$] es múltiplo de este [$3^3 \times 5^2 \times 7$] porque este [señala al número $3^4\times5^3\times7^2$] contiene a este [señala el número $3^3\times5^2\times7$] un número determinado de veces en el [pausa] vale porque está por así decirlo como incluido.

56.6 *D:* ¿Qué número determinado de veces? ¡No lo entiendo!

56.7 *E4:* [...] Pues una vez [...] Este número [$3^3\times5^2\times7$] está dentro de este [$3^4\times5^3\times7^2$] una vez y luego este también [$3\times5\times7$].

En este punto la profesora-investigadora vuelve a intervenir para manifestar que no entiende la justificación que E4 está dando. En vista de esta situación la estudiante E4 trata de explicar nuevamente. En el siguiente episodio recogemos la intervención.

57.1 *E4:* [...] O sea, lo que yo quiero decir es que cuando [pausa] la definición de múltiplo es que un número es múltiplo de otro cuando se incluye [pausa] está incluido un número determinado de veces en el número.

57.2 *D:* ¿Dónde has encontrado esa definición? [...] ¿cuándo se decía que un número era múltiplo de otro?

57.3 *E4:* Un número es múltiplo de otro cuando [un compañero de grupo dice en voz baja "cuando existe"] existe [risas] bueno yo escribí de otra manera. Cuando lo contiene un número determinado de veces; en el número múltiplo.

57.4 *D:* Vale y cuántas contiene el uno al otro ahí.

57.5 *E4:* ¡Una vez! Este [señala $3^3\times5^2\times7$] se encuentra aquí [señala $3^4\times5^3\times7^2$] una vez, o sea lo contiene una sola vez.

57.6 *D:* Puedes tenerlo en cuenta como el número de veces que contiene al otro, pero el número de veces que contiene al otro no es una vez.

57.7 *E4:* Vale yo lo que quiero decir es que si lo descompongo pues lo voy a obtener una vez [escribe en la pizarra $3^4\times5^3\times7^2 = (3\times5\times7)\times(3^3\times5^2\times7)$] o sea que este [$3^3\times5^2\times7$] es un factor de este [$3^4\times5^3\times7^2$] como ya lo pone aquí también [señala en el diagrama de la pizarra la relación es factor].

57.8 *D:* Si pone que es factor pero yo te preguntaría ¿por qué es factor?

La justificación que la estudiante E4 da a esta última pregunta es "que la división resulta exacta con resto cero". En este punto la profesora-investigadora vuelve sobre la lógica que E4 está aplicando para justificar múltiplo y posteriormente la intervención de otro miembro del grupo, el estudiante E3, termina por aclarar la discusión. En el episodio 58 recogemos esta interacción.

58.1	*D:*	[...] Pero siguiendo tu lógica ¿cuántas veces está contenido el [$3^3 \times 5^2 \times 7$] en [$3^4 \times 5^3 \times 7^2$]?
58.2	*E4:*	¿cuántas veces lo contiene? [pausa] ¡una vez!
58.3	*D:*	Alguien que [pausa] ¿tu querías decir algo? [dirigiéndose a E1].
58.4	*E1:*	Yo lo podría explicar [pausa] a ver.
58.5	*E4:*	Pero ¿cuántas veces lo contiene?
58.6	*E1:*	[...] A ver ese número lo contiene [...] lo contiene [pausa].
58.7	*E3:*	¿No sería que lo contiene tres por cinco por siete veces?
58.8	*E1:*	Lo contiene una vez ¡no!. Ahora luego que [pausa].
58.9	*E3:*	A ver el número $3 \times 5 \times 7$ es las veces que lo contiene.
58.10	*D:*	[...] ¿Cuántas veces contiene el número seis al dos?
58.11	*E4:*	Tres veces.
58.12	*D:*	Pues es lo mismo ¿cuántas veces contiene? [...] eso de las veces que lo contiene no lo hemos visto como definición, si queréis lo podeis ver así pero porqué. Porque cuando hacéis una división entre siete, por ejemplo, ¿qué hacemos? Ver cuántas veces está el siete contenido en, por ejemplo, veintiuno [...] en realidad ese cociente al que nosotros llamamos resultado cociente, es el número de veces que el divisor está contenido en el dividendo. Lo puedes ver así pero tienes que hacer el razonamiento bien hecho.
58.13	*E4:*	Vale, vale ahora si [...].

La puesta en común del grupo S3_G4 duró aproximadamente treinta y cinco minutos.

6.3. Fase III: análisis retrospectivos de los datos

En este apartado presentamos un análisis preliminar de cada una de las sesiones. En el capítulo 7 de esta memoria de tesis hacemos el análisis retrospectivo en general del experimento de enseñanza que hemos realizado.

El análisis preliminar de las sesiones lo hacemos tomando en cuenta tres aspectos: la actuación de los maestros en formación, la actuación de la profesora y las decisiones que hemos tomado en cada sesión.

Sesión 1

El primer aspecto al que hacemos referencia en esta sesión es sobre la actuación de los maestros en formación; esto incluye la participación verbal en la sesión y las producciones escritas; producto de las tareas desarrolladas. El segundo aspecto es sobre la intervención de la profesora ante las afirmaciones o dudas puestas de manifiesto por los maestros en formación. En ese sentido destacamos la actuación de la profesora ante las afirmaciones matemáticamente correctas, las afirmaciones matemáticamente incorrectas y sobre las dudas que plantearon los maestros en formación durante la primera sesión. El tercer aspecto es sobre aquellas decisiones que tomamos producto del desarrollo de la sesión y que posteriormente fueron incorporadas en la siguiente sesión.

Actuaciones de los maestros en formación

Las afirmaciones, o dudas; expresadas verbalmente, las hemos resumido en tres tipos: afirmaciones matemáticamente correctas, afirmaciones matemáticamente incorrectas y dudas. Por afirmaciones matemáticamente correctas hemos considerado aquellas hechas por los estudiantes y que se ajustan estrictamente a lo establecido en la ciencia matemática y que institucionalmente se pueden ver en el currículo. Por afirmaciones matemáticamente incorrectas consideramos aquellas que no son precisas en su definición o que dejan espacio para ambigüedades en algunos de los conceptos implicados. Consideramos que los estudiantes manifiestan, o formulan, dudas cuando hacen preguntas sobre algún término o concepto matemático, también cuando manifiestan explícitamente que no entienden alguna afirmación hecha por la profesora o por algún estudiante.

En la primera sesión recogimos 12 episodios (descritos anteriormente) de los cuales en 10 se dieron interacciones entre los alumnos y la profesora. En estos 10 episodios observamos 41 intervenciones de los alumnos y determinamos el tipo de afirmación que hicieron así como las dudas que manifestaron. En la tabla 6.8 podemos ver por episodio el tipo de afirmación, o duda, manifestada por los estudiantes en la primera sesión.

Tabla 6.8

Afirmaciones o dudas manifestadas por los maestros en formación en cada episodio

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
AMC	7	0	0	2	1	0	1	0	1	1	0	8

Tabla 6.8

Afirmaciones o dudas manifestadas por los maestros en formación en cada episodio

AMI	2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	2	1
D	4	1	2	0	1	0	0	0	0	1	0	3

Nota. AMC = afirmación matemática correcta; AMI = afirmación matemática incorrecta; D = dudas; e = episodio

En el 51,22% de los casos de las afirmaciones que hicieron los maestros en formación fueron matemáticamente correctas mientras que el 19,51% de las afirmaciones fueron matemáticamente incorrectas y en el 29,51% de las intervenciones manifestaron dudas.

A manera de ejemplo podemos observar en el primer episodio en la ubicación 1.2 la afirmación hecha por E1 o en el episodio doce en la ubicación 12.15 la afirmación hecha por E7. Ambas afirmaciones son matemáticamente correctas. Como ejemplo de afirmaciones matemáticamente incorrectas podemos observar en el episodio once en la ubicación 11.2 la afirmación hecha por E1; sobre número primo afirma que son aquellos "que hayan sido divididos por uno y por el mismo y la división te sale exacta". Esta afirmación no es lo suficientemente precisa en el concepto de número primo. Si bien es cierto que cualquier número natural se puede dividir por uno y por el mismo y la división resulta exacta, no considera que el número debe tener solo esos dos divisores y no más. Como ejemplo de dudas en las intervenciones de los estudiantes podemos observar en el episodio 3 en la ubicación 3.2 en la cual el estudiante plantea explícitamente una pregunta o en la ubicación 3.4 en la cual el estudiante manifiesta que no entiende el término factor.

Por otra parte, recogimos y analizamos las actividades escritas, tomando en cuenta dos aspectos. El primer aspectos está orientado hacia la comprensión del diagrama, presentado en la estructura conceptual de la divisibilidad en el capítulo 4 (véase figura 4.2), y que lo hemos utilizado como herramienta para presentar las tareas. El otro aspecto está asociado a las expectativas de aprendizaje de la sesión, en la cual, se espera que los maestros en formación reconozcan las relaciones directas e inversas asociadas a la divisibilidad.

Cuando decimos comprensión del diagrama nos referimos a que los maestros en formación pueden ubicar los términos asociados a las relaciones de divisibilidad en el diagrama y también pueden ubicar los elementos que constituyen la estructura multiplicativa. Consideramos que las expectativas de aprendizaje formuladas para esta sesión son logradas, en la medida que los estudiantes reconozcan las relaciones asociadas a la divisibilidad. Una forma de ver si los estudiantes reconocen esas relaciones es determinar cuántas relaciones matemáticamente correctas han formulado los estudiantes en las tareas planteadas en la sesión.

En la tabla 6.9 presentamos los resultados de las tareas que los estudiantes entregaron en esta sesión. En este caso nos referimos a las tareas: T2 (véase figura 6.2), T4 (véase figura 6.4), T5 (véase figura 6.5) y T6 (véase figura 6.6).

Tabla 6.9
Resultados de las tareas T2, T4, T5 y T6

	T2	T4	T5	T6
RMC	137	134	118	149
RMI	23	26	2	11

Nota. RMC = relación matemáticamente correcta; RMI = relación matemáticamente incorrecta

En las producciones escritas de los maestros en formación hicimos en total 600 observaciones, de las cuales, el 89,67% fueron relaciones matemáticamente correctas y 10,33% matemáticamente incorrectas.

Actuación de la profesora-investigadora

En este apartado nos referimos a la intervención de profesora en la sesión ante las afirmaciones, o dudas, hechas por los estudiantes. En ese sentido destacamos la actuación de la profesora ante las afirmaciones matemáticamente correctas, las afirmaciones matemáticamente incorrectas y sobre las dudas que plantearon los estudiantes durante la primera sesión.

Cuando la afirmación de los maestros en formación fue matemáticamente correcta, la profesora aceptó la afirmación y, en algunos casos que consideró necesario, complementó la información profundizando sobre implicaciones o consecuencias de las propias afirmaciones. A manera de ejemplo, podemos observar en el primer episodio (apartado 6.2) en la ubicación 1.19; la profesora acepta la afirmación (matemáticamente correcta) y explica que “a pesar de no estar escrita en esos términos es válida”.

Cuando la afirmación de los maestros en formación fue matemáticamente incorrecta, la profesora buscó el sentido que tiene la afirmación, es decir, la afirmación incorrecta la transforma en objeto de estudio. Por ejemplo, en el episodio 11 en la ubicación 11.5, ante la afirmación matemáticamente incorrecta que hizo el estudiante en 11.4 sobre los números primos, la profesora destacó la precisión del concepto de número primo que el estudiante no ha considerado en su afirmación y, que al no hacerlo, el concepto no se ajusta a la definición matemática. Otro ejemplo de esta actuación de la profesora está en el episodio doce en la ubicación 12.3. Ante la afirmación matemáticamente incorrecta hecha por el estudiante en 12.2, la profesora buscó el sentido que tiene la afirmación. En primer lugar reconoció una parte de la afirmación del estudiante que es matemáticamente correcta “doce es factor de 24, estamos de acuerdo” y, posteriormente, volvió sobre la condición que hace que la afirmación del estudiante no sea correcta “¿el 12 es primo?”.

Cuando los maestros en formación manifestaron dudas la profesora utilizó ejemplos más sencillos para abordarlas. En unos casos reformuló preguntas y en otros planteó contraejemplos para discutir con todo el grupo. A manera de ejemplo, podemos observar el episodio 10. Ante la duda de un estudiante sobre la propiedad antisimétrica, la profesora transforma el problema en otro más sencillo: supone que la relación de orden es simétrica y discute con los alumnos el sentido de esta afirmación.

Toma de decisiones

Como hemos visto, en esta sesión se desarrollaron dos tipos de tareas. Un primer tipo de tarea dirigido a la discusión entre los alumnos y la profesora; específicamente las tareas T1 (véase figura 6.1) y T3 (véase figura 6.3). Un segundo tipo de tareas pretendían que los estudiantes trabajaran individualmente, específicamente las tareas T2 (véase figura 6.2), T4 (véase figura 6.4), T5 (véase figura 6.5) y T6 (véase figura 6.6). En la resolución de estas tareas detectamos algunas dificultades concretas con el uso de algunos símbolos en el diagrama y que decidimos no utilizarlos en la siguiente sesión. Por ejemplo, la primera y la última parte del diagrama en las tareas T1, T2, T3 y T4 se colocaron los símbolos “|” y “ů” que representan las expresiones “divide” y “múltiplo” respectivamente. Estas expresiones causaron confusión y dudas en los estudiantes como se puede observar en el episodio dos y en los episodios 5, 6, 7 y 8. Igualmente se puede observar en la figura 6.29 la misma situación de confusión sobre la lectura e interpretación de estos símbolos.

Completa el siguiente diagrama de tal manera que las relaciones múltiplo, divisible, divisor y factor, sean verdaderas para la estructura multiplicativa $b = a \times c$

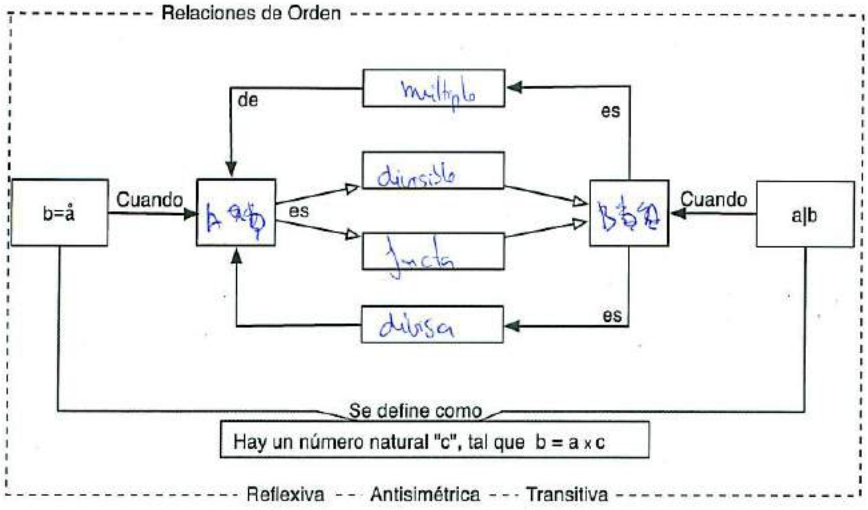


Figura 6.29. Respuesta dada a la tarea T6 por E1

La confusión presentada por E1 al responder la tarea T6 se produce porque no tiene certeza de colocar la letra "*a*" o "*b*" en las celdas correspondientes (véase figura 6.29).

En los dos tipos de tareas, descritas anteriormente, los estudiantes logaron reconocer y expresar adecuadamente las relaciones tanto directas como inversas asociadas a la divisibilidad en el diagrama. Lograron identificar números primos y compuestos, y, determinar factores-divisores explícitos y no explícitos en una descomposición canónica. Por lo que decidimos llevar a la práctica la siguiente sesión planificada.

Sesión 2

Al igual que en la sesión 1, señalamos tres aspectos para esta sesión 2. La actuación de los maestros en formación, la actuación de la profesora-investigadora y finalmente la toma de decisiones.

Actuación de los maestros en formación

En esta sesión, la actuación de los maestros en formación la podemos ver sobre las producciones escritas de las tareas T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7 y T8, así como en las grabaciones de audio que hicimos durante la implementación.

Los maestros en formación, en las producciones escritas y en las discusiones de su grupo, mostraron evidencias sobre dudas en la forma de representar un número, sobre procedimientos y conceptos asociados a la relación de divisibilidad, sobre el modo de uso de los conceptos de múltiplo, divisor, factor y divisible; asociados en algunos casos con significados diferentes al establecido en el contexto de la teoría de números. También mostraron evidencias sobre el uso de diferentes sistemas de representación, operaciones entre sistemas de representación, relaciones entre conceptos y procedimientos asociados a la divisibilidad, sobre el modo de uso de los conceptos de múltiplo, divisible, factor y divisor como relación; asociándole el significado verdadero que estos conceptos tienen desde la teoría de números.

Sobre las producciones escritas de los maestros en formación determinamos los significados que sobre divisibilidad ponen de manifiesto. En el capítulo 7 de esta memoria de tesis presentamos el análisis esas producciones escritas. Igualmente presentamos de forma complementaria episodios con algunas grabaciones de audio en las cuales mostramos evidencias de esos significados.

Actuación de la profesora-investigadora

La actuación de la profesora-investigadora en esta sesión estuvo limitada a la gestión en el aula. A la organización de los grupos de trabajo y a la presentación del documento mediador a los maestros en formación, aplicarlo, y, recogerlo una vez resuelto y discutido en los grupos de trabajo. La interacción de la profesora con los estudiantes fue ocasional y mayoritariamente se trató de aclarar algún aspecto de la tarea referido a tiempo de duración de la misma o algún otro aspecto distante del contenido matemático de las tareas.

Toma de decisiones

Como la asistencia de los maestros en formación fue diferente que la asistencia a la primera sesión. La profesor-investigadora formó un nuevo grupo de trabajo. Del grupo S1_G4 asistieron solo dos de sus integrantes al igual que los integrantes del grupo S1_G5. Estos cuatro integrantes que asistieron a la sesión (originalmente dos de cada grupo) formaron un nuevo grupo y que decidimos llamarlo S1_G4. Este nuevo grupo se constituyó para trabajar en esta sesión y en la próxima (sesión 3). Igualmente se hizo la asignación de los grupos que presentan la puesta en común en la sesión 3.

Como en la resolución de las tareas observamos que algunos de los maestros en formación utilizaron el móvil, en modo calculadora, para transformar el número dado en su descomposición canónica a su representación posicional de base diez, y, a partir de esa transformación tomar decisiones sobre las relaciones de múltiplo, factor, divisible y divisor. Decidimos colocar, en algunas tareas, para la puesta en común números escritos en su descomposición canónica cuyos exponentes sean números grandes. A manera de ejemplo podemos observar la tareas T2 de la sesión 3 (véase figura: 6.16).

Sesión 3
Al igual que en las sesiones anteriores, señalamos tres aspectos para el análisis de esta sesión. La actuación de los maestros en formación, la actuación de la profesora-investigadora y finalmente la toma de decisiones.

Actuación de los maestros en formación
La actuación de los maestros en formación la podemos ver a través de la puesta en común. En la puesta en común observamos la actuación de los grupos seleccionados, así como, las diferentes intervenciones que hicieron el resto de los estudiantes. Los miembros de los grupos, que presentaron la puesta en común, participaron en las discusiones de las tareas y complementaron algunas explicaciones que daban sus compañeros de grupo; cuando se presentaron dudas. Esta dinámica se siguió en cada uno de los seminarios.

En la puesta en común del grupo S1_G4 registramos 18 episodios, del grupo S2_G2 registramos 17 episodios y del grupo S3_G2 registramos 10 episodios. En los seminarios, los maestros en formación mostraron evidencias sobre el uso de la divisibilidad como relación y también como una operación aritmética. Algunos necesitan la representación del número en su forma posicional de base diez para tomar las decisiones sobre la divisibilidad, aunque esto implique algunos cálculos muy laboriosos. Otro grupo de maestros en formación aprovecha la representación dada por el teorema fundamental de la aritmética para decidir sobre la divisibilidad y establecen además vínculos sólidos entre los términos múltiplo, divisible, factor y divisor.

Dos aspectos nos llamaron la atención y que no los habíamos visto ni registrados anteriormente. Uno de ellos tiene que ver con la expresión "factorizar un número" y el otro con el hecho de utilizar las relaciones desde su propio vínculo y no desde la relación entre dos números. Las evidencias sobre la expresión "factorizar un número" a la cual hacemos referencia las podemos observar en los episodios 28, 49 y 53. En el episodio 49, por ejemplo, la estudiante E1 escribe dos factores primos con la operación de multiplicación $2^2 \times 11$ luego que escribe esos factores realiza la multiplicación para obtener el resultado 44, posteriormente expresa que lo tiene que factorizar y hace las divisiones sucesivas del número 44. El otro aspecto al que hacemos referencia tiene que ver con el uso de los vínculos entre las relaciones de múltiplo, divisor, factor y divisible. En los episodios 53 y 55 podemos ver evidencias de esta situación. Igualmente podemos ver evidencias en la figura 6.28. Como hemos recogido en el episodio 55, la estudiante E4 comienza a llenar los recuadros en blanco del diagrama que corresponden a los términos múltiplo, factor y divisible y no toma en cuenta los números que deben colocarse a la izquierda del diagrama para que la relación sea verdadera. Por esta razón la profesora interviene para preguntarle como puede llenar esos espacios y después colocar el número. La respuesta de la estudiante

E4 es que irá un número, es decir, le resta importancia al número y centra la atención es en los vínculos que hay entre las relaciones múltiplo, divisible, factor y divisor que debe completar en el diagrama; siguiendo la lectura orientada por las flechas. Esta evidencia es muy notable cuando afirma "y como aquí me ponía que era divisor por lo tanto debería factor aquí también".

En el capítulo 7 de esta memoria de tesis presentamos estos resultados como complemento de las producciones escritas de los maestros en formación.

Actuación de la profesora-investigadora

En cuanto a la intervención de profesora-investigadora durante la puesta en común de los tres grupos de estudiantes que hemos descrito anteriormente (S1_G4, S2_G2 y S3_G2), destacamos cuatro aspectos: intervenciones dirigidas a fomentar la participación de los estudiantes durante la puesta en común, intervenciones dirigidas a orientar o precisar algunos conceptos matemáticos que los maestros en formación ponen de manifiesto, intervenciones dirigidas específicamente a aclarar dudas, intervenciones dirigidas a profundizar en algún concepto matemático.

En los tres seminarios de la puesta en común contabilizamos un total de 73 intervenciones por parte de la profesora-investigadora. El 23,29% de esas intervenciones fueron hechas con el propósito de estimular la participación de la mayor cantidad de maestros en formación en la puesta en común. La participación de los maestros en formación pasó del 32,43% que originalmente había en la planificación a un 62,16% de participación. Es decir, esta actuación de la profesora-investigadora efectivamente promovió la participación de los estudiantes durante el desarrollo de la sesión 3. A manera de ejemplo, podemos mencionar que en el episodio 14.2 después de la intervención de la profesora participan dos estudiantes E5 (14.3) y E6 (14.4) que no forman parte del grupo S1_G4 que hacía la puesta en común.

Con respecto al segundo aspecto que consideramos, podemos decir que el 43,84% de las intervenciones de la profesora-investigadora estuvieron dirigidas a orientar o precisar algunos conceptos matemáticos o procedimientos que los maestros en formación ponían de manifiesto. A manera de ejemplo, podemos observar en el episodio 46 en las líneas 1 y 5 (46.1 y 46.5) que la profesora hace la precisión sobre el número de divisores que tiene un número, en ese caso, el número 154. En esta intervención la profesora pregunta por el número 22 que también es factor de 154 y que la estudiante E5 no consideró; porque en el procedimiento que siguió (la descomposición en factores primos) no salía el número 22 de forma explícita.

El 8,22% de las intervenciones de la profesora-investigadora estuvieron orientadas a aclarar dudas que de forma explícita manifestaron los maestros en formación. A manera de ejemplo, podemos observar en el episodio 42 la interacción que se da entre la profesora y el estudiante E5 sobre la definición de número primo.

Las intervenciones de la profesora-investigadora dirigidas a profundizar en algún concepto matemático durante la puesta en común ocurrieron en el 24,66% de los casos. A manera de ejemplo, podemos señalar el episodio 50 específicamente en las líneas 1 y 10 (50.1 y 50.10) en las cuales la profesora-investigadora modifica algunas de las condiciones dadas en la tarea T5 con el propósito de profundizar sobre la relación de divisibilidad. Esta modificación de condiciones produjo intervenciones de varios estudiantes que termina con una idea sobre la generalización en 50.10 de un procedimiento para resolver la tarea y que ha surgido en el seno de la discusión; producto de la modificación realizada por la profesora-investigadora a la tarea T5.

Toma de decisiones

Por ser la última sesión del experimento de enseñanza la toma de decisiones la hicimos y las aplicamos durante el desarrollo de la propia sesión. En ese sentido, decidimos sobre la selección de las tareas para la puesta en común de cada uno de los grupos. Igualmente decidimos, debido a la naturaleza abierta y con múltiples alternativas de soluciones de la tarea cinco, preguntar la tarea T5 a cada uno de los grupos que hacían la puesta en común. Otra decisión que tomamos, durante el desarrollo de la sesión, fue la de hacer la grabación de vídeo directamente desde el propio ordenador, dado que la cinta de la grabadora de vídeo ya se había llenado completamente.

Capítulo 7. Análisis retrospectivo

> *[...] Los maestros en formación pueden llegar a desarrollar una comprensión profunda de los tópicos de la teoría de números (Feldman, 2012).*

En este capítulo describimos el análisis retrospectivo del experimento de enseñanza realizado. Este análisis lo organizamos tomando en cuenta los significados que fueron puestos de manifiesto por los maestros en formación sobre la divisibilidad durante el experimento de enseñanza.

Como hemos dicho en el capítulo tres de esta memoria de tesis, estudiamos los significados desde la terna: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. En ese sentido, sobre las producciones escritas de los maestros en formación, y, complementadas con las grabaciones de audio y vídeo realizadas durante las sesiones del experimento de enseñanza, describimos los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación en las tareas realizadas sobre divisibilidad.

Organizamos este capítulo en cuatro apartados, donde cada uno se centra en: la relación ser múltiplo; la relación ser divisor; los vínculos entre las relaciones: ser múltiplo, ser divisible, ser factor, ser divisor; el uso del teorema fundamental de la aritmética.

7.1. Análisis de la relación ser múltiplo

Como lo indicamos en el apartado 5.7 del capítulo cinco de esta memoria de tesis, para analizar los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación sobre la relación "ser múltiplo" consideramos dos tipos de análisis: análisis de frecuencias y análisis clúster.

Para hacer el análisis de la relación "ser múltiplo" consideramos las producciones escritas de los maestros en formación a cinco de las tareas de la segunda sesión: T1b (véase figura 6.7), T2a (véase figura 6.8), T3c (véase figura 6.9), T6 (véase figura 6.12) y T7 (véase figura 6.13). Por otra parte, utilizamos las grabaciones de audio (segunda sesión) y vídeo (tercera sesión) como complemento de esta información.

Análisis de frecuencias

Para hacer el análisis de frecuencia consideramos la primera dimensión que señalamos en el apartado 5.5 de esta memoria; en la estructura para codificación de la relación "ser múltiplo" (véase figura 5.9), atendiendo al énfasis en la justificación dada por los maestros en formación en su respuesta. El análisis de frecuencia lo hacemos, en primer lugar, a través de las respuestas dadas por los maestros en formación a cada una de las tareas sobre múltiplo (véase tabla 7.1) y en segundo lugar, en general, sobre la relación de múltiplo en todas la tareas (véase tabla 7.2).

Análisis en cada tarea

Identificamos en cada una de las cinco tareas sobre múltiplo, la presencia de cuatro variables de interés para el estudio del significado de múltiplo: múltiplo como producto, múltiplo como factor, múltiplo como dividendo, múltiplo como relación. En la tabla 7.1 mostramos las frecuencias, expresadas en porcentajes, de cada una de dichas variables en las cinco tareas.

Tabla 7.1

Presencia de las variables, en porcentajes, en cada una de las tareas sobre múltiplo (n=37)

Variables	T1b	T2a	T3c	T6	T7
MP	48,65	35,14	37,84	21,62	45,95
MF	10,81	0,00	0,00	29,73	8,11
MD	10,81	18,92	16,22	5,41	5,41
MR	27,01	40,54	32,43	18,92	13,51
O	0,00	5,41	0,00	0,00	0,00
NR	2,70	0,00	13,51	24,32	27,01

Nota. MP = Múltiplo como producto; MF = múltiplo como factor; MD = múltiplo como dividendo en una división exacta; MR = múltiplo como relación ser múltiplo; O = otro; NR = no responde.

Las tareas T6 y T7 son las que tienen mayor porcentaje de no respuesta. Observamos que la consideración de múltiplo como producto y el múltiplo como relación son las variables con mayor frecuencia en casi todas las tareas, excepto en la tarea T6, cuya mayor frecuencia es para el múltiplo como factor. El múltiplo como factor presenta frecuencia baja en casi todas las tareas, excepto en la tarea T6. La frecuencia de presencia del múltiplo como dividendo en una división exacta es menor.

Los maestros en formación manifestaron poseer destrezas para hacer cálculos con números, tales como multiplicación, división y potenciación. En cuanto a las estrategias seguidas por la mayoría de ellos, que respondieron a las tareas de múltiplo como el resultado de la multiplicación (múltiplo como producto), hicieron el cálculo para determinar y expresar el resultado en el sistema de representación simbólico numérico; posicional en base diez y posteriormente hacer operaciones aritméticas como multiplicación o división. Este grupo realizó un cálculo innecesario y algo complicado sin ningún instrumento de cálculo para transformar el número dado en su descomposición canónica a su representación posicional en base diez.

A manera de ejemplo, en la figura 7.1, mostramos la estrategia seguida por un estudiante (E01) al responder la tarea T1a.

Tarea 1a

Indica cuál o cuáles de los números dados a continuación se pueden colocar en el cuadro en blanco del diagrama de tal manera que la relación sea verdadera.

Respuesta dada por E01

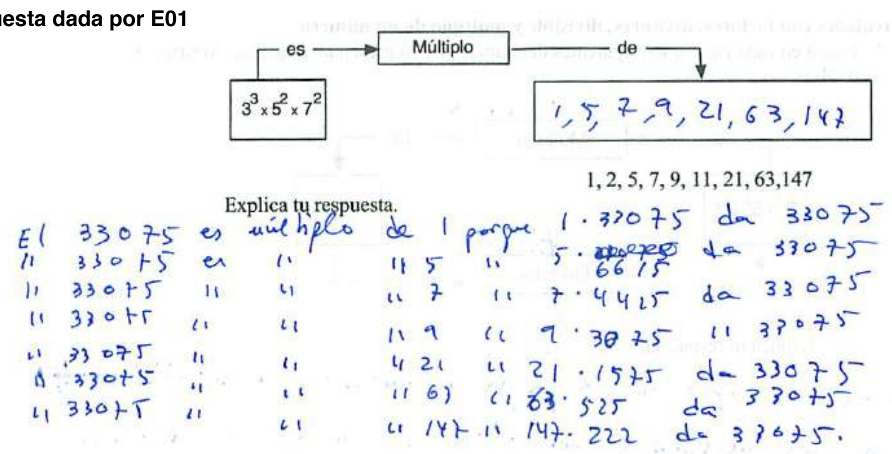
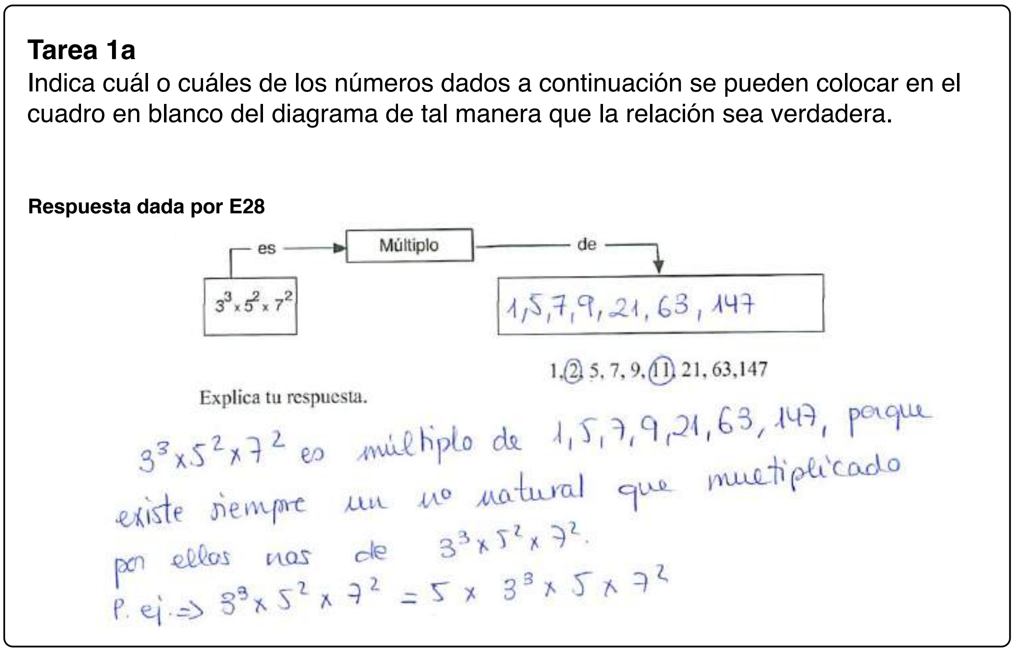


Figura 7.1. Respuesta dada por un estudiante (E01) a la tarea T1a

En la figura 7.1 observamos que el estudiante (E01) hace inicialmente el cálculo del número que venía expresado en su forma de representación canónica y lo pasa a la representación posicional en base diez. Continúa realizando cálculos (multiplicaciones y divisiones). Para justificar su respuesta, hace uso de las operaciones de división y multiplicación. Por ejemplo, justifica que 33075 es múltiplo de 5 basándose en que 5×6615 da como resultado 33075, después de hacer la división de 33075 entre 5 y obtener como resultado 6615. También justifica que 33075 es múltiplo de los números 1, 5, 7, 9, 21, 63, 147 indicando que 33075 es el resultado de una multiplicación que involucra estos números. Asocia la relación "ser múltiplo" con el resultado de una multiplicación, es decir, múltiplo como producto.

En la figura 7.2, mostramos un ejemplo, la respuesta dada por un estudiante (E28) a la misma tarea T1a. El estudiante E28 expresa explícitamente la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro, poniendo de manifiesto el significado de múltiplo como relación.


Tarea 1a

Indica cuál o cuáles de los números dados a continuación se pueden colocar en el cuadro en blanco del diagrama de tal manera que la relación sea verdadera.

Respuesta dada por E28

$3^3 \times 5^2 \times 7^2$ — es → Múltiplo — de → 1, 5, 7, 9, 21, 63, 147

1, 2, 5, 7, 9, 11, 21, 63, 147

Explica tu respuesta.

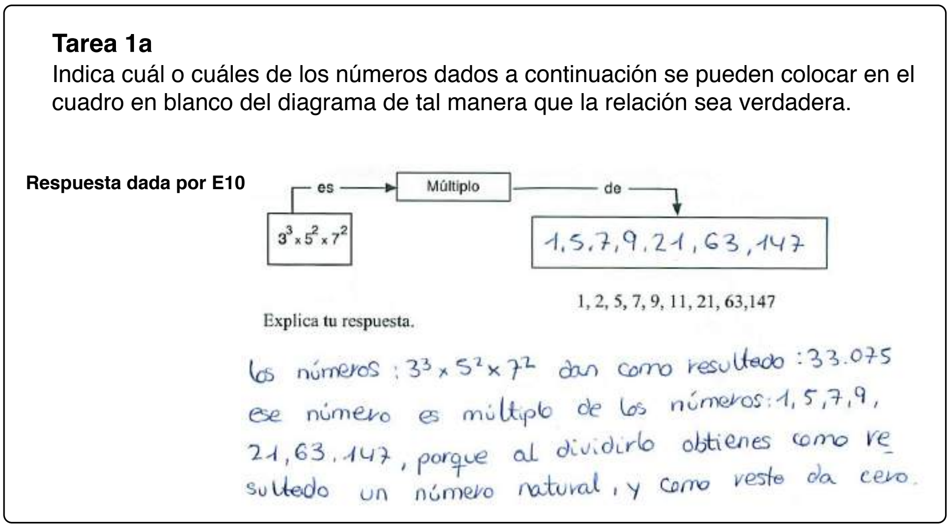
$3^3 \times 5^2 \times 7^2$ es múltiplo de 1, 5, 7, 9, 21, 63, 147, porque existe siempre un nº natural que multiplicado por ellos nos de $3^3 \times 5^2 \times 7^2$.

P. ej. => $3^3 \times 5^2 \times 7^2 = 5 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$

Figura 7.2. Respuesta dada por un estudiante (E28) a la tarea T1a

El estudiante E28 utiliza la descomposición canónica del número dado para responder a la tarea. Indica los números que cumplen con la condición para ser múltiplo del número dado y coloca solo uno de ellos como ejemplo. En su ejemplo, reescribe el número dado en su descomposición canónica para justificar su respuesta. Realiza una transformación sintáctica invariante para reescribir el número en otro equivalente en el mismo sistema de representación. Por otra parte, encierra en un círculo el número 2 y el número 11 como señal que estos dos números no los consideró en su respuesta por no cumplir con la condición expresada por él.

En la figura 7.3 mostramos la respuesta dada por E10 a la misma tarea T1a.



Tarea 1a

Indica cuál o cuáles de los números dados a continuación se pueden colocar en el cuadro en blanco del diagrama de tal manera que la relación sea verdadera.

Explica tu respuesta.

los números : $3^3 \times 5^2 \times 7^2$ dan como resultado : 33.075 ese número es múltiplo de los números: 1, 5, 7, 9, 21, 63, 147, porque al dividirlo obtienes como resultado un número natural, y como resto da cero.

Figura 7.3. Respuesta dada por estudiante (E10) a la tarea T1a

En su respuesta, E10 considera que el número dado en su descomposición canónica es una multiplicación de tres números que hay que averiguar primero. Hace una transformación sintáctica invariante cuando pasa de escribir el número dado en su descomposición canónica a su representación posicional en base diez. Sin embargo, esa transformación no la hace para expresar la respuesta, sino para poder efectuar la operación aritmética. Para decidir sobre múltiplo E10 realiza la división, aunque no le deja explícitamente hecha en el papel, en la grabación de audio que hicimos de la discusión de grupo deja claro que realiza la división. De hecho, en este grupo, las divisiones las realizaron con el móvil. Igualmente, expresa E10 en la discusión de grupo la necesidad de escribir el resultado de las multiplicaciones de los factores primos del número dado. El número dado en su descomposición canónica lo llama el número escrito en forma “abreviada”. En el episodio 59 recogemos parte de la discusión en la cual participa E10.

59.1	*E10:*	[...] es lo mismo si es múltiplo [...] divisible es igual que múltiplo porque [pausa] porque los dos lo divide [...] exactamente tiene que salir un número natural. ¿Qué número da? [pregunta por el resultado de la multiplicación de los factores del número $3^3 \times 5^2 \times 7^2$]
59.2	*E9:*	Treinta y tres mil setenta y cinco [33075]
59.3	*E10:*	[...] Aquí me estoy liando [risas] iba a escribir este abreviado
59.4	*E11:*	Da números enteros naturales o números naturales enteros
59.5	*E10:*	Naturales; porque al dividirlo obtienes como resultado un número [pausa]

En este punto E10 decide consultar a la profesora-investigadora una duda sobre el conjunto numérico; “¿son naturales o enteros?”. La profesora le indicó que era el conjunto de los números naturales con el que estaban trabajando. Una vez aclarada la duda sobre el conjunto numérico, E10 completa la línea 5 del episodio 59 expresando que entonces "al dividirlo obtienes como resultado un número natural y da resto cero".

El grupo al que pertenece E10 es del primer seminario (S1_G3). Este grupo hizo la puesta en común de las tareas T2, T3 y T6 de la tercera sesión (véase anexo C). La puesta en común de la tarea T3 de la tercera sesión le correspondió a la estudiante E10. En la figura 7.4 mostramos la respuesta que entregaron en el cuaderno de práctica el grupo S1_G3. En la respuesta entregada por este grupo podemos observar algunas evidencias sobre la consideración expresada en el episodio 59.3 sobre la escritura del número en forma "abreviada". En la figura 7.4 se puede apreciar que el número escrito en su descomposición canónica no lo consideran como un número porque no está escrito en su representación posicional en base diez. Hacemos esta observación con base en la explicación que dan en la línea 4 y línea 5 "[...] porque esos números se utilizan para ser multiplicados y formar el número [...]".

En la figura 7.4 observamos que los conceptos son usados con un sentido diferente del asignado en las matemáticas, por ejemplo, el de múltiplo. Por otra parte, cuando expresaron que son múltiplos "porque este era el resultado de la tabla de multiplicar" están poniendo de manifiesto múltiplo como producto. Sin embargo, en la puesta en común E10 justifica múltiplo mediante la división tal como lo puso de manifiesto en la sesión 2.

Tarea 3. Tercera sesión

Respuesta escrita por S1_G3

3. Escribid tres múltiplos del número $3^4x5^5x7^2x13^{15}$. Justificad vuestra respuesta.

Línea 1: Los números 3, 5, 7 son múltiplos del número $3^4x5^5x7^2x13^{15}$ porque este es
Línea 2: resultado en tabla de multiplicar esos tres números, el 3 cuatro veces por si mismo;
Línea 3: el número 5, cinco veces; el número 7 dos veces. Además de multiplicar por el
Línea 4: número 13, quince veces. Es decir, porque esos números se utilizan para ser
Línea 5: multiplicados y formar el número; explicado de otra forma: porque 3, 5, 7 son tres
Línea 6: divisores de ese número

Figura 7.4. Respuesta a la tarea T3 de la tercera sesión dada por S1_G3

En el episodio 60 podemos observar que en la puesta en común del grupo S1_G3, la estudiante E10 justifica múltiplo desde la operación de división, es decir, asocia múltiplo con el dividendo de una división exacta. Por otra parte, pone de manifiesto la dificultad de realizar la operación de división porque el número dado es muy grande para escribirlo en su representación posicional en base diez, incluso haciendo uso de la calculadora

60.1 *E10:* [...] Pues antes de venir a clase nos han dicho que ese ejercicio lo tenemos mal [pausa] voy a improvisar [risas] allá voy [escribe en la pizarra el número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$] [...] como los múltiplos tienen que ser un número más grande [pausa] que este número [$3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$] porque entonces si fuese más pequeño no se podría dividir porque no daría una división exacta, hemos pensado en coger y utilizar un número más grande, pero tampoco sabemos si está bien, bueno un exponente más grande [escribe en la pizarra el número $3^5 \times 5^6 \times 7^3 \times 13^{16}$] [...] esto hace que este número [$3^5 \times 5^6 \times 7^3 \times 13^{16}$] sea más grande que este y así obtengamos un número natural

60.2 *D:* [...] Ahora una pregunta, ¿si yo cojo el número de arriba [hace referencia al número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$ que está escrito en la parte de arriba de la pizarra] y lo multiplico todo por dos?

60.3 *E8:* Igual también vale

60.4 *E10:* También [pausa] pero es que [pausa] como tampoco nos sabíamos el número este [señala el número $3^4 \times 5^5 \times 7^2 \times 13^{15}$] a ver, lo pones en la calculadora y te sale, pero era un número demasiado grande hemos decidido para que así lo podamos ver, podamos mostrar [pausa] hemos utilizado el exponente [...]

Análisis en general

En las respuestas de los estudiantes identificamos la presencia de las cuatro variables que definimos para el estudio del significado de múltiplo: múltiplo como producto, múltiplo como factor, múltiplo como dividendo, múltiplo como relación. Para este análisis hicimos 185 observaciones, es decir, cinco tareas por cada uno de los 37 maestros en formación. En la tabla 7.2 mostramos las frecuencias, expresadas en porcentajes, de cada una de dichas variables.

Tabla 7.2

Presencia de las variables, en porcentajes, en las tareas sobre múltiplo (n=185)

Variables	Porcentaje
MP	37,84
MF	9,73
MD	11,35
MR	26,49
O	1,08
NR	13,51

Los maestros en formación, en sus respuestas, mostraron en forma más frecuente múltiplo como un producto entre números y múltiplo como la relación entre números. Estas dos variables fueron puestas de manifiesto por los maestros en formación en más de la mitad de las observaciones que realizamos.

Análisis clúster

Según lo establecido en el algoritmo de *k* medias (no jerárquicos), para la conformación de los clúster es necesario tener previamente el número de conglomerados y en nuestro caso fue de P=4. Esta decisión responde al criterio que explicamos en el apartado 5.7 del capítulo cinco de esta memoria de tesis.

Hicimos la partición en cuatro conglomerados atendiendo a las dos dimensiones indicadas en el capítulo 5; apartado 5.5 de esta memoria (véase figura 5.11). En el anexo L presentamos las salidas del programa SPSS referidas al análisis clúster para la relación ser múltiplo. Ese anexo está constituido por todo el análisis clúster que comprende: los centros iniciales de los conglomerados, el historial de las interacciones, el criterio de parada, la pertenencia de los estudiantes a los conglomerados, la distancia a la que se encuentra cada estudiante del centro del conglomerado, los centros de los conglomerados finales, la distancia entre los centros de los conglomerados finales, la tabla ANOVA y el número de casos en cada conglomerado.

Los conglomerados quedaron conformados de la siguiente manera: P1 con 10 estudiantes, P2 con 7, P3 con 11 y P4 con 9. Las variables con mayores valores para la *F* en la ANOVA son las que aportan mayor separación entre los conglomerados, contribuyendo de manera significativa en la formación de los mismos. En la tabla 7.3 mostramos estas variables con sus respectivos valores de *F*.

Tabla 7.3

Datos de ANOVA

Variable	F
Que un número sea múltiplo de otro (R)	35,307
Contexto operacional (OP)	43,600
Contexto relacional (Re)	35,091
Operaciones aritméticas (OA)	43,600
Divisibilidad (D)	35,091
Relación entre procedimientos (PP)	37,405

Las variables que más contribuyen a la determinación de los conglomerados son: de la fenomenología (que un número sea múltiplo de otro, contexto operacional, contexto relacional y la subestructura matemática: operaciones aritméticas y divisibilidad), de la estructura conceptual (relación entre procedimientos).

Las pruebas F de la ANOVA las utilizamos solo con una finalidad descriptiva porque los conglomerados han sido elegidos para maximizar las diferencias entre los casos en diferentes conglomerados.

Si atendemos a la primera dimensión que seguimos en la codificación de los datos (véase figura 5.11) cada conglomerado quedó representado por un vector que recoge los valores de la variable (MP, MR, MF, MD, O, NR).

Para el primer conglomerado, P1, formado por 10 estudiantes, el vector resultante como centro final es (4, 0, 1, 1, 0, 0). Este conglomerado tiene como característica distintiva, con respecto a los otros, la presencia mayoritaria del significado de múltiplo como producto o resultado de una multiplicación.

El conglomerado P2, que está constituido por 7 estudiantes, el vector resultante como centro final es (1, 1, 1, 0, 0, 2). Este conglomerado tiene como característica distintiva, con respecto a los otros, que no responde a la mayoría de las tareas.

Para el tercer conglomerado P3, formado por 11 estudiantes, el vector resultante es (2, 1, 1, 1, 0, 0). La característica distintiva de este conglomerado es que muestra los cuatro significados para múltiplo: múltiplo como producto, múltiplo como relación, múltiplo como factor y múltiplo como dividendo en una división exacta.

El conglomerado P4, formado por 9 estudiantes, quedó representado por el vector (1, 3, 0, 0, 0, 0). Este grupo se caracteriza por mostrar, en forma mayoritaria, el significado de múltiplo como una relación entre números naturales.

Mostramos en la figura 7.5 los centros finales de los conglomerados, atendiendo a la primera dimensión que seguimos en la codificación de los datos.

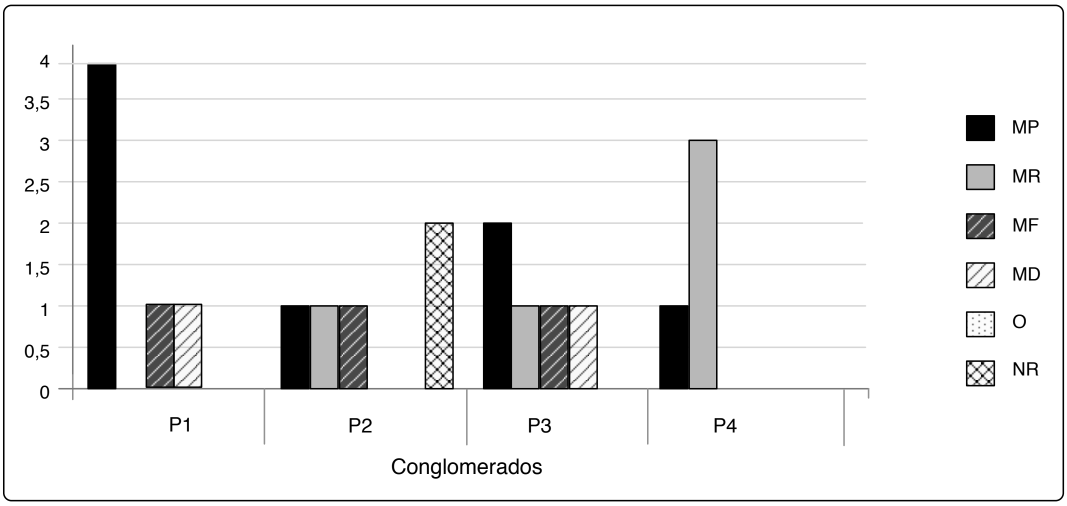


Figura 7.5. Centros finales de clúster y variables.

Caracterizamos el significado de múltiplo observando y analizando, en cada uno de los conglomerados, los descriptores definidos en el análisis de contenido (véase capítulo 4; apartado 4.2, figura 4.1) para cada organizador del currículo (estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología) en cada una de las producciones de los maestros en formación. En la tabla 7.4 mostramos las características de cada uno de los conglomerados con respecto al análisis de contenido del análisis didáctico. Omitimos la información del conglomerado P2 para la relación de múltiplo porque la variable que agrupa mayoritariamente a este grupo de maestros en formación es la de no responder (NR), con lo cual, no aporta información adicional para poder hacer la descripción de este conjunto de estudiantes mas allá de esta variable.

Tabla 7.4

Características de los conglomerados en relación con la terna: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología

Cl.	Estructura conceptual			Sistemas de representación			Fenomenología							
							Fenómenos				Contexto		Sb.M	
	PP	CC	CP	V	SN	SA	M	D	MyD	R	Op	Re	OA	Di
P1	*			*	*		*		*		*		*	
P3	*		*	*	*		*	*	*	*	*		*	
P4	*	*	*	*	*	*				*		*		*

Nota. Cl.= clúster; PP = relación entre procedimientos; CC = relación entre conceptos; CP = relación entre conceptos y procedimientos; V = verbal; SN = simbólico numérico, SA = simbolismo algebraico; M = multiplicar dos números; D = dividir dos números; MyD= multiplicar y dividir dos números; R = que un número sea múltiplo de otro; Op = operacional; Re = relacional; Sb.M = subestructura matemática; OA = operaciones aritméticas; Div = relación de divisibilidad.

El conjunto de 10 estudiantes que conforman el conglomerado P1 se caracteriza por mostrar el significado de múltiplo como el resultado de una multiplicación, es decir, múltiplo como producto, mostraron relaciones entre procedimientos y no mostraron relaciones entre conceptos ni relaciones entre conceptos-procedimientos cuando respondieron a las tareas sobre múltiplo. Por ejemplo, podemos observar la respuesta dada por el estudiante E01 a la tarea T1a de la segunda sesión y que hemos colocado como ejemplo en el análisis de frecuencia que realizamos (véase figura 7.1). En su respuesta, E01 realizó hasta tres procedimientos: calcula las potencias de un número, multiplica números y divide números. Asocia múltiplo a la respuesta de uno de los procedimientos que ha realizado; el resultado de la multiplicación.

Con respecto a los sistemas de representación este grupo utilizó mayoritariamente la combinación de dos sistemas de representación en sus respuestas: verbal y simbólico numérico. En el sistema de representación simbólico numérico mayoritariamente hicieron transformaciones sintácticas invariantes cuando reescribieron el número dado en representación canónica a un número escrito en la forma posicional en base diez (véase figura 7.1). Con respecto a la fenomenología, identificamos el uso de la multiplicación de dos números para responder a las cuestiones sobre múltiplo (véase figura 7.1). La operación de multiplicación la identificamos en un contexto estrictamente operacional y asociado a la subestructura matemática $(Z, \times)$ (véase figura 4.7).

El conjunto de siete estudiantes que forman el conglomerado (P2) y que se caracteriza por no responder a la mayoría de las tareas, muestran, en las tareas que responden, relaciones entre procedimientos y entre conceptos-procedimientos. Utilizaron dos sistemas de representación en sus producciones: verbal y simbólico numérico. En el sistema de representación simbólico numérico hicieron transformaciones sintácticas invariantes cuando reescribieron el número dado en representación canónica a un número escrito en la forma posicional en base diez. Con respecto al modo de uso de los conceptos (fenomenología), utilizaron mayoritariamente la operación de multiplicación para responder a las cuestiones de múltiplo, el contexto presente en las producciones escritas de este conglomerado es operacional asociado a la subestructura matemática de operaciones aritméticas.

El conglomerado P3 formado por 11 estudiantes y caracterizado por el vector (2, 1, 1, 1, 0, 0) mostraron, mayoritariamente, relaciones entre procedimientos. En la figura 7.6 mostramos la respuesta de una estudiante (E09) a las tareas T6 y T7 de la segunda sesión.

Tarea 6

Respuesta dada por E09

6. Escribe dos múltiplos del número $3^3 x 17$. Explica tu procedimiento.

$3^3 \times 17 = 459$

$9 \times 51 = 459$

$27 \times 17 = 459.$

Tarea 7

7. Explica con tus propias palabras lo que significa que un número sea múltiplo de otro.

Un número (a) es múltiplo de otro número (b) cuando al dividir a entre b da como resultado un número natural y como resto cero.

Figura 7.6. Respuesta dada por E09 a las tareas T6 y T7 de la segunda sesión

En la respuesta a la tarea T6 la estudiante E09 primero transforma el número, dado en su descomposición canónica, a su representación posicional en base diez. En la siguiente línea escribió los números 9 y 51 con la operación de multiplicación y coloca el resultado de la multiplicación de esos dos números. Hace lo mismo con los números 27 y 17. El resultado de la multiplicación de los números le da el mismo número 459. La estudiante E09, en esta tarea T6, asocia el significado de múltiplo como factor. En su respuesta a la tarea T7, la estudiante E09 asocia múltiplo explícitamente a la operación de dividir y asigna el término múltiplo a uno de los elementos de la operación aritmética de división; al dividendo, cuando la división que realiza resulta exacta.

Con respecto a los sistemas de representación, este grupo de maestros en formación, utilizó dos sistemas de representación en sus respuestas: el sistema de representación verbal y el simbólico numérico. Las combinaciones entre los sistemas de representación se observó muy poco en sus respuestas. Sin embargo, en el sistema de representación simbólico numérico observamos que hicieron transformaciones sintácticas invariantes cuando transforman un número dado en su representación canónica a otro equivalente escrito en la forma posicional en base diez. Esa transformación la hacen para poder realizar posteriormente las operaciones aritméticas. Por ejemplo, el caso de los estudiante E10 o E09 que mostramos en la figura 7.3 y figura 7.6 respectivamente.

Con respecto a la fenomenología, en este conglomerado P3, lo asociamos a un contexto operacional en la subestructura matemática (Z, $\times$) (véase figura 4.7). Otras evidencias del uso del concepto de múltiplo asociado a la operación de división, lo podemos ver en la puesta en común de la sesión 3. Recogemos evidencia en los episodios 59.1, 59.5, 60.1 y 60.3. Las intervenciones de los estudiantes E10 y E8 están explícitamente asociadas a la operación de división.

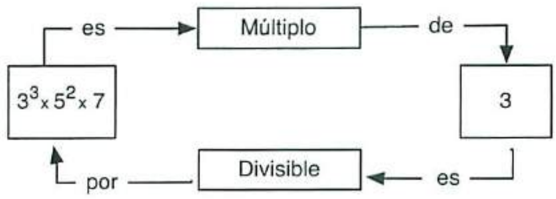
El conglomerado P4 está caracterizado por la presencia mayoritaria del significado de múltiplo como relación y la ausencia de los significados múltiplo como dividendo y múltiplo como factor. El vector que representa a este conglomerado es (1, 3, 0, 0, 0, 0). En la figura 7.7 mostramos la respuesta de un estudiante (E18) a la tarea T2a de la segunda sesión.

Tarea 2a

Indica si en el siguiente diagrama se presentan relaciones verdaderas o falsas.

Respuesta dada por E18

a.



Explica tu respuesta.

Es cierto que $3^3 \times 5^2 \times 7$ es múltiplo de 3 porque existe un número natural $(3^2 \times 5^2 \times 7)$ que multiplicado por 3 nos da el número dado.

Figura 7.7. Respuesta dada por E18 a la tarea T2a

En la respuesta dada por E18 a la tarea 2a podemos observar que explica el múltiplo desde la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro. Determina la existencia del número desde la escritura en su descomposición canónica, es decir, no condiciona la respuesta sobre múltiplo a la realización de operaciones aritméticas con los números escritos en la forma posicional en base diez. Hace una transformación sintáctica variante cuando determina la existencia del número $3^2 \times 5^2 \times 7$. Identifica el número 3, que es un factor no explícito (López y Cañadas, 2013), en la descomposición canónica del número dado, y al identificarlo establece relaciones entre conceptos, entre procedimientos y entre conceptos-procedimientos asociados a divisibilidad para decidir sobre múltiplo.

En las grabaciones de audio de la segunda sesión también hay evidencias sobre la consideración de múltiplo como una relación. En el siguiente episodio mostramos parte de la discusión, en la cual participó la estudiante E18, sobre la resolución de la tarea T1b (véase figura 6.7) de la segunda sesión.

61.1 *E16:* [...]Múltiplo[...] vale podemos hacerlo por partes o podemos hacerlo en total

61.2 *E17:* El uno está [pausa] ¿no? [...]

61.3 *E16:* El uno sí, porque cualquier número natural es múltiplo de la unidad

61.4 *E17:* El cinco porque es factor del número dado al comienzo

61.5 *E18:* ¡No!.. [pausa]... porque hay un número que multiplicado por cinco da como resultado este que nos han dado [...] el número es tres elevado a tres por cinco por siete elevado a dos [$3^3 \times 5 \times 7^2$]

61.6 *E16:* El 7

61.7 *E18:* Podemos decir que 7, 9, 21, 63 y 147 por la misma razón que lo es del 5 [...] que existe el número [...]

En esta discusión percibimos aspectos asociados al significado de múltiplo. En la línea 1, E16 contextualizó la tarea de múltiplo, hizo una sugerencia general referida a la estrategia a seguir para la discusión, cuando afirmó, que lo podían hacer por partes o hacerlo en total. En la línea 2, E17 puso en evidencia una duda sobre la unidad, primero lo afirma y después de una pausa reflexiva, cuestionó su propia afirmación y la compartió con el resto de sus compañeros de grupo de discusión. En la línea 3, E16 utilizó un resultado de la divisibilidad (la propiedad de que todo número natural es múltiplo de la unidad) cuando afirmó contundentemente la inclusión de la unidad en la respuesta a la tarea. También se puso de manifiesto la asociación entre los términos número natural, múltiplo y unidad. En la línea 4, E17 aprovechó la escritura del número en su descomposición canónica para establecer relación entre los conceptos de factor y múltiplo. La afirmación que hizo E17, para justificar la presencia del número cinco en la respuesta, la podemos interpretar como que un número natural dado es múltiplo de sus factores, y, que se pueden establecer relaciones y afirmaciones más profundas a partir de esta afirmación. Por ejemplo, que "todo número entero es múltiplo de sus factores" o que la clase de todos los enteros factores-divisores del número $3^3 \times 5^2 \times 7^2$ contiene a la clase de todos los factores-divisores de cinco. En la línea cinco del episodio 61 (61.5), E18 justificó utilizando la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro. Para determinar los números utilizó la descomposición canónica dada y los productos de potencia de igual base. Posteriormente, en la línea 61.7, utilizó el razonamiento inductivo para terminar de responder a la tarea.

Con respecto a los sistemas de representación, el conjunto de estudiantes que conforman el conglomerado (P3), utilizó dos sistemas de representación: verbal y simbólico (numérico y simbolismo algebraico). Adicionalmente, establecieron la mayor cantidad de combinaciones, traducciones y transformaciones entre los sistemas de representación utilizados. Realizaron traducciones entre el sistema de representación simbólico numérico, dado desde la representación de un número en su descomposición canónica, y el sistema de representación verbal. Igualmente utilizaron traducciones de sistema de representación simbólico numérico (en descomposición canónica y posicional en base diez) con el sistema de representación verbal. También realizaron traducciones entre los sistemas de representación simbólico (numérico y simbolismo algebraico) y verbal. Con respecto a la fenomenología, identificamos mayoritariamente, en sus respuestas, la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro (véanse figuras 7.2 y 7.7). El contexto utilizado para la condición de ser múltiplo es relacional y está asociado estrictamente con la subestructura matemática de divisibilidad en el anillo de los números enteros.

El análisis clúster permitió realizar las asignaciones de los estudiantes a un determinado conglomerado atendiendo a las dimensiones y categorías (véase capítulo 5; apartado 5.5, figura 5.9).

Cualitativamente podemos describir cada uno de los conglomerados desde los significados, esto es, desde la terna estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología. Podemos distinguir, desde la estructura conceptual, que un estudiante asignado al conglomerado P1 se caracteriza por mostrar solo relaciones entre procedimientos, mientras que un estudiante del conglomerado P3 se caracteriza por establecer también relaciones entre conceptos-procedimientos. Los estudiantes asignados al conglomerado P4, además de mostrar las relaciones de P1 y P3, mostraron relaciones entre conceptos. Con respecto a los sistemas de representación, los maestros en formación que conformaron el conglomerado P1 y P3 no mostraron diferencias, es decir, ambos conglomerados mostraron el uso del sistema de representación verbal y del simbólico numérico además realizaron transformaciones (sintáctica invariante y sintáctica variante). El conglomerado P4, además de usar el sistema de representación y la operación utilizada por P1 y P3, utilizó también el sistema de representación de simbolismo algebraico y realizaron traducciones entre el sistema de representación verbal y simbólico (numérico y simbolismo algebraico). Con respecto a la fenomenología los conglomerados P1 y P3 utilizaron el contexto operacional mientras que el conglomerado P4 utilizaron el contexto relacional. El conglomerado P1 utilizó la operación de multiplicación mientras que el conglomerado P3 utilizó además la operación de división para decidir sobre el múltiplo y el conglomerado P4 no utilizó las operaciones aritméticas para decidir sobre múltiplo sino que utilizó la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro; al justificar.

En algunas de las producciones escritas de la segunda sesión así como en la puesta en común de la tercera sesión encontramos evidencias sobre confusiones con respecto a la consideración de número, es decir, cuando el número está escrito en su representación posicional en base diez no tuvieron dificultades para considerarlo como número. Sin embargo, cuando el número está escrito en su representación canónica consideraron que no era un número sino unas operaciones pendientes de resolver. En la figura 7.8 mostramos, a manera de ejemplo, la respuesta dada por un estudiante (E14) a la tarea T3c.

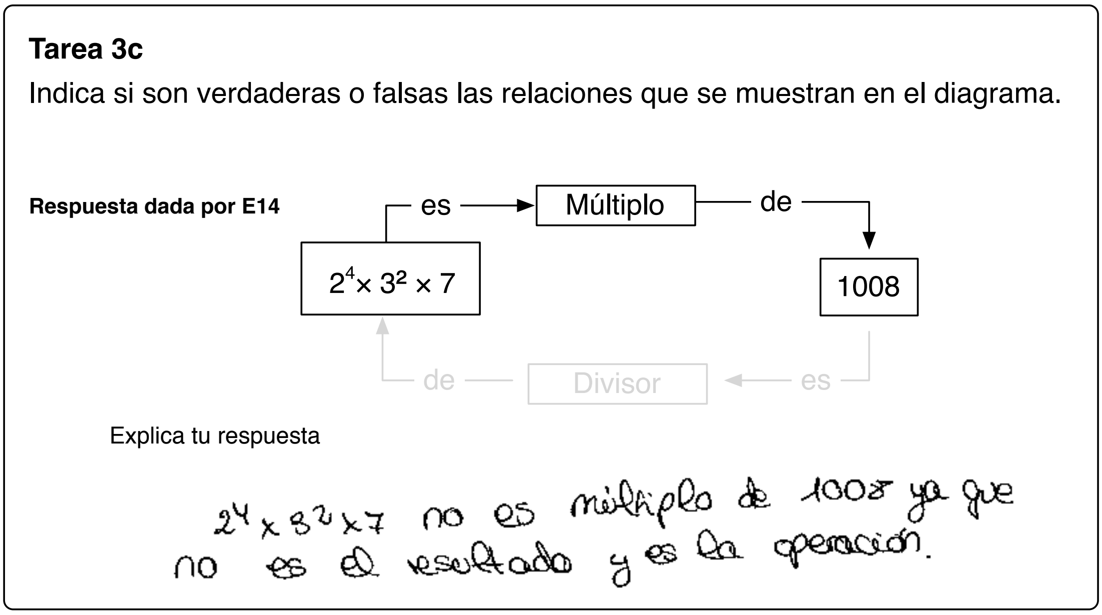


Figura 7.8. Respuesta dada por E14 a la tarea T3c

Igualmente, en la tercera sesión, en el episodio 60.4, la estudiante E10 pone de manifiesto esta situación con el número que está escrito en su representación canónica.

7.2. Análisis de la relación ser divisor

Como lo indicamos en el apartado 5.7 del capítulo cinco de esta memoria, para analizar los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación sobre la relación "ser divisor" consideramos dos tipos de análisis: análisis de frecuencias y análisis clúster.

Para hacer el análisis de la relación "ser divisor" observamos en las producciones escritas de los maestros en formación cinco de las tareas de la segunda sesión: T1d (véase figura 6.7), T2b (véase figura 6.8), T3d (véase figura 6.9), T5 (véase figura 6.11) y T8 (véase figura 6.14). Por otra parte, utilizamos las grabaciones de audio (segunda sesión) y vídeo (tercera sesión) como complemento de esta información.

Análisis de frecuencias

Para hacer el análisis de frecuencia consideramos la primera dimensión que señalamos en el apartado 5.5 de esta memoria; en la estructura para codificación de la relación "ser divisor" (véase figura 5.11): el énfasis en la justificación dada por los maestros en formación en su respuesta. Hicimos el análisis de frecuencia observando las respuestas dadas por los maestros en formación a cada una de las tareas sobre múltiplo (véase tabla 7.5) y la relación de múltiplo en general (véase tabla 7.6).

Análisis en cada tarea
Identificamos la presencia de tres variables de interés para el estudio del significado de divisor en las cinco tareas: (a) divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta, (b) divisor como relación y (c) divisor como el rol en una división. En la tabla 7.5 mostramos las frecuencias, expresadas en porcentajes, de cada una de dichas variables en las cinco tareas.

Tabla 7.5
Presencia de las variables, en porcentajes, de las cinco tareas sobre divisor (n=37)

Variables	T1d	T2b	T3d	T5	T8
D-cd	56,75	45,94	35,14	16,22	48,65
D-R	13,51	35,14	48,65	29,73	24,32
D-rol	13,51	10,81	2,70	21,62	10,81
O	0,00	5,40	0,00	0,00	0,00
NR	8,11	0,00	13,51	32,43	24,32
NJ	8,11	2,70	0,00	0,00	0,00

Nota. D-cd = divisor como consecuencia de haber efectuado una división y que resulte exacta; D-R = divisor como relación; D-rol = divisor como el rol en una división; O = otro; NR = no responde; NJ = no justifica.

Observamos que la consideración de divisor como consecuencia de haber realizado una división y que esta resulte exacta y la consideración de divisor como una relación fueron las variables con mayor frecuencia en las producciones escritas de los maestros en formación, excepto en la tarea T5. El divisor como el rol en la operación de división alcanza una frecuencia baja en la mayoría de las tareas. Las tareas T5 y T8 son las que tienen mayor porcentaje de no respuesta.

Los maestros en formación pusieron en evidencia destrezas para hacer cálculos con números, tales como multiplicación, división y potenciación. En cuanto a las estrategias seguidas, la mayoría de ellos transformaron el número dado en su representación canónica a su equivalente en la representación posicional en base diez en las tareas T1d, T2b y T3d. Mayoritariamente hicieron una transformación sintáctica invariante en el sistema de representación simbólico numérico. Una vez que transformaron el número dado, la mayoría realizó la operación de división. En la figura 7.9 mostramos, a manera de ejemplo, la respuesta de un estudiante (E11) a la tarea T1d.

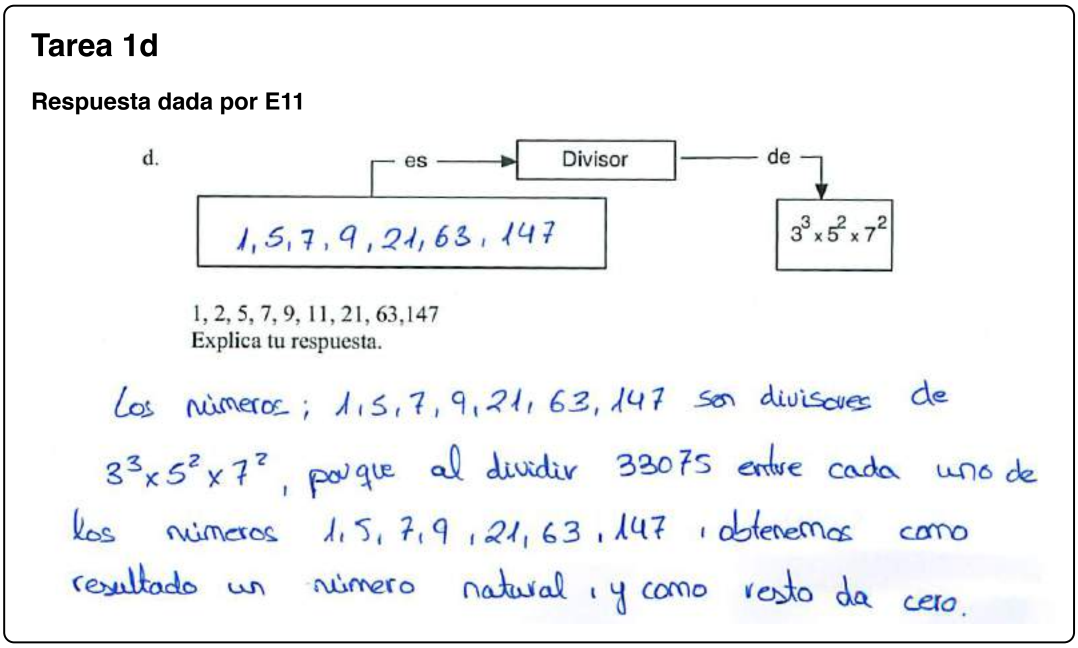


Figura 7.9. Respuesta dada por E11 a la tarea T1d

En la respuesta dada por E11, observamos que ha realizado la transformación sintáctica invariante del número, dado en su descomposición canónica, a su representación posicional en base diez. Posteriormente, explicó que ha realizado divisiones tomando como dividendo el número que ha transformado (33075). Cuando la división resulta exacta, decide entonces sobre el divisor. Sin embargo, no dice nada sobre los números 2 y 11. Al no colocarlos en el recuadro en blanco, suponemos que como la división no le ha dado exacta, no los considera divisores del número dado.

En la figura 7.10 mostramos la respuesta dada por el estudiante E36 a la tarea T2b.

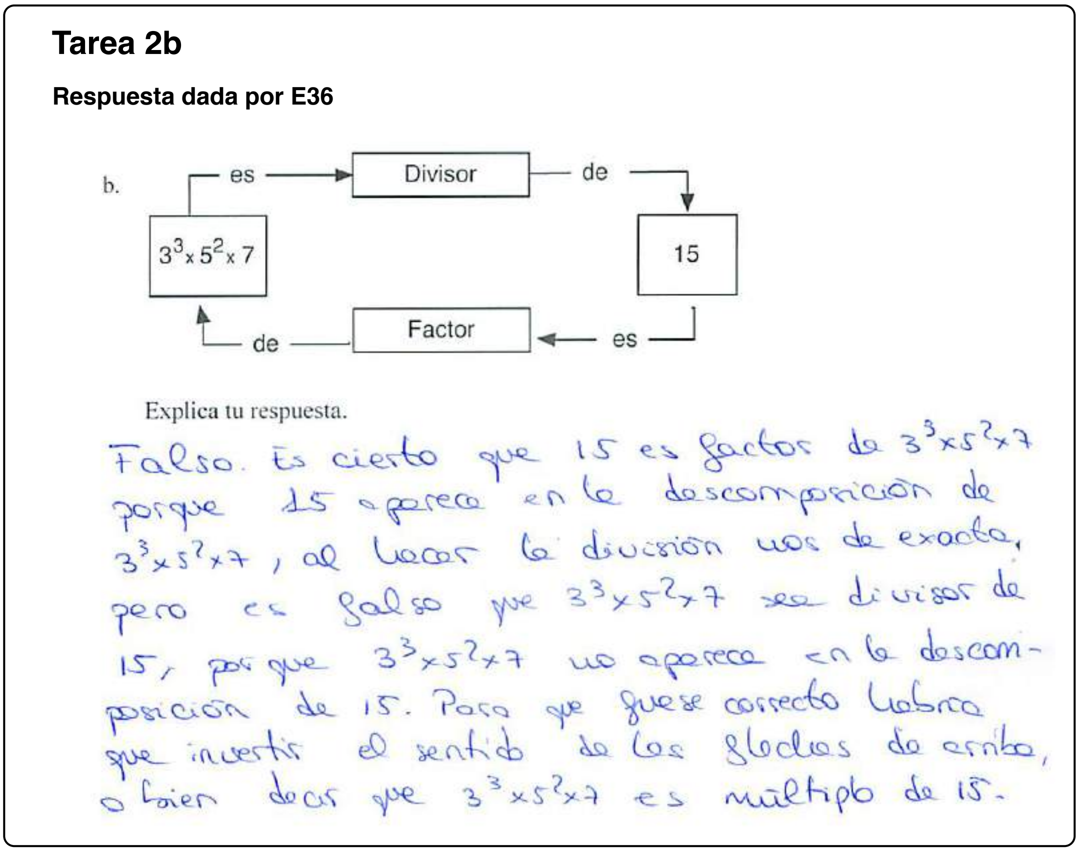


Figura 7.10. Respuesta dada por E36 a la tarea T2b

En la respuesta dada por E36, observamos que decide sobre divisor desde la descomposición canónica del número dado. Hace referencia a la operación de división sin realizarla. Utiliza la descomposición en factores primos del número 15 para decidir sobre divisor. Establece vínculos entre los conceptos de divisor, factor y múltiplo cuando hace la sugerencia de “invertir el sentido de las flechas de arriba” o cuando indica “decir que $3^3 \times 5^2 \times 7$ es múltiplo de 15”. Los vínculos que E36 establece entre los conceptos lo hace desde la configuración del diagrama, es decir, trata que las relaciones asociadas a la divisibilidad puedan ser leídas desde el diagrama del tal manera que resulten todas verdaderas.

Análisis en general

En general, identificamos la presencia de las tres variables que definimos para el estudio del significado de divisor en las tareas: divisor como consecuencia de haber efectuado una división y que esta resulte exacta (D-cd), divisor como relación (D-R) y divisor como el rol en la operación de división (D-rol). Para este análisis hicimos 185 observaciones, es decir, cinco tareas por cada uno de los 37 maestros en formación.

En la tabla 7.6 mostramos las frecuencias, expresadas en porcentajes, de cada una de dichas variables.

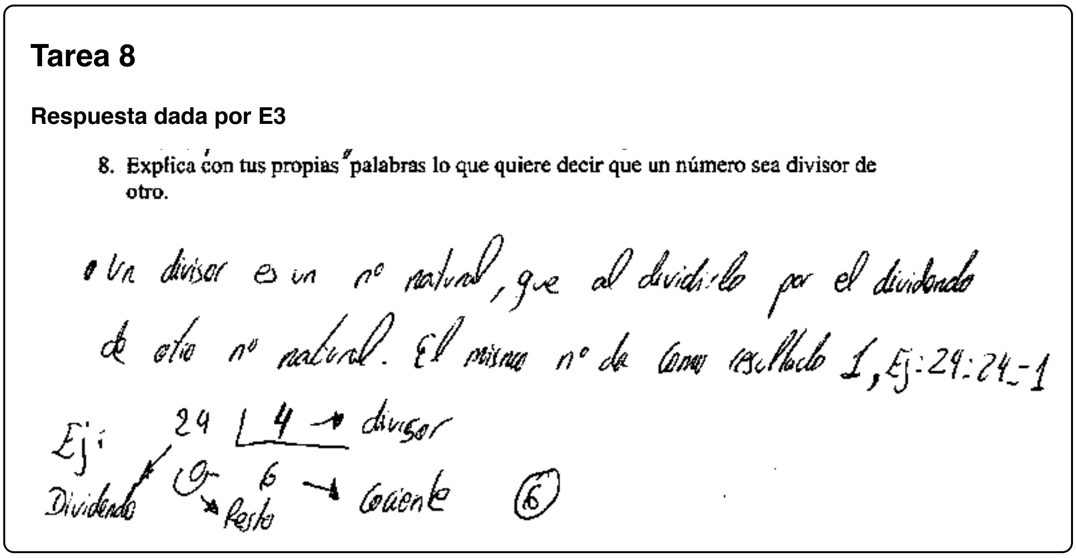
Tabla 7.6

Presencia de las variables, en porcentajes, en las tareas sobre divisor (n=185)

Variables	Porcentaje
D-cd	40,54
D-R	30,27
D-rol	10,27
O	1,08
NR	15,68
NJ	2,16

Los maestros en formación asociaron en forma más frecuente divisor como consecuencia de haber realizado una división y que esta resulte exacta, y, divisor como una relación entre números. Estas dos variables fueron puestas de manifiesto por los maestros en formación en más de la mitad de las observaciones que realizamos.

Los maestros en formación mostraron, en sus producciones escritas, la ambigüedad que expresamos en el apartado 1.2 del capítulo 1 de esta memoria, sobre el término divisor. En la figura 7.11 mostramos, como ejemplo, la respuesta dada a la tarea T8 por un estudiante (E3).


Tarea 8

Respuesta dada por E3

8. Explica con tus propias palabras lo que quiere decir que un número sea divisor de otro.

• Un divisor es un nº natural, que al dividirlo por el dividendo de otro nº natural. El mismo nº da como resultado 1, Ej: 24:24=1

Ej: 24 |4 → divisor

Dividendo 0 → Resto 6 → Cociente 6

Figura 7.11. Respuesta dada por E3 a la tarea T8

En la tarea T8 expresamos en forma explícita divisor en el contexto de una relación entre números al preguntarles sobre lo que significa que un número sea divisor de otro y no que un número sea el divisor. Sin embargo, cuando E3 comienza a resolver la tarea expresa "un divisor es un número natural" y, posteriormente relaciona en forma explícita la operación de división. En la expresión "al dividirlo por el dividendo" manifiesta no tener claro los roles en la definición que trata de construir. Sin embargo, cuando propone el ejemplo, sí pueden identificar los roles de cada uno de los elementos que intervienen en la división (dividendo, divisor, cociente y resto) que ha realizado.

Análisis clúster

Para la conformación de los clúster, al igual que en el análisis de la relación ser múltiplo, el número de conglomerados para este análisis fue de P=4. Esta decisión responde al criterio que explicamos en el apartado 5.7 del capítulo 5 de esta memoria.

Hicimos la partición en cuatro conglomerados atendiendo a las dos dimensiones indicadas en el capítulo 5; apartado 5.5 (véase figura 5.11). En el anexo M presentamos las salidas del programa SPSS referidas al análisis clúster para la relación ser divisor. Ese anexo está constituido por todo el análisis clúster que realizamos.

Los conglomerados quedaron conformados de la siguiente manera: P1 con 7 estudiantes, P2 con 8, P3 con 14 y P4 con 8. Las variables con mayores valores para la *F* en la ANOVA (véase anexo M) son las que aportan mayor separación entre los conglomerados, contribuyendo de manera significativa en la formación de los mismos. En la tabla 7.7 mostramos estas variables con sus respectivos valores de *F*.

Tabla 7.7
Datos de ANOVA

Variable	F
Que un número sea divisor de otro (R)	54,456
División entre dos números (D)	40,521
Divisor como relación (D-R)	54,456
Contexto relacional (Re)	36,222
Operaciones aritméticas (OA)	35,440
Divisibilidad (D)	44,580
Relación entre procedimientos (PP)	41,009

Las variables que más contribuyen a la determinación de los conglomerados son: de la fenomenología (que un número sea divisor de otro, el contexto operacional, el contexto relacional, la subestructura de operaciones aritméticas y la subestructura de divisibilidad), de la estructura conceptual (relación entre procedimientos). La variable divisor como relación también contribuye a la formación de los conglomerados. Como lo expresamos para la relación ser múltiplo, las pruebas F de la ANOVA las utilizamos solo con una finalidad descriptiva.

Si atendemos a la primera dimensión que seguimos en la codificación de los datos (véase figura 5.11) cada conglomerado quedó representado por un vector que recoge los valores de la variable (D-cd, D-R, D-rol, NJ, O, NR).

Para el primer conglomerado, P1, formado por 7 estudiantes, el vector resultante como centro final es (1, 0, 0, 0, 0, 3). La variable que agrupa en forma mayoritaria y que distingue a este conglomerado de los demás es el hecho de no responder a la mayoría de las tareas. En ese sentido, no aporta elementos que podamos utilizar para hacer la descripción de los significados.

El conglomerado P2 quedó constituido por 8 estudiantes. El vector resultante como centro final es (1, 4, 0, 0, 0, 0). Este conjunto de 8 maestros en formación se caracterizan por mostrar mayoritariamente, en sus producciones escritas, el significado de divisor como una relación entre números.

El conglomerado P3 quedó conformado por 14 estudiantes. El vector resultante como centro final es (2, 2, 1, 0, 0, 0, 0). Este grupo de maestros en formación se caracteriza por mostrar los tres significados sobre divisor. Muestran mayoritariamente los significados de divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta (D-cd), y, divisor como relación (C-R).

El conglomerado P4 conformado por 8 estudiantes, quedó representado por el vector (4, 0, 0, 0, 0, 0). Este grupo se caracteriza por mostrar el significado de divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta (D-cd). Mostramos en la figura 7.12 los centros finales de los conglomerados, así como, la presencia de las variables (atendiendo a la primera dimensión) que contribuyen en la formación de cada uno de ellos.

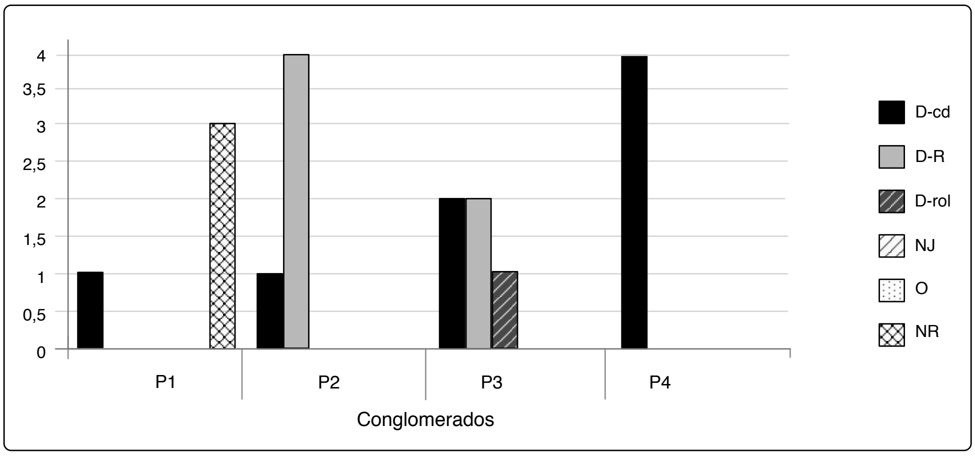


Figura 7.12. Centros finales de clúster y variables.

Caracterizamos el significado de divisor observando y analizando, en cada uno de los conglomerados, los descriptores definidos en el análisis de contenido (véase capítulo 4; apartado 4.2, figura 4.1) para cada organizador del currículo (EC: estructura conceptual, SR: sistema de representación y F: fenomenología) en cada una de las producciones de los maestros en formación. Cada organizador del currículo, a su vez, está conformado por variables que lo caracterizan, tal como lo hemos puesto de manifiesto en el análisis de contenido.

Para hacer la descripción de los significados que muestran los maestros en formación sobre la relación de divisor consideramos las dos dimensiones que hemos puesto de manifiesto en el apartado 5.5 de esta memoria de tesis (véase figura 5.11).

En la tabla 7.8 mostramos las características de cada uno de los conglomerados con respecto al análisis de contenido del análisis didáctico. Hemos omitido la información del conglomerado P1 para la relación de divisor porque la variable que agrupa mayoritariamente a este grupo de maestros en formación es la de no responder (NR), con lo cual, no nos aporta información adicional para poder hacer la descripción de este conjunto de estudiantes mas allá de esta variable.

Tabla 7.8
Características de los conglomerados en relación con la terna: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología

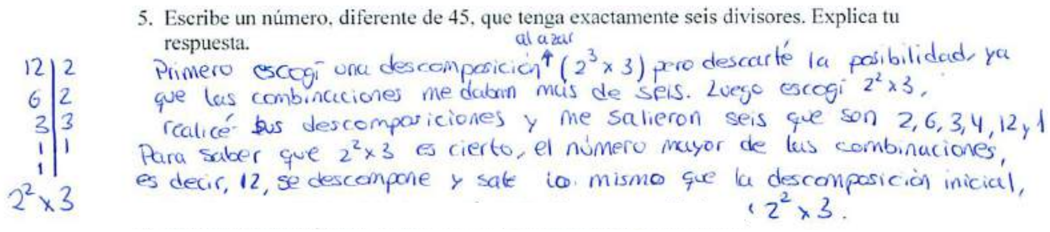
Clu.	Estructura conceptual			Sistemas de representación					Fenomenología						
									Fenómenos			Contexto		Sb.M	
	PP	CC	CP	V	T	SN	SA	G	M	D	R	Op	Re	OA	Di
P2	*	*	*	*	*	*					*		*		*
P3	*		*	*		*			*	*	*	*		*	
P4	*			*		*				*		*		*	

Nota. Clu.= clúster; PP = relación entre procedimientos; CC = relación entre conceptos; CP = relación entre conceptos y procedimientos; V = verbal; T = tabular; SN = simbólico numérico, SA = simbolismo algebraico; G = gráfico; M = multiplicar dos números; D = dividir dos números; R = que un número sea múltiplo de otro; Op = operacional; Re = relacional; Sb.M = subestructura matemática; OA = operaciones aritméticas; Div = relación de divisibilidad

El conjunto de 8 estudiantes que conforman el conglomerado P2 y que se caracteriza por mostrar el significado de divisor como una relación entre números, mostraron relaciones entre conceptos, entre procedimientos y entre conceptos-procedimientos. A manera de ejemplo, mostramos en la figura 7.13 la respuesta dada por la estudiante E36 a la tarea T5.

Tarea 5

Respuesta dada por E36


5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

12	2
6	2
3	3
1	1
1	

$2^2 \times 3$

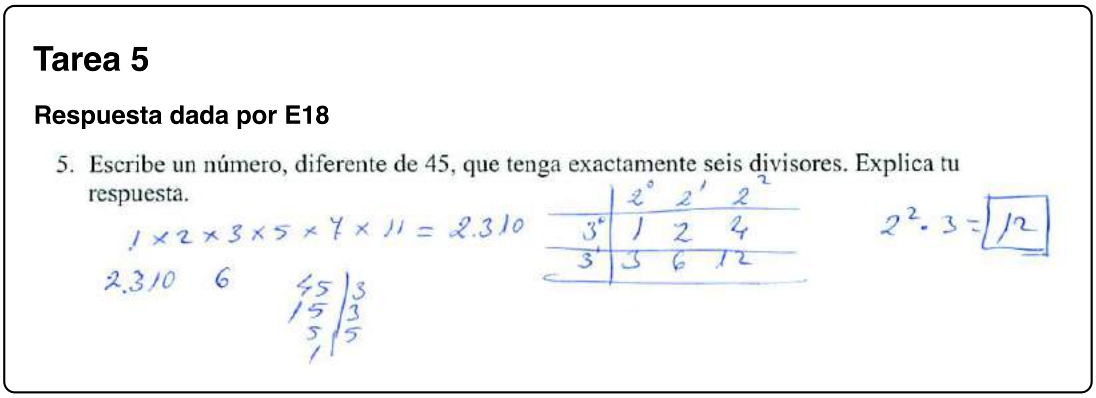
Primero escogí una descomposición al azar ($2^3 \times 3$) pero descarté la posibilidad ya que las combinaciones me daban más de seis. Luego escogí $2^2 \times 3$, realicé sus descomposiciones y me salieron seis que son 2, 6, 3, 4, 12 y 1. Para saber que $2^2 \times 3$ es cierto, el número mayor de las combinaciones, es decir, 12, se descompone y sale lo mismo que la descomposición inicial, $2^2 \times 3$.

Figura 7.13. Respuesta dada por E36 a la tarea T5

En la justificación, E36 plantea inicialmente que ha escogido el número al azar que luego descartó porque se dio cuenta que tenía más divisores de los pedidos en la tarea. Sin embargo, la búsqueda "al azar" del número con seis divisores que plantea E36 no es realmente al azar porque utiliza la descomposición en factores primos (los más pequeños) para hacer la prueba. El procedimiento que sigue para probar y decidir si el número cumple con los requerimientos de la tarea no está condicionado a la realización de la operación aritmética de división. Lo hace estableciendo relaciones y vínculos entre conceptos (números primos, números compuestos, teorema fundamental de la aritmética, divisores, factores), entre procedimientos (aplicar divisiones sucesivas para descomponer un número, factorizar un número, calcular la potencia de un número, determinar el producto de números, calcular los divisores de un número) y entre conceptos-procedimientos (utilizar la descomposición única dada por el teorema fundamental de la aritmética para determinar todos los factores-divisores de un número compuesto, realizar todas las combinaciones posibles entre los factores primos para determinar todos los divisores de un número).

Con respecto a los sistemas de representación, el conjunto de estudiantes que conforman el conglomerado (P2), utilizó tres sistemas de representación: verbal, tabular y simbólico numérico. Establecieron combinaciones entre los sistemas de representación utilizados. Realizaron operaciones de transformación sintáctica (invariante y variante) en el sistema de representación simbólico numérico y traducciones entre el sistema de representación simbólico numérico y el sistema de representación tabular. En la respuesta dada por E18 a la tarea T5 (véase figura 7.14), la estudiante E18 realizó la traducción del sistema de representación simbólico numérico al sistema de representación tabular; cuando escribe la descomposición en factores primos del número 12 en la tabla de doble entrada.

Con respecto al modo de uso de los conceptos (fenomenología), identificamos en sus respuestas sobre divisor la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisor de otro (véanse figuras 7.10 y 7.13). El contexto utilizado para la condición de ser divisor es relacional y está asociado estrictamente con la subestructura matemática de divisibilidad en el anillo de los números enteros.


Tarea 5

Respuesta dada por E18

5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

$1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2.310$

2.310 6

$2^2 \cdot 3 = \boxed{12}$

Figura 7.14. Respuesta dada por E18 a la tarea T5

El conjunto de 14 estudiantes que conforman el conglomerado P3 y que caracterizamos con el vector (2, 2, 1, 0, 0, 0) muestran en la estructura conceptual relaciones entre procedimientos, relaciones entre conceptos-procedimientos y no muestran relaciones entre conceptos. A manera de ejemplo, podemos observar en la figura 7.11 la respuesta dada por la estudiante E3 a la tarea T8.

En la respuesta dada por E3 a la tarea T8 (véase figura 7.11), observamos que de forma explícita condiciona el concepto a la realización de la operación de división, es decir, relaciona el concepto divisor con el procedimiento de realizar una división.

Con respecto a los sistemas de representación, este grupo de 14 utilizó dos sistemas de representación verbal y simbólico numérico. En el sistema de representación simbólico numérico hicieron transformaciones sintácticas invariantes cuando pasaron un número que estaba escrito en su representación canónica a otro escrito en su representación posicional en base diez (véase figura 7.9). En el modo de uso de los conceptos (fenomenología), identificamos el uso de la multiplicación, división (véase figura 7.9) y de la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisor de otro. El contexto es mayoritariamente operacional y está asociado a la subestructura matemática de (Z, ×) (véase figura 4.7).

El conglomerado P4 que está conformado por 8 estudiantes y que caracterizamos con el vector (4, 0, 0, 0, 0, 0) muestran en la estructura conceptual relaciones entre procedimientos. A manera de ejemplo, podemos observar en la figura 7.15 la respuesta dada por la estudiante E27 a la tarea T8.

Tarea 8

Respuesta dada por E27

8. Explica con tus propias palabras lo que quiere decir que un número sea divisor de otro.

24 | 6
0   4

6 es divisor de 24 porque al dividir 24 entre 6 la división da exacta.

Figura 7.15. Respuesta dada por E27 a la tarea T8

En la respuesta dada por la estudiante E27 podemos observar que asocia divisor a un caso particular de efectuar una división exacta entre dos números.

Con respecto a los sistemas de representación, este grupo utilizó dos sistemas de representación verbal y simbólico numérico. En el sistema de representación simbólico numérico hicieron transformaciones sintácticas invariantes cuando pasaron un número que estaba escrito en su representación canónica a otro escrito en su representación posicional en base diez. Con respecto a la fenomenología, identificamos el uso de la división (véase figura 7.15). El contexto es operacional y está asociado a la subestructura matemática de (Z, $\times$) (véase figura 4.7).

En el episodio 24 que describimos en el apartado 6.2 de esta memoria de tesis también encontramos evidencias del significado de divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta asociado por este grupo cuando hicieron la puesta en común de la tarea T5 de la tercera sesión.

7.3. Análisis sobre el uso del teorema fundamental de la aritmética

En este apartado analizamos la utilización del teorema fundamental de la aritmética que hace este grupo de estudiantes cuando responden a tareas sobre divisibilidad. Como lo indicamos en el apartado 5.7 de esta memoria, observamos en las producciones de los maestros en formación las tareas T4 y T5 de la segunda sesión del experimento de enseñanza. Por otra parte, utilizamos las grabaciones de audio (segunda sesión) y vídeo (tercera sesión) como complemento de esta información.

Para hacer la descripción del uso del teorema fundamental de la aritmética, realizamos un análisis de frecuencia tomando en cuenta la presencia, en el desarrollo de las tareas T4 y T5, de los descriptores que indicamos en el capítulo cinco. (véase figura 5.13). En la tabla 7.9 mostramos las frecuencias de la presencia de dichos descriptores en las producciones de los estudiantes (López y Cañadas, 2013).

La mayoría de los maestros en formación respondieron a las tareas T4 y T5. En ese sentido, los datos que presentamos en la tabla 7.9 son porcentajes sobre el total de respuestas dadas a cada una de las tareas (n=29 para la tarea T4 y n=26 para la tarea T5).

Tabla 7.9

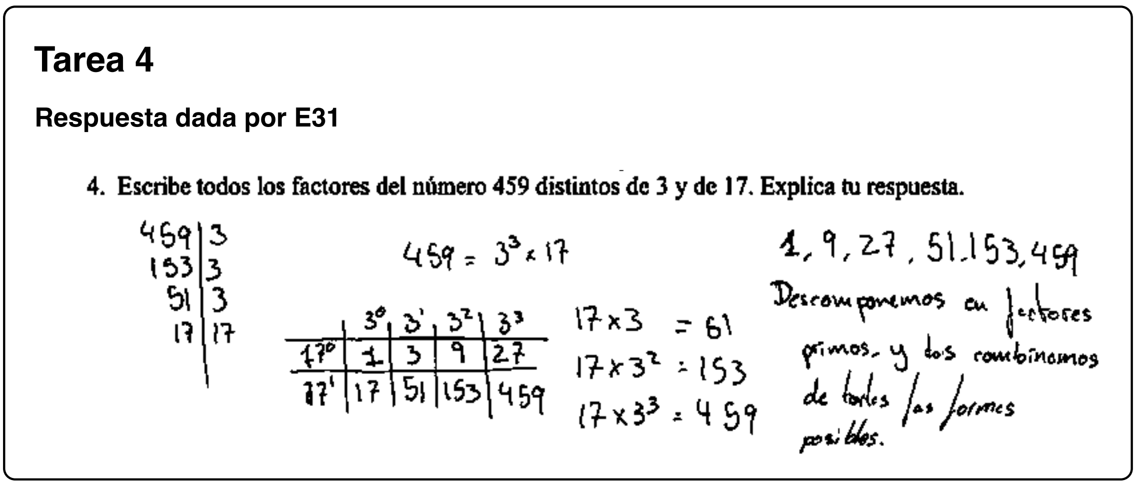
Presencia de los descriptores del teorema fundamental de la aritmética en las tareas T4 y T5, expresadas en porcentajes

Tarea	UTFA	FE	FNEB	FNEPI
T4	75,9	72,7	81,8	72,7
T5	60,0	73,3	60,0	53,3

Nota. UTFA=utiliza el teorema fundamental de la aritmética, FE=identifica los factores explícitos en la descomposición canónica; FNEB=reconoce los factores no explícitos de base en la descomposición canónica; FNEPI=determina los factores no explícitos de productos internos en una descomposición canónica.

En la tarea T4, el 75,9% de los maestros en formación que respondieron, utilizaron el teorema fundamental de la aritmética. Todos ellos hicieron la descomposición en factores primos del número 459 y la mayoría identificó los factores-divisores explícitos y no explícitos en la descomposición canónica.

En la figura 7.16 mostramos, como ejemplo, la respuesta del estudiante E31 a la tarea T4.



Tarea 4

Respuesta dada por E31

4. Escribe todos los factores del número 459 distintos de 3 y de 17. Explica tu respuesta.

459 | 3
153 | 3
51 | 3
17 | 17

$459 = 3^3 \times 17$

	3^0	3^1	3^2	3^3
17^0	1	3	9	27
17^1	17	51	153	459

$17 \times 3 = 61$
$17 \times 3^2 = 153$
$17 \times 3^3 = 459$

1, 9, 27, 51, 153, 459

Descomponemos en factores primos, y los combinamos de todas las formas posibles.

Figura 7.16. Respuesta dada por E31 a la tarea T4

En la respuesta dada por el estudiante E31 podemos observar que realiza la descomposición en factores primos y la expresa como única. Realiza todas las combinaciones posibles para determinar todos los factores-divisores del número dado. Utiliza la representación tabular para hallar todas las combinaciones posibles entre los factores de la descomposición. Identifica los factores explícitos (17 y 27), reconoce los factores no explícitos de base (3 y 9) y los no explícitos de productos internos (51, 153 y 459) a partir de la descomposición única en factores primos del número dado.

En la puesta en común que se llevó a cabo durante la tercera sesión del experimento de enseñanza, en el seminario S2, también encontramos evidencias sobre el uso del teorema fundamental de la aritmética para determinar todos los divisores de un número. En el apartado 6.3, en el episodio 47 recogimos la intervención de una estudiante que etiquetamos como E7; por ser la séptima en el orden de intervención durante el desarrollo de la tercera sesión. En su intervención hace uso de la descomposición única para resolver la tarea. Además utiliza un ejemplo que fue colocado en la segunda sesión, en la tarea T5 (véase figura 6.11), para proyectarlo y generalizar un procedimiento para resolver este tipo de tareas.

En el episodio 62 mostramos parte de la intervención de la estudiante E18[1] en la puesta en común cuando resolvió la tarea T5 de la tercera sesión (véase figura 6.19).

62.1 *E18:* Nosotros tenemos otra forma de hallarlo, que de hecho salió en la práctica del otro día. Con el número cuarenta y cinco, ¿recordáis la del número cuarenta y cinco? [hace referencia al ejemplo que colocamos como ayuda en la tarea T5 de la segunda sesión (véase figura 6.11)]. Es que detectamos que si al factorizar un número siempre en [pausa] los factores uno de ellos está elevado al cuadrado y otro es el número primo siempre va a tener seis divisores [...] que llegamos el otro día haciendo la práctica y que es muy fácil de hacerlo. Es cualquier número primo elevado a dos por un número primo, y, como no tiene que ser ni múltiplo de tres ni divisible por cinco [pausa] pues cualquier número primo que no sea ni tres ni cinco. Por ejemplo, puede ser dos elevado a dos por once [escribe en la pizarra varios ejemplos $2^2 \times 11$, $2^2 \times 7$, $2^2 \times 13$] todo eso da seis divisores, seis factores y no tiene ni el tres ni el cinco

En la tarea T4 el 27,3% de los estudiantes no identificó los factores explícitos en la descomposición canónica del número, el 18,2 % no identificó los factores no explícitos de base y el 27,3 % no identificó los factores no explícitos de los pro-

[1] La estudiante con la etiqueta E18 es la misma que en la puesta en común fue etiquetada como E7.

ductos internos. En la figura 7.17, mostramos, como ejemplo, la respuesta del estudiante E27 a la tarea T4.

Tarea 4

Respuesta dada por E27

4. Escribe todos los factores del número 459 distintos de 3 y de 17. Explica tu respuesta.

459	3
153	3
51	3
17	17
1	

$459 = 3^3 \times 17 \times 1$

El único factor distinto a 3 y 17, es 1. Porque al multiplicar 1 por otro número ($3^3 \times 17$) nos da $3^3 \times 17$.

Figura 7.17. Respuesta dada por E27 a la tarea T4

En la respuesta, E27 no identificó el factor explícito (27), no reconoció el número nueve (9) como factor no explícito de base ni determinó los factores (51, 153 y 459) que son no explícitos de productos internos. El único factor que reconoció, distinto de 3 y 17, es el número 1 y lo escribe en la descomposición en factores primos; como si fuera un factor primo más.

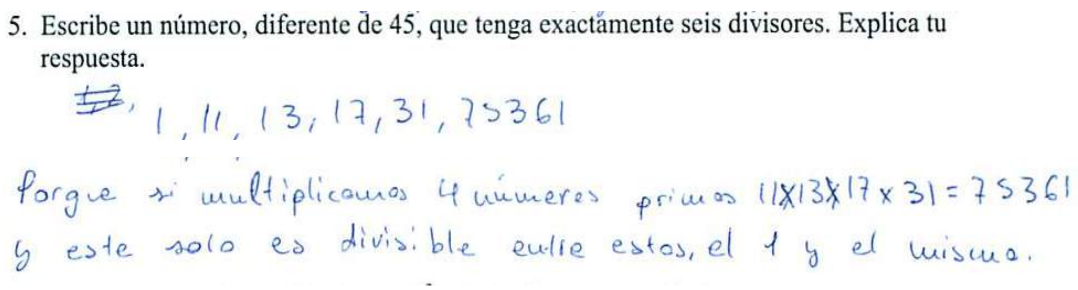
Con respecto a la tarea T5 (véase figura 6.11), la mayoría de los maestros en formación utilizó el teorema fundamental de la aritmética, identificó los factores explícitos, reconoció factores no explícitos de base y determinó los factores explícitos de productos internos. Sin embargo, en las diferentes estrategias seguidas por los maestros en formación para resolver la tarea pudimos observar que la mayor dificultad fue para determinar los factores no explícitos en una descomposición canónica.

Al ser una tarea abierta cuya solución no es única da lugar a diversas respuestas y estrategias para su resolución. Las estrategias seguidas por los maestros en formación para responder las podemos agrupar en tres tipos: (a) escoger un número al azar y descomponerlo en factores primos, luego probar a dividirlo para saber si cumple con la condición de exactamente seis divisores; (b) escoger cuatro números primos al azar y la unidad, y, luego hacer el producto de ellos; y (c) descomponer en factores primos el número dado como ejemplo y escribir otro número con característica similares a este en su descomposición en factores primos.

Independientemente de la estrategia utilizada para responder a la tarea T5, observamos confusión para determinar los factores explícitos y no explícitos en una descomposición canónica. El 46,7% de los maestros en formación que respondieron, no identificó los factores que no están explícitos y que son resultado de productos internos de la descomposición canónica del número. El 40% no identificó los factores no explícitos de base en la descomposición canónica y el 26,7% mostró confusión para identificar los factores explícitos en una descomposición canónica. En la figura 7.18 mostramos, como ejemplo, la respuesta del estudiante E29 a la tarea T5.

Tarea 5

Respuesta dada por E29


5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

1, 11, 13, 17, 31, 75361

Porque si multiplicamos 4 números primos 11×13×17×31 = 75361 y este solo es divisible entre estos, el 1 y el mismo.

Figura 7.18. Respuesta dada por E29 a la tarea T5

La estrategia que sigue E29 para dar respuesta a la tarea T5 es escoger cuatro números primos al azar y la unidad; y calcular el producto de todos ellos para responder. Consideró que el número 75361 es el producto de cuatro factores primos $11\times13\times17\times31=75361$. Sin embargo, no consideró los productos internos entre los números primos que también son divisores del número (e.g., 11×13 o $11\times17\times31$). En la grabación de audio, donde participó E29 con dos compañeros más, constatamos que no consideraron la posibilidad de los factores no explícitos de productos internos como una situación que se presenta en cualquier descomposición canónica. En el siguiente episodio recogemos parte de la discusión que muestra evidencia de esta situación.

63.1	*E29:*	[...]¡Ah ya! entonces hago factores primos [multiplica $1\times2\times3\times7\times11\times13$] el trece es primo ¿no?
63.2	*E30:*	Si el 13 es primo
63.3	*E31:*	[...] Seis mil seis 6006 [realiza la multiplicación de los números $1\times2\times3\times7\times11\times13$] ¡no pero espérate! porque es un rollo, no porque luego puede ser divisible por 6

La advertencia es evidente porque el número es 6006 y sólo sospechan del 6 como posible divisor diferente del número, pero en ningún caso advierten que 6 es producto de 2×3. A continuación, acuerdan escribir otro número que sea producto de números primos y deciden que los números deben ser mayores. Nuevamente no consideran los factores no explícitos de productos internos. En el episodio siguiente podemos observar la situación.

64.1	*E30:*	El uno y el número que sea ya son dos, así que hay que buscar cuatro más.
64.2	*E29:*	[...] Pues mira coge el uno y ahora multiplica el 11 por 13
64.3	*E30:*	¿Porqué esos números?
64.4	*E29:*	Para que sea grande, un número complicado, 51 [pausa] no 51 no [pausa] pon ahí dos primos [pausa] 17 también y 31 es primo ¿no? [pausa] es que debería ser así por 31
64.5	*E31:*	Pero ¿31 es primo o no?
64.6	*E29:*	[...] el número es [escribe $1 \times 11 \times 13 \times 17 \times 31 = 75361$]

Esta estrategia también fue puesta de manifiesto en el seminario S1 de la tercera sesión del experimento de enseñanza.

En la tarea T5 de la tercera sesión a los maestros en formación se les pidió que escribieran un número que cumpla con tres condiciones y una de ellas es que tenga exactamente seis divisores (véase figura 6.19). En el apartado 6.2, en los episodios 23.1 y 24.2 podemos ver la misma estrategia y con el mismo resultado; no consideran que los productos internos generan divisores diferentes de los que están explícitos en la descomposición canónica.

7.4. Análisis sobre los vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad

Para estudiar los vínculos entre los términos asociados a la relación de divisibilidad escogimos dos tareas de la segunda sesión: las tareas T2a y T2b (véase figura 6.8). En cada una de estas tareas presentamos dos relaciones que son equivalentes entre sí, pero que al leerlas siguiendo las flechas indicadas en el esquema nos lleva a una contradicción. Esta contradicción es debido a la propiedad antisimétrica de la relación de divisibilidad. Los maestros en formación debían decidir si las relaciones presentadas en el esquemas son verdaderas o no y justificar su respuesta.

Los maestros en formación, en el 36,49% de los casos, mostraron en sus producciones escritas conexiones entre las relaciones “ser múltiplo”, “ser divisible”, “ser factor” y “ser divisor” cuando respondieron a las tareas T2a y T2b. En la tabla 7.10 presentamos los vínculos que los maestros en formación pusieron de manifiesto cuando resolvieron estas tareas.

Tabla 7.10

Vínculos entre los términos asociados a la divisibilidad en las tareas T2a y T2b

	Ser múltiplo	Ser divisible	Ser factor	Ser divisor
Ser múltiplo		*	*	*
Ser divisible	*		*	*
Ser factor	*	*		*
Ser divisor	*	*	*	

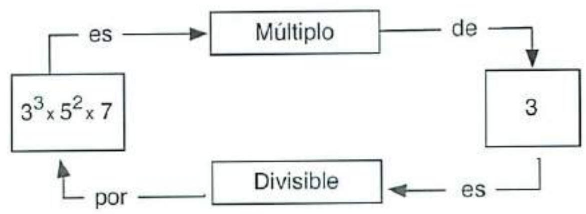
En la figura 7.19 mostramos, como ejemplo, la respuesta dada por E35 a la tarea T2a.

Tarea 2a

Respuesta dada por E34

2. Indica en cada caso si los siguientes diagramas (a y b) presentan relaciones verdaderas o falsas.

a.



Explica tu respuesta.

Es falso: es verdad que $3^3 \times 5^2 \times 7$ es múltiplo de 3, porque al hacer la división sale exacto, es decir, resto cero. Pero que 3 es divisible por $3^3 \times 5^2 \times 7$ es incierto, porque al realizar la división va a dar un número que no es natural o ~~con~~ un número con decimales. Esto sería correcto si pusieramos el sentido de las flechas al contrario, es decir, $3^3 \times 5^2 \times 7$ es divisible por 3.

Figura 7.19. Respuesta dada por E35 a la tarea T2a

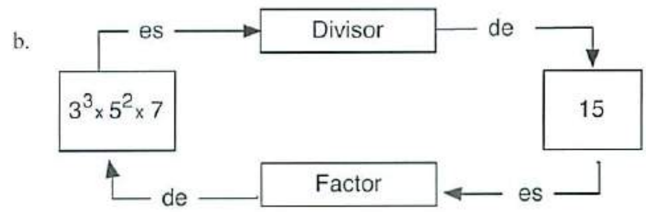
En su respuesta, la estudiante E35 hace una afirmación general sobre el diagrama "es falso". Al hacer esta afirmación está considerando la divisibilidad en general a través del diagrama, es decir, en ningún momento afirma la veracidad o no de una sola relación sin establecer conexión con la otra. En su justificación plantea "es verdad [...] pero [...]". Esta conjunción adversativa indica que está contraponiendo a la afirmación que hace sobre múltiplo el concepto de divisible. Con lo cual, establece una relación explícita entre los dos conceptos involucrados en la tarea. Posteriormente, plantea una condición para que las relaciones expresadas en el diagrama sean verdaderas "[...] si pusiéramos el sentido de las flechas al contrario [...]". En la tarea solo se pidió que indicara si en el diagrama presentaba relaciones verdaderas o falsas. Sin embargo, al leer las relaciones entre los números siguiendo el sentido de las flechas, en el diagrama, induce a dar una justificación más allá de solo indicar si una es verdadera y la otra es falsa.

En el apartado 4.4 de esta memoria hicimos referencia al uso del diagrama (véase figura 4.6) como recurso que nos permitía libertad para leer las relaciones en cualquier sentido, es decir, no condicionada por la lectura habitual de izquierda a derecha. Igualmente, en ese apartado, conjeturamos que los maestros en formación podían pensar en las relaciones asociadas a la divisibilidad en forma independiente de algunos cálculos numéricos; promovidos por algunos de los significados asociados a la igualdad. En ese sentido, conseguimos evidencias en las producciones escritas de esta conjetura. Mostramos como ejemplo en la figura 7.20, la respuesta dada por la estudiante E36 a la tarea T2b.

Tarea 2b

Respuesta dada por E36

b.



Explica tu respuesta.

Falso. Es cierto que 15 es factor de $3^3 \times 5^2 \times 7$ porque 15 aparece en la descomposición de $3^3 \times 5^2 \times 7$, al hacer la división nos da exacta, pero es falso que $3^3 \times 5^2 \times 7$ sea divisor de 15, porque $3^3 \times 5^2 \times 7$ no aparece en la descomposición de 15. Para que fuese correcto habría que invertir el sentido de las flechas de arriba, o bien decir que $3^3 \times 5^2 \times 7$ es múltiplo de 15.

Figura 7.20. Respuesta dada por E36 a la tarea T2b

En la justificación E36 plantea, en primer lugar, que la proposición 15 es factor de $3^3 \times 5^2 \times 7$ es una relación verdadera. La lectura de esta proposición en el diagrama se hace siguiendo las flechas de derecha a izquierda; fijando el número 15 en primer lugar y a partir de ahí estudiar la veracidad de la proposición. También es cierto que si hace la lectura de izquierda a derecha la proposición que se encuentra no es verdadera y probablemente decidió hacer la justificación desde una relación verdadera, aunque considera que el diagrama, en general, es falso.

CAPITULO 8. CONCLUSIONES

[...] En el principio de cada verso había de poner una letra de su nombre, de manera que al fin de los versos, juntando las primeras letras, se leyese: Dulcinea del Toboso.

El bachiller respondió que puesto que él no era de los famosos poetas que había en España, que decían que no eran sino tres y medio, que no dejaría de componer los tales metros, aunque hallaba una dificultad grande en su composición, a causa que las letras que contenían el nombre eran diez y siete; y que si hacía cuatro castellanas de a cuatro versos, sobraría una letra; y si de a cinco, a quien llaman décimas o redondillas, faltaban tres letras; pero, con todo eso, procuraría embeber una letra lo mejor que pudiese, de manera que en las cuatro castellanas se incluyese el nombre de Dulcinea del Toboso. (Don Quijote, Segunda Parte, Capítulo IV).

Como hemos puesto de manifiestos en el capítulo 1 de esta memoria de tesis, en nuestra investigación indagamos en dos ámbitos diferenciados. Por una parte, constatar si un trabajo sistemático, en el aula, en el que se haga énfasis en la divisibilidad como relación, permite a los maestros en formación el desarrollo de conocimientos sólidos sobre el tema de divisibilidad y reducir las dificultades que se detectan en la práctica y que son destacadas por investigaciones realizadas en el área de didáctica de las matemáticas. Por otra parte, describir y caracterizar los significados que ponen de manifiesto un grupo de maestros en formación cuando resuelven tareas sobre divisibilidad, durante el desarrollo de la secuencia de trabajo preparada para un experimento de enseñanza.

Para el logro de nuestro propósito definimos dos objetivos generales y ocho objetivos específicos que guiaron el proceso de investigación. Abordamos los objetivos mediante un experimento de enseñanza que nos permitió estudiar el proceso de aprendizaje de un grupo de maestros en formación cuando estudian el tema de divisibilidad.

El primer objetivo general lo abordamos en los capítulos 4, 5, 6 y 7. En el capítulo 4 desarrollamos el análisis didáctico de la divisibilidad que nos permitió establecer los fundamentos para planificar para la posterior intervención en el aula. En el capítulo 5 establecimos los aspectos referidos a las fases del experimento de enseñanza. En el capítulo 6 concretamos las tres fases del experimento de enseñanza. Y en el capítulo 7 desarrollamos el análisis retrospectivo de los datos correspondiente a la última fase del experimento de enseñanza. El segundo objetivo general lo abordamos en el capítulo 7, a través, del análisis retrospectivo correspondiente a la tercera fase del experimento de enseñanza.

En este capítulo describimos las conclusiones más importantes de la investigación y que son producto de los resultados del experimento de enseñanza llevado a cabo.

Organizamos el capítulo de conclusiones en cuatro apartados: logro de objetivos, conclusiones sobre el análisis didáctico, limitaciones de investigación y líneas abiertas de investigación.

8.1. Logro de objetivos

Nos propusimos y logramos dos objetivos generales: OG1. Estudiar el proceso de diseño, puesta en práctica y análisis de una secuencia de trabajo en la que se aborda la divisibilidad desde una perspectiva relacional y OG2. Describir y caracterizar los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación a partir de la implementación de una secuencia de trabajo centrada en la divisibilidad como relación de orden.

Abordamos cinco objetivos específicos cuyo desarrollo nos permitió el logro del primer objetivo general que nos propusimos. En lo que sigue, reportamos las conclusiones relacionadas con estos cinco objetivos específicos.

OE1. Hacer un diagnóstico en el cual se estudien las categorías propuestas en la literatura de investigación sobre la comprensión de la relación ser múltiplo y ser divisor.

Realizamos un diagnóstico en el que describirnos los significados puestos de manifiesto por un grupo de maestros en formación sobre la relación ser múltiplo y ser divisor. Destacamos que ningún maestro en formación señaló explícitamente que ser múltiplo o ser divisor se refiera a una relación entre números, que exige una cierta condición. La mayor parte de los 104 maestros en formación que participaron en el estudio, asocian ser múltiplo con una operación aritmética, mayoritariamente la multiplicación y ser divisor con la operación aritmética división. En el anexo P incluimos el estudio diagnóstico.

En el caso de la relación ser múltiplo, la mayoría lo asocia con el resultado de la operación de multiplicación y, en otros casos, con el de factor, como un elemento que interviene en la multiplicación. Nuestro resultado coincide con el de Zazkis (2001). Esta asociación se pone de manifiesto para justificar que entre los números dados uno es múltiplo del otro y cuando describen qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro. Lo asocian con la operación de división cuando realizan la operación de los factores en que está descompuesto un número para comprobar (haciendo la división entre uno de los factores) si la división es o no exacta.

Entendemos que la transformación del número, escrito como producto de factores primos, a la forma de escritura posicional en base diez que hicieron los estudiantes, está basada en la necesidad que tienen de hacer alguna operación aritmética conocida. Esto les lleva a no considerar la representación del número como producto de factores primos, a pesar que esta representación favorece la respuesta de manera más rápida. No identificaron la relación de ser múltiplo en estas expresiones.

En general, sus actuaciones y respuestas se enmarcan en una percepción operacional de la noción ser múltiplo. Dentro de esta percepción operacional, el significado que asignan estos maestros en formación a ser múltiplo, presenta tres acepciones, dos asociadas a la multiplicación y una a la división.

- Múltiplo como resultado de un producto.
- Múltiplo como factor de un producto.
- Múltiplo como dividendo de una división exacta.

Este último significado, de múltiplo como dividendo de una división exacta, no aparece en los estudios previos y lo incorporamos como una categoría emergente a nuestro estudio definitivo.

En el caso de la relación ser divisor, la mayoría de los maestros en formación manifestó la necesidad de utilizar la operación de división para responder y justificar las cuestiones planteadas. En esta consideración mayoritaria, operacional, sobre la relación ser divisor, mostrada por los futuros maestros, el significado divisor como consecuencia de una división exacta fue el más utilizado. Aunque esta consideración está muy cerca de la definición de divisor como una relación entre números, la forma en que fue expresada por los maestros en formación estuvo marcada por la necesidad de realizar la operación de división entre números. Es decir, conocer el resultado de la división, alejándose así de la posibilidad de hacer la consideración en términos generales y no dependientes de los resultados de una división específica de manera explícita.

Otro aspecto que consideramos fue la transformación del número, escrito en su representación dada por el teorema fundamental de la aritmética, a un número escrito en su representación posicional en base diez para responder y justificar. La mayoría de los maestros en formación cuando transformaron el número para responder sobre divisor fue para tratar de conseguir el resultado de la división y no la relación entre los números. Algunos de ellos utilizaron la escritura del número en su forma canónica para responder. Sin embargo, no todos fueron capaces de identificar los factores no explícitos en la descomposición canónica del número.

En general, al igual que en la relación ser múltiplo, los maestros en formación mostraron una percepción operacional de la noción ser divisor. El significado mostrado a la relación ser divisor por los maestros en formación está ligado a la operación de división en dos sentidos:

- Divisor como elemento que participa en una división, rol de divisor.
- Divisor como resultado de una división exacta.

En este estudio diagnóstico (véase anexo P) ratificamos cuatro categorías provenientes de estudios previos y surgió una categoría nueva que incorporamos en nuestro estudio definitivo. Las categorías que ratificamos en este estudio son: múltiplo como producto, múltiplo como factor, divisor como el rol en una división y divisor como resultado de una división exacta. La categoría que emergió en este estudio fue la de múltiplo como dividendo en una división exacta.

OE2. Realizar un análisis didáctico de los contenidos asociados a la divisibilidad para planificar el diseño de las secuencias de trabajo.

Utilizamos el análisis didáctico desde su función curricular para realizar la planificación de las secuencias de trabajo. En el capítulo cuatro de esta memoria de tesis desarrollamos el análisis didáctico de la divisibilidad. De los cinco análisis que componen el ciclo del análisis didáctico (Rico y Fernández-Cano, 2013), para el logro de este objetivo, desarrollamos tres de ellos: análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción.

En el apartado 4.2 desarrollamos el análisis de contenido siguiendo la propuesta de Gómez (2007). En este análisis describimos la divisibilidad desde tres organizadores del currículo: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología.

Desde la estructura conceptual señalamos los elementos conceptuales y procedimentales asociados a la divisibilidad. Desde los elementos conceptuales listamos los hechos, que a su vez, están compuestos de: términos, notaciones, convenios y resultados. También listamos los conceptos y estructuras que componen la estructura conceptual de la divisibilidad. Desde el campo procedimental, listamos un conjunto de destrezas, estrategias y razonamientos asociados al tema de divisibilidad.

Una vez que listamos los elementos del campo conceptual y los del campo procedimental, organizamos la información en un mapa conceptual en el cual distinguimos los elementos principales de la estructura conceptual de la divisibilidad y representamos las relaciones entre ellos (véase figura 4.3).

Con respecto al segundo organizador del currículo, listamos los sistemas de representación que consideramos podían ser utilizados en la divisibilidad por los maestros en formación y señalamos las dos operaciones posibles. Efectivamente, los maestros en formación pusieron de manifiesto en las producciones escritas y la puesta en común; durante la realización del experimento de enseñanza (véase figura 4.6).

El tercer organizador del currículo que nos permitió hacer el análisis de contenido de la divisibilidad fue la fenomenología. Listamos una serie de fenómenos que están relacionados con la divisibilidad. Asociamos esos fenómenos a un contexto y a una subestructura matemática (véase figura 4.7).

El análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, fue el segundo análisis que desarrollamos en el apartado 4.3 para el logro de este objetivo. En el análisis cognitivo nos centramos en dos organizadores del currículo (a) expectativas de aprendizaje sobre divisibilidad y (b) dificultades y errores asociadas a la divisibilidad. Como el análisis cognitivo lo utilizamos para planificar las tareas y para establecer esquemas que nos permitieron describir las producciones de los maestros en formación, podemos afirmar que lo hemos utilizado con dos finalidades: una para el diseño de tareas (Rico y Fernández-Cano, 2013) y la otra para la definición de las categorías de análisis (Cañadas, Castro y Castro, 2013).

En el apartado 4.4 desarrollamos el tercer análisis al que hemos hecho referencia; el análisis de instrucción. En este análisis elaboramos la secuenciación de las tareas que aplicamos en cada una de las sesiones del experimento de enseñanza, definimos los materiales y recursos, y, establecimos la gestión de aula siguiendo las pautas metodológicas establecidas en el curso en la Guía Docente de la Asignatura (anexo B).

Con respecto a los recursos, diseñamos un diagrama (véase figura 4.6) que nos permitió, en primer lugar, mantener en forma explícita las relaciones asociadas a la divisibilidad con sus respectivos vínculos tanto directas como inversas. En segundo lugar nos permitió mantener la independencia del signo de igualdad, es decir, no fue necesario plantear una igualdad desde la estructura multiplicativa para establecer las relaciones de divisibilidad entre términos.

OE3. Promover mediante el desarrollo de las secuencias de trabajo el conocimiento matemático de la divisibilidad como una relación de orden

El desarrollo del análisis didáctico nos permitió organizar las secuencias de trabajo en función de dos niveles de expectativas de aprendizaje (objetivos y capacidades) sobre la divisibilidad y distribuirlas en las tres sesiones del experimento de enseñanza. Describimos en el capítulo 6 de esta memoria, en la fase de implementación del experimento de enseñanza, el desarrollo de las secuencias de trabajo en cada sesión. Durante el desarrollo de las secuencias de trabajo se promovió el estudio de la divisibilidad como una relación de orden entre números enteros positivos. Se discutió con los maestros en formación sobre la diferencia entre la operación aritmética de división entre dos números y la relación de divisibilidad entre dos números. Se discutieron las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva de la relación de divisibilidad. También se utilizó en recurso del diagrama para presentar las relaciones de manera explícita en las tres sesiones del experimento de enseñanza. En el capítulo 6 de esta memoria de tesis se puede observar en la fase II (implementación) del experimento de enseñanza que se promovió el estudio de la divisibilidad como una relación en cada una de las tres sesiones: la clase de gran grupo, en los seminarios de la práctica individual y en la puesta en común. Otro aspecto que contribuyó con el logro de este objetivo fue la actuación de la profesora-investigadora ante las preguntas o dudas que manifestaron los maestros en formación. Tal como lo recogimos en el apartado 6.2, cuando los maestros en formación manifestaron dificultades para entender algún término o alguna relación asociada a la divisibilidad, la profesora-investigadora promovió la interacción entre los estudiantes para discutir o debatir sobre estas cuestiones. Promovió la interacción a partir de las dudas de los estudiantes, transformándolas en objeto de estudio. Como ejemplo de la actuación de la profesora-investigadora podemos observar en apartado 6.2 en los episodios dos, seis y siete.

OE4. Describir la actuación de los maestros en formación durante el desarrollo de las secuencias de trabajo con base en las expectativas de aprendizaje formuladas.

Describimos la actuación de los maestros en formación desde las expectativas de aprendizaje tomando como referencia las capacidades que ponen en juego durante el desarrollo de las secuencias de trabajo. En ese sentido, en el apartado 4.3 y en el anexo O listamos treinta y cinco capacidades asociadas a relaciones entre conceptos (C-C), catorce capacidades asociadas a la relación entre procedimientos (P-P) y veintinueve capacidades asociadas a la relación entre conceptos y procedimientos (C-P). En el análisis retrospectivo que recogemos en el capítulo 7 de esta memoria de tesis indicamos, para cada uno de los conglomerados formados y desde el análisis de contenido; específicamente desde la estructura conceptual, la actuación de los maestros en formación en torno a las relaciones entre conceptos, entre procedimientos y entre conceptos-procedimientos que pusieron de manifiesto durante el desarrollo de las secuencias de trabajo.

En el apartado 7.4 de esta memoria mostramos evidencias sobre la interacción que se produjo en el aula, que pone de manifiesto que los maestros en formación discutieron y establecieron vínculos entre las relaciones asociadas a la divisibilidad (véanse figuras 7.18 y 7.19) desde la información colocada en el diagrama. No se pedían de forma explícita los vínculos entre los conceptos, pero sí se preguntaba si en el diagrama habían relaciones verdaderas o falsas y que las indicaran. También requerimos que justificaran las respuestas. Un grupo de maestros en formación mostraron no solo la veracidad o no de las relaciones expresadas en el diagrama sino que además manifestaron que se debían colocar otros términos (por los cuales no se preguntaba) en el diagrama, para que todas las relaciones fueran verdaderas. Otro grupo de maestros en formación decidió cambiar el sentido a las flechas en el diagrama de tal forma que las relaciones que estaban escritas en la tarea resultaran todas verdaderas. Estos resultados contrastan con los reportados en otras investigaciones como las de Zazkis y Campbell (1996a) o Zazkis (2001) en las cuales los vínculos entre los conceptos asociados a la divisibilidad fueron con frecuencia mínimos o incompletos. Este hallazgo es importante para nuestra investigación porque en las tareas T2a y T2b utilizamos los mismos números y las mismas cuestiones que Zazkis y Campbel (1996a), modificando únicamente la disposición de estos números y de los términos utilizando el diagrama que desarrollamos en el análisis de contenido. Con respecto a la independencia del signo igual, enunciamos que la lectura desde el diagrama daba libertad a los maestros en formación para leer las relaciones en cualquier sentido y no solo de izquierda a derecha, como habitualmente lo hacemos. En ese sentido confirmamos esta conjetura y mostramos evidencias de ello en el capítulo 7 de esta memoria de tesis (véase figura 7.19).

Otro aspecto puesto de manifiesto en la actuación de los maestros en formación es la utilización limitada del teorema fundamental de la aritmética. La descomposición en factores primos de un número (primera parte del teorema) no presentó dificultad para los maestros en formación que participaron en este estudio. Sin embargo, algunos de ellos no consideraron los factores explícitos y no explícitos en esa descomposición. En particular, mostramos las dificultades que presentaron para determinar todos los factores-divisores de un número a partir de su descomposición canónica. Esta evidencia, junto con los conocimientos previos, nos lleva a conjeturar que utilizan la descomposición en factores primos como un procedimiento independiente del teorema fundamental de la aritmética y que lo aplican de forma mecánica. Respecto a la segunda parte del teorema, observamos algunas respuestas que apuntan a la "posibilidad" de existencia de otra descomposición en factores primos, lo cual refleja una limitación importante en la utilización del teorema fundamental de la aritmética.

A partir de los resultados, extraemos algunas implicaciones docentes que podrían contribuir al uso del teorema. En primer lugar, y dado que una de las estrategias en la tarea T5 (véase figura 6.11), fue seleccionar un número al azar y dividir, podríamos utilizar un aspecto de la demostración del teorema: a partir de la descomposición canónica del número, calcular el número de divisores-factores y, posteriormente, hacer el producto de las combinaciones posibles entre ellos. En segundo lugar, como algunos de los maestros en formación no identificaron como factores de un número, dado en su descomposición canónica, los no explícitos; proponemos plantear la descomposición en factores primos en diferente orden. En tercer lugar, dado que la unicidad del teorema fundamental de la aritmética es un aspecto que no es considerado más allá del enunciado del teorema, proponemos profundizar sobre la unicidad del teorema, incidiendo en que esta implica que todos los factores-divisores de ese número se generan a partir de esa descomposición necesariamente, y haciendo hincapié en que no es una cuestión de azar, como ocurrió con la estrategia seguida por un grupos de futuros maestros cuando respondieron la tarea T5.

OE5. Describir la actuación de los maestros en formación durante el desarrollo de las secuencias de trabajo con base en la formulación de dudas, de afirmaciones matemáticas y de las interacciones que se generan.

Los maestros en formación pusieron de manifiesto durante el experimento de enseñanza dudas y también hicieron algunas afirmaciones que el apartado 6.3 de esta memoria de tesis tipificamos y definimos como afirmaciones matemáticamente correctas y afirmaciones matemáticamente incorrectas.

Esta descripción la hicimos tomando como referencia la sesión de grupo completo y que fue una clase de tipo teórica en la cual participaron todos los estudiantes asignados administrativamente al grupo B. En el apartado 6.3 de esta memoria de tesis recogimos la actuación de los maestros en formación en relación con las afirmaciones o dudas planteadas durante el desarrollo de las secuencias de trabajo. En ese sentido, constatamos que el 51,22% de las afirmaciones que los maestros en formación hicieron se ajustaban a lo establecido en la ciencia matemática. Mientras que la diferencia porcentual se repartió entre afirmaciones que mostraban ambigüedades entre los conceptos implicados y las dudas manifestadas.

Queremos destacar una actuación, en concreto, que paso desapercibida en las dos primeras sesiones del experimento de enseñanza pero que pudimos registrar, y, analizar posteriormente, en la actuación de los maestros en formación durante implementación de la tercera sesión. La actuación como tal tiene que ver con la descomposición en factores primos de un número.

El algoritmo para descomponer un número en factores primos no supuso ningún problema. De hecho, en la primera sesión los maestros en formación manifestaron conocer el procedimiento de las divisiones sucesivas para descomponer un número en factores primos y en las sesiones posteriores lo pusieron de manifiesto en sus producciones escritas. La expresión “factorizar un número” fue utilizada por algunos de los maestros en formación para hacer la descomposición en factores primos. Hasta este punto todo parece ajustado a los contenidos matemáticos. Podemos entender que una forma de factorizar un número es precisamente haciendo la descomposición en factores primos, y, que por el teorema fundamental de la aritmética esa descomposición, al ser única, nos da todas las posibles combinaciones con factores, con lo cual, la descomposición en factores primos garantiza cualquier posible factorización del número.

En la tarea T5 de la tercera sesión (véase figura 6.19) le pedimos a los maestros en formación que escribieran un número que cumpliera con tres condiciones: (a) que tenga exactamente seis divisores, (b) que no sea múltiplo de 3 y (c) que no sea divisible por cinco.

Una de las estrategias de algunos maestros en formación fue: escribir un número en su representación canónica y, posteriormente, verificar si cumplía con las condiciones impuestas por la tarea. En la puesta en común del grupo cuatro del tercer seminario (S3_G4) plantaron como solución a la tarea el número 44. Efectivamente el número 44 cumple con las condiciones impuestas en la tarea. En la explicación sobre la forma de llegar a esa solución, los integrantes de este grupo escribieron en la pizarra dos factores primos con la operación de multiplicación $2^2 \times 11$, posteriormente realizaron la multiplicación y obtuvieron el resultado de esa multiplicación; el número 44. Después de realizar la multiplicación afirmaron que el próximo paso era factorizar el número. Para ellos, factorizar el número significa que deben realizar la descomposición en factores primos del número 44. Es decir, no interpretan que la descomposición en factores primos ya la habían realizado. De hecho, el número lo construyen desde el producto de factores primos. En el siguiente episodio recogemos parte de la resolución de la tarea T5 de la tercera sesión.

65.1 *E1:* [...]Entonces vamos a coger el dos elevado a dos por once [escribe en la pizarra $2^2 \times 11=44$]. Entonces ¿cómo calculamos los divisores?; lo que hacemos es que factorizamos ese número [escribe en la pizarra los resultados de las divisiones sucesivas del número 44] dos, veintidós; dos, once y once, uno [...]

Este hallazgo sobre la expresión “factorizar un número” nos induce a pensar que los maestros en formación entienden la factorización exclusivamente como el procedimiento que se realiza para escribir un número desde su representación posicional en base diez a su representación canónica. Por otra parte, cuando escribe en la pizarra la expresión $2^2 \times 11=44$, está indicando la respuesta de la operación aritmética que ha colocado a la izquierda, pero no plantea que ya el número 44 está escrito en su descomposición canónica y vuelve a descomponerlo haciendo las divisiones sucesivas. Una posible explicación es que interpreten el signo de igual con el significado de operador (Molina, Castro y Castro, 2007).

Para el logro del objetivo general OG2 desarrollamos tres objetivos específicos. En lo que sigue, reportamos las conclusiones relacionadas con estos tres objetivos específicos.

OE6. Construir un estructura de categorías que permitan describir los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación a partir de la terna formada por los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

En el capítulo 5, apartado 5.5 de esta memoria de tesis, establecimos una estructura general para la codificación de los datos (véase figura 5.7). Definimos dos dimensiones y un conjunto de categorías cuyas fuentes de información surgieron de los organizadores del currículo que caracterizan el análisis de contenido dentro del análisis didáctico de la divisibilidad, de la revisión de la literatura y de la revisión de las producciones escritas de los maestros en formación.

Con todos estos elementos construimos una estructura de categorías que nos permitió describir los significados de las relaciones "ser múltiplo" (véase figura 5.9) y "ser divisor" (véase figura 5.11) desde la terna: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología. Consideramos que esta estructura general de codificación es un aporte de nuestra investigación y que pudiera ser de interés en investigaciones futuras; en las cuales se estudie el significado de algún concepto de las matemáticas escolares.

OE7. Analizar las producciones de los maestros en formación utilizando la estructura de categorías propuesta.

Como la estructura de categorías quedó conformada por la terna: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología, analizamos las producciones de los maestros en formación desde el análisis de contenido del análisis didáctico. En este caso, utilizamos el análisis didáctico en su función de investigación para explorar y describir los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Como describimos en el capítulo 7, un grupo de maestros en formación mostró, desde la estructura conceptual, solo relaciones entre procedimientos. Estos procedimientos estuvieron asociados, mayoritariamente, a algoritmos relacionados con las operaciones aritméticas de multiplicación o división. En cuanto a los sistemas de representación, este grupo de maestros en formación utilizó hasta dos sistemas de representación y realizaron operaciones entre los sistemas de representación. La operación que más utilizaron fue la transformación sintáctica (variante o invariante). Utilizaron esta operación para reescribir el número, dado en la descomposición canónica, a su representación posicional en base diez y, a partir de esta representación, hacer la operación aritmética de multiplicación o división para decidir sobre la divisibilidad. El contexto en el cual este grupo utiliza los conceptos es estrictamente operacional, es decir, siempre utilizan la operación aritmética para decidir sobre la relación de divisibilidad.

Por otra parte, hay otro grupo de maestros en formación que pusieron de manifiesto la divisibilidad en un contexto relacional, establecieron relaciones entre conceptos, entre procedimientos y entre conceptos-procedimientos asociados a la relación de divisibilidad. Utilizaron hasta tres sistemas de representación y realizaron las operaciones de transformación sintáctica (variante o invariante) y también realizaron traducciones entre distinto sistemas de representación.

Destacamos la diferencia que observamos cuando estos grupos utilizaron los sistemas de representación. Si nos centramos solo en el uso de los sistemas de representación, no percibimos diferencias notorias entre ambos grupos. Ambos utilizaron los mismos sistemas de representación. Sin embargo, la diferencia la observamos en la forma como utilizaron las operaciones entre los sistemas de representación. Así por ejemplo, el grupo que asocia la divisibilidad en un contexto operacional utilizó la operación sintáctica invariante para poder decidir sobre la divisibilidad, mientras que el grupo que asocia la divisibilidad en el contexto relacional no utiliza esta operación para decidir sobre la divisibilidad; la utiliza posterior a la decisión que toman sobre la divisibilidad. Este grupo decide sobre la divisibilidad desde la propia descomposición canónica del número.

OE8. Determinar las características distintivas de los significados que ponen de manifiesto los maestros en formación en sus producciones.

Enfatizamos en la caracterización que realizamos del significado de la relación de divisibilidad desde la relación "ser múltiplo" y la relación "ser divisor".

Las características distintivas de los significados sobre la divisibilidad viene dado por el modo de uso del concepto, las relaciones que se establecen entre conceptos y procedimientos asociados a la divisibilidad y sobre las operaciones con los sistemas de representación. En ese sentido, fue concluyente para la organización y clasificación de los clúster el contexto en el cual los maestros en formación discutieron la divisibilidad.

Discutir la divisibilidad en un contexto operacional implicó tomar decisiones en función de una operación aritmética "realizada" en el sistema de representación posicional de base diez. Mientras que discutir la divisibilidad en un contexto relacional implicó tomar decisiones en función de la condición necesaria y suficiente para que un número sea: múltiplo, divisor, factor o divisible; de otro, desde cualquier sistema de representación sin necesidad de realizar alguna operación aritmética para decidir.

En función de los resultados obtenidos, podemos establecer algunas posibles explicaciones o conjeturas, sobre todo, en relación con la aparición del significado de múltiplo y divisor como relación. Este significado no fue puesto de manifiesto en los estudios con maestros en formación de López et al. (2013b) y de Zazkis (2001). En la primera sesión del experimento de enseñanza se discutió con ellos la divisibilidad con la estructura conceptual desarrollada desde el análisis didáctico (véase figura 4.3). Creemos que este hecho pudo influir en generar un tipo de acercamiento a la divisibilidad como una relación entre números y no como una operación aritmética. Los maestros en formación pueden llegar a desarrollar una comprensión profunda de los tópicos de la teoría de números (Feldman, 2012).

8.2. Conclusiones sobre el análisis didáctico

Como lo hemos puesto de manifiesto en el capítulo 1 de esta memoria de tesis, nuestro trabajo responde también al interés del grupo de investigación FQM-193: "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada por llevar a cabo investigaciones centradas en los contenidos matemáticos, en la formación inicial de profesores; basadas mayoritariamente en el análisis didáctico, en los sistemas de representación; indagar sobre las representaciones que los estudiantes hacen de los conceptos matemáticos, así como, los significados de conceptos matemáticos puestos de manifiesto por estudiantes. En ese sentido, utilizamos el método de análisis didáctico desarrollado en el seno del grupo (Rico y Fernández-Cano, 2013).

En nuestra investigación utilizamos el análisis didáctico desde dos de sus funciones, tal como lo pusimos de manifiesto en el apartado 3.4 del capítulo 3: la función curricular y la función metodológica (Rico y Fernádez-Cano, 2013). Desde la función curricular, lo utilizamos como guía en la planificación y puesta en práctica del experimento de enseñanza. En ese sentido, desarrollamos los cinco análisis que componen el ciclo del análisis didáctico.

En el capítulo 3 hicimos una descripción de conceptos y términos asociados a la divisibilidad, así como, una aproximación histórica-crítica sobre el estudio de la divisibilidad desde la ciencia matemática, igualmente consideramos la génesis epistemológica sobre la divisibilidad. Estos tres elementos forman parte del primer análisis (el análisis conceptual) dentro del análisis didáctico y estructuran una red de conceptos y significados que nos guiaron en el proceso de la planificación y puesta en práctica del experimento de enseñanza.

El segundo análisis del ciclo del análisis didáctico lo desarrollamos en el capítulo 4 de esta memoria de tesis; el análisis de contenido. Este análisis lo utilizamos para determinar los focos de contenido sobre los cuales planificamos las sesiones del experimento de enseñanza. Por otra parte el análisis de contenido lo utilizamos, desde el ámbito metodológico, para interpretar y describir los significados que pusieron de manifiesto los maestros en formación sobre la divisibilidad (función metodológica del análisis didáctico).

El análisis cognitivo lo desarrollamos en el apartado 4.3 y nos permitió la organización de los aprendizajes. En este caso utilizamos el análisis cognitivo con dos finalidades: para el diseño de tareas (Rico y Fernández-Cano, 2013) y la otra para la definición de las categorías de análisis (Cañadas y Castro, 2013).

El cuarto análisis del ciclo del análisis didáctico es el análisis de instrucción. Este análisis lo desarrollamos en el apartado 4.4 y nos permitió establecer las funciones y secuencias de las tareas que diseñamos en el análisis cognitivo para su implementación, posteriormente señalamos los materiales o recursos y, finalmente, abordamos la gestión del aula, que en nuestro caso, fue la metodología que en forma natural siguió el curso y que está descrita en la Guía Docente de la Asignatura (anexo B).

El último de los análisis al que hacemos referencia es el análisis evaluativo. Interpretamos este análisis desde el análisis retrospectivo que desarrollamos en los capítulos 6 y 7 de esta memoria de tesis. La interpretación de resultados y la toma de decisiones antes, durante y después de las sesiones nos permitió hacer una revisión constante del proceso que estábamos llevando a cabo.

8.3. Limitaciones de la investigación

Una de las limitaciones que consideramos es la cantidad de datos que se genera en este tipo de investigaciones. A pesar de haber diseñado y utilizado una base de datos para tener un control más eficaz sobre los mismos, siempre es posible que alguna observación quede incompleta.

Otra limitación que queremos destacar esta referida a las pocas investigaciones que se han realizado, según la revisión bibliográfica llevada a cabo, sobre divisibilidad en Educación Matemática. Si comparamos el tiempo que el contenido de divisibilidad ha estado presente en las matemáticas escolares no se corresponde con el número de investigaciones en esta área. A este aspecto se refería Zazkis y Campbell (2002; 2006) cuando expresaban que las investigaciones en Educación Matemática relacionada con la teoría de números es escasa, sobre todo en relación con el papel que la teoría de números había desempeñado en el desarrollo de las matemáticas.

La decisión de explorar cinco tareas para múltiplo y cinco tareas para divisor en la segunda sesión del experimento de enseñanza, para describir los significados, fue un intento por abordar la divisibilidad en los términos más generales.

Aunque la asistencia se mantuvo más o menos regular, siempre que faltan algunos de los participantes conlleva a tomar decisiones sobre la exclusión de los mismos en todo el proceso. En nuestro caso a la segunda y tercera sesión faltaron 3 maestros en formación.

La muestra tomada para realizar este trabajo fue intencional: alumnos de la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, que estaban asignados administrativamente al grupo B en el periodo lectivo 2012-2013 y que asistieron a las sesiones del experimento de enseñanza. Esto hace que los resultados sean válidos para muestras similares.

8.4. Líneas abiertas

En esta investigación surgen una cantidad de posibles vías para explorar en futuras actuaciones y que han ido quedando latentes a lo largo de los capítulos de esta memoria de tesis. Señalamos algunas de ellas con el propósito que puedan servir como estímulo para continuar investigando en un área que lleva retardo en la educación matemática, y que ofrece una extraordinaria posibilidad para desarrollar el razonamiento matemático, estudiar las relaciones entre números y el pensamiento numérico.

- Hacer un estudio exhaustivo sobre los significados que se muestran los libros de texto sobre la divisibilidad y comparar esos significados con los significados dados a la divisibilidad desde la teoría de números.
- Hacer un estudio exploratorio que relacione el significado de la igualdad, desde la estructura multiplicativa $b{=}a{\times}c$, con la divisibilidad vista como una operación aritmética o como una relación entre números.
- Cuando definimos la divisibilidad desde la estructura multiplicativa $b{=}a{\times}c$ quedan ocultas las relaciones entre los términos de la estructura (b es múltiplo de a, b es divisible por a, a es factor de b y a es divisor de b) y lo que un estudiante ve explícitamente es una operación de multiplicación. En ese sentido vemos una potencial vía de continuación este aspecto; que en nuestra investigación nos reportó algunos hallazgos que consideramos de interés para estudios posteriores.
- Estudiar la ambigüedad que se presenta al considerar factor y divisor como sinónimos en el contexto operacional. En el caso de factor la conmutatividad de la multiplicación no supone problema alguno. Es decir, a cada uno de los elementos que participan en la operación de multiplicación los puedo llamar de la misma manera sin tener consecuencias. Sin embargo, si se considera divisor como rol tiene consecuencias importantes desde el punto de vista matemático; no significa lo mismo cuando el divisor en la operación de división lo cambio por otro.
- Diseñar secuencias de aprendizaje o unidades didácticas en las cuales se promueva el cálculo de los factores-divisores no explícitos en una descomposición canónica.

- Investigar sobre el significado que los maestros en formación o estudiantes de secundaria dan a la expresión “factorizar un número”.
- Investigar sobre el significado que tiene para los maestros en formación o estudiantes de secundaria la unicidad del teorema fundamental de la aritmética.
- A propósito de la expresión, puesta de manifiesto por los maestros en formación, “es (divisible, divisor, múltiplo) porque se puede dividir” estudiar la relación entre el algoritmo de la división y la divisibilidad.
- Investigar sobre la inclusión del cero en la relación de divisibilidad y en la operación de división.

Referencias

Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. y Nieveen, N. (Eds.) (2006). *Educational desing research.* Nueva York, NY: Routledge.

Anderson, T. y Shattuck, J. (2012). Desing-based research: A decade of progress in education research? *Educational Research*, *41*(1), 16-25.

Apostol, T. (1980). *Introducción a la teoría analítica de números.* Barcelona, España: Reverté.

Arias, M. (2014). *Actuación de los tutores y su relación con el proceso de aprendizaje de los profesores de matemáticas en un programa de formación.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 40-48.

Ball, D. L. (2004). *What are teachers learning?* Trabajo presentado en National Council of Supervisors of Mathematics, Philadelphia, PA.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(3), p. 14-17, 20-22, 43- 46.

Barderas, S. V. (1988). *Diccionario de matemáticas (nivel bachillerato).* México: Alhambra mexicana S.A.

Bardin, L. (2002). *Análisis de contenido* (3a. ed.). Madrid, España: Ediciones Akal.

Basham, J., Meyer, H. y Perry, E. (2010). The design and application of the digital backpack. *Journal of Research on Technology in Education*, *42*(4), 339–359.

Beijaard, D., Korthagen, F., y Verloop, N. (2007). Understanding how teachers learn as a prerequisite for promoting teacher learning. *Teachers and Teaching, 13(2),* 105-108.

Bell, E. T. (1949). *Historia de las matemáticas.* (R. Ortiz Trad.). Mexico: Fondo de cultura económica.

Bodí, S. D. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.* Tesis doctoral. Universidad de Alicante, España.

Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2005). El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento. *Números, 60*, 3-24.

Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. En R. Gras, B. Orús y B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux apports théoriques à l'analyse statistique implicative et applications: 4èmes rencontres internationales d'analyse statistique implicative,* (pp. 99-110). Castellón, España: Universitat Jaume I.

Bolte, L. A. (1999). Enhancing and assessing preservice teachers' integration and expression of mathematical knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(2), 167-185.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática* (M. Pérez Trad.). Madrid, España: Alianza.

Brar, R. (2010). *The desing and study of a learning environment to support growth and change in students' knowledge of fraction multiplication.* Tesis doctoral. Recuperado de la base de datos ProQuest Dissertation and Theses. (http://search.proquest.com/docview/859003776).

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: "A psychological topology of teachers' professional knowledge". En R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.73-88). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

Brown, A. (1992). Desing experiments: Theorical and methodological challenges in creating complex interventions in clasroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Brown, A. (2002). Patterns of thought and prime factorization. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 131-137). Westport, CT: Ablex Publishing.

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 41-82). Westport, CT: Ablex Publishing.

Bruno, A. y Martinón, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *SUMA,* 34, pp. 27-44.

Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases. *Pedagogía Universitaria, 14*(3), 71-92.

Callejo y Cañón (1996). Cambios epistemológicos en Educación Primaria en España desde 1970. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 63-91). Granada, España: Comares.

Campbell, S. R. (2002). Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching* *number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 15-40). Westport, CT: Ablex Publishing.

Campbell, S. R. (2006). Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 19-40). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Campbell, S. R., y Zazkis, R. (2002). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (Vol. 2). Greenwood Publishing Group.

Cañadas, M.C. y Castro, E. 2013. Análisis didáctico en una investigación sobre razonamiento inductivo. En L. Rico, J. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 333-348). Granada, España: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representación y Modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, E., y Molina, M. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 123-146). Madrid, España: Pirámide.

Castro-Rodríguez, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Cavanagh, M. S. y Garvey, T. (2012). A professional experience learning community for pre- service secondary mathematics teachers. *Australian Journal of Teacher Education, 37(12),* 57-65.

Chambadal, L. (1984). *Diccionario de matemáticas.* Barcelona, España: Grijalbo (J. Coch, Trad.). [Obra original: Dictionnaire de Mathematiques].

Clapham, C. (1998). *Diccionarios Oxford-Complutense. Matemáticas.* España: Complutense

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek, (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Collins, A. (1992). Toward a desingn science of education. En E. Lagemann y L. Shulman (Eds.), *Issues in education research: Problems and possibilities* (pp. 15–22). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). (2001). *The mathematical education of teachers.* Providence, RI: American Mathematical Society.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, *13*(1), 3-21.

Díaz, M. (1980)**.** *Diccionario básico de matemáticas.* España: Anaya.

Drexler, W. (2010). *The networked student: A design-based research case study of student constructed personal learning environments in a middle school science course.* (Tesis doctoral). Recuperado de la base de datos ProQuest Dissertation and Theses. (http://search.proquest.com/docview/742514948).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa*, 118-144.

Euclides (1991). *Los Elementos. Libros I – IV.* (M. Puertas Trad.). España: Editorial Gredos S. A.

Euclides (1994). *Los Elementos. Libros V – IX.* (M. Puertas Trad.). España: Editorial Gredos S. A.

Feldman, Z. (2012). *Describing pre-service teachers' developing understanding of elementary number theory topics* (Tesis doctoral). Recuperado de ProQuest. (Orden No. 3529017).

Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratrio.* Trabajo de tercer ciclo. Universidad de Granada, España.

Flores, P. y Rico. L. (Coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.* Madrid, España: Pirámide.

Freudenthal, H (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En P. Bolea, Ma. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 57-77). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses-Universidad de Zaragoza.

García, P. (1992). *Diccionarios términos matemáticos*. España: La Calesa.

Goldin, G. A. y Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 1-4.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7(3),* 251-292.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Universidad de Granada.

Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7(1),* 471-498.

Gómez, P. y Cañadas, M.C. (2012). Dificultades manifestadas por profesores en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 303-312). Jaén, España: SEIEM.

Gómez, P. G. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios*, *2*(3), 78-89.

Gómez, P. y González, M. J. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación,* formación *de profesores e innovación curricular* (pp. 121-139). Granada, España: Comares.

González, J. L. (1999). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.). *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Alemania: ERME.

González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39(4),* 372-400.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42(2),* 371- 406.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En Lester, F.K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). USA: NCTM, Age Publishing.

Hurrell, D. P. (2013). What teachers need to know to teach mathematics: an argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education, 38(11),* 54-64.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior, 17(2),* 265-281.

Kaput, J. (1987). Representations systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19- 26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan.

Kelly, A. y Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A., Lesh, R. y Baek, J. (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and matehematics learning and teaching.* Nueva York, NY: Routledge.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias 7*(3), 229-240.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Madrid, España: Nivola.

Koehler, M., Mishra, P. y Yahya, K. (2007). Tracing the development of teacher knowledge in a design seminar: Integrating content, pedagogy, and technology. *Computers and Education, 49*(3), 740-762.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido. Teoría y práctica.* Barcelona, España: Paidós.

Lavy, I. (2006). Learning number theory concepts via geometrical interactive computerized setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 201-221). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leikin, R. (2006). Learning by teaching: The case of sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 115-140). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

LeVeque, W. (1968) *Teoría elemental de los números* (C. Cervantes Trad.). México: Herrero Hermanos.

Liljedahl, P. (2006). Learning elementary number theory trough a chain of discovery: Preservice teachers' encounter with pentominoes. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 141-172). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Looi, C., Chen, W. y Ng, F. (2010). Collaborative activities enabled by GroupScribbles (GS): An exploratory study of learning effectiveness. *Computers and Education, 54*(1), 14-26.

López, A. y Cañadas M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en*

Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 59-66). Granada, España: Comares.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013a). Utilización de la noción "ser múltiplo" por maestros de educación primaria en formación. *Épsilon. Revista de educación matemática*, *30*(85), 9-20.

López, A., Castro, E. y Cañadas M. C. (en prensa). La divisibilidad como conocimiento matemático-didáctico de los maestros en formación. En J. Segovia, E. Olmedo y D. Amber (Coords.), *Investigación en Ciencias de la Educación.* Granada, España.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013b). Significados de las relaciones “ser múltiplo” y “ser divisor” mostradas por maestros de educación primaria en formación. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 355-365). Bilbao, España: SEIEM.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 103-120). Granada, España: Comares.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 41-68). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

McKenney, S. y Reeves, T. (2014). Educational desing research. En Spector et al. (eds). *Handbook of research on educational comunications and technology* (pp. 131-140). Nueva York, NY: Springer.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006a). Real Decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *BOE, 293*, 43053-43102.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). Orden ECI/2211/2007 de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, 31487-31566.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006b). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación secundaria obligatoria. *BOE, 5*, 677-773.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). Orden ECI/2220/2007 de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE, 174*, 31680-31828.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014a). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, 19349-19420.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014b). Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE, 37*, 169-546.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán. *Humanidades y Ciencias. Aspectos disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Anan Vilches Benavides* (pp. 249-261). Granada, España: Atrio.

Molina, M., Castro, E., Molina J. y Castro E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (1981). *Guidelines for the preparation of teachers of mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2013). *Supporting the common core state standards for mathematics.* Reston, VA: Autor.

Nortes, A. (1994). La divisibilidad, ¿En Primaria o en Secundaria?. *SUMA, 18,* pp. 9-12.

Oh, E. (2011). *Collaborative group work in an online learning environment: A design research study.* Tesis doctoral. Georgia: Universidad de Georgia.

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación la Ciencia y la Curltura (OEI). (2010). *Metas educativas 2021: la educación que queremos para la generación de los bicentenarios.* Recuperado de http://www.oei.es/metas2021/sintesis.pdf

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2012). Challenges in basic mathematics education. Paris, Francia: Autor.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2014). Enseñanza y aprendizaje: lograr la calidad para todos. *Informe de seguimiento de EPT en el mundo.* Paris, Francia: Autor.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes.* Madrid, España: Mc Graw Hill.

Picado, M. E. (2012). *El sistema métrico decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892).* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Prada, V. y Rodríguez, R. (1982). *Cómo enseñar divisibilidad.* Madrid, España: Anaya.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE- Horsori.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid, España: Síntesis.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española,* 23a ed, Madrid: el autor. Recuperado de http://www.rae.es.

Reynolds, R. y Caperton, I. (2011). Contrasts in student engagement, meaning-making, dislikes, and challenges in a discovery-based program of game design learning. *Educational Technology Research and Development*, *59*(2), 267–289.

Rico, L. (2013b). Antecedentes del análisis didácico en educación matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 23-58). Granada, España: Comares.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemaática 1*, 39-63.

Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid, España: Síntesis.

Rico, L. (2013a). El método del análisis didáctico. *Unión. Revista Iberoámerica de Educación Matemática*, *33*, 11-27.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza de secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: Horsori.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid, España: Pirámide.

Rico, L. (1992). *Proyecto docente.* Granada, España: Universidad de Granada.

Rico, L., Cañadas, M.C., Gutiérrez, J. y Segovia, I. (Eds.) (2013). *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro.* Granada, España: Comares.

Rico, L. y Fernández-Cano (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática.* Granada, España: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58,* 7-23.

Rico, L. y Sierra, M. (1996). Contexto y evolución histórica de la formación en matemáticas y su didáctica de los profesores de primaria. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 39-62). Granada, España: Comares.

Roig, A. I., Llinares, S. y Penalva, M. C. (2010). Construcción del concepto múltiplo común en el dominio de los números naturales. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(2), 261-274.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: Una experiencia de investigación-acción.* Granada, España: Comares.

Santamaría, C. (1995). *Diccionario de matemática de EGB a COU.* España: La Escuela Española.

Segovia, I. y Rico, L. (Eds.). (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria.* Madrid, España: Pirámide.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57(1),* 1-22.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2),* 4-14.

Sierra, M., González, M., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad.* Madrid, España: Síntesis.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación*

Matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Spector, J., Merril, D., Elen, J. y Bishop. M. (2014). *Handbook of research on educational comunications and technology.* Nueva York, NY: Springer.

Tatto, M. (2014). Teacher education development study-mathematics (TEDS-M). En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 586-591). London, United Kingdom: Springer. DOI 10.1007/978-94-007-4978-8

Valiente, S. (1998). *Diccionario de matemáticas:(Nivel Bachillerato).* México: Alhambra.

Valverde, A. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Vega, D. (2013). Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Vera, F. (1967). *Lexicón Kapelusz Matemática* (2da Ed.). Buenos Aires, Argentina: Kapeluzs.

Verlag Herder KG. (1977). *Diccionarios Rioduero. Matemática* (W. Ströbl, Trad. y adaptación: 2da. Ed.). España: ediciones Rioduero. [Obra original Herder Lexicón. Mathematik].

Vílchez, M. (2014). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O. respecto al concepto de número entero. Estudio exploratorio.* Trabajo fin de master. Universidad de Granada, España.

Vinogradov, I. (1977). *Fundamentos de la teoría de los números* (2a Ed.). URSS, Moscú: Mir.

Warusfel, A. (1972) *Diccionario razonado de matemáticas: de las matemáticas clásicas a la matemática moderna* (J. Tortella y C. Azcarate, Trad.). Madrid, España: Tecnos, S.A. [Obra original Dictionnaire Raisonné de Mathemátiques, 1966. Paris, Francia: Editions du Seuil].

Xie, Y. y Sharma, P. (2011). Exploring evidence of reflective thinking in student artifacts of blogging-mapping tool: A design-based research approach. *Instructional Science*, *39*(5), 695–719.

Zazkis, R. (2001). Múltiplo, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Relime, 4*(1), 63-92.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996a). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5)*,* 540-563.

Zazkis, R., y Campbell, S. (2006). Number theory in mathematics education research: Perspectives and prospects. En R. Zazkis y S.R. Campbell (Eds), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 1-17). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996b). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 207-218.

Zazkis, R. y Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. En A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zazkis, R. y Liljedah, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164-186.

Zazkis, R., Sinclair, N. y Liljedahl, P. (2013). *Lesson play in mathematics education: A tool for research and professional development.* New York, NY: Springer.

Índice de anexos