**Universidad de Granada**

**Departamento de Didáctica de la Matemática**

**Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática**

TESIS DOCTORAL

# PERFILES DE ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA RELACIONADOS CON EL SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO EN EXPERIENCIAS CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Danellys Clementina Vega Castro

**Granada, 2013**

Danellys Clementina Vega Castro
Depósito Legal:
ISBN:
Universidad de Granada

**Universidad de Granada**

**Departamento de Didáctica de la Matemática**

**Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática**

TESIS DOCTORAL

# PERFILES DE ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA RELACIONADOS CON EL SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO EN EXPERIENCIAS CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de la Doctora Encarnación Castro Martínez y la Doctora Marta Molina González del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Danellys Clementina Vega Castro para optar al grado de Doctora en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Danellys Clementina Vega Castro

Vº Bº del Director

Fdo.: Encarnación Castro Martínez		Fdo.: Marta Molina González

El trabajo que se presenta en este documento pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctora dentro del programa de doctorado “Didáctica de la Matemática” impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Este trabajo se ha realizado en el Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en Educación Matemática” del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

La investigación que se recoge en este documento está patrocinada por el Instituto para la Formación y el Aprovechamiento de Recursos Humanos (IFARHU) que organiza la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de la República de Panamá. La beca de la doctoranda tiene una duración de cuatro años, a partir del 1 de octubre de 2009 a 1 de octubre de 2013, bajo el Reglamento del Programa de Becas Doctorales y Postdoctorales 2005-2010 para la Formación de Investigadores de Panamá, aprobado por el Consejo Nacional del IFARHU mediante Resolución Nº 11 de 21 de julio de 2005.

“El álgebra es muy generosa.

Siempre nos dice más de lo que le preguntamos”

D’Alembert.

*Dedicada especialmente a la memoria de mi Padre*

*Domingo Luis Vega como honra por su loable labor en beneficio de la población de Los Higos de Macaracas y comunidades circunvecinas.*

# Agradecimientos

A Dios y la Virgen, fuentes de luz que inspira y que ilumina en este caminar por la vida.

A mis Directoras de tesis Dª Encarnación Castro y Dª Marta Molina. A Encarna, mi más profundo agradecimiento por su ardua labor como directora, por su disposición para orientarme en todo momento, por haberme permitido trabajar bajo su tutela y por su sabiduría que hicieron posible la culminación de este trabajo. A Marta mis más sinceros agradecimientos por tan valiosos aportes y sugerencias brindadas, especialmente por mantenerme informada de todos los artículos relacionados a mi tema de investigación. A las dos gracias mil por vuestra excelente labor de dirección.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada mi eterna gratitud por concederme el privilegio de recibir sus enseñanzas y orientaciones.

A los profesores Dr. Enrique Castro, Dr. Isidoro Segovia y Dr. José Luis Lupiañez infinitas gracias por sus puntuales orientaciones para la mejora de este trabajo.

A la Profesora Purificación Vega Álvarez del I.E.S. Ángel Ganivet en Granada, mi eterna gratitud por su sincera disponibilidad para realizar la experiencia con su grupo de estudiantes.

A la Doctora Gabriela Valverde “Gaby”, por ser una gran amiga y por su notable contribución hacia mi persona, mi gratitud infinita.

A los Doctores Jorge Sánchez, Guillermo Lagomasino y José Manuel Rodríguez de la Universidad Carlos III, mi gratitud por su colaboración para la efectividad de estos estudios.

Al Doctor Jon Star de la Universidad de Harvard, por su valiosa aportación a este trabajo.

A las hermanas Patricia y Rosario Jiménez “Paty y Charo”, por haber sido luz en un momento de oscuridad, mi eterna gratitud.

Al Profesor Uvaldino Sandoval, al Dr. Maximino Espino y a la Dra. Rosemary Acosta, quiero expresarles mis más sinceros agradecimientos por toda su colaboración para que estos estudios se hiciesen realidad.

A Fabiola y Kika mi eterna gratitud por darme siempre ánimo y estímulo para seguir adelante.

A todos mis amigos y compañeros de máster y doctorado María Magdalena, Marlene, Mariel, Fany, Lilia, Rosa, Nielka, Luis, Pepe, Miguel, Emilse, Elena, Marguerita, Ana, Ángel, José Antonio, Gustavo y Pedro por la compañía y amistad brindada.

A mis amigos de la Universidad Carlos III, Fernando, Cacoq, Anier, Edy, Jorge, Luis, Herber, Ángela, Beny y Dariana, aprovecho esta ocasión para expresarles mi gratitud por todo el apoyo que me brindaron al dar mis primeros pasos en España.

A mi Madre Clementina Castro, cuya sabiduría y fortaleza han influido en mí, de una forma que no puede expresarse con palabras.

A todos mis hermanos por su cariño y apoyo incondicional, especialmente a Domingo Luis por estar allí cuando más lo necesitaba.

A mis maravillosas hijas Mileyka e Iluzka por ser la fuerza que ha motivado el logro de este objetivo y por su contribución en este trabajo.

A aquellas personas que en una u otra forma han colaborado en este trabajo, mi más sincero agradecimiento.

El doctorando **Danellys Clementina Vega Castro** y los directores de la tesis **Encarnación Castro Martínez** y **Marta Molina González**. Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 19 de Septiembre de 2013

Director/es de la Tesis

Fdo.: Encarnación Castro Martínez

Fdo. Marta Molina González

Doctorando

Danellys C. Vega C

Fdo.: Danellys Clementina Vega Castro

## RESUMEN DE LA TESIS PARA LA BASE DE DATOS TESEO

**Título de la tesis:** Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas

**Doctoranda:** Danellys Clementina Vega Castro

**Directoras:** Encarnación Castro Martínez y Marta Molina González

### Resumen

El trabajo de investigación correspondiente a esta tesis doctoral se centra en una forma concreta de trabajar el álgebra escolar, fomentando la vertiente relacional del álgebra a través de la consideración de la estructura de las expresiones algebraicas conocidas como igualdades o identidades notables. La investigación realizada cae bajo la metodología de la investigación de diseño, dentro de la misma consiste en un experimento de enseñanza centrado en el estudio del sentido estructural de una muestra intencional de sujetos que trabajan tareas en las que aparecen identidades notables. En concreto los objetivos que nos planteamos son los siguientes:

O1. Avanzar en la clarificación del constructo Sentido Estructural y sus descriptores;

O2. Estudiar el procedimiento de elaboración, puesta en práctica y análisis de una intervención en el aula para trabajar las identidades notables desde una perspectiva centrada en la estructuras de estas expresiones;

O3. Investigar cómo se desenvuelven los estudiantes en el trabajo con identidades notables desde la perspectiva estructural;

O4. Construir un Perfil de Sentido Estructural de un grupo de alumnos de Educación Secundaria al trabajar tareas sobre Expresiones Algebraicas que involucran Identidades Notables.

Parte de nuestro interés por estudiar el constructo sentido estructural y la relación que este constructo conlleva con la resolución de tareas con expresiones algebraicas que involucran

identidades notables, radica en la búsqueda de situaciones de aprendizaje que puedan ayudar a los estudiantes a superar la diversidad de dificultades que confrontan cuando trabajan con estructuras algebraicas que involucran esta temática. A su vez, y con igual interés, encontrar técnicas de enseñanza para que los docentes de educación secundaria dispongan de ellas y les ayuden a trabajar de forma algo más exitosa éste tópico.

El marco teórico de esta investigación está montado sobre tres ideas fundamentales que dan lugar a tres partes diferenciadas en el capítulo. La primera trata del álgebra escolar, elementos de la misma y una reflexión concerniente a la enseñanza y el aprendizaje de dicha materia. La segunda parte trata de la dualidad conceptual y procedimental del conocimiento matemático y la denominación de sentido y estructura. En la tercera parte, se concreta el significado de sentido estructural, terminando con la presentación de un conjunto de descriptores del sentido estructural elaborados a partir de las lecturas reflexivas realizadas que es uno de los primeros aportes de este trabajo y da respuesta al primero de los objetivos planteados (O1).

El experimento de enseñanza realizado consta de cinco sesiones de trabajo en el aula en las que se propuso a los estudiantes tareas conformadas por actividades con expresiones numéricas y algebraicas para su trabajo individual, que estuvieron seguidas de puestas en común dirigidas a promover el reconocimiento de relaciones en la estructura de las expresiones y el uso de las igualdades notables. Para el diseño de las tareas se consideraron tres variables: a) cuatro identidades algebraicas: cuadrado de la suma, cuadrado de la resta, suma por diferencia y propiedad distributiva; b) acciones implicadas en las tareas: comprobar, modificar, completar, generalizar y generar; c) complejidad de las expresiones: simples o compuestas, enteras o fraccionarias. Para cada sesión vamos aumentando gradualmente el nivel de complejidad de las tareas, pasando así del tratamiento con expresiones numéricas a expresiones algebraicas, así como del manejo con expresiones enteras a expresiones fraccionarias. Cada sesión constituye una capacitación para la siguiente de modo que al finalizar la quinta sesión los estudiantes estén preparados para reconocer la presencia de una identidad notable dentro de una igualdad dada y actuar sobre la misma aplicando la estructura interna correspondiente. La descripción, justificación y valoración de la propuesta de enseñanza puesta en práctica, es otro de los aportes de este trabajo dando respuesta al segundo de los objetivos propuestos (O2).

Para el análisis de las producciones escritas de los estudiantes y de las grabaciones de aula se han elaborado categorías que distinguen grados en que el estudiante utiliza las relaciones internas de la expresión para resolver la tarea propuesta haciendo uso de la estructura de la misma. Estas categorías permiten describir el desempeño de cada estudiante en cada una de las tareas en cuanto al sentido estructural que pone de manifiesto. Así mismo se identifican los errores más comunes.

Partiendo de este análisis se establecen siete perfiles en cuanto al sentido estructural que ponen de manifiesto los estudiantes. Estos perfiles aparecen caracterizados mediante una representación gráfica y una descripción cualitativa en relación con los descriptores de sentido estructural enunciados en el marco teórico.

# Índice de Contenidos

# Índice de Tablas

# Índice de Figuras

# Presentación

El documento presente recoge el informe correspondiente a la investigación realizada por su autora Danellys Clementina Vega Castro, para optar al grado de Doctor por la Universidad de Granada, en el Programa de Doctorado “Didáctica de la Matemática”. Se trata por tanto de una Tesis Doctoral. El estudio, que se describe a lo largo del documento, se ha desarrollado durante los cursos académicos 2010/2013 en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, bajo la dirección de las doctoras Dª. Encarnación Castro y Dª. Marta Molina.

La investigación tiene sus inicios en el curso académico 2009-2010 en el que la autora de la misma realizó los estudios de máster en Didáctica de la Matemática. El Trabajo de Fin de Máster realizado que lleva por título “Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables (Vega-Castro, 2010) versó sobre el sentido estructural puesto de manifiesto por una muestra intencional de sujetos de educación secundaria (primero de bachillerato). En el mismo se llegaron a distinguir diferentes niveles en el sentido estructural de dichos estudiantes.

Esta tesis doctoral continúa pues la investigación llevada a cabo en 2010 y que dio lugar al Trabajo Fin de Máster. El primer trabajo focalizado en el estudio de esta problemática nos permitió ahondar en la comprensión de los escolares sobre trasformaciones de expresiones algebraicas basándose en la estructura de las mismas y nos motivó a seguir indagando en la misma temática.

Al ampliar el horizonte de investigación, para esta tesis, nos interesamos además en estudiar el sentido estructural que muestran un grupo de estudiantes de secundaria en unas tareas elegidas para tal fin, trabajadas en el aula mediante una metodología determinada. Nuestro interés nos lleva a elegir, para la investigación, una metodología de diseño y en la misma, la realización de un experimento de enseñanza.

Este documento está articulado en ocho capítulos en los cuales se recoge la información que detallamos a continuación.

Capítulo 1. En este capítulo se recoge el problema, los objetivos y el diseño de la investigación. Se justifica el interés de la realización de este estudio en base a cuatro pilares: desde el área de Didáctica del Álgebra, por la experiencia personal de la

Investigadora, la consideración curricular del álgebra escolar y los trabajos realizados por el grupo de investigación que respalda a las directoras de este trabajo.

Capítulo 2. Se revisan en este capítulo los antecedentes o trabajos previos más relacionados con esta investigación, considerando diferentes categorías de los mismos e indicando cuales son los más cercanos y, que nos han permitido establecer el estado actual de la cuestión que ha centrado nuestro interés investigador.

Capítulo 3. Este capítulo está dedicado a presentar el marco teórico que sustenta la investigación. El marco teórico está montado sobre tres ideas fundamentales que dan lugar a tres partes diferenciadas en el capítulo. La primera trata del álgebra escolar, elementos de la misma y una reflexión concerniente a la enseñanza y el aprendizaje de la materia. La segunda parte trata de la dualidad conceptual y procedimental del conocimiento matemático y la denominación de sentido y estructura. En la tercera parte se concreta el significado de sentido estructural, finalizando con la presentación de un conjunto de descriptores del sentido estructural producto de nuestra reflexión de la literatura revisada y del trabajo de investigación que hemos realizado durante estos años de investigación con dicho constructo.

Capítulo 4. El capítulo cuatro está dedicado a la metodología de la investigación y a describir el estudio realizado. Se recoge por tanto, la metodología utilizada en el estudio y los criterios que han delimitado las acciones realizadas y las decisiones tomadas sobre la investigación, con intención de proporcionar coherencia al trabajo.

Capítulo 5. En este capítulo 5, se recoge la descripción de las cinco sesiones de que consta el experimento de enseñanza realizado. Para cada una de las sesiones se hace un recorrido por las etapas consideradas en los procesos de los Experimentos de Enseñanza: preparación de la sesión, implementación de la misma y reflexión sobre lo ocurrido.

Capítulo 6. Se muestra en este capítulo el análisis retrospectivo de lo sucedido en las sesiones, análisis propio de los experimentos de enseñanza. Se hace una presentación del análisis de los datos obtenidos de las actuaciones de los estudiantes, que se lleva a cabo mediante las categorías establecidas para tal fin.

Capítulo 7. Se trata de un análisis descriptivo del desempeño de todos y cada uno de los estudiantes que han formado parte de este estudio, como sujetos. El análisis se hace doblemente, por una parte una representación gráfica muestra el desempeño del estudiante de acuerdo a las categorías de análisis y por otro un análisis cualitativo en relación con los descriptores enunciados en el marco teórico.

Capítulo 8. El último capítulo presenta las conclusiones construidas a partir de los resultados obtenidos en esta investigación. Las mismas las iniciamos respondiendo a preguntas y objetivos de investigación propuestos en el Capítulo 1. Posteriormente aportamos algunas conclusiones, limitaciones de este trabajo, líneas abiertas de investigación con posibilidades de continuación y principales aportes de la investigación.

# Capítulo 1. Problema, objetivos y diseño de la investigación

El trabajo de investigación correspondiente a esta tesis doctoral se centra en una forma concreta de trabajar el álgebra escolar, fomentando la vertiente relacional del álgebra a través de la consideración de la estructura de las expresiones algebraicas conocidas como igualdades o identidades notables. Con esta investigación tratamos de dilucidar si un trabajo sistemático, en el aula, el que se haga hincapié en la estructura de las expresiones, permite a los estudiantes atenuar alguna de las dificultades que se detectan en la práctica y que son destacadas por las investigaciones en el área. A su vez, tratamos de explicar cómo construyen los estudiantes sentido estructural en el desempeño de las tareas diseñadas para el trabajo. Más concretamente, nos centramos en el estudio del sentido estructural de una muestra intencional de sujetos que trabajan tareas en las que aparecen identidades notables.

Si bien en al capítulo 3, dedicado al marco teórico, se precisa qué entendemos por sentido estructural; para proporcionar sentido al discurso, indicamos en este punto que denominamos sentido estructural a la competencia cognitiva que permite tratar las expresiones, tanto aritméticas como algebraicas, de forma flexible, prescindiendo de procedimiento de cálculo en situaciones que lo permitan. El sentido estructural requiere atender a relaciones internas que presentan las expresiones (entre valores, símbolos, operaciones…, presentes en las mismas) cuya consideración da lugar a la flexibilidad apuntada en el tratamiento de las expresiones.

En este capítulo justificamos el interés de este estudio y concretamos el problema de investigación presentando las preguntas de investigación que lo motivaron y los objetivos de investigación considerados. Así mismo describimos el diseño de la investigación y argumentamos su valor potencial y viabilidad.

## *1.1 Justificación del tema de estudio*

La justificación del interés de esta investigación la basamos en cuatro pilares: la investigación en Didáctica del Álgebra, experiencia personal de la Investigadora, el currículo de matemáticas y los trabajos que vienen realizándose en el grupo de investigación en que se desarrolla este trabajo.

En la investigación sobre álgebra escolar, se han generado gran cantidad de trabajos que tratan de desentrañar, lo más ampliamente posible, la problemática del aprendizaje del álgebra, las causas que dan origen a la misma y cómo encontrar soluciones que atenúen dicha problemática. Entre las nociones que producen dificultad se señalan la clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes sienten como necesaria; el lenguaje algebraico al que no le "ven" sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre-generalización de ciertas propiedades; la preservación de la jerarquía de la operaciones para la que no encuentran justificación; el uso de paréntesis; la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras (Castro, 2012).

Parte de nuestro interés por estudiar el constructo sentido estructural y la relación que este constructo conlleva con la resolución de tareas con expresiones algebraicas que involucran identidades notables, radica en la búsqueda de situaciones de aprendizaje que puedan ayudar a los estudiantes a superar la diversidad de dificultades que confrontan cuando trabajan con estructuras algebraicas que involucran esta temática. A su vez, y con igual interés, encontrar técnicas de enseñanza para que los docentes de educación secundaria dispongan de ellas y les ayuden a trabajar de forma algo más exitosa éste tópico. Como investigadoras, nos motiva poder contribuir al estudio de este tema, para el cual consideramos que nuestro trabajo supone un avance importante en el que podrán apoyarse otros investigadores para continuar desarrollando futuros trabajos de investigación. Nos interesa como educadoras preocupadas por el mejoramiento de la calidad de educación poder contribuir al estudio de este tema, proporcionando a los profesores de educación secundaria un material que pueden usar en su trabajo; así como los resultados que obtengamos sobre el conocimiento del desempaño de los estudiantes en el mismo.  .

El hecho de permanecer laborando durante diecisiete años como Profesora de Matemáticas en educación secundaria en varios colegios de mi país, República de Panamá, me permitió observar la gama de dificultades que confrontaban los estudiantes de tercer año de educación secundaria cuando se les impartía el tema de las identidades notables. Pude observar como estos mismos estudiantes posteriormente en niveles superiores (IV, V y VI año de Educación Secundaria), presentaban dificultades para trabajar estas identidades cuando requerían hacer aplicaciones de las mismas. El tema de las identidades notables se identificaba con el bajo rendimiento académico que presentaban los estudiantes en las evaluaciones bimestrales, se discutía constantemente en las reuniones realizadas por el Departamento de Matemáticas del colegio donde trabajaba y se organizaban distintas actividades didácticas implementando nuevas y diversas técnicas para mejorar la enseñanza y aprendizaje de estas identidades; y tal vez el aprendizaje en los estudiantes mejoraba, pero el problema continuaba sobre todo en los niveles más altos (IV y V año). En este sentido cabe destacar mi preocupación personal por ampliar mi comprensión de las dificultades que encuentran los estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato en este ámbito del conocimiento y tratar de encontrar formas de atenuarlas.

El tercer pilar se relaciona con el currículo. La justificación por estudiar aspectos relacionales del álgebra puede hacerse desde recomendaciones curriculares como la que plantea el NCTM (2000) en el estándar para la educación matemática para la etapa 6-8**:** **“**iniciar la comprensión conceptual de los diferentes usos de las variables, explorar relaciones entre expresiones simbólicas y, reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas” (p. 226). Se señala que “los alumnos de los niveles medios deberían aprender el álgebra como un conjunto de conceptos y habilidades referentes a la representación de relaciones cuantitativas, y como una forma de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones (...). Y aprender a reconocer y generar expresiones equivalentes” (p. 227). En otro punto se señala “Los alumnos deberían ser capaces de operar con soltura con expresiones algebraicas, de combinarlas y de cambiar su forma. Estas destrezas constituyen la base de la habilidad para hallar las soluciones de una ecuación, un objetivo que siempre ha sido central en el currículo de Álgebra” (p. 305). Además para la etapa 9-12 el NCTM (2000) destaca como expectativas de aprendizaje “comprender el significado de formas equivalentes de expresiones”, además de que el estudiante escriba formas equivalentes de expresiones algebraicas (p.300).

Por su parte el currículo español (Real Decreto 1631/2006), para fomentar el desarrollo de conocimiento matemático en Educación Secundaria específicamente en álgebra propone que: “El trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre lenguajes son fundamentales en los primeros cursos (p.751)”. El currículo español (Real Decreto 1467/2007), también señala que: “No se trata de que los estudiantes posean muchas herramientas matemáticas, sino las estrictamente necesarias y que las manejen con destreza y oportunidad, facilitándoles las nuevas fórmulas e identidades para su elección y uso. Nada hay más alejado del 'pensar matemáticamente' que una memorización de igualdades cuyo significado se desconoce, incluso aunque se apliquen adecuadamente en ejercicios de cálculo (p.68 [45448])". De acuerdo al currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, se señala: "La adecuada utilización progresiva de símbolos y expresiones contribuirá al desarrollo natural de las destrezas algebraicas, que se facilitará con la lectura e interpretación simbólica de las situaciones problemáticas que se planteen y, en sentido inverso, con la traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados algebraicos (p.53-54)".

Con estas referencias curriculares hemos querido dejar constancia de que desde el punto de vista curricular se considera de interés el aprendizaje del álgebra, no como algo a aprender de memoria, sino con comprensión.

En cuanto a la temática sobre la que versa (identidades notables), hacemos constar la gran importancia que estas expresiones algebraicas tienen en los programas de estudio de matemáticas a nivel de educación secundaria, dadas sus frecuentes aplicaciones en temas posteriores al curso básico de estudio de las mismas. Entre dichas aplicaciones se señalan aquellas que corresponden al área de las matemáticas como: la simplificación de expresiones, operaciones con fracciones algebraicas, límites, entre otros temas; aquellas que corresponden al área de la física; y aquellas que corresponden a posteriores estudios superiores y/o de nivel universitario.

Un cuarto pilar que justifica nuestro trabajo lo constituyen los trabajos que vienen realizándose dentro del grupo de investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, en el que el mismo se inserta. Una de las líneas del grupo mencionado está centrada en el álgebra escolar habiéndose realizado en el seno de la misma una serie de trabajos los cuales permiten enmarcar esta tesis. Dichos trabajos muestran que no se trata de un trabajo puntual y aislado sino que forma parte de una línea de investigación centrada en la problemática de la enseñanza/aprendizaje del álgebra.

A continuación se enumeran los trabajos antecedentes a esta tesis desarrollados en el seno del grupo de los cuales se han derivado variadas publicaciones y contribuciones en congresos.

- *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis doctoral. Encarnación Castro (1994).

- *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado.* Trabajo de investigación Tutelada. Marta Molina (2004).

- *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Marta Molina (2006).

- *Proceso de generalización que realiza futuros maestros*. Memoria de Investigación Tutelada. Paola Trujillo **(**2008).

- *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Trabajo fin de Máster. Danellys Vega Castro (2010).

- *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria*. Trabajo fin de Máster. Susana Rodríguez Domingo (2011).

- *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización*. Trabajo fin de Máster. Eduardo Merino (2012).

## *1.2 Preguntas y objetivos de Investigación*

Dado nuestro interés por el tema señalado y habiendo realizado una revisión de la literatura que muestra investigaciones en este ámbito, se nos plantean una serie de interrogantes, procedentes en algunos casos de nuestro interés investigador y en otros de las líneas que han quedado abiertas en otras investigaciones. Entre dichos interrogantes destacamos cinco cuestiones que nos conducen a plantear los objetivos de investigación de este trabajo:

P1. ¿Las dificultades que muestran los estudiantes con el álgebra, señaladas en investigaciones, se reflejan en el trabajo con identidades notables?

P2. ¿Los estudiantes trabajan con las identidades notables considerándolas como un todo, percibiendo su estructura, o necesitan de un proceso operatorio en el tratamiento de las mismas?

P3. ¿El desempeño en expresiones numéricas y algebraicas desde una perspectiva estructural presenta similares resultados en los estudiantes?

P4. ¿Una enseñanza centrada en las relaciones internas, numéricas y algebraicas, presentes en identidades notables fortalecerá la comprensión de las estructuras de dichas identidades?

P5. ¿Una enseñanza donde las expresiones sean gradualmente introducidas, desde más simples a algo más complejas llevará a ver identidades notables en expresiones con elementos no simples (compuestos)?

Estas, entre otras, preguntas nos movieron a establecer los objetivos generales de nuestra investigación como sigue.

## Objetivos Generales

Nos planteamos cuatro objetivos generales en esta investigación

O1. Avanzar en la clarificación del constructo Sentido Estructural y sus descriptores.

O2. Estudiar el procedimiento de elaboración, puesta en práctica y análisis de una intervención en el aula para trabajar las identidades notables desde una perspectiva centrada en la estructuras de estas expresiones.

O3. Investigar cómo se desenvuelven los estudiantes en el trabajo con identidades notables desde la perspectiva estructural.

O4. Construir un Perfil de Sentido Estructural de un grupo de alumnos de Educación Secundaria al trabajar tareas sobre Expresiones Algebraicas que involucran Identidades Notables.

El primer objetivo tiene relación con aspectos teóricos del constructo sentido estructural, se tratará en los capítulos de marco teórico en donde se precisarán los conceptos relacionados con dicho constructo así como los descriptores que consideramos para el mismo. Los objetivos restantes tienen que ver con el trabajo empírico a realizar en el aula mediante un experimento de enseñanza.

### Objetivos Específicos

Para dar cumplimiento a los objetivos generales señalados nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

Respecto a O1 nos proponemos

O1.1. Realizar una búsqueda exhaustiva sobre la literatura existente referida al constructo sentido estructural, analizarla y aportar nuevas ideas sobre el constructo sentido estructural, fruto de nuestra reflexión.

O1.2. Contribuir con nuevos descriptores sobre el sentido estructural a los ya aportados por otros autores, en el empeño de realizar la caracterización de dicho constructo.

Respecto a O2 planeamos

O2.1. Seleccionar una colección de tareas, que involucren identidades notables, cuya ejecución haga posible el uso de la estructura de las mismas.

O2.2. Organizar y distribuir las tareas en secuencias de aprendizaje ordenadas por la complejidad que puedan presentar a los estudiantes.

O2.3. Preparar un sistema de categorías con las que analizar el desempeño de los estudiantes.

Respecto a O3 consideramos

O3.1. Caracterizar el sentido estructural puesto de manifiesto en cada una de las tareas que realizan los estudiantes.

O3.2. Analizar para cada una de tareas el desempeño de los estudiantes en relación con los descriptores del sentido estructural.

O3.3. Analizar los errores cometidos en el desempeño de las tareas por los estudiantes.

Respecto a O4 abordamos

O4.1. Determinar si hay patrones comunes de comportamiento en los estudiantes al enfrentarse a las tareas propuestas.

O4.2. Caracterizar cada patrón obtenido como un perfil de sentido estructural.

## *1.3 Diseño de la investigación*

El diagrama que se inserta a continuación (Figura 1.1) presenta una visión general sobre el diseño y desarrollo de esta investigación, si bien en el capítulo sobre metodología de investigación se hará una descripción más detallada.

1. Toma de decisión sobre el asunto a investigar (Sentido estructural de estudiantes de educación secundaria).
2. Toma de decisión sobre la metodología de investigación (Investigación de diseño, experimento de enseñanza).
3. Preparación del experimento de enseñanza (Preparación y organización de cinco sesiones, metodología de aula).
4. Implementación del experimento de enseñanza (Desarrollo de las sesiones).
5. Análisis retrospectivo de los datos obtenidos (Análisis cualitativo de los datos).

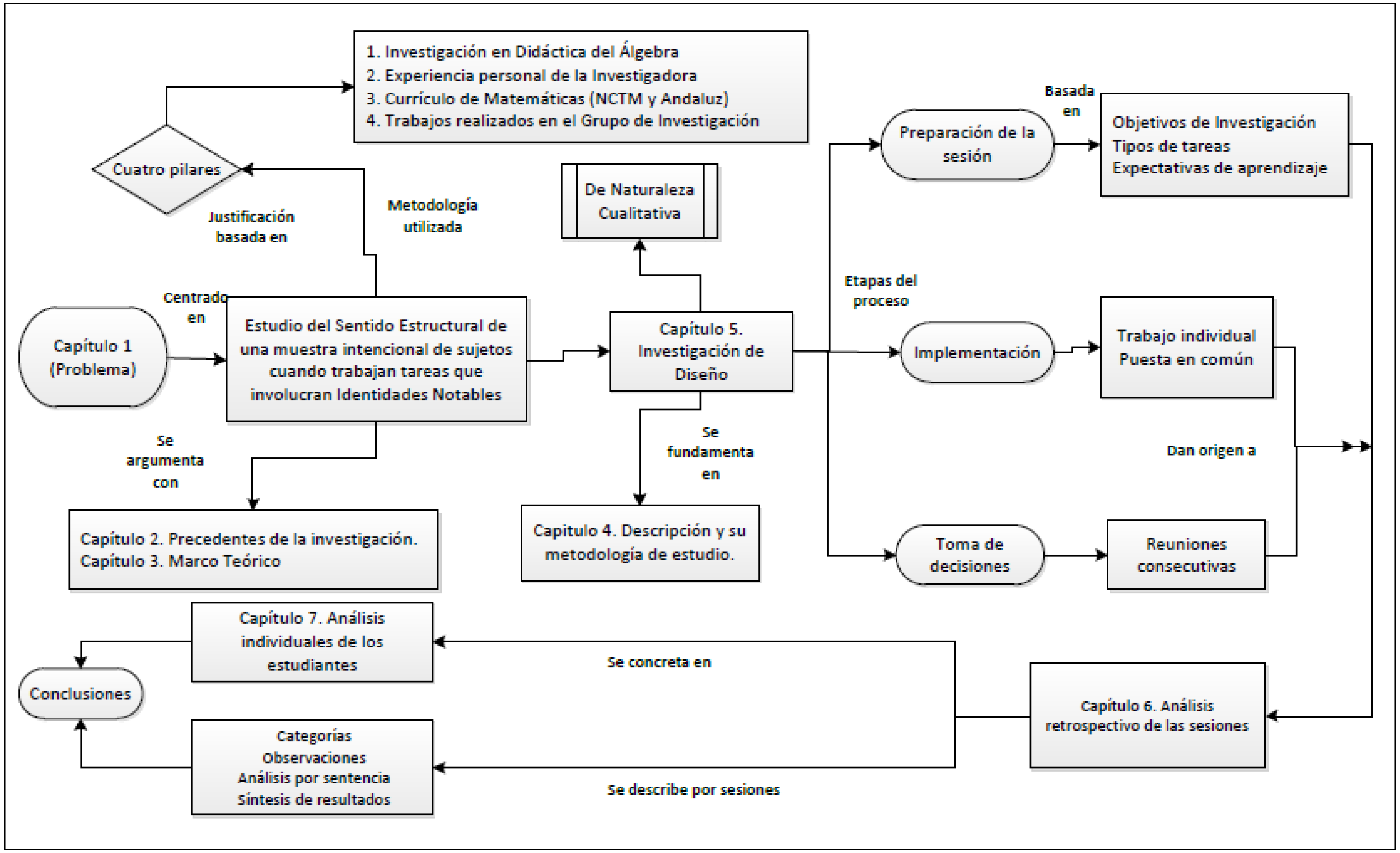



*Figura 1.1.* Visión general sobre el diseño y desarrollo de la investigación.

## 1.4 Valor potencial de la Investigación

Basadas en la diversidad de dificultades presentadas por los estudiantes de educación secundaria cuando trabajan con expresiones algebraicas (como se recogerá en los antecedentes de este trabajo) entre las que se encuentran las identidades notables, consideramos de interés la realización de esta investigación, la cual proporcionará evidencias sobre la forma en la cual los estudiantes de secundaria abordan tareas en las que dichas identidades están presentes, resolubles utilizando sentido estructural o mediante estrategias de predominio operativo, siendo éstas últimas un modo más complejo e ineficiente de abordar las tareas.

A su vez se trata de contribuir a la mejora de la enseñanza la cual puede incidir en una mejora del aprendizaje y superación de las dificultades, por parte de los estudiantes, con la preparación de una propuesta novedosa de enseñanza para desarrollar en el aula. Por lo dicho, los resultados de esta investigación tienen relevancia social pues beneficiarán tanto a profesores como estudiantes en el ramo educativo.

También tiene relevancia científica. Consideramos que los resultados serán de interés para otros investigadores que trabajen sobre este tema, por el avance que supondrá para el mismo el conocimiento del constructo sentido estructural y sus descriptores, dicho constructo no ha sido caracterizado aún con precisión. Tratamos de aportar al mismo mayor precisión no solo reflexionando teóricamente sino también mediante los resultados empíricos obtenidos ya que tanto el tipo de tareas que proponemos a los estudiantes de secundaria como la organización de las mismas en las diferentes sesiones se pueden generalizar a otras áreas de la matemática como puede ser la trigonometría, donde las estructuras compuestas por identidades trigonométricas se caracterizan por las mismas dificultades que las identidades notables., como las evidencias sobre la manera de trabajar de los estudiantes, así como por los interrogantes abiertos que supuestamente quedarán.

Por último le asignamos una relevancia metodológica ya que se incide en la metodología de diseño y se contribuye con un ejemplo más a cómo la misma se puede utilizar en la investigación educativa.

## 1.5 Viabilidad del estudio

Cuando se hizo el diseño de la investigación, comprobamos que su realización era viable. Teníamos la posibilidad de contar con gran cantidad de documentación sobre el tema a la que consultar. Contábamos con la colaboración de un centro de secundaria cuya profesora se prestó a colaborar en todo momento en la investigación, sobre todo en cedernos horas de tiempo de su programación para realizar el experimento y recoger los datos, así como la aceptación de los padres de los estudiantes a la participación de sus hijos en el mismo.

En cuanto al costo en materiales y herramientas para realizar la investigación, no era necesario un gasto excesivo en la misma, ya que disponíamos de grabadoras, cámara de video, facilitadas por el departamento Didáctica de la Matemática y el gasto de papel para realizar los protocolos que recogían las tareas con las cuales los estudiantes nos ayudarían a realizar la investigación.

# Capítulo 2. Antecedentes de esta investigación

La cantidad de investigación - centrada en el álgebra escolar - realizada por la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática, ha sido más abundante en las últimas cuatro décadas que en épocas anteriores. Un ejemplo del tipo de investigación realizado se aprecia en la síntesis que hace Kieran (2006) de los trabajos sobre álgebra presentados en el PME (Psychology of Mathematics Education), desde la 1ª conferencia celebrada en 1977 hasta la 29ª celebrada en 2005. La autora, en dicha síntesis, muestra cómo la investigación en la enseñanza y aprendizaje del álgebra ha evolucionado, a nivel internacional, durante ese tiempo estudiado, produciéndose algunos cambios importantes según se revela en las aportaciones al citado simposio (Tabla 2.1).

Señala Kieran, que las investigaciones previas tendían a centrarse en los conceptos y procedimientos algebraicos, la resolución de problemas de álgebra y las dificultades de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra. El papel de las letras y los símbolos en las expresiones algebraicas fueron los primeros aspectos que centraron la atención de la investigación en álgebra; en este periodo los marcos teóricos para el análisis de datos de la investigación rara vez fueron más allá de la teoría piagetiana. Con el tiempo, la investigación del álgebra se amplió y abarcó otros aspectos, como el uso de herramientas tecnológicas, diferentes perspectivas sobre el contenido del álgebra; los marcos teóricos que permitían reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza fueron más amplios y variados, ocurriendo algo similar con las herramientas para el análisis de datos.

En el trabajo del que venimos hablando, Kieran organiza las investigaciones en tres grupos temáticos como se recogen en la Tabla 2.1.

Las concepciones del álgebra fueron cambiando durante este periodo de tiempo, desde una concepción del álgebra como lenguaje, a considerar la modelización, pasando por el álgebra como resolución de problemas, consideración de las estructuras, estudio del cambio, las funciones, y estudio de patrones y generalización.

En cuanto a los marcos teóricos, evoluciona desde marcos puramente piagetianos hasta una perspectiva sociocultural pasando por el constructivismo o tomando la historia como base.

*Tabla 2.1.* Principales temas en los 30 años de historia de investigación del álgebra.

| Periodo de tiempo | Grupos temáticos que surgen |
|---|---|
| 1977-2006 | 1. Interpretación de símbolos y signos. Transición de la aritmética al álgebra. Variables e incógnitas. Ecuaciones y resolución de ecuaciones. Resolución de problemas algebraicos. Análisis y detección de errores. |
| Mediados de los años 1980 a 2006. | 2. Uso de herramientas tecnológicas. Consideración de múltiples representaciones. Enfoque centrado en la generalización.<br>Estudio de las funciones y del cambio. Modelización de problemas reales. Desarrollo de comprensión de los conceptos algebraicos. Generalización y demostración. |
| Mediados de los años 1990 a 2006. | 3. Pensamiento algebraico de los estudiantes de primaria. Predominio de estudios centrados en el profesor. Introducción del álgebra en educación primaria (Early-Algebra). Modelización dinámica de situaciones físicas y otros escenarios entornos dinámicos del álgebra dinámica. |

En este capítulo, si bien tenemos en consideración el citado trabajo de Kieran, nos centramos en revisar y recoger la investigación realizada en álgebra escolar que consideramos antecedentes para nuestro trabajo. Así referiremos investigaciones centradas en el constructo sentido estructural y, aquellas otras, centradas en errores y dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra; si bien como veremos, las que se centran en el sentido estructural también están mirando las dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje y los errores que cometen. Los principales autores que tomamos como referencia son Hoch y Dreyfus en lo que concierne al sentido estructural y Kieran para la parte más genérica referida al aprendizaje y enseñanza del álgebra escolar. Consideramos que los trabajos de Kieran han inspirado a otros muchos investigadores que han seguido la senda marcada por ella, mirando y profundizando sobre dificultades de aprendizaje y errores que los estudiantes cometen al trabajar aspectos algebraicos.

## *2.1 Investigaciones relacionadas con el sentido estructural*

Muchas de las investigaciones referidas al sentido estructural tratan de ver la relación que puede haber entre las dificultades del álgebra y las de la aritmética, poniendo el foco de atención en las estructuras de las expresiones. Algunos de estos estudios muestran que hay claramente una relación entre las dificultades del álgebra de los estudiantes y su falta de comprensión de las nociones estructurales en aritmética (Liebenberg, Lincheski, Olivier y Sasman, 1998). Entre otros estudios, se obtiene que muchos de los obstáculos producidos en el contexto algebraico no necesariamente reflejen dificultades presentadas en el contexto numérico, sino que probablemente reflejan dificultades asociadas al nuevo contexto (Matz, 1980). En esta línea, Kirshner (2001) señala que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes con el álgebra simbólica y las transformaciones de algunos símbolos, no se deben a una falta de sentido inherente al hecho simbólico o a la arbitrariedad, sino que se deben a la falta de comprensión de la estructura de las expresiones, las propiedades de los sistemas numéricos y la comprensión insuficiente de las normas o propiedades como la asociatividad o distributividad.

Booth (1982) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los estudiantes consideraban equivalentes. En este estudio observó que los estudiantes interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto e ignorando las convenciones del orden de las operaciones. Los estudiantes mostraban haber adoptado la siguiente regla: "Una expresión algebraica se resuelve siempre de izquierda a derecha a menos que el contexto especifique que otra operación debe realizarse previamente". Según lo encontrado, un par de expresiones pueden ser equivalentes en un contexto y no serlo en otro. Este modo de proceder elimina la necesidad del orden de las operaciones o el uso de paréntesis, reglas que sólo son utilizadas, para su práctica, en actividades específicas.

Al juzgar la equivalencia de pares de ecuaciones, cometían errores tales como comparar únicamente uno de los miembros de ambas ecuaciones, asumir que $a + x = ax$, así como exigencias basadas únicamente en aspectos de la estructura superficial de las ecuaciones (“su aspecto es diferente”, “una ecuación tiene más números”, “no tienen los mismos números”).

En otras investigaciones, estudiantes de educación secundaria tienen dificultad para tratar expresiones algebraicas con muchos términos como una sola entidad y no perciben que la estructura externa (superficial) de la expresión $4(2r+1)+7=35$ es la misma que $4x+7=35$, así lo observaron Wagner, Rachlin y Jensen (1984). Por su parte, Pirie y Martin (1997) señalan la tendencia de los alumnos a interpretar las ecuaciones como sucesos temporales, no estáticos, leyéndolos de izquierda a derecha, es decir como una acumulación de ítems y operaciones que se realizan sucesivamente en el tiempo, lo que va en detrimento de la observación de la estructura de la expresión.

Señala Sfard (1991) que la comprensión estructural de una noción abstracta (como pueden ser las expresiones algebraicas) puede ser automáticamente adquirida a través de mucha práctica operacional y se queja de que en el presente los estudiantes no tienen suficiente práctica operativa sobre la evaluación de expresiones matemáticas debido al uso intensivo de las calculadoras. Apunta la posibilidad de que esta sea una de las razones por las que los estudiantes no pueden “ver” la estructura de una expresión matemática y tengan grandes dificultades para la comprensión del lenguaje simbólico.

### 2.1.2 Aportaciones centradas en el sentido estructural

Después de una búsqueda sobre investigaciones algebraicas que se hayan centrado en el sentido estructural, nos aventuramos a afirmar que Hoch y Dreyfus, han sido los investigadores que han difundido más trabajo sobre este constructo; aunque otros investigadores, de épocas anteriores entre los que se encuentran los que hemos recogido, anteriormente, hayan hecho referencia a la importancia del reconocimiento de las estructura de las expresiones algebraicas en el aprendizaje del álgebra escolar, no han centrado su investigación en el sentido estructural.

*Simplificación de expresiones*

En un trabajo de Hoch publicado en 2003 en el que se presenta una primera aproximación de los constructos estructura algebraica, y sentido estructural, señala que muchos estudiantes de la escuela secundaria, incluso los brillantes, tienen dificultades con las técnicas básicas del álgebra, es decir, transformaciones de expresiones (expansión o factorización), y la solución de ecuaciones racionales. A menudo no saben “qué y cuándo hacer”. Por ejemplo: pueden tener dificultades para reconocer que en la ecuación $\left(x^2-4x\right)^2-x^2+4x=6$ , el término $x^2-4x$ aparece en el interior del paréntesis, y también multiplicado por -1, y que es posible operar con el término como con una sola entidad. Esto sería un síntoma de la incapacidad de reconocer la estructura algebraica, o falta de "sentido estructural". Sugiere que las dificultades de los estudiantes con la estructura algebraica pueden deberse, en parte, a falta de comprensión de los conceptos estructurales de la aritmética. Explora el supuesto de que el sistema algebraico utilizado por los estudiantes hereda las propiedades estructurales asociadas con el sistema numérico con el que los estudiantes están familiarizados. Entre las respuestas de algunos estudiantes entrevistados recogen las siguientes: "Por lo general, en mi opinión, todo estudiante que ve fracciones se ocupa inmediatamente con ellas... Por lo general, necesita conseguir un denominador común". "No veo la ecuación como un conjunto. Miro a cada lado por separado y sólo entonces puedo mover las cosas...". "Me deshago de los paréntesis. Cuanto menos paréntesis, mejor".

En otro trabajo Hoch y Dreyfus (2004) se centran en estudiar el sentido estructural del álgebra en estudiantes de secundaria. Analizaron las respuestas dadas por 92 estudiantes de undécimo grado (16 a 17 años) a un cuestionario formado con expresiones algebraicas que debían de transformar en otras equivalentes. Examinaron la presencia y ausencia de paréntesis para ver cómo la utilización de los mismos afectaba al sentido estructural y observaron que la presencia de los paréntesis ayudaba a los estudiantes a percibir expresiones con la misma estructura. Otros objetivos del trabajo fueron investigar si el uso del sentido estructural es más prevalente entre los estudiantes de mayor rendimiento que entre los estudiantes de nivel intermedio, y si los estudiantes son persistentes en el uso del sentido estructural.

Los datos obtenidos como resultado de la realización de las diferentes tareas que eran del tipo de las que se muestran en la Figura 2.1, les permitió afirmar que la tasa global de uso del sentido estructural fue muy baja. En la mayoría de los casos, los estudiantes para resolver las ecuaciones primeramente multiplicaron por el denominador común y más tarde cancelaron términos semejantes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A. | $1-\frac{1}{n+2}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{110}$ | X. | $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$ |
| B. | $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{132}$ | Y. | $\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)-x=6+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$ |
| C. | $1-\frac{1}{n+3}-1+\frac{1}{n+3}=\frac{1}{72}$ | Z. | $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=7+\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$ |

*Figura 2.1*. Tipo de tareas propuestas por Hoch y Dreyfus (2004).

La mayoría de los estudiantes que no emplearon sentido estructural en el desempeño de sus tareas cometieron muchos errores de cálculo o no lograron cancelar, llegando a una solución extraña. Los que utilizaron sentido estructural  obtuvieron la respuesta rápida y precisa.

Los autores esperaban que en aquellas ecuaciones que no había paréntesis, como C y Z, a los estudiantes les resultara más fácil identificar y cancelar términos semejantes, que en aquellas otras que si los tenían como B, lo cual les lleva a señalar que la falta de paréntesis podría haber obstaculizado a los estudiantes el reconocimiento de términos semejantes.

Los autores concluyen que muy pocos de los estudiantes, en este estudio, utilizaron el sentido estructural. Los que lo hicieron no fueron persistentes. Los estudiantes más aventajados lo usaron más que los menos aventajados. Los que utilizaron sentido estructural tenían la respuesta rápida y precisa, evitando posibles errores que a menudo ocurren en los cálculos  largos. La presencia de la variable a ambos lados de la ecuación ayudó en la identificación de términos semejantes. La presencia de los paréntesis también pareció ayudar a los estudiantes a ver la estructura, centrando su atención en términos semejantes y rompiendo la larga cadena de símbolos. Sin embargo, las evidencias sobre el efecto de los paréntesis no son concluyentes, ya que algunos estudiantes parecen preferir eliminarlos de la ecuación.

Los autores cierran su reporte de investigación reflexionando sobre las habilidades presentes en los estudiantes para resolver ecuaciones de forma rápida y sencilla aplicando sentido estructural e indican que es necesaria la capacidad de ver una expresión algebraica o sentencia como una entidad y que para eso hay que detenerse primeramente y observar la ecuación antes de comenzar a hacer automáticamente operaciones para transformar las expresiones algebraicas. La capacidad de reconocer las conexiones mutuas entre las estructuras, podría conducir a la elección de las manipulaciones adecuadas o apropiadas.

También en este trabajo se mostraron a profesores la solución de algunos estudiantes a la ecuación B presentada. Alrededor de la mitad de ellos notaron inmediatamente que el lado izquierdo de la igualdad es cero, pero otros tuvieron que ser ayudados para que descubrieran esa condición de la igualdad. La falta de sentido estructural que muchos profesores mostraron puede considerarse que incide en la enseñanza y puede constituir una de las causas que produce falta de sentido estructural entre los estudiantes.

*Influencia en un contexto no familiar*

En otra de sus publicaciones, Hoch y Dreyfus (2005) señalan como estudiantes que previamente han mostrado dominio en el uso de técnicas algebraicas, a menudo, tienen dificultades en la aplicación de estas técnicas en contextos no familiares. En concreto señalan que muchos estudiantes no pueden utilizar la fórmula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, que es familiar para ellos, para factorizar la expresión $(x-3)^4-(x+3)^4$ que probablemente no han visto antes.

A un grupo de 190 estudiantes (siete clases de décimo grado, nivel intermedio/avanzado), se les pidió que factorizasen la expresión $x^4-y^4$. A un grupo similar de 160 alumnos (seis clases de décimo grado, nivel intermedio/avanzado), se les pidió que factorizasen la expresión $(x-3)^4-(x+3)^4$. Ambos grupos fueron alentados a utilizar la fórmula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. En ambos grupos se planteó la cuestión en el marco de un cuestionario más amplio que contenía varios ejercicios de factorización. La mayor parte del primer grupo (77%) hizo uso de la fórmula y factorizaron $x^4-y^4$ correctamente. Sólo 12 de los 160 estudiantes (7,5%) factorizaron $(x-3)^4-(x+3)^4$ correctamente. En opinión de los profesores la expresión $(x-3)^4-(x+3)^4$ es extraña para los estudiantes, no suele aparecer en libros de texto. El foco principal de este trabajo estuvo puesto en determinar las estrategias de las 101 respuestas que fueron incorrectas. Cuarenta y siete estudiantes no hicieron ningún intento, dejando el espacio en blanco. En la entrevista algunos de los estudiantes indican “no hemos aprendido esto” o “no puedo recordar”. A pesar de que tuvieron éxito en la factorización de expresiones simples, parecían confundidos cuando se les preguntó que significa factorizar. Sus respuestas fueron del tipo “para llegar a algunas fórmulas”. Ninguno de los diez estudiantes entrevistados describió la factorización en términos de escribir una expresión como un producto.

Se mostraron incapaces de relacionar $x-3$ y $x+3$ como entidades y cuando se pidió dar un ejemplo que complicara la fórmula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ sólo daban ejemplos para los términos productos (por ejemplo, $2x$ o $xy$) y nunca sumas (como $x+2$).

*Niveles de sentido estructural*

Hoch y Dreyfus en 2006 proporcionan nuevos datos. Aplicaron un cuestionario a 165 estudiantes de secundaria de nivel avanzado en matemáticas con el objetivo de medir su sentido estructural. Encuentran que algunos estudiantes que habían mostrado anteriormente dominio en el uso de técnicas algebraicas, a menudo, presentaban dificultades en la aplicación de estas técnicas en contextos no familiares.

Establecen tres niveles de sentido estructural: alto, medio y bajo, en los cuales se encuentran los estudiantes en cuanto a las tareas propuestas; aproximadamente un tercio presenta un alto sentido estructural, la mitad manifiestan poseer sentido estructural medio y un sexto, sentido estructural bajo.

Cuando se fijan en las habilidades de manipulación, encuentran que la mayoría de estos alumnos de alto rendimiento no logró hacer más de la mitad de los ejercicios con precisión (aunque no exigieron total precisión ya que no contabilizaron errores menores). Sólo una sexta parte de los estudiantes presentaron altas habilidades de manipulación. Encuentran, así mismo, que la distribución de las habilidades de manipulación no parecen ir acompasadas con los diferentes niveles de sentido estructural de los estudiantes, excepto en el grupo inferior donde las habilidades de manipulación bajas parecen ir de la mano con un bajo sentido estructural.

Interpretan estos resultados conjeturando que los estudiantes llegaron al estado avanzado por haber demostrado su dominio del conjunto de reglas para transformar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones. Este dominio habría sido representado en el tipo de pruebas escritas que incluyen una serie de ejercicios similares a los recientemente trabajados en la clase, para ser resueltos mecánicamente, de acuerdo con las reglas que es la contraposición al pensamiento relacional.

De las soluciones de 382 estudiantes que usan sentido estructural, el 22% contenía más de un error en su manipulación. De las 283 soluciones en las que no se usó sentido estructural, el 94% contenía más de un error. Esto puede ser debido a que el uso del sentido estructural conduce a soluciones más cortas y más eficientes, y por lo tanto deja menos espacio para errores de cálculo. Concluyen que mejorar el sentido estructural también mejora las habilidades de manipulación.

En 2010 bajo el título "Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables" se presentó el trabajo fin de máster realizado por Vega-Castro - bajo la dirección de las doctoras Castro y Molina - centrado, como su título indica, en el sentido estructural que mostraron un grupo de estudiantes de secundaria al trabajar con expresiones en las que las igualdades notables estaban involucradas. Estos estudiantes trabajaron con fracciones algebraicas preparadas especialmente para la ocasión, las cuales contenían identidades notables; las acciones a realizar eran simplificar las fracciones y reproducir otras con la misma estructura que las dadas.

El desempeño de los estudiantes puso de manifiesto, para la primera acción, tres modelos de actuación: el modelo A que llevaba directa y limpiamente a la solución, el B, modelo que llevaba a la solución pero después de realizar cálculos en exceso, y el modelo C que después de muchos cálculos no se llega al resultado deseado (la fracción no se simplifica sino que se hace más amplia). Para la acción de reproducir la estructura de la expresión, los resultados que se obtuvieron se clasificaron en cinco categorías: a) reproducir toda la estructura, b) reproducir separadamente la estructura del numerador o la del denominador, c) reproducir sólo la estructura del numerador, d) reproducir sólo la estructura del denominador de la expresión, e) sin reproducción de estructura. Los análisis finales permitieron determinar niveles de sentido estructural, de los sujetos participantes en el estudio, asociados a sus respuestas en las dos actuaciones indicadas.

En una de las publicaciones de este trabajo que hace referencia a la primera acción, Vega-Castro, Molina y Castro (2012a) señalan que los estudiantes pusieron de manifiesto un mayor uso de sentido estructural cuando las expresiones no incluían términos compuestos, dado que en una de las cuatro tareas 21 estudiantes de 33 resuelven correctamente. Pero que no ocurre igual al tratarse de expresiones no familiares (tres tareas restantes), donde sólo un 26 por ciento de las resoluciones son correctas. Se observó que la presencia de términos compuestos supuso una fuente de dificultad, dado que en esos casos un mayor número de estudiantes cometieron errores al manipular las expresiones que componen la fracción y un menor número de estudiantes reconocieron la posibilidad de cancelar términos tras haber realizado trasformaciones en la fracción.

Las autoras subrayan que ningún estudiante intentó formas alterativas de abordar una misma tarea, lo que sugiere falta de persistencia y flexibilidad en su modo de actuar. Este resultado destaca una de las deficiencias más importantes detectadas en los estudiantes. Señalan que es necesario fomentar en las aulas ambas cualidades, persistencia y flexibilidad, a la hora de abordar la simplificación de expresiones, dado que la utilidad de las transformaciones realizables en una expresión no es en ocasiones clara hasta que se inician dichas transformaciones. Así mismo el hecho de que los estudiantes no realizaran más de un intento de simplificar la fracción, enfatiza la importancia del sentido estructural dado que para informar sobre la utilidad de una manipulación es clave analizar la estructura de las expresiones y relacionarla con estructuras conocidas así como identificar subestructuras en la expresión y buscar relaciones entre las mismas (Vega-Castro, Molina y Castro, 2012a).

Entre las conclusiones indican que un mayor nivel de sentido estructural, aunado al conocimiento de técnicas algebraicas, dota al estudiante de mayor flexibilidad procedimental -una componente crítica de la competencia destacada por Kilpatrick, Swaffor y Findell (2001) –dado que les permite reconocer mayor diversidad de estrategias y elegir entre ellas la más eficiente.

En otra publicación que atiende a las cuatro tareas asignadas en la segunda acción, reproducir estructuras, Vega-Castro, Molina y Castro (2012b) hacen la observación que el sentido estructural fue notablemente variable entre los estudiantes participantes en el estudio. Expresan que sólo seis estudiantes (18%) generaron una nueva expresión algebraica conservando la totalidad de las estructuras en las 4 tareas, diez estudiantes (30%) generan la nueva estructura conservando su totalidad en al menos dos o tres de las tareas, y el resto de los estudiantes, que superaba el 50%, generan la nueva estructura conservando su totalidad en una o ninguna de las tareas. En este caso el número de estudiantes que puso de manifiesto sentido estructural se redujo a la mitad cuando las expresiones incluían términos compuestos. Las autoras consideran que son varios los factores que intervienen en la dificultad para la realización de las tareas propuestas, entre ellos, trabajar con términos compuestos y percibir una o parte de una expresión algebraica como un todo involucrando dentro de ella identidades notables que son reglas fijas. Señalan que también ha podido incidir el requerimiento de generar una nueva expresión, el cual no es una práctica habitual en las tareas escolares de los estudiantes.

Vega-Castro, Molina y Castro (2012a) realizan una extensión de la caracterización del sentido estructural, añaden como descriptores del sentido estructural los siguientes: reconocer relaciones entre subestructuras, considerar formas alternativas de transformar una expresión algebraica, anticipar la utilidad de transformaciones algebraicas en una expresión e identificar el rango de variación permisible para las variables involucradas.

Las autoras también relacionaron los distintos niveles de sentido estructural de los estudiantes con la edad, género y rendimiento académico de los mismos en la asignatura de matemáticas. Este estudio les permitió evidenciar que ninguna de estas variables ejerció influencia directa en el nivel de sentido estructural manifestado.

*Principios de sustitución*

Los autores que venimos siguiendo, Hoch y Dreyfus, presentan otro reporte de investigación en 2007 sobre como dos estudiantes realizan una secuencia de tareas, observando cómo adquieren la capacidad de reconocer la estructura $a^2-b^2$ y como aplican el principio de sustitución (si un parámetro se sustituye por un producto o una suma la estructura sigue siendo la misma).

Examinaron las cinco estructuras siguientes:

$$a^2-b^2; \quad a^2+2ab+b^2; \quad ab+ac+ad; \quad ax+b=0; \quad ax^2+bx+c=0.$$

Consideran para la estructura: componentes externos tales como la forma y apariencia, y componentes internos determinados por las relaciones y conexiones entre las cantidades de las operaciones, y otras estructuras, realizando así una caracterización de las expresiones que utilizaron. Para $a^2-b^2$, la caracterización es como sigue:

- es una expresión con dos términos,
- cada uno de ellos es un cuadrado perfecto,
- están conectados por un signo menos.
- la estructura interna es la de una expresión cuadrática que puede factorizarse, siendo equivalente a $(a-b)(a+b)$.

Diseñaron una intervención en el aula, para tres sesiones, que facilitase la mejora del sentido estructural mediante el desarrollo de una secuencia de tareas adecuadas. Las acciones en estas tareas contemplaban clasificar, comparar, factorizar, resolución de ecuaciones, y la creación de nuevos ejemplos. La metodología de investigación utilizada incluyó un pre-test, administrado a dos clases, y un post-test administrado, de forma individual a los estudiantes, pocos días después de la tercera sesión.

Entre sus conclusiones señalan que ambos estudiantes aprendieron a identificar y factorizar la expresión $a^2 - b^2$, y aplicar el principio de sustitución de sus parámetros, pudiendo fácilmente factorizar la expresión $(x-3)^4 - (x+3)^4$. Mostraron dificultades similares con la articulación de las características de la estructura, y con la aplicación de la fórmula simple, pero ambos superaron estas dificultades. Al ser examinados luego de un tiempo para observar su aprendizaje, uno de ellos muestra mantener lo aprendido, no siendo así en el otro que muestra haberlo olvidado.

## *2.2 Investigaciones sobre errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar*

Se encuentran trabajos de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra, previos a la fundación del PME, como señala Molina (2012). Como ejemplo, los desarrollados por Hotz (1918), Thorndike, Coob, Orleans, Symonds, Wald y Woodyard (1923) y Reeve (1926) sobre la dificultad relativa de la resolución de varios tipos de ecuaciones lineales y el papel de la práctica en el aprendizaje del álgebra. Los primeros trabajos realizados en esta línea de investigación partían de una concepción del álgebra como herramienta procedimental y representacional, analizando la dificultad de procedimientos algebraicos específicos (ej., resolución de ecuaciones lineales) y los errores cometidos por los estudiantes en el uso de los mismos (Kieran, 2007).

### 2.2.1 Dificultades en el trabajo algebraico

Gran número de investigaciones sobre álgebra escolar están centradas en indagar los errores que cometen los estudiantes en pruebas cuyos ítems son tareas algebraicas o en las dificultades que encuentran los estudiantes en el trabajo algebraico. Las dificultades en el aprendizaje del álgebra, a veces se desprenden de los errores que los estudiantes cometen cuando trabajan con expresiones de esta materia (Castro, 2012) por lo que en muchas ocasiones en un mismo trabajo se tratan tanto errores como dificultades indistintamente, en otras ocasiones se estudia el proceso seguido en el aprendizaje y se analizan las dificultades como obstáculos en dicho aprendizaje.

La investigación sugiere que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (Wagner y Parker, 1999): dificultades de tipo epistemológico, son aquellos intrínsecos al objeto a estudiar; dificultades de tipo ontogénico, son inherentes al propio sujeto que realiza el estudio; y dificultades de tipo didáctico, aquellos otros consecuencia de las técnicas de enseñanza bajo las cuales se realiza el estudio.

Vamos a considerar resultados de estudios de cada uno de los tres tipos de dificultades, si bien en algunas ocasiones resulta complicado su distinción dado que entre unas y otras no existe una frontera que los separe sino que se entrecruzan elementos de unas con los de otra.

### DIFICULTADES DE TIPO EPISTEMOLÓGICO

Las dificultades y obstáculos inherentes al objeto álgebra, se señala que son debidas, en gran parte, a la naturaleza misma del álgebra, su lenguaje, los elementos que lo componen, las reglas que lo rigen (Castro, 2012).

#### *Dificultades en el lenguaje*

Gran cantidad de las dificultades se atribuyen al lenguaje del álgebra. Un conocimiento básico del lenguaje es el del vocabulario. Partiendo de esta premisa y considerando que la falta del vocabulario adecuado lleva al fracaso de los estudiantes en álgebra. Según recoge Welder (2006), Miller y Smith (1994) desarrollan una investigación sobre el vocabulario del álgebra. Recogen un listado de 30 términos básicos e indagan el uso que los estudiantes hacen de los mismos. Investigaron a continuación el vocabulario del álgebra usado por estudiantes de nivel intermedio y de universidad, mediante la administración de una prueba de vocabulario de selección múltiple y verdadero-falsa. Obtuvieron como resultado que los estudiantes conocían un promedio de 15 de los 30 términos recogidos.

En la resolución de problemas al hacer translaciones desde las expresiones verbales a las algébricas o viceversa también se detectan dificultades. Apareciendo con frecuencia en la formulación de ecuaciones algebraicas cuando la información se presenta con palabras, según señalan (MacGregor y Stacey 1997).

La relación entre el lenguaje algebraico y el habitual es señalada por Socas (1997) como causa de dificultad, establece que el uso del lenguaje habitual favorece la interpretación de los signos utilizados en el lenguaje algebraico siempre considerando la diferencia entre ellos que consiste en que el lenguaje matemático es más preciso que el lenguaje natural, también hay que hacer una interpretación correcta de los signos utilizados.

Los errores de traducción entre diferentes lenguajes han sido identificados a través de una variedad de tareas de escritura de ecuaciones. Un estudio realizado por Clement, Narode y Rosnick (1981) que incluyó 150 estudiantes de primer año de Ingeniería señala las dificultades de los estudiantes en escribir las ecuaciones a partir de las tablas de pares de datos. De hecho, el 51% de los estudiantes fueron incapaces de generar una ecuación que estaba siendo modelada por una tabla de datos. Observaron que la dificultad estaba en la traducción.

*Dificultades relacionadas con los elementos*

En los años ochenta del siglo anterior se llevaron a cabo dos grandes estudios, los cuales proporcionaron conocimiento sobre la comprensión del álgebra y de las dificultades que entraña su aprendizaje. El primero de dichos estudios realizado en 1981 en Inglaterra, explora la comprensión de los estudiantes en varias áreas de la matemática entre las que se encontraba el álgebra. Entre otras cosas, se explora el significado que los estudiantes de entre 13 a 15 asignan a las letras. Küchemann (1981), como resultado del estudio, clasifica a los estudiantes en seis categorías, según su interpretación de las letras en diferentes contextos.

Otro proyecto posterior (Booth, 1984) trata de investigar las estrategias y las causas de los errores en matemáticas de secundaria mediante entrevistas con estudiantes.

El estudio revela que los errores que hacen los estudiantes con 13-15 años son debidos a la pobre comprensión de las letras y la alternativa concepción sobre los métodos apropiados: no apreciación de la necesidad de simbolismo y formalismo (no apreciar la diferencia entre $2+3\times5$ y $(2+3)\times5$) y las estructuras similares $2+mx5$ y $2(mx5)$; no conocer las convenciones algebraicas y simbólicas.

En ambos estudios, además, los estudiantes no reconocen el uso y necesidad de los paréntesis, la distinción en la noción de adición repetida y multiplicación repetida y sienten la necesidad de clausura de las expresiones algebraicas. Banerjee (2008) sostiene que estos errores indican que existe influencia desde la aritmética y que los errores han sido desarrollados en ella.

Se ha comprobado que algunos estudiantes presentan una concepción ingenua acerca de las variables, se trata de considerar que diferentes letras han de tener diferentes valores (Kieran, 1989).

En su investigación, Küchemann (1981) encontró que sólo un porcentaje muy pequeño de estudiantes de entre 13-15 años podía considerar una letra como un número generalizado y muchos menos eran capaces de interpretar una letra como una variable. La mayoría de los estudiantes tomó las letras como objetos concretos o simplemente los ignoró. En investigaciones con estudiantes de nivel educativo superior Furinghetti y Paola (1994) han encontrado que sólo una pequeña minoría podría describir adecuadamente las diferencias entre los parámetros, incógnitas, y variables. La investigación muestra que en sus primeras aproximaciones al álgebra, los estudiantes no entienden el significado de las letras y comúnmente las interpretan como suplencia de objetos o palabras (MacGregor y Stacey, 1997). Una explicación a este hecho indica que las aproximaciones iniciales que los estudiantes tienen con las letras puede entorpecer la construcción del concepto de variable. Se señala como impedimento el asignar una letra como nombre de una persona (A, por Alberto) o cuando se indica cinco peras con la expresión $5p$, al dar el resultado de un problema, ya que se puede asumir que las letras son abreviaturas. Booth (1984) sostiene que las dificultades de los alumnos, al comenzar a trabajar en álgebra es el resultado de la utilización desigual de las letras en la aritmética y el álgebra. En aritmética, letras como ‘m’ y ‘c’ se utilizan como etiquetas para representar metros y céntimos, no un número de metros o de céntimos, como lo harían en el álgebra. La interpretación de las variables como abreviaturas afecta a la trasformación de problemas orales en expresiones algebraicas aptas para obtener el resultado a través de su transformación (Wagner y Parker, 1999).

*Símbolos*

Las primeras investigaciones sobre las formas en que los estudiantes interpretan símbolos algebraicos tendió a concentrarse en los niveles cognitivos (Küchemann, 1981), la experiencia previa aritmética y métodos de pensamiento (Booth, 1984), y la dificultad con la notación como el signo de igualdad con sus múltiples significados (Kieran, 1981; Vergnaud, 1984) y el uso de paréntesis (Kieran, 1979).

Los estudiantes necesitan aceptar que los símbolos “+”; “-” e “=” tienen múltiples significados. Pueden usarse para indicar procesos de cálculo o para indicar una situación estática de respuesta final. Por ejemplo $x+3$ indica la instrucción de realizar la adición de añadir ‘3’ a cualquier número, o bien dar la respuesta estableciendo una relación de “3 más que cualquier otro número”.

Kieran (1981) investigó cómo los estudiantes interpretan el signo igual y reveló la falta de concienciación del papel de equivalencia que tenían los estudiantes, en todos los niveles de la educación.

Algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra están asociadas al uso de los símbolos por ejemplo, considerar que en una expresión como $5x^2 - x$, la segunda ‘$x$’ representa un número negativo en lugar del opuesto a ‘$x$’ (Wagner y Parker, 1999).

Parte de los estudiantes creen que el signo igual indica una operación que hay que hacer en el primer miembro de la igualdad para dar la respuesta a la derecha del signo. En el trabajo de Molina (2006) se estudia el proceso seguido por estudiantes de 3º de educación primaria en su evolución cognitiva en lo que al signo igual se refiere, entendido como un signo que significa equivalencia entre los dos términos de la igualdad.

Muchos estudiantes describen la igualdad en términos de operador, con una operación en el lado izquierdo y un resultado en el lado de la derecha (Molina, 2006).

*Expresiones*

Los estudios relacionados con el trato dado a las expresiones algebraicas están relacionados con la estructura de las mismas por lo que han sido incluidas en el apartado correspondiente a sentido estructural, recogemos algunos estudios de investigaciones que se refieren a funciones.

El concepto de función es difícil de entender para muchos estudiantes (Welder, 2006) y la notación formal $f\left(x\right)$ que condensa una gran cantidad de información, de manera muy eficiente, tiene poco significado incluso para algunos estudiantes avanzados.

Una investigación centrada en ideas intuitivas acerca de las funciones y la transición desde la intuición al simbolismo formal (Dreyfus y Eisenberg, 1982) concluye que algunos estudiantes de secundaria pueden comprender fácilmente la idea básica de función como regla de correspondencia ya sea en situaciones concretas o en tablas de dos columnas de números. Una dificultad específica encontrada en estudiantes que habían trabajado funciones generales y lineales está en el uso de los términos del vocabulario relacionados con las mismas: preimagen, imagen, dominio, rango (Markovits, Eylon y Bruckheimer, 1988), los estudiantes también ponen de manifiesto dificultades en el estudio de cierto tipo de funciones como funciones constantes y funciones cuya representación gráfica es discontinua.

*Sintaxis*

Dickson, Brown y Gibson (1988) recogiendo ideas de varios autores y resultados de pruebas señalan que en un estudio con seis estudiantes americanos en un rango de 12 a 14 años de edad se investigó los métodos que utilizaban para evaluar expresiones aritméticas. Los seis estudiantes evaluaron todas las expresiones, trabajando de izquierda a derecha, sin importar el convenio del orden de las operaciones que se les había enseñado, es decir, consideraban que el resultado de $5+2\times3$ es igual a 21 (trabajo realizado por Kieran, 1979). Señalan que la primera encuesta secundaria APU realizada en 1980, descubrió una alta proporción de niños de 15 años que ignoraban el efecto de los paréntesis como muestra en el siguiente ítem:

*Cuál de los siguientes enunciados no es igual a ninguno de los otros tres*

A. $a-b+c$ 12% elige A

B. $(a-b)+c$ 5% elige B

C. $a-(b+c)$ 30% elige C

D. $a+(c-b)$ 46% elige D

Señalan que la letra D fue probablemente elegida la más frecuente porque los niños atienden sólo al orden diferente de las letras.

Kieran, en varias ocasiones señala la sintaxis del álgebra como causante de las dificultades de su aprendizaje. La dificultad de los estudiantes en álgebra son, en general, en gran parte las dificultades en el aprendizaje de la sintaxis (Kieran, 1989). Posteriormente, Kieran (1992), señaló que es difícil para los estudiantes entender por qué se puede considerar que $a+a+a+15$ es igual a $3a+15$, en tanto que $a+a+a\times2$, no es $3a\times2$. Lo que considera sería un tópico de investigación de gran interés. Los estudiantes tienen que aprender a colocar paréntesis pero, por lo general, los estudiantes leen de izquierda a derecha, de manera que no ven la necesidad de utilizarlos (Bell, Malone y Taylor, 1987).

### DIFICULTADES DE TIPO ONTOGÉNICO

Resnick (1982) incide en la importancia de la comprensión de los conceptos algebraicos y hace énfasis en señalar que a menudo las dificultades de aprendizaje son el resultado de la falta de comprensión de los conceptos en que se basan los procedimientos, que incluso cuando los conceptos básicos son muy bien comprendidos, pueden permanecer no relacionados con procedimientos de cálculo. Luego de analizar los resultados de investigación realizados por Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver y Swaffor (1988), con estudiantes norteamericanos, Kieran (1992) manifiesta que los estudiantes para cubrir su falta de comprensión, tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y eventualmente llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra. Brown et al. mostraron que una gran mayoría de los estudiantes piensa que las matemáticas están basadas en reglas y más o menos la mitad consideró que el aprendizaje de las matemáticas es principalmente memorización.

Liebenberg, Sasman y Olivier (1999) trabajan con alumnos de tercero de Educación Secundaria el concepto de equivalencia algebraica de expresiones algebraicas, diferenciándolo de la equivalencia numérica de expresiones algebraicas, es decir la equivalencia de las expresiones para un cierto valor de la variable. En este estudio observan que los alumnos no aceptan el proceso de transformación de una expresión como prueba de la equivalencia de ambas expresiones, la dada y la obtenida a partir de la transformación. Además, los alumnos confunden los conceptos de equivalencia numérica y equivalencia algebraica.

Lee (1987) y Lee y Wheeler (1987) encontraron que algunos estudiantes usan álgebra o aprecian su papel en la justificación de una sentencia general acerca de los números. Resultados similares han sido reportados por MacGregor y Stacey (1993), quienes observaron que una dificultad adicional reside en la incapacidad de los estudiantes para articular claramente la estructura de un patrón o de la relación con el lenguaje ordinario.

Healy y Hoyles (1999) han señalado que las aproximaciones visuales generadas en las tareas que implican la generalización de patrones, pueden proporcionar un fuerte apoyo para la representación algebraica de secuencias y el desarrollo de un marco conceptual para las funciones, aunque subrayó que hay una necesidad de trabajar duro para conectar los patrones de números observados de forma simbólica. Ainley, Wilson y Bills (2003), en un informe que compara la generalización del contexto con la generalización del cálculo, encontraron que la generalización de un contexto no parece ser suficiente para apoyar a los alumnos en el movimiento a una versión simbólica de la regla. Sin embargo, Radford (2000), que ha estudiado la transición de lo particular a lo general, ha argumentado que estos procesos toman tiempo. En un estudio que se centró en el papel de las representaciones tabulares, Sasman, Olivier y Linchevski (1999) presentaron trabajo con niños de octavo grado (14 años), con actividades de generalización en la que varía la representación en varias dimensiones, a saber, el tipo de función, las naturaleza de los números, el formato de las tablas, y la estructura de las imágenes. Los resultados mostraron que la variación de estas dimensiones tuvo poco efecto sobre el pensamiento de los estudiantes.

Lo abstracto del álgebra es una de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas para los estudiantes, se percibe sobre todo en las identidades notables. Algunos estudiantes no pueden entender las identidades algebraicas, por lo que recurren a practicarlas varias veces con el fin de recordarlas (Tsai y Chang, 2005).

La dualidad entre proceso y concepto y el uso de los mismos símbolos para representar tanto el proceso como el concepto en el álgebra ha sido destacado por Tall (Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson, 2000) y Sfard (1991) en su teoría de la reificación. Con el fin de tener éxito en álgebra, señalan la necesidad de un pensamiento *proceptual* flexible (combinación pensamiento conceptual y procedimiento flexible). Las dificultades de los estudiantes con el álgebra pueden comenzar con su incapacidad para hacer frente a la ambigüedad de los símbolos algebraicos como procesos y conceptos. Es esencial mantener las operaciones en suspenso, o sea, no realizar las operaciones mientras que se manipulan las expresiones algebraicas y considerarlas sólo como procesos posibles. La reificación es un proceso difícil de lograr para la mayoría de las personas, ya que existe "un círculo vicioso en el que la reificación de bajo nivel y la interiorización, de más alto nivel, son requisitos previos el uno del otro" (Sfard, 1991, pág. 31).

DIFICULTADES DE TIPO DIDÁCTICO

Bednarz, Kieran y Lee (1996) indican que muchos estudios han mostrado las dificultades de los estudiantes en varios niveles escolares con respecto a las diversas maneras de introducir el álgebra. Por ejemplo: resolución de ecuaciones, manipulación de expresiones algebraicas, resolución de problemas, y el manejo de conceptos fundamentales como el de variable. Kieran (1989) expone el impacto negativo de los métodos tradicionales para la enseñanza de la aritmética, que se basan fundamentalmente en los aspectos de cálculo, prestando poca atención a los aspectos relacionales y estructurales de la aritmética.

Según Mason (1996), un examen de la práctica escolar establecida involucrando la generalización del álgebra revela que, a menudo, a partir de figuras geométricas o secuencias numéricas, el énfasis está en la construcción de tablas de valores de la que se extrae y analiza una fórmula de forma cerrada con uno o dos ejemplos. Mason sugiere varios posibles enfoques de investigación que pueden conducir a la construcción de fórmulas algebraicas en los estudiantes, incluyendo la visualización y manipulación de la figura en la que el proceso de generalización está basado.

Los estudiantes presentan dificultades en relación a las convenciones algebraicas y, dado que las convenciones del álgebra rigen también en aritmética, el fracaso de los estudiantes al aplicarlas o ignorarlas en álgebra, es atribuible a su desconocimiento en aritmética, nos referimos al uso de paréntesis y jerarquía (o prioridad) de operaciones.

La concepción de que el álgebra es la generalización de la aritmética o la terminación de la aritmética (Usiskin, 1987) lleva a poner la atención en el proceso de generalización en aritmética y se observa que este proceso supone una de las causas de dificultad frecuentes y persistentes en álgebra. En este ámbito, una de las dificultades que tienen estudiantes de (12-14 años), se observa cuando han de escribir la expresión algebraica del término general de una sucesión como puede ser la de los números impares $(1,3,5,7,...)$. Se resisten a escribir una expresión compuesta, como es $2n-1$, argumentando que los términos de la sucesión presentan una forma simple y el término general debe de ser también de forma simple (Castro, 1994).

El uso de la tecnología en la enseñanza, por su parte, proporciona a los estudiantes soporte visual sobre gráficos y representación simbólica y tablas que les posibilita la manipulación de los mismos y herramienta que les permite resolver problemas (Arnau, Arevalillo-Herráez y Puig, 2011), entendiendo que el uso de la tecnología requiere una sofisticada comprensión de los símbolos y las operaciones con los mismos.

Experimentos de enseñanza, por ejemplo, ampliar el significado del signo igual para los estudiantes acerca de la "señal de hacer algo" (Behr, Erlwanger y Nichols, 1976; Molina, 2007) prevalece en el razonamiento aritmético de la escuela primaria para la consideración del carácter simétrico y transitivo de la igualdad (Vergnaud, 1988) y su uso en las ecuaciones algebraicas (por ejemplo, Herscovics y Kieran, 1980).

En un experimento de enseñanza diseñado específicamente para fomentar la adquisición de la noción de la letra como número generalizado, Booth (1982, 1983) encontró una fuerte resistencia por parte de los estudiantes a la asimilación de esta idea.

Experimentos de enseñanza destinados a ayudar a los estudiantes a construir el significado para las expresiones por medio de, modelos de área rectangular (Chalouh y Herscovics, 1988) y de ecuaciones por medio de identidades aritméticas (Herscovics y Kieran, 1980) sugieren que los estudiantes pueden construir más fácilmente el significado para las ecuaciones que para las expresiones. Esto fue confirmado por los resultados de la investigación de Wagner, Rachlin y Jensen (1984), quienes señalaron que los estudiantes trataron de añadir "= 0" a cualquier expresión que se les pidió simplificaran.

Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2008) sostienen que cuando los estudiantes inician los estudios en la escuela secundaria, las letras surgen, cada vez con mayor frecuencia, en contextos no geométricos, y se espera que los alumnos ya no las consideren etiquetas o iniciales de palabras, sino que aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados, dependiendo de la expresión o la situación en la que aparecen. Estos autores señalan que al empezar el estudio del álgebra las primeras apariciones de las variables ocurren al presentar a los alumnos ecuaciones sencillas, como $x+12=26$, para pedirles que encuentren el valor de 'x'. Dichas ecuaciones no suelen ser difíciles a los alumnos. Las dificultades se inician cuando se pasa a expresiones de la forma $ax+b=c$ ó del tipo $ax+b=cx+d$. Al plantear este tipo de problemas se supone que el alumno comprende (sin mayores explicaciones) que allí las letras no representan un solo valor específico, sino cualquier valor.

Filloy y Rojano (1989) han señalado que un corte didáctico se produce entre las ecuaciones del tipo $ax+b=c$ que puede ser resuelto por métodos aritméticos y ecuaciones del tipo $ax+b=cx+d$ que precisen métodos algebraicos formales. Exploraron el uso de varios modelos concretos (tanto en balance y en modelos de área geométricos) en la enseñanza de métodos de resolución de ecuaciones formales y encontraron que estos modelos no aumentaron significativamente las capacidades de la mayoría de los estudiantes para operar formalmente ecuaciones con dos incógnitas.

Señalan que respecto a la primera expresión, los estudiantes de tercero de secundaria tienen dificultad para interpretar la letra involucrada como un número general; respecto a la segunda, una tendencia a ver la letra esencialmente como incógnita, cuyo valor es necesario determinar.

Indican que por lo general, ni los libros ni los profesores consideran necesario aclarar la diferencia entre la letra usada como número general y la letra usada como incógnita. Este hecho lleva al desconcierto que manifestado por los estudiantes: la letra representa cualquier valor; sin embargo, hay que encontrar cuál es ese valor. Dado el carácter multifacético de la variable, sin importar el uso que privilegie el enfoque que se elija, el estudiante tiene que enfrentarse también a los otros usos. De hecho, casi en todos los problemas algebraicos la variable se presenta en su carácter multifacético y es indispensable desarrollar la capacidad para trabajar con sus distintos usos. Una buena comprensión del concepto de variable es fundamental para comprender el álgebra y las matemáticas en general. Sin embargo dada la complejidad de este concepto, no se puede esperar que los alumnos logren comprenderlo aceptablemente sin una enseñanza explícita y deliberada que resalte los distintos usos y que los ayude a moverse con flexibilidad entre ellos.

En algunas investigaciones se ha hecho uso de materiales concretos o modelos (área, balanza) con el fin de enseñar las expresiones algebraicas, las operaciones o la resolución de ecuaciones a estudiantes de grados intermedios (Chalouh y Herscovics, 1988; Filloy y Rojano, 1989). Según los resultados, no han dado mucho éxito. Estos modelos crean dificultades en cuanto a la comprensión de aspectos sintácticos de las ecuaciones o expresiones tratadas.

Malara y Iaderosa (1999) utilizaron la similitud entre las notaciones de la aritmética y la símbolico-algebraicas y señalaron las relaciones de notación entre la suma repetida y la multiplicación repetida. Los estudiantes no pudieron ver la similitud entre los dos simbolismos y la equivalencia de los procedimientos.

Malara y Iaderosa recomiendan una enseñanza metacognitiva de la aritmética con los aspectos algebraicos desarrollados y explicados en la aritmética, lo que permitiría a los estudiantes utilizar los códigos algebraicos correctamente.

### 2.2.2 Investigaciones centradas en errores

Algunos estudios (Clement, Lochhead y Monk, 1981; Wollman, 1983) determinan fuentes de error en la traducción de enunciados algebraicos verbales en su representación simbólica. Socas (1997) determina tres grandes categorías para los errores según su origen: (a) obstáculo, (b) ausencia de sentido y (c) actitudes afectivas y emocionales.

Ruano, Socas y Palarea (2003), en un trabajo de análisis de los errores cometidos por alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria y primer curso de Bachillerato en un cuestionario de tareas algebraicas de sustitución formal, generalización y modelización, detectan manifestaciones de diferentes dificultades. En especial destacan la necesidad de clausura que muestran los alumnos al trabajar con las expresiones algebraicas, la particularización de expresiones algebraicas dándoles valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o no uso de paréntesis, la concatenación de igualdades y la sobre-generalización de la propiedad distributiva de la suma a la operación multiplicación.

*Errores en operaciones*

Linchevski y Livneh (1999) llevaron a cabo un estudio con estudiantes de sexto y séptimo grado con el propósito de determinar dificultades de los estudiantes al enfrentarse a la aritmética y al álgebra en situaciones contextualizadas, señalaron varios errores cometidos por los estudiantes.

- Desaparición de un término por la realización errónea de una operación indicada (por ejemplo dar como solución $23-6+7=23-13$), debido a una mala interpretación de la regla del orden de operaciones como primera adición o debido a una mal aplicación de la propiedad asociativa).
- Errónea interpretación del orden de las operaciones (por ejemplo, $5+6\times10=11\times10=110$ ó $24\div3\times2=24\div6=4$, se mueven de izquierda a derecha o la multiplicación antes de la división).

- Saltar un signo a la operación posterior (por ejemplo $217+175-217+175+67$, cancelar los "dos 175" , por considerar que el signo '-' de 217 afecta al sumando siguiente 175).

Estos mismos errores habían sido ya observados en sus estudios anteriores (Herscovics y Linchevski, 1994; Linchevski y Herscovics, 1996) en el contexto de problemas de ecuación algebraica.

*Errores en traducciones de lenguaje*

Las investigaciones que han indagado en la traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria y bachillerato (Cerdán, 2008, 2010; MacGregor y Stacey, 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Weinberg, 2007), han reportado un alto porcentaje de fracaso en el desarrollo de esta tarea (variable entre 30% y 60% según el estudio) y han aportado diferentes clasificaciones de los errores cometidos. Uno de los errores más referidos, es el denominado *error de inversión*, que consiste en representar la relación opuesta a la indicada. Dicho error conduce, por ejemplo, a traducir como $6S = P$ el enunciado verbal "hay 6 veces tantos estudiantes como profesores", utilizando la variable $S$ para referir a los estudiantes y $P$ para los profesores.

Cerdán (2008, 2010), Ruano, Socas y Palarea (2008) y Rodríguez-Domingo (2011) identifican otros errores partiendo de enunciados algebraicos representados verbalmente que en el caso de Cerdán y Ruano et al. están contextualizados y en el de Rodríguez-Domingo no lo están. Los errores detectados por estos autores son similares, variando su frecuencia de presentación según el tipo de problema o la presencia o no de contexto. Se identifican errores de carácter aritmético como la confusión de operaciones o el uso inadecuado de paréntesis, errores en la completitud del enunciado construido (incompletos vs desmedidos), y errores derivados de las características propias del lenguaje algebraico entre los que destacan errores en el uso de las letras (ej., utilizan un símbolo para designar a más de una cantidad, designan con más de un símbolo a la misma cantidad), errores de particularización o generalización de alguno de los términos, y errores en la construcción de las expresiones debidos a la complejidad estructural de las mismas. Entre los errores más frecuentes destacan la confusión de las operaciones potenciación y producto, una interpretación incorrecta de la estructura del enunciado y la particularización de alguno de los términos del enunciado.

La investigación realizada por Rodríguez (2011), Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2011), analizan los errores en los que incurren estudiantes de secundaria al traducir enunciados de un sistema de representación a otro, permitiéndoles analizar que casi todos los errores se debían a la confusión de las operaciones de potenciación y producto, y a que no interpretaban correctamente la estructura del enunciado algebraico o a la particularización. Está centrada en estudiar la manera de hacer traducciones entre los lenguajes simbólico y verbal por estudiantes de educación secundaria. Se ha puesto de manifiesto que utilizando las mismas expresiones, los estudiantes cometen más errores al realizar la traducción de enunciados verbales a su representación simbólica que cuando se hace desde lo simbólico a lo verbal. Por esto consideramos que ofrece mayor dificultad la traducción de lo verbal a lo simbólico que lo contrario.

Diversos trabajos consultados (Cerdán, 2008, 2010; MacGregor y Stacey, 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Weinberg, 2007) permiten identificar algunas posibles causas de estos errores: (a) se utiliza un procedimiento puramente sintáctico al abordar la traducción; (b) el estudiante elabora un modelo cognitivo basado en relaciones de comparación entre las variables en lugar de un modelo basado en relaciones de igualdad; (c) el signo igual es considerado como indicador de una correspondencia o asociación; (d) los numerales son interpretados como adjetivos; (e) el estudiante no comprende el enunciado verbal debido a la compleja sintaxis del lenguaje verbal; y (f) el estudiante posee una limitada comprensión del concepto de variable y de las características sintácticas de los enunciados simbólicos.

*Errores en funciones*

Hemos dedicado menos atención a este apartado por considerarlo alejado de nuestro trabajo, entre lo analizado señalamos que se indica que un conocimiento erróneo mostrado con frecuencia es considerar que todas las funciones son lineales. Según Markovits, Eylon y Bruckheimer (1988), para los estudiantes de menor capacidad resulta más fácil manejar situaciones que involucran funciones que se dan dentro de una historia gráfica frente a las que sólo se presentan algebraicamente. Este resultado les lleva a sugerir que el desarrollo de las capacidades gráficas debería preceder al aprendizaje de las funciones **(**Welder, 2006). Pero, por otra parte, la gráfica ha sido específicamente identificada como objeto de dificultades en el aprendizaje del álgebra por los estudiantes (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

# Capítulo 3. Marco teórico

En este capítulo recogemos el marco teórico que enmarca y sustenta la investigación realizada. Organizamos el capítulo en tres partes (ver Figura 3.1). En la primera se centra la atención en el álgebra escolar y, en especial en el simbolismo algebraico, y se recogen ideas relevantes relativas a su aprendizaje y enseñanza. La segunda parte aborda ideas más generales al dirigir la atención hacia la dualidad conceptual y procedimental del conocimiento matemático y la denominación de "sentido" que ha sido empleada en variados constructos propios de la educación matemática así como para adjetivar un tipo de conocimiento. En esta parte se atiende también al concepto de estructura en relación con el conocimiento matemático. Por último, y partiendo de las ideas presentadas en las dos primeras partes del capítulo y de nuestra reflexión sobre las mismas, se concreta el significado de estructura en el contexto de las expresiones aritméticas y algebraicas y se presenta y caracteriza el constructo sentido estructural, que resulta clave en esta investigación.

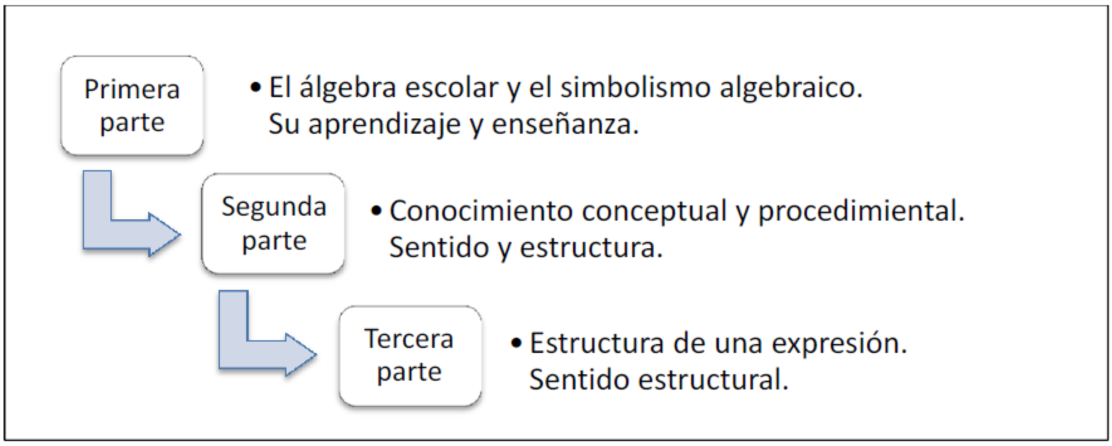



*Figura 3.1.* Estructura del Capítulo 3.

PRIMERA PARTE

## 3.1 El álgebra escolar

El álgebra es un componente destacado del currículo de las matemáticas escolares, cuyas expectativas de aprendizaje y contenido han variado poco con el paso de los años. Durante el siglo XX ha tenido una marcada orientación simbólica y estructural, incluyendo como contenidos la simplificación de expresiones, la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones con métodos formales y la factorización de polinomios y expresiones racionales, los cuales se aplican a la resolución de problemas (algebraicos) verbales (Kieran, 1992, 2007). Estos contenidos se han abordado mayoritariamente en la educación secundaria, aunque en algunos países se iniciaba su enseñanza a final de la educación primaria bajo el nombre de Pre-Algebra. Esta visión tradicional de la enseñanza del álgebra, asume una separación estricta de la enseñanza de la aritmética que se supone previa y parte de la concepción del álgebra como aritmética generalizada (Molina, 2006).

En la actualidad, este enfoque tradicional sigue siendo frecuente en la enseñanza, aunque a nivel internacional se reconoce una visión más amplia del álgebra que conduce a enfoques más reformistas en los que se da un mayor peso al estudio del cambio, al uso de sus múltiples representaciones y a la modelización de problemas “reales” con el uso de tecnología (Kieran, 2007) y que defienden la inclusión en educación primaria de expectativas de aprendizaje relativas al desarrollo de conceptos algebraicos básicos como el de variable o función (Blanton y Kaput, 2004) y al desarrollo de pensamiento algebraico (Molina, 2009).

Partiendo de la revisión bibliográfica realizada por Molina (2012) sobre las concepciones del álgebra, la cual hemos complementado con la consulta de los trabajos de Hoch y Dreyfus (2007), Mason (2011), Palarea (1998) y Usiskin (1988), distinguimos los siguientes cinco componentes o concepciones que nos serán de utilidad para ubicar nuestra investigación: (a) aritmética generalizada y estudio de patrones, (b) la resolución de problemas, (c) el estudio de funciones, (d) el estudio de estructuras y (e) el simbolismo algebraico.

La primera concepción mencionada, una de las más ampliamente reconocidas, es la de aritmética generalizada o “aritmética con letras” en términos de Mason (2011). Sobre esta visión del álgebra existen largos precedentes históricos en los libros de texto que se remontan al siglo XIX. A esta concepción se refiere Palarea (1998) cuando indica que el álgebra "involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas" (p. 36). Como tal, el aprendizaje del álgebra depende de la experiencia y la facilidad con cálculos aritméticos, las cuales contribuyen a las habilidades de los estudiantes para llevar a cabo manipulaciones algebraicas. Además se destaca la generalización como raíz del álgebra y la exploración, identificación y expresión de regularidades y patrones como actividades algebraicas. Según precisa Molina (2012), dentro de esta concepción algunos autores incluyen el estudio de patrones, si bien esta autora remarca la diferencia entre patrones y leyes numéricas relativas a la estructura aritmética, y patrones asociados a situaciones no numéricas o específicos de situaciones numéricas particulares tales como los números figurados. En ambos casos la actividad algebraica conduce a capturar, revelar y describir patrones y estructuras. Las letras se utilizan con el significado de variables (Usiskin, 1988).

Una segunda concepción del álgebra, destacada por ser según Kieran (2007) la más próxima a los orígenes del álgebra, es como herramienta para la expresión de métodos generales que resuelven clases de problemas. El álgebra es una herramienta potente para la resolución de problemas, en especial los que pueden ser formulados en términos de ecuaciones e inecuaciones, haciendo uso de las letras como incógnitas o parámetros. Hoch y Dreyfus (2007) hablan en este sentido del álgebra como un conjunto de herramientas matemáticas.

El álgebra incluye también el estudio de relaciones entre variables y, por tanto, de funciones y gráficos (Vergnaud, 1997). En este caso las letras representan variables con el significado de cantidades cambiantes (Usiskin, 1988). Esta es la que se conoce como la visión o componente funcional del álgebra.

Una cuarta concepción, la más próxima al álgebra universitaria, trata del estudio de estructuras. En este caso las letras se utilizan en expresiones algebraicas como un objeto arbitrario en una estructura, no siendo necesaria su vinculación a números o cantidades como referentes (Usiskin, 1988). Esta es la perspectiva del álgebra que se aborda, por ejemplo, cuando se trabaja la obtención de expresiones equivalentes (ej., simplificación o manejo de identidades algebraicas) en el contexto de expresiones algebraicas descontextualizadas. El álgebra moderna consiste en el estudio de la estructura; se debe a la abstracción a través de reconocer las relaciones como ejemplificaciones de propiedades y expresar esas relaciones particulares como generalidades (Cai y Knuth, 2011). En relación con esta concepción Kieran (1998) enfatiza que el álgebra es una herramienta mediante la cual no sólo se representan los números y las cantidades con símbolos literales, sino que también se utiliza para calcular con estos símbolos.

La última concepción se centra en el álgebra como sistema de representación, como un medio de expresión de ideas matemáticas. El álgebra dispone de un lenguaje propio estandarizado con un conjunto de símbolos, signos y reglas para su uso que permite expresar acciones en, y relaciones entre, cantidades u otro tipo de números. Se utiliza para representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen, ésta es una de sus fortalezas (Arcavi, 1994). Mason (1996) considera esta concepción del álgebra como la que usualmente la gente tiene en mente cuando piensan en matemáticas como lenguaje. No obstante insiste en que las cadenas de símbolos no son en sí mismas álgebra, el significado de álgebra se ha desarrollado y ampliado, pasando de proceso a objeto, desde largas tradiciones en forma matemática.

Los estándares del NCTM (2000) coinciden en el reconocimiento de esta multidimensionalidad del álgebra al distinguir, entre otras, los siguientes componentes del estándar de álgebra: la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

Así mismo ocurre en los trabajos de Hoch y Dreyfus (2007) quienes, en otros términos, reconocen las cinco concepciones del álgebra señaladas. Describen el álgebra escolar como el estudio de estructuras abstractas y el uso de principios de aquellas estructuras en resolución de problemas, donde las notaciones simbólicas permiten a las ideas complejas matemáticas ser expresadas brevemente y ser analizadas eficientemente. Así mismo hablan del álgebra como el estudio de patrones y relaciones funcionales entre cantidades, como un método para pensar sobre lo desconocido y para generalizar y representar relaciones usando un lenguaje simbólico. También señalan que es una teoría formal con axiomas, teoremas y pruebas cuyos elementos básicos son símbolos y donde el énfasis está en la parte lógica: deducciones, propiedades matemáticas y pruebas.

Otros autores optan por enfatizar una visión del álgebra integradora en conexión con una o varias de las concepciones mencionadas. Por ejemplo, Banerjee (2008) destaca el papel del álgebra como herramienta: el álgebra en matemáticas ocupa una posición especial de un importante instrumento analítico que conduce a las matemáticas superiores y muchas otras ramas de la ciencia, ya que proporciona los símbolos y las técnicas para representar y resolver problemas, razonar, justificar y demostrar dentro de las matemáticas y otras áreas donde la matemática sirve como una herramienta.

En nuestro trabajo las principales concepciones implicadas son el álgebra como estudio de estructuras y como aritmética generalizada, dado que en las actividades propuestas a los estudiantes en el experimento de enseñanza implementado combinamos el uso del simbolismo algebraico desligado de contexto y, por tanto, sin referentes para las variables o incógnitas, con actividades centradas en la percepción de patrones y su generalización en relación con la estructura de expresiones aritméticas.

### *3.2 Pensamiento algebraico*

Autores como Kieran y Mason, con una larga trayectoria de investigación en la Didáctica del Álgebra, centran su atención en el pensamiento algebraico, en vez de en el álgebra en sí, proponiendo diferentes definiciones del mismo. Este término es utilizado con un significado amplio para describir las clases de "encuentros" que los estudiantes están teniendo con el álgebra (Kieran, 1998).

Mason (1996) define el pensamiento algebraico como un compendio de acciones que claramente se muestran en conexión con alguna de las concepciones anteriores (p. 151):

- Resolver problemas aritméticos complejos: a) métodos de trabajo, paso a paso a partir de datos dados a datos desconocidos y b) mediante las percepciones globales y el uso de múltiples relaciones aritméticas;
- Codificar y usar métodos generales sistemáticos para diferentes tipos de problemas;
- Descubrir y probar generalizaciones relativas a números;
- Reconocer y usar propiedades generales de sistemas de números y sus operaciones;
- Reconocer, nombrar y usar funciones estándares, por ejemplo, $y = kx^2$;
- Usar un lenguaje simbólico manipulable como ayuda en el desempeño de las acciones anteriores.

Este autor, reconocido como uno de los pioneros de un enfoque de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra centrado en la generalización, argumenta que el pensamiento algebraico se fundamenta y se desprende de facultades naturales de los alumnos para dar sentido matemático (Mason, 2006). Basándose en esta argumentación destaca la importancia del uso del pensamiento algebraico dentro de la aritmética, a través de la expresión explícita de la generalidad, para promover el desarrollo del pensamiento algebraico y apreciar la aritmética más a fondo.

Kieran (1998) expresa que el pensamiento algebraico permite el uso de cualquiera de la variedad de representaciones posibles con el fin de manejar situaciones cuantitativas en forma relacional. Una vez que la representación se ha generado, esta puede ser operada de acuerdo con ciertas reglas de transformación relacionadas con la representación empleada en particular, dentro del contexto global. En un trabajo posterior (Kieran, 2004) la autora amplia esta concepción al reconocer que el pensamiento algebraico es posible sin el uso de simbolismo algebraico. Refiriéndose a los primeros grados expresa que este tipo de pensamiento comprende el desarrollo de formas de pensar dentro de las actividades para las que las letras del álgebra simbólica pueden ser utilizadas como una herramienta, pero que podrían ser tratadas sin necesidad de simbolismo algebraico.

Otros autores como Butto y Rojano (2010) utilizan el término pensamiento algebraico para referir a las componentes del álgebra escolar descritas previamente. Así argumentan que el pensamiento algebraico involucra la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, y la formalización de generalizaciones.

## *3.3 Actividades propias del álgebra escolar*

Dentro del álgebra propia de la educación secundaria, y considerando la amplia concepción de esta sub-álgebra previamente presentada, pueden distinguirse tres tipos generales de actividades algebraicas: actividades generacionales, actividades de transformación y actividades globales o meta-nivel (Kieran, 2006). Las *actividades generacionales* de álgebra involucran la formación de las expresiones y ecuaciones que son los objetos de álgebra. Ejemplos típicos incluyen formular ecuaciones que representan situaciones problemáticas, expresar de forma general patrones geométricos o numéricos, o expresar las reglas que gobiernan las relaciones numéricas. El segundo tipo de actividad algebraica, *actividades de transformación*, incluyen agrupar términos semejantes, factorizar o expandir términos, operar con expresiones polinómicas y exponenciales, resolver ecuaciones, simplificar expresiones, trabajar con expresiones y ecuaciones equivalentes, y así sucesivamente. Una gran cantidad de este tipo de actividad se refiere a modificar la forma de una expresión o ecuación para obtener otra equivalente. El tercer tipo son las *actividades matemáticas globales o meta-nivel*. Estas son las actividades para las que el álgebra se utiliza como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra. Estas incluyen resolver problemas, modelizar, percibir estructura, generalizar, analizar relaciones, justificar, probar y predecir. Estas actividades sugieren procesos matemáticos más generales y son esenciales para dotar de significado a los otros tipos de actividades.

Otra clasificación es la propuesta por Thomas y Tall (2001) quienes distinguen entre "álgebra evaluación", "álgebra manipulación" y "álgebra axiomática". La primera engloba la idea de una expresión, por ejemplo, $3 + 2x$, que se utiliza sólo para ser evaluada lo que conduce a representaciones gráficas y tabulares asociadas a la función que representa dicha expresión. La segunda engloba la idea de una expresión como una entidad pensada para ser manipulada. La tercera se centra en las propiedades de la manipulación y conduce a un enfoque axiomático del álgebra en términos de grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, etc.

## *3.4 El simbolismo algebraico*

La concepción del álgebra multidimensional, anteriormente descrita, incluye actividades que no necesariamente requieren del uso de simbolismo algebraico, no obstante esta componente del álgebra escolar sigue teniendo una presencia notoria en el currículo. Se destaca la utilidad del simbolismo algebraico para la comunicación y representación de conceptos matemáticos; siendo identificados ambos procesos como componentes de la competencia matemática a alcanzar por los escolares en la educación secundaria (NCTM, 2000). En este sentido el NCTM y los documentos curriculares vigentes en España (Boletín Oficial del Estado, 2006) señalan el papel del simbolismo algebraico como parte del lenguaje matemático que los estudiantes deben ser capaces de utilizar para expresar ideas matemáticas de forma precisa, comunicar su pensamiento matemático, analizar y evaluar el pensamiento matemático y estrategias de otros, resolver problemas, y modelizar e interpretar fenómenos de las matemáticas y otras ciencias.

El simbolismo algebraico constituye un sistema de representación, entendiendo como tal un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto (Castro y Castro, 1997). Se caracteriza por el empleo de forma escrita de numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra.

Para describir algunas de sus principales características nos remontamos a su origen, el cual permite distinguir tres etapas principales en la evolución histórica del álgebra (Kieran, 1992): la etapa retórica, la etapa lacónica y la etapa simbólica. La primera etapa, antes de Diofanto (250 a.C.) se caracteriza por una ausencia total de símbolos o de signos especiales para representar las incógnitas. La etapa lacónica se inicia con Diofanto quien introduce letras para la representación de cantidades desconocidas aunque este simbolismo no empieza a evolucionar hasta el siglo XVII. El problema de los algebristas, entre el siglo III y el XVI radicaba en encontrar la identidad de las letras más que en encontrar una forma de expresar lo general. Hacia finales del 1500, se inicia la que se conoce como la etapa simbólica del álgebra. El trabajo de Diofanto indujo a Vieta (1540-1603) a utilizar letras para las cantidades dadas y para las incógnitas. Se comienza entonces a expresar simbólicamente soluciones generales y a formular reglas para relaciones numéricas. Desde entonces hasta hace poco más de dos décadas, ha llegado a considerarse que el pensamiento algebraico y, por tanto, el álgebra, sólo era posible ante la presencia del lenguaje simbólico (Sutherland, Rojano, Bell y Lins, 2001). Como se ha puesto de manifiesto en el comienzo de este capítulo, la actual concepción del álgebra es menos exigente en cuanto a la presencia del simbolismo, aunque este sigue siendo un componente notorio del álgebra escolar.

Como señala Wheeler (1989), el desarrollo del simbolismo algebraico implicó la desaparición de una cantidad considerable de significado subyacente. Hasta el siglo XVI, el álgebra retórica y lacónica era relativamente fácil de seguir y de comprender. A partir de entonces la notación comenzó a ser demasiado compleja para entenderse en palabras; el paso a un sistema simbólico permitió abreviar la escritura provocando la eliminación de los significados de ítems individuales y de las operaciones que actuaban sobre ellos. El simbolismo algebraico elimina muchas de las distinciones que expresa el lenguaje verbal pero a cambio expande en gran medida su aplicabilidad. Una de sus fortalezas radica en permitir expresar las ideas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen (Arcavi, 1994). De este modo facilita el pensamiento y la reflexión sobre las ideas matemáticas, la producción de resultados de forma más eficiente, muestra la estructura de ideas matemáticas, y posibilita transformar las expresiones por medio de técnicas algebraicas aprendidas sin necesidad de atender al significado de los símbolos que las componen (Drouhard y Teppo, 2004; Pimm, 1991). "El comportamiento experto no consiste ni en ser consciente del significado de los símbolos todo el tiempo, ni olvidarlo todo el tiempo. En cambio, depende de la capacidad de alcanzar el significado de los símbolos a demanda" (Drouhard y Teppo, 2004, p. 251). Sin embargo, la característica señalada hace muy débil este sistema de representación desde el punto de vista semántico, lo que dificulta su comprensión al estudiante (Wheeler, 1989).

Adicionalmente esta ambigüedad que caracteriza al simbolismo algebraico se ve intensificada por la polisemia de los símbolos (ej., x puede interpretarse como una variable, una incógnita o el argumento de una función) y por la doble interpretación de los mismos como procesos y objetos, que desarrollamos en el siguiente apartado.

Parte de la complejidad del aprendizaje del álgebra se le atribuye a características del simbolismo. Además de las anteriores cabe mencionar que una variable pueda representar muchos números simultáneamente como ocurre en la representación de relaciones funcionales, la letra puede ser elegida libremente, hay ausencia del valor posicional, y la lectura de las expresiones puede ser bidireccional (Breiteig y Grevholm, 2006; Socas, 1997). Así mismo el uso de las letras en el contexto del álgebra contrasta con su uso como etiquetas o iniciales de palabras en contextos geométricos y de medida durante la educación primaria (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2008).

Subramaniam y Banerjee (2011) señalan que un problema que surge cuando las expresiones numéricas codifican múltiples operaciones binarias es que tales expresiones son ambiguas con respecto a la operación precedente cuando los paréntesis no se utilizan. Al mismo tiempo, uno no puede eliminar la ambigüedad completamente de la expresión utilizando paréntesis ya que el uso excesivo de paréntesis distrae de la estructura de la expresión y es por lo tanto contra productivo. Por lo tanto, a los estudiantes se les enseña a eliminar la ambigüedad de la expresión mediante el uso de las reglas de precedencia o jerarquía de operaciones. Las reglas de transformación del álgebra sólo son posibles cuando las expresiones algebraicas originan expresiones numéricas con un valor único, cuando las variables son apropiadamente sustituidas. Así desambiguar expresiones numéricas es una pre-condición para el uso de reglas de transformaciones que preservan el valor único de la expresión.

### 3.4.1 Componentes del simbolismo algebraico

En el álgebra de la educación secundaria se distinguen diferentes tipos de expresiones algebraicas, las cuales están compuestas de signos operacionales, numerales, letras y, opcionalmente, el signo igual o símbolos de orden ($\leq$; $\geq$). Dentro de las expresiones que contienen el signo igual (igualdades algebraicas) pueden distinguirse entre ecuaciones e identidades según sean ciertas para algún valor de la variable (o incluso ninguno) o para cualquier valor de la variable. En ambos casos las expresiones contenidas en ambos miembros pueden ser fraccionarias o polinómicas, estando compuestas por monomios operados mediante operaciones aditivas y/o multiplicativas.

En este trabajo nuestra atención se centra en las identidades algebraicas tanto polinómicas como fraccionarias. Dentro de estas, seleccionamos cuatro identidades conocidas como notables: el cuadrado de la suma, el cuadrado de la resta, la expresión de la propiedad distributiva y la diferencia de cuadrados. Estas identidades son de especial utilidad para la trasformación de expresiones algebraicas en el contexto de la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones, y en este sentido se trabajan en la educación secundaria según las directrices curriculares referidas en el primer capítulo.

### 3.4.2 Términos en una expresión algebraica

Banerjee y Subramaniam (2004, 2005) utilizan el concepto “término” para aludir al número o letra acompañada del signo que le precede en la expresión. Estos autores destacan el potencial de este concepto para ayudar a los alumnos a percibir la estructura de las expresiones aritméticas y a observar el paralelismo existente entre las expresiones aritméticas y las algebraicas.

Los términos pueden ser términos simples ($+5$) o compuestos, siendo éstos últimos de varios tipos: productos (e.g., $+3\times 2$) o términos con paréntesis (e.g., $-(4+2)$). Los términos compuestos pueden contener factores numéricos, simbólicos o factores en paréntesis. Mientras que los términos simples se pueden combinar con facilidad, un término compuesto no se puede combinar con un término simple a menos que se convierta en uno o varios términos simples (Banerjee y Subramaniam, 2005).

La adquisición del concepto "término" requiere que se perciba el número, o numeral, con su signo como un todo y no como elementos separados (Banerjee y Subramaniam, 2005). Cuando la expresión incluye términos compuestos, la encapsulación de dos objetos diferentes y su coordinación de tal manera que sean considerados un mismo objeto se complica, no siendo extraño que algunos estudiantes no tengan éxito en dicha tarea (Tall y Thomas, 1991).

Se llama coeficiente numérico (o simplemente coeficiente) de un término a cualquier constante que aparezca en él como factor. Si en el término no aparece constante alguna, se entiende que el coeficiente es 1. El coeficiente de cualquier término de una expresión algebraica incluye el signo que le antecede. Partiendo de esta definición, dos o más términos se dice que son semejantes si son iguales salvo en los coeficientes que pueden ser diferentes. Las variables que intervienen como factores en dichos términos han de ser las mismas y estar elevadas a las mismas potencias. Si una expresión algebraica contiene más de una expresión semejante es posible reducirlas a un solo término en virtud del axioma de distributividad (Barnett, 1984).

En el contexto de la equivalencia de expresiones algebraicas también está muy presente el concepto de igualdad, que comprende desde una instrucción para hacer algo a una relación entre dos expresiones que tienen el mismo valor (Molina, Castro, y Castro, 2009). Ambos conceptos, término e igualdad, dan soporte para evaluar expresiones y utilizar reglas (e.g., para encerrar entre paréntesis), y para conseguir reformular expresiones pasando a otras equivalentes.

## 3.5 Dualidad proceso-objeto

Son varios los autores (ej., Gray y Tall, 1994; Kieran, 1991; Sfard, 1991) que han argumentado la existencia de una dualidad proceso-objeto en la forma de concebir los conceptos matemáticos que han utilizado tanto para describir la evolución histórica del álgebra como el aprendizaje de conceptos matemáticos. Partiendo de esta distinción se dice que las nociones matemáticas abstractas pueden concebirse estructuralmente (como objetos) y operacionalmente/procedimentalmente (como procesos) (Sfard, 1991; Kieran, 1992).

Ver una entidad matemática como un *objeto* requiere ser capaz de referirse a ella como si fuera una cosa real, una estructura estática que existe en algún tiempo y lugar, y ser capaz de manipularla como una unidad global (como un todo), sin atender a los detalles. Interpretar una entidad matemática como un *proceso* supone considerarla como algo potencial, constituido por una secuencia de acciones, en lugar de una verdadera entidad. Tiene existencia por ser consecuencia de una serie de acciones. Greeno (1983), Thompson (1985), Dubinsky (1991), Sfard (1987, 1991) y Harel y Kaput (1991), entre otros autores, explican que la idea de objeto matemático es una construcción mental creada al extraer estructura de las acciones. Es decir, enunciar que uno "ha aprendido a ver" un objeto matemático es aseverar que tal persona es consciente de una estructura constante, repetitiva de ciertas acciones.

Kieran (1992) indica que la concepción estructural es estática, instantánea e integradora, mientras que una concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada; siendo ambas consideraciones de una misma noción matemática, complementarias y necesarias para una adecuada comprensión de las matemáticas (ver ejemplos en Tabla 3.1).

*Tabla 3.1*. Ejemplos de procesos y objetos

| Símbolos | Representación simbólica | Proceso | Objeto |
|---|---|---|---|
| $-,3$ | $-3$ | Restar tres unidades | El número negativo -3 |
| $3,4,/$ | $3/4$ | Repartir tres entre cuatro, tomar 3 partes de un todo dividido en cuatro partes iguales,… | El número racional tres cuartos |
| $x,+,y$ | $x,+,y$ | Añadir, unir, sumar dos cantidades | Un número, suma de x e y. |

En este contexto, Gray y Tall (1994) y Tall et al. (2001) clarifican la diferencia entre proceso y procedimiento. El término proceso se usa en un sentido general, en el sentido de un proceso cognitivo o matemático (o ambos), como en el proceso de adición, de multiplicación, o el proceso de resolver una ecuación. En cambio un procedimiento se usa en el sentido de Davis (1983, p. 257) para referirse a un algoritmo específico para la implementación de un proceso, el cual está constituido por una secuencia específica de pasos que se llevan a cabo uno a uno. Por ejemplo, el contar todo o contar desde uno de los números dados son procedimientos para llevar a cabo el proceso de adición.

Molina (2009) utiliza la distinción entre las concepciones estructural y procedimental en el contexto de actividades transformacionales con expresiones aritméticas y algebraicas para destacar la existencia de dos tipos de estrategias matemáticamente correctas. En este contexto, si se emplea un procedimiento estándar aprendido, sin atender a las características particulares de las expresiones con las que se estaba trabajando, la autora indica que se ha seguido un enfoque procedimental. En cambio, si se presta atención a las características particulares de las expresiones, es decir a su estructura, y ésta se utiliza para abordar la resolución de la actividad propuesta, indica que se ha utilizado un enfoque estructural. El enfoque procedimental requiere del estudiante activar en su mente procedimientos aprendidos tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. En cambio, el enfoque estructural, requiere atender a toda la expresión, analizarla e identificar su estructura particular para construir la estrategia de resolución.

Según Tall y Thomas (1991) cuando los escolares no consiguen dar sentido a los conceptos, encubren sus dificultades acudiendo a acciones rutinarias con el fin de obtener respuestas correctas. En esta misma línea, a partir de los resultados de un estudio empírico, Morris (1999) insiste en que es más recomendable una enseñanza centrada en los conceptos de estructura que una larga experimentación procedimental con expresiones algebraicas dado que la mayoría de los alumnos requiere un largo periodo de tiempo para abstraer generalizaciones sobre la estructura de la aritmética y del álgebra que puedan ser aplicadas de unos contextos a otros.

### 3.5.1 Transición de proceso a objeto: evolución de los conceptos matemáticos

Son varias las teorías que se han propuesto para describir la transición de proceso a objeto en el pensamiento matemático, dándole diferentes denominaciones: reificación por Sfard (1991), encapsulación por Dubinsky (1991), objetivación por Dörfler (1991) y entificación por Gray y Tall (1994), entre otros. Uno de los primeros autores que abordó esta temática fue Davis (1984):

> “Cuando un procedimiento está siendo aprendido, primero uno experimenta prácticamente un paso cada vez, y los patrones generales y la continuidad y el flujo de toda la actividad no se perciben. Pero a medida que el

> procedimiento se practica, el procedimiento en sí mismo se convierte en una entidad - se convierte en una cosa. Esto, en sí, es una entrada o un objeto de escrutinio" (p. 29; citado por Tall et al., 1999).

Los posteriores trabajos de Dubinsky (1986, 1991) y Sfard (1988, 1989, 1991) dieron un impulso a la noción de la transformación de un proceso en un objeto.

Sfard (1991) parte de la observación de la existencia de etapas históricas, en las que conceptos como número y función han evolucionado desde su concepción como procesos u operaciones a su consideración como objetos, para distinguir tres fases en el desarrollo conceptual. Este modelo, está respaldado por los resultados de varias investigaciones. Las tres fases son denominadas *interiorización*, *condensación y reificación.* En la primera de ellas, un estudiante se familiariza con los procesos que eventualmente darán lugar a un nuevo concepto (como contar, lo que lleva a los números naturales, restar produce los negativos, o manipulaciones algebraicas que se convierten en funciones). Poco a poco, el alumno se convierte en experto en llevar a cabo estos procesos. Por ejemplo, en el caso de números negativos, llega un momento en el que la persona es ya hábil en la realización de sustracciones. En el caso de los números complejos, es cuando el alumno adquiere alta competencia en el uso de raíces cuadradas. En el caso de la función, es cuando la idea de variable se aprende y la capacidad de usar una fórmula para encontrar los valores de la variable "dependiente" es adquirida (Sfard, 1991).

La fase de condensación es un período en que largas secuencias de operaciones se convierten en unidades más manejables. En esta etapa un aprendiz se vuelve más y más capaz de pensar sobre un determinado proceso como un todo, sin sentir la urgencia de entrar en detalles. Este es el punto en el cual un concepto nuevo nace "oficialmente". Gracias a la condensación, combinar el proceso con otros procesos, hacer comparaciones, y generalizar es mucho más fácil. En el caso de los números negativos, la condensación puede ser evaluada a través de la capacidad del estudiante para llevar a cabo tales manipulaciones aritméticas como sumar o multiplicar números negativos y positivos (Sfard, 1991).

La reificación es definida como un cambio ontológico, una capacidad repentina para ver algo familiar en una luz totalmente nueva. Así, mientras la interiorización y la condensación son cambios graduales, más cuantitativos que cualitativos, la reificación es un instantáneo salto cualitativo: un proceso que se solidifica en objeto, en una estructura estática. Distintas representaciones del concepto se unifican semánticamente en un constructo abstracto. En el caso de los números negativos, es la capacidad del alumno para tratarlos como un subconjunto del anillo de enteros (sin ser necesariamente conscientes de la definición formal de anillo) que puede ser visto como un signo de la reificación. Los números complejos puede considerarse como reificados cuando los símbolos que los representan, por ejemplo $5+2i$, se interpretan como nombres de objetos, de elementos de un conjunto bien definidos (Sfard, 1991).

Sfard (2001) señala que reificar significa ser capaz de pensar y hablar acerca del proceso, de las mismas maneras en que pensamos y hablamos de los objetos: como si fuera una entidad permanente; la estructura interna que no tiene que ser recordada cada vez que se trata con ello. La relación entre nuestras acciones y nuestra habilidad para "ver objetos matemáticos" es, por tanto, reflexiva: las acciones se realizan sobre ciertos objetos, pero extraer la estructura de esas acciones significa construir nuevos objetos, y en consecuencia, nuevas acciones sobre estos nuevos objetos, y así sucesivamente.

Partiendo de este modelo Sfard (1991) asegura que para la mayoría de las personas la concepción operacional es el primer paso en la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos y enfatiza que la transición desde una concepción de "proceso" hacia una concepción de "objeto" no se logra ni rápidamente ni sin esfuerzo.

Dubinsky (1991) propone un desarrollo semejante en lo que se conoce como la teoria APOE (APOS en inglés), cuyo nombre atiende a las siglas de las palabras Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. Esta teoría es resultado de la revisión y ampliación por parte de Dubinsky de algunas de las ideas de Piaget (Dubinsky, 1996).

Según Dubinsky, los objetos son procesos encapsulados, los cuales así mismo son acciones interiorizadas; y en algunos casos objetos, procesos y acciones se organizan formando esquemas. Según describe Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996), el término acciones es entendido aquí como transformaciones de objetos que son percibidos por el individuo como algo externo, mientras que los procesos son construcciones internas que realizan la misma acción, pero que no están necesariamente dirigida por estímulos externos. Desde esta teoría: "Cuando un individuo piensa en operaciones aplicadas a un proceso particular, llega a ser consciente del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones (ya sean acciones o procesos) pueden actuar sobre el mismo (proceso), y es capaz de construir realmente tales transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto." (Asiala et al., 1996, p. 11).

Gray y Tall (1994) apoyan la distinción entre procesos y objetos, si bien no se posicionan sobre el orden en que estas concepciones son desarrolladas por el sujeto, coincidiendo así con las observaciones de autores como Gilmore e Inglis (2008) aportan evidencias que ponen en duda el orden de esta secuencia. Gray y Tall (1994) focalizan su atención en el simbolismo, introduciendo la idea de "procepto" que definimos en el siguiente apartado.

### 3.5.2 Procepto

Gray y Tall (1994) y Tall et al. (1999) llaman la atención sobre el hecho de que objeto y proceso comparten una misma representación simbólica, como se ha puesto de manifiesto en los ejemplos de la Tabla 3.1. A raíz de esta observación definen los términos procepto elemental y procepto.

Un procepto elemental surge de la doble función del símbolo como proceso y concepto. Es la amalgama de tres componentes: un objeto matemático, un proceso que produce dicho objeto y un símbolo que representa a ambos. Esta definición preliminar hace referencia al uso de la simbología para evocar cualquiera de los procesos o conceptos, de manera que un símbolo como 2+3 puede ser visto para evocar o bien el proceso de adición de los dos números o el concepto de suma. Un procepto consiste en una colección de proceptos elementales que corresponden al mismo objeto matemático. En este sentido, se refieren por ejemplo al procepto 6 que incluye una colección de representaciones tales como 3 +3, 4 + 2, 2 +4, 2x3, 8-2, etc., las cuales representan el mismo objeto, aunque obtenido a través de diferentes procesos.

A partir de esta definición, los autores citados caracterizan el pensamiento proceptual como la capacidad de manipular flexiblemente el simbolismo como proceso o concepto, y de intercambiar libremente diferentes simbolismos para el mismo objeto. Tall et al. (2001) argumentan que los proceptos están en la base de la capacidad humana para manipular las ideas matemáticas mediante símbolos, permiten que el cerebro cambie, con un esfuerzo mínimo, de hacer un proceso a pensar en un objeto. Según estos autores los estudiantes más exitosos son más propensos a usar pensamiento proceptual para reducir al mínimo su trabajo en la ejecución del algoritmo.

## *3.6 Aprendizaje del álgebra*

Focalizando nuestra atención en la etapa educativa de Educación Secundaria, asumimos un conocimiento y extensa experiencia aritmética previa cuando los alumnos inician el aprendizaje del álgebra simbólica. Utilizamos el término “álgebra simbólica” para centrar nuestra atención en el aprendizaje del álgebra vinculado al uso y comprensión del simbolismo, prestando una menor atención aquí a componentes del aprendizaje del álgebra tales como la generalización o el estudio de relaciones funcionales que pueden comenzar a trabajarse en la educación primaria sin necesidad de implicar este simbolismo.

En la educación secundaria el aprendizaje del álgebra requiere de cálculo simbólico en un modo y extensión nunca antes visto por los estudiantes. Una de las principales expectativas de aprendizaje para esta etapa es el desarrollo de competencia en la manipulación del simbolismo, apoyada en la comprensión de la estructura sintáctica de una expresión algebraica (Kirshner, 1989; Pomerantsev y Korosteleva, 2002; Yerushalmy y Gafni, 1992) y de las reglas, propiedades y convenciones con respecto a los números y signos de operación en las que se sustentan (Bell, 1995; Booth, 1988). El dominio del simbolismo algebraico implica la conjugación flexible de conocimiento procedimental y conceptual (Hiebert y Lefevre, 1986).

Gray y Tall (1994) y Kieran (1991) describen el camino a recorrer por los estudiantes como una evolución con una serie de ajustes proceso - objeto que deben hacer a fin de comprender todo el aspecto estructural del álgebra. Entre las adaptaciones que los estudiantes deben hacer cuando comienzan el estudio de las expresiones algebraicas y de ecuaciones es no limitarse a interpretar estas entidades como operaciones aritméticas sobre algún número sino que deben aprender a verlas como objetos en sí mismos, sobre los cuales se realizan otros procesos (operaciones). Las operaciones a realizar en estos objetos no son solo sumas, restas, multiplicaciones o divisiones también se incluyen las de simplificación, factorización, racionalización del denominador, resolución o diferenciación de ecuaciones, etc. (Kieran, 1992).

Además de la capacidad de ver una expresión como un objeto y como un proceso, el estudiante debe desarrollar un sentido de cual de ambas formas de ver una expresión es más adecuada en cada momento (Drijvers, Goddijn y Kind, 2011). En este sentido Tall et al. (2001) argumentan que ser capaces de alternar flexiblemente entre una concepción estructural y procedimental del simbolismo permite hacer un uso más eficiente de los procesos cognitivos que en el caso en que se trabaja únicamente con una visión procedimental.

El álgebra requiere del estudiante formalizar procedimientos por los que puede que antes nunca se hubiera preocupado (Kieran y Filloy, 1989). De hecho, los estudiantes que comienzan con el álgebra no logran darse cuenta de que el procedimiento es a menudo la respuesta. En el paso del aprendizaje de la aritmética al aprendizaje del álgebra, ha de realizarse una transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal. Se requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (Kieran y Filloy, 1989). En esta misma línea, Cerulli y Mariotti (2001) señalan como punto clave en el aprendizaje del álgebra que las propiedades de las operaciones tienen que convertirse en reglas de transformación, y para hacerlo deben asumir un doble sentido, estructural y operacional: las propiedades son las relaciones básicas de equivalencia y funcionan como instrumentos para la manipulación simbólica. Estos autores indican que dentro del contexto numérico, las propiedades no juegan un papel operacional, simplemente expresan la equivalencia de los procedimientos de cálculo. En cambio, en el contexto algebraico, las propiedades deben asumir un papel operativo y deben convertirse en instrumentos para la transformación de expresiones.

En relación con el aprendizaje del simbolismo algebraico, otros autores llaman la atención sobre la importancia de saber dotarlo de significado y distinguen fuentes posibles de significado en conexión con las concepciones del álgebra (Kieran, 2007). En conexión con la concepción del álgebra como aritmética generalizada y como el estudio de estructuras, la estructura algebraica y aritmética en sí mismas actúan como fuente de significado. Otra importante fuente de significado es el contexto del problema o situación de partida, en relación con las concepciones del álgebra como resolución de problemas o el estudio de funciones. En este caso las letras y signos operacionales tienen un significado externo al álgebra relativo a una situación o evento descrito en un problema (el cual puede referir a una situación matemática). Centrando la atención en las representaciones que se ponen en juego en la actividad algebraica, lo que alude a la concepción del álgebra como lenguaje algebraico pero no se reduce a la misma, se distingue la traducción entre representaciones como fuente de significado.

Si un sujeto no percibe los objetos abstractos que representan unas expresiones algebraicas a menudo se torna en una seria desventaja. En ausencia de los elementos que son necesarios para dar un significado más profundo a las manipulaciones simbólicas, las reglas del álgebra son predestinadas para ser percibidas como arbitrarias y sin razones, en estos casos la comprensión del estudiante sólo puede ser procedimental (Sfard y Linchevski, 1994).

Arcavi (2006) llama la atención sobre la importancia de la capacidad de realizar una transición bidireccional, oportunista y flexible entre el uso de acciones desprovistas de significado (como la aplicación automática de reglas y procedimientos) y la aplicación del sentido común y la búsqueda de significados, para ser competente en álgebra. Como ya hemos destacado previamente al hablar de las características del simbolismo algebraico: el comportamiento experto implica alternar entre la consideración y omisión del significado de los símbolos, acudiendo al mismo a demanda, según se considere necesario (Drouhard y Teppo, 2004). En un trabajo previo, Arcavi (1994) insiste en que el aprendizaje de álgebra es una tarea muy compleja formada de muchos componentes: varias formas de ver las variables, reconocer estructuras, interpretar el signo igual, manejar múltiples representaciones, y aplicar el sentido simbólico (ver siguiente apartado).

En conexión con las ideas de Pierce y Stacey (2001) destacan como componentes del aprendizaje del álgebra conocer y distinguir entre los posibles significados de los símbolos (ej., parámetros, variables), reconocer convenciones (ej., el orden de las operaciones) y propiedades básicas, identificar estructuras (ej., reconocer factores simples o compuestos, identificar grupos estratégicos de componentes) e identificar características clave (ej., identificar el término dominante, vincular la forma de una ecuación y el tipo de solución de la misma).

Rittle-Johnson y Alibali (1999) destacan el papel de la equivalencia matemática como concepto fundamental tanto en aritmética y álgebra, señalando dentro del mismo tres componentes:

- El significado de dos cantidades son iguales,
- El significado del signo igual como un símbolo de relación y
- La idea de que hay dos lados en una ecuación.

Estas ideas son fundamentales para la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, la comprensión de los escolares sobre la equivalencia matemática, a menudo, no es percibida hasta que se llega al aprendizaje del álgebra.

Autores como Ursini y Trigueros (2004) y Bloedy-Vinner (2001) dirigen la atención hacia los significados de los parámetros en las expresiones algebraicas. Subrayan que para poder trabajar correctamente con los parámetros es necesario ser capaz de distinguirlos de incógnitas y variables. Ursini y Trigueros (2004) basadas en datos de su investigación, señalan los siguientes casos presentados:

- Cuando un parámetro es percibido como un *número general* los estudiantes necesitan ser capaces de: relacionar los parámetros al reconocimiento de patrones, o a la interpretación de las reglas y métodos; interpretarlo como la representación de una entidad general e indeterminada que puede asumir cualquier valor; deducir reglas generales y métodos generales mediante la distinción de los aspectos invariantes de las variables de primer orden; manipularlo; simbolizar lo que representa para las afirmaciones generales de segundo orden, reglas o métodos.

- Cuando un parámetro asume el papel de un *valor desconocido* es necesario: reconocer que representa algo desconocido que se puede determinar; interpretarlo como que representa valores específicos que se pueden determinar considerando las restricciones dadas; determinar sus valores mediante la realización de las requeridas operaciones algebraicas y/o aritméticas; sustituir los valores requeridos para el parámetro con el fin de hacer que la condición dada sea verdadera.

- Cuando un parámetro asume el papel de una *variable relacionada* a otra, es necesario para el estudiante: reconocer la correspondencia entre las dos variables en la expresión analítica; determinar sus valores en términos del valor de la variable relacionada o determinar el valor de la variable relacionada en términos del valor del parámetro; reconocer la variación conjunta del parámetro y la variable relacionada; determinar el intervalo de variación del parámetro o de la variable relacionada cuando el intervalo de variación de la otra está dado. Para trabajar con éxito con parámetros resulta necesario ser capaz de cambiar entre los diferentes usos de la variable y dominar cada una de ellas con sus propias características (p. 362).

## 3.7 Sentido simbólico

Arcavi (1994) introduce la noción de sentido simbólico, en paralelismo con la noción de sentido numérico, como guía para que la enseñanza de álgebra simbólica no se centre únicamente en el aprendizaje de las transformaciones simbólicas. Según este autor, el sentido simbólico debería incluir, más allá de la invocación de símbolos y su uso, la apreciación de la elegancia, lo conciso, la comunicabilidad y el poder de los símbolos para representar y probar relaciones de una forma que la aritmética no puede.

Indica que el sentido simbólico es complejo y multifacético. Recurriendo al Diccionario Enciclopédico Inglés Oxford, define el sentido simbólico como una rápida y precisa apreciación, comprensión, o instinto de los símbolos; el cual intenta caracterizar de forma no exhaustiva con las siguientes definiciones (p. 31):

- Una comprensión y una apreciación estética del poder de los símbolos: la comprensión de cómo y cuándo los símbolos pueden y deben ser utilizados con el fin de mostrar relaciones, generalizaciones y pruebas o demostraciones que de otra forma están ocultos e invisibles.

- Una intuición acerca de cuándo abandonar los símbolos en favor de otros enfoques con el fin de avanzar en un problema, o con el fin de encontrar una solución o representación más elegante, o más fácil.

- Una capacidad de manipular y de “leer” expresiones simbólicas como dos aspectos complementarios de la resolución de problemas algebraicos. Por un lado, el desprendimiento de significado necesario para la manipulación junto con una visión global de expresiones simbólicas hace del manejo del símbolo una acción rápida y eficiente. Por otra parte, la lectura de las expresiones simbólicas enfocadas en su significado puede añadir capas de conexiones y razonabilidad de los resultados.

- La conciencia de que uno puede diseñar con éxito relaciones simbólicas que expresen la información verbal o gráfica necesaria para avanzar en un problema, así como la capacidad de diseñar esas expresiones.

- La capacidad de seleccionar una posible representación simbólica de un problema y, si es necesario, hacer el esfuerzo de reconocer y atender la propia insatisfacción con la elección y ser creativo en la búsqueda de una mejor solución.

- La práctica de la constante necesidad de revisar los significados de símbolos mientras se resuelve un problema, así como comparar y contrastar los significados con las propias intuiciones o con el resultado esperado de ese problema.

- La detección de los diferentes roles de los símbolos que puede desempeñar en diferentes contextos.

Arcavi argumenta que el sentido simbólico debe convertirse en parte de nosotros mismos, listo para ser puesto en acción casi a nivel de un reflejo. Pero también, al igual que cuando nuestros sentidos nos fallan tendemos a desarrollar sustitutos, nuestro sentido simbólico debe tender a desarrollar maneras de superar las “fallas”.

Este autor señala que el sentido simbólico está en el corazón de lo que significa ser competente en álgebra, y la enseñanza del álgebra debe orientarse hacia este constructo. Por lo tanto, sugiere que la primera implicación para la enseñanza, es que las manipulaciones simbólicas deben ser enseñadas en contextos ricos que proporcionen oportunidades para aprender cuándo y cómo utilizar estas manipulaciones. Señala que aunque se pretenda un currículo con nuevos problemas y tareas, éste en sí mismo no va a incorporar el sentido simbólico. Que no importa cuán interesante o innovadora pueda parecer una tarea, será la actividad de los estudiantes que son llevados a participar, lo que determinará si ellos admiten la construcción del sentido simbólico. Sugiere que una implicación educacional para fomentar el desarrollo del sentido simbólico es proporcionar oportunidades a los estudiantes para hacer conexiones o para ver a los demás haciéndolas. De esta forma, actividades como los diálogos y prácticas en el aula deben legitimar y estimular preguntas en general tales como ¿qué ocurre si…? y en especial con respecto al papel de los símbolos y sus reglas.

## 3.8 Enseñanza del álgebra

Existe una gran insatisfacción con la tradicional enseñanza del álgebra, tras años de intensa formación aritmética. Autores como Booth (1999), Kaput (2000), Kieran (1992, 2007) y Castro (2012) llaman la atención sobre la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes y el gran número de estudiantes que obtienen bajos rendimientos en esta rama de la matemática y que es causa de que en muchos casos dejen de estudiar matemáticas. Las evaluaciones internacionales corroboran que la forma tradicional de introducir el álgebra no es eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática (Kieran, 2007). Los autores aquí citados responsabilizan en gran medida al tipo de enseñanza, basada en la memorización de reglas, de las dificultades que manifiestan los alumnos, muchas de las cuales persisten en niveles universitarios (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2008).

La introducción tradicional del álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que los estudiantes disponen de conocimiento de las relaciones matemáticas y la estructura de las operaciones a partir de su aprendizaje de la aritmética (Kieran, 1992). Se empieza por enseñar la sintaxis algebraica, destacando sus aspectos manipulativos y, al final, se resuelven problemas aplicando dicho contenido sintáctico-algebraico (Butto y Rojano, 2010).

Con este enfoque, muchos estudiantes no logran dar significados a la materia de acuerdo con el estándar de significados matemáticos (MacGregor y Stacey, 1993). Esto puede empeorar con estrategias que pueden parecer ayuda en un momento, pero que a corto plazo no son adecuadas o se olvidan. Por ejemplo, señalan que el tema sigue siendo ampliamente introducido por una técnica que se llama “ensalada de frutas de álgebra” en la que las letras representan objetos, como un $3a+2b$ siendo interpretada como 3 manzanas más 2 plátanos. Esto puede dar éxito en un momento, tales como la adición de un $3a+2b$ más $4a+3b$ para obtener $7a+5b$ imaginando manzanas y bananas juntas. Tal imagen pronto deja de ser útil cuando se llega a utilizar expresiones como

3ab, donde ya no se le puede llamar "tres manzanas y plátanos". Así mismo, Thomas y Tall (2001) llaman la atención sobre la ausencia de utilidad de un aprendizaje procedimental del álgebra: puede ayudar a los estudiantes para aprobar los exámenes de álgebra, pero no puede prepararlos para futuros desarrollos.

Butto y Rojano (2010) critican que en la enseñanza tradicional se introduce al estudiante en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido; se ignora que viene de trabajar con la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan en buena medida la manera de resolverlos. A este respecto, los estudios de Filloy (1991 y 1993) y Filloy y Rojano (1991) sobre la transición de la aritmética al álgebra evidencian problemas de traducción del lenguaje natural al álgebra y viceversa.

Tall y Thomas (1991) plantean la hipótesis de que tan pronto como los estudiantes son incapaces de dar sentido a los conceptos, esconden sus dificultades recurriendo a actividades de rutina para obtener las respuestas correctas y obtener la aprobación. Los estudiantes se esmeran en aprender el "truco" para subsistir académicamente. Todo ello les conduce a desarrollar en el álgebra un conjunto de actividades desconectadas que se vuelven más y más difíciles de coordinar, incluso en un nivel puramente mecanicista. Señala que la fase inicial de la asignatura, aquello que da sentido al concepto de variables y la búsqueda de formas de superar los obstáculos cognitivos, es fundamental para sentar las bases para el pensamiento algebraico significativo.

Se distinguen dos enfoques en la iniciación al pensamiento algebraico, el primero desde pre-álgebra y el segundo desde el álgebra temprana (Butto y Rojano, 2010; Molina, 2006). El primero corresponde a intervenciones de tipo transicional que buscan aminorar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra y tratan cuidadosamente de redefinir o aumentar el sentido de los símbolos que se utilizan en las expresiones algebraicas. El segundo reconoce lo anterior pero propone intervenciones previas a la transición; en este grupo destacan, entre otros, los trabajos de Carraher, Shliemann y Brizuela (2003), los cuales explican el origen de las dificultades en términos de la instrucción escolar. Estos autores afirman que, en primaria, se ha enseñado la aritmética por lo general sin establecer vínculos con otros temas matemáticos del currículo y aseguran que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico y puede ser vista como parte del álgebra, en lugar de ser vista como un dominio claramente distinto del álgebra.

## 3.9 Transición de la aritmética al álgebra

Variados autores han analizado y comparado la naturaleza de la aritmética y el álgebra y de su enseñanza para comprender su complejidad y extraer conclusiones que ayuden a hacer más eficiente su enseñanza (Molina, 2012). Se reconocen importantes diferencias entre ambas subáreas que son resaltadas por los investigadores para su consideración en la enseñanza. Una de estas diferencias radica en el objetivo general de la misma el cual en el caso de la aritmética se reduce a encontrar la solución numérica (Kieran, 1989) mientras que en el álgebra es mucho más amplio al implicar la generalización y simbolización en relación con patrones, relaciones funcionales y métodos de resolución de problemas.

Molina (2006) y Kieran (2006), a partir de la consulta de estudios previos, destacan además las siguientes diferencias:

- En la aritmética se manipulan números fijos y se razona con cantidades conocidas, mientras que en el álgebra pueden ser variables o cantidades desconocidas.
- En la aritmética los símbolos corresponden a etiquetas o abreviaturas de un objeto mientras que en el álgebra representan variables, incógnitas o parámetros.
- En la aritmética predomina un significado operacional del signo igual (anunciando un resultado) mientras que en el álgebra se asume un significado relacional de este signo para representar equivalencia.
- Los problemas aritméticos son de tipo lineal con una incógnita mientras que los algebraicos pueden ser de grados superiores e implicar múltiples incógnitas.
- En el álgebra se aceptan expresiones no cerradas como representaciones apropiadas de resultados de operaciones.

Varios autores, entre ellos Sfard (1991), Sfard y Linchevski (1994), Gray y Tall (1994) y Kieran (1991) utilizan la dualidad proceso-objeto para explicar la transición de la aritmética al álgebra. Según estos autores, una de las grandes diferencias entre estas sub áreas de las matemáticas es que en la primera de ellas las expresiones simbólicas (en este caso numéricas) son interpretadas como procesos; mientras que en la segunda, han de ser interpretadas como procesos y como objetos.

Kieran (1990) y Banerjee (2011), a partir de resultados de estudios previos que identifican discontinuidades en el paso entre ambas sub-aéreas de las matemáticas, añaden el cambio de significado de algunos símbolos y signos operacionales, la necesidad de operar con incógnitas, la consideración bidireccional de las expresiones y, en relación con la resolución de problemas, la introducción de la representación formal de los métodos que se utilizan (los cuales habitualmente no se hacen explícitos cuando se trata de problemas aritméticos) y el requisito de representar las operaciones que se describen en una situación-problema en vez de las que permiten resolverlo, entre otros.

Se argumenta que el énfasis en "encontrar la respuesta" habitual en la enseñanza de la aritmética hace que los estudiantes consigan desenvolverse con procesos intuitivos e informales o con una comprensión inadecuada o pobre de la aritmética, evitando el uso y reconocimiento de la estructura el cual es esencial en el aprendizaje del álgebra (Banerjee, 2011; Kieran, 1989).

Estas diferencias son señaladas como fuente de dificultades en la transición de la aritmética al álgebra al no ser objeto de atención en la enseñanza (ej., Butto y Rojano, 2010). En particular Pomerantsev y Korosteleva (2002) argumentan que para la transición exitosa de la aritmética al álgebra, los estudiantes deben tener una base en la escuela elemental que los prepare para concebir una expresión aritmética dada como objeto matemático, así como un proceso operativo. Se espera que los estudiantes que entienden este concepto en los grados elementales se acerquen al álgebra con más confianza y la lleven a cabo con más éxito.

Malara y Iaderosa (1999) indican al respecto que muchos estudios muestran que las dificultades en el abordaje del álgebra son a menudo causadas por una enseñanza de la aritmética centrada en los resultados de los procesos de cálculo más que en sus aspectos relacionales y/o estructurales. Este cambio de proceso a objeto no está suficientemente subrayado en la enseñanza y produce en los alumnos una gran confusión y muchas veces les hace aceptar pasivamente las reglas y técnicas de cálculo formal sin control alguno sobre el significado transmitido por estas reglas o de las propiedades en las que éstas técnicas están basadas.  Por su parte Subramaniam y Banerjee (2004) explican que la transición al álgebra requiere que los alumnos comprendan el significado del triple enlace de expresiones aritméticas: proceso, producto y relación. El significado relacional de una expresión se pone de manifiesto cuando se dice que 12 + 7 denota un número que es 'siete más doce' (o, alternativamente, doce más siete). Así, 12 + 7 y 10 + 9 denotan el mismo número pero expresan relaciones diferentes. En álgebra, el significado relacional se generaliza con el concepto de una función. Desde un punto de vista pedagógico, el aspecto relacional es intuitivamente significativo para los estudiantes y puede servir como una introducción a la estructura de las expresiones aritméticas.

Señalan que una expresión aritmética como 3 + 2 es correctamente interpretada como una invitación para calcular la respuesta *5*, mientras que la expresión algebraica $3+2a$ no se puede calcular hasta que el valor de '$a$' es conocido. Esta expectativa incumplida y errónea que se conoce como "respuesta esperada", viene producido por una dificultad relacionada denominada obstáculo "la falta de cierre", en el que el estudiantes experimenta disconformidad al hacer frente a una expresión algebraica que representa un proceso que él no puede llevar a cabo. Estos autores enuncian que otro dilema estrechamente relacionado es el "obstáculo proceso-producto", causada por el hecho de que una expresión algebraica como $2+3a$ representa tanto el proceso por el cual se lleva a cabo el cálculo y también el producto de ese proceso. Para un escolar que sólo piensa en términos de proceso, las expresiones $3(a+b)$ y $3a+3b$ (incluso conociendo la propiedad) son muy diferentes, la primera requiere la adición de a y b antes que multiplicar el resultado obtenido por 3, pero la segunda requiere que a y b deben ser multiplicados por 3 y luego sumar los resultados. Cuando a un escolar se le hace ver que las dos expresiones son esencialmente las mismas, se indica que es porque dan el mismo producto. Debe comprender también que la expresión $3a+6$ representa el producto implícito un número multiplicado por *3* y a continuación se le agrega *6* al resultado. Esto requiere la encapsulación del proceso como un objeto para que uno pueda hablar de ello sin la necesidad de llevar a cabo el proceso con determinados valores de la variable. Para hacer frente a las dificultades que el proceso conlleva, la enseñanza tradicional tiende a enfatizar el cálculo y la manipulación de expresiones algebraicas - enseñar a los escolares las reglas del álgebra para que desarrollen la capacidad de manipulación es necesaria. Hacer multiplicación antes de la adición, calcular las expresiones entre paréntesis primeramente, reagrupar términos semejantes, añadir "una misma cosa" a ambos lados, si cambia de lado, cambia de signo para dividir, invertir y multiplicar, etc. Señalan que es de esperar que una vez que los escolares son capaces de llevar a cabo las reglas de forma sistemática, a continuación, le sigue la comprensión. Pero sostienen que esto es una esperanza vana. Cuando el álgebra se enseña como una actividad esencialmente manipuladora, siguiendo una secuencia de reglas mecánicas, es de esperar que prevalezca una pobre comprensión del sujeto.

Kieran (1992) indica que el reto en el salón de clases es, no sólo trabajar en la construcción de la conexión en el sentido aritmética hacia álgebra, sino también mantener viva la conexión álgebra hacia aritmética, es decir, desarrollar la habilidad de ir y venir entre los dos niveles de concepción y de ver las ventajas de ser capaz de escoger una perspectiva u otra, dependiendo del problema que se tenga que resolver.

Subramaniam y Banerjee (2004) expresan el reconocimiento de que la comprensión de los estudiantes de la aritmética y las expresiones algebraicas están interconectadas. Se basan para esto en ideas que recogen de Linchevski y Livneh (1999), de que los estudiantes que cometen errores en la manipulación de expresiones algebraicas repiten algunos de los errores cuando se trata de expresiones aritméticas.

# SEGUNDA PARTE

## *3.10 Conocimiento conceptual y procedimental: definición e interacciones*

Desde la psicología y la educación matemática, entre otras disciplinas, se han realizado esfuerzos por caracterizar dos componentes destacados del conocimiento, conocimiento conceptual y conocimiento procedimental (Hiebert y Lefebre, 1986), y por analizar la relación existente entre ambos tanto a nivel de definición como en lo que respecta a su adquisición por el sujeto (Rico, 1995). En este apartado recogemos algunas de estas definiciones, reconociendo a priori la dificultad de definir ambos términos, y sintetizamos algunas de las argumentaciones más destacadas relativas a la interacción.

*Distinción entre conocimiento conceptual y procedimental*

Según Hiebert y Lefevre (1986) el *conocimiento conceptual* es generalmente visto como un conocimiento genérico y abstracto de los principios básicos y sus interrelaciones en un dominio. Se supone que se almacenan mentalmente en alguna forma de representación relacional, por ejemplo, esquemas o redes semánticas que permiten su transformación flexible a través de procesos de inferencia y elaboración. De forma análoga Carpenter (1986) señala que este conocimiento implica una amplia red de relaciones entre piezas de información, que permite la flexibilidad para acceder y utilizar la información. Una unidad de conocimiento conceptual no será nunca una pieza de información aislada sino que ha de estar en relación con otras piezas de información.

Rittle-Johnson y Alibali (1999) definen el conocimiento conceptual como comprensión explícita o implícita de los principios que rigen un dominio y de las interrelaciones entre las piezas del conocimiento de un dominio. Por su parte Kilpatrick et al. (2001) indican que se trata de un conocimiento integrado y funcional de las ideas matemáticas.

Haapasalo y Kadijevich (2000) señalan que el conocimiento conceptual denota una conexión hábil a lo largo de determinadas redes, de aquellos elementos que componen el conocimiento matemático, que pueden ser conceptos, reglas, algoritmos, procedimientos, etc., e incluso problemas dados en diferentes formas representativas.

Por otra parte, el *conocimiento procedimental* es considerado como conocimiento de los procedimientos a ejecutar paso a paso en una secuencia específica (Carpenter, 1986), en otras palabras, como secuencias de acción para la solución de problemas (Rittle-Johnson y Alibali, 1999). Hiebert y Lefevre (1986) distinguen dos partes diferentes dentro de este tipo de conocimiento. Una parte se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólica de las matemáticas, a veces denominado como la forma de las matemáticas. Esta parte incluye una familiaridad con los símbolos utilizados para representar ideas matemáticas y una conciencia de las reglas sintácticas para escribir símbolos de una forma aceptable, sin requerir conocimiento de su significado. La otra parte consta de reglas, algoritmos y procedimientos empleados para resolver tareas matemáticas. Gran parte de los procedimientos guían la manipulación de símbolos, aunque el conocimiento procedimental también incluye estrategias para resolver problemas que no operan directamente sobre los símbolos. Este tipo de conocimiento, a diferencia del conocimiento conceptual, es pobre en relaciones: la relación principal es "después de".

Rittle-Johnson y colaboradores (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001; Rittle-Johnson y Star, 2007) incluyen en este conocimiento, además de la capacidad de ejecutar secuencias de acción para resolver los problemas, la capacidad de adaptación de los procedimientos conocidos para problemas nuevos. Autores como Anderson (1993), Baroody (2003) y Rittle-Johnson et al. (2001) indican que este tipo de conocimiento se considera generalmente como el conocimiento de las operaciones y de las condiciones en las cuales pueden ser aplicadas para alcanzar ciertos objetivos.

Haapasalo y Kadijevich (2000) distinguen que el conocimiento procedimental denota la utilización dinámica y exitosa de normas especiales, algoritmos o procedimientos de representación en forma pertinente, que usualmente requieren, no sólo el conocimiento de los objetos que se utilizan, sino también el conocimiento del formato y la sintaxis para el sistema de representación mediante el cual se expresan.

Autores como Skemp (1976), y más recientemente Kadijevich y Haapasalo (2001), contrastan ambos tipos de conocimiento señalando que el conocimiento procedimental (instrumental en términos de Skemp) es esencial cuando estamos manipulando expresiones sin pensar en su significado, de forma en parte automática e inconsciente, y el conocimiento conceptual (relacional en términos de Skemp) entra en juego cuando necesitamos recurrir a qué significan esas expresiones para tomar decisiones o para interpretar un resultado obtenido, requiriendo un pensamiento consciente.

Los psicólogos cognitivos utilizan el término "conocimiento declarativo", para contrastarlo con el conocimiento procedimental, y lo definen como el conocimiento de hechos (McCormick, 1997). En relación a este tipo de conocimiento McCormick señala que mientras que el conocimiento conceptual pone el foco en las relaciones el conocimiento declarativo puede ser una colección de hechos no relacionados. Además el conocimiento declarativo corresponde a un conocimiento inerte mientras que el conocimiento conceptual puede ser parte de un proceso activo.

### 3.10.1 Interacción entre el Conocimiento conceptual y el procedimental

Desde hace ya varias décadas investigadores interesados en la cognición matemática (ej., Hiebert y Wearne, 1986; Rittle-Johnson y Siegler, 1998) han intentado entender cómo los escolares usan su conocimiento conceptual y procedimental para responder a preguntas de matemáticas, partiendo de la consideración de que no pueden ser totalmente competentes en matemáticas si son deficientes en alguno de estos dos tipos de conocimiento o si han adquirido ambos pero los mantienen como entidades separadas. Esta línea de indagación ha encontrado obstáculos destacados debido a la compleja relación existente entre los dos tipos de conocimiento mencionados y la dificultad de medir directamente el conocimiento conceptual, el cual suele inferirse a través de la observación de los procedimientos específicos para los que presumiblemente es un requisito previo (Carpenter, 1986). Los principales avances en conocimiento conceptual son difíciles de identificar, y los conceptos parecen ser aplicados en dominios locales antes de que sean ampliamente generalizados.

Las interacciones entre el conocimiento conceptual y procedimental influyen en el desarrollo de habilidades matemáticas. Hiebert y y Lefevre (1986) reconocen múltiples interacciones entre ambos tipos de conocimiento. Indican que dado que los escolares con rico conocimiento conceptual serán más flexibles en su elección de procedimientos para resolver problemas ya que la flexibilidad parece estar basada en alguna comprensión de relaciones, la pregunta que se hacen es ¿cómo los procedimientos están enlazados con el conocimiento conceptual para hacer posible esta flexibilidad? El conocimiento conceptual por sí solo no es suficiente para dar cuenta de los avances en el conocimiento procedimental.

Sin embargo, después de décadas de investigación, estas interrelaciones son aún objeto de debate, y los resultados empíricos no son concluyentes. Los autores señalan un origen de estos problemas: los diferentes tipos de conocimientos y habilidades aparecen entrelazados en la conducta, por lo que es difícil medirlos válidamente y de manera independiente el uno del otro (Schneider y Stern, 2010).

Algunas de las investigaciones realizadas concluyen que los niños adquieren el conocimiento conceptual antes que el conocimiento procedimental, otras sugieren que el desarrollo de ambos conocimientos se produce en orden inverso, y otras en cambio que la adquisición de ambos conocimientos se produce de forma conjunta (Hallett, Nunes y Bryant, 2010). Este último es el caso de Rittle-Johnson y colaboradores (Rittle-Johnson y Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler, y Alibali, 2001; Rittle-Johnson y Siegler, 1998), quienes han argumentado que el conocimiento conceptual y procedimental continuamente y de manera progresiva, se estimulan mutuamente, sin que ninguno necesariamente preceda al otro.

Sfard (2001) coincide en estas argumentaciones expresando que, en el proceso de aprendizaje, el sentido de la comprensión de un concepto y la habilidad para aplicarlo son como dos piernas que hacen posible moverse, gracias a que nunca están exactamente en el mismo lugar.

## 3.11 Sentido

Un aspecto relevante en la construcción del conocimiento es que éste se realice con sentido. Peltier (2003) considera la necesidad de impregnar de sentido el conocimiento como un slogan de la pedagogía vigente durante las últimas décadas. Dicho slogan tiene su apoyo en la idea de que un conocimiento no puede ser funcional sino en la medida en que es portador de sentido para quien lo posee. De manera breve se podría decir que un conocimiento es portador de sentido para un sujeto si este último es capaz de identificar un campo de aplicación de este conocimiento. Esta concepción pedagógica del aprendizaje ha dado lugar a que se tengan en cuenta en la enseñanza y en la investigación constructos como sentido numérico (Castro, 2008; Sowder, 1988), sentido operacional (Slavit, 1995, 1999), sentido simbólico (Arcavi, 1994), sentido estructural o de estructura (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006; Linchevski y Livneh, 1999; Novotná, Stehlikova y Hoch, 2006, Novotná y Hoch, 2008), entre otros. Siendo el término sentido numérico el que está más consolidado en la literatura de Educación Matemática.

En todos estos casos se considera a los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos. Son términos asociados a una visión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas centrada en promover la comprensión de las matemáticas (Molina, 2006).

Cuando Peltier (2003) plantea su reflexión sobre la idea de sentido lo hace desde tres puntos de vista: filosófico, psicológico y didáctico, nos detenemos en los dos últimos.

Para el punto de vista psicológico se centra en Vergnaud (1990), en su teoría sobre significados y significantes. Según Vergnaud, el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. El sentido de una situación lo constituyen los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante. Vergnaud define esquema como una totalidad organizada que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. En cuanto a dar sentido a los conceptos matemáticos, Vergnaud, sostiene que son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos. No quiere decir que el sentido esté en las situaciones mismas, ni en las palabras, ni en los símbolos matemáticos, sino en las relaciones que el individuo establece con los mismos, y el significado que les atribuye. Se dice que una representación simbólica, una palabra o un enunciado matemático tiene sentido, o varios sentidos, o ningún sentido para tales o cuales individuos. Por ejemplo, el sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en juego para tratar las situaciones a las cuales el sujeto se enfrenta y que implican la idea de adición. Es también el conjunto de esquemas que puede poner en juego para operar sobre los símbolos numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representa la adición.

Para el punto de vista didáctico Peltier toma las teorías de Brousseau (1986) quien considera que el sentido de un conocimiento está sostenido por tres conjuntos: un conjunto de situaciones en las que el conocimiento emerge como teoría matemática (semántica); un conjunto de problemas a lo que el conocimiento da solución (pragmática) y un tercer conjunto el de las concepciones (historia personal y colectiva). Peltier concluye que sólo se puede estar seguro de que un estudiante dispone de un concepto matemático con sentido cuando es capaz de movilizarlo, sin ayuda, en situaciones complejas en las que entra en juego el concepto y los diferentes teoremas en acción asociados. Esto requiere que el estudiante haya tenido la necesidad de actuar bajo su propia responsabilidad, con suficiente frecuencia, sobre un tipo concreto de tareas relacionadas con un concepto y haya tenido que plantearse preguntas fundamentales en relación con el significado del concepto.

Por último, el autor señala que la creación de sentido en las matemáticas y con las matemáticas es el objetivo en general para la educación matemática, tal como se refleja en el espíritu de los estándares de NCTM. Esto implica la significación de todas las actividades en las que uno se involucra, la capacitación que proporciona para entender y manipular las situaciones, y la utilidad de las herramientas matemáticas para avanzar en las matemáticas y más allá de las matemáticas.

## 3.12 Flexibilidad

El concepto flexibilidad se encuentra relacionado con el constructo sentido estructural así como con el sentido numérico (Castro, 2008). En el trabajo de Zaldívar, Sosa y López (2005) se llega a una definición de flexibilidad partiendo de la definición de una cualidad contraria, la rigidez de pensamiento. La palabra rigidez proviene de la palabra latina rígidus que significa yerto, entumecido, estancado. Ante esto, recogen definiciones sugeridas por Petrovsky (1988), quien señala que “rigidez del pensamiento es una forma fijada de conducta que se expresa en la repetición persistente y espontánea, o continuación, de determinado acto de conducta” (p. 37) (a menudo en las situaciones que requieren objetivamente la interrupción o variación de dicha conducta). Lo más significativo de la anterior definición de rigidez está en reconocer que ésta sólo podrá considerarse como una cualidad del pensamiento cuando se ofrezca resistencia a un cambio que se hace necesario objetiva o subjetivamente. O sea, ser rígido no es mantener posturas estables frente a situaciones que lo ameriten, sino, mantenerlas cuando lo que se impone o desea es la variación, el cambio.

Lo mismo debe aplicarse a la flexibilidad. Ser flexible no es cambiar por cambiar el camino, el método, la vía, la forma de actuar, etcétera, cuando no es conveniente por condición externa, sino, hacerlo cuando resulta necesario o cuando resulta del proceso de desarrollo consciente; nivel que se alcanza cuando el alumno determina explorar todas las vías posibles porque resulta productivo para su desarrollo personal. Estos autores indican que la manifestación de la flexibilidad del pensamiento debe darse en tres etapas o momentos: en la planeación de la solución de una tarea, en el proceso de solución de la misma y, por último, en el análisis del resultado obtenido.

Estos autores definen la flexibilidad del pensamiento como, “la particularidad del proceso del pensamiento que posibilita el empleo de los recursos cognitivos en la búsqueda de alternativas para la planeación, ejecución y control de la actividad cognoscitiva y su resultado” (p.3).

Esta cualidad del pensamiento se puede promover a través del ordenamiento y reordenamiento de los conocimientos en atención a diferentes puntos de vista (Ballester, 1999).

Desde la educación matemática diversos autores han dirigido su atención hacia la flexibilidad. Carpenter (1986) aborda este concepto en el contexto de la resolución de problemas. Manifiesta que el desarrollo a niveles más avanzados de resolución de problemas se caracteriza por un incremento en flexibilidad. Este aumento de la flexibilidad es posible gracias a una base conceptual cada vez más rica, con los procedimientos más eficaces, así como el mantenimiento de los vínculos entre ellos. La flexibilidad se manifiesta en la elección de los procedimientos para la resolución de problemas y en la naturaleza de las estrategias elegidas. Los escolares dotados de flexibilidad pueden utilizar una variedad de procedimientos para resolver el mismo problema y puede resolver los problemas que no pueden ser fácilmente modelados. La clave para la flexibilidad en elegir diferentes procedimientos para resolver problemas parece descansar en una comprensión de relaciones entre diferentes tipos de problemas.

La flexibilidad incorpora el conocimiento de múltiples maneras de resolver problemas y cuándo usarlas (Kilpatrick et al., 2001; Star, 2005, 2007) y es un componente importante de la competencia matemática (Beishuizen, Van Putten y Mulken van, 1997; Blöte, Van der Burg y Klein, 2001; Dowker, 1992; Star y Seifert, 2006). Esta flexibilidad se desarrolla de forma gradual conforme el estudiante desarrolla su comprensión (Sfard y Linchevski, 1994).

En el contexto del trabajo con expresiones algebraicas Tall et al. (2001) señalan que un estudiante que ha entendido cómo manipular expresiones como conceptos mentales, puede poseer una variedad de métodos y elegir el más eficiente para adaptarse a una situación dada. En este sentido el simbolismo es muy útil dada su doble interpretación, como proceso y objeto, que permite ir más allá y pensar en los símbolos como conceptos mentales que se pueden manipular.

## 3.13 Estructura

De acuerdo con los teóricos, comprender puede interpretarse como ser capaz de percibir orden y estructura (Sfard, 2001). En esta línea Zorn (2002) afirma que una comprensión profunda de las matemáticas básicas significa disponer de habilidad para detectar, reconocer y explorar la estructura, así como para establecer conexiones útiles entre estructuras diferentes. Sfard (2001) afirma que si ver la estructura es útil en cualquier dominio del conocimiento, en matemáticas puede ser la esencia misma del aprendizaje. Aprender matemáticas implica ver estructuras en varios niveles diferentes: primero, las estructuras que se pueden extraer directamente de cosas concretas y acciones y que constituyen los conceptos matemáticos básicos (ejemplo, los números naturales, formas geométricas simples), luego las estructuras obtenidas a través de investigación de relaciones entre estas estructuras matemáticas fundamentales, y así sucesivamente.

Por su parte Mulligan, Vale y Stephens (2009) y Mulligan y Mitchelmore (2009) insisten en la importancia del conocimiento de la estructura matemática para la competencia matemática, incluso en el caso de los niños más pequeños. Estos autores argumentan que la estructura es esencial para el desarrollo de la representación matemática, la simbolización, la abstracción y la generalización, tal y como ponen de manifiesto las teorías que sostienen que la abstracción es la base del aprendizaje de las matemáticas. Mulligan, Mitchelmore y Prescott (2005) sostienen incluso que el rendimiento en matemáticas en la escuela temprana está estrechamente relacionado con el desarrollo del niño y de la percepción de estructuras matemáticas. Arcavi (2003) y Booth y Thomas (2000) también argumentan la existencia de una correlación positiva entre el reconocimiento de patrones y estructura y el rendimiento matemático.

Los diversos autores que aportan estas diversas consideraciones sobre la importancia y el papel de la estructura, en muchos casos, no entran a definir qué entienden por este término. En este sentido Mamona-Downs y Downs (2008) considera sorprendente el que la noción de estructura no se investigue más en profundidad, dado la frecuencia con la que se invoca. En el ámbito de la educación matemática la palabra estructura permite varios usos. Incluso para una misma persona este término tiene diferentes significados, dependiendo del contexto en el que se utilice, y puede significar diferentes cosas para diferentes personas. Desde un punto de vista amplio, se puede decir que el término estructura se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad (Hoch y Dreyfus, 2004). Con este mismo significado y para un ámbito general se presenta la idea de estructura cuando se hace una búsqueda de este vocablo a través de Internet: Estructura (del latín structūra) es la disposición y orden de las partes dentro de un todo. También puede entenderse como un sistema de conceptos coherentes enlazados, cuyo objetivo es precisar la esencia del objeto de estudio. Así mismo el diccionario de la Real Academia Española (2001) en su definición de este término, refiere a la a distribución de las partes de una cosa y a su orden.

El término estructura transmite en el lenguaje común la percepción de un objeto total junto con una aprehensión de cómo se construye a partir de los componentes más básicos (Mamona-Downs y Downs, 2008). En el nivel más global, la estructura se puede considerar como un tejido que contiene unido todo el conocimiento matemático. En un contexto más local, la palabra estructura se invoca en relación con la generalización y la abstracción. Por ejemplo, Mason (1989, p.5) afirma que “la abstracción matemática está íntimamente relacionada con el sentido matemático de la estructura”.

Como observan Mamona-Downs y Downs algunas veces la estructura se toma como sinónimo de patrón. Así ocurre en el caso de Van Hiele (1986) quien dice “pero con la palabra patrón expresamos lo mismo que con la palabra estructura” (p.23). Sin embargo, como señalan estos autores la palabra patrón tiene una connotación de percepción de simetría, regularidad o iteración que la estructura no necesariamente tiene o subraya. La estructura es un medio para almacenar información de forma unificada. Por lo tanto, la estructura se considera como una base de conocimientos, la estructura refleja cómo la mente es capaz de organizar la información. Estas autores sustentan que estructura se refiere a cómo las imágenes globales interactúan con el análisis local.

Castro, Rico y Romero (1997, p.362) por su parte definen la estructura como “un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componerlos y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes”. En este caso se asigna el vocablo estructura a un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, alguna operación u operaciones, así como ciertas propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones. Por ejemplo, la estructura del conjunto de los números naturales con la operación suma que es de semigrupo conmutativo, comprende los citados números, junto a la operación de suma y ciertas propiedades, entre ellas la conmutativa.

TERCERA PARTE

## 3.14 Estructura en álgebra escolar

Investigadores como Kieran (1989), Morris (1999) y Warren (2001) han señalado de que el conocimiento de la estructura de la aritmética y el álgebra se encuentra inmersa en la realización de una variedad de tareas matemáticas como la interpretación de expresiones, el cálculo de valores de expresiones, el juzgar la equivalencia de expresiones y realizar transformaciones que preserven la equivalencia (Chaiklin y Lesgold, 1984). Este conocimiento de las estructuras incluye, por ejemplo, saber que un operador sólo se aplica al número dispuesto inmediatamente a su derecha, cuando no hay paréntesis, o conocer que la expresión a + b + c puede ser agrupada como (a + b) + c ó como a + (b + c) (Molina, 2006).

La capacidad para manipular símbolos algebraicos exitosamente requiere entender las propiedades estructurales de las operaciones y relaciones matemáticas que distinguen las transformaciones permitidas de los que no lo son. Estas propiedades estructurales constituyen los aspectos semánticos de álgebra (Booth, 1989).

La experiencia previa de los estudiantes con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra. Kieran (1998) sugiere la representación de problemas verbales mediante ecuaciones, la resolución de sentencias numéricas, y la simplificación y comparación de expresiones aritméticas complejas, como actividades que permiten trabajar un enfoque estructural de la aritmética.

Trigueros y Ursini (2008) consideran que un uso flexible de variables es esencial para resolver ecuaciones algebraicas complejas al observar que los estudiantes exitosos atienden a la estructura y no inician la manipulación de expresiones a ciegas. El proceso de simplificación de expresiones simples, puede, inicialmente ser realizado fácilmente por analogía a un proceso numérico. Sin embargo, para expresiones más complejas, se requiere que el estudiante sea capaz de desarrollar un sentido de las operaciones sobre expresiones algebraicas, como objetos que tienen existencia propia. Las ecuaciones algebraicas son representaciones estructurales que requieren una perspectiva no aritmética tanto en el uso del signo igual $(=)$ como en la naturaleza de las operaciones que se requieren (Kieran, 1992).

Kirshner (1989) sostiene que la capacidad para aprehender la estructura sintáctica de una expresión algebraica es fundamental para el rendimiento eficaz en álgebra elemental. Una factorización sencilla como $3x^2-6=3\cdot\left(x^2-2\right)$ requiere que la sustracción sea reconocida como la operación dominante (al precedente) de la expresión inicial, que $3x^2$ sea interpretada como $3\cdot\left[x^2\right]$ en lugar de $[3x]^2$, que 6 sea interpretado como el producto de $3(2)$ y así sucesivamente. Kirshner presenta una tabla elaborada por Schwartzman (1977) quien proporcionó un sistema de niveles de operación que facilita la descripción de la convención sintáctica (ver Tabla 3.2). Usualmente concebidas, las reglas sintácticas asociadas con la jerarquía de las operaciones son de naturaleza proposicional.

*Tabla 3.2.* Descripción de la convención sintáctica - Schwartzman (1977)

| Convención sintáctica utilizando la jerarquía de niveles de operación | | |
|---|---|---|
| Nivel 1 | Adición | Sustracción |
| Nivel 2 | Multiplicación | División |
| Nivel 3 | Exponenciación | Radicación |
| Convención sintáctica: Las operaciones de nivel superior tienen prioridad sobre las operaciones de nivel inferior. El nivel 3 se dice que es superior al nivel 2, el cual es superior al nivel 1. | | |

## *3.15 Estructura de una expresión algebraica*

De forma análoga a como Hoch (2003) utiliza los términos forma y orden, Liebenberg, Linchevski, Olivier y Sasman (1998) los términos estructura superficial y estructura oculta y Kieran (1989) los términos estructura superficial y estructura sistémica, en este trabajo distinguimos entre dos tipos de estructuras de una expresión: la estructura externa e interna de una expresión algebraica.

Según Hoch y Dreyfus (2004) la forma (estructura externa) está relacionada con la apariencia externa de una expresión algebraica y el orden (estructura interna) con las relaciones que mantienen los componentes de dichas expresiones entre sí y con otras estructuras. La estructura externa hace referencia a los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan y el orden de los diferentes elementos. Por otra parte, la estructura interna se refiere al valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo. Dos expresiones que comparten estructura interna son equivalentes, y viceversa. Mediante el proceso de simplificación o transformación de una expresión, el cual implica un cambio de estructura externa, puede revelarse la estructura interna de la misma (Castro, 2012).

Por ejemplo, de entre las siguientes expresiones, podemos decir que la a), b) y d) tienen la misma estructura interna y diferente estructura externa, mientras que la a) y c) tienen la misma estructura externa pero no interna, al no ser equivalentes.

a) $(x+3)^2$; b) $x^2+9+6x$; c) $(3x+6)^2$; d) $x^2+9x-3x+10-1$

Al considerar expresiones con la misma estructura externa, podemos establecer diferencias en cuanto a su complejidad. Así, por ejemplo, las siguientes expresiones comparten estructura externa al ser diferencias de cuadrados, pero la primera es más simple que las otras dos: $a^2-b^2$, $4x^6y^4-25z^8$ y $(x-3)^4-(x+3)^4$.

Desde esta perspectiva la estructura de una expresión, algebraica o aritmética, se considera como una propiedad matemática objetiva de la expresión.

Por otra parte se puede hablar de las relaciones internas identificables/contenidas en una expresión algebraica, término que utilizamos para referirnos a las características de sus elementos y las relaciones existentes entre los mismos que condicionan su estructura interna. Por ejemplo, en la expresión b) identificamos las siguientes relaciones internas: 9 es un cuadrado perfecto y, a su vez, 6 es el resultado del producto de 2, la raíz del término independiente y el coeficiente de $x^2$. Estas relaciones son esenciales para reconocer la estructura interna de la expresión y para reconocer la equivalencia en estructura interna de dos expresiones (por ejemplo, las expresiones a y b).

## *3.16 Sentido estructural algebraico*

En este trabajo, de forma paralela a la definición de otros constructos que utilizan la denominación de sentidos, tales como el sentido numérico o el sentido simbólico, y partiendo de la definición de estructura presentada, utilizamos el término sentido estructural algebraico[1] para referir a **una competencia cognitiva o un conjunto de capacidades necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas**. Este conjunto de habilidades requieren el uso combinado de conocimiento conceptual (por ejemplo, el concepto de equivalencia) y procedimental (por ejemplo, la jerarquía de las operaciones).

Este término fue introducido por Linchevski y Livneh (1999) en su reacción a la definición de conocimiento estructural de Kieran (1988) como la capacidad de identificar todas las formas equivalentes de una expresión. Las autoras expresan su desacuerdo con Kieran y sugieren incluir, bajo el término de sentido estructural, dicha capacidad junto a la capacidad de discriminar entre las formas pertinentes de realizar la tarea ─por lo general una o dos formas─ y todas las demás.

Posteriormente, Hoch y Dreyfus, interesados en este constructo han ido elaborando progresivas definiciones de sentido estructural restringiéndose al contexto del álgebra escolar. Su primera definición tentativa fue presentada por Hoch en el CERME de 2003: "reconocer la estructura algebraica y utilizar las características apropiadas de una estructura en un contexto dado como guía para elegir las operaciones a realizar" (p. 2). Hoch sugirió que un estudiante que se inclina por un método efectivo y minucioso en la transformación de una expresión algebraica está demostrando poseer buen sentido estructural.

En años posteriores Hoch y Dreyfus (2004, 2005) precisan algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible

[1] En este trabajo nos referimos al sentido estructural algebraico, aunque para abreviar lo denominemos sentido estructural. Otros autores como Lüken (2012) utilizan el término sentido estructural en contextos no algebraicos para referir a habilidades relacionadas con la percepción de patrones y estructura en situaciones matemáticas de muy diversos tipos (ej., un reloj, configuraciones puntuales,…)

realizar y cuáles de éstas son de utilidad. Más recientemente (Hoch y Dreyfus, 2006) proponen una definición más elaborada, formulada de manera operacional por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de Educación Secundaria (ver ejemplos en la Tabla 3.3).

SS1. Reconocer una estructura familiar en su forma más simple,

SS2. Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja,

SS3. Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

*Tabla 3.3.* Descriptores del Sentido Estructural (Hoch y Dreyfus, 2006)

| Descriptor | Ejemplos<br>(Identidad notable: Diferencia de Cuadrados) |
|---|---|
| SS1 | Al factorizar $81-x^2$,<br>• reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados,<br>• e identificar los factores. |
| SS2 | Al factorizar $(x-3)^4-(x+3)^4$<br>• tratar los binomios $(x-3)^2$ y $(x+3)^2$ como una sola entidad,<br>• reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados,<br>• e identificar los factores implicados. |
| SS3 | En las tareas anteriores,<br>• aplicar la identidad notable diferencia de cuadrados $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ para factorizar dichas expresiones. |

En función de la complejidad de los términos que componen las expresiones con las que se esté trabajando, los autores subdividen los descriptores SS2 y SS3 en dos y tres sub-descriptores respectivamente:

SS2.a Donde el término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma/resta

SS2.b Donde el término compuesto contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia

SS3.a Donde la estructura está en su forma más simple

SS3.b Donde el término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma/resta

SS3.c Donde el término compuesto contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia

Lo que caracteriza a SS2.a, SS2.b, SS3.b. y SS3.c es la necesidad de tratar términos compuestos como si fueran una entidad. Este refinamiento de la definición aportada previamente por Hoch y Dreyfus está influenciado por su consideración de tareas en las que es necesario realizar transformaciones de expresiones algebraicas. Observamos que habilidades como dividir una entidad en subestructuras y apreciar conexiones mutuas entre estructuras, recogidas en su definición previa, no son enfatizadas al no considerarse incluidas dentro de estos descriptores. Ante esta ausencia, en Vega-Castro (2010) añadimos a esos tres descriptores, un cuarto descriptor "Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas", que en dicho trabajo se mostró de utilidad para analizar el sentido estructural que estudiantes de bachillerato evidenciaban al construir expresiones con una estructura dada. Este descriptor hace referencia a una habilidad que puede ser medida por medio de tareas tales como la agrupación de expresiones según su misma estructura o la construcción de expresiones con estructura igual a otra dada. En el citado trabajo el descriptor[2] se utiliza subdividido en dos:

SS4.a Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica

SS4.b Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas (por ejemplo del numerador y del denominador).

En su búsqueda de una definición de sentido estructural más amplia, Hoch (2007) entrevistó a varios expertos en investigación en Educación Matemática para obtener sus puntos de vista sobre sentido estructural. A continuación recogemos algunas de sus afirmaciones en relación con dicho constructo:

[2] Un descriptor representa una ocurrencia de un elemento de contenido concreto (por ejemplo, una tarea) en una actividad (Real Academia Española).

- El sentido estructural implica prestar atención a la totalidad de una expresión algebraica, viéndola como una estructura completa que se compone de partes y reconociendo las manipulaciones que es posible llevar en cada una de esas partes.

- Ver la estructura es ser capaz de generalizarla. El sentido estructural es hacer algo con anticipación, entendiendo como tal un sentido donde se está nombrando o reconociendo algo como un ejemplo de algún concepto y se es capaz de categorizarlo.

- El sentido estructural consiste en la capacidad de ver una fórmula desde el punto de vista del concepto, verla como una entidad, y reconocer para lo que es útil. Su desarrollo es un proceso largo y lento que se inicia en el tercer grado.

- Una estructura algebraica es una capa de relaciones entre relaciones, cantidades u operaciones. El sentido estructural es la capacidad de reconocer la estructura cuando no es obvia y la capacidad de mirar la escritura algebraica de manera diferente con el fin de saber cuándo hay que transformar, sustituir, etc.

- La forma de dar sentido al mundo es mediante la estructuración. Los estudiantes deberían llevar una colección de diferentes estructuras que puedan activarse como correspondan.

Observamos que el constructo sentido estructural no sugiere un concepto nuevo, sino que enfatiza cierta forma de "poseer" el conocimiento. Se manifiesta a través de unos signos externos cuando el sujeto trabaja con expresiones aritméticas y, sobre todo algebraicas. Estos signos externos, producidos por una serie de habilidades y capacidades que se ponen en juego, son, entre otros, reconocer expresiones que son equivalentes sin necesidad de operar, pudiendo ser cambiada una por otra en caso necesario; conocer qué expresión entre las equivalentes es más conveniente utilizar para cada ocasión; saber qué expresión, entre todas las equivalentes, es la más simple de todas y cuando es conveniente sustituir una por otra; entre otros.

Linchevski y Vinner (1990) sugieren que uno de los componentes para el éxito en las matemáticas escolares es la capacidad para identificar estructuras ocultas (internas) en términos algebraicos. La forma compleja de una estructura es obtenida cuando una variable o parámetro es reemplazada por una expresión polinómica. Esto es cuando reemplazamos la expresión $a^2 - b^2$ por la expresión $(x-3)^4 - (x+3)^4$, la cual representan una diferencia de cuadrados o la parte extendida del producto de una suma por diferencia.

Algunos autores, entre ellos Hoch y Dreyfus (2006) y Molina (2006), relacionan este constructo con el de sentido simbólico. En el nivel educativo de secundaria, Hoch y Dreyfus (2006) consideran que el sentido estructural es una extensión del sentido simbólico que puede tener mucho que ver con la experiencia y algo en común con la intuición. Molina (2006) por su parte, argumenta que el sentido estructural comprende aspectos de los sentidos numérico, operacional y simbólico en tanto que muchas de las evidencias de sentido estructural destacadas por Hoch y Dreyfus (2004, 2005, 2006) pueden ser reconocidas como evidencias de sentido simbólico.

Otros autores, si bien no usan el término sentido estructural, han dirigido sus trabajos a identificar habilidades importantes para el uso eficiente de las técnicas algebraicas. Uno de estos autores es Boero (2001) quien destaca la capacidad de anticipación, la cual define como el proceso mental a través del cual una persona prevé la forma final de una expresión algebraica y la dirección general de las transformaciones necesitadas para obtenerlo. Por su parte, Kieran (2008) emplea el término comprensión conceptual de técnicas algebraicas dentro del cual incluye identificar diferentes formas de las expresiones algebraicas y las ecuaciones (ej., forma cuadrática, forma líneal), reconocer relaciones entre expresiones (ej., la equivalencia de expresiones), ser capaz de explicar y justificar los cambios realizados en expresiones algebraicas.

Trigueros y Ursini (2008) enumeran otras habilidades importantes las cuales identifican al comparar el trabajo en expresiones algebraicas de estudiantes exitosos y no exitosos: un uso flexible de variables, la posibilidad para diferenciar e integrar esos usos a través del proceso de solución, la consideración de expresiones algebraicas como entidad total, la capacidad para analizar problemas desde el inicio en lugar de iniciar haciendo manipulaciones a ciegas y la capacidad de descubrir algunas estructuras en la ecuación.

Banerjee (2011), a partir de definir la estructura como la capacidad de ver las relaciones entre los componentes de una expresión y sacar conclusiones sobre su igualdad o desigualdad, argumenta que esto requiere de la capacidad de identificar los componentes que constituyen una expresión y las formas en que contribuyen al valor de la expresión.

### 3.16.1 Descriptores del sentido estructural

A partir de la literatura consultada y de nuestra reflexión a lo largo del trabajo que venimos realizando en relación con este constructo identificamos las siguientes habilidades como reflejo de los descriptores del sentido estructural algebraico. Para cada una de ellas mostramos un ejemplo (Tabla 3.4). Cuando se usa el término expresión, salvo que se precise, puede tratarse de una expresión aritmética o algebraica. Estos descriptores no se consideran excluyentes. Algunos de ellos implican las acciones que describen otros descriptores. Por ejemplo el descriptor C implica el descriptor A. Presentamos los descriptores clasificados según si implican o no trasformaciones o construcción de expresiones. Cuando se utiliza de aquí en adelante el término estructura, sin mayor precisión, se refiere a la estructura externa de la expresión y a las relaciones internas de la misma.

*Tabla 3.4.* Descriptores del Sentido Estructural propuestos en este trabajo.

| DESCRIPTOR | EJEMPLOS |
|---|---|
| **No implican transformar, modificar ni construir expresiones** (se basan en un análisis de las expresiones) | |
| A. Reconocer relaciones (ej., igualdad, factor, múltiplo, potencia, raíz, subestructuras comunes…) entre expresiones o partes de expresiones. (en otras palabras reconocer relaciones internas de la expresión) | La expresión $(x+5)4x$ es múltiplo de 4, de $x$ y de $(x+5)$. Los dos primeros términos de los factores que componen la expresión $(7-5)(7+5)$ son iguales entre sí, al igual que los segundos términos de los mismos. |
| B. Reconocer una estructura externa conocida/familiar o presente. | La expresión $x^2+9+6x=0$ es una ecuación de segundo grado. Las expresiones $5(5+2)$, $7(7+2)$, $39(39+2)$ y $x(x+2)$ tienen la misma estructura externa. |
| C. Reconocer una estructura interna conocida/familiar o presente. | El miembro izquierdo de la ecuación anterior tiene la estructura interna de la identidad notable “cuadrado de una suma”. Las expresiones $(x+3)^2$ y $x^2+9+6x$ tienen |

*Tabla 3.4.* Descriptores del Sentido Estructural propuestos en este trabajo.

| DESCRIPTOR | EJEMPLOS |
|---|---|
| | la misma estructura interna. |
| D. Extraer información relevante a partir de la estructura externa de una expresión, relativa al objeto que representa. | Los cortes de la función $(x-2)(x+5)=0$ con el eje de abscisas son (0, 2) y (0, -5). |
| E. Reconocer el dominio de definición o de validez de la expresión | La expresión $\frac{x(x+2)}{x}=x+2$ está definida para valores reales de x, salvo el cero. |
| **Implican construir expresiones** (total o parcialmente) | |
| F. Reproducir numéricamente la estructura de una expresión simbólica (Implica particularizar). | Construir las expresiones $5(5+2)$, $7(7+2)$, $39(39+2)$, como ejemplos de expresiones numéricas con la estructura $x(x+2)$. |
| G. Expresar con simbolismo algebraico la estructura de una expresión aritmética (Implica generalizar y expresar simbólicamente dicha generalización). | Expresar como $x(x+2)$ la estructura de las expresiones $5(5+2)$, $7(7+2)$, $39(39+2)$. |
| H. Reproducir una estructura dada (dentro del mismo sistema de representación ya sea simbolismo numérico o algebraico). | Utilizando simbolismo algebraico, construye expresiones con la misma estructura que la siguiente expresión $x^4-14x^2+49$.<br>Propón expresiones aritméticas que tengan la misma estructura que las siguientes $5(5+2)$, $7(7+2)$, $39(39+2)$. |
| I. Completar una expresión para obtener otra con una estructura interna y externa concreta. | Completar la siguiente expresión para obtener una igualdad correcta: $(x-5)(x+5)=\boxed{\_\_}-25$ |
| **Implican modificar expresiones** | |
| J. Modificar una expresión para obtener una estructura interna y externa particular. | Utilizando las igualdades notables que conoces, corrige la siguiente expresión de forma que la igualdad sea correcta $x^4-14x^2+49=(x^2+5)^2$ |

*Tabla 3.4.* Descriptores del Sentido Estructural propuestos en este trabajo.

| **DESCRIPTOR** | **EJEMPLOS** |
|---|---|
| **Implican trasformar** (trasformar implica conservar la estructura interna) | |
| K. Identificar subestructuras dentro de una expresión y tratarlas como una sola entidad al trasformar la expresión. | Hacer trasformaciones tales como $(x+2)x+5(x+2)=(x+2)(x+5)$. |
| L. Trasformar la estructura externa de una expresión (sin afectar a su estructura interna). | Expresar $x^4-14x^2+49$ como cuadrado de una diferencia (o cualquier tarea de simplificación). |
| M. Identificar procedimientos utilizados en la trasformación de una expresión. | Identificar el modo en que se puede obtener la fracción $\frac{1}{x-7}$ a partir de la simplificación de la fracción $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$. |
| N. Anticipar el efecto de trasformaciones en la estructura de una expresión (esto incluye reconocer y considerar formas alternativas de trasformar una expresión) | Prever que la factorización del denominador en la fracción $\frac{3m^2(m+1)}{3m^4+9m^2}$ puede ayudar a su simplificación. |
| **Más general** | |
| O. Seleccionar procedimientos eficientes para abordar la tarea a realizar en función de la estructura de la misma y el objetivo que se persiga (esto es lo que se ha llamado **enfoque estructural**). | Trasformar la ecuación $5(33x-3)=15(24x-7)$ en $33x-3=3(24x-7)$, simplificando ambos miembros. |
| P. Leer expresiones escritas algebraicamente en sus diferentes formas. | Ejemplo $(3x^2\text{-}1)^2$ se puede leer como: "tres equis, elevado al cuadrado, menos uno, todo elevado al cuadrado" o "cuadrado de tres equis, elevado al cuadrado, menos uno. |
| Q. Escribir algebraicamente expresiones expresadas verbalmente. | Es el proceso inverso al anterior. |

# Capítulo 4. Metodología de la Investigación y descripción del estudio

En este capítulo recogemos la metodología utilizada en el estudio y los criterios que han delimitado las acciones realizadas y las decisiones tomadas sobre la investigación, con intención de proporcionar coherencia al trabajo. Respecto al primer punto recogemos algunas ideas fundamentales sobre la metodología de diseño y los experimentos de enseñanza los cuales dan sustento a la metodología de investigación utilizada. En el segundo punto nos centramos en exponer aquellos elementos que caracterizan nuestra investigación: conjetura que guía el experimento, sujetos participantes en el mismo, procesos de recogida de datos así como las herramientas utilizadas en el análisis de los mismos, justificando las razones que nos han llevado a ello.

## *4.1 Investigación de diseño*

Nuestra investigación es un experimento de enseñanza que se enmarca en el paradigma de la investigación de diseño. Se trata de un tipo de metodología de investigación, de naturaleza cualitativa que ha sido desarrollada en el campo de las Ciencias del aprendizaje (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Sobre la investigación de diseño, se encuentra en la literatura diferentes puntos de vista o delimitaciones de la misma. Por ejemplo, diSessa y Cobb (2004) señalan que se trata de un tipo de investigación sobre prácticas educativas que tienen como principal objetivo la mejora de las mismas. Por su parte Confrey (2006) destaca el uso en este tipo de investigaciones de tareas novedosas cuidadosamente escogidas y secuenciadas para la ocasión, y donde se estudia cómo los estudiantes aprenden algún contenido matemático guiados por el profesor. La mayoría de los autores (como hacen los que hemos recogido) en referencia a la metodología de diseño coinciden en señalar la interdependencia del diseño instruccional con la investigación (Molina et al., 2011).

El interés de esta metodología se centra en estudiar cómo se produce el aprendizaje en un contexto especialmente preparado mediante un diseño que presenta alguna novedad, ya sea concerniente con la metodología, con el contenido, o con ambos. El estudio y los análisis abarcan desde el inicio de la preparación del experimento, sigue por la puesta en práctica del mismo con un análisis sistemático de todo el sistema establecido: estrategias y herramientas de enseñanza, formas particulares de aprendizaje de los estudiantes, etc. Se considera en esta metodología la naturaleza sistémica del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación.

Una de las potencialidades de los estudios de diseño consiste en explicar por qué el diseño funciona, o no, a la vez que se sugieren formas de mejorarlo y adaptado a situaciones con diferentes circunstancias (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

Tabak (2004) centra su atención en los contextos naturales de formación en los procesos de enseñanza/aprendizaje y apunta que la investigación de diseño se adapta especialmente a estos contextos. Esta autora recoge los componentes esenciales que, según Turner y Meyer (2000), son necesarios para estudiar un contexto natural de aula:

a) Considerar más de una variable a la vez, esta consideración se sostiene por la idea de que el aprendizaje es un proceso multifactorial en el que intervienen poderosamente las interacciones entre los diferentes agentes del aula. La investigación de diseño pretende estudiar cómo los distintos factores condicionan el aprendizaje.

b) Las preguntas a responder en este tipo de estudios deben girar no solo en torno a ¿qué sucede? en el aula sino también a ¿cómo sucede? y ¿por qué sucede? algo.

c) Se requiere de un componente cualitativo para la recogida de los datos que hagan posible elaborar la trayectoria seguida para desarrollar el aprendizaje, día a día, a través de las interacciones del aula y conducir el aprendizaje de los individuos y del grupo.

d) Se requiere que el investigador esté presente en el aula. Este requisito contribuye a uno de los distintivos de la investigación basada en diseño. Se trata es la colaboración entre los participantes del entorno educativo dentro del cual se desarrolla el estudio.

Esta metodología de investigación es mucho más ambiciosa del mero diseño y prueba de intervenciones particulares. Exigen la inclusión de determinados supuestos y teorías específicas sobre la enseñanza y el aprendizaje. Reflejan un compromiso para comprender las relaciones entre teoría, plan de acción diseñado y puesta en práctica. El análisis previsto de la intervención específica puede contribuir a encontrar formas de mejorar la enseñanza y aprendizaje de un contenido específico (Valverde, 2012).

### 4.1.1 Metodología de la Investigación de Diseño

Si bien, aun ajustándose al mismo paradigma de investigación de diseño, las investigaciones difieren considerablemente entre ellas en diversos elementos, con el objetivo de evitar cierta dispersión, algunos investigadores proponen pautas o guía para el desarrollo de las mismas. Así lo hacen Collins, Joseph y Bielaczyc (2004) que en su propuesta recogen orientaciones para las diferentes fases de que consta el experimento.

a) En la implementación del diseño. La implementación del diseño no tiene por qué ser única en todos los casos, cada investigación de diseño se hará de la forma más adecuada según los objetivos del mismo. Debido a esta particularidad, se considera importante identificar los elementos centrales del diseño y describir cómo se articulan, como interactúan y son tratados en la práctica.

b) Modificación del diseño. El diseño puede ser modificado indicando las razones que justifican los cambios realizados. Uno de los propósitos en este tipo de investigación es mejorar el funcionamiento del diseño preparado. Si alguno de los componentes del equipo investigador, el profesor o los investigadores observan que alguno de los elementos de la propuesta no funciona correctamente, durante la experimentación, es necesario introducir cambios en la misma después de analizar y describir las causas atribuibles al fallo, informando así mismo de las novedades introducidas atribuibles a las decisiones tomadas.

c) Dimensiones de análisis. En los experimentos de diseño los investigadores deben atender las interacciones entre aprendices y entre estos y los elementos del entorno. De aquí que las dimensiones que se señalan sean:

*Cognitiva*, indagar sobre qué conocen los estudiantes antes de comenzar el aprendizaje, analizar cómo los conocimientos cambian a lo largo del tiempo.

*Interpersonal*, se trata de las relaciones e interacciones entre profesores, analizar si hay intercambio de conocimientos entre estudiantes, formas de responder a las preguntas de los estudiantes por los profesores.

*Grupal*, relacionada con la participación de los estudiantes, con la existencia, o no, de un sentido de identidad.

*Recursos*, las cuestiones relacionadas con esta dimensión tienen que ver con el tipo de recursos preparados y disponibles para la implementación, adecuación de los mismos e integración en el diseño, accesibilidad que los estudiantes tienen hacia los recursos.

*Institucional*, considera aspectos externos al aula, por ejemplo, que los padres de los estudiantes y los gestores de los centros apoyen el desarrollo del diseño.

d) Variables dependientes. Es relevante analizar al menos tres tipos de variables dependientes: del entorno, del aprendizaje, del sistema.

e) Variables independientes. Se señalan una gran cantidad de variables independientes, entre las que se encuentran: entorno, características de los aprendices, soportes técnicos, financiación, desarrollo profesional del profesor, trayectoria de la implementación.

f) Publicación de reportes sobre investigaciones de diseño. Los reportes sobre estudios de diseño han de incluir al menos cuatro elementos: Objetivos y elementos del diseño, contextos en los que se implementó, descripción de cada fase, resultados y aprendizajes derivados de la aplicación de este diseño (Valverde, 2012).

### 4.1.2 Evaluación de los experimentos de diseño

En las investigaciones de diseño, se señala como criterios de evaluación la fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización, y utilidad de la investigación (Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2001; Cobb y Gravemeijer; 2008; Confrey, 2006, Molina, 2006). Si bien, la validez y la fiabilidad (condiciones necesarias de toda investigación) en los estudios de diseño, su tratamiento es notoriamente diferente a como se hace en la investigación experimental (Barab y Kirshner, 2001, Valverde, 2012).

- La fiabilidad, se refiere a los resultados de la investigación, en qué medida las afirmaciones realizadas en función de dichos resultados se justifican a partir de los mismos. Se considera la sistematicidad del análisis, explicitación de los criterios que permiten realizar dicho análisis, descripción en detalle de las diferentes fases del análisis y justificación de los resultados del mismo, participación de algún investigador ajeno al estudio en el proceso de análisis.

- La replicabilidad, trata de la posibilidad de realizar un estudio similar. Dadas las características de este tipo de estudios, no es posible hacer una réplica fiel de los mismos. Lo que sí es posible hacer, es tomar el modelo elaborado por otros y repetirlo en otros contextos, situaciones o conocimientos.

- La generalización, los resultados de un experimento de diseño no pretenden ser generalizables en el sentido de crear leyes generales sino que la generalización está dirigida a que otros investigadores puedan tomar los resultados del experimento para impulsar nuevos experimentos.

- La utilidad, los resultados obtenidos en estos estudios podrán ser considerados por docentes adaptándolos a las condiciones de sus aulas. De aquí la necesidad de que queden claramente establecidos la relación entre aspectos teóricos y prácticos y el proceso seguido.

### 4.1.3 Fortalezas y limitaciones de los experimentos de diseño

Las fortalezas que se señalan a los estudios de diseño apuntan al hecho de ser un estudio relacionado con y para la mejora del trabajo en el aula. Así, se indica como elementos positivos la relación directa que se establece entre la teoría y la práctica educativa al tratar sobre el aprendizaje en los estudiantes promovidos por procesos preparados específicamente para ello, relacionando el aprendizaje de los estudiantes directamente con el modo en que ha sido promovido (Molina et al., 2011). Otros de los puntos fuertes que se señalan trata de la aplicación de teorías a la práctica y estudiar su viabilidad, proceso que se hace de forma reiterada con ánimo de mejorar dichas teorías. Se añade también el hecho de abordar problemas detectados en el aula y que repercuten en la enseñanza/aprendizaje. En otro sentido se apunta que estos estudios permiten la indagación y conducción de constructos nuevos que suelen ser ignorados en una visión continuista de los contenidos a enseñar.

En cuanto a las limitaciones se señala las dificultades surgidas al tratarse de aulas reales, la gran cantidad de datos que resultan (Collins et al., 2004, Molina et al., 2011). Otra dificultad se relaciona con el hecho de que muchas variables no estén controladas deliberadamente. Por otra parte sucede, a veces, que los datos son recogidos por distintos investigadores, hecho que puede producir problemas de coordinación.

### 4.1.4 Experimentos de enseñanza

Un experimento de enseñanza es un tipo de metodología que permite investigar procesos de enseñanza y aprendizaje. Los experimentos de enseñanza se enmarcan en la investigación de diseño (Molina, 2006; Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000).

Por lo general un experimento de enseñanza está compuesto por una secuencia de varios episodios de enseñanza. En la enseñanza, los agentes que intervienen son: a) un investigador-docente; b) los alumnos que pueden ser solo uno o varios (un grupo); c) los investigadores-observadores, también uno o varios. La duración del experimento es variable pudiéndose realizar en pequeñas habitaciones-laboratorio (caso de las entrevistas), en clases completas o en ambientes de aprendizajes más amplios (Molina et al., 2011; Steffe y Thompson, 2000).

Se persigue con estos experimentos que todos los participantes obtengan "ganancia" de los mismos. Así, los estudiantes construyendo conocimiento sobre la materia que entra en juego; el docente (investigador-docente) logrando discernimiento sobre cómo construyen el conocimiento los estudiantes; el resto de investigadores, adquieren comprensión sobre los planos anteriormente descritos y además sobre las interacciones entre el resto de agentes presentes (Confrey, 2006; Lesh y Kelly, 2000).

Las caracterizaciones que se hace de los experimentos de enseñanza abarcan varios aspectos. En relación a los agentes participantes se indica: a) la no diferenciación entre docente e investigador, en la investigación se trata de conocer "in situ" el proceso de aprendizaje de los estudiantes basado en sus razonamientos (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000); b) los investigadores se introducen en las aulas, no se limitan a estudiar una prueba a la que hayan dado respuesta los estudiantes; c) las intervenciones son realizadas por uno de los investigadores, a menos que el docente se involucre plenamente en la investigación; d) la intervenciones están determinadas y delimitadas por los objetivos de la investigación, anteponiéndose éstos a lo que desde el punto de vista del docente pueda ser más adecuado para los alumnos (Kelly y Lesh, 2000); e) se contempla la participación de un investigador-observador (Steffe y Thompson, 2000) que recogerá información la cual dará lugar a interpretaciones alternativas a las del investigador-docente.

Respecto a las fases, en el desarrollo de un experimento de enseñanza se distinguen de tres fases bien diferenciadas: a) preparación del experimento que incluye la organización del trabajo en el aula; b) la experimentación propiamente dicha que incluye implementación de la preparación realizada, análisis de lo ocurrido y refinamiento de la organización si fuese necesario; c) análisis retrospectivo de todos los datos obtenidos[3].

En cuanto a los datos producidos, se señala que se ha de recoger información de cuanto suceda en el aula, para ello es conveniente usar diferentes tipos de registros como grabaciones de video, anotaciones y protocolos del trabajo de los estudiantes.

En los experimentos de enseñanza se generan hipótesis bien sobre todo el experimento, o para las diferentes partes del mismo, dichas hipótesis se enuncian en la fase de preparación. Pero puede suceder que la revisión de los datos producidos en alguno de los episodios de enseñanza, muestren la necesidad de abandonar o reformular algunas de las hipótesis planteadas. Si este es el caso, los investigadores deberán re-planificar las sucesivas intervenciones en el aula (Steffe y Thompson, 2000).

Este proceso recursivo conlleva un refinamiento progresivo de la planificación realizada. Inicialmente se prepara un modelo preliminar basado en asunciones teóricas y experiencia previa del equipo investigador. A lo largo de la implementación con los cambios realizados se llega a obtener un modelo experimentado y mejor acabado, este puede ser nuevamente sometido a experimentación, comenzando así un nuevo ciclo.

Los experimentos de enseñanza denominados transformativos y dirigidos por una conjetura (Confrey y Lachance, 2000) son un tipo de experimentos de enseñanza, conducentes a investigar sobre las diferentes componentes del proceso de enseñanza de un conocimiento, por ejemplo, nuevas estrategias de enseñanza, diferentes enfoques para la enseñanza de un contenido, etc. El elemento central del experimento es la conjetura inicial que delimita y orienta todo el proceso de investigación. En este caso el trabajo se realiza con sujetos que trabajan en su aula habitual. Se trata de una intervención en el aula con el propósito de conseguir información que puede ser exportada a situaciones de enseñanza similares.

## *4.2 Características de este estudio*

El estudio que realizamos cumple las condiciones de un estudio exploratorio ya que se dispone de poca información procedente de investigaciones previas en relación con la problemática que envuelve el sentido estructural de estudiantes de secundaria ligado a

[3] Para más información sobre las acciones implicadas en cada una de las fases de los experimentos de enseñanza ver Molina et al. (2011).

las identidades notables. La poca información disponible y la motivación por explorar una forma diferente a la usual para el trabajo con igualdades notables por los estudiantes, nos ha llevado al propósito de analizar y describir el modo en que los estudiantes ponen de manifiesto su sentido estructural a través del trabajo con expresiones que involucran identidades notables, partiendo de expresiones aritméticas para llegar a expresiones algebraicas.

Nuestra investigación, debido a la metodología utilizada, es de carácter descriptivo y cualitativo, tomamos de forma intencional un grupo de sujetos informantes y analizamos en profundidad su comportamiento con el propósito de llegar al entendimiento del desempeño de los sujetos en estudio.

### 4.2.1 Establecimiento de la conjetura que guía el estudio

Como se detalla en el Capítulo 1, por experiencia propia, habiendo laborado durante diecisiete años con estudiantes de secundaria y bachillerato, la investigadora es fiel testigo de la dificultad que confrontan los estudiantes de estos niveles en la resolución de problemas que involucran las identidades notables, al realizar operaciones algebraicas.

Suponemos que dichas dificultades no son atribuibles a la falta de capacidad de los estudiantes ni mucho menos a la preparación y formación que poseen los docentes. Nuestra conjetura expone que los estudiantes objeto de estudio, presentarán dificultades en su desempeño con igualdades numéricas y algebraicas donde se involucran las identidades notables, aún después de haber recibido enseñanza previa en 2º y luego en 3º de E.S.O. relativa a la temática en mención. Se prevé que muestren dificultad para reconocer expresiones numéricas que involucran identidades notables, para reconocer una equivalencia basada en dichas identidades, así como al proporcionar explicaciones de sus actuaciones fundamentadas en el concepto de identidad notable.

Sin embargo, mediante la consideración y discusión de distintas estrategias empleadas en la resolución de expresiones e igualdades numéricas y algebraicas los estudiantes pueden alcanzar una mejor comprensión de las identidades notables y desarrollar su sentido estructural, lo que les proporcionará estrategias más eficaces en el manejo de las mismas.

En cuanto al desarrollo y uso del sentido estructural y las estrategias utilizadas por los estudiantes en la resolución de expresiones e igualdades numéricas y algebraicas, conjeturamos que los estudiantes de tercer año de Educación Secundaria en estudio, luego de la implementación de un diseño de investigación, utilizarán estrategias basadas en el desarrollo de una adecuada comprensión de las identidades notables y de su sentido estructural.

### 4.2.2 Estudiantes participantes en el estudio y contexto de la Investigación

Una clase de veinte estudiantes, once chicos y nueve chicas, de tercer año de Educación Secundaria de un Instituto público del centro de la ciudad de Granada componen el grupo de los estudiantes participantes en este estudio. Su edad oscila entre catorce y quince años, excepto dos de ellos con diecisiete años.

De los veinte estudiantes, los nominados como A12 y A13 destacan por ser lo que se conoce como “buenos estudiantes”. Por otra parte, A14 no habla bien el idioma español, por tanto ofrece respuestas cortas, no específicas y otras veces no explica. Dos estudiantes, A16 y A17 (diecisiete años de edad) son repetidores en matemáticas y han aprobado pruebas de ciclos formativos para entrar en el mercado de trabajo. Un estudiante (A20) no asistía a clase y tiene pendiente, matemáticas de 1º y de 2º curso, además se integra al grupo justo un día después de iniciar las sesiones de trabajo y que corresponde a inicios del tercer trimestre del período escolar.

En las sesiones dedicadas a la intervención realizada en el aula, la asistencia (ver lista en Anexo C) oscila entre trece y diecinueve estudiantes.

## *4.3 Preparación de la investigación*

Como hemos mencionado en el apartado 4.1.4, son tres las fases en una investigación del tipo que estamos siguiendo: preparación, experimentación y análisis de los datos. En este apartado nos centramos en describir la primera de estas fases relativa a la preparación global de la misma.

### 4.3.1 Organización de la intervención

A partir de noviembre de 2010 la investigadora inicia la concertación de pequeñas reuniones con la profesora del curso donde se trataba de llevar a cabo el experimento para la realización de este estudio. El día 31 de enero de 2011 a las 7:00 p.m. en el aula de profesores de un Instituto en Granada se lleva a cabo una reunión con la presencia de las dos directoras de la investigación, la profesora de Matemáticas del grupo, que nos permitiría realizar la investigación, y la investigadora.

En la reunión celebrada entre las interesadas se acordaron diversos puntos, entre ellos:
a) serían cinco el número de sesiones de clases que se dedicarían a la experimentación
b) las fechas en las que se realizarían las sesiones son las indicadas en la Tabla 4.1

*Tabla 4.1*. Fechas propuestas para realizar las sesiones.

| Sesión | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª |
|---|---|---|---|---|---|
| Fecha | 28 / 3 / 2011 | 30 / 3 / 2011 | 1 / 4 / 2011 | 5 / 4 / 2011 | 8 / 4 / 2011 |

c) la duración de las sesiones sería de aproximadamente una hora escolar.

Estas decisiones tenían en cuenta que entre las sesiones quedase al menos un día que diese oportunidad para el análisis continuo de los resultados que se iban obteniendo. También que no se afectase la programación escolar de los estudiantes.

Se acordó elaborar una carta de solicitud de permiso para entregar a cada uno de los padres de los estudiantes con el propósito de solicitar de ellos su aceptación para la toma en vídeo del desarrollo de la investigación.

Una semana antes de la puesta en marcha de la fase de experimentación, la investigadora se presenta al grupo donde les explica el estudio que se iba a realizar durante cinco clases de matemáticas con ellos. La investigadora les explica que el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada les solicita toda su cooperación como estudiantes puesto que van a participar de una investigación que es de interés para el Departamento de Matemáticas de la Universidad dado que se quiere saber cómo ellos aprenden cuando trabajan con expresiones algebraicas. Que se les iba a entregar una carta de solicitud de permiso (ver Anexo B) para que la devolviesen firmada por sus padres. A continuación la investigadora permanece el resto de la hora en conjunto trabajo con el grupo y la profesora del mismo, con la intención de darse a conocer y que el día de inicio del proyecto los estudiantes viesen a la investigadora como alguien familiar dentro del ambiente escolar. Para esta fecha los estudiantes se encontraban en la resolución de prácticas del tema Funciones lineales, pág.160 del libro de trabajo Matemáticas 3 (Anexo E).

<u>Temporalización de las sesiones</u>

La intervención de la autora de este trabajo en el aula tuvo lugar durante un total de cinco sesiones realizadas en días diferentes y durante el horario escolar de dos semanas de clases ubicadas en el inicio del 3º trimestre de 2010-2011.

Las tres primeras sesiones se realizaron una misma semana, en días alternos, con una separación de un día entre cada sesión. Las dos sesiones restantes se realizaron la semana siguiente con dos días de separación entre las mismas. Las fechas, para las sesiones, fueron fijadas de acuerdo al horario y disponibilidad de los estudiantes para realizar el trabajo requerido de manera que no fuese afectada la programación inicial del tercer trimestre del curso escolar, así como también para permitirnos la evaluación continua de los resultados del estudio es decir contar con tiempo suficiente para analizar los resultados de cada sesión y tomar decisiones respecto a la siguiente intervención en el aula. Además consideramos que dejar unos días de por medio le permitiría a los estudiantes ir fijando los conocimientos adquiridos para la posterior consolidación de los mismos.

### 4.3.2 Metodología de trabajo en el aula

Sobre la metodología de trabajo en el aula, el grupo de investigación toma la decisión de que dicha metodología fuese un trabajo individual realizado por los estudiantes, preparado y dirigido por las investigadoras. Los estudiantes realizarán unas tareas, presentadas en formato escrito en un protocolo, al término de la realización de dichas tareas le seguiría una puesta en común guiada por la profesora-investigadora.

### 4.3.3 Toma de decisión sobre la recogida de datos

Dada la metodología utilizada, la recogida de datos se realizará a través de tres procedimientos: cuaderno de trabajo, observación participante y grabaciones en video. Todos los datos recogidos son de tipo cualitativo. Los cuadernos de trabajo de cada estudiante son individuales, recogen el trabajo realizado por los mismos en cada una de las sesiones. Las notas serán recogidas por una de las investigadoras[4] presente en el aula, anotando todo aquello acaecido en el aula y considerado relevante para la investigación. Las grabaciones en video se llevarán a cabo en todas las sesiones, en ellas se incluyen las puestas en común de las tareas realizadas de manera individual. Todo ello con la pretensión de capturar con detalle las actuaciones de los estudiantes y sus interacciones ocurridas en el aula.

[4] Durante las intervenciones en el aula y la recogida de los datos, participaron la investigadora y autora de este trabajo, una de las directoras del trabajo de investigación y la profesora que atiende el grupo en la asignatura de Matemáticas.

### 4.3.4 Preparación de las tareas

En el proceso de diseño del experimento de enseñanza, es importante determinar cómo conocer el logro conseguido por los estudiantes de los objetivos específicos asociados al contenido a trabajar, este logro se ha de evidenciar en las actuaciones de los estudiantes en tareas que activen la utilización de su conocimiento acerca de dicho contenido.

Entre los criterios señalados por Marín (2013) relativos a la adecuación de las tareas diseñadas para utilizar en el aprendizaje de un conocimiento matemático señala: a) que se refieran al contenido conceptual y procedimental delimitado; b) que permiten el logro de los objetivos o expectativas de aprendizaje señalados; c) que el grado de dificultad de las mismas sea adecuado a los sujetos a los que van dirigidas y les permita adquirir conocimiento. Estas consideraciones han sido tomadas en cuenta en el momento de hacer una selección de tareas para el experimento.

<u>Selección de las Tareas</u>

Se realizó un proceso de selección de tareas inicial basándonos en recoger aquellas que aparecen en los libros de texto (ver anexo A). Posteriormente determinamos las variables de tarea que indicamos en el párrafo siguiente que nos proporcionaron las pautas para el rediseño de las tareas inicialmente tomadas de los textos escolares.

### 4.3.5 Variables de tarea

Se consideraron cuatro tipos de variables en el diseño de las tareas: a) identidades algebraicas, b) acciones de las tareas, c) tipos de tareas y complejidad de las expresiones.

1. **Identidades Algebraicas,** se utilizaron las cuatro siguientes:
   - Cuadrado de una suma

     $\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\right)^2 = \mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+2\mathrm{ab}$ ó su equivalente $\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+2\mathrm{ab}=\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\right)^2$
   - Cuadrado de una diferencia

     $\left(a-b\right)^2 = a^2+b^2-2ab$ ó su equivalente $a^2+b^2-2ab=\left(a-b\right)^2$
   - Producto de una suma por una diferencia - Diferencia de cuadrados

     $\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\right)\left(\mathrm{a}-\mathrm{b}\right)=\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2$ ó su equivalente $\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2=\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\right)\left(\mathrm{a}-\mathrm{b}\right)$
   - Propiedad Distributiva - Factor Común

     $\mathrm{ac}\pm\mathrm{bc}=\left(\mathrm{a}\pm\mathrm{b}\right)\mathrm{c}$ ó su equivalente $\left(\mathrm{a}\pm\mathrm{b}\right)\mathrm{c}=\mathrm{ac}\pm\mathrm{bc}$

2. **Acciones de las tareas,** recogemos a continuación las acciones presentes en las tareas propuestas y justificamos brevemente cada una de ellas.
   - **Comprobar**. Diferentes sentencias cerradas dadas en las cuales los estudiantes deben de comprobar la veracidad o falsedad de las mismas. Se trata de dar comienzo a las sesiones con un trabajo no complicado, que pueden realizar cómodamente, y permita detectar el uso de pensamiento relacional que ponen en juego en la resolución de las sentencias, indagar y evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos e identificar las estrategias empleadas y las dificultades encontradas en la resolución de diversos tipos de igualdades. Consideramos que una interpretación consistente de las convenciones utilizadas en tareas procedimentales simples y complejas de expresiones aritméticas, es un elemento esencial en la construcción del sentido estructural (Banerjee y Subramaniam, 2005).
   - **Identificar equivalencias**. Juzgar la veracidad o falsedad de varias igualdades o emparejar expresiones que sean equivalentes de un listado dado.
   - **Completar huecos o "cajas".** Completar sentencias numéricas y algebraicas en las que aparecen términos desconocidos representados con cajas (por ejemplo $5\cdot\left(\square+\nabla\right)=5\cdot 7+5\cdot\nabla$ de forma que se cumpla la igualdad. Se trata de ver la relación que deben cumplir los términos desconocidos, en relación con el resto, para que las igualdades sean ciertas. En las tareas sobre generalización, no todas las generalizaciones deben ser expresadas de manera explícita, vale la pena observar con qué frecuencia hay una generalización subyacente que los estudiantes se espera valoren y tengan en cuenta (Mason, Graham y Johnston-Wilder, 2005).
   - **Generalizar.** A partir del análisis de casos particulares, guiar a los estudiantes a la generalización de la estructura de unas expresiones dadas. La generalización es considerada una de las funciones principales del álgebra y para generalizar se necesita explorar situaciones reconocer relaciones, organizar datos sistemáticamente, y generar patrones (Bell, 1996).
   - **Generar expresiones de estructura similar a otras dadas**. La acción de crear ejemplos con estructura similar a otras dadas, profundiza la relación personal con la estructura y animan al estudiante a aprender a buscar y

reconocer las estructuras dadas en las tareas en su forma más simple y en formas más complejas (Hoch y Dreyfus, 2007).

En estos bloques de acciones intervienen tres tipos de símbolos: numéricos, algebraicos y "cajas" (o lugares en blanco a rellenar).

**a. Complejidad de las expresiones:**

- Simples, sin productos, potencias o suma y resta.
- Con términos compuestos formados por productos y potencias pero no por sumas y restas
- Con términos compuestos formados por sumas y restas y posiblemente también por productos y potencias.

**b. Tipos de expresiones**

- Igualdades enteras: numéricas o algebraicas
- Igualdades fraccionarias: algebraicas.

### 4.3.6 Decisiones relativas a las tareas

Los símbolos algebraicos y cajas (huecos) utilizados en las tareas tenían el papel de variables y/o incógnitas. Para los bloques de tareas se propone el siguiente orden: comprobar (Tarea1-Sesión 1), identificar (Tarea 2-Sesión 1), completar cajas (Tareas 1 y 2 - Sesión 2; Tarea1 - Sesión 4; Tarea 2 – Sesión 5), generalizar (Sesión 3) y generar o construir (Tarea 1 - Sesión 5). Se sugería explicar o justificar en algunas de las tareas, aunque no en todas para evitar que se les hiciera tedioso a los estudiantes y tal vez un poco aburrido, luego sólo se puso en los casos que consideramos nos aportarían más beneficios informativos.

Partiendo de igualdades que estaban escritas solamente con números ir progresivamente, aumentando la dificultad hasta llegar a considerar esas igualdades de manera general, es decir algebraicamente. La distribución de los diferentes tipos de tareas por sesiones se recoge en la Tabla 4.2.

*Tabla 4.2.* Variables involucradas en las sesiones.

| Sesiones | Tareas | IDENTIDADES ALGEBRAICAS | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Cuadrado de una suma | | | | | | Cuadrado de una diferencia | | | | | | Producto de una suma por una diferencia | | | | | | Propiedad Distributiva-Factor Común | | | | | |
| | | Simple | | $(\cdot/a^b)$ | | (+/-) | | Simple | | $(\cdot/a^b)$ | | (+/-) | | Simple | | $(\cdot/a^b)$ | | (+/-) | | Simple | | $(\cdot/a^b)$ | | (+/-) | |
| | | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F | E | F |
| I Expresiones numéricas | Comprobar | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | |
| | Identificar | X | | | | | | X | | | | | | X | | | | | | X | | | | | |
| | Generar | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| II Expresiones numéricas | Completar Cajas | | | X | | | | X | | X | | | | X | | X | | | | X | | X | | | |
| | Completar Igualdades | X | | | | | | | | X | | | | | | X | | | | X | | | | | |
| | Generar Igualdades | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| III Expresiones numéricas | Generalizar | X | | X | | | | X | | | | X | | X | | | | X | | X | | X | | | |
| | Generar | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| IV Expresiones algebraicas | Completar Igualdades | | | X | X | | | X | X | | | | | X | X | | | | | | | X | X | | |
| V Expresiones algebraicas | Generar | | | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | | | | X | | |
| | Completar Igualdades | | | | | | | | | | X | | | | X | | | | | | X | | X | | |

Nota 4.1. E: expresión entera, F: expresión fraccionaria. $(\cdot/a^b)$: expresión compuesta con producto o potencia, (+/-): expresión compuesta con suma o resta. En las actividades de generar I, II y III sesión, los espacios sombreados son libres de utilizar por el estudiante y elegir la sentencia que quiere construir.

### 4.3.7 Diseño de los cuadernos de trabajo

En las cinco sesiones de trabajo se han considerado cuatro identidades notables. Al construir las igualdades para cada tarea en las distintas actividades de los cuadernos de trabajo hemos tomado diferentes factores de dificultad, como también grados variados de complejidad en los términos de las expresiones: simple, compuesto con productos (·) o potencias ($a^b$) y compuesto con suma (+) o resta (-), además de otros factores que añaden variabilidad a las tareas.

Los cuadernos de trabajo de las sesiones 1 y 2 están propuestos con expresiones numéricas y enteras. Luego, el cuaderno de trabajo de la sesión 3 está propuesto con expresiones numéricas y enteras con introducción a lo algebraico. El cuaderno de trabajo de la sesión 4 se propone con expresiones algebraicas, la primera parte entera y la segunda fraccionaria. Y el cuaderno de trabajo de la sesión 5 se propone con expresiones algebraicas y fraccionarias. Esta clasificación se puede observar en la Tabla 4.3.

*Tabla 4.3.* Tipo de expresiones de acuerdo a la sesión

| | Tipo de expresión | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sesión Nº | Numérica | Entera | Algebraica | Fraccionaria |
| 1 | ✓ | ✓ | | |
| 2 | ✓ | ✓ | | |
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | |
| 4 | | ✓ | ✓ | ✓ |
| 5 | | | ✓ | ✓ |

Los cuadernos de trabajo están propuestos para atender la diferenciación en los estudiantes, es decir contienen dos o tres actividades de manera que los estudiantes con mayor nivel de rendimiento, tendrán el tiempo justo para realizar las tareas, lo que permitirá que cada estudiante se desempeñe en su cuaderno de trabajo en el tiempo señalado (ver Anexo F).

### 4.3.8 Gestión de la clase

Tal como se recoge en la Tabla 4.2, durante el desarrollo de las cinco intervenciones en el aula, los estudiantes de forma individual realizarán las tareas presentadas en los cuadernos de trabajo en las que dichas actividades están impresas. Pueden preguntar las dudas que tengan o sobre las dificultades que encuentran, si bien ni la profesora ni las investigadoras dan respuestas directas a las mismas sino que les animan a pensar a través de proporcionarles “pistas” sobre lo que pueden hacer. Las sesiones de trabajo individual en la 1ª sesión se culminan con la puesta en común, donde uno o varios estudiantes presentan su trabajo y el resto de los compañeros puede participar indicando algún error, aportando una estrategia diferente, etc. En las siguientes sesiones este proceso se inicia con la puesta en común de la sesión anterior y se finaliza con el desarrollo de los cuadernos de trabajo. La investigadora que dirige la clase es la encargada de sancionar la tarea realizada con el objetivo de institucionalizar el conocimiento.

### 4.3.9 Metodología para analizar los datos recogidos

Los cuadernos de trabajo desarrollados por los estudiantes (ver Anexo G) fueron analizados mediante el programa de análisis cualitativo MAXQDA 10. Este programa ha capturado los datos de las resoluciones de los estudiantes de forma que nos ha permitido descifrar sus actuaciones por subcategorías, las cuales se detallan en el Capítulo 6 que corresponde al Análisis Retrospectivo de las sesiones.

Por otra parte, las grabaciones de las puestas en común realizadas en cada sesión han sido transcritas (ver Anexo H) y utilizadas para complementar el análisis de las resoluciones hechas por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo. En el Capítulo 5 se muestran algunas de las partes de mayor relevancia de las transcripciones realizadas en cada sesión, tanto en la puesta en común como las interrogantes que iban surgiendo a los estudiantes durante la realización del trabajo individual.

### 4.3.10 Herramientas para realizar el análisis de los datos

Tal como señalamos en el punto anterior, las actuaciones de los estudiantes en sus cuadernos de trabajo fueron importadas, codificadas y analizadas mediante el Programa de Análisis de Datos Cualitativos MAXQDA10. Este programa es una herramienta eficaz para realizar dicho análisis ya que facilita el manejo mecánico de los datos, facilitando el análisis e interpretación de los mismos (Valverde, 2012).

El uso de este programa nos ha facilitado la manipulación de las resoluciones hechas por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo y nos ha proporcionado un resumen cuantitativo de las codificaciones realizadas. Para realizar este proceso primeramente importamos al sistema de documentos del programa cada uno de los cuadernos de trabajo de los alumnos por sesiones desde el explorador de Windows.

Una vez realizado este proceso el programa permite agregar códigos a los segmentos seleccionados en las resoluciones de los alumnos y vincularlos a las categorías correspondientes, permitiendo visualizar la presencia y frecuencia de los códigos en una misma sesión, así como también facilita resumir los recuentos por códigos en una hoja de cálculo. En la Figura 4.1 mostramos la imagen de la pantalla principal de trabajo de MAXQDA10, en la cual se observa el cuaderno de trabajo de un estudiante sobre el cual se han asignado los códigos de actuación respectivos.

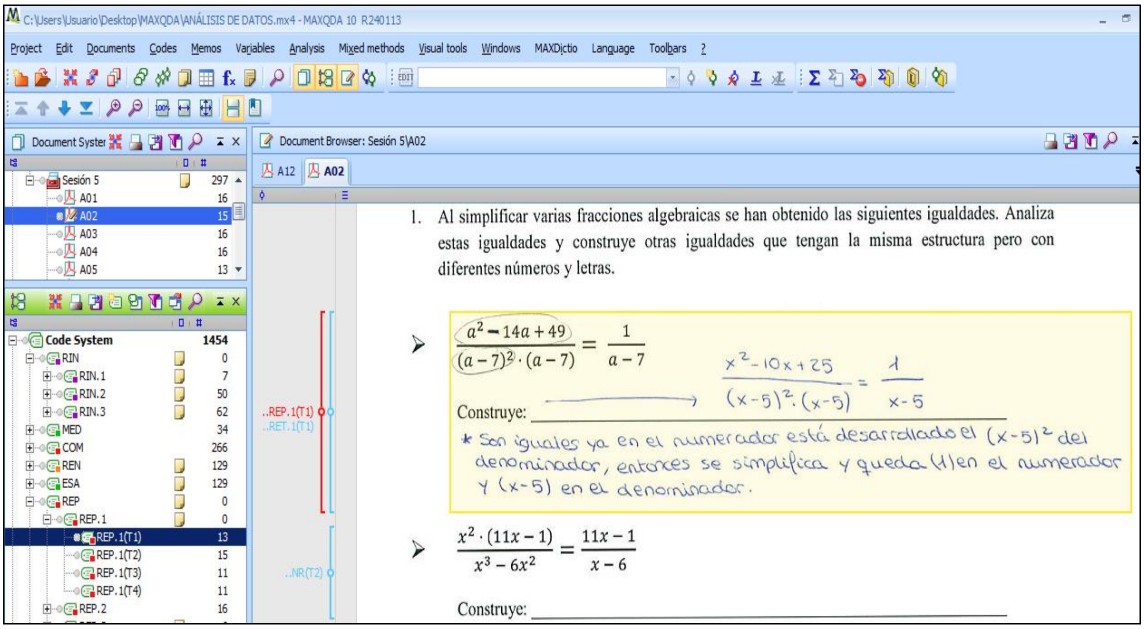



*Figura 4.1*. Imagen de la pantalla principal del programa MAXQDA 10.

La utilización del programa exige que el documento se separe en subcategorías (unidades de registro) que son los segmentos de resolución seleccionados y caracterizados para posteriormente categorizarlos, relacionarlos y establecer inferencias a partir de ellos. Es la unidad de contenido significativo dentro del documento que servirá para extraer resultados (Valverde, 2012).

Para nuestro estudio el tipo de codificación utilizada ha sido codificación clásica, mediante el cual se seleccionan segmentos de las resoluciones hechas por los alumnos (proceso realizado en cada una de las sentencias) y de acuerdo a la actuación realizada se les añade un código existente desde el sistema de códigos, el cual corresponde a una determinada subcategoría o unidad de registro. Estas actuaciones se marcan con recuadros (ver Figura 4.2) y se reconocen por la asignación en el lado izquierdo del código correspondiente al número de sentencia (T5) y a la subcategoría o unidad de registro (RIN.2 y RET.1).

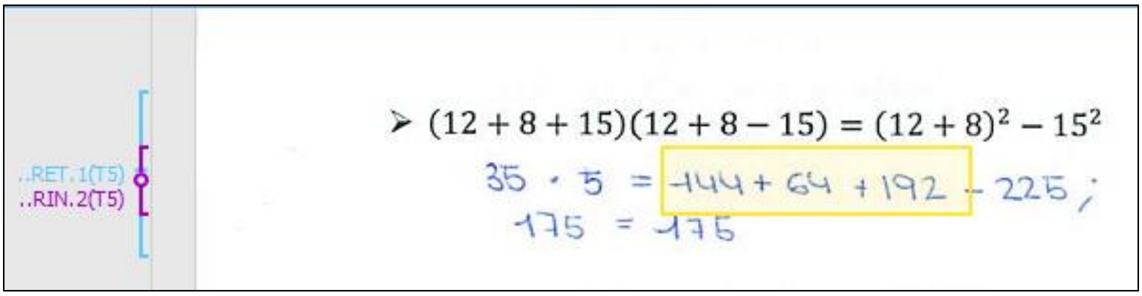



*Figura 4.2.* Proceso de codificación de subcategorías

En el ejemplo anterior, el rectángulo sombreado corresponde a la subcategoría RIN.2 dado que el estudiante ha reconocido la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, y aplica la identidad notable para operar en uno de los miembros. Sin embargo, se ha codificado en la subcategoría RET.1 dado que ha efectuado correctamente todas las operaciones para la verificación de la veracidad de la sentencia, obteniendo una igualdad.

Posteriormente este programa realiza la recuperación de segmentos (retrieved segments) de las resoluciones previamente codificadas en una sesión de acuerdo a una determinada unidad de registro o subcategoría (ver Figura 4.3) y las agrupa en una lista de resultados. Este proceso permite recoger los segmentos correspondientes a una subcategoría -ejemplo COM.1-, en una determinada sentencia -ejemplo T6- correspondiente a una determinada sesión, en este caso la sesión 4, para poder realizar las respectivas decisiones de los análisis. Este proceso se consigue mediante la activación de los documentos con las resoluciones del o de los alumnos que son de nuestro interés en una determinada sesión colocados en el sistema de documentos y con la activación de los códigos correspondientes a la subcategoría(s) de interés que se encuentra en el sistema de códigos.

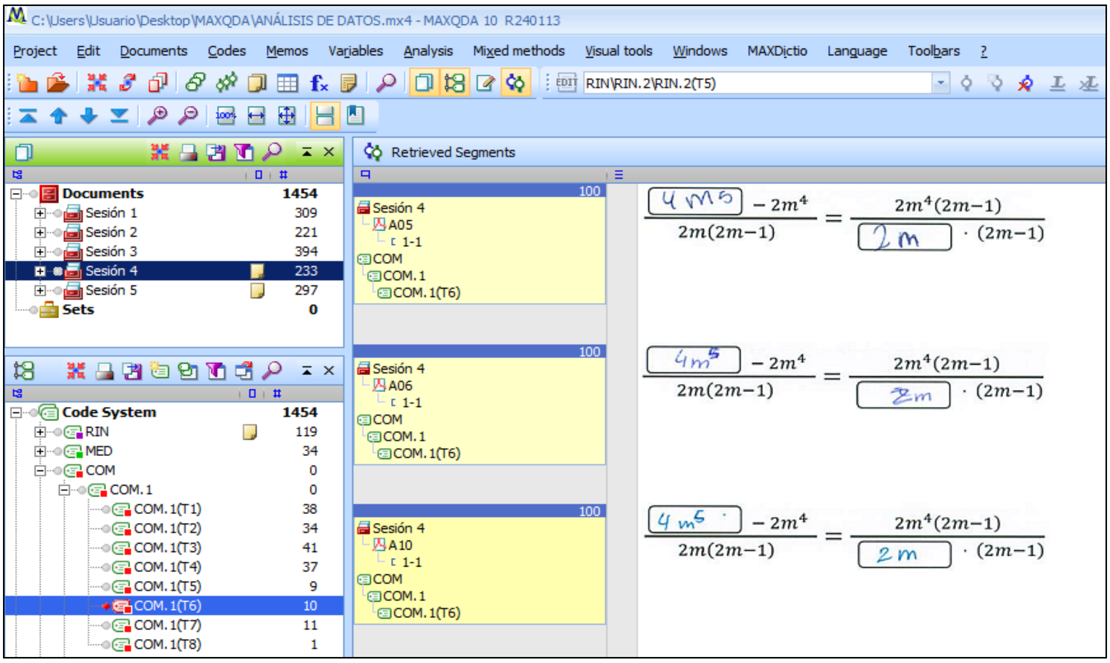


*Figura 4.3*. Recuperación de segmentos correspondientes a una subcategoría.

Este programa también nos permite ver la codificación por unidades de registro o subcategorías en cada una de las sentencias de una determinada sesión, así como para cada uno de los estudiantes que han asistido a la misma, tal como se observa en la Figura 4.3.

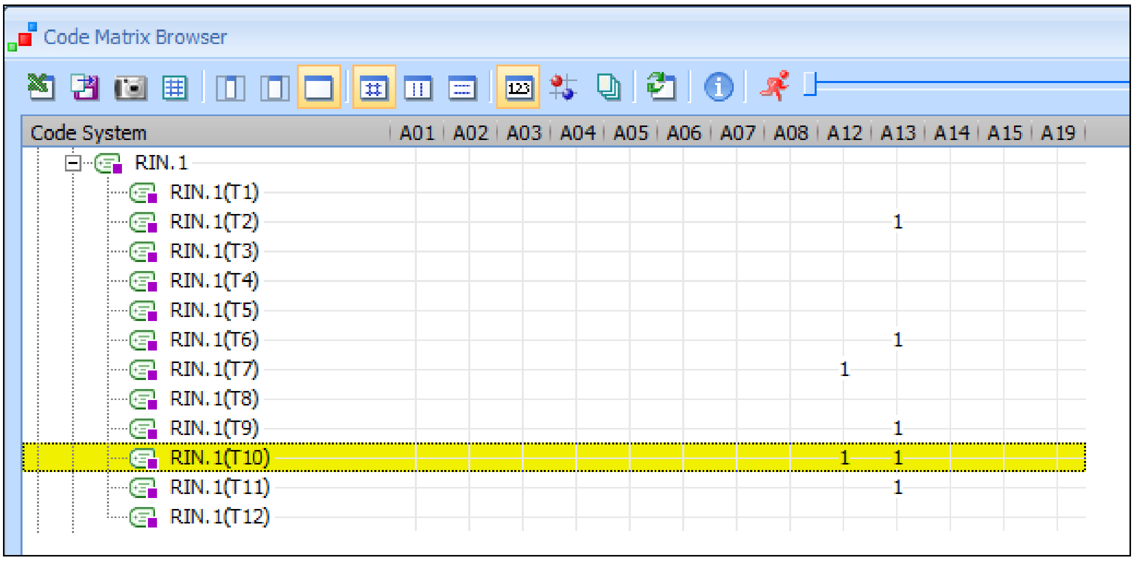


*Figura 4.4*. Codificaciones de los estudiantes en la subcategoría RIN.1- Sesión 1.

*Codificación y Categorización de los Datos*

La codificación es el proceso por el que los datos son transformados sistemáticamente y agregados en unidades (categorías de análisis) que permiten una descripción precisa de las características pertinentes de las sentencias en los cuadernos de trabajo. Mientras la categorización es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por analogía, a partir de criterios definidos. Las categorías son secciones o clases que reúnen un grupo de elementos (unidades de registro) bajo un título genérico, reunión efectuada en razón de los caracteres comunes de estos elementos (Valverde, 2012).

Para este estudio partimos inicialmente de los procesos de codificación y categorización con cada uno de los documentos de la sesión 1, posteriormente con los documentos de la sesión 2, sesión 3, sesión 4 y finalmente con los documentos de la sesión 5, con el objetivo de analizar la validez de los indicadores de actuación basados en el sentido estructural de cada uno de los estudiantes y de las categorizaciones realizadas. Por este motivo en cada una de las tareas de las cinco sesiones se han analizado aspectos diferentes que responden a los descriptores del sentido estructural en nuestra investigación. Los indicadores de estas categorías se refieren a los modos de actuación que manifiestan los estudiantes al trabajar las identidades notables y su relación con el sentido estructural.

Dicho estudio presenta ocho categorías y veintisiete subcategorías o indicadores que analizan el estudio del sentido estructural de un grupo de estudiantes cuando trabajan unas expresiones numéricas y algebraicas que involucran las identidades notables. Una vez realizado el trabajo de codificación de todos los datos por categorías, procedimos a cuantificar los resultados con ayuda del programa de análisis MAXQDA10, mediante el despliegue de la frecuencia de las codificaciones por cada sentencia (ver Figura 4.5) y por sesión de trabajo.

Tabla 6.4.4. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 5

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 5 | 3 | 7 | 5 | 9 | 1 | 1 | 0 |

*Figura 4.5*. Ejemplo del resultado de los análisis por sentencia.

En el Anexo I presentamos las tablas de frecuencias relativas a las categorías e indicadores de actuación analizados por sentencia, tarea y número de sesión.

# Capítulo 5. Descripción de la planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones

En este capítulo se recoge la descripción de las cinco sesiones de que consta el experimento de enseñanza realizado. Para cada una de las sesiones recogemos la descripción de tres etapas del proceso de experimentación: preparación de la sesión, implementación de la misma y reflexión sobre lo ocurrido.

- **Preparación de la sesión:** presentamos el diseño de cada sesión tal y como fue ideado antes de iniciar la experimentación en el aula. Este apartado recoge los objetivos de investigación que se consideraron en el diseño de dicha sesión, las expectativas de aprendizaje que nos planteamos para los estudiantes y las tareas diseñadas para trabajar en el aula.
- **Implementación:** recogemos una descripción del desarrollo de la sesión en el aula, destacando los hechos más relevantes.
- **Toma de decisiones:** incluimos una reflexión sobre lo acaecido en la sesión, destacando los resultados obtenidos del análisis del trabajo realizado por los estudiantes que conducen a la toma de decisiones en relación con el diseño de la siguiente sesión y, en particular, al diseño de la posterior puesta en común.

En todas las sesiones la profesora del grupo estuvo presente y ayudó en la organización del grupo. La investigadora fue la encargada de dar las instrucciones a los estudiantes y coordinar el trabajo en el aula. Además una de las directoras de este trabajo estuvo presente como asesora, interviniendo puntualmente en las discusiones de grupo y supervisando la grabación de las sesiones.

Como a continuación se detalla, para cada una de las sesiones se diseñó un cuaderno de trabajo a ser resuelto por los estudiantes en el aula, de forma individual. Así mismo se planificó realizar una puesta en común de las tareas de dicho cuaderno, una vez los estudiantes hubieran acabado de trabajar en ellas. Sin embargo, posteriormente se modificó esta organización iniciándose las sesiones 2, 3, 4 y 5 con la puesta en común de algunas de las tareas trabajadas en la sesión previa, sin tener presentes los cuadernos de trabajo, seguida del trabajo individual en el cuaderno correspondiente a dicha sesión. La Figura 5.1 sintetiza esta información así como el trabajo realizado por el equipo investigador fuera del aula, entre las sesiones. Ante esta nueva organización se estructuraron las puestas en común centrando la atención sólo en aquellas partes de las tareas que tenían una importancia destacada en función de los objetivos de investigación o en las partes en que los estudiantes habían presentado mayor dificultad (ver cada sesión para la justificación de cada caso).

ACTIVIDADES EN EL AULA

| Sesión 1 | Sesión 2 | Sesión 3 | Sesión 4 | Sesión 5 |
|---|---|---|---|---|
| Trabajo individual en cuaderno nº 1 | Puesta en común cuaderno nº1 (continuación) | Puesta en común cuaderno nº2 | Puesta en común cuaderno nº3 | Puesta en común cuaderno nº4 |
| Puesta en común cuaderno nº1 | Trabajo individual en cuaderno nº 2 | Trabajo individual en cuaderno nº 3 | Trabajo individual en cuaderno nº 4 | Trabajo individual en cuaderno nº 5 |

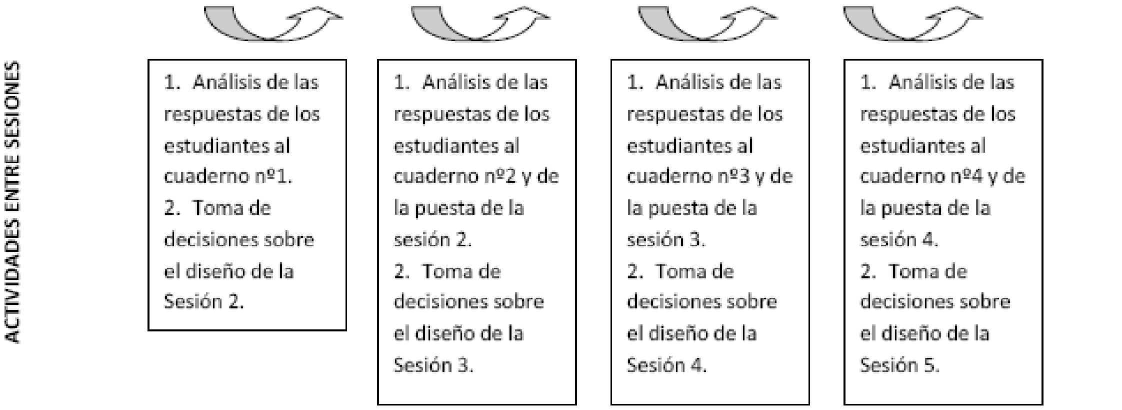



*Figura 5.1*. Organización del Proceso de Experimentación

## *5.1 Primera sesión*

Comenzamos detallando el diseño de la experimentación de la sesión 1, seguido de la descripción de su implementación y de la toma de decisiones relativa a la siguiente sesión.

### 5.1.1 Preparación de la sesión 1

| **Objetivos de investigación** |
|---|
| **Oi1**. Explorar el enfoque, estructural u operatorio, que los estudiantes adoptan al analizar sentencias y al construirlas de acuerdo a una pauta establecida.<br>**Oi2**. Indagar sobre las relaciones que los estudiantes establecen al comprobar la veracidad de sentencias numéricas en cuyo diseño están involucradas las identidades notables.<br>**Oi3**. Identificar los errores que cometen los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas.<br>**Oi4**. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas propuestas y de la gestión del aula en el diseño instruccional implementado. |
| **Tipos de Tareas** |
| En el primer cuaderno de trabajo propusimos tres tareas las cuales involucraban sentencias numéricas enteras, en el caso de las dos primeras, y sentencias algebraicas enteras, en el caso de la tercera. Las acciones a realizar fueron:<br>**Comprobar** sentencias numéricas para verificar su veracidad o falsedad.<br>**Emparejar** expresiones numéricas equivalentes, sin realizar operaciones<br>**Generar** sentencias algebraicas verdaderas. |
| **Expectativas de aprendizaje** |
| **Ea1**. Reconocer equivalencias y relaciones de expresiones numéricas basadas en identidades notables.<br>**Ea2**. Componer sentencias verdaderas a partir del reconocimiento de expresiones equivalentes.<br>**Ea3**. Utilizar la estructura de las expresiones para razonar sobre su equivalencia. |

<u>Tareas para la primera sesión</u>

**Tarea 1**. La primera tarea diseñada para esta sesión, como se ha indicado, tiene que ver con comprobar. En la misma se proponen sentencias numéricas a los estudiantes que involucran las cuatro identidades notables, algunas expresadas en forma simple y otras con algún grado de complejidad, esto es compuestas con productos o potencias, o con sumas o restas. Para verificar la veracidad o falsedad de la sentencia los estudiantes tienen que hacer cálculos o aplicar alguna regla conocida que les permita identificar si la sentencia propuesta es o no correcta. La indicación dada a los estudiantes es la siguiente:

*Comprueba realizando las operaciones, si las igualdades siguientes son correctas o incorrectas. En el caso de las incorrectas modifica la igualdad para que sea correcta.*

A continuación detallamos las características de las sentencias propuestas en la tarea. La simbología IN denota identidad notable implicada en la sentencia. Como se muestra, tres de las sentencias (6, 9 y 10) involucran dos identidades notables, el resto solo una. Por ejemplo en la sentencia 6 la expresión extendida que se presenta corresponde al cuadrado de una suma, mientras que la expresión contraída, con el cambio de un signo, corresponde al cuadrado de una diferencia. Para las sentencias falsas se detallan las modificaciones, basadas en las identidades notables consideradas, que deberían realizarse para que la sentencia fuera verdadera.

Sentencia 1: $(3\cdot 5)^2 - 10^2 = (3\cdot 5 + 10)(3\cdot 5 - 10)$

IN: Producto de una suma por una diferencia- diferencia de cuadrados.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $3\cdot 5$

Valor de verdad: verdadera.

Sentencia 2: $13^2 + 10\cdot 17 + 17^2 = (13+17)^2$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el segundo término del miembro izquierdo se ha suprimido el dos del doble producto y en lugar de 10 aparece 13.

Sentencia 3: $30\cdot 20 - 20\cdot 14 = 30\cdot(20-14)$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el segundo término del miembro izquierdo se ha colocado 20 en lugar de 30.

Sentencia 4: $(8\cdot 5 - 15)^2 = (8\cdot 5)^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot 15 + 15^2$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $8\cdot 5$

Valor de verdad: verdadera.

Sentencia 5: $(12+8+15)(12+8-15)=(12+8)^2-15^2$

IN: Producto de una suma por una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con suma $12+8$

Valor de verdad: verdadera.

Sentencia 6: $(15-12)^2=15^2+12^2+2\cdot 15\cdot 12$

IN: Cuadrado de una diferencia en el miembro izquierdo.

IN: Cuadrado de una suma en el miembro derecho.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el tercer término del miembro derecho se debe cambiar el signo de + a - para cumplir con el cuadrado de una diferencia, o se debe cambiar - a + el signo que separa los términos del binomio en el miembro izquierdo para cumplir con el cuadrado de una suma.

Sentencia 7: $[20-(5+7)]^2=20^2-2\cdot 20\cdot(5+7)+(5+7)^2$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con suma $5+7$

Valor de verdad: verdadera.

Sentencia 8: $(2\cdot 5+20)^2=(2\cdot 5)^2+2\cdot 2\cdot 5\cdot 20+20^2$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $2\cdot 5$

Valor de verdad: verdadera.

Sentencia 9: $2\left(20^2-10^2\right)=2\cdot 20^2+2\cdot 10^2$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con potencias $20^2$ y $10^2$

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: para que se cumpla la igualdad el signo del miembro derecho debe ser - o el signo del miembro izquierdo debe ser +.

Sentencia 10: $30^2 - 13^2 = (30-13)(30-13)$

IN: Diferencia de cuadrados en el miembro izquierdo.

IN: Cuadrado de una diferencia en el miembro derecho.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el miembro izquierdo para su veracidad, se debe cambiar un signo - por un signo + en el miembro derecho. En el miembro derecho para su veracidad, el miembro izquierdo debe tener la forma $(30-13)^2$.

Sentencia 11: $5\cdot(26-22)+5\cdot 16 = 5\cdot(26-22-16)$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con resta $26-22$

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: En el miembro derecho el signo del 16 debe ser +.

Sentencia 12: $(13+17+10)^2 = (13+17)^2 + 2\cdot(13+17)\cdot 10 + 10^2$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta, con suma $13+17$

Valor de verdad: verdadera.

**Tarea 2.** La segunda tarea tiene como acción emparejar expresiones numéricas que tienen la misma estructura interna, formando una igualdad. Para esta tarea todas las expresiones consideradas son simples, ya que entendemos que una forma compuesta añadiría una complejidad que podría suponer un obstáculo para la acción de emparejar, ajeno a la propia acción. La indicación en esta actividad, es la siguiente:

*Forma todas las igualdades correctas*[5] *que puedas, utilizando las expresiones dadas.*

Presentamos a continuación cada una de las expresiones incluidas en la tarea.

Expresión 1: $(7+3)^2$

IN implicada: Cuadrado de una suma.

[5] Aunque por definición las igualdades son verdaderas y, por tanto, correctas se utiliza este lenguaje en el aula para facilitar la comunicación con el alumnado el cuál no estaba familiarizado con el término sentencia.

Expresión 2: $10 \cdot 39 - 10 \cdot 31$

IN implicada: Propiedad distributiva-factor común.

Expresión 3: $(17+15)(17-15)$

IN implicada: Producto de una suma por una diferencia.

Expresión 4: $17^2 - 15^2$

IN implicada: Diferencia de cuadrados.

Expresión 5: $7^2 + 3^2$

No corresponde a ninguna identidad notable.

Expresión 6: $10 \cdot (39-31)$

IN implicada: Propiedad distributiva-factor común.

Expresión 7: $17^2 - 2 \cdot 17 \cdot 15 + 15^2$

IN implicada: Cuadrado de una diferencia.

Expresión 8: $10 \cdot 39 + 10 \cdot 31$

IN implicada: Propiedad distributiva-factor común.

Expresión 9: $(17-15)^2$

IN implicada: Cuadrado de una diferencia.

**Tarea 3.** La tercera tarea es de ampliación; se propone con el objetivo de que los estudiantes que acaben las dos tareas anteriores antes que el resto, puedan seguir trabajando y así no distraigan al resto de compañeros. Se les propone lo siguiente:
*Escribe igualdades correctas inventadas por ti utilizando números, o letras, y operaciones*.

Diseño de la puesta en común correspondiente al cuaderno de trabajo nº 1

Tras el trabajo individual de los estudiantes en el cuaderno nº 1, se planificó realizar una puesta en común de las sentencias trabajadas en dicho cuaderno. En la misma se discutiría con los estudiantes la veracidad de cada sentencia de la primera sesión 1, siguiendo el orden en que aparecían en el cuaderno de trabajo. Se les cuestionaría si la sentencia era verdadera o falsa, como también sobre la justificación de su respuesta. Se buscaría hacer participar a estudiantes diferentes, pidiendo voluntarios, con el propósito de obtener opiniones diferentes. Para que durante la puesta en común los estudiantes pudieran realizar anotaciones en sus cuadernos de trabajo pero no tacharan o modificaran las respuestas dadas inicialmente, decidimos distinguir un espacio diferente para ello en el cuaderno de trabajo.

### 5.1.2 Implementación

La sesión 1 se lleva a cabo el lunes 28 de marzo de 2011, en el tiempo asignado en el horario del centro a la clase de matemáticas (de 8:15 a 9:15). En esta sesión participaron 13 de los 20 estudiantes que conforman el grupo. Consideramos que la no asistencia de los siete estudiantes restantes pudo ser debida al cambio del horario de invierno al de verano que se produjo justo el día anterior.

Realización de las tareas del cuaderno de trabajo nº 1

La profesora organiza los estudiantes en el aula, a continuación la investigadora inicia saludando a los estudiantes. Indica que van a hacer un trabajo sobre álgebra, que es una investigación y les agradece la colaboración que van a prestar al mismo. Se da inicio a la sesión distribuyendo los cuadernos de trabajo a los estudiantes y presentándoles las tareas. Los estudiantes trabajan de forma individual. Surge un interrogante, un estudiante pregunta si puede hacer uso de calculadoras. La investigadora les responde que sí pues así fue acordado en las reuniones de trabajo para la preparación de las sesiones. Transcurridos 30 minutos, se da inicio a la puesta en común hasta que concluye el horario de la clase de matemáticas.

Puesta en común basada en el cuaderno de trabajo nº 1

En esta puesta en común, de 15 minutos de duración, participaron 11 de los 13 estudiantes que asistieron a la primera sesión. La investigadora da inicio a la puesta en común preguntando a los estudiantes si consideran que la primera sentencia de la tarea 1, $(3\cdot5)^2-10^2=(3\cdot5+10)(3\cdot5-10)$ es verdadera o es falsa o, dicho de otra manera, si la consideran correcta o incorrecta. En seguida un estudiante A06 responde: “es correcta”. La investigadora pregunta “¿por qué consideras que es correcta?” A06 responde: “porque he resuelto esos dos miembros y da el mismo resultado”. En este caso se observa que el estudiante ha operado para razonar la veracidad de la sentencia.

Después de indagar si hay otra opinión, la cual no se da, la investigadora interroga a los estudiantes sobre la veracidad o falsedad de la siguiente sentencia

$13^2+10\cdot17+17^2=(13+17)^2$. El estudiante A15 responde: "es incorrecta". Al preguntar la investigadora por qué la considera incorrecta señala: "porque sale diferente el resultado". Luego, la asesora (S) interviene, para el cual se presenta el siguiente extracto de diálogo:

S: *¿Cómo sabes que el resultado fue diferente?*

A06: *Porque lo ha hecho bien.*

A15: *Porque lo he hecho.*

S: *¿Qué te sale? ¿En el (miembro) izquierdo que te sale?*

A15: *En el izquierdo me sale seiscientos veintiocho y en la derecha cuatrocientos cincuenta y ocho.*

Dado que la tarea es incorrecta y por tanto requiere de modificación, la investigadora procede a indagar si alguien la ha modificado. Dos estudiantes A04 y A06 indican que la han hecho; la investigadora sugiere a A04 que pase a la pizarra y la escriba. A04 escribe en la pizarra la siguiente igualdad: $13^2+10\cdot17+17^2=(13+17)^2-70$.

Observamos que A04 se ha basado en el cálculo de los valores numéricos de ambos miembros de la sentencia para construir dicha igualdad restando el número 70, que corresponde a la diferencia entre dichos valores y da lugar a una igualdad.

La investigadora sugiere que otro voluntario indique como ha modificado la sentencia. A06 levanta la mano y la investigadora le indica que pase a la pizarra. A06 escribe la siguiente sentencia: $13^2+17^2=(13+17)^2$. En esta resolución observamos que A06 se ha basado en la utilización de una noción primitiva de la propiedad distributiva (Castro, 2012) al sustentar que $13^2+17^2=(13+17)^2$. Ningún otro estudiante dice haber realizado modificaciones diferentes a las presentadas, con lo que se da por terminada la discusión de esta sentencia, sin aclararse que esta modificación no es correcta.

La investigadora escribe en la pizarra la tercera sentencia de la tarea 1, $30\cdot20-20\cdot14=30\cdot(20-14)$ e interroga a los estudiantes sobre si la sentencia es correcta o incorrecta. El estudiante A03 señala: "es incorrecta"; y al ser indagado por qué, indica: "porque me da diferente". Ante la solicitud de la investigadora de otras posibles respuestas, A06 levanta la mano y dice: "yo pienso que es correcta". La asesora pide a este estudiante una justificación de su respuesta, a lo que A06 responde: "pues, por lo mismo, he resuelto las dos igualdades (se refiere a los dos miembros de la igualdad) y dan el mismo resultado”.

En este momento observamos que no hay coincidencia entre las opiniones de los participantes, ambos han realizado cálculos y han obtenido distintas respuestas. La investigadora pregunta al grupo: “¿todos están de acuerdo?” En seguida el estudiante A14 responde: “no”. La investigadora sigue indagando: “¿qué sucede?” A14 responde: “que allí pone veinte”. Ante esta respuesta la investigadora le sugiere a A14 que pase a la pizarra a hacer la modificación de la tarea. A14 escribe en la pizarra la siguiente igualdad: $30\cdot 20-30\cdot 14=30\cdot(20-14)$. A continuación, la investigadora escribe en la pizarra la cuarta sentencia de la tarea 1, $(8\cdot 5-15)^2=(8\cdot 5)^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot 15+15^2$ e interroga nuevamente al grupo sobre su veracidad o falsedad. El estudiante A05 responde: “esa es correcta”. La investigadora afirma y a la vez pregunta: “correcta, y ¿por qué dices que es correcta?”. Ante la interrogante A05 responde: “porque sale el mismo resultado si lo hago”. La investigadora aprueba y cuestiona al grupo: “muy bien, ¿alguien tiene una opinión diferente?”. A04 dice: “a mí no me da lo mismo”, seguido de A04, otros estudiantes A07, A01, A06 indicaron que habían obtenido resultados diferentes. La investigadora sugiere a A04 que pase a la pizarra y escriba la modificación que ha hecho. A04 escribe $(8\cdot 5-18)^2=(8\cdot 5)^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot 15+15^2+650$. Luego A02 dice: “a mí me sale correcta” y A04 pregunta: “¿es correcta o incorrecta?” Ante la interrogante de A04, la investigadora señala: “es correcta”.

La investigadora se refiere ahora a la quinta sentencia, $(12+8+15)(12+8-15)=(12+8)^2-15^2$, interroga a los estudiantes sobre su veracidad o falsedad. A06 y A05 responden que es correcta. La investigadora indaga preguntando al grupo si tienen una opinión diferente, pero los estudiantes no responden. Se produce un silencio. La asesora pregunta: “¿por qué es correcta? ¿Cómo lo sabéis?”. A15 responde: “porque al hacerlo sale el mismo resultado”.

La investigadora pasa a discutir la sentencia $(15-12)^2=15^2+12^2+2\cdot 15\cdot 12$. Sin esperar a que se les pregunten, los estudiantes responden a coro: “¡es incorrecta!. Al ser cuestionados por la investigadora sobre el porqué de su afirmación, A04 levanta la mano y dice: “porque los resultados no dan lo mismo”. La investigadora pregunta a varios estudiantes si han hecho la modificación. A13 indica que sí la ha hecho, pasa a la pizarra y escribe la igualdad $(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12$. La investigadora le dice a A13 que está muy bien e interroga al grupo por si tienen otra modificación ¿A14?, ¿A03?, ¿A02?, ¿A01?, ¿A15?, ¿A08?... La participación de A04 es activa, dice que ha hecho otra; la investigadora le sugiere pasar a la pizarra. A04 escribe: $(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 + 2\cdot 15\cdot 12 - 408$. Toca el timbre de final de hora de clase, los estudiantes siguen comentando, entregan el cuaderno de trabajo, recogen sus útiles y se retiran del aula. La puesta en común no ha sido cubierta en su totalidad (se han tratado la mitad de las sentencias de la tarea 1), el tiempo no ha permitido discutir todas las sentencias trabajadas y a la investigadora no le ha dado tiempo de hacer recapitulación final de las tareas discutidas.

### 5.1.3 Toma de decisiones después de la sesión 1

En la reunión mantenida por las investigadoras, posterior al desarrollo de esta primera sesión, y analizada la misma, se toman las siguientes decisiones que afectan a la siguiente sesión.

La sesión 2 se iniciará con una recapitulación de la sesión anterior, con dos objetivos: a) presentar parte de lo trabajado a los estudiantes no asistentes y b) recordar a los que habían asistido el trabajo realizado permitiendo que afloren algunas dificultades de los estudiantes que no se trataron en la puesta en común anterior. De esta manera, acordamos discutir cuatro sentencias concretas al inicio de la Sesión 2, tres falsas y una verdadera. Para las falsas se acordó presentar varias modificaciones dadas por los estudiantes, donde se pudiese apreciar diversidad de respuestas.

Para optimizar el tiempo se decide que para las siguientes sesiones se llevará impresas en láminas de gran tamaño las expresiones/sentencias que quieran discutirse en las puestas en común, de forma que no se requiera tiempo para copiarlas en la pizarra. Así mismo se decidió realizar la puesta en común del cuaderno trabajo de cada sesión en la sesión posterior, no siendo necesario facilitar a los estudiantes sus cuadernos de trabajo dado que la investigadora presentaría en la pizarra las respuestas a analizar y debatir.

Se acuerda iniciar la sesión con la sentencia $30\cdot 20 - 20\cdot 14 = 30\cdot(20-14)$ (sentencia 3 de la tarea 1), la cual habían modificado de forma correcta sólo cinco de trece estudiantes. Posteriormente se discutiría la sentencia $(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 + 2\cdot 15\cdot 12$ que sólo tres estudiantes habían modificado correctamente. Para esta sentencia las modificaciones realizadas atendían bien a conseguir la igualdad compensando la diferencia de valores numéricos de ambos miembros como en el caso de $\left(15-12\right)^2 = 15^2 - 12^2 + 2\cdot 15\cdot 12 - 408$ bien utilizando la igualdad $\left(15-12\right)^2 = 15^2 + 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12$ . Otra sentencia a discutir en el aula sería $\left(3\cdot 5\right)^2 - 10^2 = \left(3\cdot 5+10\right)\left(3\cdot 5-10\right)$ a la cual once de los trece estudiantes habían dado una respuesta satisfactoria, aunque esta por ser verdadera no requería de modificación. Por último se atendería a la sentencia $13^2 + 10\cdot 17 + 17^2 = \left(13+17\right)^2$ para la cual se presentaría tres de las modificaciones propuestas por los estudiantes, la primera basada en el uso de una versión primitiva de la propiedad distributiva $13^2 + 17^2 = \left(13+17\right)^2$ y las dos últimas modificaciones correctas una obtenida haciendo uso de la identidad notable cuadrado de la suma y la otra a partir del cálculo de la diferencia en valor numérico de ambos miembros.

Se propone hacer preguntas a los estudiantes que ayuden a dirigir su atención hacia la diferencia y semejanza en estructura de las expresiones que proponen al modificar las sentencias falsas; y sobre todo intentar promover la participación del mayor número posible de estudiantes para potenciar la exteriorización de su pensamiento sobre el trabajo realizado.

Respecto a la tarea prevista para la siguiente sesión en la que hay valores ocultos y se han de rellenar los huecos que los suplen, a realizar tras finalizar la puesta en común, se decide que si los estudiantes presentan dificultades para realizarla se les orientaría tomando como ejemplo la primera sentencia, incitándolos a observar a la vez las expresiones de los miembros izquierdo y derecho y a atender a relaciones existentes entre ellas. La puesta en común del cuaderno de trabajo nº 2 se decidió atrasarla a la siguiente sesión.

## *5.2 Segunda sesión*

En este apartado recogemos la descripción de la preparación e implementación de la sesión 2 así como información relativa a la toma de decisiones para la siguiente sesión.

### 5.2.1 Preparación de la sesión 2

| **Objetivos de investigación** |
|---|
| **Oi1**. Analizar la percepción que muestran los estudiantes de la estructura de expresiones y sentencias numéricas basadas en identidades notables cuando están ocultos algunos de sus elementos.<br>**Oi2**. Indagar el reconocimiento que hacen los estudiantes de la estructura de identidades notables en sentencias que presentan elementos numéricos compuestos, viéndolos como "un todo".<br>**Oi3**. Identificar los errores que cometen los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas.<br>**Oi4**. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas propuestas y de la gestión del aula en el diseño instruccional implementado. |
| **Tipos de Tareas** |
| En el cuaderno de trabajo de esta sesión se incluyen tres tareas en las que aparecen igualdades numéricas enteras e incompletas, cuyo diseño está basado en identidades notables. Las acciones a realizar fueron:<br>**Completar partes (rellenar huecos)** de sentencias numéricas que presentan elementos ocultos (suplidos por cajas) en lugar de un sumando o parte de un sumando.<br>**Completar** sentencias numéricas que incluyen elementos ocultos (suplidos por cajas) y en las que solo se conoce un miembro.<br>**Generar** igualdades algebraicas. |
| **Expectativas de aprendizaje (Objetivos específicos)** |
| **Ea1**. Identificar los elementos necesarios para completar sentencias numéricas basadas en identidades notables, de forma que constituyan igualdades.<br>**Ea2**. Utilizar la estructura de expresiones numéricas para obtener igualdades numéricas en las que algunos términos están ocultos.<br>**Ea3**. Hacer uso de lenguaje algebraico. |

<u>Tareas para la segunda sesión</u>

**Tarea 1.** Se proporcionan a los estudiantes sentencias numéricas con espacios en blanco, basadas en identidades notables, las cuales han de completar de forma que constituyan igualdades numéricas. Todas las sentencias presentan 2 o 3 cajas para completar, ubicadas en distintas posiciones de la igualdad. Las cajas pueden ser completadas por los estudiantes con respuestas únicas que corresponden a un valor numérico concreto o respuestas múltiples en las cuales cualquier número o letra es

válido. El grado de complejidad de las sentencias es variable: son simples y compuestas con productos o potencias. En esta sesión no consideramos expresiones compuestas con sumas o restas puesto que supondrían mayor nivel de complejidad para las sentencias, al considerar que el sólo uso de cajas aumenta significativamente la complejidad de la tarea.

En cuanto a la presencia de las identidades notables, están implicadas las cuatro. Intentamos que la distribución de identidades estuviese equilibrada. Como el cuadrado de la suma y el cuadrado de la diferencia presentan características similares, en algunos casos se emplean una sola vez cada una de ellas, mientras que la propiedad distributiva-factor común y diferencia de cuadrados se emplean dos veces.

La tarea viene formulada con el siguiente enunciado:
*Completa cada caja con aquellos números que hacen que la igualdad sea correcta. Explica cómo lo has hecho*.
A continuación detallamos las características de las igualdades propuestas en esta tarea.

Sentencia 1: $\left(5-\boxed{\_\_\_}\right)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot \boxed{\_\_\_} + 3^2$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 2: $7^2\cdot\left(\boxed{\_\_\_}-4\right) = 7^2\cdot 20-\boxed{\_\_\_}\cdot 4$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con potencia $7^2$

Sentencia 3: $21\cdot\left(3+\boxed{\_\_\_}\right) = \boxed{\_\_\_}\cdot 3+21\cdot\boxed{\_\_\_}$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 4: $\boxed{\_\_\_}^2-11^2 = \left(\boxed{\_\_\_}-11\right)\cdot\left(8+\boxed{\_\_\_}\right)$

IN: Producto de una suma por una diferencia- diferencia de cuadrados.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 5: $\left(2\cdot 7+\boxed{\_\_\_}\right)^2 = \left(2\cdot 7\right)^2 + 11^2 + 2\boxed{\_\_\_}\cdot 11$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $2{\cdot}7$

Sentencia 6: $\left(5-3\cdot\boxed{\_\_\_}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot3\cdot\boxed{\_\_\_}+\left(3\cdot\boxed{\_\_\_}\right)^2$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $3\cdot\boxed{\_\_\_}$

Sentencia 7: $\left(4^3-7\right)\cdot\left(4^3+\boxed{\_\_\_}\right)=\boxed{\_\_\_}^2-\boxed{\_\_\_}^2$

IN: Producto de una suma por una diferencia-diferencia de cuadrados.

Tipo de expresión: compuesta, con potencias $4^3$.

**Tarea 2.** La acción requerida en esta segunda tarea también consiste en completar. La diferencia con la tarea anterior está en que las sentencias no incluyen término derecho y el estudiante ha de utilizar tanto cajas como números y signos operacionales para completar las sentencias dadas. En el diseño de las sentencias de esta tarea consideramos dos identidades notables en su forma simple y dos en su forma compuesta con productos o potencias.

La tarea está enunciada de la forma siguiente:

*Completa las igualdades con expresiones equivalentes a las dadas. Utiliza para ello números, cajas y operaciones*.

Detallamos las características de las sentencias de esta tarea:

Sentencia 1: $\boxed{\_\_\_}^2+2\cdot7\cdot\boxed{\_\_\_}+5^2=$

IN implicada: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 2: $\left(\boxed{\_\_\_}-2\cdot5\right)^2=$

IN implicada: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta con producto $2\cdot5$

Sentencia 3: $\boxed{\_\_\_}\cdot13-\boxed{\_\_\_}\cdot16=$

IN implicada: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 4: $\left(9-7^2\right)\left(\boxed{\_\_\_}+7^2\right)=$

IN implicada: Producto de una suma por una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta con potencia $7^2$.

**Tarea 3.** Como ocurre en la sesión 1, también en este caso se propone una tarea para que los estudiantes que sean más rápidos haciendo las dos tareas iniciales, no se queden parados y puedan distraer al resto de compañeros. Proponemos a los estudiantes la misma tercera tarea que en la sesión previa en la cual sólo un estudiante tuvo tiempo de iniciarla. Recordamos a continuación el enunciado de la misma.

*Escribe igualdades correctas inventadas por ti, utilizando letras, números y operaciones.*

### 5.2.2 Implementación

La sesión 2 fue realizada durante la segunda hora de clases, de 9:15 a 10:15, del miércoles 30 de marzo de 2011. A esta sesión asistieron 19 estudiantes. Se dedicaron los primeros 24 minutos para la continuación de la puesta en común de la primera tarea de la sesión anterior, tal como se había planificado, y luego se realizó la actividad escrita prevista para esta sesión, cuya duración fue de 27 minutos.

Puesta en común del cuaderno de trabajo nº 1

En esta puesta en común, de 24 minutos de duración, participaron 15 de los 19 estudiantes presentes. La investigadora inicia la puesta en común preguntando a los estudiantes si recordaban lo que había que hacer con las igualdades propuestas en la primera tarea de la sesión anterior. Los estudiantes responden: “comprobar si eran correctas o incorrectas”. A continuación la investigadora coloca en la pizarra una lámina que traía preparada con la sentencia $30\cdot 20-20\cdot 14=30\cdot\left(20-14\right)$ pregunta a los estudiantes, “así con verla, sin hacer cálculos, ¿alguien de ustedes podría decir si es verdadera o si es falsa?”.

A06 responde: “es incorrecta”. La investigadora le pregunta por qué dice que es incorrecta. A06 responde: “porque, eh… sería treinta por veinte más treinta por catorce o sea que el veinte es el que falla”. La investigadora cuestiona nuevamente a A06: ¿cómo sabes que ese veinte está fallando? Y A06 responde: “pues porque cuando se multiplica un número por otro que está entre paréntesis, se multiplica eh… se multiplica por el primero menos el segundo, o sea treinta por veinte menos treinta por catorce". La investigadora expresa que está muy bien lo que ha dicho A06 y pregunta al grupo si alguien tiene una opinión diferente, sin obtener respuesta. Luego coloca una segunda lámina en la pizarra (ver Figura 5.2) que contiene las modificaciones realizadas por los estudiantes a la sentencia anterior durante la sesión 1; modificaciones todas ellas que conservan la equivalencia y, por tanto, dan lugar a igualdades.

| | |
|---|---|
| $30 \cdot 20 - 30 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14)$ | *1ª* |
| $30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14) + 140$ | *2ª* |
| $30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 600 - 280$ | *3ª* |

*Figura 5.2*. Modificaciones hechas por los estudiantes a la sentencia indicada.

La investigadora pide a A06 que repita a los compañeros su explicación: "¿por qué dices que en lugar de veinte se debe poner treinta, para que la igualdad sea correcta?". A06 esta vez mejora un poco su explicación y dice: "porque para multiplicar un número por otro que está entre paréntesis lo primero que se hace es multiplicar el número de fuera por el primero y luego por el segundo". La investigadora sugiere a A06 que pase a la pizarra y lo explique con detalle a sus compañeros. A06 hace lo indicado y explica: "para averiguar esto aquí (señala el miembro derecho de la primera igualdad, es decir: $30 \cdot (20 - 14)$ hay que multiplicar el primero… el número de fuera por el primero, que sería treinta por veinte y luego el número de fuera por el segundo que sería menos treinta por catorce".

Observamos que A06 realiza la explicación partiendo de la expresión que tiene en el miembro derecho para obtener la expresión del miembro izquierdo. La investigadora aprueba lo expresado por A06 y señala la segunda de las igualdades presentadas en la lámina (Figura 5.2) $30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14) + 140$, y pregunta al grupo: "¿qué podemos observar allí? ¿Qué ven ustedes de diferente? ¿Es correcta esta modificación? Levanten la mano los que dicen que no es correcta". Los estudiantes levantan la mano. Al preguntar la investigadora por qué no es correcta, A04 responde: "Porque treinta por veinte son seiscientos y le quita veinte por catorce eh…y en el otro suma ciento cuarenta".

En este momento la investigadora decide hacer una introducción a la observación de la estructura de las igualdades planteadas en la lámina. Sugiere a los estudiantes que observen la forma de la sentencia que han considerado incorrecta $30\cdot 20-20\cdot 14=30\cdot(20-14)$. Luego les sugiere que observen bien la primera sentencia de la lámina (ver Figura 5.2), la cual ellos han considerado que es correcta y a continuación observen la segunda sentencia de la lámina, es decir $30\cdot 20-20\cdot 14=30\cdot(20-14)+140$. Les pregunta: "¿qué sucede con ésta última?... ¿es similar a la dada?… ¿o se diferencia en algo?". A04 responde: "se diferencia en que pone ciento cuarenta". La investigadora dice: "¡correcto!... se diferencia en este número", la investigadora señala el número 140, "y ¿qué sucede con la tercera?". La investigadora señala la tercera sentencia $30\cdot 20-20\cdot 14=600-280$ pregunta "¿en qué se diferencia de la dada?". A04 responde "que en lugar de multiplicar treinta por veinte y catorce, le quita a seiscientos, doscientos ochenta". Con su intervención A04 pone de manifiesto que ha atendido a la estructura de las expresiones que componen las diferentes igualdades. Luego la investigadora sigue indagando y buscando diferencias entre la primera y tercera modificación, recogidas en la lámina, tal como se aprecia en el siguiente extracto:

I: *Bueno, observemos la estructura, observemos la forma sí…, ésta tiene la misma forma que la dada (señala la primera igualdad), pero esta expresión que tenemos aquí (señala la expresión $600-280$) creen ustedes que tiene la misma forma de esta expresión (señala la expresión $30\cdot(20-14)$).*

A04: *No*

I: *No, verdad ¿en qué se diferencia?*

A04: *En que esos dos números no están multiplicados por ninguno (refiriéndose a 600 y 280).*

Observamos que A04 descubre otra diferencia entre las dos igualdades contrastadas. Luego la investigadora pasa a discutir la sentencia $(15-12)^2=15^2+12^2+2\cdot 15\cdot 12$ colocando en la pizarra la lámina que se muestra en la Figura 5.3, donde la sentencia señalada con la viñeta es la propuesta en el cuaderno de trabajo y las tres siguientes son modificaciones a la misma, propuestas por algunos de los estudiantes.

➢ $(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 + 2 \cdot 15 \cdot 12$

$$(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \qquad 1^a$$
$$(15-12)^2 = 15^2 - 12^2 + 2 \cdot 15 \cdot 12 - 408 \qquad 2^a$$
$$(15-12)^2 + 648 = 15^2 + 12^2 + 2 \cdot 15 \cdot 12 \qquad 3^a$$

*Figura 5.3*. Modificaciones propuestas por los estudiantes a la sentencia indicada.

La investigadora cuestiona a los estudiantes primeramente sobre la veracidad de la sentencia propuesta y posterior sobre cuál de las tres modificaciones consideran más adecuada tomando como referente la expresión de partida.

Los estudiantes responden a la vez: “la primera”. Ante la pregunta de la investigadora A06 aporta una justificación: “porque lo único que hace es cambiar los símbolos”. Luego la investigadora pregunta a A08: “¿qué sucede en la siguiente expresión?... ¿será correcta?” A08 responde: “no, porque el signo menos tiene menos cuatrocientos…” A06 interviene indicando: “es correcta”. Seguidamente A08 señala también: “sí es correcta”.

La investigadora pregunta por las diferencias que observan entre las dos primeras modificaciones recogidas en la lámina: “¿qué ocurre con ésta?”, señala la segunda igualdad “¿es similar a la anterior?” (Señala la primera igualdad) “yo quiero que ustedes me digan algo más que hay allí”. Al respecto A09 responde: “el menos cuatrocientos ocho”. La investigadora le dice: “¡el menos cuatrocientos ocho! ese cuatrocientos ocho, ¿lo vemos en la expresión dada?” Y los estudiantes responden a la vez: “no”. Luego la investigadora expresa: “¡no, verdad! Es un elemento extraño pudiéramos decir ¿sí?”. A06 levanta la mano y la investigadora le da la participación. A06 dice: “es la diferencia que hay entre el resultado del primer miembro y del segundo”. La investigadora pide a este alumno que explique con detalles lo que ha dicho. A06 procede a explicar: “el resultado de la segunda daría $x+408$, por eso para que sea real tendría que restarle los cuatrocientos ocho que le falta o que le sobra”. Llegado a este punto la investigadora insiste en que atiendan a la estructura de las expresiones dadas e intenten buscar formas de corregir las sentencias con el mínimo de modificaciones.

Al discutir la tercera sentencia de la lámina, la estudiante A13 señala: “es incorrecta pues no sale el mismo resultado”. Se cierra la discusión sobre esta sentencia indicando que la modificación más adecuada es la primera.

La investigadora presenta otra lámina con la sentencia $(3\cdot5)^2-10^2=(3\cdot5+10)(3\cdot5-10)$ y cuestiona a los estudiantes sobre la posibilidad de opinar sobre su veracidad sin la necesidad de hacer cálculos. Algunos estudiantes responden que es verdadera y otros que es falsa. Ante este dilema la investigadora insiste en que quiere que intenten establecer la veracidad o falsedad sin hacer cálculos, pero observando que los estudiantes reclaman poder calcular se les facilita papel. Tras un breve tiempo de trabajo individual varios estudiantes dicen a la vez: "es verdadera, es verdadera". La investigadora aprueba la respuesta y a continuación señala: "¡pero tuvimos que hacer los cálculos!". A04 dice: "no…yo no". Luego la investigadora sugiere e indaga: "debemos intentar no hacer los cálculos, a ver, ¿qué podemos entonces observar allí? ¿Hay alguna relación? ¿Qué relación podemos detectar en esa estructura?".

A09 responde: "que tres por cinco al cuadrado, es lo mismo que aquí tres por cinco más…". La investigadora le indica que lo explique en la pizarra. A09 pasa a la pizarra y dice: "que esto es lo mismo que esto" (Indica con gestos que el resultado del cuadrado del producto de tres por cinco en el miembro izquierdo de la igualdad es igual a los productos de los primeros términos que se dan en el miembro derecho de la misma). Luego continúa: "y esto es igual a esto" (señala con gestos que $10^2$ es igual al producto de los segundos términos que aparecen en los binomios que aparecen multiplicándose en el miembro derecho). Aquí se observa que A09 ha percibido la estructura que guarda la sentencia dada, aunque tiene dificultades para expresar su razonamiento.

La investigadora coloca una quinta lámina en la pizarra (Figura 5.4) e inicia preguntando a los estudiantes respecto a la sentencia indicada con la viñeta. Los estudiantes responden a la vez "es falsa". Ante la solicitud de una justificación por parte de la investigadora A06 levanta la mano y dice: "porque trece más diecisiete al cuadrado es igual a trece al cuadrado más diecisiete al cuadrado, o sea que el más diez por diecisiete, sobra".

➢ $13^2+10\cdot17+17^2=(13+17)^2$

$13^2+17^2=(13+17)^2$ *1ª*

$(13+17)^2=13^2+17^2+2\cdot13\cdot17$ *2ª*

$13^2+10\cdot17+17^2=(13+17)^2-272$ *3ª*

*Figura 5.4.* Modificaciones propuestas por los estudiantes a la sentencia indicada.

La investigadora pregunta al resto de estudiantes por la veracidad de la primera modificación. El grupo indica a la vez: "es correcta", a lo cual la investigadora sugiere al grupo hacer los cálculos. A04 indica: "es incorrecta" y A06 señala: "es correcta". A12 explica "es falsa, porque el trece más diecisiete al cuadrado sería trece al cuadrado más diecisiete al cuadrado, más dos por trece por diecisiete". La investigadora aprueba que la primera igualdad es falsa y pasa a preguntar a A11 sobre la veracidad de la segunda igualdad. A11 dice: "yo creo que es correcta", al preguntarle por qué, es A06 quien responde: "es correcta, porque el cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo".

Aquí podemos observar que aunque previamente A06 había sustentado que la primera igualdad era correcta (utilizando una noción primitiva de la propiedad distributiva), ahora sustenta la veracidad de la segunda igualdad basándose en la regla de la identidad notable y la enuncia correctamente. Creemos que este hecho se debe a que ha observado la respuesta dada por A11 que le sirve para recordar la relación en la identidad notable y reconocerla en la sentencia numérica.

Luego la investigadora pregunta al grupo sobre la veracidad de la tercera sentencia propuesta en la lámina de la Figura 5.4. A04 indica que es incorrecta y A06 que es correcta. La investigadora cuestiona a A01 quien responde que es correcta. A16 y A03 ratifican la respuesta de A01. La investigadora confirma la veracidad de esta sentencia e insiste a los estudiantes en que atiendan a la estructura de las expresiones: "si queremos elegir una de estas tres" (señala las tres igualdades enumeradas) "¿con cuál nos quedaríamos?". Ante el interrogante A06 responde inmediatamente: "con la segunda". La investigadora aprueba la respuesta y finaliza la puesta en común.

Realización de las tareas del cuaderno de trabajo nº 2

Se da inicio a la segunda parte de la sesión 2. La investigadora indica a los estudiantes que van a realizar unas nuevas tareas. La profesora del grupo y la asesora ayudan a la investigadora a repartir el cuaderno de trabajo nº 2 a los estudiantes. La investigadora procede a dar las instrucciones para realizar la primera parte de las mismas diciendo: "en la primera actividad ustedes van a completar las cajas que aparecen en blanco, las van a completar con aquellos números que ustedes consideran que hacen correcta esa igualdad. Luego, en el espacio que corresponde allí debajo van a explicar cómo ustedes lo han hecho".

Ante esta explicación los estudiantes plantean algunos interrogantes como el que se muestra en el siguiente extracto de diálogo:

A04: *Y… ¿si no sabemos hacerlo?*

S: *Hay que buscar números, para rellenar las cajas y puede que los números de las distintas cajas sean diferentes o puede que sean iguales, vale…*

A04: *¿Pero tengo que poner muchos números?*

S: *No, piénsalo un poco antes de probar para que no tengas que probar con muchos números.*

I: *A ver, ustedes analicen, sí, analicen un poco la estructura, y a ver ¿qué número yo puedo ubicar allí? … que la igualdad sea correcta.*

*Un Alumno: Probar… ¿si tú pones un número va en los dos lados?*

Axx: *Probar… ¿si tú pones un número va en los dos lados?*

I: *Es posible, mira es posible que pongas un número y a lo mejor va en los dos lados, pero en otros casos es posible que no resulte poder ubicar el mismo número, sí.*

La investigadora les insiste en que traten de completar las tareas de forma individual, que intenten explicar con sus propias palabras, no importa la forma como expresen el porqué de sus respuestas.

I: *Si ustedes ubican un número, por ejemplo el veinte, pues… ¿por qué yo ubiqué este número? ¿Por qué?... es decir el número que ubican en la caja explicar ¿por qué usted ubicó ese número?*

A04: *Pero… ¿qué es ubicar?*

I: *Colocar o rellenar las cajas. Si alguien tiene alguna duda, por favor levante la mano.*

Otras interrogantes que surgen son las siguientes:

A07: *¿Puedo usar calculadora? La investigadora le responde afirmativamente.*

Axx: *¿Es del uno al nueve?*

| | |
|---|---|
| *Profesora del grupo:* | *Puedes poner cualquiera, pero… Usen el lápiz probando que así le veis alguna lógica ¿no?* |
| Axx: | *¿Es del uno al nueve?* |
| Profesora del grupo: | *Puedes poner cualquiera, pero… Usen el lápiz probando que así le veis alguna lógica ¿no?* |
| A10: | *¿Es obligatorio explicarlo?* |
| I: | *Si lo pueden explicar, mucho mejor, porque nos van a ayudar mucho a nosotras, recuerden que esto es una investigación, sí… queremos averiguar ¿cómo ustedes aprenden… ¿cómo ustedes trabajan?... y cuantos más detalles ustedes nos den de cómo hicieron el trabajo, pues más nos van a ayudar.* |
| Profesora del grupo: | *Pero hacedlo individualmente, porque sabéis que esto cuenta en la actitud, y la actitud es hacer el trabajo con interés y hacerlo individual.* |

Los estudiantes trabajan cada uno en su cuaderno de trabajo durante el tiempo que queda de clase. Una vez que toca el timbre de finalización de la hora de clase, los estudiantes entregan su cuaderno de trabajo y se retiran del aula.

### 5.2.3 Toma de decisiones después de la sesión 2

Tras analizar las producciones de los estudiantes y la puesta en común realizadas en la sesión 2, se acuerda iniciar la siguiente sesión con la puesta en común de las sentencias 2, 4 y 5 de la primera tarea del cuaderno nº 2, cada una de las cuales está basada en una identidad notable diferente: propiedad distributiva-factor común, diferencia de cuadrados y cuadrado de una suma. Se discutirían en la pizarra aquellas tareas de respuesta única, dado que son más sencillas y, posteriormente, las tareas con respuesta múltiple.

Se decidió dedicarle menos tiempo a la sentencia 2 dado que la mayoría de los estudiantes encontraron menos dificultades en esta sentencia. El propósito con la discusión de esta sentencia era que, por una parte sirviera de motivación para aquellos estudiantes que la habían resuelto adecuadamente y, por otra parte, dirigir la atención de los estudiantes que no la resolvieron correctamente o simplemente no le dieron respuesta, a la estructura de la misma.

Para la discusión de esta sentencia se mostrarían en la pizarra las cuatro variaciones de resultados dados por los estudiantes: (4 y 0); (2 y 2); (20 y 1); (20 y $7^2$); colocando de última aquella cuyos números son correctos (20 y $7^2$) con el propósito de mantener a los estudiantes en expectativa sobre cuál es la forma correcta. En las tres primeras respuestas parece que los estudiantes han ignorado el paréntesis que además de preceder a la caja en el miembro izquierdo también precede al número 4 en el derecho. El objetivo con la discusión de estas respuestas es que los estudiantes expliquen como las obtuvieron e incidir en que no es necesario hacer operaciones y en que el uso de la estructura evita realizar cálculos engorrosos.

La sentencia 4 es elegida para la puesta en común dado que también había sido resuelta correctamente por un elevado número de estudiantes. La sentencia 5 fue resuelta por pocos estudiantes y, entre los que la resuelven, algunos confunden el 2 del término compuesto $2 \cdot 7$ que figura como raíz cuadrada en el binomio del miembro izquierdo con el 2 del doble producto en el tercer término del miembro derecho. Por tanto al confundir el uno por el otro, sólo completan la caja con un 7. Consideramos que esta confusión puede deberse a que la igualdad dada presenta términos compuestos con producto, lo que da a la expresión cierta complejidad. Por todo ello se acordó interrogar a aquellos estudiantes que no la habían hecho, para ver qué dificultades habían tenido y discutir con aquellos que habían cometido errores sobre el proceso realizado.

Pocos estudiantes abordaron las tareas segunda y tercera (sólo 4 estudiantes intentaron dar respuestas a las mismas y las respuestas no fueron correctas). Consideramos que esto puede ser debido a que no se les explicaron verbalmente, como sí se hizo en la primera tarea. Decidimos que en las siguientes sesiones se presentarían verbalmente todas las tareas al repartirles el cuaderno de trabajo, con el propósito de no interrumpir una vez en marcha la sesión de trabajo.

Se establece que en la puesta en común de la sesión 3 se propondrían a los estudiantes la resolución de las sentencias 1 y 2 de la segunda tarea de la sesión 2, con el propósito de que observen la diferencia entre las dos tareas propuestas. En este sentido se prepararía la respuesta correcta por si se presentase el caso que los estudiantes no llegasen a ella. En última instancia se les presentaría la respuesta diciendo que había sido propuesta por un estudiante. Con esta parte de la puesta en común se pretendía provocar la percepción y análisis de la estructura de las expresiones.

Al observar que los estudiantes A04 y A06, ubicados en puestos delanteros en el aula, participaban con mucha frecuencia en las puestas en común, casi impidiendo la participación de los demás compañeros, se acordó que en sucesivas sesiones se llamaría a participar a otros estudiantes.

Por otra parte, habiendo observado que algunos estudiantes tienen dificultades para expresar sus razonamientos, se decide incorporar en la siguiente puesta en común la lectura de las expresiones y sentencias antes de iniciar el trabajo con las mismas.

## *5.3 Tercera sesión*

Como en las sesiones previas, recogemos aquí la descripción de la preparación e implementación de la sesión 3 e información relativa a la toma de decisiones para la siguiente sesión.

### 5.3.1 Preparación de la sesión 3

| **Objetivos de investigación** |
|---|
| **Oi1**. Indagar en la capacidad de los estudiantes para establecer paralelismo estructural entre expresiones/igualdades numéricas y algebraicas basadas en identidades notables.<br>**Oi2**. Explorar el uso que hacen los estudiantes de variables y cuasivariables en la generalización de patrones numéricos.<br>**Oi3**. Analizar el tipo de estructuras que reproducen los estudiantes.<br>**Oi4**. Identificar los errores que cometen los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas.<br>**Oi5**. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas propuestas. |
| **Tipos de Tareas** |
| En el cuaderno de trabajo nº 3 propusimos dos tareas, las dos se refieren a la construcción de expresiones o sentencias con la misma estructura que otras dadas, llegando a hacer una generalización de las mismas. Las acciones concretas a realizar son dos:<br>**Generalizar** expresiones y sentencias numéricas a algebraicas.<br>**Generar** expresiones y sentencias, tanto numéricas como algebraicas, con la misma estructura que una dada. |
| **Expectativas de aprendizaje** |
| **Ea1**. Identificar patrones en la estructura externa y relaciones internas de expresiones y sentencias numéricas dadas.<br>**Ea2**. Generalizar patrones encontrados. Reproducir estructuras externas y relaciones internas de expresiones y sentencias numéricas y algebraicas.<br>**Ea3**. Expresar los patrones en lenguaje algebraico. |

Tareas para la tercera sesión

**Tarea 1.** En esta tarea se espera que los estudiantes realicen generalizaciones a partir de la estructura externa y relaciones internas que presentan, y comparten, tres expresiones o igualdades. En su diseño se consideran las cuatro identidades notables y expresiones simples y compuestas, tanto con productos y potencias como con sumas y restas.

El enunciado de esta primera tarea es como sigue:

*Las expresiones que hay en cada uno de los recuadros tienen la misma estructura. Debajo de cada recuadro escribe tres expresiones que tengan la misma estructura que las dadas: dos sólo con números y una sólo con letras.*

Estructura 1:

$$(5-3)(5+3)$$
$$(7-4)(7+4)$$
$$(24-19)(24+19)$$

IN implicada: Producto de una suma por una diferencia.

Tipo de expresión: simple.

Estructura 2:

$$4^2 + 7^2 + 2\cdot 4\cdot 7$$
$$6^2 + 10^2 + 2\cdot 6\cdot 10$$
$$23^2 + 15^2 + 2\cdot 23\cdot 15$$

IN implicada: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: simple.

Estructura 3:

$$16^2 - 2\cdot 16\cdot 2 + 2^2 = (16-2)^2$$
$$4^2 - 2\cdot 4\cdot 3 + 3^2 = (4-3)^2$$
$$11^2 - 2\cdot 11\cdot 4 + 4^2 = (11-4)^2$$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: simple.

Estructura 4:

$$(10-4)^2-2\cdot(10-4)\cdot 5+5^2$$
$$(17-5)^2-2\cdot(17-5)\cdot 8+8^2$$
$$(12-7)^2-2\cdot(12-7)\cdot 31+31^2$$

IN implicada: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con resta $10-4, 17-5, 12-7$

Estructura 5:

$$5\cdot 12+5\cdot 3^2$$
$$7\cdot 20+7\cdot 5^2$$
$$10\cdot 12+10\cdot 2^2$$

IN implicada: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con potencia $3^2, 5^2, 2^2$ .

Estructura 6:

$$12(10-3)=12\cdot 10-12\cdot 3$$
$$24(15-8)=24\cdot 15-24\cdot 8$$
$$36(20-5)=36\cdot 20-36\cdot 5$$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: simple.

Estructura 7:

$$(3\cdot 5+2)^2=(3\cdot 5)^2+2^2+2\cdot 3\cdot 5\cdot 2$$
$$(4\cdot 7+3)^2=(4\cdot 7)^2+3^2+2\cdot 4\cdot 7\cdot 3$$
$$(10\cdot 11+7)^2=(10\cdot 11)^2+7^2+2\cdot 10\cdot 11\cdot 7$$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $3\cdot 5$ , $4\cdot 7$ , $10\cdot 11$

Estructura 8:

$$[3+5+2][3-(5+2)]=3^2-(5+2)^2$$
$$[17+10+1][17-(10+1)]=17^2-(10+1)^2$$
$$[8+3+4][8-(3+4)]=8^2-(3+4)^2$$

IN: Diferencia de cuadrados

Tipo de expresión: compuesta, con suma $(5+2)$ , $(10+1)$ , $(3+4)$.

**Tarea 2.** En esta tarea se trata de generar expresiones o igualdades algebraicas que cumplan la condición de tener la misma estructura que otra dada, entendiendo como tal la misma estructura externa y relaciones internas. La indicación dada a los estudiantes queda redactada así: "*De las igualdades que has escrito antes, elige una que tenga letras y cópiala aquí: ... Escribe otras igualdades que tengan la misma estructura, inventadas por ti, utilizando letras, números y operaciones.*"

Esta tarea se preparó para que aquellos estudiantes que acabaran la tarea 1 antes del tiempo indicado, tuvieran trabajo para seguir haciendo y así evitar que distrajeran a sus compañeros.

### 5.3.2 Implementación

La sesión 3 fue realizada durante la segunda hora de clases de 9:15 a 10:15 del viernes 1 de abril de 2011. Asistieron 17 estudiantes. La sesión comenzó con la puesta en común del cuaderno de trabajo de la sesión previa, seguida del trabajo individual en el cuaderno de trabajo nº 3.

Puesta en común del cuaderno de trabajo nº 2

Esta puesta en común tuvo una duración de 28 minutos y contó con la participación de 10 de los 17 estudiantes que asistieron a la misma. La investigadora inicia la sesión colocando en la pizarra una lámina (Figura 5.5) con algunas de las respuestas propuestas por los estudiantes a la segunda sentencia de la tarea 1, del cuaderno de trabajo nº 2. Tras recordar en que consistió el trabajo realizado en esta tarea, se pide a los estudiantes leer la sentencia señalada con la viñeta, con el propósito de que se familiaricen con la lectura de los términos contenidos en la misma. La investigadora inicia leyendo la expresión del miembro izquierdo: "a ver aquí tenemos siete al cuadrado que multiplica ¿a quién?". Los estudiantes responden: "a veinte". Les sugiere leer la igualdad inicial:

“siete al cuadrado que multiplica una caja… menos cuatro es igual ¿a qué cosa?”. A04 y A06 responden: “a siete cuadrado por veinte menos algo”. La investigadora continúa: “menos algo por cuatro, muy bien”. Aquí “algo” se refiere a la caja vacía.

- $7^2 \cdot (\boxed{\phantom{00}} - 4) = 7^2 \cdot 20 - \boxed{\phantom{00}} \cdot 4$

$$7^2 \cdot (\boxed{4} - 4) = 7^2 \cdot 20 - \boxed{0} \cdot 4 \qquad 1^{a}$$
$$7^2 \cdot (\boxed{2} - 4) = 7^2 \cdot 20 - \boxed{2} \cdot 4 \qquad 2^{a}$$
$$7^2 \cdot (\boxed{20} - 4) = 7^2 \cdot 20 - \boxed{1} \cdot 4 \qquad 3^{a}$$
$$7^2 \cdot (\boxed{20} - 4) = 7^2 \cdot 20 - \boxed{7^2} \cdot 4 \qquad 4^{a}$$

*Figura 5.5*. Valores utilizados por los estudiantes para completar la sentencia indicada.

La investigadora llama a A05 y le pregunta sobre la veracidad de la primera respuesta recogida en la lámina. A05 responde que no asistió el día anterior y se niega a decir nada relacionado con la pregunta. La investigadora interroga al grupo. Algunos estudiantes señalan que es correcta, otros que es incorrecta, y otros intentan opinar pero no culminan su planteamiento. La investigadora propone a los estudiantes verificar la veracidad sin realizar los cálculos, y les pregunta: “¿cómo podríamos hacerlo? ¿Cómo se puede lograr esto... sin hacer los cálculos?”. A04 responde: “intentando que las dos partes salgan lo más iguales posibles”. La investigadora aprueba la respuesta de A04 y señala que la expresión debe tener la misma estructura de la igualdad dada y que los números que se les ha dado en la igualdad indicada en la viñeta deben figurar en la igualdad que ellos proponen. Al indagar a los estudiantes sobre la veracidad o falsedad de las siguientes sentencias propuestas en la lámina los estudiantes no muestran dificultad.

La investigadora coloca una segunda lámina en la pizarra (Figura 5.6) y pregunta a los estudiantes sobre la veracidad de las sentencias que ellos han propuesto. Al respecto de la primera, los estudiantes señalan que es falsa. La investigadora con el propósito de que se centren en la estructura de las sentencias pregunta: “¿qué ocurre con los números 12, 14 y con el 3 que aparecen en la primera igualdad propuesta en la lámina?”. A10 y A06 responden: “no están en ningún lado” e igual respuesta proporcionan cuando se les indaga por la segunda sentencia.

➢ $\boxed{\phantom{0}}^2 - 11^2 = (\boxed{\phantom{0}} - 11) \cdot (8 + \boxed{\phantom{0}})$

$\boxed{12}^2 - 11^2 = (\boxed{14} - 11) \cdot (8 + \boxed{3})$ 1ª

$\boxed{7}^2 - 11^2 = (\boxed{12} - 11) \cdot (8 + \boxed{17})$ 2ª

$\boxed{8}^2 - 11^2 = (\boxed{8} - 11) \cdot (8 + \boxed{11})$ 3ª

*Figura 5.6*. Resoluciones de los estudiantes a la sentencia indicada.

La investigadora sugiere que un estudiante lea la sentencia propuesta en la viñeta, de esta manera les ayuda a familiarizarse con el lenguaje empleado en una expresión algebraica. A04 se ofrece voluntaria y lee: “un número al cuadrado menos once al cuadrado es igual a un número menos once por ocho más un número”. La investigadora aprueba la participación de A04 y cuestiona a los estudiantes: “¿cuál de las tres es la correcta?”. Los estudiantes responden a la vez: “la última”. La investigadora sugiere a A09 que justifique esa respuesta, para lo cual A09 responde: “porque los números están arriba”. La investigadora concluye que efectivamente es la correcta por contener los números apropiados para la expresión dada.

La asesora de la investigación interviene y propone la siguiente sentencia en la pizarra $8^2+11^2=(8-11)\cdot(8+11)$ a su vez comenta y pregunta a los estudiantes: “en ésta también tengo los mismos números, menos los signos ¿sigue siendo verdadera?”. Los estudiantes responden a la vez: “no”. La asesora les pregunta: “¿por qué no?”. Los estudiantes participan todos a la vez, pero no perciben el porqué. La asesora les sugiere: “probadlo y haced la cuenta, confirmadlo a ver, ¿tenéis papel y tenéis bolígrafo?”. A04 responde que obtiene igual resultado. Luego la profesora del grupo sugiere utilizar números más pequeños como el uno y dos para que lo hagan con mayor facilidad.

La asesora modifica la expresión intercambiando los números ocho por el número dos y el once por el uno, quedando la sentencia de la siguiente forma $2^2+1^2=(2-1)\cdot(2+1)$. La asesora pregunta entonces si se obtiene el mismo resultado. A04 y A06 responden a la vez: “no, no sale lo mismo”. La asesora les dice: “¿qué tengo que cambiar aquí para que sí sea lo mismo?”. A01 responde: “el signo”. La asesora indaga “A01, ¿qué signo tendría que cambiar?”. A01 responde: “el más”. Luego la asesora indaga: “¿cuál?... ¿éste de aquí?” (Refiriéndose al signo del segundo binomio de la expresión derecha). A01 dice: “no”. La asesora vuelve a indagar, “¿éste de aquí?” (Refiriéndose al signo del binomio de la expresión izquierda). A01 ahora dice: “sí”. La asesora cambia el signo a la expresión de la izquierda, por tanto queda la igualdad $2^2-1^2=(2-1)\cdot(2+1)$. Luego la asesora continúa indagando tal como se muestra en el siguiente extracto de puesta en común:

S: ¿Cuánto me sale ahí?
Un alumno: Dos por dos, cuatro, menos uno, tres

Axx: Dos por dos, cuatro, menos uno, tres.

S: Tres… ¿no? ahora sigue igual.

Axx [a coro]: Sí.

De esta manera la asesora hace la observación que además de precisar si los números son iguales en los dos lados, tal como había señalado la investigadora, también es importante observar los signos contenidos a ambos lados de la igualdad para conservar la estructura de la igualdad propuesta.

La investigadora da las gracias a la asesora y coloca otra lámina sobre la pizarra (Figura 5.7) con cuatro sentencias propuestas por los estudiantes como respuestas a la quinta sentencia del cuaderno de trabajo nº 2, y pide un voluntario que la lea. A04 se ofrece y lee: “dos por siete más un número al cuadrado es igual a dos por siete al cuadrado más once al cuadrado más dos por un número por once”.

➢ $(2\cdot 7+\boxed{\phantom{11}})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{\phantom{11}}\cdot 11$

$(2\cdot 7+\boxed{11})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{7}\cdot 11$ 1ª

$(2\cdot 7+\boxed{11})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{0}\cdot 11$ 2ª

$(2\cdot 7+\boxed{11})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{14}\cdot 11$ 3ª

$(2\cdot 7+\boxed{9})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{11}\cdot 11$ 4ª

*Figura 5.7*. Formas de cómo los estudiantes completan la sentencia indicada.

La investigadora cuestiona a los estudiantes sobre la veracidad o falsedad de la primera respuesta. A continuación se da el diálogo siguiente:

A04: Bueno, los números son iguales.

I: ¡Los números son iguales!, entonces, ¿cómo podemos comprobar que es falsa si los números son iguales?

A06: Porque el cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer… del primero más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo.

I: Muy bien, muy bien.

S: ¿Entonces que habría que cambiar?

A04 indica que no comprende y A06 vuelve a repetir la regla del cuadrado de una suma. La investigadora sugiere a A06 que pase a la pizarra a explicar con detalle lo que ha expresado. A06 pasa a la pizarra y dice: "el resultado de esto (señala la expresión de la izquierda), que es el cuadrado de una suma, sería igual al cuadrado del primer número (señala el primer término de la expresión de la derecha); más el cuadrado del segundo número (señala el segundo término de la expresión de la derecha); más el doble producto del primer número por el segundo (señala el tercer término de esta última expresión)".

La investigadora no se detiene en la dificultad mostrada por los estudiantes de omitir el número dos como uno de los números que completa la segunda caja de la igualdad, dada la confusión que han mostrado con el dos del doble producto.

Al indagar sobre la veracidad de la segunda sentencia los estudiantes responden que es falsa dado que en la misma aparece un cero que no se encuentra en la igualdad propuesta. Con respecto a la tercera sentencia, la investigadora pregunta a A12 sobre la veracidad de la misma. A12 señala: "la tercera es la correcta", y al ser interrogado por qué, responde: "porque en la segunda caja pone 14, que es dos por siete, el doble producto del primero por el segundo".

La investigadora pasa a averiguar qué opinan de la cuarta igualdad. A06 señala que es falsa y dice: "porque si el último número… si el doble producto del primero por el segundo es una caja por once, entonces once es el segundo número, no puede ser el nueve".

Realización de las tareas del cuaderno nº 3

La investigadora coloca una lámina en la pizarra (Figura 5.8) e indica a los estudiantes que se les va a repartir el cuaderno de trabajo de este día donde se les presenta tres igualdades o expresiones que tienen una misma estructura. En ellas hay números que se están operando, paréntesis, suma, restas, y en algunos aparecen potencias. Ellos deben escribir con números dos expresiones con la misma estructura que las dadas, pero inventadas por ellos y, a continuación, han de escribir otra expresión pero ya no solo con números sino también con letras, es decir, con símbolos algebraicos.

➢ $(5-3)(5+3)$
$(7-4)(7+4)$
$(24-19)(24+19)$

Con números____________________

______________________________

Con símbolos algebraicos (letras):

______________________________

*Figura 5.8*. Ejemplo utilizado para realizar el cuaderno de trabajo nº 3.

Se dan las siguientes indicaciones a los estudiantes: a) para realizar estas tareas, no tienen que hacer cálculos, simplemente han de fijarse en la expresión y poner otro ejemplo con otros números y con la misma estructura que la expresión dada; b) pueden utilizar letras desde la "a" a la "z", la que a ellos más les guste; c) el trabajo ha de ser individual.

De inmediato surgen interrogantes, A06 dice: "¿Hay que resolverlo?" La investigadora le responde: "No, no tienes que resolver nada, nada más construir las expresiones tal como las que aparecen allí". A su vez la asesora, la profesora del grupo e investigadora distribuyen a los estudiantes el cuaderno de trabajo nº 3. La investigadora sugiere a los estudiantes que se separen un poco, dado que la actividad escrita se requiere que sea individual.

Los estudiantes realizan el trabajo de forma individual y en silencio hasta que finaliza la hora de clase. En total el tiempo dedicado al trabajo individual es 23 minutos.

### 5.3.3 Toma de decisiones después de la sesión 3

Decidimos que para la puesta en común se dedicaría más tiempo a las partes donde los estudiantes habían tenido más dificultades.

Tanto al construir expresiones/igualdades numéricas como algebraicas en las que están involucradas el cuadrado de una suma o cuadrado de una diferencia, los estudiantes cometían el error de no preservar el 2 como invariante en el doble producto. Ante este error decidimos que al iniciar la puesta en común de la sesión 4 se pondría los dos ejemplos que se muestran en la Figura 5.9, uno para que la investigadora lo explicase y otro para que ellos lo hicieran, con el objetivo de que ayudaran a hacer explícita la invarianza del número dos en el doble producto. También se haría énfasis en los componentes y características de las expresiones o igualdades que se mantienen como por ejemplo producto de paréntesis, potencias, signos, con el objetivo de que perciban y conserven la estructura.

| | |
|---|---|
| $(5-3)(5+3)+8$ | $4^2 + 7^2 + 2 \cdot 4 \cdot 7$ |
| $(7-4)(7+4)+8$ | $6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10$ |
| $(24-19)(24+19)+8$ | $23^2 + 15^2 + 2 \cdot 23 \cdot 15$ |

*Figura 5.9.* Modelos para ejemplificar la invarianza del número 2.

Posteriormente se presentaría a los estudiantes varias de las igualdades trabajadas que comparten la estructura del cuadrado de una diferencia, junto a cuatro ejemplos de igualdades numéricas y algebraicas que presentaban algunos errores (ver Figura 5.10). Dos de dichas igualdades, la primera y la tercera habían sido construidas por dos de los estudiantes.

$$16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 2 + 2^2 = (16-2)^2$$
$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3^2 = (4-3)^2$$
$$11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 4 + 4^2 = (11-4)^2$$

$2^2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = (2-1)^2$ 1ª

$5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 + 2^2 = (5^2-6)^2$ 2ª

$x^2 - y \cdot x \cdot y + y^2 = (x-y)^2$ 3ª

$a^2 - b \cdot a \cdot c + c^2 = (a-b)^2$ 4ª

*Figura 5.10*. Lámina para ilustrar la invarianza del número 2.

Durante la sesión 3 se mostró a la profesora de matemáticas del grupo los cuadernos de trabajo diseñados para las sesiones 4 y 5. La profesora hizo la observación de que son estudiantes de tercer año de educación secundaria, que aunque en los dos cursos previos han trabajado las identidades notables, no dejan de resultarles aún complicadas. Dice estar sorprendida de que al trabajar las identidades en las primeras sesiones ellos no las recordaran[6]. Por tanto, considera que presentarán muchas dificultades para resolver las tareas pensadas para el cuaderno de trabajo nº 4, en el cuál se incluyen expresiones algebraicas fraccionarias las cuales pueden ser demasiado abstractas para los estudiantes.

Considerando la opinión de la profesora del grupo se decidió modificar el diseño inicial del cuaderno de trabajo nº 4. De manera que las cuatro primeras sentencias algebraicas sean enteras y otras cuatro sean fraccionarias. Además se decide que al menos la mitad

[6] Recordamos que en las primeras sesiones las identidades notables se trabajaron en expresiones numéricas.

de las expresiones de cada una de las tareas sean simples, para que no haya discontinuidad con el cuaderno de trabajo anterior en el que todas las expresiones e igualdades eran enteras.

## *5.4 Cuarta sesión*

En este apartado recogemos la descripción de la preparación e implementación de la sesión 4 así como información relativa a la toma de decisiones para la última sesión.

### 5.4.1 Preparación de la sesión cuatro

| **Objetivos de investigación** |
|---|
| **Oi1**. Analizar la percepción que muestran los estudiantes de la estructura de expresiones algebraicas basadas en identidades notables cuando están ocultos algunos de sus elementos.<br>**Oi2**. Indagar el reconocimiento que hacen los estudiantes de la estructura de identidades notables en sentencias que presentan elementos algebraicos compuestos, viéndolos como "un todo".<br>**Oi3**. Identificar los errores que cometen los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas.<br>**Oi4**. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas propuestas y de la gestión del aula en el diseño instruccional implementado. |
| **Tipos de Tareas** |
| El cuaderno de trabajo nº 4 está compuesto por dos tareas. La primera incluye expresiones algebraicas enteras. La segunda requiere trabajar con expresiones fraccionarias.<br>Las acciones a realizar son:<br>**Completar** expresiones llenando los espacios en blanco de forma que las sentencias propuestas sean verdaderas.<br>**Generar** igualdades algebraicas fraccionarias. |
| **Expectativas de aprendizaje** |
| **Ea1**. Encontrar, en igualdades algebraicas incompletas que involucran identidades notables, los elementos necesarios para que sean equivalentes.<br>**Ea2.** Obtener igualdades algebraicas, incompletas, a partir del reconocimiento de la estructura de identidades notables.<br>**Ea3**. Hacer uso de lenguaje algebraico. |

<u>Tareas para la cuarta sesión</u>

**Tarea 1.** En la tarea aparecen las cuatro identidades notables atendiendo a los diversos niveles de complejidad: simple y compuesta. Las compuestas con producto o potencia y con suma o resta. Esta es una actividad análoga a la primera tarea del cuaderno de

trabajo de la Sesión 2, pero trata con expresiones algebraicas en lugar de numéricas, se introducen además expresiones fraccionarias. Las cuatro primeras sentencias de la tarea constan solamente de una caja para completar, todas están expresadas en su forma entera y algebraica. Las cuatro sentencias siguientes constan de dos cajas para completar, y están expresadas en su forma fraccionaria y algebraica.

La tarea se formula de la siguiente manera:

*Completa cada caja con aquellas expresiones que hacen que la igualdad sea correcta. Indica cómo sabes que lo que has hecho está bien*.

Sentencia 1:

$$(3x+1)^2 \cdot (7x-1) = (9x^2+1+6x) \cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_\_}$$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $3x$

Sentencia 2:

$$2x^3 \cdot (x^2-2x+1) = 2x^3 \cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_\_}^2$$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: simple

Sentencia 3:

$$(x-7)\cdot(x+7)\cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_\_} = (x^2-49)\cdot(5x^2-1)$$

IN: Producto de una suma por una diferencia-diferencia de cuadrados.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 4:

$$4x^4-x^2 = \boxed{\_\_\_\_\_\_\_} \cdot (4x^2-1)$$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con producto y potencia $4x^2$

Sentencia 5:

$$\frac{(7x^2+3)\cdot(x^2+1)}{x^4+1+2x^2} = \frac{(7x^2+3)\cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_\_}}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_}^2}$$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta con potencia $x^2$

Sentencia 6:

$$\frac{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}-2m^4}{2m(2m-1)}=\frac{2m^4\cdot(2m-1)}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot(2m-1)}$$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, término compuesto con producto y potencia $2m^4$

Sentencia 7:

$$\frac{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}-1}$$

IN: Producto de una suma por una diferencia-diferencia de cuadrados.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 8:

$$\frac{x^2+25-10x}{(x-5)(x-3)}=\frac{(x-5)\cdot\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{(x-5)\cdot\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}}$$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: simple.

**Tarea 2.** También en este caso se propone una tarea para que los estudiantes que sean más rápidos haciendo la tarea previa, no se queden parados y puedan distraer al resto de compañeros. Proponemos a los estudiantes una tarea similar a la ya planteada en las sesiones 1 y 2, implicando en este caso la construcción de igualdades fraccionarias. El enunciado de la tarea es el siguiente:

*Escribe igualdades correctas inventadas por ti, en las que aparezcan fracciones que tengan expresiones algebraicas tanto en el numerador como en el denominador.*

### 5.4.2 Implementación

La sesión 4 fue realizada durante la tercera hora de la mañana, horario de clase de 10:15 a 11:15, del martes 5 de abril de 2011. A la misma asistieron 16 estudiantes.

<u>Puesta en común del cuaderno de trabajo nº 3</u>

Esta puesta en común tuvo una duración de 22 minutos. En ella participaron 12 de los 16 estudiantes que asistieron. La investigadora inicia colocando una lámina en la pizarra con algunas expresiones numéricas (Figura 5.11) y recordándoles el trabajo realizado en el cuaderno de trabajo nº 3, en donde se les pedía que observaran las expresiones o igualdades dadas y que construyeran otras con igual estructura. Tras esta introducción, la investigadora les solicita que observen las expresiones de la lámina, las cuales son una modificación de las primeras expresiones contenidas en la tarea 1 (se ha añadido $+8$ a todas ellas), e indiquen si observan algo que no varía en ellas. Al instante A05 responde: "el ocho". La investigadora aprueba la respuesta dada por A05 y continúa indagando: "¡El ocho!, muy bien, el ocho no varía ¿qué otra cosa no varía?". A01 responde: "los signos"; la investigadora aprueba nuevamente e indaga: "muy bien, los signos ¿qué más?". A04 dice: "los paréntesis"; la investigadora aprueba la respuesta de A04: "muy bien los paréntesis" y luego A05 complementa: "y que se multiplican".

$$(5-3)(5+3)+8$$
$$(7-4)(7+4)+8$$
$$(24-19)(24+19)+8$$

*Figura 5.11.* Lámina para ejemplificar  la invarianza de un número.

La investigadora señala que estos elementos los pueden observar si miran las expresiones en columna o verticalmente. Pero ahora les sugiere que observen cada expresión en sí y pregunta: "¿hay alguna relación entre los números que aparecen en ella?". A04 y A06 responden: "son los mismos". La investigadora afirma e interroga nuevamente: "son los mismos, ¡muy bien! ¿Pero quiénes son los mismos?". A05 responde: "El primer número del primer paréntesis más el primer número del segundo paréntesis".

La investigadora sugiere a A05 que lo repita, pero es A04 quien lo repite. La investigadora aprovecha la oportunidad para indicar que esta relación es observable en todas las expresiones allí propuestas y pide que, una vez que han observado la estructura, un voluntario pase a la pizarra y escriba un ejemplo con números.

Sólo A04 levanta la mano, la investigadora le dice que pase a la pizarra. A04 escribe la expresión $(4-10)\cdot(4+10)+1$. De inmediato A06 y A01 indican que no es correcto, luego A04 cambia el '1' por '8', y queda la expresión $(4-10)\cdot(4+10)+8$. La investigadora aprovecha para recordar que deben conservar la estructura de las expresiones dadas y sugiere otro voluntario para que escriba un ejemplo con letras.

A06 levanta la mano y la investigadora le dice que pase a la pizarra. A06 escribe la expresión $(a-b)\cdot(a+b)+\boldsymbol{c}$. La investigadora le sugiere que observe nuevamente y recuerde que hay cosas que no deben variar. A04 expresa: “pero el ocho no lo puede poner, tiene que ser con letras”. Al respecto A09 responde: “no, pero no varía”. A06 corrige la expresión quedando como sigue $(\mathrm{a}-\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}+\mathrm{b})+8$. La investigadora aprovecha la situación para recordar a los estudiantes que si un número se mantiene en todas las expresiones, entonces debe mantenerse, aunque se esté trabajando con letras, aquello que se mantiene se debe conservar.

La investigadora coloca otra lámina en la pizarra (Figura 5.12), en la que se muestran el segundo grupo de expresiones de la tarea 1. Pide a los estudiantes que observen las expresiones por columnas y que señalen qué cosas no varían. Los estudiantes inician su participación, A09 indica: “el cuadrado”; A10 señala: “el dos”; A17 indica: “el cuadrado y los signos”. La investigadora continúa indagando: “¿qué más?”; los alumnos responden a la vez: “los signos”; A18 indica: “que se multiplican los mismos números”; la investigadora aprueba la participación de los estudiantes: “muy bien, muy bien” y continua indagando. A10 expresa “que el segundo número del cuadrado está al final”, al respecto la investigadora le sugiere a A10 que pase a la pizarra y explique a sus compañeros lo que acaba de expresar.

$$
\begin{array}{l}
4^2 + 7^2 + 2\cdot 4\cdot 7 \\
6^2 + 10^2 + 2\cdot 6\cdot 10 \\
23^2 + 15^2 + 2\cdot 23\cdot 15
\end{array}
$$

*Figura 5.12.* Lámina para ejemplificar a los estudiantes la invarianza del número 2.

A10 pasa a la pizarra y expresa “este número está aquí y este otro también está”. A10 hace gestos con la mano indicando que el 4 está en el primer término y luego está en el tercer término, y luego señala que de igual manera el 7 está en el segundo término y luego está en el tercer término**.** Aprueba lo hecho hasta ese momento y sugiere a A07 pasar a la pizarra a construir un ejemplo como los indicados en la lámina.

A07 pasa a la pizarra y pregunta si lo construye con números o con letras, la asesora le responde con números. A07 inicia escribiendo $6^2+8^2+2$, luego quita el 2 y pone un 3, quedando la expresión $6^2+8^2+3\cdot 6\cdot 8$. La investigadora le sugiere que recuerde observar bien la estructura. Al respecto A07 pregunta: “¿siempre se debe dejar el dos del doble producto?”. La investigadora indicando el dos del doble producto dice: “en este caso se mantiene constante, es invariante, no varía, sí… entonces debemos mantenerlo”, y luego pregunta a los estudiantes: “¿y por qué debemos mantenerlo? ¿Alguien conoce por qué debemos mantener ese dos?”. A07 inmediatamente corrige la expresión y cambia el tres por el dos $6^2 + 8^2 + 2\cdot 6\cdot 8$. Ante la interrogante de la investigadora A10 expresa: “porque sale en todo” y A12 expresa: “por los cuadrados”. La investigadora sugiere otro voluntario, llama a A18. A18 pasa a la pizarra y escribe $7^2 + 9^2 + 2\cdot 7\cdot 9$. Ahora la investigadora sugiere hacer un ejemplo con letras, A01 levanta la mano, pasa a la pizarra y escribe $a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b$.

En este momento la investigadora coloca otra lámina en la pizarra (Figura 5.13). Esta lámina contiene las sentencias correspondientes a la tercera estructura incluida en la Tarea 1, junto a cuatro sentencias, dos de ellas propuestas por los estudiantes. Estas cuatro sentencias se utilizan para cuestionar a los estudiantes sobre la veracidad o falsedad de las mismas y sobre si conservaban la estructura de las igualdades contenidas en el cuadro que se indica con la viñeta. A07 señala que no conserva la misma estructura, dice: “porque el dos se repite en todos los casos y el primer coeficiente que ha puesto, ha puesto un uno”. Luego, la investigadora le sugiere que pase a la pizarra y le pregunta dónde está el error. A07 pasa a la pizarra e indica el primer número del segundo término en la primera igualdad, es decir el uno, luego escribe la igualdad en su forma correcta: $2^2 - 2\cdot 2\cdot 1 + 1^2 = (2-1)^2$.

$$\boxed{\begin{array}{l} 16^2 - 2\cdot 16\cdot 2 + 2^2 = (16-2)^2 \\ 4^2 - 2\cdot 4\cdot 3 + 3^2 = (4-3)^2 \\ 11^2 - 2\cdot 11\cdot 4 + 4^2 = (11-4)^2 \end{array}}$$

$$\begin{array}{ll} 2^2 - 1\cdot 2\cdot 1 + 1^2 = (2-1)^2 & 1^a \\ 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5 + 2^2 = (5^2-6)^2 & 2^a \\ x^2 - y\cdot x\cdot y + y^2 = (x-y)^2 & 3^a \\ a^2 - b\cdot a\cdot c + c^2 = (a-b)^2 & 4^a \end{array}$$

*Figura 5.13.* Lámina para afianzar la invarianza del número 2.

Observamos que A07, después de las dudas tratadas previamente en la puesta en común, ha percibido los elementos que componen la estructura de las igualdades propuestas. A04 interviene diciendo: “pues yo creo que está mal”. La asesora le indica a A04 que explique por qué está mal, A04 dice: "¿el uno no sé de dónde sale?" y A18 le responde: "porque está puesto en lo de arriba". A04 acepta que la modificación que ha hecho A07 es correcta y dice "pero a ver se supone que tenía que cambiar todos los números, si los va a cambiar, los va a cambiar bien". Nuevamente A18 le responde: "a ver, a ver, no tiene que cambiar todos los números, lo que tiene que hacer es poner otro de esos pero que tenga la misma estructura de la de arriba, entonces si en la estructura de arriba tienen todos esa parte, tienen todos un dos, pues abajo también tiene que dejar un dos".

Aquí observamos como A18 refuta un planteamiento que considera incorrecto y defiende la idea que para ella es la correcta. Esta acción de A18 permite a sus compañeros visualizar con más claridad el error en el que algunos de ellos habían incurrido en el cuaderno de trabajo.

La investigadora cuestiona ahora sobre la segunda igualdad. A02 indica que es incorrecta. Al ser preguntado por qué, dice: "porque después del igual en el paréntesis lleva un cuadrado el cinco y no lo debe llevar". La investigadora continúa indagando "muy bien, y ¿qué más?". Algunos estudiantes dan sus aportes, A02 dice: "hay que averiguar… otros números"; A04 dice: "que el ocho es un cinco"; A06 dice: "y el cinco es un seis". En ese instante, la asesora pregunta por qué pero la investigadora no continúa indagando sobre las razones de los estudiantes para realizar estos cambios.

La investigadora continúa indagando qué otras razones hacen falsa la igualdad. A10 y A06 dicen a la vez: "es que está mal todo". La asesora sugiere un voluntario que la corrija. A04 levanta la mano, pasa a la pizarra e inicia escribiendo la forma correcta de la igualdad diciendo en voz alta lo que va a hacer. A10, A09 y A06 participan indicándole los números que debe ir colocando. A04 escribe la igualdad $5^2 - 2\cdot 5\cdot 6 + 6^2 = (5-6)^2$. Los estudiantes A10 y A09 aprueban la corrección que ha hecho A04.

La investigadora indaga a A16 por la veracidad de la tercera igualdad. A16 responde que es correcta. Los estudiantes comentan en voz alta, algunos dicen que es correcta y otros dicen que es incorrecta. A07 pasa a la pizarra donde explica: "ahí se pone un dos, en esta estructura siempre hay que poner un dos". Señala la columna formada por el número dos en los segundos términos de las tres igualdades recogidas en el recuadro, indicando que las cuatro igualdades abajo planteadas deben mantener el número dos iniciando los segundos términos. Luego escribe el número dos debajo de la primera '*y*' que aparece en la tercera igualdad. La investigadora le dice: "escríbela toda para saber que está toda correcta". A07 escribe la igualdad $x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = (x - y)^2$.

La investigadora indaga ahora por la veracidad de la cuarta igualdad propuesta. A06 dice "es incorrecta, porque la primera 'b' tiene que ser un dos". La investigadora le sugiere que pase a la pizarra y la corrija, A06 pasa a la pizarra y corrige la igualdad $a^2 - b \cdot a \cdot c + c^2 = (a - b)^2$ escribiendo $a^2 - 2 \cdot a \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2 = (a - b)^2$ aunque A10 le hace la observación siguiente: "pero la 'b' ha cambiado más, hubieras cambiado nada más que la 'c', la 'b' última le ponía una 'c'". En este caso A10 se refiere a cambiar el segundo término del binomio que compone la expresión del miembro derecho, para tener que hacer menos modificaciones en la igualdad. La investigadora aprueba la corrección realizada por A06 y le recuerda nuevamente a los estudiantes atender a la estructura.

<u>Realización de las tareas del cuaderno de trabajo nº 4</u>

Esta actividad tiene una duración de 30 minutos. La investigadora coloca una lámina en la pizarra (Figura 5.14) con el propósito de presentar las tareas que se quiere que los estudiantes realicen durante el tiempo restante de esta sesión 4.

➢ $(3x+1)^2 \cdot (7x-1) = (9x^2+1+6x) \cdot \boxed{\phantom{xxxxxx}}$

Sé que está bien porque________________________

➢ $\dfrac{(7x^2+3)\cdot(x^2+1)}{x^4+1+2x^2} = \dfrac{(7x^2+3)\cdot \boxed{\phantom{xxxxxx}}}{\boxed{\phantom{xxxxxx}}^{\,2}}$

*Figura 5.14*. Ejemplos utilizados para ilustrar el trabajo a realizar en la sesión 4.

Las instrucciones concretas dadas son las siguientes: "Algunas de las expresiones con las que vais a trabajar son lineales y otras son fraccionarias, ustedes van a observar la parte izquierda, y van a observar la parte derecha, y ver qué van a escribir en las cajas, es decir, van a escribir aquella parte que hace falta para completar la igualdad, es decir para que las partes de la igualdad sean equivalentes". Señala que tanto en las igualdades lineales como en las fraccionarias, tienen que analizar muy bien ambas partes y ver si hay alguna expresión que guarda relación con la otra. Además deben decir: "sé que está bien porque…". Es decir, por qué consideran que lo que han hecho está bien.

La asesora comenta: "intentad hacedlo y si tenéis algún problema nos llamáis y os ayudaremos". Luego A05 dice: "esto es difícil". La asesora dice: "no es tan difícil como parece al principio, es necesario pensar un poco”. Luego A06 pregunta qué hacer con la caja. La investigadora le responde: “en esta caja tienes que poner lo que hace falta para completar esta igualdad”, refiriéndose a la primera igualdad.

La asesora y la profesora del grupo distribuyen el cuaderno de trabajo a los estudiantes. Los estudiantes inician su labor y se mantienen trabajando. Algunos hacen cálculos, otros enuncian las reglas de los binomios, otros cuestionando pequeñas dudas, algunas de las cuales refieren a la denominación de los términos con los que estás trabajando:

A17: *Profesora, ¿cómo se llamaba esto?*

S: *A que te refieres con ¿cómo se llamaba esto?*

A17: *Al cuadrado.*

S: *Ah, ya, el cuadrado de una suma.*

### 5.4.3 Toma de decisiones

Una vez analizado lo acaecido en la sesión, se acordó que para la última puesta en común en la que se trataría el cuaderno de trabajo nº 4, habría que hacer énfasis y recordarles a los estudiantes todas las identidades notables. Este recordatorio les sería útil para trabajar el cuaderno de trabajo nº 5 y serviría de síntesis de las estructuras trabajadas a lo largo de las sesiones previas. No se les repetiría la regla, sino que el objetivo es que se trataran por medio de las estructuras de las sentencias trabajadas en el cuaderno de trabajo nº 4.

Se reflexiona sobre las últimas tareas a proponer a los estudiantes, en las cuales han de reconocer estructuras y se anticipa las posibles formas en que los estudiantes pueden “ver” la estructura de las expresiones: detectando conexiones entre numerador y denominador o percibiendo por separado partes de la estructura y tratando las estructuras del numerador y denominador como independientes.

## *5.5 Quinta sesión*

En este apartado recogemos la descripción de la preparación e implementación de la última sesión. Al tratarse de la última sesión no se produce ninguna toma de decisiones para llevar a la práctica en la sesión posterior.

### 5.5.1 Preparación de la sesión 5

| Objetivos de investigación |
|---|
| **Oi1**. Analizar la percepción que muestran los estudiantes de la estructura de igualdades algebraicas lineales y fraccionarias.<br>**Oi2**. Indagar el reconocimiento que hacen los estudiantes de la estructura de identidades notables, en igualdades algebraicas enteras y fraccionarias que presentan elementos algebraicos compuestos, viéndolos como "un todo".<br>**Oi3**. Identificar los errores que cometen los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas.<br>**Oi4**. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas propuestas y de la gestión del aula en el diseño instruccional implementado. |
| **Tipos de Tareas** |
| En el cuaderno de trabajo nº 5 se incluyen dos tareas. La primera requiere generar expresiones con la misma estructura que otras dadas y la segunda tarea se refiere a completar fracciones algebraicas. Las acciones son:<br>**Generar** igualdades algebraicas fraccionarias<br>**Completar** igualdades algebraicas fraccionarias. |
| **Expectativas de aprendizaje** |
| **Ea1.** Generar expresiones algebraicas nuevas con igual estructura que otras, no familiares, dadas,<br>**Ea2**. Completar los huecos de sentencias algebraicas no familiares para obtener igualdades. |

<u>Tareas para la Sesión 5</u>

**Tarea 1.** En la tarea aparecen las cuatro identidades notables atendiendo a los diversos niveles de complejidad: simple y compuesta. Las compuestas con producto o potencia. Las expresiones dadas son todas ellas igualdades algebraicas fraccionarias. Se facilita a los estudiantes la siguiente indicación:

*Al simplificar varias fracciones algebraicas se han obtenido las siguientes igualdades. Analiza estas igualdades y construye otras igualdades que tengan la misma estructura pero con diferentes números y letras*.

Igualdad 1: $\dfrac{a^2-14a+49}{(a-7)^2\cdot(a-7)}=\dfrac{1}{a-7}$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: simple.

Igualdad 2: $\dfrac{x^2\cdot(11x-1)}{x^3-6x^2}=\dfrac{11x-1}{x-6}$

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con potencias $x^2$

Igualdad 3: $\dfrac{(9x^2-1)\cdot(7x+1)}{(3x+1)\cdot(3x-1)} = 7x+1$

IN: Producto de una suma por una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $3x$

Igualdad 4: $\dfrac{(5a^2-1)\cdot(5a^2+1)^2}{25a^4+1+10a^2} = 5a^2-1$

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta con producto y potencia $5a^2$.

**Tarea 2.** En esta parte se pretendía que los estudiantes colocaran una misma expresión tanto en el numerador como en el denominador. Las sentencias 1 y 4 es posible completarlas sin necesidad de aplicación de las identidades. En la sentencia 4, se da la situación de que cualquier número es válido para rellenar ambas cajas, es decir se puede colocar número, letra o expresión, que debe ser la misma en ambos espacios faltantes.

La indicación de la tarea dice:

*Completa cada caja de forma que la parte derecha de la igualdad se obtenga al hacer una simplificación de la parte izquierda.*

Sentencia 1: $\dfrac{11x\cdot\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot(x+3)} = 1$

No conlleva aplicación de IN.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 2: $\dfrac{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}^{\,2}}{3x\cdot(2x-4)} = \dfrac{2x-4}{3x}$

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con producto.

Sentencia 3: $\dfrac{(x+1)\cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_}}{\boxed{\_\_\_\_\_\_}} = x-1$

IN: Producto de una suma por una diferencia.

Tipo de expresión: simple.

Sentencia 4: $\dfrac{x^2\cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_}}{(x-1)\boxed{\_\_\_\_\_\_}} = \dfrac{x^2}{x-1}$

No conlleva aplicación de IN.

Tipo de expresión: simple.

### 5.5.2 Implementación

A la sesión 5 asistieron 19 estudiantes, fue realizada durante la segunda hora de clase del viernes 8 de abril de 2011, de 9:15 a 10:15.

<u>Puesta en común del cuaderno de trabajo nº 4</u>

Esta puesta en común tuvo una duración de 22 minutos y contó con la participación de 10 de los 19 estudiantes presentes. La investigadora coloca una lámina en la pizarra (Figura 5.15) con un resumen de las cuatro identidades notables que han estado inmersas en las tareas realizadas en las sesiones de trabajo correspondientes a la investigación. El objetivo es que las tengan presentes y puedan recurrir a ellas si las necesitan en cualquier momento y no las recuerdan.

✓ $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$
✓ $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$
✓ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
✓ $k(a+b) = ak+bk$

*Figura 5.15*. Resumen de las identidades notables utilizadas en las sesiones.

La investigadora recuerda a los estudiantes el trabajo realizado con las sentencias de la sesión anterior como la indicada con la viñeta en la lámina que se muestra en la Figura 5.16.

➢ $(3x+1)^2\cdot(7x-1) = (9x^2+1+6x)\cdot \boxed{\phantom{00}}$

$(3x+1)^2\cdot(7x-1) = (9x^2+1+6x)\cdot \boxed{1}$ 1ª

$(3x+1)^2\cdot(7x-1) = (9x^2+1+6x)\cdot \boxed{7x-1}$ 2ª

*Figura 5.16*. Formas de completar igualdades propuestas por los estudiantes.

Pregunta a A09 si las expresiones ubicadas en las cajas son correctas o incorrectas. A09 dice que la primera no es correcta, pero la segunda si lo es. La investigadora indaga en los estudiantes preguntando: "¿por qué la primera es incorrecta?". A18 dice: "porque al final de la..., de eso", refiriéndose a la expresión $9x^2+1+6x$, "tiene que poner también siete equis menos uno (7x-1)". La investigadora pregunta: "siete equis menos uno, y ¿por qué siete equis menos uno?". A10 dice: "para completar la igualdad". Luego A06 complementa la intervención de A10 y dice: "sí, que el cuadrado de tres equis más uno es igual a nueve equis cuadrado más uno más seis equis", refiriéndose a la igualdad $(3x+1)^2 = 9x^2+1+6x$.

La investigadora pregunta si están de acuerdo con el aporte de A06 y pide que algún estudiante repita lo que ha dicho A06. A10 repite diciendo: "que el tres equis más uno elevado al cuadrado es igual a eso", refiriéndose a la expresión $9x^2+1+6x$. Algunos alumnos hablan en voz alta, por lo que la investigadora pide silencio e indica a A10 que repita nuevamente. A10 desde su puesto dice: "que tres equis más uno al cuadrado es igual a eso". Luego la investigadora pregunta cuál es la igualdad correcta de las dos que están propuestas en la lámina. Los estudiantes responden que la correcta es la segunda igualdad. Se observa aquí que tanto A18 como A10 llaman 'eso' a la expresión o trinomio cuadrado $9x^2+1+6x$, ellos conocen la identidad notable pero se les dificulta nombrar la misma. Este puede ser el motivo por el cual pocos estudiantes justificaron sus respuestas en el cuaderno de trabajo.

La investigadora coloca otra lámina (Figura 5.17) en la pizarra con la sentencia 2 del cuaderno de trabajo nº 4 y dos respuestas, y pregunta a los estudiantes la veracidad de las igualdades propuestas en la misma. Además les dice que observen bien la igualdad e indiquen "qué tienen en el miembro de la izquierda que no está en el miembro de la derecha".

- $2x^3 \cdot (x^2-2x+1) = 2x^3 \cdot \boxed{\phantom{x-1}}^2$

$$2x^3 \cdot (x^2-2x+1) = 2x^3 \cdot \boxed{x-1+1}^2 \quad 1^{a}$$

$$2x^3 \cdot (x^2-2x+1) = 2x^3 \cdot \boxed{x-1}^2 \quad 2^{a}$$

*Figura 5.17.* Respuestas de los estudiantes a la sentencia indicada.

A04 responde: "pues el equis cuadrado menos dos equis más uno", es decir la expresión $\left[x^2-2x+1\right]$. La investigadora dice: "entonces ¿cómo yo sé la forma cómo debo completarlo?”. La interrogante de la investigadora no es respondida. A07 dice creer que la segunda es la correcta, luego, A18 y otros alumnos a la vez dicen que la segunda es correcta. La investigadora cuestiona a los estudiantes: “¿y como sabemos que la segunda es la correcta?”. A18 responde: “porque es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble producto del primero por el segundo”. La investigadora le sugiere a A18 relacionar lo que ha dicho con alguna de las identidades notables puestas en el resumen. Los estudiantes dicen: “con la segunda”.

La investigadora coloca otra lámina en la pizarra (Figura 5.18). La misma contiene la sentencia 6 propuesta en el cuaderno de trabajo y dos de las respuestas proporcionadas por los estudiantes a esta sentencia. Les pide que la analicen y digan cuál de las dos es la correcta.

➢ $$\frac{\boxed{\phantom{2m}} - 2m^4}{2m(2m-1)} = \frac{2m^4(2m-1)}{\boxed{\phantom{2m}} \cdot (2m-1)}$$

$$\frac{\boxed{2m+1} - 2m^4}{2m(2m-1)} = \frac{2m^4(2m-1)}{\boxed{2m} \cdot (2m-1)} \qquad 1^{\text{a}}$$

$$\frac{\boxed{4m^5} - 2m^4}{2m(2m-1)} = \frac{2m^4(2m-1)}{\boxed{2m} \cdot (2m-1)} \qquad 2^{\text{a}}$$

*Figura 5.18*. Respuestas de los estudiantes a la sentencia indicada.

A18 seguido de A09 responden que la primera es la correcta. Luego A09 parece analizar nuevamente la veracidad, A01 seguido de A09 y del grupo a la vez, dicen que la correcta es la segunda. La investigadora pregunta cómo hacer para saber que la segunda es la correcta. A08 levanta la mano y la investigadora le da la palabra. A08 responde: “deshaciendo el factor común, que si multiplica ‘dos eme’ elevado a la cuarta por ‘dos eme’ es ‘cuatro eme’ elevado a cinco”. La investigadora pregunta qué resultado da este producto y A08 responde: “cuatro eme elevado a cinco”. La investigadora aprueba la participación de A08. Todos los estudiantes habían completado correctamente el denominador.

Luego la investigadora pregunta a los estudiantes si alguien tiene alguna duda hasta el momento y les dice: “en caso de no saber cómo rellenar las cajas de esta igualdad propuesta, ¿con cuál de las cuatro identidades notables que tiene el resumen la podrían relacionar?”. A10 seguido de A06 y el grupo de estudiantes dicen: “con la última”, la cual corresponde a la propiedad distributiva-factor común. La investigadora les aprueba la respuesta.

La investigadora coloca otra lámina en la pizarra (Figura 5.19) con la sentencia 8 del cuaderno de trabajo nº 4, indicando que la igualdad es muy similar a la anterior, dado que incluye fracciones algebraicas. También indica que en la misma se tienen dos respuestas proporcionadas por ellos y de nuevo deben decir si son correctas o incorrectas. A09 seguido de A01 dicen que la segunda es la correcta. La investigadora pregunta a A12. A12 responde: “la segunda es la correcta”. Al ser preguntado por qué, dice: “Porque en el numerador que pone equis menos cinco por equis menos cinco es equis menos cinco al cuadrado que es lo que vale el numerador de la otra. Y abajo se pone equis menos cinco por equis menos tres”.

$$\frac{x^2+25-10x}{(x-5)\cdot(x-3)} = \frac{(x-5)\cdot\boxed{\phantom{x-5}}}{(x-5)\cdot\boxed{\phantom{x-3}}}$$

$$\frac{x^2+25-10x}{(x-5)\cdot(x-3)} = \frac{(x-5)\cdot\boxed{x^2+5-2x}}{(x-5)\cdot\boxed{(x-3)}} \qquad 1^{a}$$

$$\frac{x^2+25-10x}{(x-5)\cdot(x-3)} = \frac{(x-5)\cdot\boxed{(x-5)}}{(x-5)\cdot\boxed{(x-3)}} \qquad 2^{a}$$

*Figura 5.19*. Respuestas de los estudiantes a la sentencia indicada.

La investigadora aprueba la respuesta de A12 y pregunta al grupo con cuál de las identidades notable recogidas en la pizarra relacionan la sentencia señalada con la viñeta. A17 responde: “con la segunda”.

La investigadora nuevamente pregunta a los estudiantes si tienen alguna duda con las igualdades tratadas y luego pregunta: “si yo quisiera simplificar esta expresión”, refiriéndose a la expresión del miembro derecho de la segunda igualdad propuesta en la lámina, “¿qué me quedaría?, ¿alguien puede venir a la pizarra y escribir qué queda una vez que se simplifique esta expresión de aquí?”. Se produce un silencio entre los estudiantes. Luego A18 responde: “se quedaría equis menos cinco partido por equis menos tres”.

La investigadora aprueba la respuesta: “muy bien, A18”, le sugiere que pase a la pizarra y lo escriba. Comenta a los estudiantes que en una igualdad las expresiones están muy relacionadas unas con otras, que en las igualdades fraccionarias se relaciona el numerador con el denominador, y que por tanto deben tener muy en cuenta las estructuras de las fracciones algebraicas.

La asesora pregunta si hay algún estudiante capaz de explicar por qué lo que dijo y escribió A18 es correcto. A18 de inmediato responde: “porque al tener en el denominador equis menos cinco y arriba tener equis menos cinco, pues se va […] queda equis menos cinco arriba y equis menos tres abajo”.

Tarea escrita del cuaderno de trabajo nº 5

Dando por concluida la puesta en común de las tareas del cuaderno de trabajo nº 4, la investigadora procede a explicar las tareas a realizar en el cuaderno de trabajo de la última sesión. Coloca una lámina en la pizarra (Figura 5.20) y dice a los estudiantes que en la hoja de trabajo de este día se les va a presentar igualdades como las mostradas en la lámina. Por tanto, tienen que observar qué ocurre en ellas, dado que la expresión de la derecha en la igualdad es una expresión que resulta de simplificar la fracción algebraica que se tiene en la parte izquierda. En el cuaderno de trabajo deben construir otra igualdad de igual estructura a la dada, pero con distintos números y distintas letras.

- $\dfrac{a^2+14a+49}{(a-7)^2\cdot(a-7)} = \dfrac{1}{a-7}$ *1ª*
- $\dfrac{\boxed{\phantom{xxxxxx}}^{\,2}}{3x\ \cdot(2x-4)} = \dfrac{2x-4}{3x}$ *2ª*

*Figura 5.20*. Ejemplos para ilustrar el trabajo a realizar en la sesión 5.

A04 pide a la investigadora que repita la explicación, dado que no ha comprendido qué tiene que hacer. La investigadora repite nuevamente y añade que también deben observar la estructura ya que si observan la lámina con el resumen de las identidades notables se tienen cuatro identidades notables con estructuras distintas. A04 continúa haciendo interrogantes: “¿no hay que ponerlo igual”, la investigadora le responde: “no, igual no, le vas a cambiar números y letras”; A04 pregunta: “pero, ¿con los mismos signos?”, la investigadora le responde: “si con los mismos signos, eso es, lo demás, vas a mantener la misma estructura”. A04 pregunta: “pero, ¿pongo lo que yo quiera?”, la investigadora le responde: “es posible que puedas poner lo que tú quieras, pero de tal manera, que esa expresión que tú vas a construir, en un momento dado la puedas simplificar y puedas llegar a una expresión como ésta”, la investigadora señala la fracción derecha de la primera igualdad, “es decir hay que pensarla un poquito”. Luego la asesora añade: “y la igualdad que escribas tiene que ser verdad, copiando esa estructura, tu escribes otra igualdad cambiando los números y las letras, pero lo que escribas debe ser verdad también porque esa igualdad es verdadera”.

A04 parece haber comprendido y dice ahora: "o sea que tengo que poner con distintos números y distintas letras una igualdad que tiene que cumplir que lo de la derecha tenga el mismo significado". La investigadora le aprueba lo que ha expresado: "muy bien, muy bien eso es A04, es decir tú la vas a inventar, tú la vas a crear, sí".

La investigadora pasa ahora a dar las instrucciones para la resolución de la segunda tarea del cuaderno de trabajo. Les dice a los estudiantes que observen qué ocurre en la segunda sentencia de la lámina. Indica que deben completar las cajas para que la expresión que tienen a la derecha del signo igual sea el resultado de haber simplificado la expresión de la izquierda. A04 y A07 indican que no han comprendido y la investigadora repite nuevamente la instrucción. A07 y A04 expresan que ahora si han comprendido.

La asesora y la profesora del grupo ayudan a la investigadora a distribuir los cuadernos de trabajo a los estudiantes. La investigadora se dirige al grupo para indicarles que pueden iniciar el trabajo en sus cuadernos, que si tienen alguna duda pueden preguntar, además se les pide que traten de trabajar de forma individual como en las sesiones previas. Luego la asesora les señala que esta es la última actividad que se les pide que realicen y que se les agradecerá el esfuerzo realizado.

Finalizado el tiempo de clase, habiendo dedicado 30 minutos al trabajo individual, se recogen los cuadernos de trabajo y se les agradece a los estudiantes su participación en esta investigación.

# Capítulo 6. Análisis retrospectivo de las sesiones y resultados

En este capítulo se describe el análisis retrospectivo de los datos recogidos en las sesiones de aula de la experimentación realizada y los resultados que se extraen del mismo. Para cada una de las sesiones se sigue la siguiente estructura:

1) se describen las categorías utilizadas en el análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas en el cuaderno de trabajo,

2) se recogen algunas observaciones generales referentes al desarrollo de la sesión,

3) se recuerdan las indicaciones dadas a los estudiantes en relación a las tareas cuyas respuestas son aquí objeto de análisis,

4) se presenta el análisis de los datos correspondiente a cada sentencia o expresión incluida en las tareas, y los resultados que se desprenden del mismo, y finalmente,

5) se sintetizan los resultados de la sesión.

En la discusión del análisis y resultados incluimos ejemplos ilustrativos que corresponden a aquellas actuaciones que consideramos presentan más detalles sobre la resolución de dicha parte de la tarea.

En el análisis de las producciones de los estudiantes, las explicaciones dadas relativas a la justificación de sus respuestas, son utilizadas para complementar la información que se obtiene del trabajo escrito realizado por el estudiante para dar la respuesta. Para este análisis hemos elaborado una serie de categorías que persiguen capturar el grado en que el estudiante hace uso de sentido estructural. En la denominación de las categorías utilizamos códigos de una escala numérica (ver Tabla 6.1.1) que aluden al grado en que el estudiante hace uso de la estructura para atender a la resolución de las tareas propuestas. Esta numeración se aplica a todas las categorías excepto a la categoría RET que refiere a si el estudiante resuelve o no correctamente la sentencia o expresión, independientemente de la forma como lo hace. Esta categoría no está en relación directa con el sentido estructural, sino que complementa la información que aportan las otras categorías. Permite atender a los errores que cometen los estudiantes al trabajar y realizar las diferentes acciones que las tareas propuestas demandan.

*Tabla 6.1.1*. Código numérico en la denominación de categorías para el análisis.

| Código numérico | Descripción general |
|---|---|
| 1 | Corresponde a casos en los que el estudiante utiliza las relaciones internas de la expresión para resolver la tarea propuesta haciendo uso de la estructura de la misma. |
| 2 | Corresponde a casos en los que el estudiante utiliza algunas de las relaciones internas de la expresión dada para resolver la tarea propuesta. |
| 3 | Corresponde a casos en que el estudiante no utiliza ninguna de las relaciones internas de la expresión dada en la resolución de la tarea. |

Para el caso en que el estudiante no hace lo que se le solicita, y lo deja en blanco, utilizamos la codificación "no responde" (NR). Si responde pero su respuesta no puede clasificarse mediante ninguna de las categorías establecidas o nos falta información para clasificar la respuesta, le hemos designado la etiqueta "no codificable" (NC).

## 6.1 Sesión 1

En la sesión 1 se proponen dos tareas a los estudiantes. En este capítulo atendemos a las doce sentencias propuestas en la primera tarea. La segunda tarea no se aborda en este análisis debido a que sólo dos de los trece estudiantes asistentes a la sesión intentaron resolverla.

### 6.1.1 Categorías utilizadas para el análisis de la 1ª tarea. Sesión 1

Para analizar los datos correspondientes a la resolución de las sentencias trabajadas en la primera tarea de la sesión 1, utilizamos tres categorías: RIN, MED y RET. Estas tres categorías, junto con sus correspondientes subcategorías, se definen en la Tabla 6.1.2. Las dos primeras están ligadas al estudio del sentido estructural de los estudiantes. Respecto a la subcategoría MED.2, si bien se ha considerado al realizar el análisis, ninguna producción de los estudiantes ha sido codificada de este modo por lo que hemos optado por no consignarla en las tablas que utilizamos más adelante para presentar los resultados. La tercera categoría se centra en aquellos aspectos relacionados con errores y dificultades mostradas por los estudiantes, que nos permite realizar un seguimiento del trabajo realizado.

*Tabla 6.1.2.* Categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la Sesión 1.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| RIN<br>Reconocer la estructura interna de una identidad notable en la expresión. | RIN.1<br>No se opera, se da la respuesta correcta basándose en el reconocimiento de la estructura interna de una identidad notable en la expresión.<br>RIN.2<br>Se reconoce la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, y se aplica la identidad notable para operar en uno de los miembros.<br>RIN.3<br>Se opera (o realiza operaciones) sin tomar en consideración la estructura interna de las expresiones, ni las relaciones internas. |
| MED<br>Modificar una expresión en función de una identidad notable. | MED.1<br>Se modifica la expresión aplicando una identidad notable.<br>MED.2<br>Se modifica parte de la expresión aplicando una identidad notable.<br>MED.3<br>Se modifica sin reconocer relaciones internas entre los miembros. |
| RET<br>Realizar correctamente la sentencia dada | RET.1<br>Se realiza correctamente la sentencia.<br>RET.2<br>Se realiza parte de la sentencia correctamente y parte se realiza incorrectamente.<br>RET.3<br>Se realiza incorrectamente la sentencia. |
| N<br>No realizar o no poder codificar la respuesta | NR<br>No se realiza la sentencia.<br>NC<br>No codificable. |

### 6.1.2 Observaciones sobre la sesión 1

En esta sesión se da la asistencia de trece estudiantes, si bien no todos responden todas las sentencias propuestas en la tarea 1. A continuación se detalla para cada sentencia el número de estudiantes que la realizan.

### 6.1.3 Indicación para la 1ª tarea de la sesión 1

En la primera tarea de esta sesión se pide al estudiante: *"Comprueba realizando las operaciones, si las igualdades siguientes son correctas o incorrectas. En el caso de las incorrectas modifica la igualdad para que sea correcta".*

### 6.1.4 Actuaciones de los estudiantes en la 1ª tarea de la sesión 1

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al clasificar las producciones de los estudiantes utilizando las categorías anteriormente descritas. Se muestran ejemplos de las distintas actuaciones y finalmente se recoge una pequeña conclusión de los hechos más relevantes ocurridos en relación con dicha sentencia. Solo en los casos en que los estudiantes realizan modificaciones de sentencias (independientemente de si la sentencia dada es o no verdadera) se presentan resultados relativos a la categoría MED.

**Sentencia 1**

$$(3\cdot5)^2-10^2=(3\cdot5+10)(3\cdot5-10)$$

Esta igualdad se conforma en el miembro izquierdo de una diferencia de dos números elevados al cuadrado. En el miembro derecho aparece el producto de la suma de dichos números por la diferencia de los mismos.

IN: Producto de una suma por una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $3\cdot5$

Valor de verdad: verdadera.

*Resultados*

La sentencia 1 es resuelta por 13 estudiantes. La Tabla 6.1.3 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías bajo las que caen las respuestas de los estudiantes. A continuación se describen y comentan estos resultados atendiendo separadamente a cada categoría.

*Tabla 6.1.3*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 1

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 0 | 2 | 11 | 0 | 0 | 11 | 2 | 0 | 0 | 0 |

*Categoría RIN*

Ningún estudiante da una respuesta sin operar a partir del reconocimiento de la estructura interna de la expresión. Dos de los trece estudiantes (A03 y A07) aplican la identidad notable para operar en uno de los miembros (RIN.2), mostramos ejemplos de ello en la Figura 6.1.1. Por la utilización errónea que hacen de la identidad notable, tendemos a pensar que poseen un conocimiento procedimental asociado a una regla memorística de actuación que confunden.

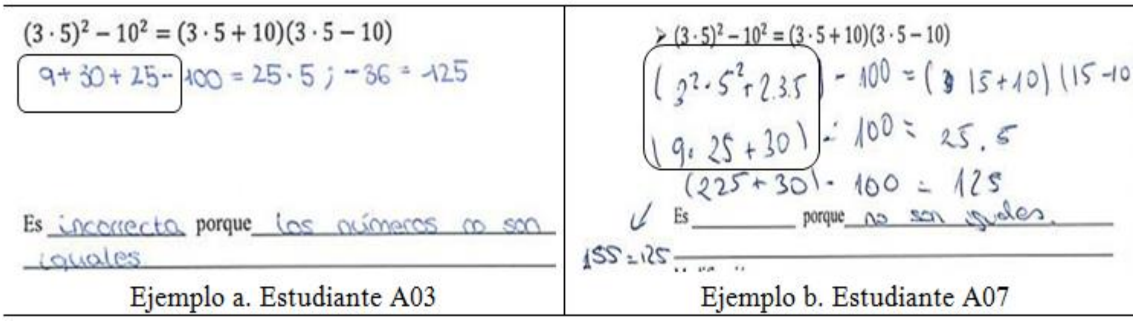



*Figura 6.1.1*. Desarrolla el cuadrado de un producto como el cuadrado de una suma.

El resto de los estudiantes (A01, A02, A04, A05, A06, A08, A12, A13, A14, A15 y A19) realizan operaciones sin tomar en consideración las relaciones internas de las expresiones que componen la sentencia ni la estructura interna de las mismas (RIN.3). La Figura 6.1.2 muestra a modo de ejemplo la respuesta de uno de dichos estudiantes.

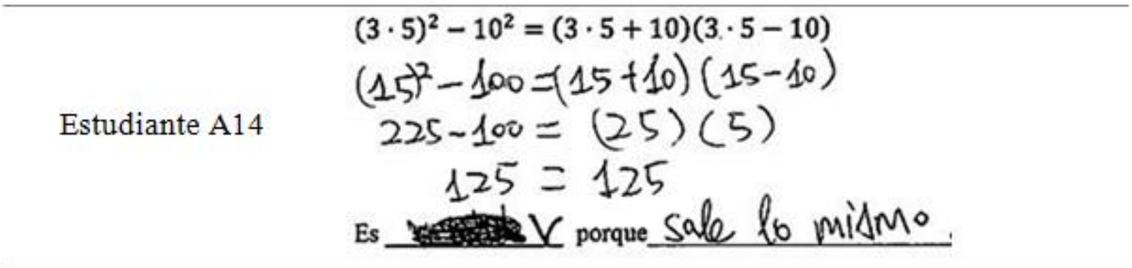



*Figura 6.1.2*. Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Las justificaciones dadas a sus respuestas son del tipo siguiente; “los números no son iguales”, “sale el mismo resultado” (ver ejemplos de Figura 6.1.1 y 6.1.2). Los trece estudiantes basan sus justificaciones en el resultado de los cálculos realizados y no en el reconocimiento de estructura de ninguna identidad notable.

*Categoría RET*

De los trece estudiantes que resuelven, once lo hacen operando correctamente la sentencia propuesta. Es de observar que todos estos estudiantes operan el miembro derecho $(3\cdot5+10)(3\cdot5-10)$ de forma similar conservando la jerarquía de operaciones: $25\cdot5=125$ (ver Figura 6.1.2). En el miembro izquierdo los estudiantes operan el primer factor de distintas formas. Algunos escriben $(3\cdot5)^2=(15)^2$ respetando la jerarquía de operaciones (ver Figura 6.1.2). Otros estudiantes distribuyen la potencia de un producto, aplicando dicha relación entre estas operaciones, y escriben $(3\cdot5)^2=3^2\cdot5^2$ (ver Figura 6.1.3).

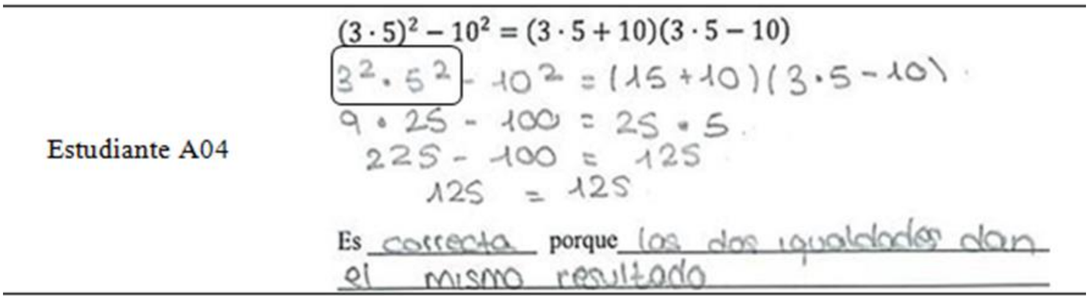



*Figura 6.1.3.* Distribuye la potencia de un producto.

Dos estudiantes (A03 y A07) resuelven de forma incorrecta parte de la sentencia (Figura 6.1.1). Uno de ellos expande la expresión $(3\cdot5)^2$ como 9 + 30 + 25 (ejemplo a) y el otro como $3^2\cdot5^2+2\cdot3\cdot5$ (ejemplo b). Entendemos que ambos estudiantes tienen confusión con el desarrollo del cuadrado de una suma y el cuadrado de un producto.

> *Conclusión*
>
> Se observa que la subcategoría basada en el reconocimiento y aplicación de identidades notables, con identificación de su estructura interna, RIN.1 está ausente en la resolución de esta sentencia y la presencia de RIN.2 es baja (ver Tabla 6.1.3). Los trece estudiantes desarrollan y justifican basándose en datos obtenidos de las operaciones realizadas. En estos casos preservan jerarquía de operaciones o utilizan relaciones adecuadas entre operaciones.

Además de la complejidad de la estructura de la expresión motivada por la presencia de términos compuestos, consideramos que una de las principales causas de que la mayoría de los estudiantes opere es la formulación de la tarea en la que se les indica "comprueba realizando operaciones". Esta forma de proponer la realización de la tarea es un punto débil de la misma; para posteriores estudios habría que modificar y comparar si la tendencia de los estudiantes es la misma o cambia con la modificación de la formulación de la tarea a "Comprueba si las sentencias son verdaderas". El factor sorpresa que supone ser la primera tarea y seguir exactamente la orden dada, en la hoja de trabajo, puede llevar a que ningún estudiante haga otra cosa diferente a "operar" de primer intento y a que muy pocos utilicen relaciones en el proceso de resolver esta sentencia.

## Sentencia 2

$13^2 + 10 \cdot 17 + 17^2 = (13+17)^2$

En esta igualdad el primer miembro está formado por la suma de tres sumandos; el primero y el tercero son números elevados al cuadrado, el segundo sumando es el producto del primer y tercer sumando, sin cuadrado. El segundo miembro de la igualdad se compone del cuadrado de la suma de los dos sumandos primero y tercero, del primer miembro, sin cuadrado.

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el segundo término del miembro izquierdo se ha suprimido el dos del doble producto y en lugar de 10 aparece 13.

*Resultados*

La sentencia 2 es resuelta por 13 estudiantes. La Tabla 6.1.4 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que se codifican las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.1.4.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 2

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 7 | 4 | 5(3) | 3 | 4 | 6 | 2 | 0 | 1 |

Nota 2. De los cinco estudiantes que modifican aplicando una identidad notable (MED.1), tres modifican aplicando distributividad del cuadrado respecto de una suma.

*Categoría RIN*

El estudiante A13 no opera, da la respuesta correcta basándose en que ha reconocido la estructura interna de una identidad notable en la expresión (RIN.1, ver Figura 6.1.4). Este estudiante ha percibido una estructura que con alguna modificación puede ser la de una identidad notable, escribe el desarrollo de $(13+17)^2$ y esto le permite responder al valor de verdad de la sentencia.

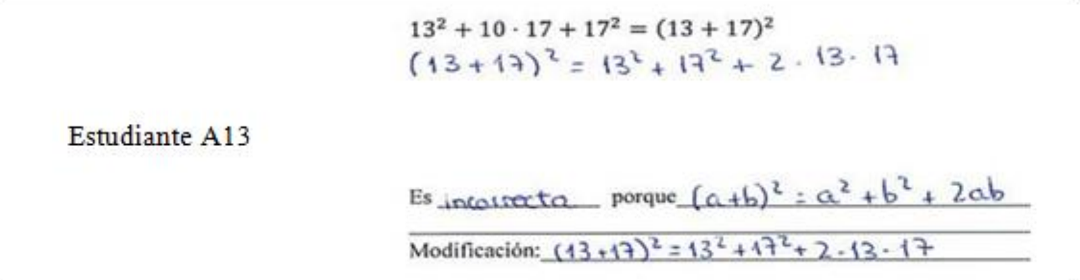



*Figura 6.1.4.* Reconoce la estructura interna de una identidad en la expresión.

Siete estudiantes (A01, A03, A04, A06, A07, A12 y A15) muestran reconocer la estructura interna de la identidad notable en parte de la expresión, y la utilizan para operar en uno de los miembros (RIN.2, ver recuadro en miembro derecho de Figura 6.1.5).

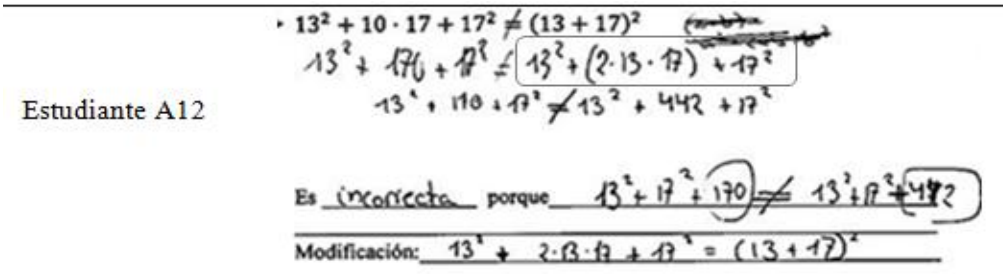



*Figura 6.1.5.* Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

De estos siete estudiantes, tres de ellos (A03, A07 y A12) transforman el binomio $(13+17)^2$ en $13^2+17^2+2\cdot 13\cdot 17$. De ellos, A12 inicia trabajando operacionalmente partes específicas de la igualdad dada y deja algunos términos sin desarrollar, por ejemplo, el cuadrado de 13 y 17 en ambos miembros. Finalmente expresa su resultado indicando que son distintos sin necesidad de obtener un valor numérico para cada miembro, escribe $13^2+170+17^2 \neq 13^2+442+17^2$. Este estudiante muestra capacidad para comparar expresiones numéricas sin necesidad de desarrollar todos los términos. Los otros dos estudiantes (A03 y A07) desarrollan todos los términos de la expresión y operan hasta obtener el valor numérico de ambos miembros (ver recuadro en miembro derecho de la Figura 6.1.6).

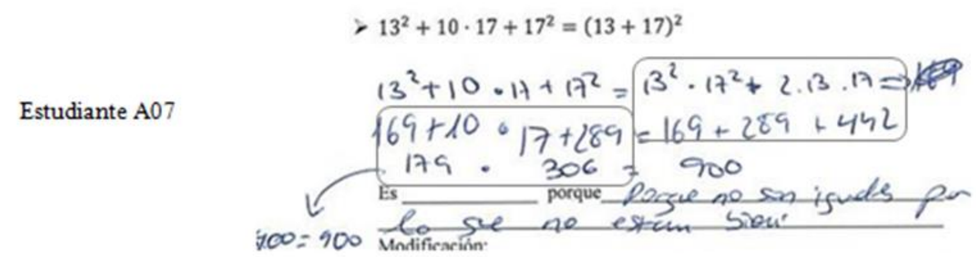



*Figura 6.1.6.* Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

De los siete estudiantes en mención, cuatro (A01, A04, A06 y A15) aunque muestran reconocer la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, aplican de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de una suma (ver recuadro en Figura 6.1.7), lo que nos hace pensar que se trata de un conocimiento procedimental, regla que no recuerda correctamente.

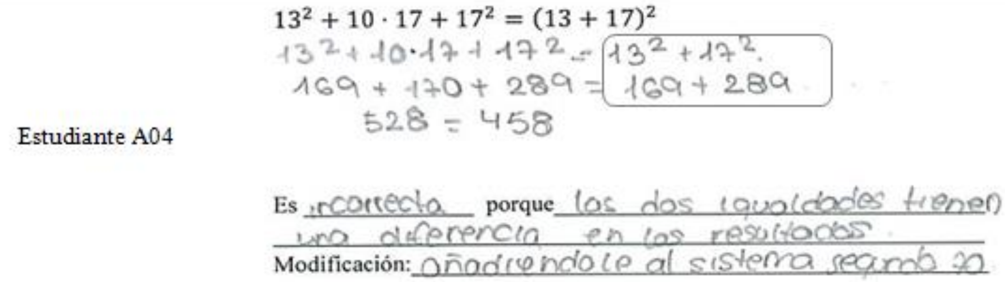



*Figura 6.1.7.* Reconoce parte de la estructura interna de una identidad en la expresión.

Cuatro estudiantes (A02, A08, A14 y A19) operan sin tomar en consideración las relaciones internas ni la estructura de las expresiones (RIN.3). En el caso que se recoge en la Figura 6.1.8, el estudiante opera dentro del paréntesis para obtener el valor numérico del miembro derecho, aplica jerarquía de operaciones.

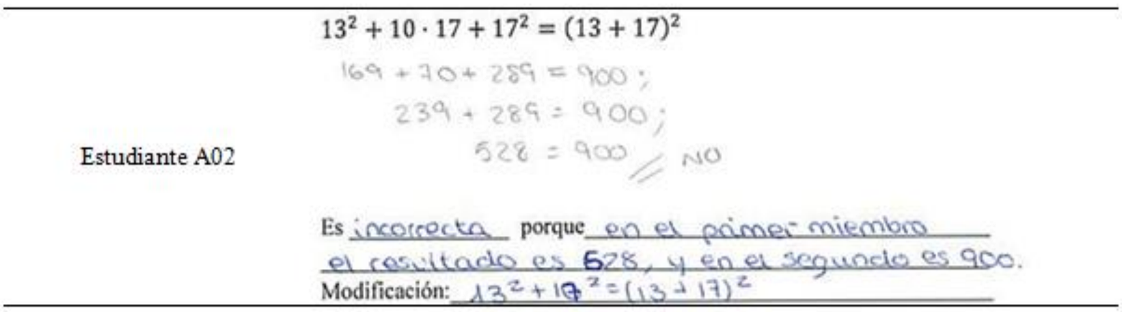



*Figura 6.1.8.* Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Entre las justificaciones proporcionadas acerca del porqué de la respuesta dada, observamos que de trece, sólo un estudiante (A13) se basa en el conocimiento de las reglas de identidad notable (ver Figura 6.1.4). Lo expresa escribiendo en simbolismo algebraico dicha identidad: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Once estudiantes basan sus justificaciones en el desarrollo operacional de la sentencia. Emiten justificaciones como “las dos igualdades tienen una diferencia en los resultados” (ver Figura 6.1.6, 6.1.7 y 6.1.8). Un estudiante no da justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría MED*

Cinco estudiantes (A02, A06, A12, A13 y A14) modifican la expresión aplicando una identidad notable (MED.1). Dos de ellos (A12 y A13) modifican correctamente la sentencia propuesta escribiendo: $(13+17)^2 = 13^2 + 17^2 + 2\cdot 13\cdot 17$ (ver Figuras 6.1.4 y 6.1.5). Los tres estudiantes restantes (A02, A06 y A14) aplican distributividad del cuadrado respecto de la suma: escriben $(13+17)^2 = 13^2 + 17^2$ (ver Figura 6.1.8).

Tres estudiantes (A04, A08 y A15) modifican la sentencia dada sin reconocer relaciones internas entre los miembros de la sentencia y no utilizan ninguna identidad notable. El estudiante A04 propone como modificación: “añadiendo al sistema segundo 70” (MED.3, ver Figura 6.1.7). Para comprobar la veracidad de la sentencia A04 utiliza un conocimiento que tiene sobre identidad notable, no obstante no lo emplea para modificar.

*Categoría RET*

De los trece estudiantes, cuatro (A12, A13, A14 y A19) resuelven correctamente, independientemente de la forma como lo hagan, (ver Figuras 6.1.4 y 6.1.5). Seis estudiantes (A02, A03, A06, A07, A08 y A15) resuelven sólo parte correctamente (ver

Figuras 6.1.6 y Figura 6.1.8). Dos estudiantes (A01 y A04) no resuelven correctamente (ver Figuras 6.1.7) y los datos de un estudiante (A05) se consideran no codificables.

Entre los errores que se observan, mencionamos los siguientes. En el recuadro del miembro izquierdo de la Figura 6.1.6, el estudiante A07 después de desarrollar las potencias cuadradas de 13 y 17, distribuye el producto del segundo término entre el primer y tercer término, sumando 10 a 169 y 17 a 289. El estudiante A02 (Figura 6.1.8) comete un error de cálculo al multiplicar como sigue $10 \cdot 17 = 70$.

Cuatro estudiantes (A01, A04, A06 y A15) transforman el miembro derecho como sigue $\left(13+17\right)^2 = 13^2 + 17^2$: aplican la supuesta propiedad distributiva del cuadrado respecto de la suma, lo que les conduce a verificar erróneamente la veracidad de la sentencia propuesta (ver Figura 6.1.7).

*Conclusión*

Para esta sentencia un estudiante (A13) trabaja basándose en la estructura interna de la igualdad, a pesar de que la propuesta de operar sigue estando. Once trabajan basando sus datos en resultados de operaciones y de ellos siete muestran reconocer la estructura de parte de la expresión dada. Parece que olvidan la indicación de operar dada en la tarea.

Aunque al operar muestran que conservan jerarquía de operaciones, algunos de los errores en esta sentencia 2, sobre todo en el miembro izquierdo de la igualdad, los cometieron aquellos estudiantes que no consideran la jerarquía de operaciones. Otros errores son de tipo aritmético en cálculos multiplicativos, de potencias y de suma. En el miembro derecho los errores son resultado de aplicar de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de una suma.

## Sentencia 3

$30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot \left(20 - 14\right)$

El miembro izquierdo de la igualdad se compone de la diferencia entre dos productos, ambos productos de dos factores, uno de esos factores es común en los dos productos. El miembro derecho es el producto de dos factores, uno de ellos es el primer factor del primer producto del miembro izquierdo; el otro factor es la diferencia de dos números, ambos corresponden a los segundos factores de los productos que se restan en el miembro izquierdo.

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el segundo término del miembro izquierdo se ha colocado 20 en lugar de 30.

*Resultados*

La sentencia 3 es resuelta por 12 estudiantes. La Tabla 6.1.5 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías bajo las que caen las respuestas de los estudiantes.

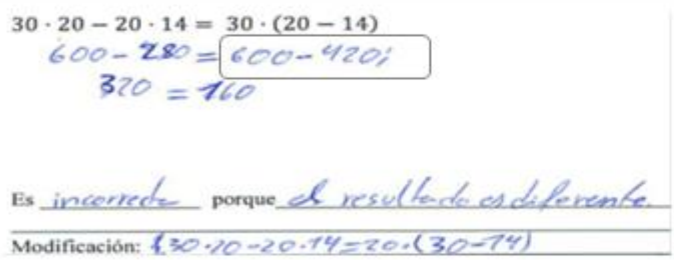
*Tabla 6.1.5.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 3

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 0 | 8 | 3 | 5 | 2 | 8 | 2 | 1 | 1 | 1 |

*Categoría RIN*

Ocho estudiantes (A01, A03, A04, A06, A07, A08, A12 y A14) muestran reconocer la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, al aplicarla para operar en uno de los miembros (RIN.2, ver Figura 6.1.9). Los ocho estudiantes transforman la sentencia aplicando la propiedad distributiva tal como se señala mediante un recuadro en dicha figura. En la expresión $30\cdot(20-14)$, distribuyen el factor (30) que precede el paréntesis por cada uno de los términos que contiene el mismo: escriben $30\cdot 20-30\cdot 14$ o $600-420$.

Estudiante A08


$30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14)$

$600 - 280 = \boxed{600 - 420;}$

$320 = 160$

Es incorrecta porque el resultado es diferente.

Modificación: $30\cdot 20-20\cdot 14=20\cdot(30-14)$

*Figura 6.1.9.* Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

Tres estudiantes (A02, A15 y A19) realizan operaciones sin tomar en consideración la estructura ni las relaciones internas de las expresiones (RIN.3, ver Figura 6.1.10). Observamos que los estudiantes hacen uso de la jerarquía de operaciones para comprobar la veracidad de la sentencia: escriben $30\cdot(20-14)=30\cdot 6$.

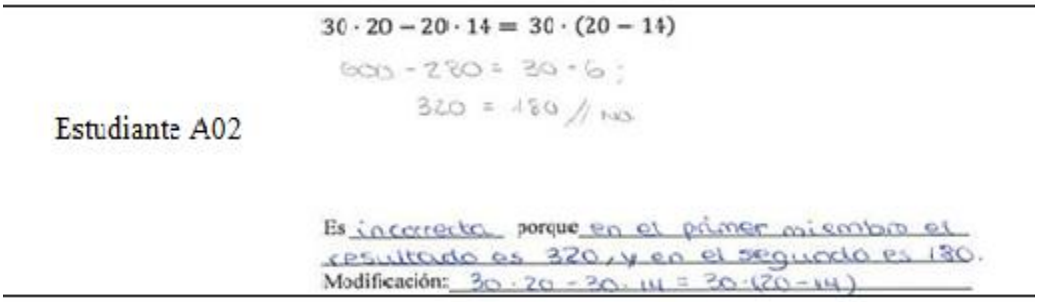


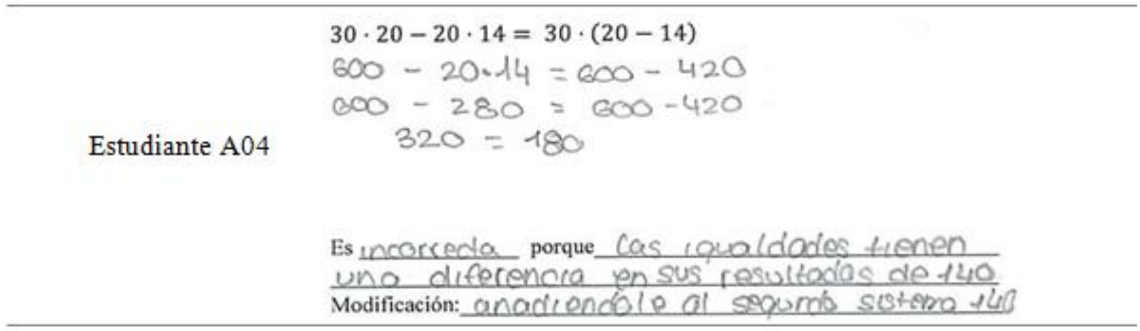

*Figura 6.1.10.* Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Los once estudiantes que resuelven la sentencia basan sus justificaciones en el desarrollo operacional de la sentencia, dando explicaciones tales como “en el primer miembro el resultado es 320, y en el segundo es 180” (ver Figuras 6.1.9 y 6.1.10) si bien apreciamos que han usado, y por tanto percibido, algunas relaciones al hacer las modificaciones.

*Categoría MED*

Cinco estudiantes (A02, A08, A12, A14 y A19) modifican la expresión aplicando una identidad notable al reconocer la necesidad de modificar algunas relaciones entre los términos para conseguir igual estructura interna en ambos miembros de la sentencia (MED.1, ver Figura 6.1.9 y Figura 6.1.10). Un estudiante (A08) propone una modificación diferente, que si bien es correcta, invierte el orden entre 30 y 20: $30\cdot 20-20\cdot 14=20\cdot(30-14)$ (ver Figura 6.1.9).

Dos estudiantes (A04 y A15) modifican sin reconocer relaciones entre los términos, lo hacen atendiendo a las operaciones realizadas. Entre las justificaciones escriben: “añadiendo al segundo sistema 140” (MED.3, ver Figura 6.1.11).



Estudiante A04

$30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14)$

$600 - 20 \cdot 14 = 600 - 420$

$600 - 280 = 600 - 420$

$320 = 180$

Es incorrecta porque las igualdades tienen una diferencia en sus resultados de 140

Modificación: anadiendole al segundo sistema 140

*Figura 6.1.11*. Modifica sin reconocer relaciones internas entre los miembros.

*Categoría RET*

De los doce estudiantes que resuelven, ocho (A01, A02, A03, A04, A12, A14, A15 y A19) lo hacen correctamente: el resultado obtenido les permite discernir correctamente la veracidad de la sentencia dada (ver Figura 6.1.10). Dos estudiantes (A06 y A08) resuelven parte de forma incorrecta y un estudiante (A07) resuelve incorrectamente. Estos tres últimos estudiantes (A06, A07 y A08) cometen errores en las operaciones de suma y resta. En la Figura 6.1.9 se observa que A08 al restar 600 – 420 escribe que es igual a 160. Un estudiante (A13) no resuelve y los datos de A05 se consideran no codificables.

*Conclusión*

En la sentencia 3, la subcategoría RIN.1 vinculada al reconocimiento y aplicación de identidades notables está ausente. Esto en la tercera sentencia puede deberse a que en la misma aparece en el primer miembro una expresión extendida la cual invita más a la operación que la expresión contraída. Decimos esto porque la modificación de la expresión es realizada correctamente por cinco estudiantes y ocho muestran reconocer la estructura interna en parte de la expresión (ver Tabla 6.1.5).

En esta sentencia, basada en la propiedad distributiva, sólo un estudiante no resuelve, los datos de un estudiante son no codificables y tres estudiantes cometen errores al sumar o restar.

## Sentencia 4

$$(8\cdot5-15)^2=(8\cdot5)^2-2\cdot8\cdot5\cdot15+15^2$$

El miembro izquierdo de esta igualdad es el producto de dos números menos otro número, todo elevado al cuadrado. En el miembro derecho de la igualdad aparecen tres términos: el minuendo y substraendo del miembro izquierdo elevados al cuadrado, sumando, y un producto del número dos por el minuendo y substraendo del primer miembro restando y situado entre los anteriores.

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $8\cdot5$

Valor de verdad: verdadera.

*Resultados*

La sentencia 4 es resuelta por 11 estudiantes La Tabla 6.1.6 muestra las frecuencias absolutas obtenidas de cada una de las subcategorías bajo las que caen las respuestas.

*Tabla 6.1.6*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 4

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 0 | 5 | 6 | 0 | 3 | 5 | 3 | 3 | 2 | 0 |

*Categoría RIN*

En la resolución de la sentencia 4, no aparecen respuestas que se puedan categorizar como RIN.1. Cinco estudiantes (A01, A03, A04, A07 y A12) muestran reconocer la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión ya que aplican la identidad notable para operar en uno de los miembros (RIN.2, ver recuadro en Figura 6.1.12).

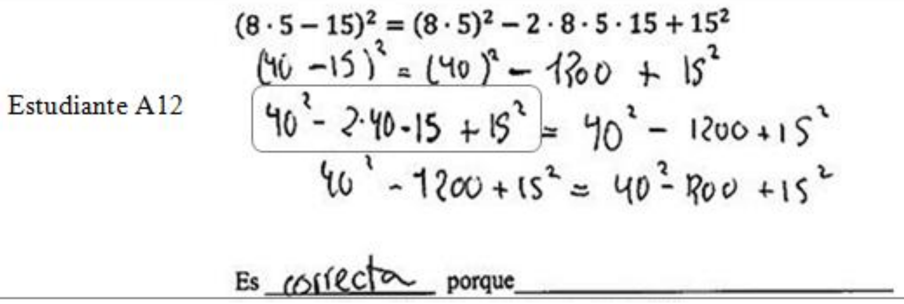
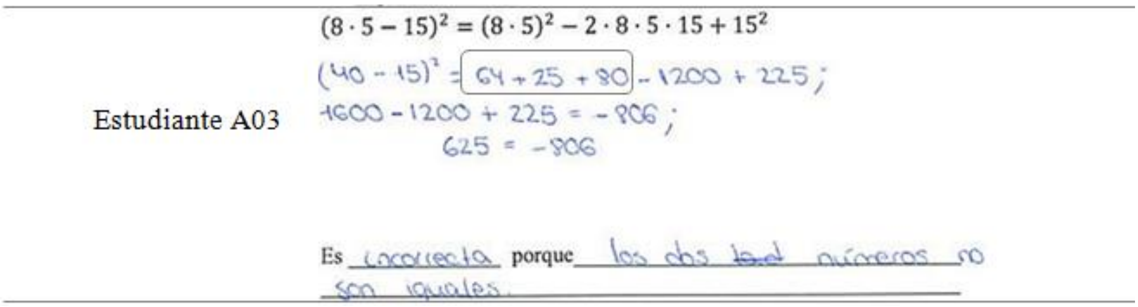



*Figura 6.1.12.* Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

En esta sentencia, el miembro izquierdo permite su extensión mediante la identidad notable cuadrado de una diferencia, tal como lo hace el estudiante A12 (Figura 6.1.12). Este estudiante primero escribe $(8\cdot 5-15)^2$ = $(40-15)^2$ (considera jerarquía de operaciones) y luego desarrolla aplicando cuadrado de la diferencia.

Dos de los cinco estudiantes en mención, (A03 y A07) aplican identidad notable en el miembro derecho, al transformar la expresión, haciéndolo erróneamente al confundir la expresión $(8\cdot 5)^2$ con $(8+5)^2$ (ver Figura 6.1.13).


Estudiante A03

$(8\cdot 5-15)^2=(8\cdot 5)^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot 15+15^2$

$(40-15)^2=\boxed{64+25+80}-1200+225;$

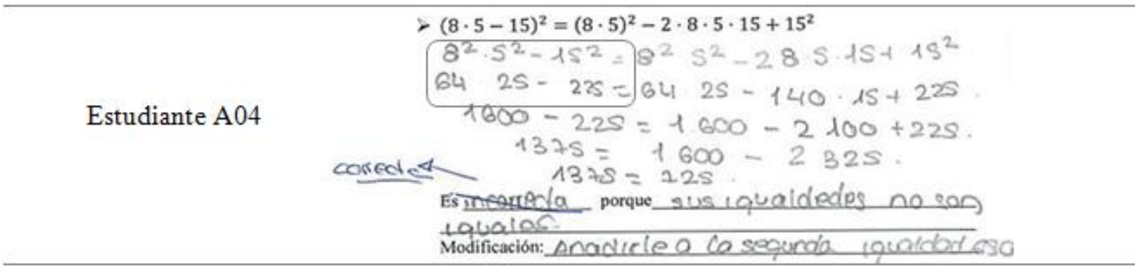
$1600-1200+225=-806;$

$625=-806$

Es incorrecta porque los dos ~~lad~~ números no son iguales.

*Figura 6.1.13.* Desarrolla el cuadrado de un producto como el cuadrado de una suma.

Tres de los cinco estudiantes (A01, A04 y A07), incluyendo nuevamente a A07, aplican propiedad distributiva del cuadrado respecto de la suma (ver recuadro en Figura 6.1.14).


Estudiante A04

➢ $(8\cdot 5-15)^2=(8\cdot 5)^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot 15+15^2$

$\boxed{8^2\cdot 5^2-15^2=}\;8^2\;5^2-2\;8\;5\cdot 15+15^2$

$\boxed{64\;\;25-\;\;225=}\;64\;\;25-140\cdot 15+225$

$1600-225=1600-2100+225.$

$1375=1600-2325.$

$1375=225.$

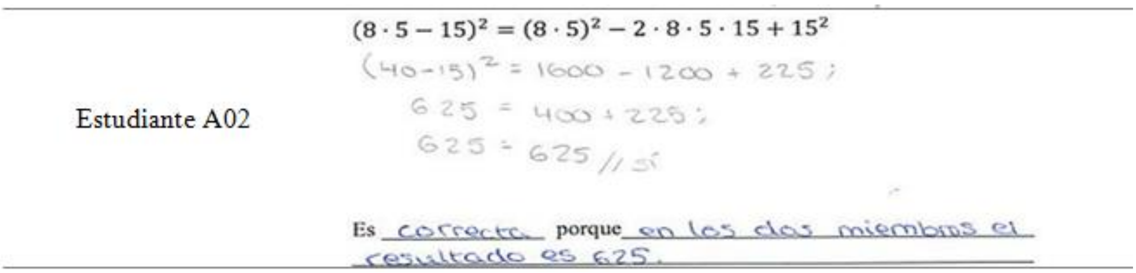
correcta

Es incorrecta porque sus igualdades no son iguales

Modificación: Anadirle a la segunda igualdad eso

*Figura 6.1.14.* Reconoce parte de la estructura interna de una identidad en la expresión.

Seis estudiantes (A02, A06, A08, A14, A15 y A19) realizan operaciones sin tomar en consideración las relaciones internas de las expresiones (RIN.3, ver Figura 6.1.15).


Estudiante A02

$(8\cdot 5-15)^2=(8\cdot 5)^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot 15+15^2$

$(40-15)^2=1600-1200+225;$

$625=400+225;$

$625=625$ // sí

Es correcta porque en los dos miembros el resultado es 625.

*Figura 6.1.15.* Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Entre las justificaciones proporcionadas acerca del porqué de su respuesta, nueve estudiantes se basaron en el desarrollo operacional de la sentencia (ver Figuras 6.1.13, 6.1.14 y 6.1.15). Ejemplo de esas justificaciones es el siguiente: “en los dos miembros el resultado es 625”. Dos estudiantes no justifican el porqué de su respuesta.

*Categoría MED*

Esta sentencia es verdadera y no requiere de modificación, no obstante tres estudiantes (A04, A06 y A08) optan por modificarla dado que argumentan que la sentencia no es correcta. La razón de esta conclusión errónea sobre el grado de verdad de la sentencia radica en que dos de ellos incurren en errores de cálculos y el otro aplica de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de la diferencia. Modifican sin reconocer relaciones entre los términos, lo hacen atendiendo a las operaciones realizadas y así lo justifican: “añadiendo a la segunda igualdad 650” (MED.3, ver Figura 6.1.14).

*Categoría RET*

De los once estudiantes que resuelven, cinco (A02, A12, A14, A15, A19) lo hacen correctamente. De los seis estudiantes restantes, tres (A01, A03 y A08) resuelven sólo parte correctamente (ver Figura 6.1.13) y tres estudiantes (A04, A06 y A07) no resuelven correctamente (ver Figura 6.1.14). Dos estudiantes (A05 y A13) no resuelven.

Los errores en esta sentencia se produjeron en ambos miembros de la igualdad. En el miembro izquierdo se deben a la aplicación errónea de la propiedad distributiva al cuadrado de la diferencia (ej., $\left(8\cdot 5-15\right)^2=8^2\cdot 5^2-15^2$. En el miembro derecho los errores se deben al considerar la expresión $\left(8\cdot 5\right)^2$ como el cuadrado de una suma y desarrollarla como $64+25+80$. Otros errores son de cálculo en la multiplicación como vemos en el miembro derecho de la Figura 6.1.14, donde el estudiante A04 al desarrollar el producto del segundo término escribe que $2\cdot 8\cdot 5\cdot 15=140\cdot 15$.

*Conclusión*

En la sentencia 4, observamos que la subcategoría basada en el reconocimiento y aplicación de identidades notables RIN.1 está ausente. Este dato nos lleva a pensar que todos los estudiantes trabajan basándose en datos operativos en toda o en parte de la sentencia. Mirando la frecuencia de RIN.2 vemos que casi la mitad de los estudiantes ha utilizado, en parte, el reconocimiento de cierta estructura. Esta expresión tiene su parte extendida en el segundo miembro. Consideramos que el término compuesto $8\cdot 5$ puede haber dificultado a los estudiantes la percepción de la estructura.

Entre los errores más notables, se encuentran: desarrollar erróneamente el cuadrado de un producto como el cuadrado de una suma y aplicar propiedad distributiva al cuadrado de una suma.

## Sentencia 5

$$(12+8+15)(12+8-15)=(12+8)^2-15^2$$

En el miembro izquierdo de la igualdad aparece el producto de dos factores, cada uno de ellos contiene los mismos tres números; en el primer factor los tres números están sumados, en el segundo factor, los dos primeros están sumados y el tercero está restado. En el miembro derecho de la igualdad aparece la suma de los dos números que se suman en los dos factores del primer miembro, elevado al cuadrado, menos el número que se resta en el segundo factor, también elevado al cuadrado.

IN: Producto de una suma por una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con suma $12+8$

Valor de verdad: verdadera.

*Resultados*

La sentencia 5 es resuelta por 12 estudiantes. La Tabla 6.1.7 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que se  codifican las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.1.7*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 5

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 0 | 5 | 7 | 0 | 2 | 8 | 4 | 0 | 1 | 0 |

*Categoría RIN*

En esta sentencia, cinco estudiantes (A01, A03, A04, A06 y A07) muestran reconocer la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, ya que aplican la identidad notable para operar en uno de los miembros (RIN.2). Estos cinco estudiantes, resuelven de dos formas distintas: dos de ellos (A03 y A07) resuelven tal como se observa en la Figura 6.1.16. A03 aplican la identidad notable cuadrado de la suma para trasformar $(12+8)^2$ en $144 + 64 + 192$. El estudiante A07 transforma la expresión aplicando la identidad notable en la comprobación de la sentencia, pero lo hace incorrectamente (ver recuadro del ejemplo b en la Figura 6.1.16).

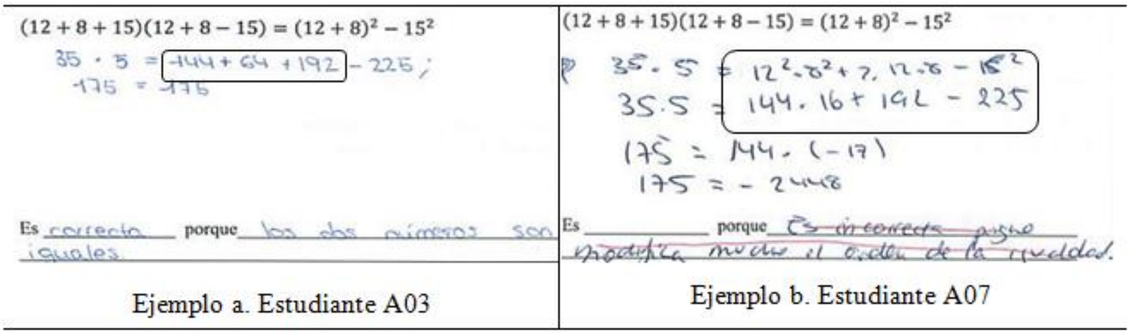



*Figura 6.1.16*. Reconocen la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

Los otros tres estudiantes (A01, A04 y A06) transforman la expresión $(12+8)^2$ aplicando propiedad distributiva al cuadrado de una suma (ver recuadro en Figura 6.1.17).

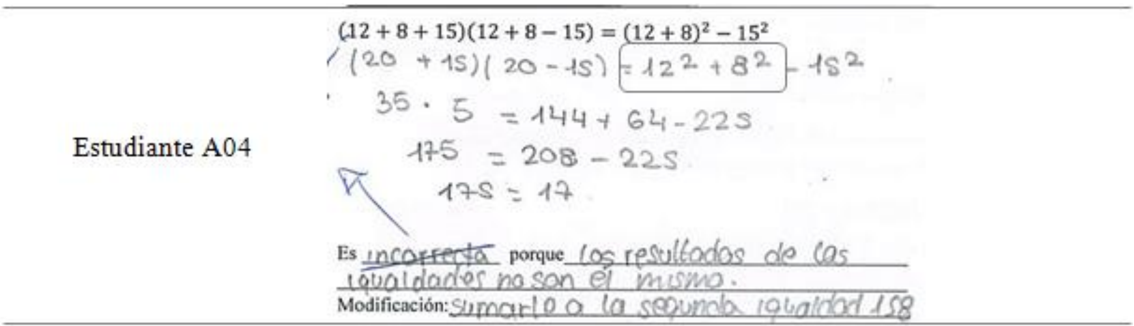



*Figura 6.1.17*. Reconoce parte de la estructura interna de una identidad en la expresión.

Siete estudiantes (A02, A08, A12, A13, A14, A15 y A19) operan sin tomar en consideración la estructura interna de las expresiones, ni las relaciones internas (RIN.3, ver Figura 6.1.18). Observamos que los estudiantes hacen uso de la jerarquía de operaciones para comprobar la veracidad de la sentencia: escriben $(12+8)^2 = 20^2$.

Estudiante A12

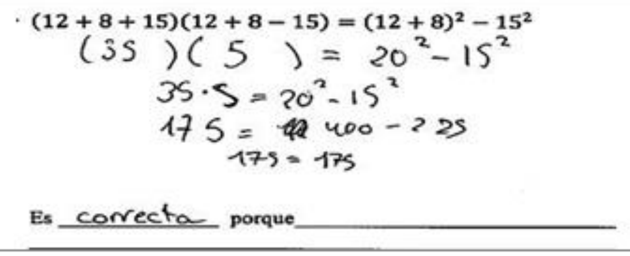



*Figura 6.1.18.* Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

En cuanto a la justificación de la respuesta dada, diez estudiantes proporcionaron respuestas tales como “los dos números son iguales”, (ver ejemplos en Figura 6.1.16 y Figura 6.1.17), que aluden al resultado de la operatoria realizada y no al conocimiento de la regla de identidad notable correspondiente. Dos estudiantes no justifican sus respuestas.

*Categoría MED*

Esta sentencia es verdadera y por tanto no requiere de modificación, sin embargo dos estudiantes (A04 y A06) la modifican dado que no obtienen igual valor numérico en ambos miembros. La razón de no obtener igual valor numérico se debe a que ambos aplican de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de la suma que figura en el miembro derecho. Modifican sin reconocer relaciones entre los términos y lo hacen atendiendo a las operaciones realizadas. Uno de ellos escribe “sumarle a la segunda igualdad 158” (MED.3, ver Figura 6.1.17).

*Categoría RET*

De doce estudiantes que resuelven la sentencia, ocho (A02, A03, A08, A12, A13, A14, A15 y A19) lo hacen correctamente. Todos los estudiantes operan el miembro izquierdo de igual forma, conservando la jerarquía de operaciones en este miembro, tal como muestran los ejemplos presentados en todas las figuras previas correspondientes a esta sentencia (Figuras 6.1.16, 6.1.17 y 6.1.18), donde transforman la expresión $(12+8+15)(12+8-15)$ en 35·5=175. La diferencia al operar esta sentencia se encuentra en el miembro derecho donde algunos estudiantes conservan la jerarquía de operaciones al expresar $(12+8)^2=20^2$ tal como muestra la Figura 6.1.18 y otros no la conservan dado que aplican la propiedad distributiva al cuadrado de una suma.

Cuatro estudiantes (A01, A04, A06 y A07) resuelven de forma incorrecta parte de la sentencia. De ellos, tres (A01, A04 y A06) aplican de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de una suma: transforman $(12+8)^2$ en $12^2+8^2$ (ver Figura 6.1.17). El otro estudiante (A07) desarrolla el cuadrado de la suma incorrectamente: transforma la expresión $(12+8)^2$ en $12^2\cdot 8^2+2\cdot 12\cdot 8$ (ver ejemplo b en Figura 6.1.16). Este último estudiante muestra o bien no recordar la transformación del cuadrado de una suma o no conocer cómo se aplica la transformación a un caso concreto. También observamos que no aplica la jerarquía de operaciones. Un estudiante (A05) no resuelve.

*Conclusión*

Pocos estudiantes ven en esta sentencia las relaciones internas relacionadas con la identidad notable implicada en el diseño de la sentencia. Los que lo hacen es en un segundo paso; es decir después de haber hecho alguna operación (ver Tabla 6.1.7). Las transformaciones que realizan se centran en desarrollar el miembro derecho de la igualdad. Este desarrollo les lleva a cometer errores. La presencia de un término compuesto con suma en dicho miembro es causa de error para cuatro de los doce estudiantes.

**Sentencia 6**

$(15-12)^2=15^2+12^2+2\cdot 15\cdot 12$

El miembro izquierdo de esta sentencia es el cuadrado de la diferencia de dos números, y el miembro derecho es la suma de tres elementos, dos de ellos son los mismos números que aparecen en el primer miembro de la igualdad, elevados al cuadrado, y el tercero es el producto del número dos por los dos números que han aparecido en el primer miembro de la igualdad.

IN: Cuadrado de una diferencia en el miembro izquierdo.

IN: Cuadrado de una suma en el miembro derecho.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el tercer término del miembro derecho se debe cambiar + a - para cumplir con el cuadrado de una diferencia, o se debe cambiar - a + el signo que separa los términos del binomio en el miembro izquierdo para cumplir con el cuadrado de una suma.

*Resultados*

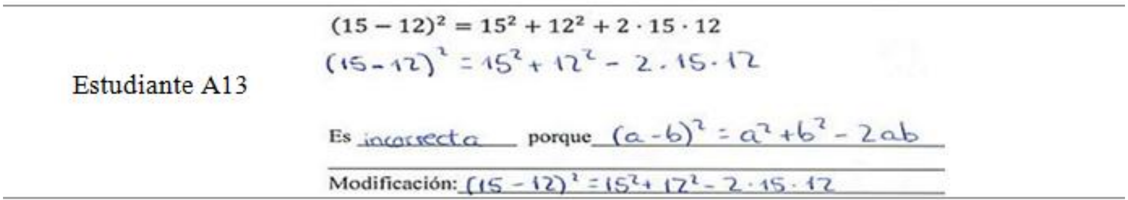
La sentencia 6 es resuelta por 12 estudiantes. En la Tabla 6.1.8 se recogen las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que caen las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.1.8*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 6

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 7 | 4 | 3 | 3 | 6 | 5 | 1 | 1 | 0 |

*Categoría RIN*

En esta sentencia se presenta solamente un caso (A13) de doce, donde el estudiante no opera para resolver; da la respuesta correcta basándose en que reconoce que hay diferencia en la estructura interna de cada miembro de la sentencia numérica (RIN.1, ver Figura 6.1.19).


Estudiante A13

$(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 + 2 \cdot 15 \cdot 12$

$(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12$

Es incorrecta porque $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Modificación: $(15-12)^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12$

*Figura 6.1.19*. Reconoce la estructura interna de una identidad en la expresión.

Siete estudiantes dan muestras de reconocer, en parte de la expresión, la estructura interna de una identidad notable, ya que la aplican para operar en uno de los miembros. De estos siete estudiantes, tres de ellos (A03, A07 y A12) desarrollan la identidad notable cuadrado de una diferencia, aunque sólo dos (A03 y A12) lo hacen correctamente (RIN.2, ver recuadros en ejemplos de Figura 6.1.20).

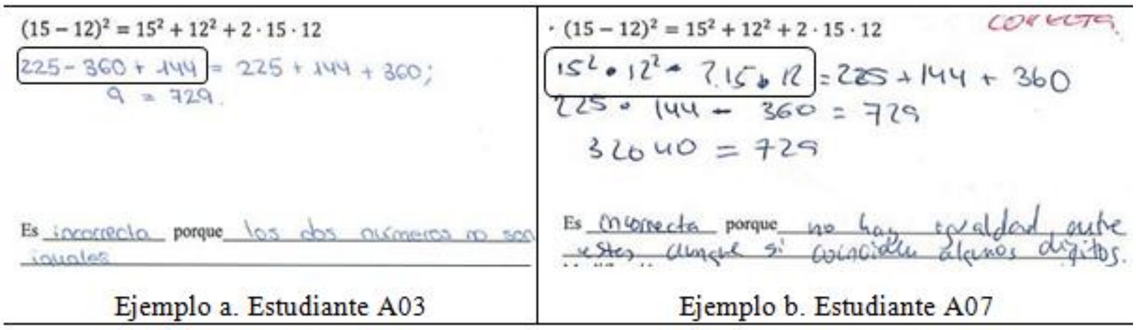



*Figura 6.1.20*. Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

Los otros cuatro estudiantes (A01, A04, A06 y A15) resuelven aplicando la propiedad distributiva al cuadrado de una diferencia: $(15-12)^2 = 15^2 - 12^2$ (ver recuadros en ejemplos de Figura 6.1.21).

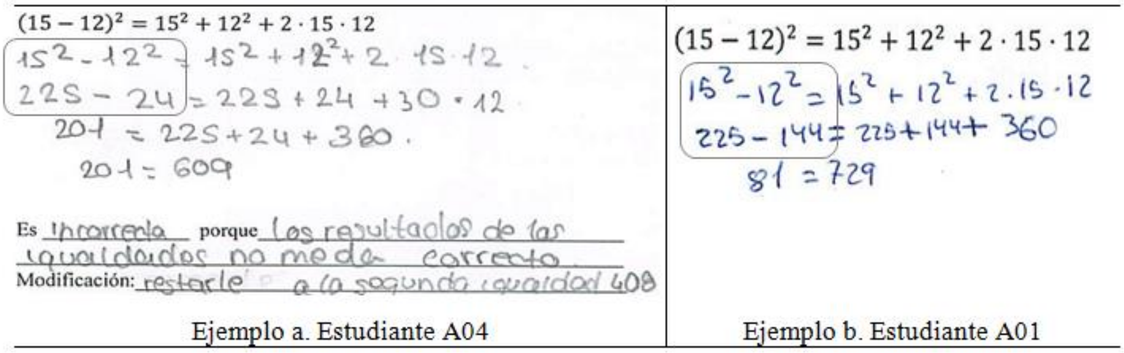



*Figura 6.1.21*. Reconoce parte de la estructura interna de una identidad en la expresión.

Cuatro estudiantes (A02, A08, A14 y A19) realizan operaciones sin tomar en consideración la estructura interna de las expresiones, ni las relaciones internas (RIN.3, ver Figura 6.1.22). Estos estudiantes hacen uso de la jerarquía de operaciones para comprobar la veracidad de la sentencia.

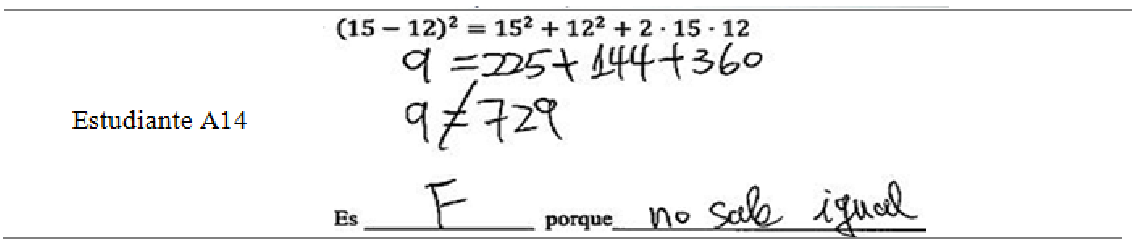



*Figura 6.1.22*. Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Las justificaciones de los estudiantes a sus respuestas en esta sentencia, son como sigue: sólo uno de ellos (A13) basa sus justificaciones en el conocimiento de las reglas de la identidad notable. El estudiante lo expresa utilizando simbolismo algebraico: "porque

$\left(a-b\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ” (ver Figura 6.1.19). Nueve estudiantes basan sus justificaciones en el desarrollo operacional de la sentencia, dando explicaciones tales como “en el primer miembro el resultado es 9, y en el segundo es 729” (ver ejemplos Figura 6.1.20 y Figura 6.1.21) y dos estudiantes no justifican su respuesta.

*Categoría MED*

En la sentencia 6, tres estudiantes (A02, A12 y A13) modifican la expresión aplicando una identidad notable, muestran reconocer la necesidad de modificar algunas relaciones internas para conseguir igual estructura interna en ambos miembros (MED.1, ver Figura 6.1.19). Dos de dichos estudiantes (A12 y A13) modifican de acuerdo a la estructura del cuadrado de una diferencia, es decir, escriben $\left(15-12\right)^2 = 15^2 + 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12$. Y el estudiante A02 modifica atendiendo a la estructura del cuadrado de una suma: escribe $\left(15+12\right)^2 = 15^2 + 12^2 + 2\cdot 15\cdot 12$.

Tres estudiantes (A04, A06 y A15) modifican sin reconocer relaciones internas entre los miembros. Realizan la modificación atendiendo a datos numéricos, pero dado que incurren en errores en el proceso de comprobación, la modificación es incorrecta. Por ejemplo, un estudiante propone “restarle a la segunda igualdad 408” (MED.3, ver ejemplo a, figura 6.1.21).

*Categoría RET*

De los doce estudiantes que resuelven, seis (A02, A03, A12, A13, A14 y A19) lo hacen correctamente (ver Figura 6.1.19 y ejemplo a en Figura 6.1.20). Cinco estudiantes (A01, A06, A07, A08 y A15) resuelven parte correctamente. Un estudiante (A04) comete errores en ambos miembros (ver ejemplo a, Figura 6.1.21). Un estudiante (A05) no resuelve.

Algunos de los errores detectados pueden ser debidos a la no consideración de la jerarquía de operaciones. Otros errores se atribuyen a la aplicación incorrecta de la identidad notable, donde un estudiante (A07) al transformar la expresión del cuadrado de la diferencia $\left(15-12\right)^2$ en lugar de restar las potencias cuadradas las escribe como producto: $15^2 \cdot 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12$. También se deben a la aplicación de forma errónea de la propiedad distributiva al cuadrado de una diferencia, al escribir $\left(15-12\right)^2 = 15^2 - 12^2$.

Aparece un tipo de error que podemos denominar error de potencia, que consiste en interpretar elevar al cuadrado como multiplicar por dos (ejemplo a de la Figura 6.1.21).

*Conclusión*

En la sentencia 6, en su mayoría los estudiantes dan muestran de operar. La mayor cantidad de respuestas caen en la subcategoría que conjuga el cálculo con el uso de algunas relaciones internas detectadas en la sentencia, como muestran los datos de la Tabla 6.1.8. Si bien entre las subcategoría RIN.1 y RIN.2 suman ocho respuestas, no sucede así con la suma de MED.1 y MED.3 que solo suman seis respuestas, lo que indica que algunos estudiantes a pesar de haber visto alguna estructura para hacer la comprobación, no la han utilizado para la modificación.

Los errores se dieron específicamente en el miembro izquierdo de la igualdad, con motivo de aplicar la propiedad distributiva al cuadrado de una diferencia.

## Sentencia 7

$$\left[20-(5+7)\right]^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot(5+7)+(5+7)^2$$

En esta igualdad, el miembro izquierdo contiene la diferencia de dos números elevada al cuadrado; siendo el substraendo de la diferencia, a su vez, la suma de dos números. El miembro derecho está formado por la suma de los cuadrados del minuendo y substraendo que aparecen en el miembro izquierdo, a los que se resta el doble de su producto.

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: compuesta, con suma $5+7$

Valor de verdad: verdadera.

La sentencia 7 es resuelta por 11 estudiantes. La Tabla 6.1.9 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que quedan codificadas las respuestas de los estudiantes.

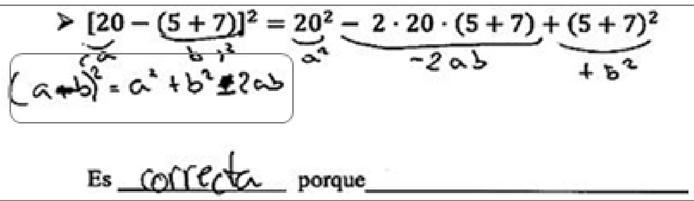
*Tabla 6.1.9.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 7

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 4 | 6 | 0 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 | 0 |

*Categoría RIN*

En esta sentencia solo A12 no opera para dar la respuesta. Muestra basarse en el reconocimiento de la identidad notable en la expresión dada (RIN.1, ver Figura 6.1.23).

Estudiante A12



$[20-(5+7)]^2 = \underbrace{20^2}_{a^2} - \underbrace{2\cdot 20\cdot(5+7)}_{-2ab} + \underbrace{(5+7)^2}_{+b^2}$

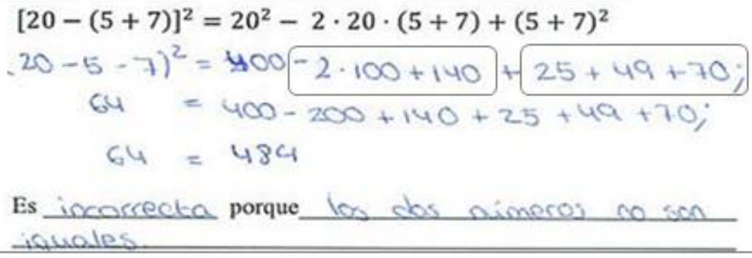
$\boxed{(a+b)^2 = a^2+b^2 \pm 2ab}$

Es correcta porque

*Figura 6.1.23.* Reconoce la estructura interna de una identidad en la expresión.

Los estudiantes (A01, A03, A07 y A15) muestran reconocer la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, ya que la aplican para operar en uno de los miembros (RIN.2, Figura 6.1.24).

Estudiante A03



$[20-(5+7)]^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot(5+7) + (5+7)^2$

$(20-5-7)^2 = 400 \boxed{-2\cdot 100+140} + \boxed{25+49+70;}$

$64 = 400-200+140+25+49+70;$

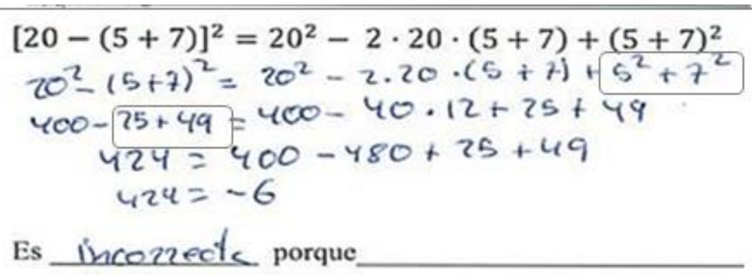
$64 = 484$

Es incorrecta porque los dos números no son iguales

*Figura 6.1.24.* Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

En ambos recuadros de la Figura 6.1.25 se observa que el estudiante transforma la expresión $(5+7)^2$ en $25+49$, aplicando así la propiedad distributiva al cuadrado de una suma.

Estudiante A01



$[20-(5+7)]^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot(5+7) + (5+7)^2$

$20^2-(5+7)^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot(5+7) + \boxed{5^2+7^2}$

$400-\boxed{25+49} = 400 - 40\cdot 12 + 25 + 49$

$424 = 400-480+25+49$

$424 = -6$

Es incorrecta porque

*Figura 6.1.25.* Reconoce parte de la estructura interna de una identidad en la expresión.

Seis estudiantes (A02, A04, A06, A08, A14 y A19) realizan operaciones sin tomar en consideración las relaciones internas ni la estructura de las expresiones (RIN.3, ver Figura 6.1.26). En este caso observamos que los estudiantes hacen uso de jerarquía de operaciones para comprobar la veracidad de la sentencia. Escriben que $\left[20-\left(5+7\right)\right]^2$ es igual a $\left[20-12\right]^2=64$.

| | |
|---|---|
| Estudiante A02 | $[20-(5+7)]^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot(5+7)+(5+7)^2$<br>$[20-12]^2 = 400 - 40\cdot 12 + 144$ ;<br>$64. = 400 - 480 + 144$ ;<br>$64 = 64$ // sí<br>Es correcta porque en ~~la~~ los dos miembros el resultado es 64. |

*Figura 6.1.26*. Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Para justificar su respuesta, los estudiantes fundamentalmente se basan en el desarrollo operacional de la sentencia, emiten justificaciones tales como “en los dos miembros el resultado es 64” (ver Figura 6.1.26). Dos estudiantes no justifican.

*Categoría MED*

La sentencia 7 es verdadera y no requiere modificación, no obstante dos estudiantes (A04 y A06) la modifican dado que el valor numérico que obtienen en ambos miembros no es el mismo. La razón de no obtener igual valor numérico se debe a que ambos incurren en errores de cálculo y, además, uno de ellos aplica de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de la suma. Modifican sin reconocer relaciones entre los términos y lo hacen atendiendo a las operaciones realizadas. Uno de los estudiantes modifica como sigue: $\left[20-\left(5+7\right)\right]^2+158=20^2-2\cdot20\cdot\left(5+7\right)+\left(5+7\right)^2$ (MED.3).

*Categoría RET*

De los once estudiantes que resuelven, cuatro (A02, A12, A14 y A19) resuelven correctamente (ver Figuras 6.1.23 y 6.1.26); cuatro (A03, A04, A08 y A15) resuelven sólo parte correctamente (ver Figura 6.1.24) y tres (A01, A06 y A07) no resuelven correctamente (ver Figura 6.1.25). Dos estudiantes (A05 y A13) no resuelven la sentencia. Los errores en esta sentencia se atribuyen a que los estudiantes aplican de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de una suma $\left(5+7\right)^2$ transformándola en suma de cuadrados $5^2+7^2$. Otros errores se atribuyen a la ausencia de jerarquía de operaciones y/o aplicaciones incorrectas de la propiedad distributiva, tal como se muestran en el primer recuadro de la Figura 6.1.24, donde el estudiante transforma la expresión $2\cdot 20\cdot(5+7)$ en $2\cdot 100+140,$ olvidando multiplicar 140 por el 2 que precede el producto.

*Conclusión*

Observamos que en la sentencia 7, más de la mitad de los estudiantes que resuelvan lo hacen operando y sin considerar relación alguna entre sus términos. Las subcategorías basadas en el reconocimiento y aplicación de identidades notables RIN.1 y RIN.2 presentan un número bajo de aplicabilidad para el desempeño de los estudiantes (ver Tabla 6.1.9). De los once estudiantes que resuelven sólo uno trabaja basándose en la estructura interna de la igualdad y los diez restantes lo hacen basándose en datos operativos. Tenemos en cuenta que esta sentencia es compuesta por suma lo que puede complicar la percepción de relaciones dependientes de la identidad notable.

Los errores más significativos se deben al aplicar la falsa propiedad distributiva al cuadrado de la diferencia, expresándola como una diferencia de cuadrados. Se atribuyen también a la aplicación incorrecta de la propiedad distributiva inmersa dentro de la identidad notable en uso, al incumplimiento de la jerarquía de operaciones y a errores al sumar y multiplicar cuando operan con la expresión $(5+7)$ .

## Sentencia 8

$(2\cdot 5+20)^2=(2\cdot 5)^2+2\cdot 2\cdot 5\cdot 20+20^2$

Esta igualdad se compone en su miembro izquierdo del cuadrado de la suma del producto de dos números y otro número. En el miembro derecho se destacan dos sumandos elevados al cuadrado, el primero de ellos coincide con el primer sumando del cuadrado contenido en el miembro izquierdo, otro es el segundo sumando y un tercero corresponde al doble del producto de ambos sumandos.

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta, con producto $2\cdot 5$

Valor de verdad: verdadera.

*Resultados*

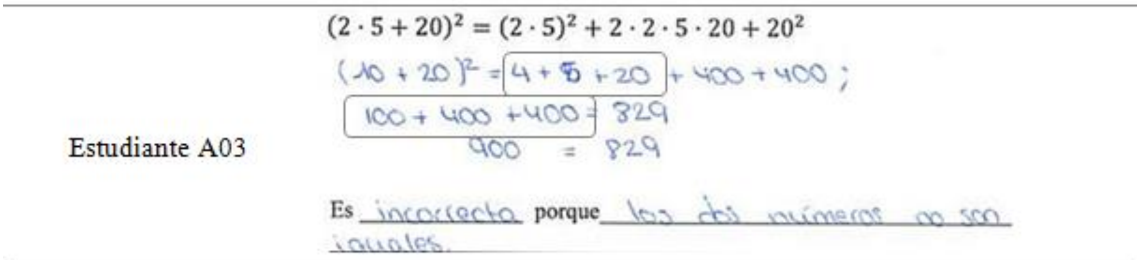
La sentencia 8 es resuelta por 9 estudiantes. En la Tabla 6.1.10 se muestran las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías bajo las que caen las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.1.10.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 8

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 0 | 4 | 5 | 0 | 0 | 5 | 2 | 2 | 4 | 0 |

*Categoría RIN*

Cuatro estudiantes (A01, A03, A07, A12) muestran reconocer la identidad notable involucrada en parte de la expresión, o sea, reconocen la estructura interna de la misma. Esto lo evidencian al utilizarla antes de operar (RIN.2).


Estudiante A03

$(2 \cdot 5 + 20)^2 = (2 \cdot 5)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 20 + 20^2$

$(10+20)^2 = \boxed{4+5+20} + 400 + 400$ ;

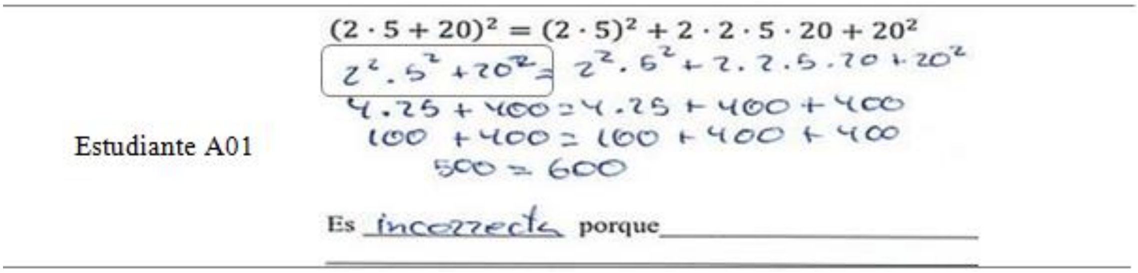
$\boxed{100 + 400 + 400} = 829$

$900 = 829$

Es incorrecta porque los dos números no son iguales.

*Figura 6.1.27.* Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

Entre estos cuatro estudiantes, dos de ellos (A01 y A07), en el miembro izquierdo de la sentencia aplican la propiedad distributiva al cuadrado de una suma, tal como se muestra en la Figura 6.1.28.


Estudiante A01

$(2 \cdot 5 + 20)^2 = (2 \cdot 5)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 20 + 20^2$

$\boxed{2^2 . 5^2 + 20^2} = 2^2 . 5^2 + 2.2.5.20 + 20^2$

$4.25 + 400 = 4.25 + 400 + 400$

$100 + 400 = 100 + 400 + 400$

$500 = 600$

Es incorrecta porque

*Figura 6.1.28.* Aplica propiedad distributiva al cuadrado de una suma.

Cinco estudiantes (A02, A08, A14, A15 y A19) realizan operaciones sin tomar en consideración la estructura interna de las expresiones, ni las relaciones internas. Abordan el proceso de comprobación realizando operaciones (RIN.3, ver Figura

6.1.29). Estos estudiantes, hacen uso de la jerarquía de operaciones para comprobar la veracidad de la sentencia, desarrollan $(2\cdot5+20)^2$ = $(10+20)^2=900$.

Estudiante A02

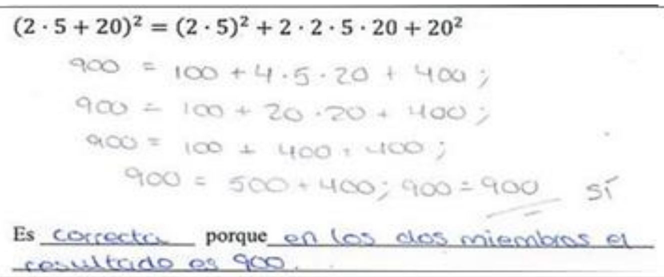



*Figura 6.1.29*. Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

En la justificación de su respuesta, seis estudiantes se basan en el desarrollo operacional de la expresión (ver Figura 6.1.27 y Figura 6.1.29). Por ejemplo uno de ellos explica: “en los dos miembros el resultado es 900”. Tres estudiantes no justifican la respuesta.

*Categoría RET*

De los nueve estudiantes que resuelven, cinco (A02, A12, A14, A15 y A19) lo hacen correctamente (ver Figura 6.1.29). Dos (A03 y A08) resuelven sólo parte correctamente (ver Figura 6.1.27) y dos (A01 y A07) no resuelven correctamente (ver Figura 6.1.28). Los errores que cometen se atribuyen en este caso a la aplicación incorrecta de la identidad notable y/o al incumplimiento de la jerarquía de operaciones. Algunos desarrollan el cuadrado de un producto $(2\cdot5)^2$ como el cuadrado de una suma (ver Figura 6.1.27). Otros estudiantes aplican la propiedad distributiva al cuadrado de una suma, por ejemplo escriben $(2\cdot5+20)^2=2^2\cdot5^2+20^2=4\cdot25+400$ (ver Figura 6.1.28). Otros incurren en errores de cálculo en operaciones de suma, resta y multiplicación. Cuatro estudiantes (A04, A05, A06 y A13) no resuelven.

*Conclusión*

Son muy pocos los estudiantes que responden, suponemos que algunos pueden estar cansados dado que esta es la octava sentencia en la que trabajan. Posiblemente el hecho de ser una sentencia compuesta con producto puede ser un elemento disuasorio. Observamos que los nueve estudiantes que resuelven la actividad propuesta trabajan operativamente (ver Tabla 6.1.10), la subcategoría basada en el reconocimiento y aplicación de identidades notables RIN.1 está ausente.

Los errores más notables consisten en aplicar de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de una suma y desarrollar el cuadrado de un producto como el cuadrado de una suma. La expresión $(2\cdot 5)$ que es un término compuesto con producto, inmersa en la identidad notable cuadrado de la suma, es la causante de error en cuatro de los nueve estudiantes que resuelven la sentencia propuesta.

## Sentencia 9

$2\left(20^2-10^2\right)=2\cdot 20^2+2\cdot 10^2$

Esta igualdad recoge en su miembro izquierdo un producto de dos factores, uno simple y otro formado por la diferencia de dos números elevados al cuadrado. En el miembro derecho aparece la suma de los productos resultantes del primer factor del miembro izquierdo multiplicando a los números que componen la diferencia.

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con potencias $20^2$ y $10^2$

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: para que se cumpla la igualdad el signo del miembro derecho debe ser - o el signo del miembro izquierdo debe ser +.

*Resultados*

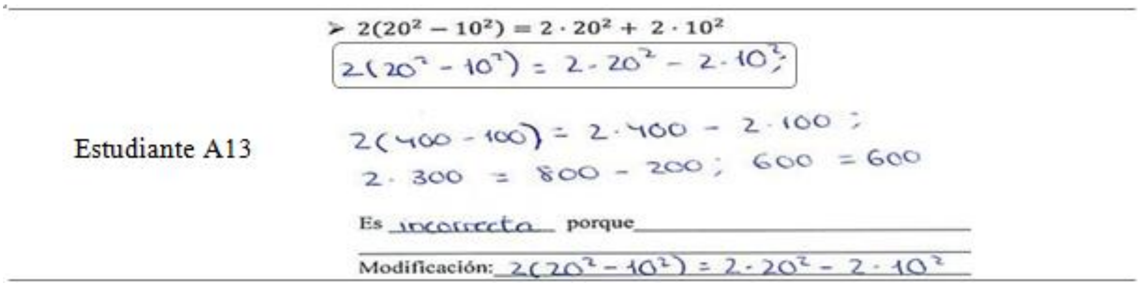
La sentencia 9 es resuelta por 9 estudiantes. La Tabla 6.1.11 recoge las frecuencias absolutas correspondientes a la clasificación de las respuestas de los estudiantes a esta sentencia.

*Tabla 6.1.11*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 9

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 4 | 3 |

*Categoría RIN*

Un estudiante (A13) da la respuesta correcta antes de operar, ha reconocido la identidad notable involucrada en la expresión, la corrige y la escribe de forma que se mantiene la estructura interna de la misma (RIN.1, ver Figura 6.1.30). Posteriormente hace los cálculos indicados en la expresión lo que le permite confirmar la verdad de la identidad utilizada.



Estudiante A13

$2(20^2 - 10^2) = 2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 10^2$

$\boxed{2(20^2 - 10^2) = 2 \cdot 20^2 - 2 \cdot 10^2;}$

$2(400 - 100) = 2 \cdot 400 - 2 \cdot 100;$

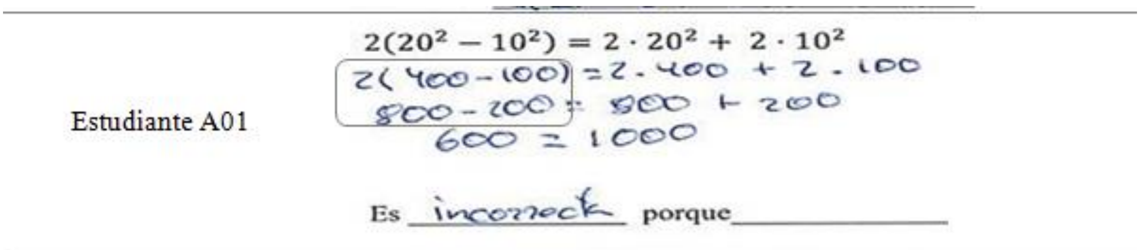
$2 \cdot 300 = 800 - 200; \quad 600 = 600$

Es incorrecta porque

Modificación: $2(20^2 - 10^2) = 2 \cdot 20^2 - 2 \cdot 10^2$

*Figura 6.1.30.* Reconoce la estructura interna de una identidad en la expresión.

Tres estudiantes (A01, A03 y A12) reconocen la identidad notable en parte de la expresión, utilizándola al operar en uno de los miembros (RIN.2). Los tres aplican la propiedad distributiva tal como muestra el recuadro del miembro izquierdo de la Figura 6.1.31.



Estudiante A01

$2(20^2 - 10^2) = 2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 10^2$

$2(400 - 100) = 2 \cdot 400 + 2 \cdot 100$

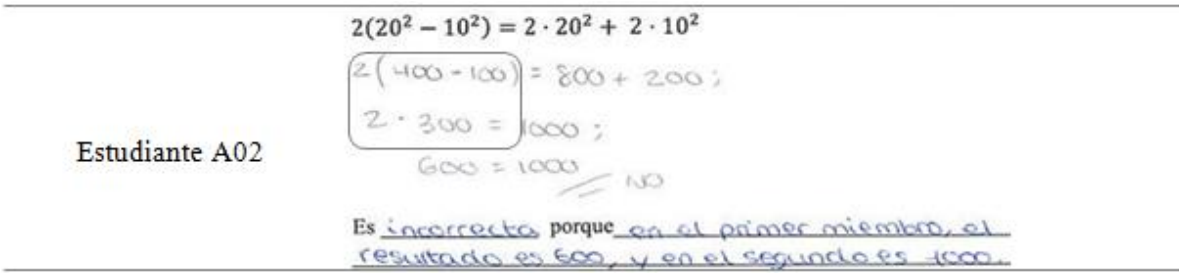
$800 - 200 = 800 + 200$

$600 = 1000$

Es incorrect porque

*Figura 6.1.31*. Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

Dos estudiantes (A02 y A14) realizan operaciones sin tomar en consideración las relaciones internas ni la estructura interna de las expresiones (RIN.3, ver Figura 6.1.32). Resuelven las operaciones indicadas haciendo uso de la jerarquía de operaciones.



Estudiante A02

$2(20^2 - 10^2) = 2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 10^2$

$2(400 - 100) = 800 + 200;$

$2 \cdot 300 = 1000;$

$600 = 1000$ NO

Es incorrecta porque en el primer miembro, el resultado es 600, y en el segundo es 1000.

*Figura 6.1.32.* Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Las justificaciones dadas se basan en el desarrollo operacional de la sentencia, proporcionando respuestas como "en el primer miembro el resultado es 600, y en el segundo es 1000" (ver Figura 6.1.32). Tres estudiantes no dan justificaciones.

*Categoría MED*

Sólo dos de nueve estudiantes (A12 y A13) modifican la expresión aplicando una identidad notable al reconocer la necesidad de modificar algunas relaciones internas para conseguir igual estructura interna en ambos miembros. Uno de estos estudiantes es el mismo que comprueba sin operar (MED.1, ver Figura 6.1.30).

*Categoría RET*

De los nueve estudiantes que resuelven, seis lo hacen correctamente (ver Figuras 6.1.30, 6.1.31 y 6.1.32). Los datos de los tres estudiantes restantes se consideran no codificables dado que sólo expresan el resultado numérico y no dan evidencias de la forma en que lo han obtenido. Cuatro estudiantes se abstienen de resolverla.

*Conclusión*

Esta sentencia ha sido resuelta por muy pocos estudiantes; probablemente acusa más el cansancio de los estudiantes. Destaca el elevado número de respuestas no codificables. También destacamos que en las que es posible codificar, el doble presentan uso de relaciones respecto de las que solo hacen uso de operaciones (ver Tabla 6.1.11).

De los nueve estudiantes que resuelven, uno trabaja basándose en la estructura interna y cinco estudiantes lo hacen basándose en datos operativos. Cuatro de los trece estudiantes se abstienen de resolverla y los datos de tres se consideran no codificables. No se aprecian errores.

## Sentencia 10

$$30^2 - 13^2 = (30-13)(30-13)$$

En esta sentencia se tiene en el miembro izquierdo la diferencia de dos números al cuadrado. En el miembro derecho aparece el producto de dos factores iguales formados por la diferencia de los números que se operan en el miembro izquierdo.

IN: Diferencia de cuadrados en el miembro izquierdo.

IN: Cuadrado de una diferencia en el miembro derecho.

Tipo de expresión: simple.

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: en el miembro izquierdo para su veracidad se debe cambiar un signo - por un signo + en el miembro derecho. En el miembro derecho para su veracidad el miembro izquierdo debe tener la forma $(30-13)^2$.

*Resultados*

La sentencia 10 es resuelta por 8 estudiantes. La Tabla 6.1.12 muestra las frecuencias absolutas en que es usada cada una de las subcategorías para recoger las actuaciones de los estudiantes en esta sentencia.

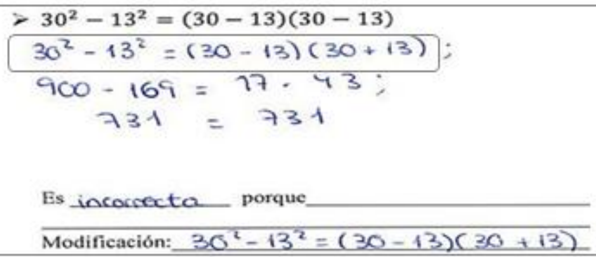
*Tabla 6.1.12*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 10

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 2 | 0 | 6 | 2 | 0 | 7 | 1 | 0 | 5 | 0 |

*Categoría RIN*

Dos estudiantes (A12 y A13) dan la respuesta correcta antes de hacer operaciones, basándose en el reconocimiento de una identidad notable involucrada en la expresión. (RIN.1, ver Figuras 6.1.33 y 6.1.34). El estudiante A13 (Figura 6.1.33) percibe desde un inicio una identidad conocida, la desarrolla y compara la expresión obtenida con la expresión extendida de la igualdad propuesta, hecho que le permite responder si es correcta o incorrecta. A continuación realiza los cálculos para ratificar la veracidad de la identidad notable escrita por el mismo.

Estudiante A13


➢ $30^2 - 13^2 = (30-13)(30-13)$

$\boxed{30^2 - 13^2 = (30-13)(30+13)}$;

$900 - 169 = 17 \cdot 43$;

$731 = 731$

Es incorrecta porque

Modificación: $30^2 - 13^2 = (30-13)(30+13)$

*Figura 6.1.33*. Reconoce la estructura interna de una identidad en la expresión.

El estudiante A12 (Figura 6.1.34) escribe la expresión genérica de la diferencia de cuadrados, lo que le permite responder al valor de verdad de la sentencia.

Estudiante A12

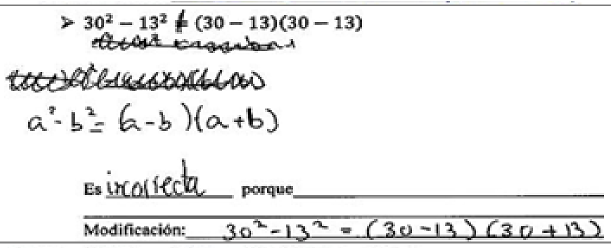



*Figura 6.1.34*. Reconoce la estructura interna de una identidad en la expresión.

Seis estudiantes (A01, A02, A03, A14, A15 y A19) realizan operaciones sin tomar en consideración la estructura interna de las expresiones (RIN.3, ver Figura 6.1.35). Estos estudiantes, hacen uso de la jerarquía de operaciones para comprobar la veracidad de la sentencia.

Estudiante A03

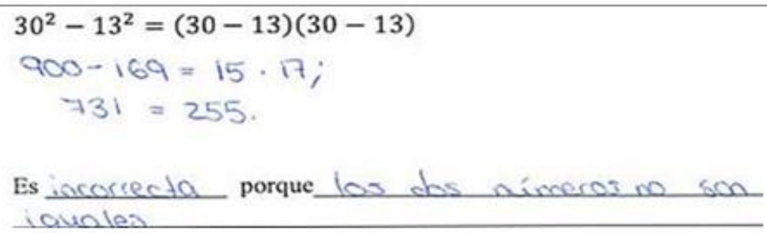



*Figura 6.1.35*. Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

En cuanto a las justificaciones de las respuestas dadas, cinco estudiantes las basan únicamente en el resultado de las operaciones realizadas. Una de las justificaciones proporcionadas por los estudiantes dice "los dos números no son iguales", (ver Figura 6.1.35). Tres estudiantes no dan detalles del porqué de su respuesta.

*Categoría MED*

Sólo dos estudiantes (A12 y A13) modifican la expresión aplicando una identidad notable al reconocer la necesidad de modificar algunas relaciones internas para conseguir igual estructura interna en ambos miembros. Modifican escribiendo la igualdad $30^2 - 13^2 = (30-13)(30+13)$ (MED.1, ver Figuras 6.1.33 y 6.1.34). Los otros estudiantes no realizan modificación alguna.

*Categoría RET*

De ocho estudiantes, siete (A01, A02, A12, A13, A14, A15 y A19) resuelven correctamente la sentencia (ver Figuras 6.1.33 y 6.1.34). Sólo un estudiante (A03) de ocho no resuelve correctamente dado que al efectuar $(30-13)(30-13)$ lo expresa como

$15 \cdot 17$ (ver Figuras 6.1.35). Cinco estudiantes (A04, A05, A06, A07 y A08) no resuelven la sentencia.

*Conclusión*

Podemos observar que el número de respuesta ha disminuido respecto a la secuencia anterior. En este caso el mayor número de estudiantes decide sobre la veracidad de la sentencia haciendo operaciones. Los estudiantes que modifican la expresión son los únicos que resuelven utilizando las relaciones internas entre los términos de las expresiones dadas (ver Tabla 6.1.12).

Sólo un estudiante comete error en las operaciones que se puede atribuir a un "despiste".

## Sentencia 11

$5 \cdot (26-22)+5 \cdot 16 = 5 \cdot (26-22-16)$

En esta sentencia se tiene el producto de un número por la diferencia de dos, sumado con el producto del mismo primer número por otro. En el segundo miembro se tiene el producto del mismo número por la diferencia consecutiva de los tres números restantes.

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: compuesta, con resta $26-22$

Valor de verdad: falsa.

Presenta una variación en la que radica su falsedad: En el miembro derecho el signo del 16 debe ser +.

*Resultados*

La sentencia 11 es resuelta por 8 estudiantes. La Tabla 6.1.13 muestra el número de respuestas que caen bajo cada una de las subcategorías consideradas en el análisis.

*Tabla 6.1.13*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 11

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 4 | 1 | 2 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 2 |

*Categoría RIN*

Un estudiante (A13) da una respuesta basada en el reconocimiento de la estructura interna de la identidad notable presente en la expresión (RIN.1, ver Figura 6.1.36). Este estudiante cambia de antemano el signo menos del último paréntesis por un signo más, como es necesario para que la sentencia sea verdadera.

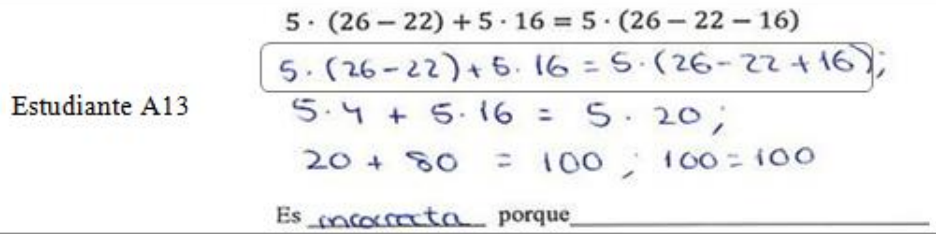



*Figura 6.1.36.* Reconoce la estructura interna de una identidad en la expresión.

Cuatro estudiantes (A01, A03, A12 y A14) reconocen la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, la utilizan y posteriormente operan (RIN.2, ver Figuras 6.1.37 y 6.1.38).

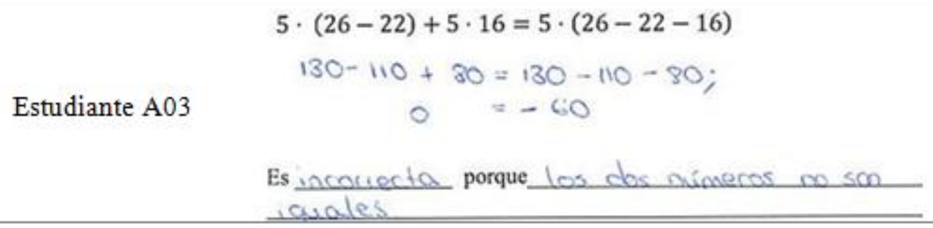



*Figura 6.1.37.* Reconoce la estructura interna de una identidad en parte de la expresión.

Entre estos cuatro estudiantes, uno de ellos (A12) muestra en su desempeño relacionar y comparar expresiones compuestas de operaciones, sin llegar a realizar las mismas (ver Figura 6.1.38).

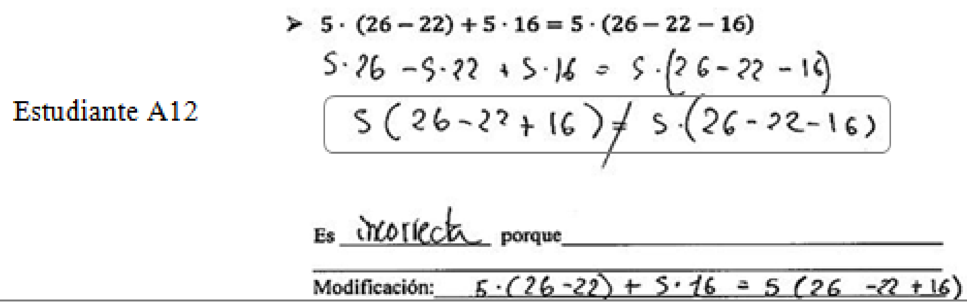



*Figura 6.1.38.* Capacidad para relacionar y comparar estructuras compuestas.

Un estudiante (A02) realiza operaciones sin tomar en consideración la estructura interna de las expresiones, ni las relaciones internas (RIN.3, ver Figura 6.1.39). Este estudiante aplica jerarquía de operaciones para comprobar la veracidad de la sentencia.

| | |
|---|---|
| Estudiante A02 | $5 \cdot (26 - 22) + 5 \cdot 16 = 5 \cdot (26 - 22 - 16)$<br>$5 \cdot 4 + 80 = 5 \cdot (-12);$<br>$20 + 80 = -60;$<br>$100 = -60$ // NO<br>Es incorrecta porque en el primer miembro el resultado es 100, y en el segundo es -60. |

*Figura 6.1.39.* Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Al analizar las razones dadas para justificar sus respuestas vemos que: cinco estudiantes basan sus justificaciones en el desarrollo operacional de la sentencia proporcionando respuestas como “en el primer miembro el resultado es 100 y en el segundo es -60” (ver Figura 6.1.39) y tres estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría MED*

Dos estudiantes (A12 y A13) modifican la expresión aplicando una identidad notable al reconocer la necesidad de modificar algunas relaciones internas para conseguir igual estructura interna en ambos miembros (MED.1, ver Figuras 6.1.36 y 6.1.38). Los otros estudiantes no realizan modificación alguna.

*Categoría RET*

De los ocho estudiantes que resuelven, cinco (A01, A02, A12, A13 y A14) lo hacen correctamente (ver Figura 6.1.36 y Figura 6.1.38). Un estudiante (A03) resuelve desarrollando el miembro izquierdo incorrectamente, su error es de cálculo. Los datos de A15 y A19 se consideran no codificables dado que sólo expresan el resultado y no se observa la forma como operan, por tanto se desconoce si han hecho uso de alguna identidad notable en parte de la sentencia. Cinco estudiantes (A04, A05, A06, A07 y A08) no resuelven.

*Conclusión*

En la realización de la sentencia 11, de los ocho estudiantes que responden tres reconocen la estructura de la identidad notable: solo uno al comprobar y dos al modificar (ver Tabla 6.1.13). Cinco trabajan basándose en operaciones, aunque cuatro de ellos hacen uso de algunas de las relaciones internas de la expresión dada. Sólo un estudiante (A03) incurre en error debido a cálculos, en la operación.

## Sentencia 12

$$(13+17+10)^2 = (13+17)^2 + 2\cdot(13+17)\cdot 10 + 10^2$$

En esta igualdad se presenta en el miembro izquierdo una suma de tres sumandos elevada al cuadrado. En el miembro derecho aparece una suma de tres sumandos: (1) la suma de los dos primeros sumandos del primer miembro, elevada al cuadrado, (2) el producto del número dos por la misma suma anterior por el tercer sumando del miembro izquierdo, y (3) el tercer sumando del miembro izquierdo, al cuadrado.

IN: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: compuesta, con suma $13+17$.

Valor de verdad: verdadera.

*Resultados*

La sentencia 12 es resuelta por 6 estudiantes. En la Tabla 6.1.14 se muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que recogen el desempeño de los estudiantes en la sentencia 12.

*Tabla 6.1.14*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 12

| RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 7 | 0 |

*Categoría RIN*

Un estudiante (A01) reconoce la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión, que aplica para operar en uno de los miembros (RIN.2, ver Figura 6.1.40).

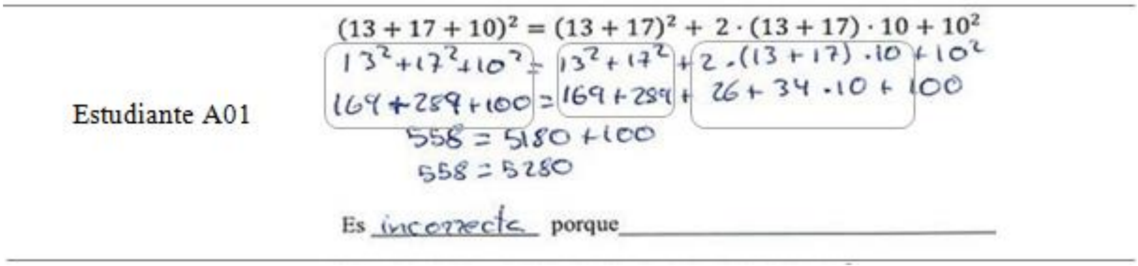



*Figura 6.1.40*. Aplica propiedad distributiva al cuadrado de una suma.

Cinco estudiantes (A02, A12, A14, A15 y A19) operan o realizan operaciones sin tomar en consideración la estructura interna de las expresiones, ni las relaciones internas (RIN.3, ver Figura 6.1.41).

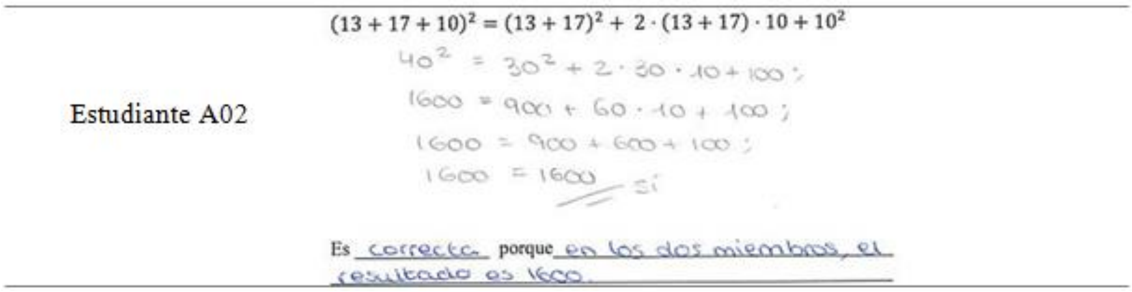



*Figura 6.1.41*. Opera sin considerar la estructura interna de la expresión.

Entre las justificaciones proporcionadas acerca del porqué de su respuesta, cuatro estudiantes se basan en el desarrollo operacional de la sentencia con explicaciones tales como “En los dos miembros el resultado es 1600” (ver Figura 6.1.41). Dos estudiantes no justifican.

*Categoría RET*

De los seis estudiantes que resuelven, cinco (A02, A12, A14, A15 y A19) lo hacen correctamente (ver Figura 6.1.41). Sólo un estudiante (A01) no resuelve correctamente, dado que comete error al aplicar distributividad del cuadrado respecto a la operación suma (Figura 6.1.40), tal como se observa en los dos primeros recuadros de la Figura indicada y, además, no preserva jerarquía de operaciones tal como se observa en el tercer recuadro de la misma figura. Siete estudiantes (A03, A04, A05, A06, A07, A08 y A13) no resuelven.

*Conclusión*

Son pocos los estudiantes que resuelven esta sentencia, no incluyendo al estudiante A13, y ninguna de las respuestas dadas corresponde a la subcategoría RIN.1 (ver Tabla 6.1.14). Los seis estudiantes que resuelven trabajan basándose en datos operativos.

Los errores en los cuales incurre un solo estudiante se deben a aplicar de forma errónea la propiedad distributiva al cuadrado de una suma y/o no respectar la jerarquía de operaciones.

### 6.1.5 Análisis general de resultados de la tarea 1ª de la Sesión 1

En esta sección se realiza una recopilación de los resultados del análisis de las actuaciones mostradas por los estudiantes en la resolución de las sentencias de la primera tarea presentadas en el punto anterior.

La Tabla 6.1.15 recopila las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que nos proporcionan detalles de las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de la sesión 1. El 20.5% de las posibilidades de resolución no tuvieron respuesta, son codificadas como no responde (NR). El porcentaje de frecuencias se obtiene de un total de 156 respuestas en las categorías RIN y RET y sobre 78 en la categoría MED.

*Tabla 6.1.15*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sesión 1

| Sentencia | RIN | | | MED | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | RIN.1 | RIN.2 | RIN.3 | MED.1 | MED.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 0 | 2 | 11 | 0 | 0 | 11 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 7 | 4 | 5(3) | 3 | 4 | 6 | 2 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 8 | 3 | 5 | 2 | 8 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 5 | 6 | 0 | 3 | 5 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| 5 | 0 | 5 | 7 | 0 | 2 | 8 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 7 | 4 | 3 | 3 | 6 | 5 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 4 | 6 | 0 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 | 0 |
| 8 | 0 | 4 | 5 | 0 | 0 | 5 | 2 | 2 | 4 | 0 |
| 9 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 4 | 3 |
| 10 | 2 | 0 | 6 | 2 | 0 | 7 | 1 | 0 | 5 | 0 |
| 11 | 1 | 4 | 1 | 2 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 2 |
| 12 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 7 | 0 |
| Frecuencias | 7 | 50 | 60 | 19 | 15 | 74 | 30 | 13 | 32 | 7 |
| % | 4.5 | 32.0 | 38.5 | 24.4 | 19.2 | 47.4 | 19.2 | 8.3 | 20.5 | 4.5 |

Una vez analizadas las actuaciones de los estudiantes en las doce sentencias y de acuerdo a la Tabla 6.1.15, podemos observar que sólo en el 4.5% de las resoluciones, los estudiantes no operan, dan la respuesta correcta basándose en que han reconocido la estructura interna de una identidad notable en la expresión. Los casos que dan lugar a estos porcentajes son debidos a las actuaciones del estudiante A13 en cinco sentencias y al estudiante A12 en dos sentencias. En el 32% de las resoluciones, los estudiantes muestran reconocer la estructura interna de una identidad notable en parte de la expresión y la aplican para operar en uno de los miembros. No reconocen algunas de las relaciones internas de la expresión que les hubiera permitido relacionar la estructura interna de ambos miembros. Estos dos porcentajes sumados se quedan por debajo del correspondiente a las respuestas basadas en operaciones. En el 38.5% de las resoluciones, los estudiantes muestran no tomar en consideración las relaciones ni la estructura interna de las expresiones.

En el 24.4% de las resoluciones los estudiantes modifican aplicando una identidad notable al reconocer la necesidad de modificar algunas relaciones internas para conseguir igual estructura interna en ambos miembros. En el 10.3% de las resoluciones, los estudiantes modifican sin reconocer relaciones internas entre los miembros, por tanto no utilizan ninguna identidad notable. Estas modificaciones están basadas en datos operativos. Al considerar las subcategorías MED, sumando los porcentajes de MED.1 y MED.3, no se alcanza el valor de 36,5% que suman RIN.1 y RIN.2, lo que indica que algunos estudiantes de los que se fijan en la estructura, en parte de las sentencias, no las utilizan para realizar las modificaciones pertinentes.

En el 47.4% de las resoluciones, los estudiantes resuelven correctamente, independientemente de si utilizan o no la identidad notable. En el 19.2% de las resoluciones, los estudiantes resuelven de forma incorrecta en uno de los miembros de la igualdad. Mientras que en el 8.3% de las resoluciones, los estudiantes resuelven incorrectamente en ambos miembros de la igualdad. El 20.5% de las posibilidades de resolución no tuvieron respuesta y el 4.5% se consideraron no codificables.

Entre los errores notables que hemos encontrado señalamos desarrollar el cuadrado de un producto como el cuadrado de una suma. Otros errores a destacar son desarrollar el cuadrado de una suma como suma de cuadrados y el cuadrado de una diferencia como diferencia de cuadrados.

### 6.1.6 Fortalezas y debilidades de la sesión 1

Una de las fortalezas de esta sesión es el equilibrio con el que están representadas las diferentes identidades notables así como el hecho de su valor de verdad: la mitad son verdaderas y la otra mitad falsas. Ahora bien esto mismo se transforma en una debilidad ya que cubrir todo el abanico exige la presencia de demasiadas sentencias. Hemos comprobado que son excesivas; a partir de la sentencia 7, muchos estudiantes ya no responden, bien por cansancio o por trabajar más lentos que el resto.

En este experimento de diseño buscábamos que los estudiantes comprobasen haciendo operaciones la veracidad o falsedad de expresiones numéricas basadas en identidades notables para que llegasen posteriormente a la generalización de las verdaderas, sin embargo esto actúa así mismo como una debilidad de la propuesta porque se induce a los estudiantes a operar. Se sugiere que en una próxima intervención se suprima esta indicación dejando solo "comprueba…".

## 6.2 Sesión 2

En la sesión 2 se proponen dos tareas a los estudiantes. A continuación atendemos en detalle al análisis de las respuestas de los estudiantes a las siete sentencias propuestas en la primera tarea. Sobre la segunda tarea solo se hace una breve mención al final dado que sólo cuatro de diecinueve estudiantes intentaron resolverla.

### 6.2.1 Categorías utilizadas para el análisis de la 1ª tarea. Sesión 2

Utilizamos dos categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la resolución de las sentencias trabajadas en la primera tarea de esta sesión. Estas categorías se detallan con sus correspondientes subcategorías en la Tabla 6.2.1; la primera está ligada al estudio del sentido estructural de los estudiantes y la segunda se centra en aquellos aspectos relacionados con errores y dificultades mostradas por los estudiantes, que nos permite realizar un seguimiento del trabajo realizado.

*Tabla 6.2.1*. Categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la sesión 2.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| COM<br>Completar expresiones para obtener una estructura interna y externa concreta | COM.1<br>Se completa la expresión obteniendo una sentencia con igual estructura interna en ambos miembros, sin realizar cálculos al reconocer relaciones internas entre los términos (aplica identidad notable). |
| | COM.2<br>Se completa la expresión obteniendo una sentencia con igual estructura interna en ambos miembros, utilizando para ello parte de las relaciones internas entre los términos. Se realizan cálculos. |
| | COM.3<br>Se completa la expresión sin atender a la estructura interna de ambos miembros, obteniendo en ambos miembros expresiones con diferente estructura interna. |
| RET<br>Realizar correctamente la sentencia dada | RET.1<br>Se realiza correctamente. |
| | RET.2<br>Se realiza parte de la sentencia correctamente y |

| | |
|---|---|
| | parte incorrectamente. |
| | RET.3<br>Se realiza incorrectamente la sentencia. |
| N<br>No realizar o no poder codificar la respuesta | NR<br>No se realiza.<br>NC<br>No codificable. |

### 6.2.2 Observaciones sobre la sesión 2

A esta sesión asisten diecinueve estudiantes. Algunas de las sentencias no son resueltas por todos los estudiantes y algunas respuestas dadas son consideradas no codificables dado que algunos estudiantes sólo completan parte de la sentencia dada. Aunque en algunos casos la parte que completan lo hacen correctamente, el hecho de dejar alguna caja vacía no nos permite clasificar sus respuestas de acuerdo a las subcategorías establecidas. Los datos de esta sesión se recogen de forma resumida en el Anexo D.

### 6.2.3 Indicación para la 1ª tarea de la sesión 2

La indicación dada a los estudiantes en la primera tarea de esta sesión es: *"Completa cada caja con aquellos números que hacen que la igualdad sea correcta. Justifica como lo has hecho"*.

### 6.2.4 Actuaciones de los estudiantes en la 1ª tarea de la sesión 2

Como hicimos para la sesión 1, en esta sección se recogen los resultados obtenidos al clasificar las producciones de los estudiantes utilizando las categorías anteriormente descritas. Para cada sentencia se recoge en una tabla las frecuencias con que las respuestas de los estudiantes caen bajo una misma subcategoría. Se muestran ejemplos de las distintas actuaciones de los estudiantes para ilustrar el discurso establecido y finalmente se hace una pequeña conclusión de lo ocurrido y de lo que consideramos más relevante en cada sentencia.

### Sentencia 1

$\left(5-\boxed{\_\_\_}\right)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot \boxed{\_\_\_} + 3^2$

Se trata de una igualdad incompleta. En el miembro izquierdo de la igualdad aparece una diferencia entre un número y un valor oculto (caja), elevada al cuadrado. En el miembro derecho aparece el minuendo del miembro izquierdo elevado al cuadrado, al que se le resta un producto de tres factores —el dos, el minuendo ya mencionado y un valor oculto—, y se le suma otro número elevado al cuadrado.

IN: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: simple. Respuesta única en ambas cajas.

*Resultados*

La sentencia 1 es resuelta por 17 estudiantes. La Tabla 6.2.2 muestra las frecuencias absolutas asignadas a cada subcategoría tras codificar las producciones de los estudiantes.

*Tabla 6.2.2*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 1

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 11 | 2 | 1 | 13 | 0 | 1 | 2 | 3 |

*Categoría COM*

En la Sentencia 1, once estudiantes (A02, A04, A06, A07, A12, A13, A14, A15, A17, A18, A19) completan la expresión obteniendo la estructura interna implicada, sin realizar cálculos. Por tanto creemos que han reconocido relaciones internas entre los términos (COM.1). Estos estudiantes muestran a través de su justificación haber utilizado una identidad notable. Algunos lo expresan enunciando en palabras la regla de la identidad y otros lo expresan simbólicamente escribiendo la igualdad algebraica $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ (ver Figura 6.2.1).

Estudiante A13

$$(5-\boxed{3})^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot \boxed{3} + 3^2$$

Explica He puesto el número 3 porque es el cuadrado de una diferencia.
$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$

*Figura 6.2.1*. Aplica identidad notable para obtener la estructura interna de la expresión.

Dos estudiantes (A09 y A16) completan la expresión obteniendo la misma estructura interna en ambos miembros, realizando algunos cálculos. Colocan los números correctos pero de acuerdo a su justificación se desprende que lo han hecho operativamente dado que basan sus justificaciones en el procedimiento operacional de la sentencia (COM.2, ver Figura 6.2.2). Entendemos que para informar su búsqueda de valores posibles han atendido a algunas relaciones internas de la sentencia.

Estudiante A16

$$(5-\boxed{3})^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot \boxed{3} + 3^2$$

Explica e ido probando número por número

*Figura 6.2.2*. Utiliza cálculos operativos para obtener la estructura interna.

Un estudiante (A05) completa la expresión sin atender a la estructura interna de ambos miembros por lo que obtiene una sentencia que no responde a una igualdad (COM.3, ver Figura 6.2.3).

Estudiante A05 $(5-\boxed{2})^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot \boxed{0} + 3^2$

*Figura 6.2.3*. Completa sin atender la estructura interna de ambos miembros.

*Categoría RET*

De los diecinueve estudiantes trece resuelven correctamente (ver Figuras 6.2.1 y 6.2.2). De los seis estudiantes restantes uno resuelve incorrectamente (ver Figura 6.2.3), dos estudiantes (A01 y A08) no resuelven y los datos de tres estudiantes (A03, A10 y A11) no son codificables dado que sólo completan una caja y la otra la dejan en blanco.

Conclusión

Si bien son mayoría los estudiantes que hacen correctamente esta actividad de la 1ª tarea de la sesión dos, aún son bastantes los que no lo hacen y presentan alguna dificultad, no responden de forma correcta o no realizan la actividad. Es posible que el tipo de actividad no habitual a lo que hacen en el aula les haya sorprendido y por tanto les cueste identificar la acción a realizar en la actividad.

## Sentencia 2

$$7^2 \cdot \left(\boxed{\phantom{00}} - 4\right) = 7^2 \cdot 20 - \boxed{\phantom{00}} \cdot 4$$

Esta sentencia en una igualdad incompleta. En el miembro izquierdo presenta un producto de dos factores, el primero es un número elevado al cuadrado, el segundo factor es una diferencia entre un valor ausente y un número. El miembro derecho de la igualdad está formado por una diferencia. El minuendo está compuesto por el producto de dos factores, uno de ellos coincide con el primer factor del miembro izquierdo. El sustraendo también está compuesto por un producto de dos factores, en este caso uno de ellos es un valor desconocido y el otro coincide con el sustraendo del segundo factor del miembro izquierdo.

IN: Propiedad distributiva-factor común

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con potencia $7^2$. Respuesta única en ambas cajas.

*Resultados*

La sentencia 2 es resuelta por 18 estudiantes. La Tabla 6.2.3 muestra las frecuencias absolutas de uso de cada subcategoría de acuerdo a la clasificación realizada de las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.2.3.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 2

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 13 | 0 | 4 | 13 | 2 | 2 | 1 | 1 |

*Categoría COM*

En esta sentencia trece estudiantes (A01, A03, A04, A06, A09, A10, A12, A13, A14, A16, A17, A18, A19) completan la expresión obteniendo la estructura interna de la misma y sin realizar cálculos. Reconocen relaciones internas entre los términos dados. Estos estudiantes confirman a través de su justificación que han percibido la identidad notable en uso, (COM.1, ver Figura 6.2.4).

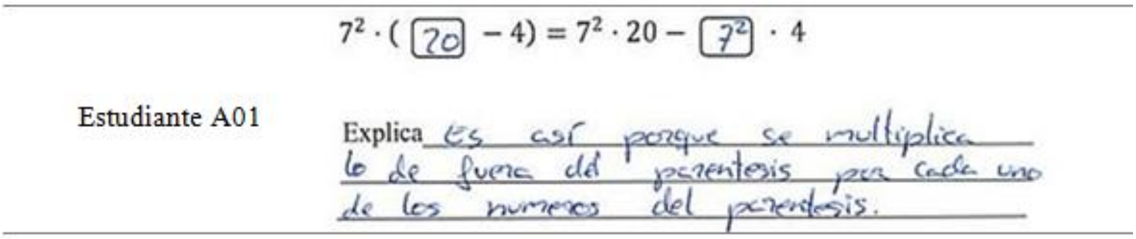



*Figura 6.2.4*. Aplica identidad notable para obtener la estructura interna de la expresión.

Cuatro estudiantes (A05, A07, A08 y A15) completan la expresión sin atender a la estructura interna de ambos miembros. La igualdad obtenida no es verdadera. Colocan números que no están en relación con los números dados en la misma (COM.3, ver Figura 6.2.5).

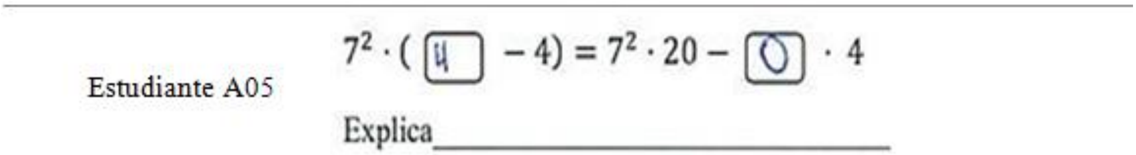



*Figura 6.2.5*. Completa sin atender a la estructura interna de ambos miembros.

*Categoría RET*

De los diecinueve estudiantes, trece resuelven correctamente (ver Figura 6.2.4). Dos estudiantes (A08 y A15) resuelven sólo parte correctamente, por ejemplo la actuación de A08 se recoge en la Figura 6.2.6. En este ejemplo el estudiante escribe como respuesta 20 en el miembro izquierdo de la sentencia y 1 en el miembro derecho. Siendo incorrecto el miembro derecho. Entendemos que su error procede de una interpretación incorrecta de la expresión del miembro izquierdo pues no considera que el primer factor multiplique a los dos términos que se operan en el paréntesis.

Estudiante A08

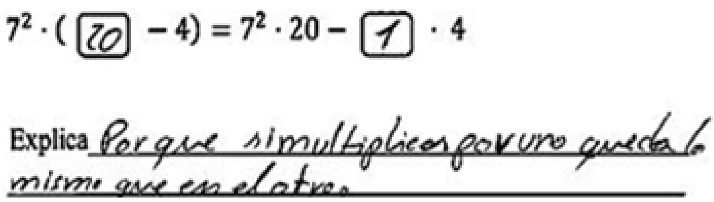



*Figura 6.2.6.* Completa sin atender la estructura interna de ambos miembros.

Dos estudiantes (A05 y A07) no resuelven de forma correcta (ver Figura 6.2.5). Un estudiante (A11) se abstiene de resolver esta sentencia y los datos de un estudiante (A02) se consideran no codificables, dado que no termina de completar las cajas.

*Conclusión*

Esta actividad ha proporcionado mayor número de actuaciones correctas por parte de los estudiantes. Este hecho puede estar influenciado por más de un motivo. Por una parte, la identidad notable implicada (propiedad distributiva-factor común) es la que se muestra como más familiar a los estudiantes de entre las consideradas. Por otra parte, el factor sorpresa del tipo de actividad puede haberse atenuado.

## Sentencia 3

$$21 \cdot \left(3 + \boxed{\_\_\_}\right) = \boxed{\_\_\_} \cdot 3 + 21 \cdot \boxed{\_\_\_}$$

Igualdad incompleta que presenta en el miembro izquierdo el producto de dos factores, uno de ellos es un número y el otro es la suma de un número y un valor desconocido. El miembro derecho está compuesto por la suma de dos productos de dos factores. El primer producto lo forman un valor desconocido y el primer sumando de la suma contenida en el miembro izquierdo. El segundo producto lo forma el primer factor del miembro izquierdo y un valor desconocido.

IN: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: Simple. La primera y tercera caja conllevan respuestas múltiples pero de igual valor para ambas cajas, la segunda caja conlleva respuesta única.

*Resultados*

La sentencia 3 es resuelta por 17 estudiantes. La Tabla 6.2.4 muestra las frecuencias absolutas obtenidas al codificar las respuestas de los estudiantes según cada una de las subcategorías.

*Tabla 6.2.4*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 3

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 14 | 2 | 1 | 16 | 1 | 0 | 2 | 0 |

*Categoría COM*

En esta sentencia catorce estudiantes (A01, A03, A06, A07, A09, A10, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19) completan la expresión, antes de realizar cálculo alguno, obteniendo la estructura interna correspondiente. Entendemos que han reconocido relaciones internas entre los términos y no necesitan realizar cálculos. (COM.1, ver Figura 6.2.7).

Estudiante A13

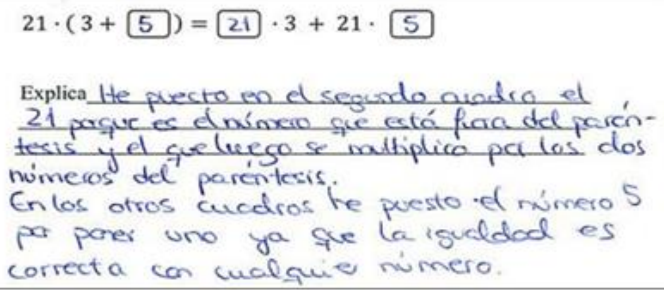
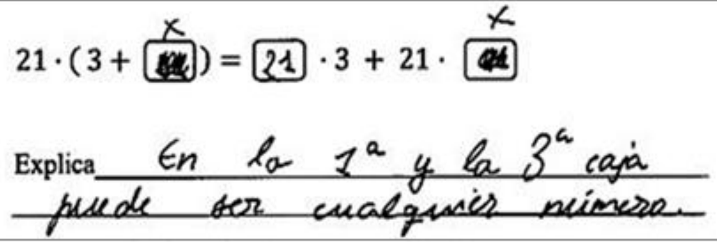



*Figura 6.2.7.* Aplica identidad notable para obtener la estructura interna de la expresión.

Entre estos catorce estudiantes, tres de ellos (A13, A15 y A19) muestran capacidad para generalizar datos numéricos, tal como lo hace el estudiante A13. Estos estudiantes aunque rellena las cajas, o espacios en blanco, utilizando un número concreto, justifican diciendo "…la igualdad es correcta con cualquier número". El estudiante A12 muestra capacidad para expresar con simbolismo algebraico la estructura de una expresión aritmética generalizando a partir de datos numéricos. Este estudiante al manipular la sentencia numérica dada, traslada sus conocimientos de simbolismo numérico a simbolismo algebraico, dado que rellena dos de los espacios en blanco utilizando la variable *'x'* y justifica escribiendo "En la 1ª y la 3ª caja puede ser cualquier número" (ver Figura 6.2.8).

Estudiante A12

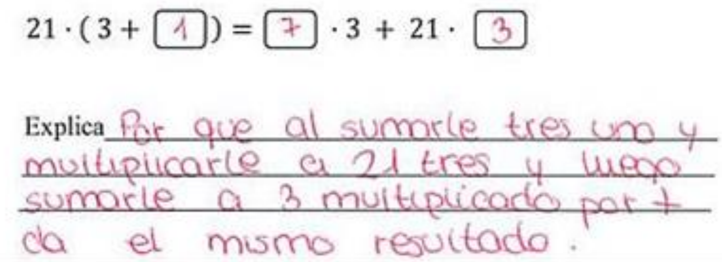

$21\cdot(3+\boxed{x}) = \boxed{21}\cdot 3 + 21\cdot\boxed{x}$

Explica En la 1ª y la 3ª caja puede ser cualquier número.

*Figura 6.2.8.* Capacidad para generalizar datos algebraicos a partir de numéricos.

Dos estudiantes (A04 y A05) completan la expresión obteniendo la misma estructura interna en ambos miembros y utilizando para ello parte de las relaciones internas existentes entre los términos. Ambos estudiantes realizan cálculos, colocan números variados que conservan la igualdad, han resuelto correctamente pero han realizado ensayos con valores numéricos para comprobar la veracidad de la sentencia (COM.2, ver Figura 6.2.9).

Estudiante A04

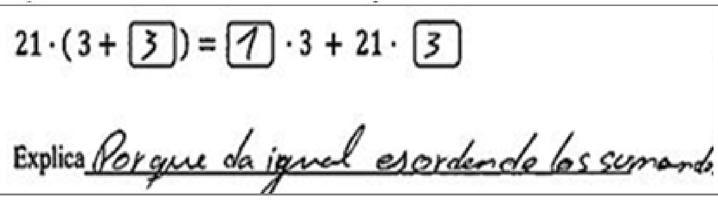

$21\cdot(3+\boxed{1}) = \boxed{7}\cdot 3 + 21\cdot\boxed{3}$

Explica Por que al sumarle tres uno y multiplicarle a 21 tres y luego sumarle a 3 multiplicado por 7 da el mismo resultado.

*Figura 6.2.9.* Utiliza cálculos operativos para obtener la estructura interna.

Un estudiante (A08) completa la expresión sin atender a la estructura interna de ambos miembros. La igualdad obtenida no es verdadera (COM.3, ver Figura 6.2.10).

Estudiante A08


$21\cdot(3+\boxed{3}) = \boxed{7}\cdot 3 + 21\cdot\boxed{3}$

Explica Porque da igual es orden de los sumand.

*Figura 6.2.10.* Completa sin atender la estructura interna de ambos miembros.

*Categoría RET*

De los diecinueve estudiantes, dieciséis resuelven correctamente (ver Figura 6.2.7, 6.2.8 y 6.2.9). Un estudiante (A08) resuelve sólo parte correctamente. Dos estudiantes (A02 y A11) se abstienen de resolver esta sentencia.

*Conclusión*

Como en la sentencia anterior, creemos que ha facilitado que los estudiantes en gran mayoría hayan realizado la actividad de forma adecuada el que la identidad notable implicada sea la propiedad distributiva. En este caso, el ser la expresión simple, también ha podido influir favorablemente.

## Sentencia 4

$$\boxed{\_\_\_}^{2}-11^{2}=\left(\boxed{\_\_\_}-11\right)\cdot\left(8+\boxed{\_\_\_}\right)$$

Igualdad incompleta cuyo miembro izquierdo es la diferencia de dos valores elevados al cuadrado, el primero de dichos valores está oculto. En el miembro derecho se presenta un producto de dos factores, uno de ellos es una diferencia entre dos valores, uno desconocido y otro coincidente con el número que aparece en el miembro izquierdo; el otro factor, es una suma de dos valores estando el segundo oculto.

IN: Producto de una suma por una diferencia o diferencia de cuadrados.

Tipo de expresión: Simple. Las tres cajas conllevan respuestas únicas.

*Resultados*

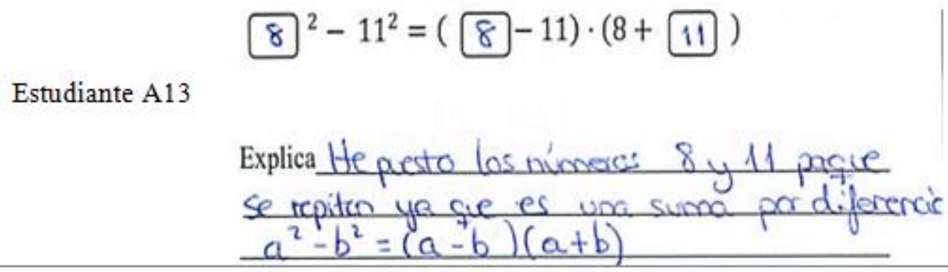
La sentencia 4 es resuelta por 16 estudiantes. La Tabla 6.2.5 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que clasificamos las producciones de los estudiantes.

*Tabla 6.2.5*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 4

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 13 | 0 | 3 | 13 | 0 | 3 | 3 | 0 |

*Categoría COM*

Trece estudiantes (A01, A02, A03, A06, A08, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A19) completan la expresión obteniendo la estructura interna de la diferencia de cuadrados, sin realizar cálculos previos. Creemos que reconocen las relaciones internas entre los términos (COM.1, ver Figura 6.2.11). Las justificaciones proporcionadas, nos confirman nuestra creencia sobre que los estudiantes han percibido la identidad notable.

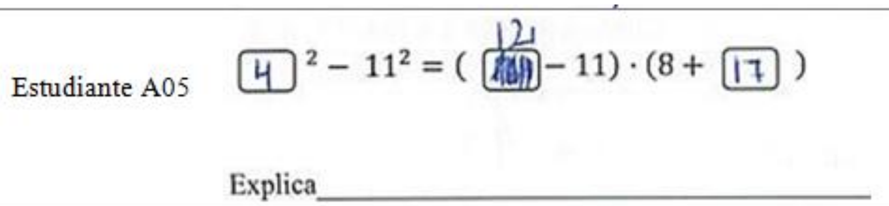

Estudiante A13

$\boxed{8}^2 - 11^2 = (\boxed{8} - 11)\cdot(8 + \boxed{11})$

Explica He puesto los números: 8 y 11 porque se repiten ya que es una suma por diferencia
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

*Figura 6.2.11*. Aplica identidad notable para obtener la estructura interna de la expresión.

Tres estudiantes (A04, A05 y A07) completan la expresión sin atender a la estructura interna de la sentencia, dado que colocan números que no están en relación con los números dados en la misma, como el ejemplo que se muestra a continuación. La igualdad obtenida no es verdadera (COM.3, ver Figura 6.2.12).


Estudiante A05

$\boxed{4}^2 - 11^2 = (\boxed{121} - 11)\cdot(8 + \boxed{17})$

Explica

*Figura 6.2.12.* Completa sin atender la estructura interna de ambos miembros.

*Categoría RET*

De los diecinueve estudiantes, trece resuelven correctamente (ver Figura 6.2.11) y tres estudiantes (A04, A05 y A07) no resuelven correctamente. Se observa que resuelven la sentencia por ensayo y error (ver Figura 6.2.12). Tres estudiantes (A09, A10 y A18) se abstienen de resolver esta sentencia.

*Conclusión*

*S*e percibe, al observar los resultados de la tabla 6.2.5 que los estudiantes que no perciben la identidad involucrada en esta expresión no llegan por ensayo y error a encontrar los valores que hacen cierta esta sentencia. De este modo, el número de respuestas que caen bajo la categoría COM.1 es el mismo que el que cae bajo la RET.1, siendo además los mismos estudiantes. Es decir en este caso percibir la estructura lleva asociado no cometer errores al completar la expresión.

## Sentencia 5

$$\left(2\cdot 7+\boxed{\_\_\_}\right)^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\boxed{\_\_\_}\cdot 11$$

Igualdad incompleta en la que aparece en el miembro izquierdo el cuadrado de una suma, en la que el primer sumando es el producto de dos números y el segundo sumando es un valor oculto. El miembro derecho es una suma de tres sumandos, uno de ellos es el cuadrado del primer sumando del miembro izquierdo, otro es otro número al cuadrado y el último es el producto del doble de un elemento oculto por un número que coincide con el sumando que aparece elevado al cuadrado.

IN: Cuadrado de la suma

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con producto $2\cdot 7$ Respuestas únicas en ambas cajas.

*Resultados*

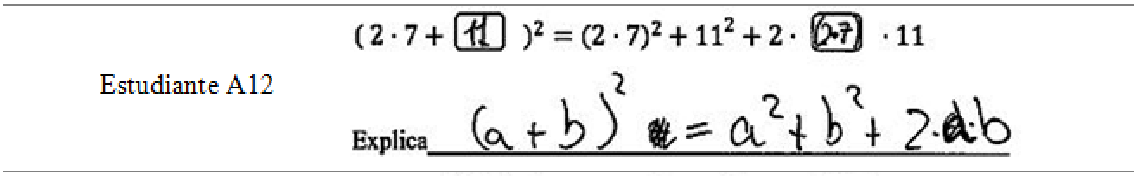
La sentencia 5 es resuelta por 10 estudiantes. La Tabla 6.2.6 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que se clasifican las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.2.6*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 5

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 4 | 0 | 5 | 4 | 4 | 1 | 9 | 1 |

*Categoría COM*

En esta sentencia cuatro estudiantes (A06, A12, A13 y A15) completan la expresión atendiendo a la estructura interna subyacente, sin necesidad de realizar cálculos. En estos casos los estudiantes han reconocido relaciones internas entre los términos, dado que utilizan una identidad notable para justificar la forma de completar la sentencia (COM.1, ver Figura 6.2.13).

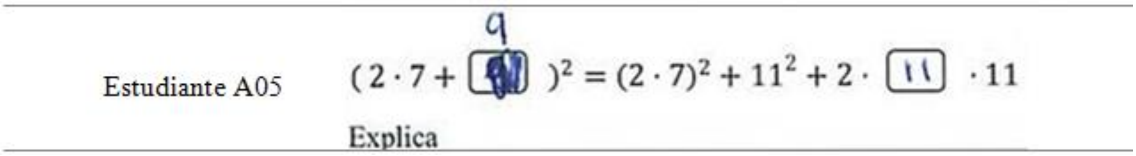

Estudiante A12

$(2\cdot 7+\boxed{11})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{2\cdot 7}\cdot 11$

Explica $(a+b)^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$

*Figura 6.2.13.* Aplican identidad notable para obtener la estructura interna de la expresión.

Cinco estudiantes (A05, A08, A09, A14 y A19) completan la expresión sin atender a la estructura interna de ambos miembros. La igualdad obtenida no es verdadera. Colocan en la misma números que no están en relación con los dados (COM.3, ver Figura 6.2.14).


Estudiante A05

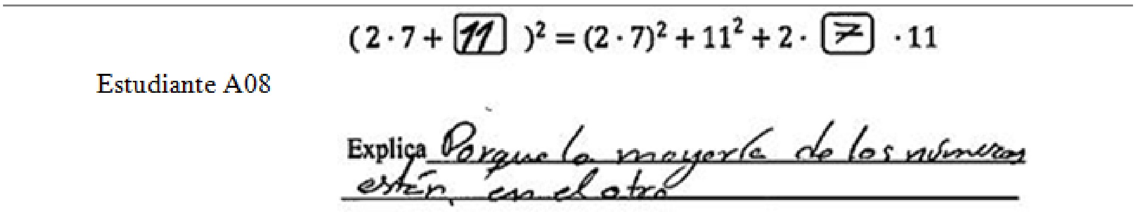
$(2\cdot 7+\boxed{9})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{11}\cdot 11$

Explica

*Figura 6.2.14.* Completa sin atender la estructura interna de ambos miembros.

*Categoría RET*

De los diecinueve estudiantes, cuatro (A06, A12, A13 y A15) resuelven correctamente (ver Figura 6.2.13). Cuatro estudiantes (A08, A09, A14 y A19) resuelven parte correctamente, colocan 7 en lugar de 2·7 en la segunda caja; parece que confunden el 2 del doble producto que está fuera de la caja con el término compuesto 2·7 y lo omiten (Ver Figura 6.2.15).


Estudiante A08

$(2\cdot 7+\boxed{11})^2=(2\cdot 7)^2+11^2+2\cdot\boxed{7}\cdot 11$

Explica Porque la mayoría de los números están en el otro

*Figura 6.2.15.* Resuelve parte correctamente.

Un estudiante (A05) resuelve incorrectamente (ver Figura 6.2.14). Nueve estudiantes se abstienen de resolver esta sentencia y los datos de un estudiante (A11) son no codificables.

*Conclusión*

Esta sentencia ha sido realizada por un número menor de estudiantes. Se reduce drásticamente el número de aquellos que completan correctamente, respecto a la sentencia anterior. Puede suceder que en este punto estén cansados y también es posible que esta sentencia les resulte menos familiar que las anteriores, la presencia del número dos en el primer sumando formando parte del elemento compuesto puede proporcionar cierta complejidad al reconocimiento de la estructura interna.

## Sentencia 6

$$\left(5-3\cdot\boxed{\_\_\_}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot3\cdot\boxed{\_\_\_}+\left(3\cdot\boxed{\_\_\_}\right)^2$$

Igualdad incompleta cuyo miembro izquierdo presenta el cuadrado de la diferencia de un número y el producto de otro número por un valor oculto. En el segundo miembro aparece el minuendo de la diferencia contenida en el miembro izquierdo, elevado al cuadrado, menos el producto de tres números y un valor oculto, coincidiendo dos de dichos números con los que aparecen en el miembro izquierdo. A ello se le suma el cuadrado del producto de dos factores uno de los cuales coincide con el número contenido en el sustraendo de la diferencia contenida en el miembro izquierdo.

IN: Cuadrado de la Diferencia

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con producto $3\cdot\boxed{\_\_\_}$ donde uno de los términos es una caja con valor desconocido. Respuesta múltiple, de igual valor para las tres cajas.

*Resultados*

La sentencia 6 es resuelta por 9 estudiantes. La Tabla 6.2.7 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que caen las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.2.7.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 6

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 7 | 0 | 1 | 7 | 1 | 0 | 10 | 1 |

*Categoría COM*

En esta sentencia siete estudiantes (A02, A06, A08, A12, A13, A14 y A19) completan la expresión obteniendo la estructura interna correspondiente. No realizan cálculos por lo que suponemos que reconocen relaciones internas entre los términos (COM.1, ver Figura 6.2.16).

Tanto el estudiante A12 como el A13 reconocen que cualquier número es útil para cumplir la igualdad (ver Figuras 6.2.16 y 6.2.17).

Estudiante A13

$$(5-3\cdot\boxed{4})^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \boxed{4} + (3\cdot \boxed{4})^2$$

Explica He puesto el número 4 porque la igualdad es correcta con cualquier número.

*Figura 6.2.16.* Aplica identidad notable para obtener la estructura interna de la expresión.

El estudiante A12 utiliza simbolismo algebraico para completar la igualdad mostrando así capacidad para expresar con simbolismo algebraico la estructura de una expresión aritmética la cual generaliza a partir de datos numéricos (ver Figura 6.2.17).

Estudiante A12

$$(5-3\cdot\boxed{x})^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \boxed{x} + (3\cdot \boxed{x})^2$$

Explica Cualquier número sirve para cumplir la igualdad.

*Figura 6.2.17*. Generaliza datos algebraicos a partir de datos numéricos.

Un estudiante (A16) completa la expresión sin atender a la estructura interna de ambos miembros. La igualdad obtenida no es verdadera (COM.3, ver Figura 6.2.18).

Estudiante A16

$$(5-3\cdot\boxed{2})^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \boxed{2} + (3\cdot \boxed{11})^2$$

Explica____________________

*Figura 6.2.18.* Completa sin atender la estructura interna de ambos miembros.

*Categoría RET*

De los diecinueve estudiantes siete resuelven correctamente (ver Figura 6.2.16 y 6.2.17). Un estudiante (A16) resuelve sólo parte correctamente, dado que en la tercera caja colocan un 11 en lugar de 2. Los datos de un estudiante (A15) se consideran no codificables. Diez estudiantes se abstienen de resolver esta sentencia.

*Conclusión*

Esta sentencia, en la que está involucrado el cuadrado de una diferencia y que presenta tres elementos ocultos, proporciona mejores resultados, por parte de los estudiantes, que la anterior en la que estaba involucrado el cuadrado de una suma y solo aparecían dos elementos ocultos. Sin embargo, el elemento compuesto no lleva el número 2 por lo que el elemento que creemos ha creado confusión en la sentencia anterior ha desaparecido y con él uno de los obstáculos.

## Sentencia 7

$$\left(4^3 - 7\right)\cdot\left(4^3 + \boxed{\quad}\right) = \boxed{\quad}^2 - \boxed{\quad}^2$$

En esta igualdad incompleta aparece en el miembro izquierdo el producto de dos factores, una diferencia y una suma. Ambas tienen como primer término el cubo de un número. En la suma el segundo sumando se encuentra oculto. El segundo miembro de la igualdad es la diferencia entre dos números ocultos elevados al cuadrado.

IN: Producto de suma por diferencia.

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con potencia $4^3$. Las cajas conllevan respuesta única.

*Resultados*

La sentencia 7 es resuelta por 10 estudiantes. La Tabla 6.2.8 muestra las frecuencias absolutas de las subcategorías utilizadas en la organización de las respuestas de los estudiantes.

*Tabla 6.2.8.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 7

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 9 | 3 |

*Categoría COM*

Seis estudiantes (A01, A06, A11, A12, A13, A14) completan la expresión obteniendo la estructura interna implícita, no realizan cálculos, por lo que entendemos que reconocen relaciones internas entre los términos y aplican una identidad notable (COM.1, ver Figura 6.2.19). Al rellenar las cajas con los números correctos y hacer mención de la propiedad que guarda la estructura interna de la misma, muestran que han reconocido la estructura interna de la sentencia dada.

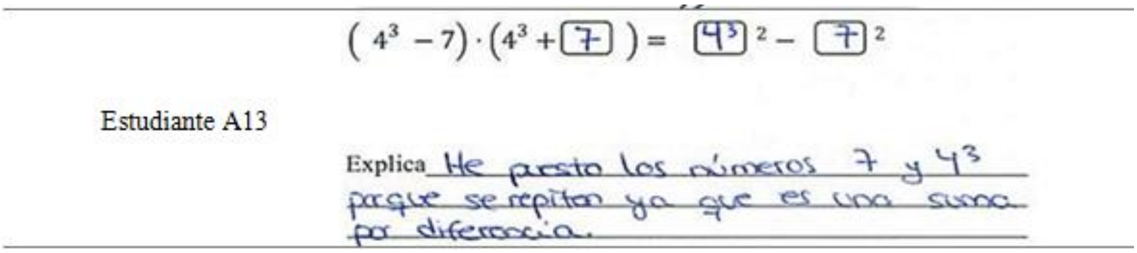



*Figura 6.2.19.* Aplica identidad notable para obtener la estructura interna de la expresión.

Un estudiante (A08) completa la expresión atendiendo a algunas de las relaciones internas presentes en la igualdad y por la justificación dada parece no haber utilizado cálculos para resolver la sentencia, sin embargo la igualdad que obtiene no es verdadera porque en la segunda caja coloca el número 4 en lugar de $4^3$ (COM.2, ver Figura 6.2.20). Su dificultad parece asociada a la presencia de un término compuesto y no tanto a la percepción de la estructura de la igualdad dada.

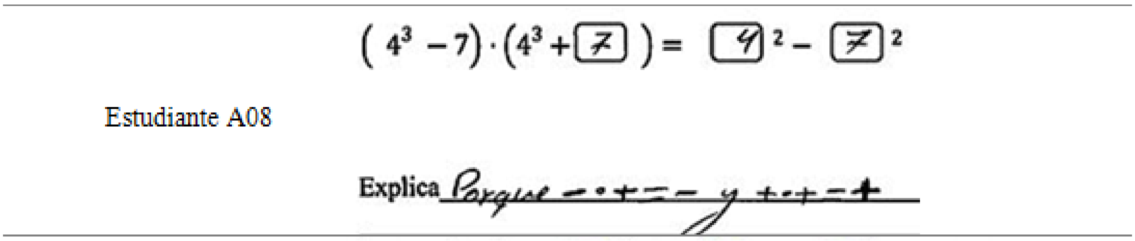



*Figura 6.2.20.* Completa atendiendo a algunas relaciones internas

*Categoría RET*

De los diecinueve estudiantes, seis resuelven correctamente (ver Figura 6.2.19). Un estudiante (A08) resuelve parte correctamente (ver Figura 6.2.20). Las respuestas de tres estudiantes (A02, A17 y A18) se consideran no codificables dado que no completan la segunda y tercera cajas. Nueve estudiantes se abstienen de resolver esta sentencia.

*Conclusión*

Esta sentencia ha proporcionado pocas respuestas de los estudiantes, la mayor parte de ellas correctas. Sucede como en otros casos que la percepción de la identidad notable presente en la expresión conlleva la realización de la actividad sin errores.

### 6.2.5 Análisis general de los resultados de la tarea 1ª de la Sesión 2

En esta sección se realiza una recopilación de los resultados del análisis de las actuaciones mostradas por los estudiantes en la resolución de las sentencias de la primera tarea presentadas en el punto anterior. La Tabla 6.2.9 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías utilizadas para clasificar las producciones de los estudiantes. Esta tabla nos proporciona información de las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de la Sesión 2.

*Tabla 6.2.9*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sesión 2.

| Sentencia | COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 11 | 2 | 1 | 13 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 13 | 0 | 4 | 13 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 14 | 2 | 1 | 16 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 4 | 13 | 0 | 3 | 13 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| 5 | 4 | 0 | 5 | 4 | 4 | 1 | 9 | 1 |
| 6 | 7 | 0 | 1 | 7 | 1 | 0 | 10 | 1 |
| 7 | 6 | 0 | 1 | 6 | 1 | 0 | 9 | 3 |
| Frecuencias | 68 | 4 | 16 | 72 | 9 | 7 | 36 | 9 |
| % | 51.1 | 3.0 | 12.0 | 54.1 | 6.8 | 5.2 | 27.1 | 6.8 |

En la Tabla 6.2.9 se observa que en el 51,1% de las sentencias, los estudiantes completan la expresión obteniendo la estructura interna involucrada, sin realizar cálculos. Reconocen relaciones internas entre los términos, dado que hacen uso de la identidad notable para la justificación. Sólo en el 3,0% de los casos, los estudiantes completan la expresión obteniendo la misma estructura interna en ambos miembros y utilizando para ello parte de las relaciones internas entre los términos y algunos cálculos. En el 12% de las sentencias, los estudiantes no muestran atender a la estructura interna de ambos miembros.

Las justificaciones de los estudiantes que refieren a la estructura interna de la expresión son variadas. Algunos estudiantes escriben una igualdad algebraica para expresar dicha estructura interna, por ejemplo escriben porque $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, otros se expresan refiriéndose a la propiedad de la identidad notable diciendo "lo he averiguado utilizando las identidades notables, el primero al cuadrado menos el doble producto del primero por el segundo más el segundo al cuadrado” o con el nombre que identifica la propiedad diciendo “he puesto el 3 porque es el cuadrado de una diferencia”. Otros estudiantes muestran dificultades para recordar o utilizar la terminología propia de las identidades notables que están utilizando, por lo que se expresan a través de indicaciones en las que con palabras propias describen el procedimiento empleado.

Una de las actuaciones relevantes en esta tarea se da en las sentencias 3 y 6, que son sentencias que requieren ser completadas con un término múltiple lo cual algunos estudiantes realizan, mostrando capacidad para generalizar y expresar algebraicamente relaciones numéricas. En estos casos justifican diciendo que cualquier número es útil para cumplir la igualdad.

En cuanto a realizar o no correctamente la tarea, se percibe que un 54,1% de las respuestas de los estudiantes fueron correctas, en un 6,8% de las sentencias encontraron dificultades para completar alguno de los dos miembros de la sentencia y el 5,2% de las sentencias fueron resueltas incorrectamente. Un 27,1% de las sentencias no fueron resueltas y el 6,8% de las respuestas se consideran no codificables.

En esta sesión se han dado diferencias y similitudes entre algunas de las sentencias que involucran la misma identidad notable. Por ejemplo, en la sentencia 4 y la sentencia 7 que involucran el producto de suma por diferencia, observamos que la primera es resuelta correctamente por trece estudiantes, haciendo uso de la identidad notable, mientras que la segunda sólo es resuelta por seis estudiantes. Consideramos que esta diferencia puede deberse a que la sentencia 4 es un tipo de expresión simple mientras que la sentencia 7 es un tipo de expresión que involucra términos compuestos con potencia.

En cuanto a la sentencia 1 y la sentencia 6, ambas conllevan la identidad notable cuadrado de la diferencia. Al comparar los resultados observamos que la sentencia 1 es resuelta por once estudiantes que hacen uso de identidad notable, mientras que en la sentencia 6, siete estudiantes resuelven correctamente haciendo uso de la identidad notable. Consideramos que esta diferencia también se debe a que la sentencia 1 es un tipo de expresión simple mientras que la sentencia 6 es un tipo de expresión que involucra términos compuestos, en este caso con producto.

Al contrastar las sentencias 2 y 3 que involucran la propiedad distributiva-factor común, observamos el mismo resultado aunque en este caso la diferencia es mínima. La sentencia 2 es resuelta correctamente por trece estudiantes que hacen uso de la propiedad, la cual involucra términos compuestos con potencia. En la sentencia 3, catorce estudiantes resuelven correctamente haciendo uso de la propiedad, la misma está en su forma simple.

La sentencia que más dificultad ha presentado es la 5, en la cual sólo 4 estudiantes resuelven correctamente haciendo uso de la identidad notable. Esta sentencia involucra la identidad notable cuadrado de la suma y el tipo de expresión es compuesta con producto. En este caso no se cuenta con una sentencia simple con la que contrastar debido a la similitud de esta identidad con el cuadrado de la diferencia y a que no queríamos hacer la tarea más extensa.

### 6.2.6 Análisis y resultados de la 2ª tarea. Sesión 2

La tarea 2 conlleva expresiones que sólo incluyen el miembro izquierdo, formadas por números, cajas y signos operacionales, donde se debe completar la igualdad colocando el miembro derecho con los respectivos números, cajas y signos operacionales. En el caso de la tarea 2, la caja actúa como un símbolo que forma parte de la sentencia y no como una incógnita a averiguar.

**Indicación para la 2ª tarea de la sesión 2**

La indicación dada a los estudiantes es: “Completa las igualdades con expresiones equivalentes a las dadas. Utiliza para ello números, cajas y operaciones”.

**Resultados de la Tarea 2**

Dado que sólo 4 estudiantes de diecinueve resolvieron la tarea 2, no hemos considerado hacer la descripción detallada por categorías de estos resultados.

Por su forma de trabajar, entendemos que los cuatro estudiantes que han resuelto la tarea interpretan la indicación de formas diferentes. El estudiante A12 completa la expresión faltante con la estructura interna que corresponde a la identidad notable cuadrado de una diferencia (ver Figura 6.2.21).

Estudiante A12 $(\square - 2\cdot 5)^2 = \square^2 - 2\cdot 2\cdot 5\cdot \square + (2\cdot 5)^2$

*Figura 6.2.21*. Completa la expresión faltante con la estructura interna de la misma.

El estudiante A06 completa la expresión obteniendo la misma estructura interna que en el miembro izquierdo (ver Figura 6.2.22).

Estudiante A06 $\square^2 + 2\cdot 7\cdot \square + 5^2 = \square\cdot\square + 14\cdot\square + 5\cdot 5$

*Figura 6.2.22*. Completa la expresión obteniendo la misma estructura interna.

Los estudiantes A11 y A14 completan  la expresión faltante considerando que deben poner solamente números y signos operacionales. Por tanto dan valor a las cajas completándolas en la expresión dada con los números correspondientes y a partir de esta expresión completan el miembro derecho de la misma (ver Figura 6.2.23).

Estudiante A14 $\boxed{7}^2 + 2\cdot 7\cdot \boxed{5} + 5^2 = (7+5)^2$

*Figura 6.2.23.* Consideran que deben poner sólo números y signos operacionales.

### 6.2.7 Fortalezas y debilidades de la sesión 2

En esta sesión suponemos varias fortalezas. Una de ellas es el proponer tareas que abarcan las diferentes identidades notables y otra el proponer en la tarea 2 una visión de las mismas que creemos con grado de dificultad mayor que en la primera, ya que se trata de completar con toda una estructura.

Consideramos como debilidad el haber supuesto que las tareas requerirían menos tiempo a los estudiantes, lo que pudo ser la causa de que pocos estudiantes resolvieran la tarea 2. Otra causa de este hecho pudo ser la mayor dificultad de la tarea. Esta idea constituye una vía para indagar si efectivamente el grado de la dificultad de estos dos tipos de tareas hace a un gran número de estudiantes desistir de realizar las tareas del tipo de la 2.

Pensamos que se podrían proponer mezcladas actividades de la 1ª y 2ª tareas para un estudio posterior.

Una debilidad que también confrontamos es que en la mayor parte de las actividades las expresiones aparecen propuestas en el mismo orden en el que se aprenden las identidades notables (ejemplo, expresiones contraídas de cuadrado de un binomio en miembro izquierdo de la igualdad y expandida a la derecha), esto puede afectar en el desempeño de los estudiantes. Proponemos que en un futuro estudio se equilibre esta forma de presentar las expresiones, proponiendo una forma y su contraria, es decir escribir la forma expandida antes que la contraída y viceversa.

## *6.3 Sesión 3*

En la sesión dos se propusieron dos tareas. En este apartado se hace una descripción primeramente de cada una de las ocho actividades propuestas en la primera tarea de la Sesión 3. A continuación de ésta se realiza la descripción de la tarea 2, la cual es una tarea de ampliación que fue resuelta por catorce estudiantes.

### 6.3.1 Categorías utilizadas para el análisis de la 1ª tarea. Sesión 3

En la Sesión 3 hemos utilizado tres categorías para el análisis de la resolución de cada actividad: REN, ESA y RET (ver Tabla 6.3.1). Las dos primeras categorías están ligadas al estudio del sentido estructural de los estudiantes. La tercera categoría, ya utilizada en el análisis de los datos de las sesiones previas, se centra en aquellos aspectos relacionados con errores y dificultades mostradas por los estudiantes y nos permite realizar un seguimiento del trabajo realizado.

*Tabla 6.3.1*. Categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la Sesión 3.

| Categorías | Subcategorías |
| --- | --- |
| REN<br>Reproducir numéricamente la estructura dada | REN.1<br>Se reproduce totalmente la estructura en invariantes y cuasivariables.<br>REN.2<br>Se reproduce la estructura solo parcialmente<br>REN.2a: Se reproduce invariantes numéricos y no cuasivariables.<br>REN.2b: Se reproduce cuasivariables y no invariantes numéricos.<br>REN.3<br>Solo se reproduce la estructura externa. |

*Tabla 6.3.1*. Categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la Sesión 3.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| ESA<br>Expresar<br>en simbolismo algebraico la estructura dada | ESA.1<br>Se expresa con simbolismo algebraico la estructura dada.<br>ESA.2<br>Se expresa con simbolismo algebraico la estructura considerada por el estudiante.<br>ESA.2a: Se expresan con simbolismo algebraico invariantes y no cuasivariables.<br>ESA.2b: Se expresan con simbolismo algebraico las cuasivariables, pero no invariantes numéricos.<br>ESA.3<br>Solo se expresa la estructura externa |
| RET<br>Realizar la actividad dada correctamente | RET.1<br>Se realiza correctamente.<br>RET.2<br>Se realiza parte de la actividad correctamente y parte incorrectamente.<br>RET.3<br>Se realiza incorrectamente la actividad. |
| N<br>No realizar o no poder codificar la respuesta. | NR<br>No se realiza.<br>NC<br>No codificable. |

### 6.3.2 Observaciones sobre la sesión 3

A esta sesión asisten diecinueve estudiantes. En esta sesión se da la circunstancia de una gran participación en respuestas de los estudiantes.

### 6.3.3 Indicación para la 1ª tarea de la sesión 3

El enunciado de la primera tarea propuesta en esta sesión es: "*Las expresiones que hay en cada uno de los recuadros tienen la misma estructura. Debajo de cada recuadro, escribe tres expresiones que tengan la misma estructura que las dadas: dos sólo con números y una sólo con letras*".

### 6.3.4 Actuaciones de los estudiantes

Como en las sesiones anteriores, presentamos una descripción de cada una de las actividades propuestas a los estudiantes para su realización; se recoge la clasificación de las respuestas de los estudiantes en las subcategorías correspondientes; se describen las actuaciones de los estudiantes según dichas subcategorías, ilustrándose con ejemplos que consideramos representativos de la descripción y; finalmente, se hace una pequeña conclusión de lo acaecido en cada actividad realizada.

**Recuadro 1**

$$(5-3)(5+3)$$
$$(7-4)(7+4)$$
$$(24-19)(24+19)$$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa es un invariante. Se trata del producto de la diferencia y de la suma de dos números.
2. No hay invariantes numéricos, todos los números son cuasivariables.

*Resultados*

La actividad correspondiente al recuadro 1 es resuelta por 17 estudiantes. La Tabla 6.3.2 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que recogen la clasificación de las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de esta actividad.

*Tabla 6.3.2.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 1

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2a | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 15 | 2 | 0 | 0 | 16 | 1 | 0 | 0 | 15 | 2 | 0 |

*Categoría REN*

Quince estudiantes (A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A19) reproducen la estructura de las expresiones numéricas dadas en invariantes y cuasivariables (REN.1) (ver Figura 6.3.1).

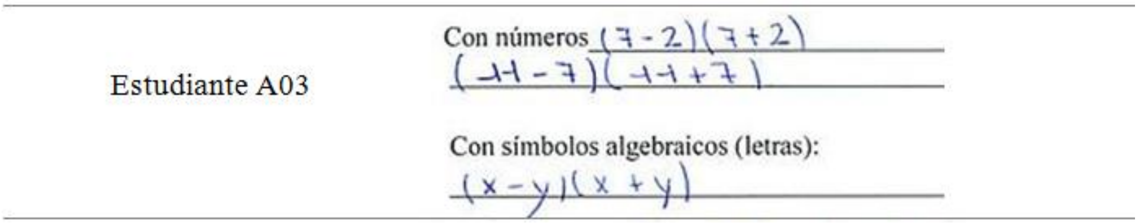



*Figura 6.3.1*. Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Observamos que A03 en la primera expresión $(7-2)(7+2)$ que ha propuesto, ha colocado 7 como primer término de cada factor y 2 como segundo término de cada factor, conservando así la estructura externa de la expresión dada y las relaciones internas entre los términos de la expresión.

Dos estudiantes (A09 y A20) no reproducen cuasivariables pero sí el invariante de la estructura externa (REN.2a). El estudiante A09 (Figura 6.3.2) ha generado el producto de dos factores, cada uno de ellos es la operación de dos números, en el primer factor la operación entre los dos números es de resta y en el segundo caso es de suma, sin embargo, no mantiene la relación que existe entre dichos pares de números en los dos factores.

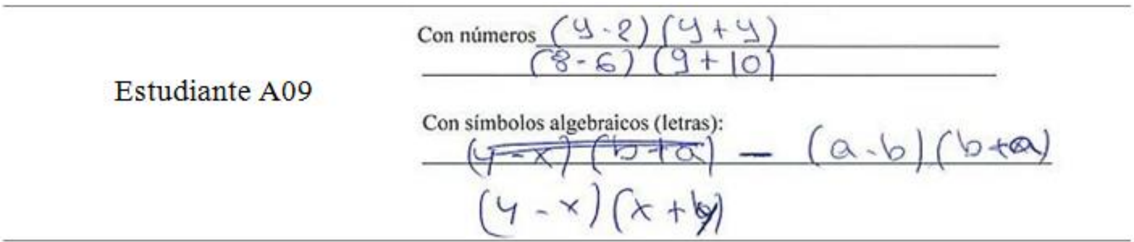


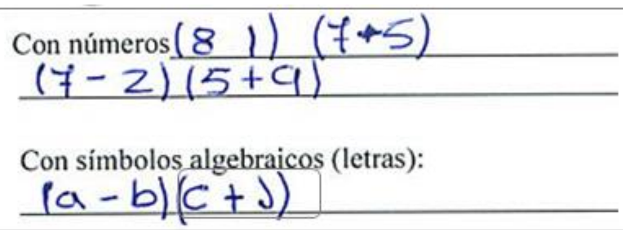

*Figura 6.3.2*. No reproduce cuasivariables pero si la estructura externa

*Categoría ESA*

Dieciséis estudiantes (A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A19) expresan con simbolismo algebraico la estructura presente en las expresiones numéricas (ESA.1, ver Figura 6.3.1). El estudiante A03 (ver Figura 6.3.1) ha expresado los primeros términos de los factores de cada expresión con un mismo símbolo algebraico, en este caso, la variable *x*. De igual forma lo ha hecho para los segundos términos de la expresión propuesta, expresándolos por un mismo símbolo algebraico, en este caso la variable *y*.

Un estudiante (A20) preserva el invariante de la estructura externa pero no expresa cuasivariables (ESA.2a, Figura 6.3.3). La expresión algebraica está de acuerdo con la estructura externa de las expresiones pero no reconoce el patrón de relaciones internas que se repite en las tres expresiones.

Estudiante A20


Con números (8 1) (7+5)
(7 - 2)(5+9)

Con símbolos algebraicos (letras):
(a - b)(c + d)

*Figura 6.3.3*. Reproduce estructura externa de una de las expresiones, no expresa cuasivariables.

*Categoría RET*

Quince estudiantes realizan la actividad correctamente. Reproducen la estructura dada en expresiones numéricas de forma exitosa y a continuación la expresan en simbolismo algebraico (ver Figura 6.3.1).

Dos estudiantes (A09 y A20) no realizan la actividad de forma correcta, dado que al reproducir la estructura no reproducen cuasivariables. El estudiante (A09) no reproduce de forma correcta la estructura en expresiones numéricas, pero sí la expresa con simbolismo algebraico $(a-b)(b+a)$ . Si bien cambia en el segundo factor los sumandos, creemos que está aplicando la propiedad conmutativa.

*Conclusión*

Un gran número de estudiantes reproduce la estructura externa que hemos considerado un invariante, pues se mantiene en todas las expresiones del recuadro 1. Al escribir la forma algebraica de la estructura, los estudiantes que no logran hacerlo de forma correcta, han expresado, no obstante, la misma de acuerdo con la falta de percepción que han tenido de las cuasivariables.

## Recuadro 2

$4^2 + 7^2 + 2 \cdot 4 \cdot 7$
$6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10$
$23^2 + 15^2 + 2 \cdot 23 \cdot 15$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa es un invariante. Es la suma de tres elementos, los dos primeros son números al cuadrado, el tercero es un producto de tres números, dos de ellos son los mismos que los primeros sumandos, sin cuadrado.
2. El número dos es un invariante numérico, el resto de los números son cuasivariables.

*Resultados*

La actividad 2 es resuelta por 17 estudiantes. La Tabla 6.3.3 muestra las frecuencias absolutas correspondientes a la codificación de las actuaciones de los estudiantes en esta actividad.

*Tabla 6.3.3*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 2

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2a | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 11 | 0 | 2 | 4 | 10 | 0 | 3 | 4 | 10 | 7 | 0 |

*Categoría REN*

Once estudiantes (A02, A03, A05, A06, A07, A10, A11, A12, A13, A14, A19) reproducen la estructura de estas expresiones en cuasivariables e invariantes (REN.1, ver Figura 6.3.4).

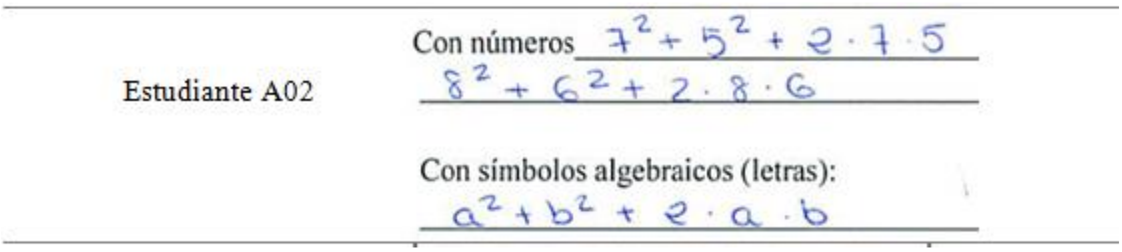



*Figura 6.3.4.* Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Dos estudiantes (A04 y A08) reproducen la estructura externa y las cuasivariables pero no el invariante numérico (REN.2b, ver primer recuadro en Figura 6.3.5). El estudiante A04 ha generado números que no conservan la invariancia del doble producto que multiplica las raíces cuadradas de los dos primeros términos. Sin embargo, las raíces cuadradas de los dos primeros términos si las conserva en el tercer término.

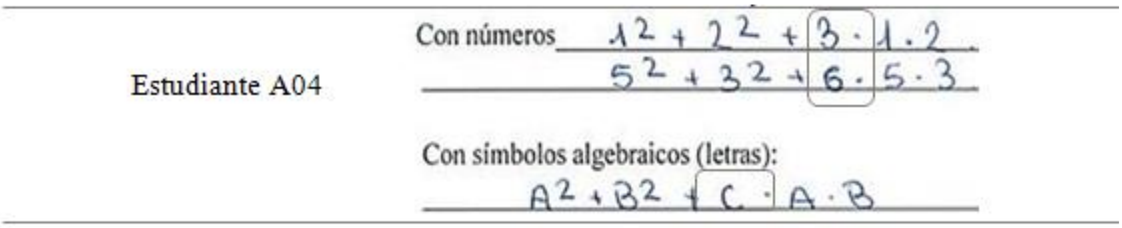



*Figura 6.3.5.* No reproduce ni expresa el invariante numérico pero sí las cuasivariables.

Cuatro estudiantes (A01, A09, A15, A20) reproducen únicamente la estructura externa (REN.3), no reproducen el invariante numérico ni cuasivariables (ver primer recuadro de Figura 6.3.6). El estudiante A01 al reproducir el tercer término de la expresión ha generado números que no conservan la invariancia del doble producto, ni la relación de las raíces cuadradas de este término con las potencias cuadradas de los dos primeros términos.

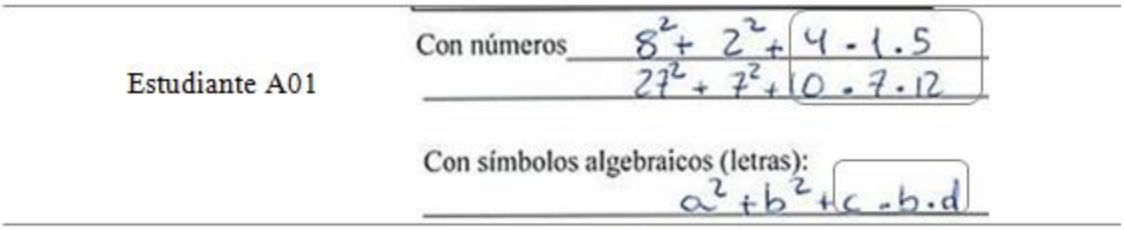



*Figura 6.3.6.* Reproduce solo estructura externa.

*Categoría ESA*

Diez estudiantes (A02, A03, A06, A07, A10, A11, A12, A13, A14, A19) expresan con simbolismo algebraico la estructura externa de las expresiones numéricas (ESA.1, ver Figura 6.3.4). Observamos que el estudiante A02 al escribir la expresión $a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$ con simbolismo algebraico ha expresado correctamente la estructura dada conservando los patrones que la misma involucra.

Tres estudiantes (A04, A05, A08) no representan correctamente en simbolismo algebraico el invariante numérico pero sí las cuasivariables y la estructura externa (ESA.2b, ver Figura 6.3.5). En la Figura 6.3.7 se muestra que el estudiante A05, en el tercer término, ha generalizado el doble producto que multiplica las raíces cuadradas de los dos primeros términos con una letra *n*.

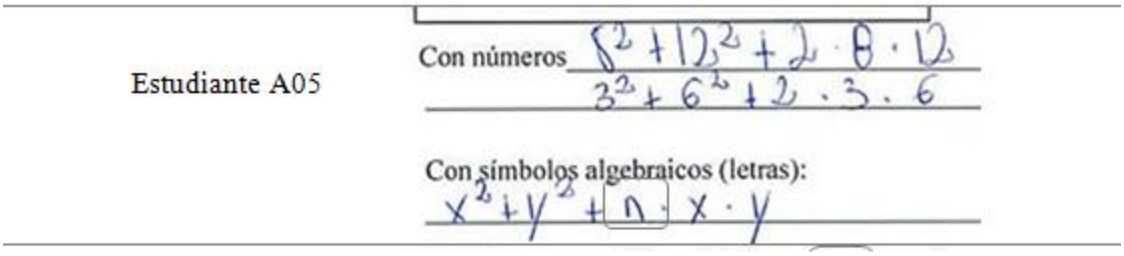



*Figura 6.3.7.* No expresa invariantes con simbolismo algebraico.

Cuatro estudiantes (A01, A09, A15, A20) sólo expresan la estructura externa (ESA.3). No expresan invariantes ni cuasivariables (ver Figura 6.3.6). El estudiante A01 al generalizar lo hace de acuerdo con la percepción de las cuasivariables y del invariante numérico que muestra en la realización de esta actividad.

*Categoría RET*

Diez estudiantes realizan la actividad correctamente. Reproducen la estructura dada en expresiones numéricas de forma exitosa y la expresan en simbolismo algebraico (ver Figura 6.3.4).

Siete estudiantes (A01, A04, A05, A08, A09, A15, A20) no realizan la actividad de forma correcta, dado que fallan al reproducir numéricamente y/o expresar con simbolismo algebraico invariantes y/o cuasivariables.

*Conclusión*

En esta actividad la mayoría de los estudiantes reproducen la estructura de las expresiones numéricas. Así mismo muchos de ellos reproducen en simbolismo algebraico la estructura de forma exitosa. En muy pocos casos no se reproduce el invariante numérico, existente en la estructura, aunque sí el invariante de la estructura. Parece que resulta más complicado percibir un invariante numérico presente en un producto con cuasivariables que los invariantes que presenta la estructura en cuanto a operaciones y relaciones entre los números.

## Recuadro 3

$$16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 2 + 2^2 = (16-2)^2$$
$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3^2 = (4-3)^2$$
$$11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 4 + 4^2 = (11-4)^2$$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa de las igualdades es un invariante. En el primer miembro se suman dos números elevados al cuadrado y se le resta el producto de tres números, dos de ellos coinciden con los sumandos anteriores sin elevar al cuadrado. El segundo miembro es el cuadrado de la diferencia de los dos números cuyos cuadrados que se suman en el primer miembro de la igualdad.
2. El dos es un invariante numérico, el resto de los números son cuasivariables.

*Resultados*

La actividad 3 es resuelta por 16 estudiantes. La Tabla 6.3.4 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que se codifican las actuaciones de los estudiantes en la actividad 3.

*Tabla 6.3.4*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 3

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2a | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 10 | 0 | 3 | 3 | 10 | 0 | 3 | 3 | 10 | 6 | 1 |

*Categoría REN*

Diez estudiantes (A02, A03, A06, A07, A10, A11, A12, A13, A14, A19) reproducen la estructura externa presente en las expresiones numéricas, incluyendo cuasivariables e invariantes (REN.1, ver Figura 6.3.8).

Estudiante A02

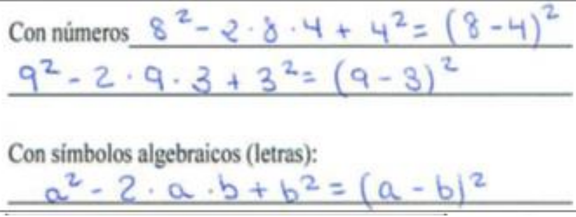



*Figura 6.3.8.* Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Tres estudiantes (A05, A08, A09) no reproducen el invariante numérico pero sí las cuasivariables (REN.2b, ver Figura 6.3.9). El estudiante A09 al reproducir el segundo término del miembro izquierdo ha conservado la estructura externa pero no el invariante número 2.

Estudiante A09

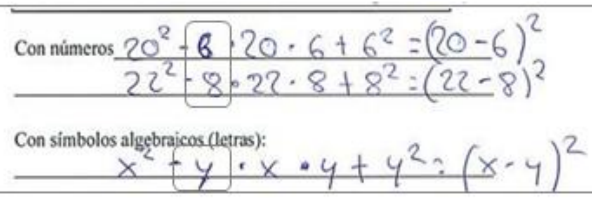



*Figura 6.3.9*. No reproduce el invariante numérico pero sí las cuasivariables.

Tres estudiantes (A04, A15, A20) sólo reproducen la estructura externa (REN.3). No reproducen invariantes numéricos ni cuasivariables (ver recuadros en Figura 6.3.10). El estudiante A20 al reproducir la igualdad dada numéricamente ha escrito cuadrados en el primer y tercer término del miembro izquierdo cuyas raíces no guardan relación ni con las raíces cuadradas que multiplican el doble producto en el segundo término del miembro izquierdo, ni con los términos que contiene el miembro derecho.

Estudiante A20

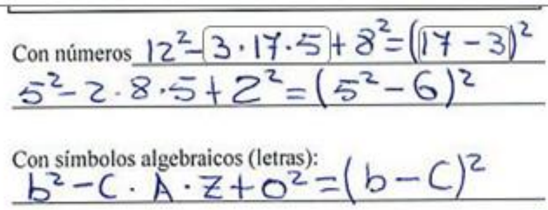



*Figura 6.3.10*. Sólo reproduce la estructura externa.

*Categoría ESA*

Diez estudiantes (A02, A03, A06, A07, A10, A11, A12, A13, A14, A19) expresan con simbolismo algebraico la estructura de las expresiones numéricas dadas (ESA.1). Han generalizado la estructura dada conservando los patrones que la misma involucra. En la Figura 6.3.8 se observa que la igualdad $a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ escrita en simbolismo algebraico ha sido generada correctamente por A02.

Tres estudiantes (A05, A08, A09) no expresan invariantes numéricos pero sí las cuasivariables (ESA.2b, ver Figura 6.3.9). El estudiante A09 al expresar la igualdad numérica dada en simbolismo algebraico ha generado en el segundo término del miembro izquierdo, términos donde no se conserva la invariancia del doble producto que multiplica las raíces cuadradas del primer y tercer término de la expresión generada.

Tres estudiantes (A04, A15, A20) sólo expresan la estructura externa (ESA.3, ver Figura 6.3.10). No expresan invariantes, ni cuasivariables. El estudiante A20 al generar la nueva expresión en simbolismo algebraico no mantiene la invarianza del doble producto en el miembro izquierdo ni conserva la relación de las raíces cuadradas del primer y tercer término en el miembro izquierdo con los términos del binomio en el miembro derecho.

*Categoría RET*

Diez estudiantes realizan la actividad correctamente. Reproducen la estructura dada numéricamente de forma exitosa y la expresan en simbolismo algebraico (ver Figura 6.3.8). Seis estudiantes (A04, A05, A08, A09, A15 y A20) realizan la actividad de forma incorrecta. Algunos no reproducen numéricamente, ni expresan con simbolismo algebraico la invarianza del doble producto en el segundo término del miembro izquierdo. Y otros no reproducen numéricamente, ni expresan con simbolismo algebraico invariantes, ni cuasivariables. Un estudiante (A01) no realiza la actividad.

> *Conclusión*
>
> La proporción de estudiantes que realiza correctamente esta actividad, que involucra el cuadrado de una diferencia en su forma simple, es menor que en las actividades anteriores. Es mayor el número de estudiantes que no conserva la invariancia del número dos, así como las cuasivariables. Parecería que el hecho de tratarse de una igualdad en lugar de una expresión sin contener el signo igual, genera más dificultad a los estudiantes que en el otro caso. Se vuelve a producir el no considerar el número 2 invariante, a pesar de mantener el invariante de la estructura externa y la concordancia entre la escritura de la expresión con simbolismo algebraico con la expresión errónea de las cuasivariables con simbolismo aritmético.

## Recuadro 4

$$(10-4)^2-2\cdot(10-4)\cdot5+5^2$$
$$(17-5)^2-2\cdot(17-5)\cdot8+8^2$$
$$(12-7)^2-2\cdot(12-7)\cdot31+31^2$$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa es invariante en todas las expresiones. Las expresiones están formadas por dos sumando cuadrados, uno es el cuadrado de la diferencia de dos números y otro es el cuadrado de un número, y una diferencia que es el producto de tres elementos: dos números y una diferencia; la diferencia coincide con la primera diferencia que está elevada al cuadrado y uno de los números coincide con la raíz cuadrada del segundo número cuadrado que se suma.
2. El número dos es un invariante numérico, el resto de los números son cuasivariables.

*Resultados*

La actividad 4 es resuelta por 16 estudiantes. La Tabla 6.3.5 muestra las frecuencias absolutas resultantes al clasificar las respuestas de los estudiantes según cada una de las subcategorías.

*Tabla 6.3.5.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 4

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2ª | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 10 | 1 | 4 | 1 | 9 | 1 | 5 | 1 | 9 | 7 | 1 |

*Categoría REN*

Diez estudiantes (A02, A03, A05, A06, A10, A11, A12, A13, A14, A19) reproducen la estructura común de las expresiones numéricas dadas (REN.1). Reproducen tanto invariantes como cuasivariables (ver Figura 6.3.11).

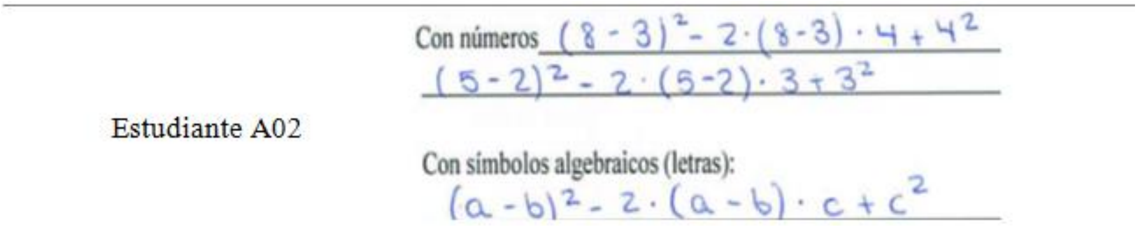



*Figura 6.3.11.* Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Un estudiante (A07) no reproduce cuasivariables pero sí los invariantes de estructura externa y numérica (REN.2a, ver Figura 6.3.12). En la expresión $(8-4)^2 - 2\cdot(8-4)\cdot 7 + 5^2$ que A07 reproduce se observa que en el segundo término conserva el doble producto que multiplica las raíces del primer y tercer término, conserva la raíz del primer término, pero no conserva la raíz del tercer término.

Estudiante A07

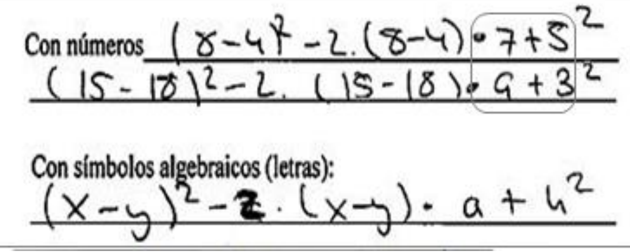



*Figura 6.3.12*. No reproduce ni expresa cuasivariables pero sí los invariantes.

Cuatro estudiantes (A04, A08, A09 y A20) no reproducen invariantes numéricos pero sí las cuasivariables (REN.2b, ver recuadro de Figura 6.3.13). El estudiante A04 en el segundo término de la expresión ha generado números que no conservan la invariancia del doble producto que multiplica las raíces cuadradas del primer y tercer término de la expresión generada.

Estudiante A04

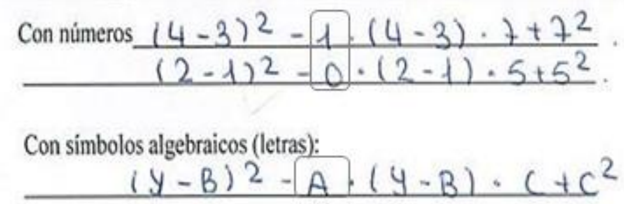



*Figura 6.3.13*. No reproduce ni expresa invariantes pero sí las cuasivariables.

Un estudiante (A15) sólo reproduce la estructura externa (REN.3, ver Figura 6.3.14). No reproduce invariantes numéricos, ni cuasivariables. El estudiante A15 al reproducir la expresión con números, los números que componen el segundo término no conservan relación con las potencias cuadradas del primer y tercer término, además no reproduce el invariante numérico.

Estudiante A15

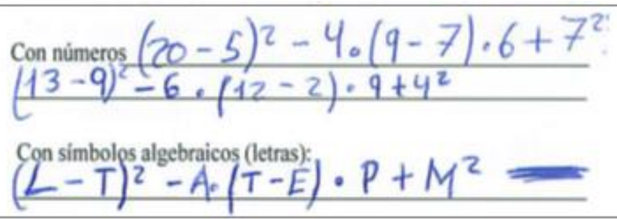



*Figura 6.3.14*. Reproduce sólo la estructura externa.

*Categoría ESA*

Nueve estudiantes (A02, A03, A06, A10, A11, A12, A13, A14, A19) expresan con simbolismo algebraico la estructura de expresiones numéricas (ESA.1, ver Figura 6.3.11). El estudiante A02 ha generado correctamente la expresión algebraica dado que al escribir $(a-b)^2 - 2\cdot(a-b)\cdot c + c^2$ , está conservando la estructura externa de la expresión dada incluyendo cuasivariables e invariantes.

Un estudiante A07 no expresa cuasivariables pero sí los invariantes (ESA.2a). A07 al expresar la estructura con simbolismo algebraico ha generado la expresión $(x-y)^2 - 2\cdot(x-y)\cdot a + h^2$ . Cinco estudiantes (A04, A05, A08, A09 y A20) no expresan invariantes numéricos pero sí las cuasivariables (ESA.2b, ver Figura 6.3.15).

Estudiante A05

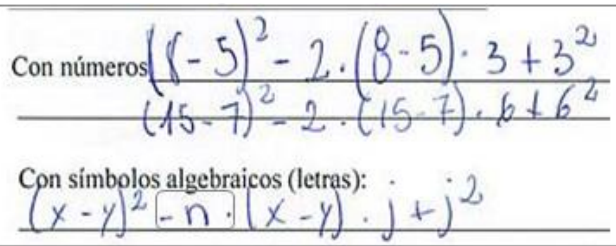



*Figura 6.3.15*. No expresa invariantes pero si cuasivariables.

Observamos en este ejemplo que A05, en el segundo término, ha representado el dos que multiplica las raíces cuadradas de los dos primeros términos como una variable más, con la letra *n*.

Un estudiante (A15) sólo expresa la estructura externa (ESA.3). No reproduce invariantes numéricos, ni cuasivariables (ver Figura 6.3.14). El estudiante al reproducir la expresión ha generado potencias cuadradas en el primer y tercer término cuyas raíces cuadradas no guardan relación con las variables que multiplican el doble producto en el segundo término y ha generalizado el doble producto por una letra A.

*Categoría RET*

Nueve estudiantes realizan la actividad correctamente, reproducen la estructura numérica dada de forma exitosa y la expresan en simbolismo algebraico (ver Figura 6.3.11). Siete estudiantes (A04, A05, A07, A08, A09, A15 y A20) no realizan la actividad de forma correcta, dado que al generar las nuevas estructuras no reproducen y/o no expresan invariantes numéricos ni cuasivariables. Un estudiante (A01) no realiza la actividad.

*Conclusión*

Nueve estudiantes realizan correctamente la actividad 4 que involucra el cuadrado de una diferencia, apareciendo sólo el miembro extendido y que conlleva términos compuestos con resta. Este número de estudiantes es alto si consideramos que la expresión presenta elementos compuestos. De nuevo el número de estudiantes que no reproduce el invariante numérico es mayor que el número de los que no lo hacen con las cuasivariables. Cuando se trata de escribir las expresiones con lenguaje simbólico, se hace de acuerdo con la no percepción de las cuasivariables y del invariante numérico.

## Recuadro 5

$$5 \cdot 12 + 5 \cdot 3^2$$
$$7 \cdot 20 + 7 \cdot 5^2$$
$$10 \cdot 12 + 10 \cdot 2^2$$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa es un invariante. Las expresiones son la suma de dos productos en los que coinciden los dos primeros factores, en el segundo producto el segundo factor es un número cuadrado.
2. Todos los números se pueden considerar cuasivariables.

*Resultados*

La actividad 5 es resuelta por 17 estudiantes. La Tabla 6.3.6 muestra las frecuencias absolutas de las actuaciones de los estudiantes que caen en cada una de las subcategorías de la actividad 5.

*Tabla 6.3.6*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 5

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2ª | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 15 | 2 | 0 | 0 | 15 | 2 | 0 | 0 | 15 | 2 | 0 |

*Categoría REN*

Quince estudiantes (A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A19) reproducen la estructura de las expresiones numéricas del recuadro (REN.1, ver Figura 6.3.16).

Estudiante A03

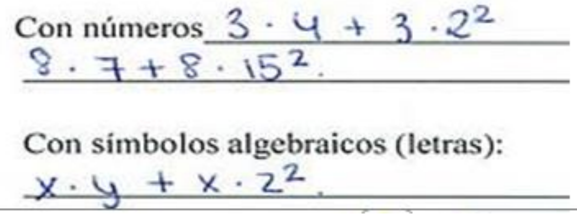



*Figura 6.3.16*. Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Dos estudiantes (A15 y A20) reproducen la estructura externa pero no consideran cuasivariables (REN.2a). El estudiante A20 ha generado expresiones numéricas cuya suma de productos no presentan factor en común.

Estudiante A20

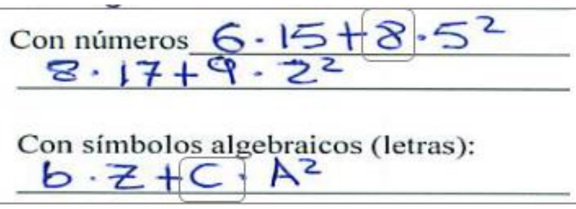



*Figura 6.3.17.* No reproduce ni expresa cuasivariables pero sí los invariantes.

*Categoría ESA*

Quince estudiantes (A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A19) expresan con simbolismo algebraico la estructura de las expresiones numéricas (ESA.1). En la Figura 6.3.14 puede observarse cómo el estudiante A03 ha escrito una expresión algebraica que conserva una suma de dos productos las cuales tienen un factor en común.

Dos estudiantes (A15 y A20) no expresan cuasivariables pero sí los invariantes de la estructura externa (ESA.2a, ver Figura 6.3.17). El estudiante A20 ha generado la expresión algebraica $b \cdot Z + C \cdot A^2$ cuya suma de productos no presenta factor en común, de acuerdo con la falta de percepción de las relaciones que se dan entre las cuasivariables que componen las expresiones dadas.

*Categoría RET*

Quince estudiantes realizan la actividad correctamente. Reproducen la estructura dada numéricamente de forma exitosa y la generalizan en simbolismo algebraico (ver Figura 6.3.16). Dos estudiantes (A15 y A20) no realizan la actividad correctamente, no reproducen ni expresan cuasivariables numérica ni algebraicamente.

> *Conclusión*
>
> En esta actividad que involucra el miembro extendido de la propiedad distributiva-factor común y que presenta un término compuesto con potencia, una mayoría de estudiantes, quince de diecisiete, logran realizarla exitosamente. No hay invariante numérico en esta expresión; los fallos de los dos estudiantes que no logran realizar con éxito la tarea se deben a la no percepción de las cuasivariables.

## Recuadro 6

$$12(10-3)=12\cdot 10-12\cdot 3$$
$$24(15-8)=24\cdot 15-24\cdot 8$$
$$36(20-5)=36\cdot 20-36\cdot 5$$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa es un invariante. Es una igualdad. En el miembro izquierdo presenta el producto de dos factores, el segundo de ellos es la diferencia de dos números. En el miembro derecho aparece la diferencia de dos productos de dos factores: en los dos casos el primer factor coincide con el primer factor del miembro izquierdo. El segundo factor coincide en el primer caso con el minuendo de la resta contenida en el miembro izquierdo y en el segundo caso con el sustraendo de dicha resta.
2. Todos los números pueden considerarse cuasivariables, no contiene invariantes numéricos.

La actividad 6 es resuelta por 16 estudiantes. La Tabla 6.3.7 muestra las frecuencias absolutas de las subcategorías utilizadas en la clasificación de las actuaciones de los estudiantes en esta actividad.

*Tabla 6.3.7*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 6

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2ª | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 15 | 1 | 0 | 0 | 15 | 1 | 1 |

*Categoría REN*

Quince estudiantes (A01, A02, A03, A04, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A19, A20) reproducen la estructura común de las expresiones numéricas (REN.1, ver Figura 6.3.18).

Estudiante A02

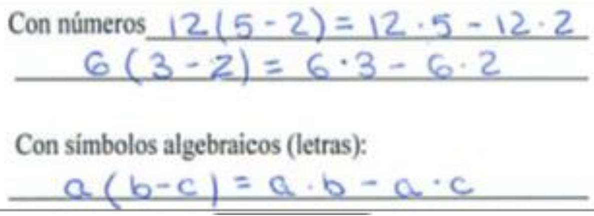



*Figura 6.3.18*. Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Solamente un estudiante (A15) no reproduce cuasivariables pero sí los invariante de la estructura externa (REN.2a, ver Figura 6.3.19). Este estudiante ha generado expresiones numéricas donde los factores del miembro izquierdo son distintos de los que contienen los productos del miembro derecho, construyendo sentencias que no son verdaderas.

Estudiante A15

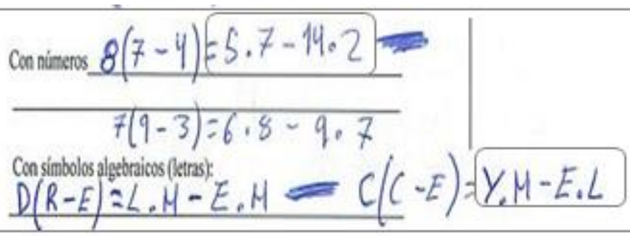



*Figura 6.3.19*. No reproduce cuasivariables pero sí los invariantes.

*Categoría ESA*

Quince estudiantes (A01, A02, A03, A04, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A19, A20) expresan con simbolismo algebraico la estructura de las expresiones numéricas (ESA.1, ver Figura 6.3.18). El estudiante A02 ha generado correctamente la igualdad algebraica $a(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$.

El estudiante restante (A15) expresa simbólicamente conservando los invariantes (ESA.2a, ver Figura 6.3.19). Ha generado una expresión algebraica acorde con la percepción de la estructura externa y la no percepción de las cuasivariables que pone de manifiesto cuando construye las expresiones numéricas.

*Categoría RET*

Quince estudiantes realizan la actividad correctamente, dado que reproducen la estructura dada numéricamente de forma exitosa y la generalizan en simbolismo algebraico. Un estudiante (A15) no realiza la actividad correctamente: al reproducir la estructura numérica dada no reproduce las cuasivariables y hace lo mismo con la expresión en simbolismo algebraico. Un estudiante (A05) no responde.

> *Conclusión*
>
> Las expresiones de la actividad 6 es una igualdad que involucra la propiedad distributiva-factor común. Conlleva un término compuesto con resta y no presenta invariantes numéricos. La respuesta de los estudiantes ha sido mayoritariamente exitosa. Sólo un estudiante no reproduce ni expresa cuasivariables y otro estudiante se abstiene de realizarla. Pensamos que la no aparición de invariantes numéricos en la expresión la hace más asequible a los estudiantes.

## Recuadro 7

$$(3\cdot 5+2)^2=(3\cdot 5)^2+2^2+2\cdot 3\cdot 5\cdot 2$$
$$(4\cdot 7+3)^2=(4\cdot 7)^2+3^2+2\cdot 4\cdot 7\cdot 3$$
$$(10\cdot 11+7)^2=(10\cdot 11)^2+7^2+2\cdot 10\cdot 11\cdot 7$$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa es un invariante. Es una igualdad que en el miembro izquierdo presenta el cuadrado del producto de dos números más otro número. En el miembro derecho presenta la suma de tres sumandos: los dos primeros coinciden con los sumandos de la suma contenida en el mimbro izquierdo pero elevados al cuadrado, el otro es el doble del producto de dichos sumandos.
2. El número dos del tercer sumando del miembro derecho es un invariante numérico, el resto de números se consideran cuasivariables.

*Resultados*

La actividad 7 es resuelta por 16 estudiantes. La Tabla 6.3.8 muestra las frecuencias absolutas de las actuaciones de los estudiantes de acuerdo a cada subcategoría.

*Tabla 6.3.8*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 7

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2a | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 11 | 0 | 4 | 1 | 11 | 0 | 4 | 1 | 11 | 5 | 1 |

*Categoría REN*

Once estudiantes (A01, A02, A03, A06, A07, A10, A11, A12, A13, A14, A19) reproducen la estructura en expresiones numéricas (REN.1). Al construirla conservan la estructura externa, invariantes numéricos y cuasivariables (ver Figura 6.3.20).

**Estudiante A02**

Con números $(2\cdot 3+5)^2=(2\cdot 3)^2+5^2+2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$

$(6\cdot 7+4)^2=(6\cdot 7)^2+4^2+2\cdot 6\cdot 7\cdot 4$

Con símbolos algebraicos (letras):

$(a\cdot b+c)^2=(a\cdot b)^2+c^2+2\cdot a\cdot b\cdot c$

*Figura 6.3.20*. Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Cuatro estudiantes (A04, A08, A09, A20) reproducen la estructura externa, también las cuasivariables, pero no el invariante numérico (REN.2b) En la Figura 6.3.21 se observa que el estudiante A04, al reproducir el tercer término del miembro derecho, no atiende a la invariancia del número dos.

**Estudiante A04**

Con números $(2\cdot 3+4)^2=(2\cdot 3)^2+4^2+\boxed{4}\,2\cdot 3\cdot 4$

$(1\cdot 5+7)^2=(1\cdot 5)^2+7^2+7\cdot 5\cdot 7$.

Con símbolos algebraicos (letras):

$(A\cdot B+C)^2=(A\cdot B)^2+C^2+\boxed{C}\,A\cdot B\cdot C$.

*Figura 6.3.21*. No reproduce ni expresa invariantes pero sí las cuasivariables.

Un estudiante (A15) sólo reproduce la estructura externa (REN.3). No reproduce invariantes ni cuasivariables (ver Figura 6.3.22). El estudiante A15 al reproducir la igualdad dada numéricamente ha generado potencias cuadradas en el primer y segundo término del miembro derecho de la misma cuyas raíces cuadradas no guardan relación ni con los términos que contiene el binomio cuadrado del miembro izquierdo de la expresión que ha generado, ni con las raíces cuadradas que multiplican el doble producto en el tercer término del miembro derecho de la misma. No mantiene la invariancia del número dos.

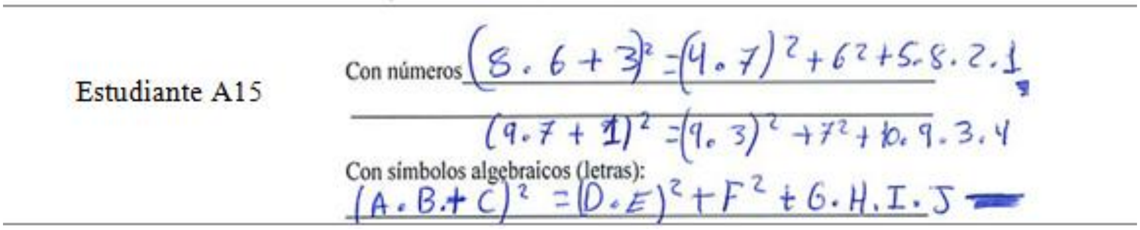



*Figura 6.3.22*. Sólo reproduce la estructura externa.

*Categoría ESA*

Once estudiantes (A01, A02, A03, A06, A07, A10, A11, A12, A13, A14, A19) expresan con simbolismo algebraico la estructura externa de las expresiones numéricas (ESA.1, ver Figura 6.3.20). La igualdad $(a\cdot b+c)^2=(a\cdot b)^2+c^2+2\cdot a\cdot b\cdot c$ generada por A02 es un ejemplo de sus producciones.

Cuatro estudiantes (A04, A08, A09, A20) no expresan invariantes numéricos pero sí las cuasivariables (ESA.2b). En la Figura 6.3.21 se observa que al expresar la estructura de la igualdad dada con simbolismo algebraico A04 adapta al mismo la percepción de las cuasivariables y la no percepción del invariante numérico.

Un estudiante (A15) sólo expresa la estructura externa (ESA.3). No expresa invariantes, ni cuasivariables (ver recuadros en Figura 6.3.22).

*Categoría RET*

Once estudiantes resuelven correctamente. Reproducen de forma exitosa la estructura numérica dada y la expresan en simbolismo algebraico (ver Figura 6.3.20). Cinco estudiantes (A04, A08, A09, A15 y A20) no realizan la actividad de forma correcta, dado que al reproducir numéricamente y al expresar con simbolismo algebraico no expresan invariantes, ni cuasivariables. Un estudiante (A05) no responde.

*Conclusión*

En esta actividad cuyas igualdades involucran el cuadrado de la suma que presenta un término compuesto con producto, once de diecisiete estudiantes logran realizarla correctamente. Es la percepción del invariante numérico el que impide la correcta realización de la tarea en el resto de casos.

**Recuadro 8**

$$[3+5+2]\left[3-(5+2)\right]=3^2-(5+2)^2$$
$$[17+10+1]\left[17-(10+1)\right]=17^2-(10+1)^2$$
$$[8+3+4]\left[8-(3+4)\right]=8^2-(3+4)^2$$

Invariantes y cuasivariables de las expresiones que aparecen en este recuadro:

1. La estructura externa es invariante. Se trata de una igualdad. En el miembro izquierdo presenta el producto de dos factores; estos factores se forman con dos operaciones entre los mismos tres números, en el primer factor los números se suman todos, en el segundo factor, al primero se resta la suma de los otros dos. En el miembro derecho de la igualdad aparece una diferencia de dos números elevados al cuadrado, el primero de ellos coincide con el primer sumando del miembro izquierdo de la igualdad y el segundo cuadrado con el sustraendo de la diferencia en el miembro derecho de la igualdad.
2. Todos los números se consideran cuasivariables y no hay invariantes numéricos.

*Resultados*

La actividad 8 es resuelta por 14 estudiantes. La Tabla 6.3.9 muestra las frecuencias absolutas resultante al clasificar las producciones de los estudiantes de acuerdo a cada una de las subcategorías.

*Tabla 6.3.9*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Actividad 8

| REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REN.1 | REN.2ª | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 13 | 1 | 0 | 0 | 13 | 1 | 0 | 0 | 13 | 1 | 3 |

*Categoría REN*

Trece estudiantes (A01, A02, A03, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A19, A20) reproducen la estructura en expresiones numéricas (REN.1; ver Figura 6.3.23).

| | |
|---|---|
| Estudiante A02 | Con números $[4+6+2][4-(6+2)]=4^2-(6+2)^2$<br>$[3+5+7][3-(5+7)]=3^2-(5+7)^2$<br>Con símbolos algebraicos (letras):<br>$[a+b+c][a-(b+c)]=a^2-(b+c)^2$ |

*Figura 6.3.23*. Reproduce la estructura numérica y algebraicamente.

Solamente un estudiante (A04) no reproduce cuasivariables pero sí los invariantes estructurales (REN.2a, ver Figura 6.3.24). Por ejemplo, en la primera expresión $[2+3+4][6-(3+4)]=2^2-(3+4)^2$ que se reproduce numéricamente se observa que el primer número del segundo factor en el miembro izquierdo es distinto tanto del primero como de la raíz de la primera potencia cuadrada que aparece en el miembro derecho.

| | |
|---|---|
| Estudiante A04 | Con números $[2+3+4][\boxed{6}-(3+4)]=2^2-(3+4)^2$<br>$[7+8+9][10-(8+9)]=7^2-(8+9)^2$<br>Con símbolos algebraicos (letras):<br>$[A+B+C][\boxed{D}-(B+C)]=A^2-(B+C)^2$ |

*Figura 6.3.24*. No reproduce ni expresa cuasivariables pero sí los invariantes.

*Categoría ESA*

Trece estudiantes (A01, A02, A03, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A19, A20) expresan con simbolismo algebraico la estructura de las expresiones numéricas dadas (ESA.1, ver Figura 6.3.23). Solamente un estudiante (A04) no expresa cuasivariables pero sí los invariantes de la estructura (ESA.2a, ver Figura 6.3.24). El estudiante A04 ha generado una expresión algebraica en la que muestra la no percepción de las cuasivariables pero que concuerda con la estructura de las expresiones numéricas que él construye.

*Categoría RET*

Trece estudiantes realizan la actividad correctamente. Reproducen la estructura dada en expresiones numéricas y la expresan en simbolismo algebraico de forma exitosa (ver Figura 6.3.23). Un estudiante (A04) no realiza la actividad correctamente. Al reproducir la estructura dada tanto de forma numérica como algebraica no reproduce ni expresa una de las cuasivariables. Tres estudiantes (A05, A06 y A15) no responden.

*Conclusión*

Trece de diecisiete estudiantes logran realizar exitosamente esta actividad en la que aparece una igualdad que involucra la identidad producto de la suma por la diferencia y que conlleva términos compuestos con suma. Lo más llamativo en este caso es el "alto" número de estudiantes que no realiza la actividad, en comparación con las anteriores, probablemente por ser la última actividad de esta tarea.

### 6.3.5 Análisis general de los resultados de la 1ª tarea-Sesión 3

En esta sección se realiza un resumen de las principales actuaciones mostradas por los estudiantes en la resolución de cada una de las actividades de la tarea 1ª de la Sesión 3. La tabla 6.3.10 recoge de forma conjunta los datos que hay en las tablas particulares de cada tarea.

*Tabla 6.3.10.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sesión 3

| Actividad | REN | | | | ESA | | | | RET | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | REN.1 | REN.2a | REN.2b | REN.3 | ESA.1 | ESA.2a | ESA.2b | ESA.3 | RET.1 | RET.2 | NR |
| 1 | 15 | 2 | 0 | 0 | 16 | 1 | 0 | 0 | 15 | 2 | 0 |
| 2 | 11 | 0 | 2 | 4 | 10 | 0 | 3 | 4 | 10 | 7 | 0 |
| 3 | 10 | 0 | 3 | 3 | 10 | 0 | 3 | 3 | 10 | 6 | 1 |
| 4 | 10 | 1 | 4 | 1 | 9 | 1 | 5 | 1 | 9 | 7 | 1 |
| 5 | 15 | 2 | 0 | 0 | 15 | 2 | 0 | 0 | 15 | 2 | 0 |
| 6 | 15 | 1 | 0 | 0 | 15 | 1 | 0 | 0 | 15 | 1 | 1 |
| 7 | 11 | 0 | 4 | 1 | 11 | 0 | 4 | 1 | 11 | 5 | 1 |
| 8 | 13 | 1 | 0 | 0 | 13 | 1 | 0 | 0 | 13 | 1 | 3 |
| Frecuencia | 100 | 7 | 13 | 9 | 99 | 6 | 15 | 9 | 98 | 31 | 7 |
| % | 73.5 | 5.1 | 9.6 | 6.6 | 72.8 | 4.4 | 11.0 | 6.6 | 72.1 | 22.8 | 5.1 |

Analizadas conjuntamente las actuaciones de los estudiantes en las ocho actividades, observamos, de acuerdo a la Tabla 6.3.10, que en un 73.5% de las resoluciones, los estudiantes reproducen la estructura de las expresiones numéricas, incluyendo invariantes numéricos y cuasivariables. Consideramos este resultado muy positivo ya que independientemente de la expresión considerada: identidad notable completa, o solo parte de ella, expresión simple o compuesta, con o sin invariante numérico, ha sido realizada con éxito por un número alto de estudiantes.

La información del resto de los datos corrobora lo que hemos recogido en las conclusiones de las diferentes actividades. En un 5,1% de las resoluciones, los estudiantes no reproducen cuasivariables pero sí los invariantes numéricos y de estructura, y en un 9.6% de las resoluciones los estudiantes no reproducen el invariante numérico. Considerando que no todas las expresiones presentan invariante numérico pero sí cuasivariables, es mayor el número de estudiantes que no reproduce el invariante numérico que las cuasivariables, de ahí que nos inclinemos a decir que la presencia de un invariante numérico es un obstáculo para la realización correcta de la tarea. Las relaciones que hay que establecer entre los números de las expresiones para considerarlos cuasivariables también presentan un obstáculo, pero a un número menor de estudiantes que la invariancia numérica. En un 6.6% de las resoluciones, los estudiantes sólo reproducen la estructura externa. No reproducen invariantes numéricos, ni cuasivariables.

En el 72.1 % de las resoluciones los estudiantes reproducen numéricamente y expresan algebraicamente de forma correcta. En el 22.8% las resoluciones de los estudiantes son resueltas parte correctamente y parte de forma incorrecta. En esta sesión no se consideran resoluciones totalmente incorrectas.

Un alto porcentaje de estudiantes muestran percibir la estructura de las expresiones y, casi en su totalidad, la escritura con lenguaje simbólico de la estructura de las expresiones dadas coinciden con la de las expresiones numéricas que ellos construyen.

Al contrastar las distintas actividades que involucran una misma identidad notable en esta sesión, se observa en la Tabla 6.3.11 que en todas salvo la primera identidad se mantiene la similitud de datos para las diferentes subcategorías en cuanto al número de respuestas correctas proporcionadas por los estudiantes y en el caso de la primera identidad la diferencia es muy leve.

*Tabla 6.3.11*. Contrastación entre las actividades de la sesión 3

| Identidad involucrada | Actividad | | Tipo | Respuestas correctas |
|---|---|---|---|---|
| Producto de la suma por la diferencia-diferencia de cuadrados | 1 | INI | Simple | 15 |
| | 8 | INC | Compuesta | 13 |
| Cuadrado de la suma | 2 | INI | Simple | 11 |
| | 7 | INC | Compuesta | 11 |
| Cuadrado de la diferencia | 3 | INC | Simple | 10 |

*Tabla 6.3.11*. Contrastación entre las actividades de la sesión 3

| Identidad involucrada | Actividad | | Tipo | Respuestas correctas |
|---|---|---|---|---|
| Propiedad distributiva-factor común | 4 | INI | Compuesta | 10 |
| | 5 | INI | Simple | 15 |
| | 6 | INC | Compuesta | 15 |

INC: Identidad notable completa
INI: Identidad notable incompleta, solo un miembro

Observando esta tabla se puede ver en las dos últimas columnas que parece no tener influencia en la resolución correcta de la tarea, el que esta sea simple o compuesta ni que la estructura externa corresponda o no a una igualdad (en otras palabras que la identidad notable esté involucrada completa o incompleta). Por otra parte, las identidades cuadrado de una suma y cuadrado de una diferencia son las que parecen ofrecer mayor dificultad a los estudiantes, son las que menos respuestas correctas proporcionan, en comparación con las otras identidades consideradas. Entendemos que viene a ratificar lo que intuíamos en al análisis parcial de las respuestas a cada actividad sobre la presencia del invariante numérico: en las identidades cuadrado de la suma y cuadrado de la diferencia interviene un número 2 en el doble producto. Por otra parte aquellas expresiones en las que aparece la propiedad distributiva-factor común y las que involucran el producto de una suma por una diferencia son las que muestran haber presentado menos dificultad para los estudiantes.

### 6.3.6 Resultados de la Tarea 2- Sesión 3

La indicación dada a los estudiantes es: *"De las igualdades que has escrito antes, elige una que tenga letras y cópiala aquí: __________________________________. Escribe otras igualdades que tengan la misma estructura, inventadas por ti, utilizando letras, números y operaciones".*

Esta tarea fue resuelta por catorce de diecisiete estudiantes. En esta segunda tarea el estudiante tiene la elección de reproducir o expresar igualdades siguiendo como patrón una de las que ha generado en la tarea 1, por tanto puede elegir el tipo de identidad notable con la cual desea trabajar.

**Resultados de la Tarea 2**

En la Tabla 6.3.12 mostramos los resultados de la forma como los estudiantes reproducen las expresiones en esta tarea. Los catorce estudiantes efectúan la misma de forma diferente. Dos estudiantes A13 y A14 reproducen igualdades haciendo uso de tres identidades notables, mientras el resto reproduce haciendo uso de una identidad notable.

*Tabla 6.3.12.* Tipo de complejidad de expresión elegida por los estudiantes

| Elección de complejidad | Identidad notable | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Propiedad Distributiva-Factor común | Producto de una suma por una diferencia | Cuadrado de una suma | Cuadrado de una diferencia |
| Simple | A01, A02, A14, A20 | A13, A08 y A14 | A13 | A13 |
| Compuesta con producto | A03, A12 | | A14, A04 y A09 | |
| Compuesta con suma | | A07, A10 | | |

Los estudiantes A08 y A14 confunden la identidad. A04 y A09 no conservan la invarianza del doble producto.

Seis de los catorce estudiantes reproducen igualdades basándose en la propiedad distributiva. Los seis estudiantes (A01, A02, A03, A12, A14 y A20) realizan reproducciones correctamente atendiendo a la propiedad en mención. De estos seis estudiantes, cuatro de ellos (A01, A02, A14 y A20) reproducen haciendo uso de igualdades simples. Por ejemplo el estudiante A02 escribe la igualdad $d(e-f)=d\cdot e-d\cdot f$. A continuación explica con sus palabras que “En la expresión $d(e-f)=d\cdot e-d\cdot f$: he deducido que sería así porque un número (d) multiplicado por una resta $(e-f)$ sería igual al producto del número (d) por el primer miembro de la resta (e), menos el producto del número (d) por el segundo miembro de la resta (f)”. Mientras que dos estudiantes (A03 y A12) reproducen haciendo uso de igualdades compuestas. Por ejemplo el estudiante A03 escribe $2xy+3xy+7y=y(2x+3x+7)$. Y el estudiante A12 escribe igualdades como $8y(5x-6y)=40xy-48y^2$. Además añade a lo que escribe: “Para escribir igualdades con esta estructura: $a(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$ sustituyo cada letra por un número u otra letra y dejo los mismos símbolos”.

Cinco estudiantes (incluyendo A14 que reprodujo utilizando la propiedad distributiva) reproducen igualdades basándose en la identidad producto de una suma por una diferencia. De los cinco estudiantes, tres (A07, A10 y A13) realizan reproducciones correctas atendiendo a la identidad notable. Dos estudiantes (A08 y A14) no reproducen correctamente. El estudiante A08 reproduce considerando que el producto de una suma por diferencia es igual al cuadrado de una diferencia, escribe $(x-y)(x+y)=(x-y)^2$. Mientras que el estudiante A14 que ha reproducido correctamente una igualdad haciendo uso de la propiedad distributiva, reproduce escribiendo que la suma de los cuadrados de dos cantidades es igual al producto de una suma por diferencia $A^2+B^2=(A+B)(A-B)$. De estos cinco estudiantes, tres (A08, A13 y A14) reproducen haciendo uso de igualdades simples. Mientras que dos estudiantes (A07 y A10) reproducen haciendo uso de igualdades compuestas con suma siguiendo los patrones de las igualdades del recuadro 8.

Cuatro estudiantes realizan reproducciones haciendo uso de la identidad notable cuadrado de una suma. Dos de ellos (A13 y A14) expresan correctamente y en forma algebraica haciendo uso de estructuras simples. Dos estudiantes (A04 y A09) reproducen haciendo uso de estructuras compuestas, pero no reproducen correctamente, dado que no expresan la invarianza del doble producto, dicho error es un arrastre de la igualdad que han generado al expresar en forma simbólica las igualdades dadas en el recuadro 7.

Sólo un estudiante (A13) realiza reproducciones haciendo uso de la identidad notable cuadrado de una diferencia. Este estudiante utiliza igualdades en su forma simple. Los datos de dos estudiantes se consideran no codificables dado que uno de ellos (A11) reproduce correctamente pero luego tacha lo que ha escrito y realiza reproducciones que no son correctas. Otro estudiante (A19) sólo copia la igualdad que la toma de las igualdades que ha expresado algebraicamente en la reproducción del recuadro 7, pero no reproduce nuevas igualdades a partir de la seleccionada.

*Resumen*

De los catorce estudiantes que reproducen creando nuevas expresiones, nueve estudiantes (A01, A02, A03, A07, A10, A12, A13, A14 y A20) expresan la igualdad conservando los patrones de las estructuras basadas en identidad notable. Dos estudiantes (A04 y A09) al reproducir igualdades que involucran la identidad notable cuadrado de la suma no conservan la invariancia del doble producto. Dos estudiantes (A08 y A14) confunden el producto de una suma por una diferencia con el cuadrado de una diferencia o desarrollan el producto de una suma por una diferencia como la suma de cuadrados de dos cantidades. Los datos de dos estudiantes (A11 y A19) se consideran no codificables.

Se observa que al tener en sus manos la elección de la identidad notable con la cual puedan crear una nueva estructura, seis de los catorce estudiantes eligen la propiedad distributiva, cinco estudiantes eligen la identidad producto de suma por la diferencia, cuatro estudiantes eligen la identidad cuadrado de la suma y sólo un estudiante elige la identidad cuadrado de una diferencia (los estudiantes A13 y A14 están incluidos en la resolución de tres identidades notables).

### 6.3.7 Fortalezas y debilidades de la sesión 3

Respecto de la primera tarea, consideramos como fortalezas tanto el tipo de tarea propuesta a los estudiantes, como la forma de presentar la misma, dado que han permitido que los estudiantes muestren la percepción de la estructura de expresiones numéricas. El trabajar con expresiones numéricas preparando el camino para un trabajo posterior con expresiones algebraicas, se convierte en una debilidad por el excesivo número de actividades propuestas. Proponemos en este caso se disminuya el número de actividades en una próxima investigación.

Consideramos como fortaleza de la segunda tarea la libertad dada al estudiante para elegir la expresión a reproducir en cuanto a identidad notable y complejidad en los términos a utilizar se refiere. También es una fortaleza en el sentido que nos permite ver hasta donde es capaz un estudiante de avanzar con respecto a una determinada tarea.

## *6.4 Sesión 4*

Bajo este epígrafe se presenta una descripción del análisis de los datos y resultados obtenidos en relación con cada una de las ocho sentencias propuestas en la primera tarea de la sesión 4. La tarea de ampliación no se describe dado que fue resuelta sólo por 4 estudiantes.

### 6.4.1 Categorías utilizadas para el análisis de la 1ª tarea. Sesión 4

Para recoger las respuestas de los estudiantes a cada una de las sentencias de la Tarea 1 hemos utilizado dos categorías: COM y RET. Estas categorías se detallan con sus correspondientes subcategorías en la Tabla 6.4.1. La primera categoría está ligada al estudio del sentido estructural de los estudiantes. La segunda categoría es semejante a la considerada en sesiones anteriores con igual denominación.

*Tabla 6.4.1.* Categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la Sesión 4.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| COM<br>Completar expresiones para obtener una estructura interna concreta | COM.1<br>Se rellena la caja obteniendo una sentencia con igual estructura interna en los dos miembros de la igualdad.<br>COM.2<br>Se rellena la caja obteniendo una sentencia cuyos miembros mantienen la estructura interna solo parcialmente.<br>COM.3<br>Completa la expresión sin mantener la estructura interna. |
| RET<br>Realizar correctamente la sentencia dada | RET.1<br>Se realiza correctamente.<br>RET.2<br>Se realiza parte de la sentencia correctamente y parte incorrectamente.<br>RET.3<br>Se realiza incorrectamente la sentencia. |
| N<br>No realizar o no poder codificar la respuesta | NR<br>No se realiza.<br>NC<br>No codificable. |

### 6.4.2 Observaciones sobre la sesión 4

A esta sesión asiste un total de dieciséis estudiantes. Las primeras cinco sentencias son respondidas por casi todos los estudiantes, mientras que más de un cuarto de la clase se abstiene de resolver las tres últimas sentencias de la primera tarea.

En las sentencias 1 y 3 el estudiante no necesita transformar expresión alguna. De igual forma en las cuatro últimas sentencias que se requiere completar dos cajas, en una de las cajas el estudiante necesita realizar alguna transformación sobre las expresiones dadas aplicando igualdades notables, mientras que en la otra caja no requiere transformar ninguna expresión. Por tanto distinguimos en esta sesión, si lo que hace el estudiante en la sentencia es factorizar/desarrollar la identidad notable o en cambio lo que hace es sólo reconocer la equivalencia entre dos miembros de una identidad notable. En el primer caso, aplicar una identidad notable es utilizar un conocimiento que se tiene para hacer una transformación a una expresión o sentencia dada. En el segundo caso se refiere solamente a reconocer o percibir estructuras y relaciones, no implica acción. Algunos estudiantes resuelven correctamente pero no justifican su respuesta, sin embargo, dado que han completado adecuadamente, se considera que han reconocido la equivalencia de la expresión basada en la estructura interna de la misma.

### 6.4.3 Indicación para la 1ª tarea de la sesión 4

La indicación de la sentencia dice: *"Completa cada caja con aquellas expresiones que hacen que la igualdad sea correcta. Indica cómo sabes que lo que has hecho está bien"*.

### 6.4.4 Actuaciones de los estudiantes en la 1ª tarea de la sesión 4

De forma similar a las sesiones anteriores, en esta sección se recoge una descripción de cada clasificación de las actuaciones de los estudiantes en cada una de las sentencias. Se muestran ejemplos ilustrativos de las distintas actuaciones y al final de la descripción, para cada sentencia se hace una pequeña conclusión de los datos más relevantes ocurridos en la misma.

**Sentencia 1**

$$(3x+1)^2 \cdot (7x-1) = (9x^2+1+6x) \cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Es una igualdad cuyo miembro izquierdo presenta el producto de dos factores, el primero es el cuadrado de un binomio y el segundo es una binomio formado por una diferencia. El miembro derecho presenta también el producto de dos factores, el primero es la expresión extendida del primer factor del miembro izquierdo, el otro factor es desconocido.

Identidad notable: Cuadrado de la suma.

Tipo de expresión: Compuesta, con producto $3x$.

*Resultados*

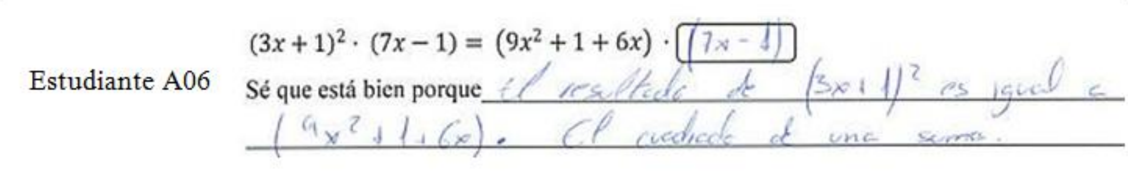
La sentencia 1 es resuelta por quince estudiantes. En la Tabla 6.4.2 se recogen las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que detallan la clasificación de las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de esta sentencia.

*Tabla 6.4.2*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 1

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 12 | 0 | 3 | 12 | 0 | 3 | 1 | 0 |

*Categoría COM*

En esta sentencia, doce estudiantes (A01, A02, A03, A04, A05, A06, A09, A10, A16, A17, A18 y A20) completan la expresión de forma que en los dos miembros se obtienen expresiones equivalentes, esto es con la misma estructura interna (COM.1, ver Figura 6.4.1). Al colocar la expresión $(7x-1)$ en la caja en blanco entendemos que muestran reconocer la equivalencia del binomio $(3x+1)^2$ con la expresión $(9x^2+1+6x)$.



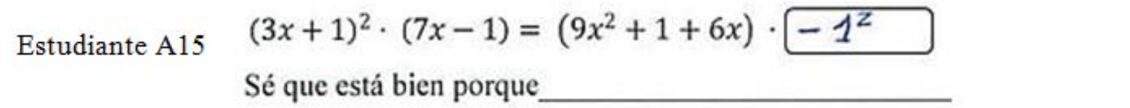
Estudiante A06

$(3x+1)^2 \cdot (7x-1) = (9x^2+1+6x) \cdot \boxed{(7x-1)}$

Sé que está bien porque el resultado de $(3x+1)^2$ es igual a $(9x^2+1+6x)$. el cuadrado de una suma.

*Figura 6.4.1*. Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Tres estudiantes (A07, A11, A15) dan muestras de no reconocer la equivalencia entre las expresiones dadas, dado que rellenan la caja con datos como 1 ó -1 lo que hace que en la expresión obtenida los miembros de la igualdad no sean equivalentes. Completan la expresión pero no mantienen la estructura interna (COM.3) (ver Figura 6.4.2).



Estudiante A15

$(3x+1)^2 \cdot (7x-1) = (9x^2+1+6x) \cdot \boxed{-1^2}$

Sé que está bien porque

*Figura 6.4.2*. No mantiene la estructura interna ni la externa.

En referencia a la justificación, cinco estudiantes se basan en el conocimiento de las reglas de identidad notable dado que dan explicaciones tales como: “El resultado de

$(3x+1)^2$ es igual a $(9x^2+1+6x)$. El cuadrado de una suma" (ver Figura 6.4.1). Un estudiante basa su justificación en el procedimiento operacional de la sentencia, emite la siguiente justificación: "si sale un resultado al hacer las antiguas operaciones se le multiplica por (1) y se queda igual" y nueve estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia (ver Figura 6.4.2).

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes, doce resuelven correctamente (ver Figura 6.4.1). Tres estudiantes (A07, A11, A15), los mismos que no muestran percibir la estructura interna; resuelven de forma incorrecta. Un estudiante (A08) se abstiene de resolver esta sentencia.

> *Conclusión*
>
> En esta sentencia, la cual han resuelto con éxito un número elevado de estudiantes, es necesario "mirar" la igualdad conjuntamente, no ver los miembros de la misma por separado, y percibir que el primer factor del producto del miembro izquierdo coincide en estructura interna con el primer factor del miembro derecho (es su versión extendida), por lo que el "hueco" a rellenar coincide con el segundo factor del miembro izquierdo. Aquellos estudiantes que lo perciben, realizan la actividad correctamente y caen bajo la categoría COM.1, los que no lo perciben caen directamente en la categoría COM.3, es decir, no se presentan respuestas intermedias. Los errores que se cometen son de falta de percepción de la equivalencia de las expresiones extendida y desarrollada contenidas en ambos miembros y basadas en la identidad notable cuadrado de una suma.

## Sentencia 2

$$2x^3 \cdot \left(x^2 - 2x + 1\right) = 2x^3 \cdot \boxed{\phantom{xxxxxx}}^2$$

Igualdad cuyos dos miembros presentan un producto de dos factores. El primer factor de los dos miembros es el mismo. En el miembro izquierdo el segundo factor es un trinomio de segundo grado y en el miembro derecho el segundo factor es una caja elevada al cuadrado.

Identidad notable: Cuadrado de la diferencia.

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

La sentencia 2 es resuelta por quince estudiantes. La Tabla 6.4.3 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que detallan la clasificación de las actuaciones de los estudiantes en la sentencia 2.

*Tabla 6.4.3.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 2

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 9 | 1 | 5 | 9 | 0 | 6 | 1 | 0 |

*Categoría COM*

En esta sentencia nueve estudiantes (A02, A03, A04, A06, A10, A16, A17, A18 y A20) completan la expresión obteniendo la estructura interna de la misma (COM.1). Dado que la expresión $\left(x^2 - 2x + 1\right)$ requiere ser transformada en una equivalente con estructura externa que corresponde a una expresión al cuadrado, al colocar la expresión $\left(x - 1\right)$ en la caja en blanco, muestran que han reconocido la estructura interna de la identidad notable (ver Figura 6.4.3).

Estudiante A18

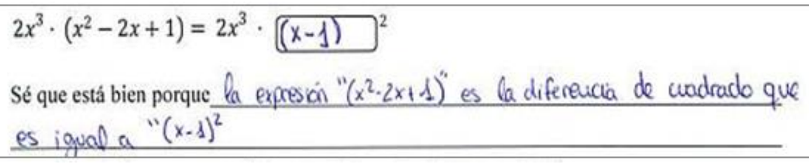



*Figura 6.4.3*. Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Un estudiante (A05) completa la expresión pero no reconoce o utiliza la estructura interna del trinomio del miembro izquierdo (COM.2). El estudiante tacha el exponente que aparece fuera de la caja y rellena esta con $\left(x^2-2x+1\right)$, la cual es una expresión igual a la dada en el miembro izquierdo. Muestra haber reconocido algunas relaciones internas entre ambos miembros de la sentencia así como semejanza en estructura externa (ver Figura 6.4.4).

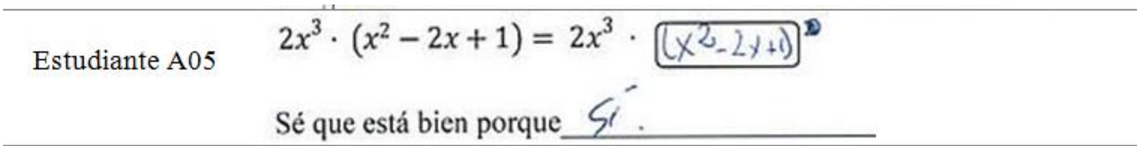



*Figura 6.4.4.* No reconoce alguna de las relaciones internas de la expresión dada.

Cinco estudiantes (A01, A07, A08, A09, A11) completan la expresión pero no mantienen la estructura interna (COM.3); completan con respuestas como $\left(x-2-1\right)$ (ver Figura 6.4.5).

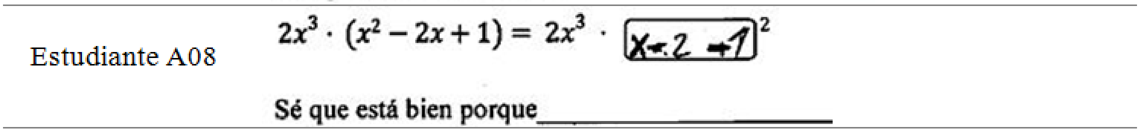



*Figura 6.4.5.* No mantiene la estructura interna ni la externa.

En lo que se refiere a las justificaciones, seis estudiantes se basan en el conocimiento de las reglas de identidad notable al proporcionar justificaciones como las siguientes: "La expresión $\left(x^2-2x+1\right)$ es la diferencia de cuadrado que es igual a $\left(x-1\right)^2$" (ver Figura 6.4.3). Tres estudiantes basan su justificación en procedimientos operacionales, por ejemplo un estudiante completa la caja con la expresión $\left(x^2-2+1^2\right)$ y explica "porque al multiplicar esos números por los anteriores, sale una igualdad".

Seis estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia; tres de ellos (A04, A10 y A20) resuelven correctamente.

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes nueve resuelven correctamente (ver Figura 6.4.3). Seis estudiantes (A01, A05, A07, A08, A09, A11) no resuelven correctamente (ver Figura 6.4.4 y 6.4.5). Un estudiante (A15) se abstiene de resolver esta sentencia.

*Conclusión*

En esta sentencia un número menor de estudiantes han reconocido la estructura interna de la expresión extendida del cuadrado de un binomio en el miembro izquierdo. Este resultado puede interpretarse como que pasar de una expresión contraída a su extendida, en una identidad notable ofrece menos dificultad de percibir por los estudiantes que el proceso inverso. Otra posible interpretación es que es más fácil reconocer dicha estructura cuando tanto la expresión extendida como la factorizada se encuentran presentes. Como ocurre para la sentencia anterior, las respuestas de los estudiantes que no se pueden codificar en la subcategoría COM.1 coinciden también en resolver incorrectamente. Los errores vuelven a ser de no percepción de estructura interna de la expresión basada en la identidad notable.

## Sentencia 3

$$(x-7)\cdot(x+7)\cdot\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}=(x^2-49)\cdot(5x^2-1)$$

Esta igualdad presenta en el miembro izquierdo el producto de tres factores: dos de ellos son binomios con los mismos elementos, uno con suma y otro con resta, el tercer factor es una caja o elemento oculto. El miembro derecho presenta el producto de dos factores, el primero de ellos es un binomio equivalente al producto de los dos primeros factores del miembro izquierdo. El segundo factor es un binomio cuyos elementos y operación no guarda relación con los anteriores.

Identidad notable: Producto de la suma por la diferencia-diferencia de cuadrados

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

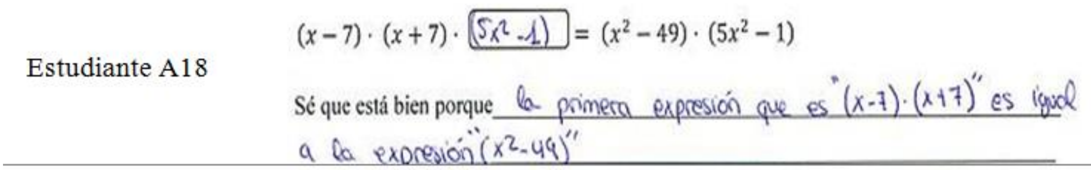
La sentencia 3 es resuelta por dieciséis estudiantes. En la Tabla 6.4.4 se muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en las que se clasifican las actuaciones de los estudiantes en la sentencia 3.

*Tabla 6.4.4.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 3

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 12 | 0 | 4 | 12 | 0 | 4 | 0 | 0 |

*Categoría COM*

En esta sentencia, doce estudiantes (A01, A02, A03, A04, A05, A06, A08, A10, A16, A17, A18 y A20) completan la expresión obteniendo la misma estructura interna en los dos miembros de la igualdad (COM.1). Los estudiantes que han reconocido la equivalencia de la expresión $(x-7)(x+7)$ con la expresión $(x^2-49)$, deducen que la expresión $(5x^2-1)$ es la que falta para completar el espacio en blanco (ver Figura 6.4.6).



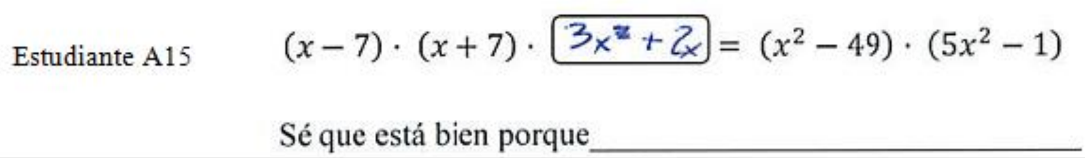
Estudiante A18

$(x-7)\cdot(x+7)\cdot\boxed{5x^2-1} = (x^2-49)\cdot(5x^2-1)$

Sé que está bien porque la primera expresión que es "$(x-7)\cdot(x+7)$" es igual a la expresión "$(x^2-49)$"

*Figura 6.4.6*. Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Cuatro estudiantes (A07, A09, A11, A15) completan la expresión pero no mantienen la estructura interna ni la externa (COM.3). No sustituyen la expresión $(5x^2-1)$ del miembro derecho en el espacio correspondiente en la caja del miembro izquierdo. La Figura 6.4.7 muestra un ejemplo de este tipo de respuesta.



Estudiante A15

$(x-7)\cdot(x+7)\cdot\boxed{3x^2+2x} = (x^2-49)\cdot(5x^2-1)$

Sé que está bien porque____________________

*Figura 6.4.7.* No mantiene la estructura interna ni la externa.

En referencia a la justificación en la sentencia, cinco estudiantes se basan en el conocimiento de las reglas de identidad notable. Al cuestionarles el porqué de su respuesta emiten respuestas como "la primera expresión que es $(x-7)(x+7)$ es igual a la expresión $(x^2-49)$" (ver Figura 6.4.6). Cuatro estudiantes basan su justificación en cálculos realizados con las expresiones. Siete estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes, doce resuelven correctamente (ver Figura 6.4.6). Cuatro estudiantes (A07, A09, A11, A15) resuelven de forma incorrecta.

> *Conclusión*
>
> En esta sentencia, producto de la suma por la diferencia, se vuelve a dar una alta tasa de actuaciones de los estudiantes en las que aprecian la identidad notable distinguiendo las partes de la misma en cada uno de los miembros de la igualdad aún a pesar de estar acompañados del producto de otros factores. No aparecen respuestas codificables en la subcategoría COM.2. Todas las respuestas que caen en COM.1 son correctas. Los errores son de percepción de la estructura interna de las expresiones dadas, en las categorías codificadas dentro de COM.3 también se detectan errores causados por falta de dominio de las reglas sintácticas que rigen la manipulación del simbolismo algebraico.

## Sentencia 4

$$4x^4 - x^2 = \boxed{\_\_\_\_\_\_} \cdot \left(4x^2 - 1\right)$$

El miembro izquierdo de esta igualdad es un binomio de orden cuatro. El miembro derecho de la igualdad está compuesto por un producto, el primer factor de dicho producto está oculto (caja) y el segundo factor es un binomio con diferencia cuyos elementos son los elementos del primer miembro divididos por $x^2$.

Identidad notable: Propiedad distributiva-factor común

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con producto y potencia $4x^2$

*Resultados*

La sentencia 4 es resuelta por dieciséis estudiantes. La Tabla 6.4.5 detalla las frecuencias absolutas de las subcategorías en las que caen las actuaciones de los estudiantes en esta sentencia.

*Tabla 6.4.5*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 4

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 10 | 0 | 6 | 10 | 0 | 6 | 0 | 0 |

*Categoría COM*

En esta sentencia diez estudiantes (A03, A04, A05, A07, A08, A10, A15, A16, A17 y A20) completan la expresión obteniendo la estructura interna de la misma (COM.1). Para realizar esto han de percibir que la expresión $4x^4 - x^2$ es equivalente a $x^2 \cdot \left(4x^2 - 1\right)$ por lo que entendemos que los estudiantes que colocan $x^2$ en el espacio en blanco son conocedores de dicha equivalencia (ver Figura 6.4.8).

Estudiante A08

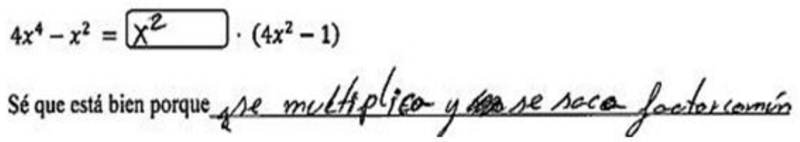



*Figura 6.4.8.* Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Seis estudiantes (A01, A02, A06, A09, A11, A18) completan la expresión pero no mantienen la estructura interna (COM.3) dado que rellenan la caja con datos como $\left(x^2 + 1\right)$ (ver Figura 6.4.9).

Estudiante A02

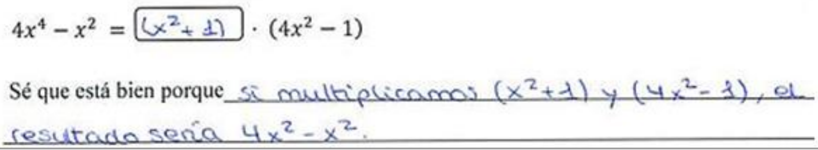



*Figura 6.4.9.* No mantiene la estructura interna ni la externa.

Referente a la justificación, cuatro estudiantes se basan en el conocimiento de las reglas de identidad notable. Los estudiantes al cuestionarles el porqué de su respuesta proporcionaron justificaciones como las siguientes “se multiplica y se saca factor común” (ver Figura 6.4.8). Cinco estudiantes basan su justificación en el procedimiento operacional de la sentencia, emiten justificaciones tales como “si multiplicamos $x^2 + 1$ y $4x^2 - 1$ el resultado sería $4x^2 - x^2$ ” (ver Figura 6.4.9). Siete estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes, diez resuelven correctamente (ver Figura 6.4.8). Seis estudiantes (A01, A02, A06, A09, A11, A18) no resuelven de forma correcta (ver Figura 6.4.9).

> *Conclusión*
>
> En esta sentencia que involucra propiedad distributiva-factor común con términos compuestos con producto y potencia, y que requiere la necesidad de reconocer y transformar una identidad notable, más de la mitad de los estudiantes que realizan la actividad lo hacen de forma correcta. De nuevo no aparecen respuestas codificables en la subcategoría COM.2. Todas las respuestas que coinciden en la subcategoría COM.1 son correctas por tanto los errores son de percepción de la estructura interna de las expresiones dadas.

## Sentencia 5

$$\frac{\left(7x^2+3\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{x^4+1+2x^2}=\frac{\left(7x^2+3\right)\cdot\boxed{\phantom{xxxxxx}}}{\boxed{\phantom{xxxxxx}}^2}$$

Igualdad entre dos fracciones algebraicas. La fracción del miembro izquierdo de la igualdad presenta en el numerador dos binomios de segundo grado con suma, en el denominador un trinomio de cuarto grado. La fracción del miembro derecho presenta en el numerador el producto de dos factores, el primero coincidente con el primero de la fracción de la izquierda y el segundo factor es un hueco o caja; en el denominador presenta una caja elevada al cuadrado.

Identidad notable: Cuadrado de la suma

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con potencia $x^2$

*Resultados*

La sentencia 5 es resuelta por quince estudiantes. En la Tabla 6.4.6 se recoge las frecuencias absolutas de las actuaciones de los estudiantes en cada subcategoría en la sentencia 5.

*Tabla 6.4.6*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 5

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 5 | 3 | 7 | 5 | 9 | 1 | 1 | 0 |

*Categoría COM*

En esta sentencia, cinco estudiantes (A01, A06, A10, A16 y A18) completan la expresión obteniendo la estructura interna de toda la fracción (COM.1). Para resolver adecuadamente, la expresión $x^4+1+2x^2$ requiere ser sustituida por su equivalente. Entendemos que aquellos estudiantes que colocan la expresión $\left(x^2+1\right)$ en ambas cajas en blanco han reconocido la estructura interna de la expresión basada en la identidad notable (ver Figura 6.4.10).

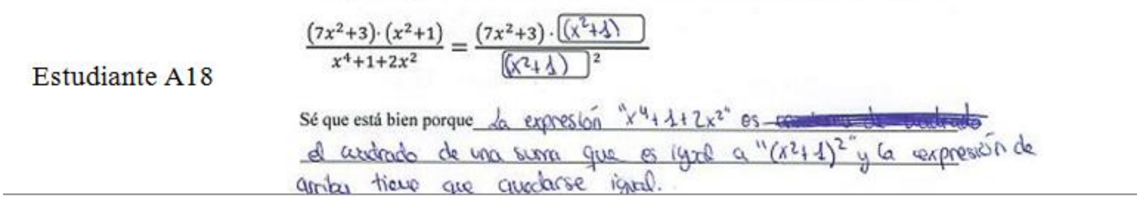



*Figura 6.4.10.* Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Tres estudiantes (A07, A17 y A20) completan la expresión pero fallan en reconocer toda la estructura interna de la sentencia (COM.2). Por ejemplo en la Figura 6.4.11 se muestra el caso de A17 quien completa la caja con la expresión dada en el denominador del miembro izquierdo.

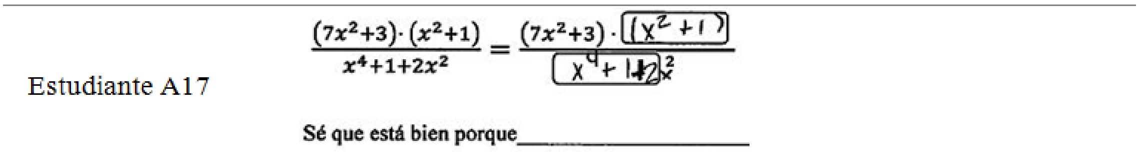



*Figura 6.4.11*. No reconoce alguna de las relaciones internas de la expresión dada.

Siete estudiantes (A02, A03, A04, A05, A08, A09 y A11) completan la expresión pero no mantienen la estructura interna (COM.3). Rellenan las cajas en el numerador con expresiones que sugieren que no han percibido la estructura interna de la expresión (ver Figura 6.4.12).

Estudiante A11

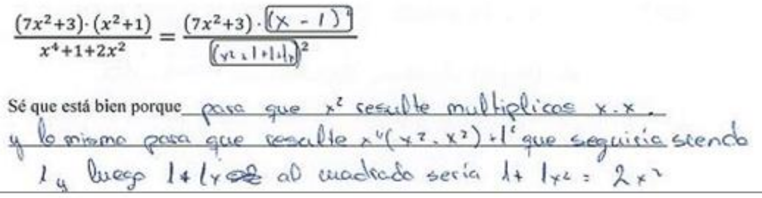



*Figura 6.4.12*. No mantiene la estructura interna ni la externa.

En referencia a la justificación, dos estudiantes basan sus justificaciones en el conocimiento de las reglas de identidad notable dado que proporcionaron justificaciones como las siguientes “La expresión $x^4+1+2x^2$ es el cuadrado de una suma que es igual a $\left(x^2+1\right)^2$ y la expresión de arriba tiene que quedarse igual” (ver Figura 6.4.10). Cuatro estudiantes basan su justificación en procedimientos operacionales al emitir justificaciones como sigue “para que $x^2$ resulte multiplicas $x \cdot x$ y lo mismo para que resulte $x^4\left(x^2 \cdot x^2\right)+1^2$ que seguiría siendo 1 y luego $1+1x$ al cuadrado sería $1+1x^2=2x^2$ (ver Figura 6.4.12). Nueve estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes cinco resuelven correctamente (ver Figura 6.4.10). Nueve estudiantes (A02, A03, A04, A05, A07, A08, A09, A17 y A20) completan parte correctamente y parte incorrectamente. En este caso distinguimos si lo que se hace en la expresión dada es sólo ver lo que está desarrollado en el numerador o si lo que se hace es transformar la expresión del denominador haciendo uso de la identidad notable. Todos los estudiantes rellenan correctamente la caja del numerador, donde no había que reconocer identidad notable (ver Figura 6.4.11). Un estudiante (A11) no resuelve correctamente y un estudiante (A15) no responde.

*Conclusión*

En esta sentencia que consideramos compleja, ya que hay que percibir la igualdad de dos fracciones lo que obliga a establecer relaciones entre numerador y denominador en cada una de las fracciones y a su vez, relaciones entre numeradores y denominadores de ambas fracciones, es bajo el número de estudiantes que la resuelve con éxito. En este caso aparece la posibilidad de que las relaciones establecidas sean solo en parte de la igualdad lo que hace que surjan respuestas que coinciden en la subcategoría

COM.2. Sigue coincidiendo el número de respuestas de la categoría COM.1 con la de respuestas correctas RET.1. Los errores son de percepción de estructura interna de las expresiones basadas en la identidad notable.

## Sentencia 6

$$\frac{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_} - 2m^4}{2m(2m-1)} = \frac{2m^4 \cdot (2m-1)}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_} \cdot (2m-1)}$$

Igualdad de dos fracciones algebraicas. La primera fracción presenta en el numerador una caja (elemento culto) menos un monomio con potencia cuatro y en el denominador el producto de dos factores, un monomio y un binomio, los dos de grado uno, el binomio con la operación de resta. La segunda fracción presenta en el numerador el producto de un monomio de grado cuatro (el mismo que el del numerador de la fracción del miembro izquierdo) y un binomio de grado uno con operación de resta (el mismo que el del denominador de la fracción del miembro izquierdo). En el denominador incluye un producto de dos factores, el primero desconocido y el segundo coincidente con el binomio de grado uno del numerador.

Identidad notable: Propiedad distributiva-factor común.

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con producto y potencia $2m^4$

*Resultados*

La sentencia 6 es resuelta por doce estudiantes. La Tabla 6.4.7 muestra las frecuencias absolutas de las subcategorías que informan acerca de las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de esta sentencia.

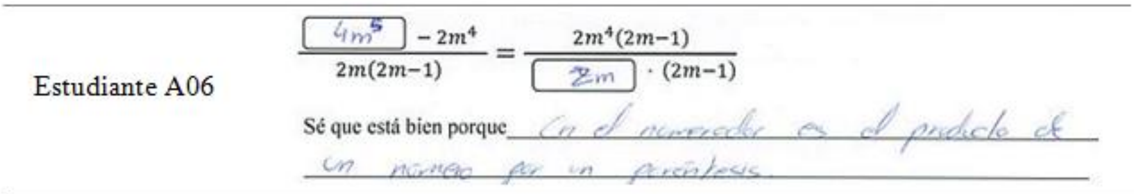
*Tabla 6.4.7*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 6

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 3 | 1 | 6 | 3 | 6 | 1 | 4 | 2 |

*Categoría COM*

En esta sentencia sólo tres estudiantes (A05, A06 y A10) completan la expresión llegando a una igualdad cuyos miembros presentan la misma estructura interna

(COM.1). Estos tres estudiantes muestran que han reconocido la equivalencia de las expresiones del numerador basadas en la identidad notable (ver Figura 6.4.13).

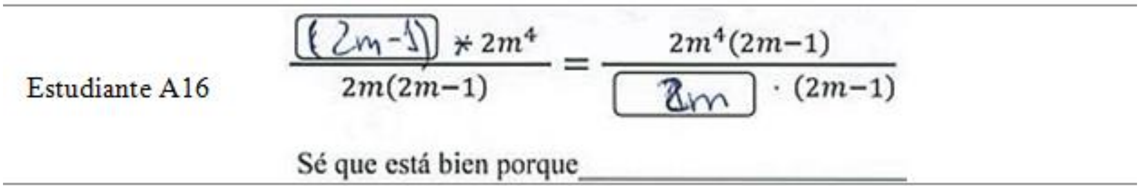

Estudiante A06

$$\frac{\boxed{4m^5} - 2m^4}{2m(2m-1)} = \frac{2m^4(2m-1)}{\boxed{2m} \cdot (2m-1)}$$

Sé que está bien porque En el numerador es el producto de un número por un paréntesis.

*Figura 6.4.13*. Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Un estudiante (A16) completa la expresión sin percibir alguna de las relaciones de los elementos de la misma y cambia un signo para obtener igualdad en los dos miembros. (COM.2) (ver Figura 6.4.14).

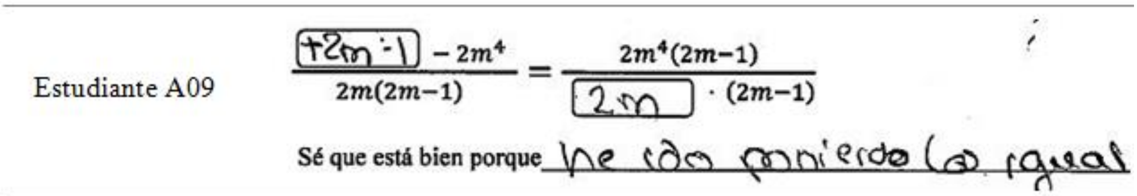

Estudiante A16

$$\frac{\boxed{(2m-1)} * 2m^4}{2m(2m-1)} = \frac{2m^4(2m-1)}{\boxed{2m} \cdot (2m-1)}$$

Sé que está bien porque____________________

*Figura 6.4.14*. No reconoce alguna de las relaciones internas de la expresión dada.

Seis estudiantes (A03, A04, A07, A09, A11 y A20) completan la expresión pero no mantienen la estructura interna (COM.3). Aunque en el denominador han reconocido que la expresión a completar es $2m$, en el numerador dan muestras de no reconocer la equivalencia de las expresiones basadas en la identidad notable, dado que transforman la expresión $2m^4(2m-1)$ en expresiones como por ejemplo $(+2m-1)-2m^4$ (ver Figura 6.4.15).


Estudiante A09

$$\frac{\boxed{+2m-1} - 2m^4}{2m(2m-1)} = \frac{2m^4(2m-1)}{\boxed{2m} \cdot (2m-1)}$$

Sé que está bien porque he ido poniendo lo igual

*Figura 6.4.15*. No mantiene la estructura interna ni la externa.

En lo que se refiere a la justificación, sólo un estudiante se basa en el conocimiento de las reglas de identidad notable dado que justifica como sigue "En el numerador es el producto de un número por un paréntesis" (ver Figura 6.4.13). Tres estudiantes basan su justificación en el procedimiento operacional de la sentencia. Ocho estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes sólo tres resuelven correctamente (ver Figura 6.4.13). Seis estudiantes (A03, A04, A07, A09, A16 y A20) completan parte correctamente y parte incorrectamente. Estos seis casos se deben a que los estudiantes rellenan correctamente la caja del denominador pero no la del numerador.

Un estudiante (A11) no resuelve correctamente. Cuatro estudiantes (A02, A08, A15 y A18) no responden. Dos estudiantes (A01 y A17) resuelven parte de la sentencia correctamente y parte la dejan incompleta, por tanto se consideran no codificables.

> *Conclusión*
>
> Esta sentencia ha resultado la más complicada hasta ahora, una de las razones puede estar en que las "letras" usadas como variables no son las habituales *x* e *y*, sino que se ha tomado *m* y este hecho ha podido confundir a algunos estudiantes. En esta sentencia las relaciones se pueden percibir entre numeradores y denominadores, no obstante aparece el binomio $2m-1$ en el denominador de las dos fracciones y en el numerador del miembro derecho, lo que ha podido actuar de distractor a la hora de encontrar relaciones entre las cuatro expresiones que forman la sentencia. Por otra parte, es necesario ver la aplicación de la propiedad distributiva en el numerador de la fracción del miembro derecho y no es esto lo usual, sino que se usa más a menudo operar en el miembro izquierdo para llegar al miembro derecho, en una igualdad. La presencia de términos compuestos con producto y potencia también ha podido añadir dificultad a la tarea. Los estudiantes que reconocen la estructura también resuelven correctamente por lo que en este caso también los errores se deben a no reconocer la estructura.

## Sentencia 7

$$\frac{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}-1}$$

El miembro izquierdo de esta igualdad está formado por una fracción algebraica: en el numerador aparece un producto de elemento desconocido (caja) por un binomio de grado dos con suma, y en el denominador un producto de dos binomios de grado uno, uno con suma y otro con resta, con el mismo término independiente que el del numerador. La fracción del miembro derecho está formada en su numerador, por un producto de dos binomios de grado dos, uno con suma y otro con diferencia, coincidiendo el de suma con el binomio que aparece en el numerador de la fracción del miembro izquierdo; en el denominador contiene un binomio formado por una caja y el mismo término independiente común al resto de los binomios de toda la sentencia.

Identidad notable: Producto de la suma por la diferencia- diferencia de cuadrados

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

La sentencia 7 es resuelta por doce estudiantes. En la Tabla 6.4.8 se recogen las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que nos informan de las actuaciones de los estudiantes en esta sentencia.

*Tabla 6.4.8.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 7

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 5 | 0 | 6 | 5 | 5 | 1 | 4 | 1 |

*Categoría COM*

Cinco estudiantes (A03, A06, A10, A18 y A20) rellenan las cajas de manera que obtienen la misma estructura interna en los dos miembros de la igualdad (COM.1). En este caso los cinco estudiantes identifican que la expresión del numerador se completa con el factor que aparece en el numerador del miembro de la derecha que no está en el miembro de la izquierda y que la expresión $(x+1)(x-1)$ corresponde a la identidad producto de una suma por diferencia, por tanto aplican el desarrollo de la misma a dicha expresión, escribiendo $x^2$ en el espacio en blanco del miembro derecho (ver Figura 6.4.16).

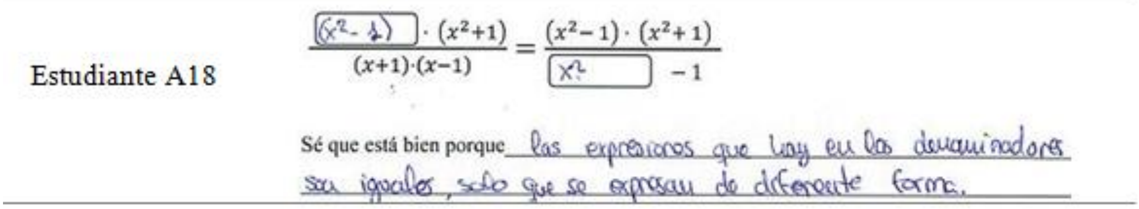



*Figura 6.4.16.* Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Seis estudiantes (A01, A04, A07, A09, A11 y A16) completan la expresión pero no mantienen la estructura interna en la misma (COM.3) (ver Figura 6.4.17).

Estudiante A01

$$\frac{\boxed{(x^2-1)}\cdot(x^2+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}{\boxed{(x^2+1)}\quad -1}$$

Sé que está bien porque

*Figura 6.4.17.* No mantiene la estructura interna ni la externa.

En cuanto a la justificación, sólo dos estudiantes se basan en el conocimiento de las reglas de identidad notable dado que justifican como sigue "El producto de una resta por una suma es igual a la diferencia entre el cuadrado del primero y el cuadrado del segundo". Tres estudiantes no permiten ver en su justificación lo que han pensado para dar su respuesta "Los he puesto iguales". Siete estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes, asistente a la sesión, cinco resuelven correctamente (ver Figura 6.4.16). Cinco estudiantes (A01, A04, A07, A09 y A16) completan parte correctamente y parte incorrectamente. En estos cinco casos los estudiantes rellenan correctamente la caja del numerador, sin embargo la expresión $(x+1)(x-1)$ en el miembro izquierdo del denominador requiere ser identificada para posteriormente transformarla en diferencia de cuadrados. Un estudiante (A11) no resuelve correctamente.

> *Conclusión*
>
> Como ocurre en la sentencia 5 hay un grupo de estudiantes que la resuelve correctamente. Se trata de una sentencia en la que la variable se expresa con la letra *x*. La comparación entre numeradores permite ver el elemento que falta, y en los denominadores, en el del miembro izquierdo aparece el producto de dos binomios (suma por diferencia) por lo que el seguimiento de la regla les lleva a que en la derecha ha de aparecer una diferencia entre los elementos de los binomios elevados al cuadrado. Por otra parte la expresión no presenta elementos compuestos y no es necesario relacionar los numeradores con los denominadores. Los errores que cometen los

estudiantes son debidos a no tomar expresiones apropiadas para obtener la misma estructura interna en los dos miembros de la igualdad.

## Sentencia 8

$$\frac{x^2+25-10x}{(x-5)(x-3)}=\frac{(x-5)\cdot\boxed{\_\_\_\_\_\_\_}}{(x-5)\cdot\boxed{\_\_\_\_\_\_\_}}$$

En esta igualdad de fracciones algebraicas la primera de dichas fracciones, sin elementos ocultos, presenta en el numerador un polinomio de segundo grado (versión extendida del binomio elevado al cuadrado) y en el denominador el producto de dos binomios de grado uno, con resta, uno de dichos binomios coincide con la versión extendida de su cuadrado que aparece en el numerador. En el miembro derecho, la fracción presenta numerador y denominador con la misma composición, el producto del binomio cuyo cuadrado, en versión extendida, aparece en el numerador de la fracción del miembro izquierdo, y una caja que representa una expresión oculta.

Identidad notable: Cuadrado de la diferencia

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

La sentencia 8 es resuelta por nueve estudiantes. La Tabla 6.4.9 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que detallan las actuaciones de los estudiantes en esta sentencia.

*Tabla 6.4.9.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 8

| COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 0 | 6 | 1 | 5 | 1 | 7 | 2 |

*Categoría COM*

Un estudiante (A06) completa la expresión obteniendo la estructura interna que le corresponde (COM.1). Este estudiante percibe que $x^2+25-10x$ es equivalente al producto $(x-5)\cdot(x-5)$ pues se trata del binomio elevado al cuadrado (ver Figura 6.4.18).

Estudiante A06

$$\frac{x^2+25-10x}{(x-5)\cdot(x-3)} = \frac{(x-5)\cdot\boxed{(x-5)}}{(x-5)\cdot\boxed{(x-3)}}$$

Sé que está bien porque es el cuadrad de una resta

*Figura 6.4.18.* Completa la expresión obteniendo la estructura interna.

Seis estudiantes (A01, A04, A07, A09, A10 y A11) completan la expresión pero no mantienen la estructura interna (COM.3). Rellenan la caja del denominador correctamente con la expresión $(x-3)$ pero no así la del numerador (ver Figura 6.4.19). Al no justificar sus respuestas no se percibe cómo ven las relaciones entre las expresiones.

Estudiante A01

$$\frac{x^2+25-10x}{(x-5)\cdot(x-3)} = \frac{(x-5)\cdot\boxed{(x-5-10x)}}{(x-5)\cdot\boxed{(x-3)}}$$

Sé que está bien porque_______________

*Figura 6.4.19.* No mantiene la estructura interna.

En lo que concierne a la justificación, sólo un estudiante basa sus justificaciones en el conocimiento de las reglas de identidad notable, dado que explica diciendo: "Es el cuadrado de una resta" (ver Figura 6.4.18). Dos estudiantes basan su justificación en el procedimiento operacional de la sentencia y seis estudiantes no dan justificaciones del porqué de su respuesta en esta sentencia.

*Categoría RET*

De los dieciséis estudiantes sólo uno (A06) resuelve correctamente (ver Figura 6.4.18). Es el mismo que clasificamos en la subcategoría COM.1. Cinco estudiantes (A01, A04, A07, A09 y A10) completan parte correctamente y parte incorrectamente, las incorrecciones se producen al escribir expresiones algebraicas que no permiten que los dos miembros de la igualdad sean equivalentes.

*Conclusión*

Esta sentencia, por las respuestas de los estudiantes, ha resultado aún de mayor complejidad que la número 6 de esta sesión. Los términos son simples, la variable está representada por $x$ y la caja del denominador coincide con un factor del denominador de la fracción del miembro izquierdo, en esto coincide con otras sentencias anteriores que obtienen mejor rendimiento de los estudiantes. Lo especial en esta sentencia creemos verlo en que presentan el mismo aspecto numerador y denominador, además de que en la fracción del miembro izquierdo presenta la expresión del cuadrado de una diferencia de forma extendida. Como ocurre en otros casos de la sesión 2, los estudiantes perciben con mayor facilidad la equivalencia cuando la expresión contraída se presenta antes que la extendida.

### 6.4.5 Análisis general de los resultados de la 1ª tarea- Sesión 2

En esta sección se recoge un resumen general de las principales actuaciones mostradas por los estudiantes en la resolución de las sentencias de la primera tarea presentadas en el punto anterior.

La Tabla 6.4.10 recoge de forma conjunta los datos conjuntos que se han ido recogiendo parcialmente para cada sentencia.

*Tabla 6.4.10*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sesión 4

| Sentencia | COM | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 12 | 0 | 3 | 12 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 9 | 1 | 5 | 9 | 0 | 6 | 1 | 0 |
| 3 | 12 | 0 | 4 | 12 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| 4 | 10 | 0 | 6 | 10 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| 5 | 5 | 3 | 7 | 5 | 9 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 3 | 1 | 6 | 3 | 6 | 1 | 4 | 2 |
| 7 | 5 | 0 | 6 | 5 | 5 | 1 | 4 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 6 | 1 | 5 | 1 | 7 | 2 |
| Frecuencia | 57 | 5 | 43 | 57 | 25 | 23 | 18 | 5 |
| % | 44.5 | 3.9 | 33.6 | 44.5 | 19.5 | 18.0 | 14.0 | 3.9 |

Al analizar las actuaciones de los estudiantes en las ocho sentencias y de acuerdo a la Tabla 6.4.10, se observa que en el 44.5% de las sentencias los estudiantes completan la expresión obteniendo la estructura interna correspondiente a la identidad notable inmersa. Muestran reconocer relaciones internas entre los términos, dado que hacen uso de la identidad notable para transformar alguna expresión (COM.1, ver Figura 6.4.3). En el 3.9% de las sentencias, los estudiantes completan la expresión obteniendo la estructura interna pero no reconociendo o utilizando alguna de las relaciones internas de las expresiones dadas (COM.2, ver Figura 6.4.4). En el 33.6% de las sentencias, los estudiantes completan la expresión pero no mantienen la estructura interna ni la externa (COM.3, ver Figura 6.4.5).

Un 44.5% de las sentencias realizadas por los estudiantes fueron correctas. En el 19.5% de las sentencias los estudiantes completan parte correctamente y parte de forma incorrecta y el 18% de las sentencias fueron resueltas de forma incorrecta. Un 14% de las sentencias no fueron resueltas y el 3.9% se consideran no codificables.

En esta sesión se han dado diferencias entre las resoluciones de las primeras cuatro sentencias en las cuales tenían que completar una caja y las cuatro últimas sentencias donde tenían que completar dos cajas. En las primeras cuatro sentencias los estudiantes completan en su gran parte correctamente, no se registran datos no codificables y sólo en dos resoluciones hay abstinencia al resolver. Mientras que en las cuatro últimas sentencias que involucran dos cajas a completar es bajo el número de respuestas correctas, es mayor el número de respuestas no codificables y se observa mayor número de respuestas no respondidas (ver Tabla 6.4.10).

En la Tabla 6.4.10 se observa que entre las cuatro primeras sentencias que incluyen completar una caja, en la sentencia 2 que involucra la identidad notable cuadrado de la diferencia es donde se presenta menor número de respuestas correctas. Igual ocurre en las 4 últimas sentencias donde se puede observar que de las cuatro identidades notables presentadas es en la sentencia 8 que involucra el cuadrado de la diferencia donde el número de respuestas correctas es más bajo.

### 6.4.6 Fortalezas y debilidades de la sesión 4

En esta sesión señalamos como fortaleza el haber propuesto unas actividades algebraicas que al tener una única salida, como en este caso es el completar la igualdad, estimula el uso del pensamiento en el estudiante dado que les promueve la búsqueda de entre sus conocimientos de la identidad notable que corresponde a la expresión oculta o faltante (incluyendo las sentencias 1 y 3 en las cuales se requiere que reconozcan la equivalencia entre partes de la identidad notable implícita en la igualdad).

Como debilidad podemos señalar que para aquellos estudiantes que aún no tienen el dominio de las identidades notables se les dificulta la percepción de la estructura con la cual se debe completar la caja o expresión oculta, obteniendo así respuestas no satisfactorias al no tener una segunda opción de resolución para la tarea.

Otra de las fortalezas que podemos señalar es que la primera parte de la tarea guarda equilibrio respecto a si las expresiones a transformar están en su versión contraída o extendida. Más sin embargo, para la segunda parte de la tarea tres de las cuatro sentencias están propuestas para transformar de su versión extendida a la contraída, además de estar en forma fraccionaria lo cual se convierte en una debilidad para esta parte de la tarea.

## *6.5 Sesión 5*

Esta es la última sesión del experimento de enseñanza. En la misma se proponen dos tareas que conllevan diferentes acciones que han sido trabajadas en sesiones anteriores (no se asigna ninguna tarea de ampliación). En esta sección del capítulo se atiende a cada una de las cuatro igualdades propuestas en la primera tarea de la sesión 5. Posterior a ésta se describen los datos y resultados de cada una de las cuatro sentencias propuestas en la segunda tarea.

### 6.5.1 Categorías utilizadas para el análisis de la 1ª tarea- Sesión 5

Hemos utilizado dos categorías REP y RET en el análisis de la resolución de cada una de las igualdades de la Tarea 1. La primera categoría está relacionada con el sentido estructural de los estudiantes. La segunda categoría es la que consideramos para todas las sesiones y recoge otros elementos de interés de las respuestas de los estudiantes relacionados con las dificultades y errores que se ponen de manifiesto (ver Tabla 6.5.1).

*Tabla 6.5.1*. Categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la Sesión 5.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| REP<br>Reproducir la estructura dada | REP.1<br>Se reproduce la estructura tanto externa como interna en ambos miembros de la igualdad. |
| | REP.2<br>Se reproduce la estructura externa y no la interna. Las relaciones internas de la expresión se conservan solo parcialmente. |

*Tabla 6.5.1*. Categorías para analizar el desempeño de los estudiantes en la Sesión 5.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| | REP.2a No se reproduce (o solo lo hace parcialmente) las relaciones internas “intramiembros”[7] pero sí las “entremiembros”.<br>REP.2b No se reproduce (o solo lo hace parcialmente) las relaciones internas “entremiembros” pero sí las “intramiembros. |
| | REP. 3<br>Sólo se reproduce la estructura externa. |
| RET<br>Realizar correctamente la reproducción de la igualdad dada | RET.1<br>Se realiza la reproducción de la igualdad correctamente.<br>RET.2<br>Se realiza parte de la reproducción de la igualdad correctamente y parte incorrectamente.<br>RET.3<br>Se realiza la reproducción de la igualdad de forma incorrecta. |
| N<br>No realizar o no poder codificar la respuesta | NR<br>No se realiza.<br>NC<br>No codificable. |

### 6.5.2 Observaciones sobre la Sesión 5

A esta sesión asiste un total de diecinueve estudiantes. La sesión transcurre con normalidad, los estudiantes se muestran animados.

### 6.5.3 Indicación para las tareas de la Sesión 5

En la primera tarea de esta sesión se pide al estudiante: *“Al simplificar varias fracciones algebraicas se han obtenido las siguientes igualdades. Analiza estas*

[7]En las igualdades entre fracciones algebraicas utilizadas, llamamos relación intramiembros a la relación existente entre numerador y denominador de la misma fracción, en un mismo miembro de la igualdad y relación entremiembros a aquellas relaciones entre componentes de las diferentes fracciones de la igualdad.

*igualdades y construye otras igualdades que tengan la misma estructura pero con diferentes números y letras".*

### 6.5.4 Actuaciones de los estudiantes en la 1ª tarea de la Sesión 5

En esta sección se presenta una descripción de los resultados obtenidos al clasificar las producciones de los estudiantes utilizando las categorías anteriormente descritas. Se muestran ejemplos que ilustran las distintas actuaciones de los estudiantes y se finaliza con una pequeña conclusión de los datos más relevantes suscitados en cada igualdad.

**Igualdad 1**

$$\frac{a^2-14a+49}{(a-7)^2\cdot(a-7)}=\frac{1}{a-7}$$

En esta igualdad de dos fracciones algebraicas, la fracción del miembro izquierdo está formada en el numerador por un polinomio de segundo grado, desarrollo del binomio de una diferencia al cuadrado; en el denominador un producto de dos binomios iguales, uno de ellos al cuadrado, coincide con la expresión contraida del polinomio del numerador. La fracción del miembro derecho está compuesta por una fracción donde el numerador es un número y el denominador es un binomio con resta de grado 1.

Identidad notable: Cuadrado de una diferencia

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

La igualdad 1 es resuelta por 19 estudiantes. La Tabla 6.5.2 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que nos informan acerca de las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de esta igualdad.

*Tabla 6.5.2.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Igualdad 1

| REP | | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REP.1 | REP.2a | REP.2b | REP.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 13 | 3 | 0 | 2 | 13 | 3 | 2 | 0 | 1 |

*Categoría REP*

Trece estudiantes (A01, A02, A03, A04, A06, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A16 y A18) reproducen la estructura en ambos miembros de la igualdad estableciendo relación entre los mismos (REP.1). Los estudiantes muestran reconocer las relaciones internas entre el numerador y denominador del miembro izquierdo y su relación con la expresión del miembro derecho, dado que la igualdad que generan presenta conexiones entre las subestructuras de la expresión fraccionaria del miembro izquierdo y de éstas con las del miembro derecho (ver Figura 6.5.1). En la figura indicada el estudiante justifica de la siguiente forma: "En la primera fracción algebraica el numerador es el cuadrado de una diferencia que es igual a $(a-7)^2$ que hay en el denominador, por lo tanto se simplifica $a^2-14a+49$ con $(a-7)^2$ por eso lo que he hecho ha sido hacer una diferencia de cuadrado". Suponemos que el estudiante en este caso aunque finaliza diciendo una diferencia de cuadrados lo que quiere decir es una diferencia al cuadrado o lo que es igual, el cuadrado de una diferencia.

Estudiante A18

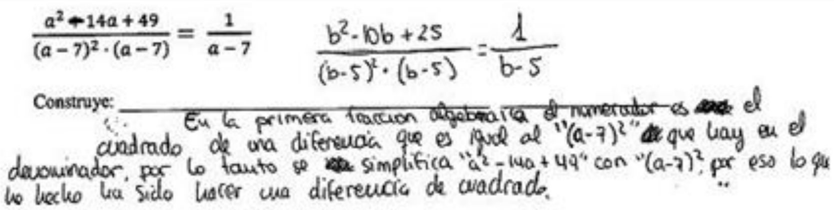



*Figura 6.5.1.* Reproduce la estructura conservando relaciones internas y relacionando ambos miembros.

Tres estudiantes (A05, A07 y A08) reproducen parcialmente las relaciones "intramiembros" y reproducen totalmente las "entremiembros" (REP.2a). Dichos estudiantes generan correctamente el producto de binomios en el denominador. Posteriormente, en el numerador reproducen la estructura del polinomio de segundo orden, pero no establecen la relación interna entre los coeficientes del mismo ni de éstos con el término independiente de los binomios del denominador (ver Figura 6.5.2).

Estudiante A05

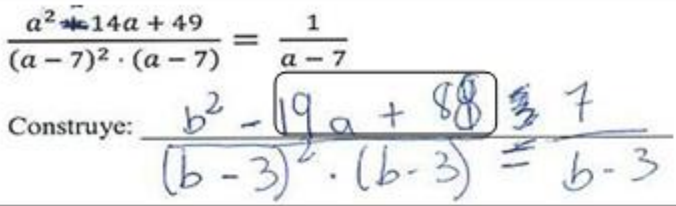



*Figura 6.5.2.* Reproducen parcialmente las relaciones internas (intramiembros).

Dos estudiantes (A15 y A20) sólo reproducen la estructura externa, dado que no relacionan numerador con denominador en el miembro izquierdo, ni perciben la relación entre los términos del miembro izquierdo con los del miembro derecho (REP.3, ver Figura 6.5.3).

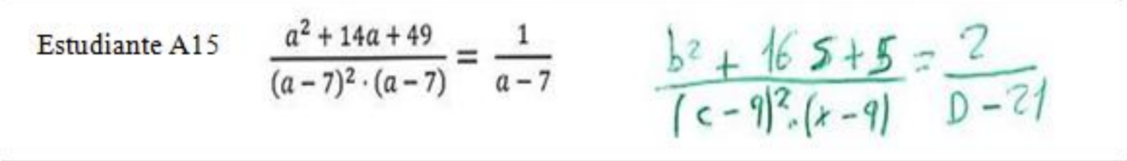



*Figura 6.5.3*. Sólo reproduce la estructura externa.

*Categoría RET*

Trece estudiantes (A01, A02, A03, A04, A06, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A16, A18) realizan la reproducción de la igualdad dada correctamente (RET.1, ver Figura 6.5.1).

Tres estudiantes (A05, A07 y A08) realizan parte de la reproducción correctamente y parte incorrectamente (RET.2, ver Figura 6.5.2). En este caso reproducen correctamente los binomios de los denominadores, en los cuales no se requiere actuar utilizando la identidad notable, no obstante en el numerador del miembro izquierdo sí se requiere el reconocimiento de la identidad notable para generar la estructura interna que corresponde al cuadrado de una diferencia (ver Figura 6.5.2).

Dos estudiantes (A15 y A20) no realizan la reproducción de forma correcta (RET.3, ver Figura 6.5.3) dado que no relacionan el polinomio de segundo grado del numerador con los binomios de los denominadores en el miembro izquierdo ni relacionan los términos de los factores en los denominadores de la igualdad o no conservan términos invariantes de la igualdad dada. Los datos de un estudiante (A17) se consideran no codificables.

> *Conclusión*
>
> En la resolución de esta igualdad se obtiene que todos los estudiantes han realizado la tarea y en todos los casos han mantenido la estructura externa de las expresiones (se ve en las sumas de REP.1, REP.2a y REP.3). La estructura interna es percibida por un número elevado de los 19 estudiantes asistentes a pesar que la expresión inicial es el miembro extendido de una identidad notable (situación ésta que creemos ha creado algunas dificultades en sesiones anteriores), cuya expresión contraída aparece en el denominador. La reproducción de la estructura interna exige que el

estudiante perciba la igualdad globalmente y a su vez cada fracción separadamente también sea contemplada en su totalidad.

## Igualdad 2

$$\frac{x^2\cdot(11x-1)}{x^3-6x^2}=\frac{11x-1}{x-6}$$

Esta igualdad entre dos fracciones algebraicas, presenta en el numerador del miembro izquierdo de la igualdad, el producto de dos factores, uno de ellos es un monomio de segundo grado y el otro es un binomio de primer grado con resta; en el denominador contiene un binomio de tercer grado sin termino independiente. En el miembro derecho de la igualdad, el numerador está formado por un binomio que coincide con el segundo factor del numerador de la fracción del miembro izquierdo y en el denominador un binomio de primer grado con resta que coincide con uno de los factores que se obtiene al sacar factor común en el denominador del miembro izquierdo.

Identidad notable: Propiedad distributiva-factor común

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con potencias $x^2$

*Resultados*

La igualdad 2 es resuelta por 18 estudiantes. La Tabla 6.5.3 muestra las frecuencias absolutas de cada subcategoría en las que se recogen detalles de las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de esta igualdad.

*Tabla 6.5.3*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Igualdad 2.

| REP | | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REP.1 | REP.2a | REP.2b | REP.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 15 | 0 | 2 | 0 | 15 | 2 | 0 | 1 | 1 |

*Categoría REP*

Quince estudiantes (A01, A03, A04, A06, A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A18 y A20) reproducen las estructuras de ambos miembros de la igualdad relacionándolas (REP.1). Dichos estudiantes conservan la relación entre el factor común $x^2$ del numerador con el denominador, en el cuál ejerce de factor común. Como también conservan las relaciones entre los numeradores y denominadores por separado (Figura 6.5.4).

Estudiante A20 $\frac{x^2\cdot(11x-1)}{x^3-6x^2}=\frac{11x-1}{x-6}$

Construye: $\frac{b^2\cdot(13b-2)}{b^3-8b^2}=\frac{13b-2}{b-8}$

*Figura 6.5.4.* Reproduce la estructura conservando relaciones internas y relacionando ambos miembros.

Dos estudiantes (A05 y A08) reproducen parcialmente las relaciones internas "entremiembros" dado que A05 no conserva la relación interna entre el binomio del numerador del miembro derecho con el segundo factor del numerador en el miembro izquierdo y A08 no conserva la relación interna entre los coeficientes de los segundos términos en los denominadores (ver recuadros en Figura 6.5.5), sin embargo sí reproducen las "intramiembros" (REP.2b). Es decir, no relacionan el miembro izquierdo con el miembro derecho, pero conservan las relaciones dentro de cada miembro. En el caso de A08, al factorizar la expresión $y^3-4y^2$ en el denominador izquierdo obtendría la expresión $y^2\cdot(y-4)$ donde $(y-4)$ figuraría como el denominador en la expresión del miembro derecho.

Estudiante A08 $\frac{x^2\cdot(11x-1)}{x^3-6x^2}=\frac{11x-1}{x-6}$

Construye: $\frac{y^2\cdot(2y-3)}{y^3-\boxed{4}y^2}=\frac{2y-3}{y-\boxed{6}}$

*Figura 6.5.5*. Reproducen parcialmente las relaciones internas (entremiembros).

*Categoría RET*

Quince estudiantes (A01, A03, A04, A06, A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A18 y A20) realizan la reproducción de la igualdad correctamente (RET.1, ver Figura 6.5.4). Dos estudiantes (A05 y A08) realizan parte de la reproducción correctamente y parte incorrectamente (RET.2). A08 realiza la reproducción de los numeradores en los cuales no se requiere actuar utilizando la identidad notable, no obstante no realiza la reproducción entre los denominadores de la igualdad que genera en las cuales si se requiere la aplicación de la identidad notable. Mientras A05 no conserva la relación interna entre binomios de los numeradores, es decir no relacionan el miembro izquierdo con el miembro derecho, pero conservan las relaciones dentro de cada miembro (ver Figura 6.5.5). Los datos de un estudiante (A17) se consideran no codificables. Un estudiante (A02) no responde (NR).

*Conclusión*

La actividad con esta expresión algebraica formada por una igualdad de dos fracciones ha sido realizada correctamente por un número elevado de los estudiantes asistentes a la sesión. Las fracciones componentes de la igualdad están relacionadas tanto entre como intra miembros, lo que exige una contemplación de conjunto para la percepción de estas relaciones. La propiedad distributiva está presente en su doble sentido lo que puede haber facilitado el reconocimiento de la aplicación de la misma en el momento de reproducir la estructura en una nueva expresión. Los errores que cometen los estudiantes están relacionados con la falta de reconocimiento de relaciones entre las expresiones.

## Igualdad 3

$$\frac{\left(9x^2-1\right)\cdot\left(7x+1\right)}{\left(3x+1\right)\left(3x-1\right)}=7x+1$$

Esta igualdad presenta en su miembro izquierdo una fracción algebraica y en su miembro derecho un binomio de primer grado. La fracción está formada en el numerador por el producto de dos factores cada uno de ellos es un binomio, el primero es de grado dos y con resta, el segundo es de grado uno con suma, coincide con el miembro derecho de la expresión. El denominador es un producto de dos factores, binomios los dos, con los mismos elementos, uno con suma y el otro con diferencia. Dicho producto es equivalente al primer factor del numerador.

Identidad notable: Producto de suma por diferencia-diferencia de cuadrados.

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con producto $3x$.

*Resultados*

La igualdad 3 es resuelta por 19 estudiantes. La Tabla 6.5.4 detalla la frecuencia absoluta de cada una de las subcategorías que tratan de las actuaciones de los estudiantes en esta igualdad.

*Tabla 6.5.4.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Igualdad 3.

| REP | | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REP.1 | REP.2a | REP.2b | REP.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 11 | 6 | 0 | 1 | 11 | 6 | 1 | 0 | 1 |

*Categoría REP*

Once estudiantes (A01, A02, A03, A06, A09, A11, A12, A13, A14, A17 y A18) reproducen las estructuras de ambos miembros de la igualdad (REP.1). En la igualdad que generan dichos estudiantes se conserva la equivalencia entre los factores binomios del denominador $(3x+1)(3x-1)$ y el primer factor del numerador $(9x^2-1)$. El estudiante de la Figura 6.5.6 justifica de la siguiente forma: "Son iguales ya que el $(4x^2-1)$ está desarrollado en el denominador y al simplificar queda el $(3x+1)$".

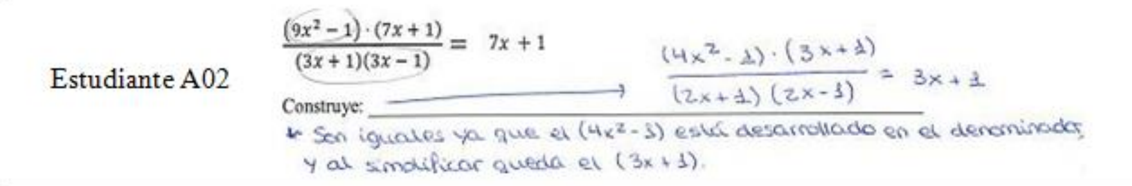



*Figura 6.5.6.* Reproduce la estructura conservando relaciones internas y relacionando ambos miembros.

Seis estudiantes (A04, A05, A07, A08, A16 y A20) reproducen parcialmente las relaciones internas "intramiembros" no obstante sí reproducen las "entremiembros" (REP.2a). Los estudiantes generan correctamente el producto de binomios en el denominador, sin embargo, en el numerador no muestran reconocer la diferencia de cuadrados que conlleva el primer factor ni muestran percibir la relación interna entre los coeficientes de los términos de este binomio y los coeficientes de los términos de los factores binomios del denominador (REP.2a, ver Figura 6.5.7). En el ejemplo indicado se observa que al producto de binomios $(4a+2)(4a-2)$ no se le hace corresponder la diferencia de cuadrados $(16a^2-4)$.

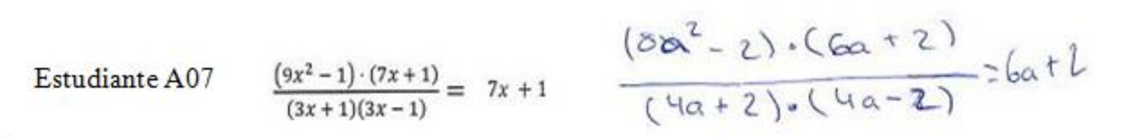



*Figura 6.5.7.* Reproducen parcialmente las relaciones internas (intramiembros).

Un estudiante (A15) sólo reproduce la estructura externa. No muestra percibir la relación entre los términos del segundo factor en el numerador del miembro izquierdo con los términos del binomio en el miembro derecho, no relaciona los términos de los factores en el denominador de la fracción ni establece relación entre los términos de los factores que componen el denominador del miembro izquierdo con el primer factor del numerador en este miembro (REP.3, ver Figura 6.5.8).

| | | |
|---|---|---|
| Estudiante A15 | $\frac{(9x^2-1)\cdot(7x+1)}{(3x+1)(3x-1)} = 7x+1$ | $\frac{(11_{z^2}-3)\cdot(21_x+5)}{(5x+4)(7_x+21)} = 8.+9$ |

*Figura 6.5.8*. Sólo reproduce la estructura externa.

*Categoría RET*

Once estudiantes (A01, A02, A03, A06, A09, A11, A12, A13, A14, A17 y A18) realizan la reproducción de la igualdad correctamente (RET.1, ver Figura 6.5.6). Seis estudiantes (A04, A05, A07, A08, A16 y A20) realizan parte de la reproducción correctamente y parte incorrectamente (RET.2, ver Figura 6.5.7). Reproducen correctamente los binomios en el denominador, sin embargo en el primer factor binomio del numerador, que involucra la identidad notable diferencia de cuadrados, no reproducen correctamente. Un estudiante (A15) no realiza la reproducción de forma correcta (RET.3). Los datos de un estudiante (A10) se consideran no codificables.

*Conclusión*

Las respuestas dadas por los estudiantes a esta sentencia situadas en la subcategoría de nivel 1 han sido menos frecuentes que en las dos sentencias anteriores. Además de presentar con las anteriores la diferencia propia de la identidad notable, otra diferencia entre ellas es que el miembro derecho contiene una expresión no fraccionaria. La relación entre sus elementos, centrada en la identidad notable, exige percibir en el numerador de la fracción una diferencia de cuadrados cuya equivalencia, producto de un binomio suma por otro binomio de resta entre los mismos números, está en el denominador. Los errores en esta igualdad se producen, fundamentalmente, al reproducir el numerador de la primera fracción y no establecer relaciones intramiembros entre los elementos de la fracción.

## Igualdad 4

$$\frac{\left(5a^2-1\right)\cdot\left(5a^2+1\right)^2}{25a^4+1+10a^2}=5a^2-1$$

En esta igualdad, como en la anterior se tiene el miembro izquierdo formado por una fracción y el miembro derecho de la igualdad formado por un binomio, en este caso de segundo grado con resta. En la fracción aparece en el numerador un producto de dos factores, el primero coincide con el miembro derecho de la igualdad; el segundo factor es un binomio de segundo grado, con suma, elevado al cuadrado. En el denominador de la fracción hay un polinomio de cuarto grado, cuadrado del binomio del numerador.

Identidad notable: Cuadrado de una suma.

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con producto y potencia $5a^2$.

*Resultados*

La igualdad 4 es resuelta por 19 estudiantes. La Tabla 6.5.5 muestra las frecuencias absolutas de cada subcategoría en las cuales se detalla las actuaciones de los estudiantes en esta igualdad.

*Tabla 6.5.5*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Igualdad 4.

| REP | | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| REP.1 | REP.2a | REP.2b | REP.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 11 | 5 | 0 | 3 | 11 | 5 | 3 | 0 | 0 |

*Categoría REP*

Once estudiantes (A01, A02, A03, A04, A09, A11, A12, A13, A14, A17 y A18) reproducen la estructura relacionando ambos miembros de la igualdad así como numerador y denominador de la fracción algebraica del miembro izquierdo (REP.1). En la Figura 6.5.9 se observa que A02 ha generado en el numerador el binomio cuadrado $\left(3x^2+1\right)^2$ y en el denominador la expresión $\left(9x^4+1+6x^2\right)$ conservando así la relación interna inmersa en la estructura del miembro izquierdo. De igual forma conserva el binomio $3x^2-1$ en ambos miembros de la igualdad. El estudiante justifica de la siguiente forma: “Aquí está desarrollado en el denominador el $\left(3x^2+1\right)^2$ y al simplificar queda $3x^2-1$”.

Estudiante A02

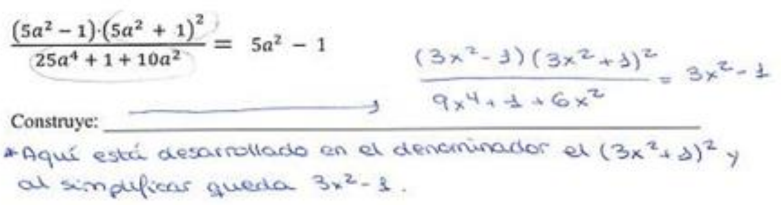



*Figura 6.5.9.* Reproduce la estructura conservando relaciones internas y relacionando ambos miembros.

Cinco estudiantes (A07, A08, A10, A16 y A20) reproducen parcialmente las relaciones internas “intramiembros” no obstante sí reproducen las “entremiembros” (REP.2a). Los cinco estudiantes reproducen correctamente el producto de binomios en el numerador, sin embargo en el denominador no muestran reconocer el polinomio de cuarto grado como un trinomio cuadrado compuesto, ni muestran percibir la relación interna entre los coeficientes de este trinomio y los coeficientes de los factores binomios de ambos numeradores (ver Figura 6.5.10).

Estudiante A20

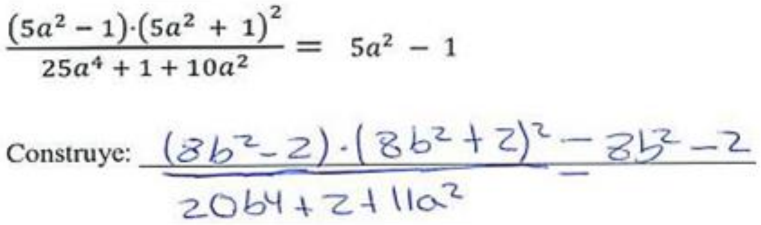



*Figura 6.5.10.* Reproducen parcialmente las relaciones internas (intramiembros).

Tres estudiantes (A05, A06 y A15) sólo reproducen la estructura externa. No relacionan numerador con denominador en el miembro izquierdo, ni muestran percibir la relación entre los factores binomios del miembro izquierdo con el binomio del miembro derecho (ver Figura 6.5.11).

Estudiante A15

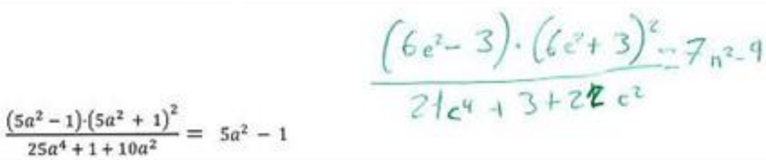



*Figura 6.5.11*. Sólo reproduce la estructura externa.

*Categoría RET*

Once estudiantes (A01, A02, A03, A04, A09, A11, A12, A13, A14, A17 y A18) realizan la reproducción de la igualdad correctamente (RET.1, ver Figura 6.5.9). Cinco estudiantes (A07, A08, A10, A16 y A20) realizan parte de la reproducción correctamente y parte incorrectamente (RET.2). Reproducen correctamente los binomios de los numeradores, sin embargo, la reproducción del denominador que requiere el uso de la identidad notable cuadrado de la suma, la reproducen de forma incorrecta (ver Figura 6.5.10). Tres estudiantes (A05, A06 y A15) no reproducen correctamente dado que no conservan las relaciones intramiembros ni entremiembros (ver Figura 6.5.11).

*Conclusión*

El desempeño de los estudiantes es similar en las dos últimas actividades de esta tarea. La comparación establecida entre las cuatro actividades propuestas en esta sesión nos muestra que las dos coinciden en ser compuestas, pero también la sentencia tercera es compuesta y de ella se obtiene mejores resultados. En las dos sentencias últimas el miembro extendido se encuentra en el denominador, lo cual no es lo habitual en las reglas dadas a los estudiantes. Los errores se producen al no encontrar relaciones entre numerador y denominador de la fracción. En las dos sentencias a las que hacemos referencia la igualdad está formada por miembro izquierdo fraccionario y derecho entero.

Por toda esta reflexión entendemos que afecta en la percepción de la estructura interna de las expresiones algebraicas en las que hay involucradas identidades notables, el orden en que se den las mismas siendo más fácil de percibir si el primer término con el que se encuentran es la versión contraída de las mismas, se trataría de buscar la parte extendida. Otra de las dificultades, en lo que a las fracciones algebraicas se refiere, es la forma global en que las sentencias se presenten siendo más favorable si los dos miembros de la igualdad son fracciones que si lo es uno y el otro no.

### 6.5.5 Análisis general de los resultados de la tarea 1ª de la Sesión 5

En esta sección se hace un resumen general de las principales actuaciones mostradas por los estudiantes en la reproducción de las igualdades de la primera tarea presentadas en el punto anterior.

La Tabla 6.5.6 nos informa de las producciones de los estudiantes, recogidas en las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías en el desarrollo de la Tarea 1.

*Tabla 6.5.6.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Tarea 1- Sesión 5.

| Igualdad | REP | | | | RET | | | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | REP.1 | REP.2a | REP.2b | REP.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR | NC |
| 1 | 13 | 3 | 0 | 2 | 13 | 3 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 15 | 0 | 2 | 0 | 15 | 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 11 | 6 | 0 | 1 | 11 | 6 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 11 | 5 | 0 | 3 | 11 | 5 | 3 | 0 | 0 |
| Frecuencias | 50 | 14 | 2 | 6 | 50 | 16 | 6 | 1 | 3 |
| Porcentaje | 65.8 | 18.4 | 2.6 | 7.9 | 65.8 | 21.1 | 7.9 | 1.3 | 3.9 |

Al analizar las producciones de los estudiantes en las cuatro igualdades que corresponden a la primera tarea y de acuerdo a la Tabla 6.5.6 se observa que en el 65.8% de las igualdades reproducidas, los estudiantes reproducen la estructura en ambos miembros de la igualdad conservando las relaciones internas entre los mismos (REP.1, ver Figura 6.5.1). En el 18.4% de las igualdades que escriben, los estudiantes reproducen parcialmente las relaciones internas "intramiembros" no obstante si reproducen las "entremiembros" (REP.2a, ver Figura 6.5.2). En el 2.6%, los estudiantes reproducen parcialmente las relaciones internas "entremiembros" sin embargo sí reproducen las "intramiembros" (REP.2b, ver Figura 6.5.5). En el 7.9% sólo reproducen la estructura externa, dado que no relacionan numerador con denominador en el miembro izquierdo, ni perciben la relación entre los términos del miembro izquierdo con los del miembro derecho (REP. 3, ver Figura 6.5.8).

En lo que concierne al porcentaje de igualdades reproducidas correcta e incorrectamente, un 65.8% de las producciones realizadas por los estudiantes fueron correctas. En el 21.1% de las producciones los estudiantes reproducen parte correctamente y parte de forma incorrecta (dado que reproducen intramiembros pero no entremiembros o viceversa) y el 7.9% de las producciones fueron hechas de forma incorrecta. Un 1.3% de las igualdades no fueron resueltas y un 3.9% se consideran no codificables.

### 6.5.6 Categorías para el análisis de la 2ª tarea- Sesión 5

En el análisis de la resolución de cada una de las sentencias de la Tarea 2 hemos utilizado dos categorías COM y RET. La primera de ellas está relacionada con el sentido estructural de los estudiantes y la segunda categoría, como en sesiones previas, responde a nuestro interés investigador por realizar el seguimiento de las dificultades y errores que encuentran los estudiantes. En la Tabla 6.5.7 se detallan estas categorías con sus correspondientes subcategorías.

*Tabla 6.5.7*. Categorías utilizadas para la recogida de información en la Tarea 2.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| COM<br>Completar expresiones para obtener una estructura interna y externa concreta. | COM.1<br>Se completa la expresión obteniendo la relación de equivalencia entre los miembros de la igualdad.<br>COM.2<br>Se completa la expresión obteniendo equivalencia en parte de la igualdad.<br>COM.3<br>Se completa la expresión sin atender a ninguna equivalencia entre ambos miembros de la igualdad. |
| RET<br>Realizar correctamente la sentencia dada. | RET.1<br>Se resuelve completando la sentencia correctamente.<br>RET.2<br>Se resuelve completando parte de la sentencia correctamente y parte incorrectamente.<br>RET.3<br>Se resuelve completando la sentencia de forma incorrecta. |

*Tabla 6.5.7*. Categorías utilizadas para la recogida de información en la Tarea 2.

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| N<br>No realizar o no poder codificar la respuesta | NR<br>No se realiza.<br>NC<br>No codificable. |

## 6.5.7 Indicación para la 2ª tarea de la Sesión 5

La indicación de la tarea es: "*Completa cada caja de forma que la parte derecha de la igualdad se obtenga al hacer una simplificación de la parte izquierda".*

## 6.5.8 Actuaciones de los estudiantes en la 2ª tarea de la Sesión 5

Mostramos a continuación una descripción de los resultados obtenidos al analizar las respuestas de los estudiantes a la segunda tarea de esta sesión. Como en los casos anteriores se muestran ejemplos que ilustran las distintas actuaciones de los estudiantes y se finaliza con una pequeña conclusión de los datos más relevantes que se dan en la resolución de cada sentencia.

**Sentencia 1**

$$\frac{11x\cdot\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot(x+3)}=1$$

Esta sentencia presenta en el miembro izquierdo del signo igual una fracción y en el miembro derecho un número. La fracción del miembro izquierdo presenta en el numerador el producto de dos factores, uno de ellos es un monomio de grado uno, el otro es una caja o elemento ausente; en el denominador presenta un producto de dos factores, uno de ellos está ausente y el otro un binomio de grado uno. Para que al simplificar la fracción se obtenga el número 1 (miembro derecho de la igualdad) es preciso que en el numerador y denominador de la fracción sean expresiones equivalentes.

Identidad notable: No es necesaria

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

La Tabla 6.5.8 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías relacionadas con el tipo de actuación de los estudiantes en el desarrollo de esta sentencia.

*Tabla 6.5.8*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 1.

| COM | | | RET | | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR |
| 13 | 0 | 5 | 13 | 0 | 5 | 1 |

*Categoría COM*

Trece estudiantes (A01, A02, A04, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14 y A18) completan la expresión obteniendo una igualdad (COM.1, ver Figura 6.5.12). El estudiante (A18) percibe la simplificación que se debe realizar en el miembro izquierdo para obtener la expresión del miembro derecho, lo explica con la siguiente justificación: “Para que de uno tendrían que irse denominador con el numerador por lo tanto se ponen los mismos números y se simplifica toda la fracción algebraica”.

Estudiante A18

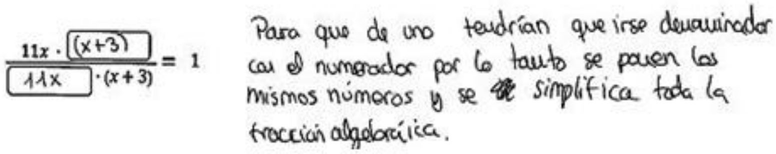



*Figura 6.5.12*. Completa la expresión obteniendo relación de equivalencia entre los miembros de la igualdad.

Cinco estudiantes (A03, A15, A16, A17 y A20) completan la expresión sin atender a la equivalencia entre ambos miembros de la igualdad (COM.3). Muestran no percibir el proceso de simplificación en los datos propuestos para que se dé la igualdad como relación de equivalencia, por tanto la igualdad obtenida no es verdadera (ver Figura 6.5.13).

Estudiante A03

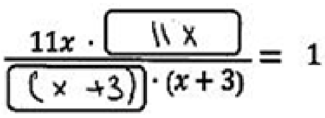



*Figura 6.5.13.* Completa la expresión sin atender a la equivalencia de la igualdad.

*Categoría RET*

Trece estudiantes (A01, A02, A04, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14 y A18), los mismos que en la categoría COM.1 resuelven completando correctamente (RET.1). Cinco estudiantes (A03, A15, A16, A17 y A20), los mismos que en la categoría COM.3, no resuelven de forma correcta (RET.3) dado que al colocar las expresiones en los espacios faltantes tanto en numerador como denominador, colocan pares de expresiones como por ejemplo $(1, x+8)$; $(1, x-3)$; $(1,0)$; $(5+8, x-3)$ que no conservan la equivalencia de la igualdad. Un estudiante (A05) no resuelve (NR).

*Conclusión*

En esta sentencia los errores radican en que algunos estudiantes no perciben los valores que conllevan a la simplificación para obtener la equivalencia de la igualdad.

## Sentencia 2

$$\frac{\boxed{\underline{\qquad\qquad}}^{2}}{3x\cdot(2x-4)}=\frac{2x-4}{3x}$$

Esta sentencia está planteada como igualdad de dos fracciones algebraicas. La fracción del miembro izquierdo de la igualdad, presenta el elemento desconocido en el numerador, al cuadrado. El denominador está formado por un producto de dos factores, un monomio y un binomio, ambos de grado uno. La fracción del miembro derecho presenta en el numerador el factor binomio del denominador del miembro izquierdo, y en el denominador el factor monomio del mismo miembro.

La equivalencia de los dos miembros de esta sentencia exige que el elemento desconocido sea 2x - 4, con lo que se obtiene un binomio con resta al cuadrado, que no hay que transformar ni considerar su expresión extendida.

Identidad notable: Cuadrado de una diferencia.

Tipo de expresión: Compuesta, término compuesto con producto $2x$.

*Resultados*

La Tabla 6.5.9 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías relacionadas con el tipo de actuación de los estudiantes en el desarrollo de esta sentencia.

*Tabla 6.5.9*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 2.

| COM | | | RET | | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR |
| 12 | 2 | 5 | 12 | 2 | 5 | 0 |

*Categoría COM*

Doce estudiantes (A01, A02, A03, A04, A06, A07, A09, A10, A12, A13, A14 y A18) completan el elemento faltante en la expresión, obteniendo equivalencia en los dos miembros de la igualdad (COM.1, ver Figura 6.5.14). Estos estudiantes perciben la simplificación que se debe realizar en el miembro izquierdo para obtener la expresión del miembro derecho. Esto se observa en la justificación que emiten. Por ejemplo, A13 dice "He puesto $(2x-4)$ porque está elevado al cuadrado y se simplifica con el de abajo y luego solo queda un $(2x-4)$".

Estudiante A13

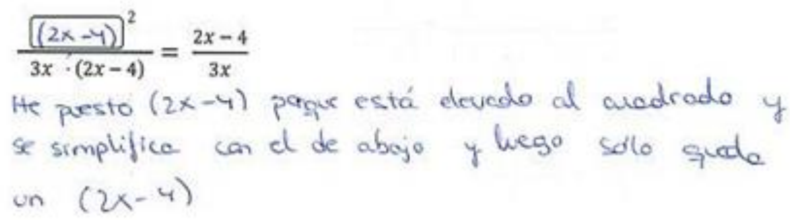



*Figura 6.5.14*. Completa la expresión obteniendo relación de equivalencia entre los miembros de la igualdad.

Dos estudiantes (A16 y A17) completan la expresión viendo alguna relación entre los componentes de ambos miembros de la igualdad sin llegar a reconocer completamente la equivalencia entre ellos (COM.2, ver Figura 6.5.15). El estudiante A17 completa el espacio en blanco con la expresión que le corresponde, sin embargo tacha el exponente que figura fuera de la caja.

Estudiante A17

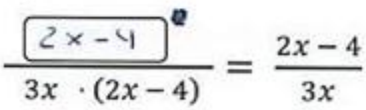



*Figura 6.5.15.* Completa la expresión obteniendo la relación de equivalencia en parte de la igualdad.

Cinco estudiantes (A05, A08, A11, A15 y A20) completan la expresión sin atender a la equivalencia entre ambos miembros por lo que la igualdad obtenida no es verdadera (COM.3). Muestran no percibir la relación de equivalencia que se ha de dar en la igualdad. Por ejemplo, el estudiante A08 (ver Figura 6.5.16) completa con una expresión de estructura interna diferente a la necesaria

Estudiante A08

$$\frac{\boxed{2(x-1)}^2}{3x \cdot (2x-4)} = \frac{2x-4}{3x}$$

*Figura 6.5.16*. Completa la expresión sin atender a la equivalencia de la igualdad.

*Categoría RET*

Doce estudiantes (A01, A02, A03, A04, A06, A07, A09, A10, A12, A13, A14 y A18) resuelven completando correctamente (RET.1, ver figura 6.5.14). Dos estudiantes (A16 y A17) resuelven completando parte correctamente y parte incorrectamente, dado que colocan correctamente la expresión que corresponde a la caja pero suprimen el exponente que figura fuera de la misma (RET.2, ver Figura 6.5.15). Cinco estudiantes (A05, A08, A11, A15 y A20) no completan de forma correcta (RET.3, ver figura 6.5.16) dado que no perciben la simplificación que se debe llevar a cabo para conservar la equivalencia en la igualdad. Completan con expresiones como $x-2$ ; $x-4$ ; $2x(2x-4)-4$.

*Conclusión*

Como ocurre en la sentencia anterior el número de respuestas no correctas proporcionadas por los estudiantes coincide con los que no completan la expresión siguiendo la estructura de la misma. Los errores se deben a que algunos estudiantes perciben la equivalencia sólo en parte de la igualdad y no en su totalidad, mientras que otros estudiantes no perciben ninguna equivalencia en la igualdad.

## Sentencia 3

$$\frac{(x+1)\cdot \boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{\boxed{\_\_\_\_\_\_\_\_}} = x-1$$

En esta sentencia el miembro izquierdo de la igualdad pretende ser una fracción algebraica cuando se coloquen los elementos desconocidos, el miembro derecho es un binomio de grado uno con resta. El numerador de la fracción es un producto de dos factores uno de ellos es un binomio de grado uno con suma (coincide con el binomio del miembro izquierdo salvo en el signo), el otro factor es una caja o elemento deconocido; el denominador de la fracción es una caja.

Identidad notable: No es necesario considerar ninguna

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

La Tabla 6.5.10 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías relacionadas obtenidas al clasificar las respuestas de los estudiantes en esta sentencia.

*Tabla 6.5.10*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 3.

| COM | | | RET | | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR |
| 15 | 0 | 3 | 15 | 0 | 3 | 1 |

*Categoría COM*

El número de estudiantes que completan la expresión obteniendo  equivalencia entre los miembros de la sentencia ha sido quince (A01, A02, A03, A04, A06, A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A16, A17 y A18) (COM.1) Por ejemplo, en la Figura 6.5.17 se observa como el estudiante A07 percibe la simplificación que se debe realizar en el miembro izquierdo para obtener la expresión del miembro derecho y justifica diciendo “Porque al simplificar se eliminan el primero de arriba y el de abajo entonces se queda solo el $(x-1)$”.

Estudiante A07

$$\frac{(x+1)\cdot\boxed{(x+1)}}{\boxed{(x+1)}} = x-1$$

: Porque al simplificar se eliminan el primero de arriba y el de abajo entonces se queda solo el $(X-1)$.

*Figura 6.5.17.* Completa la expresión obteniendo relación de equivalencia entre los miembros de la igualdad.

Tres estudiantes (A08, A15 y A20) completan la expresión sin atender a la equivalencia entre ambos miembros de la igualdad (COM.3). En el ejemplo se observa que el estudiante percibe alguna relación en la igualdad, por tanto coloca un $(-1)$ en el numerador con la intención de cambiar el signo al término independiente del factor binomio en el miembro izquierdo, y mientras en el denominador coloca un $(+1)$, mostrando con esta actuación que se requiere cambio de signo para obtener la expresión de la derecha, sin embargo muestra no percibir la distributividad del signo que coloca (ver Figura 6.5.18).

Estudiante A08

$$\frac{(x+1)\cdot\boxed{-1}}{\boxed{1}} = x-1$$

*Figura 6.5.18.* Completa la expresión sin atender a la equivalencia de la igualdad.

*Categoría RET.*

Quince estudiantes (A01, A02, A03, A04, A06, A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A16, A17 y A18), los mismos estudiantes que en la categoría anterior, resuelven completando correctamente (RET.1, ver Figura 6.5.17). Tres estudiantes (A08, A15 y A20) no resuelven de forma correcta dado que no perciben los binomios a simplificar para que se dé la relación de equivalencia. El estudiante A15 escribe los pares de expresiones $(+1),(x+6)$ y A20 escribe los pares $(7+5),(9-5)$ (RET.3, ver Figura 6.5.18). Un estudiante (A05) no resuelve (NR).

*Conclusión*

Similar a las sentencias anteriores el número de respuestas no correctas proporcionadas por los estudiantes coincide con los que no completan la expresión, de acuerdo con la estructura de la misma. Los errores cometidos por los estudiantes se deben a que no muestran percibir los términos únicos que deben completar las cajas de manera tal que realizada la simplificación se conserve la equivalencia.

## Sentencia 4

$$\frac{x^2 \cdot \boxed{\quad\_\_\_\_\_\_\_\_\quad}}{(x-1)\cdot \boxed{\quad\_\_\_\_\_\_\_\_\quad}} = \frac{x^2}{x-1}$$

Esta igualdad muestra fracciones algebraicas en los dos miembros. En el miembro izquierdo tanto numerador como denominador están formados por el producto de dos factores, en ambos casos el segundo factor es una caja, el primer factor es un monomio de orden dos, en el numerador, y un binomio de grado uno con resta, en el denominador. El miembro derecho coincide con el miembro izquierdo salvo que no tiene cajas. Cualquier expresión es válida con la condición de que en las dos cajas se coloque la misma.

Identidad notable: No exige la utilización de identidad notable alguna.

Tipo de expresión: Simple

*Resultados*

La Tabla 6.5.11 muestra las frecuencias absolutas de cada una de las subcategorías que informan del tipo de actuación de los estudiantes en el desarrollo de esta sentencia.

*Tabla 6.5.11*. Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Sentencia 4.

| COM | | | RET | | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|
| COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR |
| 14 | 0 | 4 | 14 | 0 | 4 | 1 |

*Categoría COM*

Catorce estudiantes (A01, A02, A03, A06, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A16, A17 y A18) realizan esta actividad completando las cajas y obteniendo expresiones equivalentes en los dos miembros de la igualdad. Perciben que se deben completar las cajas con un mismo valor, de forma que al efectuar la simplificación en el miembro izquierdo se pueda obtener la expresión del miembro derecho. Esto se corrobora en la justificación que emiten. Por ejemplo el estudiante A12 dice: “Se puede poner cualquier número o expresión pero debe ser la misma en las dos cajas (COM.1, ver Figura 6.5.19).

Estudiante A12

$$\frac{x^2 \cdot \boxed{x}}{(x-1)\cdot \boxed{x}} = \frac{x^2}{x-1}$$

Se puede poner cualquier número o expresión pero debe ser la misma en las dos cajas.

*Figura 6.5.19.* Completa la expresión obteniendo relación de equivalencia entre los miembros de la igualdad.

Como hecho relevante, observamos que algunos estudiantes completan las cajas con símbolos algebraicos y otros completan con números concretos (ver Figura 6.5.20).

Estudiante A13

$$\frac{x^2 \cdot \boxed{1}}{(x-1)\cdot \boxed{1}} = \frac{x^2}{x-1}$$

He puesto el número 1 porque así el resultado es igual.

*Figura 6.5.20.* Completa la expresión obteniendo relación de equivalencia entre los miembros de la igualdad.

Cuatro estudiantes (A04, A07, A15 y A20) completan la expresión sin atender a la equivalencia de ambos miembros de la igualdad por tanto la igualdad obtenida no es verdadera (COM.3, ver Figura 6.5.21).

Estudiante A20

$$\frac{x^2 \cdot \boxed{(3+8)}}{(x-1)\cdot \boxed{(x+1)}} = \frac{x^2}{x-1}$$

*Figura 6.5.21*. Completa la expresión sin atender a la equivalencia de la igualdad.

*Categoría RET*

Catorce estudiantes (A01, A02, A03, A06, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A16, A17 y A18) resuelven completando correctamente (RET.1, ver Figuras 6.5.19 y 6.5.20). Cuatro estudiantes (A04, A07, A15 y A20) no resuelven de forma correcta al no percibir que las cajas deben ser completadas con un mismo valor, para que al realizar la simplificación en el miembro izquierdo puedan obtener la expresión del miembro derecho (RET.3, ver Figura 6.5.21), entre algunos pares de expresiones que colocan tenemos $(x-1),(x+1)$; $(x^2),(x-1)$ y $(3+8),(x+1)$. Un estudiante (A05) no resuelve.

*Conclusión*

Al igual que en las sentencias anteriores el número de respuestas no correctas proporcionadas por los estudiantes coincide con los que no completan la expresión siguiendo la estructura de la misma. Los errores se deben a que algunos estudiantes no perciben que las cajas deben ser completadas con un mismo valor para que llevada a cabo la simplificación en el miembro izquierdo dé como resultado la expresión del miembro derecho.

### 6.5.9 Análisis general de los resultados de la 2ª tarea de la Sesión 5

En esta sección se recoge un resumen general de las principales actuaciones mostradas por los estudiantes en la resolución de las sentencias de la segunda tarea de esta sesión.

La Tabla 6.5.12 nos informa de las frecuencias absolutas en cada una de las subcategorías en las que se clasifican las producciones de los estudiantes en el desarrollo de la Tarea 2.

*Tabla 6.5.12.* Frecuencias absolutas de cada subcategoría en la Tarea 2-Sesión 5

| Sentencia | COM | | | RET | | | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | COM.1 | COM.2 | COM.3 | RET.1 | RET.2 | RET.3 | NR |
| 1 | 13 | 0 | 5 | 13 | 0 | 5 | 1 |
| 2 | 12 | 2 | 5 | 12 | 2 | 5 | 0 |
| 3 | 15 | 0 | 3 | 15 | 0 | 3 | 1 |
| 4 | 14 | 0 | 4 | 14 | 0 | 4 | 1 |
| Frecuencias | 54 | 2 | 17 | 54 | 2 | 17 | 3 |
| Porcentaje | 71.1 | 2.6 | 22.4 | 71.1 | 2.6 | 22.4 | 3.9 |

Una vez analizadas las actuaciones de los estudiantes en las cuatro sentencias de la Tarea 2 y de acuerdo a la Tabla 6.5.14, se observa que en el 71.1% de las sentencias, los estudiantes completan el espacio faltante de forma exitosa, obteniendo equivalencia entre los miembros de la igualdad (COM.1, ver Figura 6.5.14). En el 2.6% de las sentencias, los estudiantes completan la expresión no reconociendo o utilizando alguna de las relaciones internas de las expresiones dadas que se requiere para obtener la equivalencia (COM.2, ver Figura 6.5.15). En el 22.4% de las sentencias, los estudiantes completan la expresión sin atender a la equivalencia entre ambos miembros por lo que la igualdad obtenida no es verdadera (COM.3, ver Figura 6.5.16).

En cuanto al porcentaje de respuestas correctas e incorrectas en un 71.1% de las resoluciones a las sentencias los estudiantes completan correctamente. En el 2.6% de las resoluciones a las sentencias los estudiantes completan sólo parte correctamente y en el 22.4% de las resoluciones a las sentencias los estudiantes resuelven de forma incorrecta. Un 3.9% de las sentencias no fueron resueltas.

### 6.5.10 Fortalezas y debilidades de la sesión

Con respecto a la primera tarea de esta sesión, entre las fortalezas que podemos señalar son las igualdades algebraicas propuestas en la misma. Estas igualdades promueven en el estudiante la búsqueda de relaciones entre los términos y expresiones que las componen, permitiéndoles así fijar o afianzar sus conocimientos acerca de cada una de las estructuras que componen las identidades notables. Además, en esta última sesión el haberles permitido a los estudiantes contar con el resumen de las identidades notables en una lámina a la vista en el aula, les ayudó a percibir de mejor forma la estructura de las identidades notables inmersas en las primeras cuatro igualdades de la primera tarea.

Para aquellos estudiantes que aún no están familiarizados con la estructura de las identidades notables, el trabajo con este tipo de expresiones algebraicas que incluyen fracciones algebraicas se convierte en una debilidad dado que se les dificulta establecer relaciones entre las partes que componen las igualdades dadas.

En lo que respecta a la segunda tarea de esta sesión una de las fortalezas es promover las relaciones entre los términos de los espacios ocultos y los componentes de una expresión. Como debilidad podemos señalar que algunos estudiantes al no establecer relaciones entre los componentes de la expresión dada, presentan la dificultad de no percibir la equivalencia inmersa en la igualdad.

# Capítulo 7. Análisis individual del desempeño de los estudiantes

En este capítulo se muestran los perfiles de comportamiento de los estudiantes en el experimento de enseñanza que hemos llevado a cabo. En primer lugar se recoge una justificación de la presencia de diferentes descriptores del sentido estructural en las tareas de las cinco sesiones de trabajo. Posteriormente, y para cada perfil, incluimos representaciones gráficas que ilustran el desempeño de cada estudiante y ayudan a la caracterización de cada uno de ellos. Dichas gráficas aparecen en tamaño pequeño por dos motivos: a) para no ocupar mucho espacio, y b) para que se vean conjuntamente todas las gráficas del perfil. Para ver las gráficas con más detalle se puede consultar el Anexo K. También se presentan una reflexión global de la forma de trabajar de los estudiantes en las diferentes sesiones y los errores que cometen.

## *7.1 Presencia de los descriptores en las diferentes sesiones*

Los estudiantes, participantes como sujetos en esta investigación, trabajan en las sesiones llevadas a cabo en la misma, sobre diferentes descriptores del sentido estructural (ver apartado 3.16.1) si bien no son todos los recogidos en el capítulo 3. Tratamos de señalar y relacionar con cada una de las cinco sesiones aquellos descriptores que consideramos más significativos de la misma, lo cual no quiere decir que hayan sido los únicos descriptores sobre los que se ha trabajado.

En la primera tarea de la Sesión 1 el estudiante ha de comprobar si son o no igualdades varias sentencias, en el caso de serlo la sentencia es verdadera y en caso contrario será falsa, la tarea plantea que calculen para comprobar. Posteriormente, una vez dilucidado las que son verdaderas y las que son falsas, habrá de modificar las falsas para transformarlas en verdaderas.

Estas acciones que han de realizar los estudiantes nos llevan a considerar que reconocer relaciones (descriptor A) está presente en la sesión 1. La justificación para esta consideración es la siguiente: en el caso de que el estudiante cumpla lo indicado en la tarea y opere, al menos al modificar la expresión, para hacerlo correctamente, ha de establecer la relación de igualdad entre los dos miembros de la expresión dada; si no opera, es que directamente ha percibido la relación de igualdad o desigualdad entre los dos miembros de las expresiones.

Por su parte, la misma tarea indica que se realicen modificaciones, por lo que el descriptor J también está presente. Ahora bien en el descriptor se indica que la modificación se hará con el objetivo de obtener una estructura externa o interna concreta. Puede haber estudiantes que modifiquen sin tener en cuenta estructura alguna sino que lo hagan numéricamente, en este caso se dejará constancia de ello.

Se podría considerar que reconocer estructura interna (descriptor C) también está presente en esta sesión 1, pero creemos que queda contemplado en los descriptores A (ya que las relaciones pueden basarse en las estructura de las expresiones) y en el J (las modificaciones pueden apoyarse en la estructura de las expresiones) por lo que no se consigna el descriptor C.

En la primera tarea de la Sesión 2, en la que se ha de conseguir igualdades completando valores ausentes, entendemos que el descriptor principal presente es el reconocimiento de estructura interna (C) por encima de reconocer relaciones que quedaría inmerso en el anterior. Completar expresiones es un descriptor (I) que se exige desde la tarea.

El descriptor (K) que hace referencia a identificar subestructuras dentro de una expresión y tratarlas como una sola entidad… está presente en esta sesión toda vez que en algunos casos se trabaja con expresiones compuestas.

En la primera tarea de la sesión 3, se proporciona a los estudiantes tres expresiones de igual estructura externa, y ha de escribir dos expresiones numéricas y una algebraica con la misma estructura externa. El estudiante puede fijarse en una sola de las expresiones dadas y reproducir su estructura externa. Si bien para crear dicha estructura externa se requiere percibir alguna relación entre los números, las operaciones entre ellos, los paréntesis; entendemos que la relación más fuerte que se puede reconocer no son esas sino la que se percibe al contemplar las tres expresiones a la vez y distinguir la regularidad que presentan. El descriptor A señalado en S3 hace referencia a dicho reconocimiento.

Al solicitar en la tarea que se reproduzca la estructura externa, consideramos el descriptor B que hace referencia al reconocimiento de la estructura y el descriptor H que hacer referencia a la reproducción de estructura.

Dado que se ha de escribir la misma expresión con simbolismo algebraico, consideramos adecuado señalar el descriptor G.

También consideramos el descriptor (K), identificar subestructuras dentro de una expresión y tratarlas como una sola entidad… está presente en esta sesión ya que se trabaja con algunas expresiones compuestas.

Para la segunda tarea de esta misma sesión son válidas las mismas reflexiones hechas para la primera tarea.

En la primera tarea de la sesión 4 se proporciona a los estudiantes sentencia con expresiones ocultas y se les solicita que las completen de manera que las sentencias se transformen en una igualdad. Entendemos que en esta sesión el descriptor con mayor presencia es reconocer estructura interna (C), los estudiantes han de rellenar las cajas con expresiones algebraicas equivalentes a las dadas. El establecer relaciones quedaría inmerso en este descriptor. También se considera el completar expresiones, si bien estas pueden ser completadas sin percibir la estructura interna de las expresiones, en cuyo caso creemos que el resultado no llevaría a la igualdad. Para la 2ª tarea de esta sesión siguen siendo válidas las mismas reflexiones.

En la sesión 5, en la primera tarea cuyas actividades presentan igualdades entre fracciones algebraicas, los estudiantes han de construir otras expresiones conservando la misma estructura. En la 2ª tarea, también se presentan igualdades con fracciones algebraicas en uno o los dos miembros de la igualdad y con elementos ocultos. Los estudiantes han de completar esos elementos de tal forma que las igualdades se mantengan y sean expresiones verdaderas. En esta sesión el descriptor reconocer relaciones (A) está muy presente pues las igualdades han de verse como un todo, relacionando los numeradores y denominadores de cada una de las fracciones y a su vez las dos fracciones entre sí.

A su vez se han de reconocer estructura interna (C) de diferentes expresiones para poder rellenar las cajas.

Dado que en algunos casos las cajas admiten una respuesta múltiple, consideramos presente el descriptor (G).

Los descriptores reproducir estructura (H) y completar expresiones (I) están presentes por la exigencias de las tareas.

También consideramos el descriptor (K) que ligado a la identificación de subestructuras en esta sesión en la que la mitad de las expresiones son compuestas.

De forma resumida recogemos en la Tabla 7.1 los descriptores, que creemos más significativos, trabajados en cada una de las sesiones.

Tabla 7.1. Descriptores utilizados en cada una de las sesiones

| Descriptores | | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | Reconocer Relaciones... | | | | | |
| B | Reconocer Estructura Externa… | | | | | |
| C | Reconocer Estructura Interna… | | | | | |
| G | Expresión Simbolismo Algebraico... | | | | | |
| H | Reproducir Estructura… | | | | | |
| I | Completar Expresiones... | | | | | |
| J | Modificar Expresiones... | | | | | |
| K | Identificar subestructuras en expresión … | | | | | |

Se aprecia que el reconocer relaciones, se considera significativo en tres de las sesiones, así como reconocer estructura interna e identificar subestructuras, son los descriptores que entendemos más influyentes, desde el punto de vista conceptual, en nuestro experimento. Así mismo completar expresiones aparece en tres sesiones, este es desde el punto de vista procedimental el descriptor más influyente. Reconocer estructura externa y modificar expresiones son los descriptores presentes pero menos representativos, el primero de ellos más ligado a lo conceptual y el segundo a lo procedimental.

## *7.2 Perfiles*

Consideramos perfil de comportamiento a la tendencia que muestra un estudiante o un grupo de estudiantes ante las tareas que se les han propuesto en las diferentes sesiones del experimento de enseñanza. Para llegar a estos perfiles se han construido varios tipos de representación gráfica con los datos del desempeño de los estudiantes, utilizando su codificación por medio de las categorías elaboradas para tal fin (presentadas en el capítulo 6 de esta memoria). Estas representaciones se han realizado con la ayuda del Programa de Análisis cualitativo MAXQDA10, a partir de la suma ponderada de las frecuencias con que han aparecido los valores de las diferentes categorías utilizadas para describir el desempeño en las tareas. Los factores de ponderación han sido 1 para las frecuencias que corresponden a las subcategorías de nivel 1 (ejemplo RIN.1 de la primera sesión) y 0,5 para las que corresponden a las subcategorías de nivel 2 (ejemplo RIN.2 de la primera sesión). Cuando se produce la falta de datos en una sesión debido a que el estudiante no ha asistido a la misma se prescinde de ella en la representación gráfica lo que provoca, en ocasiones, que no se aprecie a simple vista la coincidencia en la tendencia de la gráfica. Hemos decidido hacerlo así para que entrasen en juego todos los estudiantes participantes, ya que suprimir los que han faltado a alguna sesión reducía drásticamente el número de los mismos que ya de por sí no es elevado.

Los perfiles identificados son caracterizados de forma cualitativa en una tabla que recoge aquellos elementos comunes al desempeño de los estudiantes, de acuerdo con los descriptores más representativos considerados en cada sesión, (presentados en el punto anterior). Esta caracterización es resultado del análisis comparado del desempeño de cada estudiante descrito en términos de los descriptores que se recogen en el apartado 3.16.1 de esta memoria. Dichos listados corresponden a la segunda columna de las tablas que aparecen en el Anexo J. El análisis conjunto de la tendencia percibida por medio de las gráficas y de esta información cualitativa nos lleva a considerar siete perfiles de comportamiento de estos estudiantes.

### 7.2.1 Perfil 1

El perfil 1 está formado por los estudiantes A06, A12, A13, A14 y A19, de los cuales A19 no asiste a las dos sesiones últimas y A12, A13, A14 no asisten a la cuarta sesión. La representación gráfica de la Figura 7.1 muestra una tendencia común en el desempeño de estos estudiantes: en la primera sesión presentan un valor bajo, o muy bajo, respecto a su trabajo relacionado con un descriptor del sentido estructural, alcanzando un valor alto en el caso de la segunda o tercera sesión y manteniéndose, o siendo ligeramente inferior como es el caso de A06, en las sesiones siguientes.

*Gráficas del perfil 1*

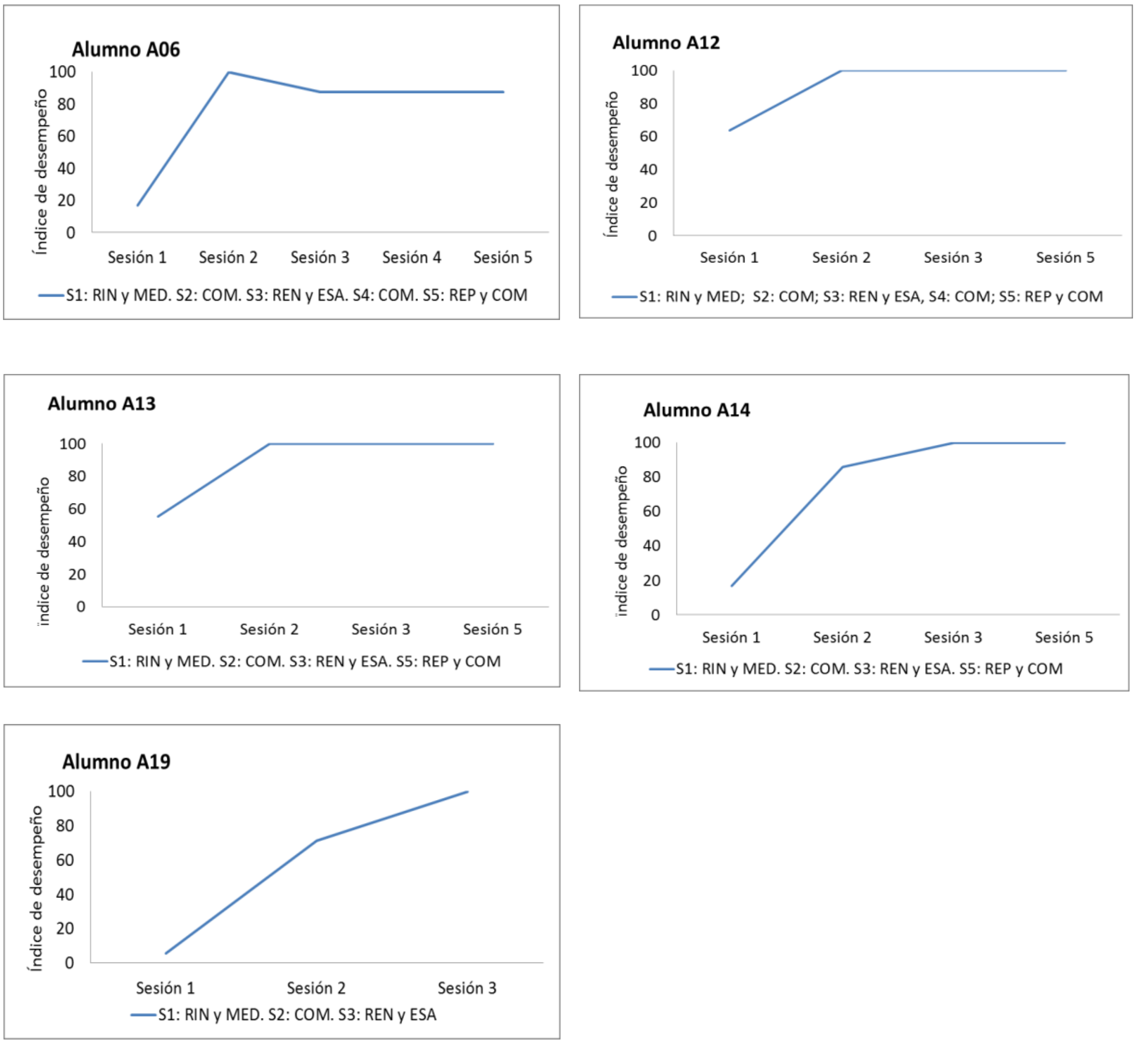



*Figura 7.1*. Representación gráfica de los estudiantes del Perfil 1.

***Caracterización del perfil 1***

Tabla 7.2. Caracterización del perfil 1. Elementos comunes

| **Expresiones numéricas** | **Expresiones algebraicas** |
|---|---|
| Reconocen estructura interna | Reconocen estructura interna |
| Completan todas las expresiones | Completan todas las expresiones |
| Reconocen estructura externa | Reproducen estructura interna |
| Reproducen estructura | Identifican todas las subestructuras presentes en la tarea |
| Utilizan simbolismo algebraico | |

En la tabla 7.3 se muestran las variaciones del perfil 1 presentadas para cada tipo de expresión.

Tabla 7.3. Variaciones del perfil 1

| Tipo de expresión | Variación 1 | Variación 2 | Variación 3 |
|---|---|---|---|
| Numéricas | No muestra reconocer relaciones | No muestra reconocer relaciones | Muestra reconocer relaciones |
| | No modifica | Modifica cambiando datos numéricos | Modifica según identidad notable. |
| | Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea | Identifica subestructuras producto, potencia | Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea. |
| Algebraicas | Reconoce relaciones | Reconoce relaciones en algunos casos | Reconoce relaciones. |
| | No expresa con simbolismo algebraico | Expresa con simbolismo algebraico | No expresa con simbolismo algebraico |

Como se aprecia tanto en las representaciones gráficas como en la comparación cualitativa de los resultados, las respuestas de estos estudiantes muestran adecuarse tanto en expresiones aritméticas como en algebraicas, a la mayoría de los descriptores.

Las variantes en este perfil, en expresiones numéricas, se deben a tres elementos: a) al reconocimiento de relaciones en donde alguno de los estudiantes no da muestras de percibir las mismas y otros sí.; b) al hecho de modificar las expresiones falsas para transformarlas en verdaderas que o no se modifica; o se hace cambiando datos, o se hace aplicando las relaciones percibidas basadas en identidades notables; y c) la identificación de subestructuras que en unos casos se trabaja adecuadamente en todas las expresiones con subestructuras presentes y en otros casos solo con parte de ellas. Por lo que se refiere a las expresiones algebraicas, las variantes están en: a) reconocer relaciones en todos los casos o en parte de los mismos; b) expresar o no con simbolismo algebraico en expresiones que lo requerían[8].

[8] Este descriptor se refiere, en todos los perfiles, a la percepción y emisión de una respuesta genérica en actividades que así lo requieren.

### 7.2.2 Perfil 2

El grupo de estudiantes que conforman el perfil 2 es A01, A02, A03, A04. Como se aprecia en la Figura 7.2 su característica principal es presentar una baja moderada en la sesión cuarta. Este perfil presenta similitud con el perfil 1 en la parte correspondiente a las tres primeras y última sesiones. De la primera a la tercera sesión se registran ascensos. No obstante, reconocer estructuras de identidades notables, en el proceso de completar expresiones numéricas, y ver una respuesta genérica como solución a una actividad, ha resultado ser una dificultad para este grupo de estudiantes. A su vez, les resulta de mayor facilidad reconocer estructuras externas, reproducirlas y utilizar simbolismo algebraico para expresar la generalización de las mismas. Cambia la tendencia ascendente en la cuarta sesión, en la que se pone de manifiesto un bajo rendimiento en la tarea. En esta sesión es necesario reconocer estructuras internas de identidades notables en expresiones algebraicas y reconocer subestructuras. Finalmente, en la quinta sesión remontan, mostrando niveles altos en relación a los descriptores presentes en dicha sesión, tres de ellos presentes en la sesión anterior como reconocer estructura interna de identidades notables e identificar subestructuras.

*Gráficas del perfil 2*

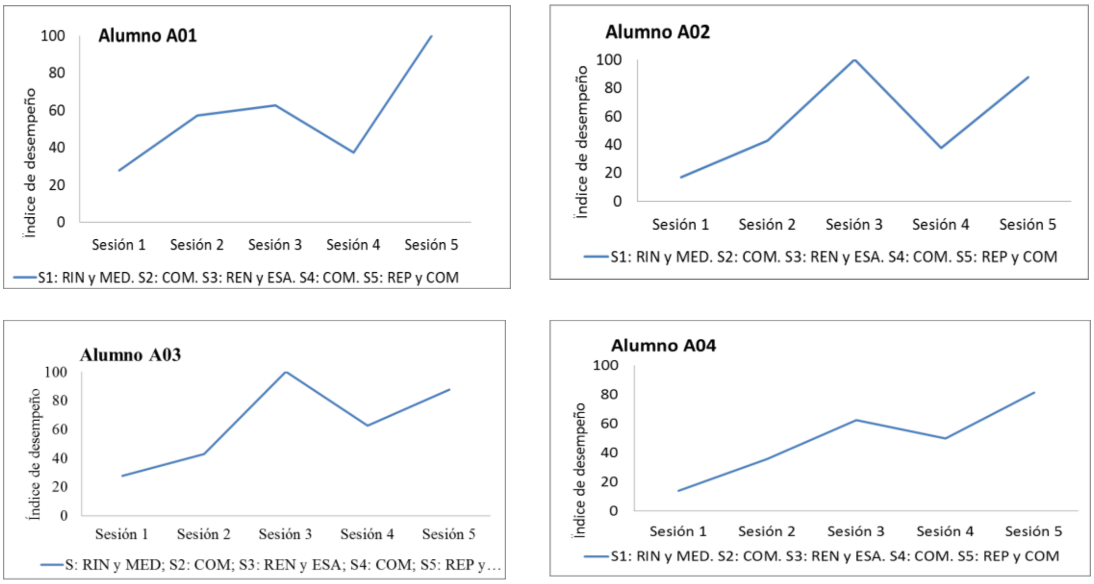



*Figura 7.2*. Representación gráfica de los estudiantes del Perfil 2.

***Caracterización del perfil 2***

La Tabla 7.4 recoge los elementos comunes que caracterizan a los estudiantes del perfil 2.

Tabla 7.4. Caracterización del perfil 2. Elementos comunes

| **Expresiones numéricas** | **Expresiones algebraicas** |
|---|---|
| No muestran reconocer relaciones | Reconocen relaciones |
| Reconocen estructura interna en menos de la mitad de las expresiones | Reconocen estructura interna en parte de la mitad de las expresiones |
| Completan menos de la mitad de las expresiones | Completan todas las expresiones, la mitad de forma incorrecta |
| Reconocen estructura externa | Reproducen estructura interna |
| Reproducen estructura | Expresan con simbolismo algebraico |
| Expresan con simbolismo algebraico | Identifican todas las subestructuras presentes en la tarea |

En la Tabla 7.5 se muestran las variaciones del perfil 2 presentadas para cada tipo de expresión.

Tabla 7.5. Variaciones del perfil 2

| Tipo de expresión | Variación 1 | Variación 2 | Variación 3 |
|---|---|---|---|
| Numéricas | Modifica cambiando la estructura | No modifica | Modifica solo una expresión |
| | | Identifica subestructuras producto, potencia y suma | Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea |

Este perfil 2 muestra gran homogeneidad entre la presencia de sus componentes en las respuestas de los estudiantes, las variaciones se producen solo en las expresiones aritméticas. A partir de los descriptores correspondientes a reconocer estructura interna y completar expresiones se observa que en la sesión cuatro las evidencias de sentido estructural en el desempeño de los estudiantes se reducen a la mitad. De ahí el descenso en la sesión cuarta que se percibe en la representación gráfica de este perfil. En cuanto a los elementos comunes, se aprecia que la percepción de relaciones no es persistente, en una tarea no se aprecian y en otra tarea se aprecian algunas en parte de las expresiones de la tarea; el reconocimiento de estructuras internas se produce en la mitad de los casos tanto en expresiones aritméticas como en algebraicas: reconocen estructura externa y la reproducen y utilizan simbolismo algebraico para designar una situación genérica y trabajan con las expresiones compuestas mostrando que identifican subestructuras.

Las variaciones se dan en no modificar expresiones aritméticas falsas o en la forma de hacerlo y en el número de actividades en las que reconoce relaciones.

### 7.2.3 Perfil 3

El perfil 3 queda determinado por las actuaciones de los estudiantes A07, A08, A09, A11. Las gráficas que representan la actuación de estos estudiantes (ver Figura 7.3) tienen cierta semejanza con las del perfil 1 y las del perfil 2. Con las de perfil 1 guardan similitud en que se incrementan el desempeño exitoso en las diferentes tareas desde un valor bajo en su desempeño en la primera sesión a valores que crecen en las otras dos sesiones siguientes, hasta la tercera. Con el perfil 2 tienen en común, tanto lo dicho anteriormente como la bajada en la sesión cuatro (ya comentada en el perfil 2). La diferencia estriba en lo siguiente: con el perfil 1 en que éste no presenta caída en el desempeño de la tarea en la sesión 4 y con el perfil 2, en que las variaciones son más fuertes en este caso que en el perfil 2.

En este grupo de estudiantes, tres de ellos asisten a todas las sesiones y uno de ellos no asiste a la primera sesión.

*Gráficas del perfil 3*

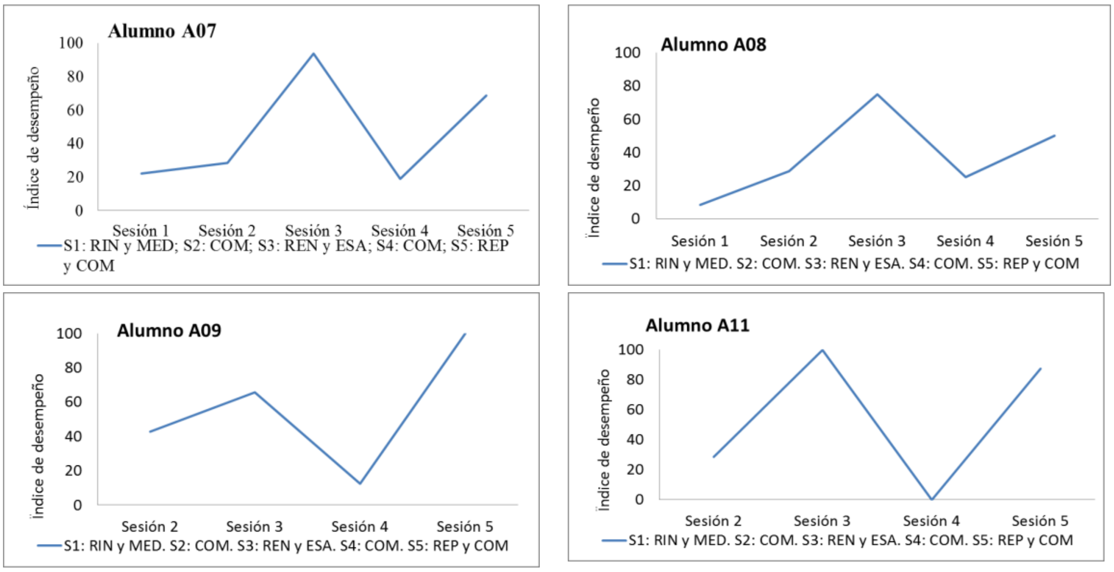



*Figura 7.3:* Representación gráfica de los estudiantes del Perfil 3.

### *Caracterización del perfil 3*

Tabla 7.6. Caracterización del perfil 3. Elementos comunes

| **Expresiones numéricas** | **Expresiones algebraicas** |
|---|---|
| No muestran reconocer relaciones | Reconocen relaciones |
| No modifican expresiones | No reconocen estructura interna de las expresiones |
| Expresan con simbolismo algebraico | Completan las expresiones de forma incorrecta |
| Reconocen estructura externa | Identifican todas las subestructuras presentes en la tarea |
| Reproducen estructuras | |

En la tabla 7.7 se muestran las variaciones del perfil 3 presentadas para cada tipo de expresión.

Tabla 7.7. Variaciones del perfil 3

| Tipo de expresión | Variación 1 | Variación 2 | Variación 3 |
|---|---|---|---|
| Numéricas | No reconoce estructura interna | Reconoce estructura interna en más de la mitad de las expresiones | Reconoce estructura interna en menos de la mitad de las expresiones |
| | No completa | Completa más de la | Completa menos de |

Tabla 7.7. Variaciones del perfil 3

| Tipo de expresión | Variación 1 | Variación 2 | Variación 3 |
|---|---|---|---|
| | expresiones | mitad de las expresiones | la mitad de las expresiones |
| | Identifica subestructura (potencia, suma) | Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea | Identifica subestructuras (potencia, suma) |
| Algebraicas | Reconoce estructura interna | Reconoce estructura interna en más de la mitad de los casos | Reconoce estructura interna |
| | Completa todas las expresiones | Completa todas las expresiones, algunas incorrectamente | Completa todas las expresiones |
| | Expresa con simbolismo algebraico | No expresa con simbolismo algebraico | No expresa con simbolismo algebraico |

En este perfil 3 los elementos comunes correspondientes a las expresiones numéricas que le caracterizan son menos, en número, que en los perfiles anteriores. Por ejemplo, no aparece entre lo común del grupo el reconocimiento de estructura interna, que si aparece en la caracterización de los perfiles 1 y 2. Ocurre otro tanto con el reconocimiento de estructura interna en expresiones algebraicas, registrándose una falta de reconocimiento. El comportamiento que se percibe mirando los elementos comunes del perfil en las expresiones algebraicas justifica el descenso que presenta el perfil en la sesión 4.

Las variantes en este perfil 3 se deben a un número de factores más elevado que en los casos anteriores. En el reconocimiento de la estructura interna de expresiones numéricas que puede suceder en pocas ocasiones, en la mayoría de los casos o en ningún caso. También en expresiones algebraicas oscila entre no reconocer, reconocer en algunos casos y en todos los casos. La expresión del simbolismo algebraico en la tarea de completar con una variable es otro factor de discriminación para estas.

### 7.2.4 Perfil 4

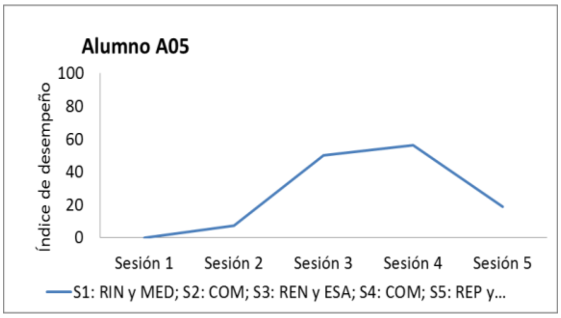
Grupo de estudiantes que delimitan este perfil: A05, A20.

En este grupo hemos considerado dos estudiantes que coinciden en su trayectoria en las tres últimas sesiones. El estudiante A20 no ha asistido a las dos primeras sesiones.

En la sesión primera el estudiante A05 tiene un comportamiento similar a la mayoría de los que realizan la tarea. En la sesión tercera los dos estudiantes del perfil tienen un comportamiento similar en sus resultados los cuales son bajos, mejoran su desempeño en la cuarta sesión, y bajan en la última y quinta sesión. Su comportamiento es atípico comparado con el resto de los compañeros que no bajan la puntuación en la sesión tercera respecto de la cuarta.

Su comportamiento mostrado en las tres últimas sesiones se aleja de sus compañeros. En este caso lo especial es que hasta la cuarta sesión se produce aumento en los resultados de los estudiantes respecto a los descriptores del sentido estructural (en este caso podría A05 estar en el perfil 1), pero en la sesión quinta hay una bajada en su desempeño, evidenciado en la sesión quinta; este descenso es lo que consideramos cuanto menos "extraño" respecto al resto de compañeros (ver Figura 7.4).

*Gráficas del perfil 4*



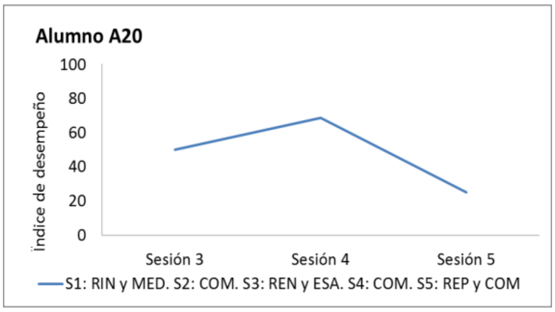




*Figura 7.4:* Representación gráfica del Perfil 4.

***Caracterización del perfil 4***

Tabla 7.8 Caracterización del perfil 4. Elementos comunes

| **Expresiones numéricas** | **Expresiones algebraicas** |
|---|---|
| Reconoce estructura interna en menos de la mitad de las expresiones | Reconoce estructura interna de algunas de las expresiones |
| | Completa más de la mitad de las expresiones |
| Identifica subestructura (suma, potencia) | Identifica subestructura (producto, potencia) |

En la tabla 7.9 se muestran las variaciones del perfil 4 presentadas para las expresiones numéricas. No presentan variaciones en las expresiones algebraicas.

Tabla 7.9. Variaciones del perfil 4

| Tipo de expresión | Variación 1 | Variación 2 |
|---|---|---|
| Numéricas | Reconoce relaciones | No reconoce relaciones |
| | Reconoce estructura externa | Reconoce estructura externa en dos expresiones |
| | Reproduce estructura | No reproduce estructura |
| | Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea | Identifica subestructura (suma, potencia) |
| | Expresa con simbolismo algebraico | No expresa con simbolismo algebraico |

En las tres sesiones comparadas en el desempeño de estos dos estudiantes se aprecia que las variaciones en cuanto a las expresiones numéricas se deben al reconocimiento de relaciones y de estructura externa que influye en la reproducción de la misma. También en la cantidad de expresiones que completan y en la manera de hacerlo que en un caso es de forma incorrecta.

### 7.2.5 Perfil 5

Perfil obtenido a partir de los datos de los estudiantes A16, A17 y A18.

Este perfil se obtiene comparando los desempeños de tres estudiantes que no han asistido a la primera y tercera sesiones. Las gráficas presentan en estos casos un aspecto ligeramente ascendente (Figura 7.5) en las sesiones a las que asisten. Se percibe en A16 y A17 un ascenso leve que llega a ser constante en los valores de las dos últimas sesiones, siendo más alto el valor presentado, en la sesión quinta, por el estudiante A18 que llega a alcanzar la cota máxima en dicha sesión.

*Gráficas del perfil 5*

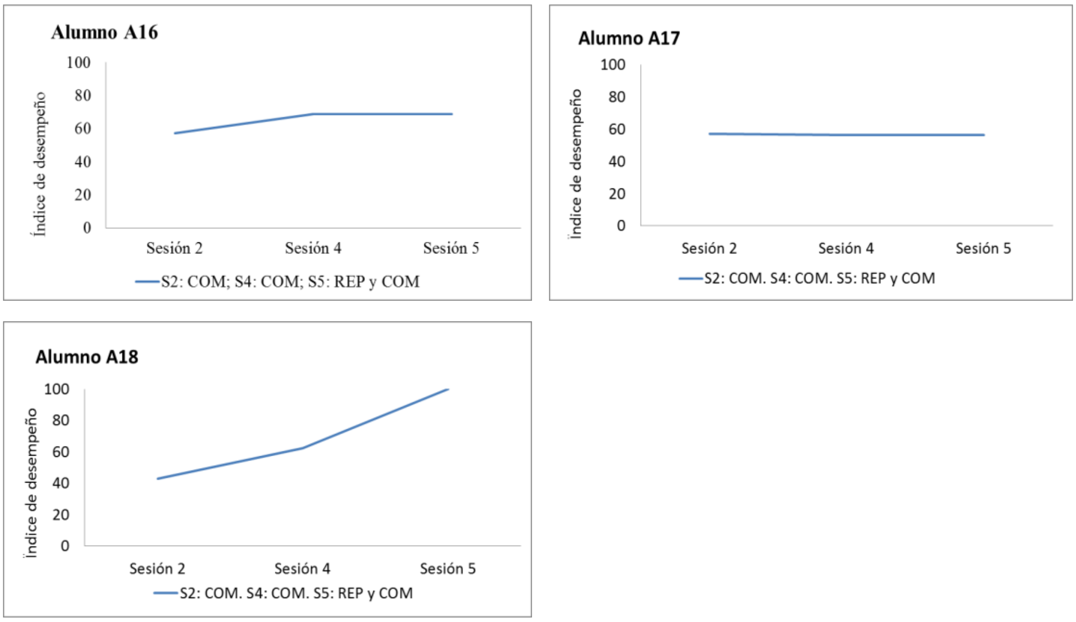



*Figura 7.5:* Representación gráfica del Perfil 5

*Caracterización del perfil 5*

Tabla 7.10. Caracterización del perfil 5. Elementos comunes

| **Expresiones numéricas** | **Expresiones algebraicas** |
|---|---|
| Reconoce estructura interna en menos de la mitad de las expresiones | Reconocen estructura interna de algunas expresiones |
| Completa las expresiones que reconoce | |
| Identifica algunas subestructuras (potencia) | Identifican subestructuras (producto y potencia) |

En la tabla 7.11 se muestran las variaciones del perfil 5 presentadas solamente para las expresiones algebraicas, dado que no se presentan variaciones en las expresiones numéricas.

Tabla 7.11. Variaciones del perfil 5

| Tipo de expresión | Variación 1 | Variación 2 |
|---|---|---|
| Numéricas | | |
| Algebraicas | Completa menos de la mitad de las expresiones | Completa expresiones |
| | Reconoce estructura interna en parte de las expresiones | Reconoce estructura interna |
| | No expresa con simbolismo algebraico | Expresa con simbolismo algebraico |

En la tabla 7.11 se percibe que no hay variaciones en este perfil en cuanto a los elementos que aparecen en las expresiones numéricas (solo han asistido a una sesión de las tres en las que se trabaja con estas expresiones). Las variaciones se producen en las expresiones algebraicas. En cuanto a completar las expresiones, en un caso se reconoce estructura interna en más expresiones que en el otro y el reconocer que una expresión se puede completar con una variable, no es reconocido en un caso y en el otro sí.

### 7.2.6 Perfil 6

Grupo unitario formado por el estudiante A10.

Este perfil se ha obtenido sobre los resultados de un solo estudiante. El estudiante A10 no asiste a la primera sesión, como varios de sus compañeros. Sin embargo, el comportamiento de este estudiante no se corresponde con ninguno de los de otros compañeros que no asisten a la misma sesión que él. A10 presenta un desempeño muy bueno en la tercera sesión y más bajo en la cuarta, en lo cual sí coincide con muchos de ellos, pero el menor valor registrado en los resultados de la quinta sesión no es coincidente con otros, salvo con los estudiantes del perfil 5, con los cuales tampoco coincide en las sesiones anteriores (ver Figura 7.6).

*Gráfica del perfil 6*

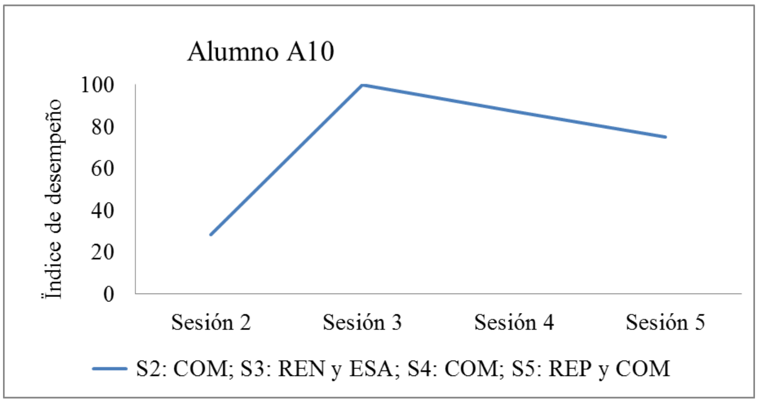



*Figura 7.6.* Representación gráfica del Perfil 6

*Caracterización del perfil 6*

Por tratarse de un solo estudiante, la caracterización coincide con los resultados de su desempeño.

Tabla 7.12. Caracterización del perfil 6

| **Expresiones numéricas** | **Expresiones algebraicas** |
|---|---|
| No reconoce estructura interna | Reconocen estructura interna de expresiones |
| Completa algunas de las expresiones | Completan todas las expresiones |
| Identifica subestructura (potencia) | Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea. |
| Reconoce relaciones | Reconoce relaciones |
| Reconoce estructura externa | Reconoce estructura interna en la mitad de los casos. |
| Reproduce estructura | Completa todas las expresiones |
| Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea. | Identifican todas las subestructuras presentes en la tarea |
| Utiliza simbolismo algebraico | No expresa con simbolismo algebraico |

### 7.2.7 Perfil 7

El perfil 7, como el 6, también queda determinado por un solo estudiante A15. Se percibe en la comparación de su comportamiento entre las diferentes sesiones, que su desempeño es bajo en cuatro de las sesiones, siendo un poco más alto en la segunda. Presenta un rendimiento bajo en identificar estructura interna tanto en expresiones numéricas como algebraicas, no muestra reconocer relaciones ni estructura externa. Al no percibir relaciones, cuando generaliza lo hace de acuerdo a una sola de las expresiones, sin considerar el resto. Por lo general en el trabajo que realiza su sentido estructural es bajo (ver Figura 7.7).

*Gráfica del perfil 7*

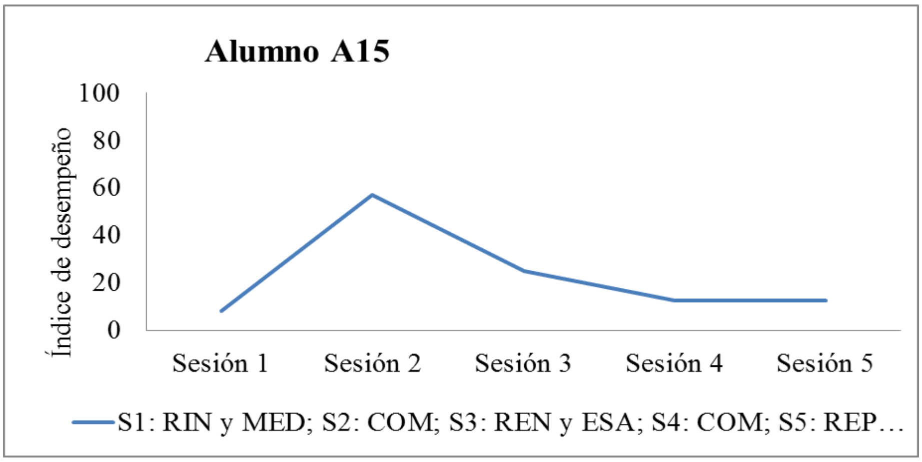



*Figura 7.7.* Representación gráfica del Perfil 7

*Caracterización del perfil 7*

Por tratarse de un solo estudiante, la caracterización coincide con los resultados de su desempeño.

Tabla 7.13. Caracterización del perfil 7

| **Expresiones numéricas** | **Expresiones algebraicas** |
|---|---|
| No muestra reconocer relaciones. | No reconoce estructura interna de expresiones |
| No modifica, cambia datos numéricos. | Completa tres siete sentencias, dos erróneamente |
| Reconoce estructura interna en la mayor parte de las expresiones. | Identifica subestructura (potencia) |
| Completa el mayor número de expresiones | No reconoce relaciones |
| Identifica subestructura (producto y potencia). | No reconoce estructura interna en la mayoría de los casos |
| No reconoce relaciones | No completa expresiones correctamente. |
| Reconoce estructura externa | Identifica subestructura (potencia) |
| Reproduce estructura de acuerdo a lo percibido | |
| Expresa con simbolismo algebraico | |
| Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea | |

## 7.3 Análisis de otros datos no contemplados desde los descriptores

Miramos conjuntamente los resultados en las diferentes sesiones, las formas diferentes de abordar las diferentes tareas y algunos errores que nos han llamado la atención por no haberlos encontrado en la literatura consultada.

### 7.3.1 Sobre las sesiones

Las gráficas muestran que a la mayor parte de los estudiantes, la sesión tres ha sido la que menos dificultad les ha causado, en ella la tarea fundamental propuesta se relaciona con reproducir la estructura externa de tres expresiones con dicha estructura común. Si el estudiante considera las expresiones aisladas, se trataría de aplicar un conocimiento más cercano a lo procedimental. Si se relacionan entre si las expresiones presentadas se aleja algo de lo procedimental acercándose a lo conceptual. En este caso la mayoría han establecido relaciones y han conseguido una alta tasa de éxito en dicha sesión.

Por el contrario la sesión 4ª ha sido la que, por lo general, ha resultado de menos éxito, creemos que se debe a que en esta sesión se produce un cambio de trabajo, en las tres anteriores se trabajan solo expresiones numéricas y aquí se presentan expresiones algebraicas con elementos ocultos y si bien en la sesión anterior hay elementos ocultos en las expresiones numéricas, estas pueden ser completadas por tanteo, ensayo y error, cosa que no es posible hacer en las algebraicas donde hay que colocar la expresión encontrando la equivalencia entre los dos miembros.

La primera sesión ha dado rendimiento bajo a pesar de que la acción a realizar era comprobar si los dos miembros de una igualdad eran o no equivalentes. La gran mayoría de los estudiantes opera, quizá guiados por la presentación de la tarea, algunos se dan cuenta de que no necesitan operar, pues lo pueden hacer más rápidamente razonando. Al operar muchos no lo hacen siguiendo el camino más corto utilizando números pequeños (se consiguen si hay una resta) sino realizando inicialmente productos y potencias que les lleva a operar con números muy altos.

### 7.3.2 Sobre la forma de abordar las tareas

Los datos que aparecen en la primera columna del Anexo J muestran otra información que consideramos relevante, se refiere a la manera particular de abordar las tareas. Nos referimos a las formas de operar, las dificultades que tienen según la identidad notable inmersa en la sentencia, entre otros.

Entre los estudiantes que operan para comprobar si una sentencia es o no correcta, la forma de hacerlo no es la misma. Los hay que respetan la jerarquía de las operaciones y por ejemplo en un binomio suma elevado al cuadrado, primero suman y posteriormente elevan el resultado al cuadrado. Una gran parte de ellos, actúan operando todo si la expresión está en su forma extendida (o desarrollada) y extendiéndola inicialmente si está en su forma contraída, esto a veces les lleva a cometer errores ya que en el cuadrado de un binomio suma o resta aplican falsa distributividad. En ningún caso se ha dado que una expresión extendida la contraigan (a pesar de que los cálculos hubiesen resultado más sencillos por trabajar con números más bajos.

De entre las identidades notables trabajadas la que les ha resultado más familiar es la que refleja la propiedad distributiva, desarrollando siempre, en menor medida si hay que sacar factor común. Por el contrario las que han mostrado más dificultad ha sido el cuadrado de un binomio suma o diferencia, la presencia del doble producto, entendemos que es la causa de ello. Además de la utilización de la falsa distributividad indicada anteriormente, al generalizar expresiones en las que aparece el binomio suma o diferencia elevada al cuadrado, el número dos del doble producto es considerado como una variable.

De las expresiones compuestas trabajadas han sido más asequibles aquellas en las cuales presentan un término con producto o potencia y menos aquellas en las que aparece algún término con suma o resta.

En más de una ocasión, los estudiantes han escrito dos expresiones con la misma estructura pero con diferentes letras para la generalización, una para cada una de las expresiones numéricas construidas.

Entre las tareas menos resueltas o que han presentado más error se encuentra sacar factor común en una expresión compuesta con producto y suma. Muy pocos estudiantes la abordan y algunos de los que lo hacen no logran hacerlo correctamente.

Indicar que muy pocos estudiantes justifican las respuestas que dan, no están acostumbrados a escribir y expresar o razonar sobre el porqué de sus actuaciones

### 7.3.3 Sobre errores

Señalamos algunos errores que nos han llamado la atención, además de los errores de cálculo a los cuales no nos vamos a referir y la falsa distributividad que ya hemos referido. Por último recogemos una comparación de errores y dificultades señalados por diferentes investigadores y los que se han producido al trabajar los estudiantes con identidades notables.

En un par de estudiantes se ha dado el multiplicar una fracción algebraica por ella misma para igualar a la unidad.

En algunos casos, multiplicar por -1 cambiando de signo solo el término independiente de la expresión multiplicada.

Considerar que en el cuadrado del binomio suma o diferencia el cuadrado de un número es ese mismo número a semejanza de lo que ocurre en el binomio si el término numérico es -1.

A continuación proporcionamos en la Tabla 7.14 un resumen de las dificultades señaladas por algunos investigadores citados en este trabajo y su relación con las dificultades presentadas por los estudiantes en el trabajo con las identidades notables en esta investigación.

*Tabla 7.14*. Dificultades y errores en el trabajo con las identidades notables

| Dificultades señaladas por los Investigadores | Dificultades con Identidades Notables |
|---|---|
| Falta de comprensión de la estructura de las expresiones (Sfard, 1991; Kirshner, 2001, Molina, 2010). | - Desarrollar el cuadrado de un producto como el cuadrado de una suma (sesión 1).<br>- Dificultad para completar expresiones compuestas con producto y potencia (sesión 2).<br>- Transforman sin aplicar identidad notable.<br>- En caso de reproducir o generalizar expresiones no reproducen el invariante numérico (sesión 3).<br>- Dificultad para tratar con el cuadrado de un binomio (sesión 4).<br>- El orden en que se den las expresiones: versión contraída para buscar la parte extendida o versión extendida para buscar la parte contraída (todas).<br>- No percepción de la equivalencia de una igualdad. |
| Comprensión insuficiente de las propiedades de | - Desarrollar el cuadrado de una suma como suma de cuadrados y/o el cuadrado de una diferencia como diferencia de cuadrados (sesión 1). |

*Tabla 7.14*. Dificultades y errores en el trabajo con las identidades notables

| Dificultades señaladas por los Investigadores | Dificultades con Identidades Notables |
|---|---|
| asociatividad y distributividad (Kirshner, 2001; Castro, 2012) | |
| Convenciones del orden de operaciones (Arcavi, Pierce y Stacey, 2001; Booth, 1982, 1984). | - Estudiantes que al operar no conservan la jerarquía de operaciones (sesión 1). |
| Dificultad para tratar expresiones con muchos términos como una sola entidad (Wagner, Rachlin y Jensen 1984, Hoch, 2003). | - Estudiantes que no perciben ni establecen relaciones entre numerador y denominador, no perciben la estructura interna de algunas expresiones (sesión 5).<br>- Dificultad para establecer equivalencia si los miembros de la igualdad uno es fracción y el otro no. |

# Capítulo 8. Conclusiones y aportes de investigación

En este capítulo presentamos las respuestas a las interrogantes y objetivos planteados para llevar a cabo esta investigación, fruto de nuestro interés por el tema que concierne al estudio de las dificultades para con expresiones algebraicas que involucran identidades notables y la relación de éste con el constructo sentido estructural. Consideramos que con el estudio realizado respondemos en gran parte a las interrogantes propuestas y a los objetivos planteados, no obstante aún queda un número considerable de líneas abiertas que permitirán continuar indagando en esta temática en la cual apenas se empieza a comprender las dificultades que los estudiantes de educación secundaria y niveles superiores presentan en el trabajo con ese tipo de expresiones.

## *8.1 Respuestas a preguntas y objetivos de Investigación*

En este apartado vamos señalando respuestas tanto a preguntas de investigación como a los objetivos planteados. En muchas de las ocasiones hacemos referencia al apartado o sección donde se puede ver la respuesta con mayor extensión, ya que en los trabajos de diseño los resultados se extienden a lo largo del documento.

### 8.1.1 Respuestas a preguntas planteadas

*P1. ¿Las dificultades que muestran los estudiantes con el álgebra, señaladas en numerosas investigaciones, se reflejan en el trabajo con identidades notables?*

La respuesta a esta primera interrogante es afirmativa. En investigaciones realizadas se han percibido dificultades de los estudiantes en el estudio de ecuaciones y expresiones algebraicas como las señaladas en el Capítulo 2. En nuestro caso, hemos tratado el estudio de las dificultades con expresiones que llevan inmersas las identidades notables, y hemos podido corroborar el tipo de dificultades que en este tópico se presentan, y que se indican al finalizar el análisis de cada tarea en el Capítulo 6. En el Capítulo 7 hacemos una reflexión sobre las dificultades presentadas por los estudiantes en las cinco sesiones de trabajo y presentamos una tabla donde las mismas se ponen en paralelo con las dificultades señaladas por algunos investigadores que se citan. Se evidencia en este trabajo, como caso especial, la dificultad que tienen algunos estudiantes en considerar la constante dos como integrante de la expresión desarrollada de una suma o resta, elevada al cuadrado (cuadrado de suma o diferencia), así como la tendencia a no pasar una forma desarrollada (o extendida) de una identidad notable a su forma contraída. También se detecta mayor facilidad para utilizar la propiedad distributiva que el resto de identidades notables utilizadas.

*P2. ¿Los estudiantes trabajan con las identidades notables considerándolas como un todo, percibiendo su estructura, o necesitan de un proceso operatorio en el tratamiento de las mismas?*

La respuesta de forma general es negativa. Algunos estudiantes poseen la percepción de las identidades notables como un todo, pero en su mayoría de acuerdo al experimento realizado requieren de un proceso operatorio para familiarizarse con ellas y percibirlas como un todo. Esto se puede observar en las sesiones realizadas en el experimento de investigación, en las cuales, en la sesión 1 sólo dos de trece estudiantes perciben la estructura dada como un todo (aunque ignoran en este caso la indicación de comprobar haciendo cálculos, sólo lo hacen en algunas de las sentencias), mientras que al finalizar el experimento en la sesión 5, un promedio de dieciséis estudiantes de veinte muestran percibir las estructuras como un todo. Al respecto, Sfard (1991) señala que para muchos estudiantes la concepción operacional representa un primer paso en la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos y subraya que la evolución desde una concepción de proceso hacia una concepción de objeto no se logra ni rápidamente ni sin esfuerzo. Lo cual implica que para que los estudiantes perciban las identidades notables como un todo se requiere de pasos graduales como los señalados por Sfard (1991) en el capítulo tercero de este trabajo.

*P3. ¿El desempeño en expresiones numéricas y algebraicas desde una perspectiva estructural presenta similares resultados en los estudiantes?*

La respuesta que podemos dar es que no. Los estudiantes, por lo general, no perciben las identidades notables en expresiones numéricas de manera espontánea, y tiende a operar. El desempeño sí es similar cuando la tarea solo requiere tratar con estructuras externas. Cuando se ha desarrollado algún trabajo con expresiones algebraicas, el reconocimiento de estructuras en las mismas les resulta más familiar y lo llevan a cabo.

Por lo que nos atrevemos a asegurar que no es frecuente el trabajo con expresiones numéricas bajo el punto de vista de considerar la estructura de las expresiones. En este sentido Kieran (1998) indica que la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra.

*P4. ¿Una enseñanza centrada en las relaciones internas, numéricas y algebraicas, presentes en identidades notables fortalecerá la comprensión de las estructuras de dichas identidades?*

No estamos en condiciones de dar respuesta a esta cuestión. No hemos culminado la investigación de diseño implementada con una evaluación del aprendizaje de los estudiantes, sino que hemos ido señalando en cada sesión qué ha pasado y las posibilidades de aprendizaje que tenían los estudiantes tanto en la realización de las tareas como en su puesta en común. Si bien es cierto, la última sesión se diseñó como un compendio de lo trabajado en las sesiones anteriores y en los perfiles presentados se observa que la mayoría de los estudiantes presentan en esta sesión un rendimiento mayor.

*P5. ¿Una enseñanza donde las expresiones sean gradualmente introducidas, desde más simples a algo más complejas llevará a ver identidades notables en expresiones con elementos no simples (compuestos)?*

Por lo general los estudiantes, en la mayoría de los casos han considerado los elementos compuestos como si se tratara de “un todo”. Esto puede ser debido a la forma de organizar las tareas desde la más sencilla a más complicada o puede haber sido por otros elementos ajenos a nuestro control. Sfard (1991) señala que la comprensión estructural de una noción abstracta (como pueden ser las expresiones algebraicas) puede ser adquirida de forma automática a través de mucha práctica operacional. En nuestro caso dado que a los estudiantes se les inició el experimento con el tratamiento de estructura de expresiones aritméticas, en las dos primeras sesiones y parte de la tercera sesión de trabajo, consideramos que este tratamiento ha actuado como un preámbulo para que dichos estudiantes puedan acceder más fácilmente a tratar con la estructura de expresiones algebraicas. En este sentido citamos también a Booth (1989) quien manifiesta que nuestra capacidad para manipular símbolos algebraicos exitosamente requiere comprender primeramente las propiedades estructurales de las operaciones y relaciones matemáticas.

### 8.1.2 Respuestas a objetivos planteados

**Objetivo O1.** *Avanzar en la clarificación del constructo Sentido Estructural y sus descriptores.*

El primer de los objetivos generales lo hemos subdividido en dos objetivos parciales para llevar a cabo la resolución del planteamiento:

*O1.1. Realizar una búsqueda exhaustiva sobre la literatura existente referida al constructo sentido estructural, analizarla y aportar nuevas ideas sobre el constructo sentido estructural, fruto de nuestra reflexión.*

En el segundo capítulo de este trabajo incluimos una extensa literatura que parte desde las teorías de Wagner, Rachlin y Jensen en 1984 y que concierne a los orígenes del constructo sentido estructural aún sin ser utilizado con este nombre. En dicho capítulo mostramos el recorrido realizado por Hoch y Dreyfus de 2003 a 2007 en cuanto a lo que la definición del mismo se refiere. Recogemos un resumen de las diversas investigaciones que estos autores realizan en educación secundaria y los aportes que proponen para mejorar el sentido estructural en los estudiantes.

Posteriormente, en el tercer capítulo presentamos como aporte nuestra definición de dicho constructo, basada en la experiencia realizada tanto en el trabajo fin de master (Vega-Castro, 2010) como en la realización de este experimento, que nos ha permitido observar de cerca el sentido estructural mostrado por un grupo de estudiantes.

Sin ánimo de ser reiterativos reproducimos aquí dicha definición, no lo hacemos con los descriptores.

*Entendemos por sentido estructural a una competencia cognitiva o un conjunto de capacidades necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas.*

*O1.2. Contribuir con nuevos descriptores sobre el sentido estructural a los ya aportados por otros autores, en el empeño de la caracterización de dicho constructo.*

Para nuestro estudio partimos de los descriptores propuestos por los investigadores Hoch y Dreyfus en el año 2006, los cuales han sido de orientación para guiar nuestro trabajo. No obstante, dado nuestro interés por investigar nuevos campos de tareas que involucran el sentido estructural hemos propuesto nuevos descriptores para llevar a cabo nuestros objetivos. En el Capítulo 3 proponemos un listado de los descriptores del sentido estructural, los cuales se originan de nuestra reflexión a partir de la literatura revisada y del trabajo de investigación que hemos venido realizando durante estos años con dicho constructo. Este listado de descriptores los hemos clasificado de acuerdo a la acción que están implicadas en los mismos: analizar, construir, modificar o transformar expresiones. Consideramos que nuestra contribución con estos descriptores a la Educación Matemática ayudará a otros investigadores a ahondar en el conocimiento del sentido estructural que presentan los estudiantes.

**Objetivo O2.** *Estudiar el procedimiento de elaboración, puesta en práctica y análisis de una intervención en el aula para trabajar las identidades notables desde una perspectiva centrada en la estructuras de estas expresiones.*

Para el cumplimiento de este objetivo partimos de la implementación de una investigación de Diseño (Molina et al., 2011) que nos ha guiado en la elaboración, puesta en práctica y análisis de intervenciones en el aula para dar efectividad al proyecto. Este objetivo lo hemos subdividido en otros de carácter particular y objetivo:

*O2.1. Seleccionar una colección de tareas, que involucren identidades notables, cuya ejecución haga posible el uso de la estructura de las mismas.*

Para lograr este objetivo, hemos realizado una búsqueda exhaustiva de tareas en libros de Matemática de Educación Secundaria (ver Anexo A) e investigaciones realizadas por otros autores. En el capítulo 4 presentamos una descripción detallada de las variables que intervienen en las tareas propuestas y que nos ayudaron en la delimitación de esta parte del trabajo: las identidades notables a utilizar, las acciones de las tareas haciendo uso de las identidades notables y la justificación de porqué las hemos utilizado, así como el tipo y complejidad de las expresiones involucradas en cada tarea.

*O2.2. Organizar y distribuir las tareas en secuencias de aprendizaje ordenadas por la complejidad que puedan presentar a los estudiantes.*

En el capítulo 5 presentamos la organización y distribución de las tareas en secuencias de aprendizaje tomando como referencia los objetivos de investigación así como las expectativas de aprendizaje propuestas para el desarrollo de cada sesión. Vamos aumentando gradualmente el nivel de complejidad de las tareas, pasando así del tratamiento con expresiones numéricas a expresiones algebraicas, así como del manejo con expresiones enteras a expresiones fraccionarias. Cada sesión constituye una capacitación para la siguiente de modo que al finalizar la quinta sesión los estudiantes estén preparados para reconocer la presencia de una identidad notable dentro de una igualdad dada y actuar sobre la misma aplicando la estructura interna correspondiente. Además, dentro de cada sesión las tareas asignadas están gradualmente elaboradas en cuanto a la complejidad que nos permite analizar el sentido estructural puesto de manifiesto por los estudiantes en las mismas. También, las sentencias de cada tarea están compuestas por las distintas identidades notables en estudio, difiriendo en están formadas por términos simples o compuestos.

*O2.3. Preparar un sistema de categorías con las que analizar el desempeño de los estudiantes.*

Partiendo de las tareas propuestas a los estudiantes para las distintas sesiones establecimos nueve categorías que son las que nos han permitido analizar el desempeño de los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo. Las nueve categorías, en mención, se han subdividido dando lugar a un total de veintisiete subcategorías, por medio de las cuales hemos realizado el estudio del sentido estructural desempeñado por un grupo de estudiantes al trabajar expresiones numéricas y algebraicas en las que hay inmersas identidades notables. En el capítulo 6 se describe, al iniciar el análisis de cada sesión, cada una de las categorías utilizadas en la misma. También se describe para cada sentencia o expresión en cada tarea el rendimiento de los estudiantes en cada una de estas categorías tomando como referencia los descriptores del sentido estructural.

**Objetivo O3**. Investigar cómo se desenvuelven los estudiantes en el trabajo con identidades notables desde la perspectiva estructural.

Las identidades notables son igualdades o expresiones algebraicas que por la composición estructural que llevan implícitas, han actuado como plataforma para este trabajo. Son estructuras especiales que requieren no de memorización para el dominio de las mismas, sino de una familiarización con ellas que permita paso a paso percibirlas o reconocerlas para la correcta utilización y anticipación de pasos en el trabajo con ellas. Consideramos que por las características que poseen y al introducidas a los estudiantes de la forma como lo hemos hecho, les ha permitido a muchos de los estudiantes participantes en el estudio, percibir la forma como están compuestas, su utilidad y como aplicarlas en los distintos contextos de las matemáticas. Su utilización nos ha permitido fijar y acotar la temática sobre la que los estudiantes debían trabajar para llevar a feliz término esta investigación.

Además las tareas de completar, crear, reproducir y generar nuevas expresiones han actuado como fortaleza para despertar el interés de los estudiantes por el trabajo con las identidades notables.

Respecto al objetivo O3 consideramos

*O3.1. Caracterizar el sentido estructural puesto de manifiesto en cada una de las tareas que realizan los estudiantes.*

En el Capítulo 6 presentamos la caracterización que hemos dado al sentido estructural puesto de manifiesto por los estudiantes en cada una de las tareas. En este capítulo se describe cada una de las caracterizaciones apoyándonos en el uso de las categorías definidas que nos permiten analizar el desempeño de los estudiantes así como la potencialidad de las tareas propuestas para hacer emerger manifestaciones de sentido estructural. Los perfiles que se recogen en el capítulo 7 muestran de manera más eficiente dicha caracterización y el hecho de que la misma es coincidente en grupos de estudiantes.

*O3.2. Analizar para cada una de tareas el desempeño de los estudiantes en relación con los descriptores del sentido estructural.*

En el capítulo 6 y sobre todo en el capítulo 7 se han realizado análisis de las actuaciones y producciones de los estudiantes por sentencia en cada tarea de cada sesión y tomando como referencia los descriptores del sentido estructural. Estos análisis permiten ver cómo ha sido el desempeño de los estudiantes a lo largo de las cinco sesiones.

*O3.3. Analizar los errores cometidos en el desempeño de las tareas por los estudiantes.*

En el Capítulo 6, al final del análisis del desempeño de los estudiantes en cada expresión o sentencia propuestas en cada tarea, se recoge un resumen de los errores cometidos por los estudiantes en la misma. En el capítulo 7 también se incluyen errores que nos han llamado la atención del desempeño de los estudiantes y presentamos una tabla comparativa entre los errores que apuntan otros investigadores y los que hemos encontrado relacionados con las identidades notables.

.

**Objetivo O4**. Construir un Perfil de Sentido Estructural de un grupo de alumnos de Educación Secundaria al trabajar tareas sobre Expresiones Algebraicas que involucran Identidades Notables.

Este objetivo lo hemos subdividido en los siguientes para su obtención:

*O4.1. Determinar si hay patrones comunes de comportamiento en los estudiantes al enfrentarse a las tareas propuestas.*

En el Capítulo 7 se recogen los distintos perfiles que hemos encontrado después de ver que había patrones de comportamiento similares, entre grupos de estudiantes, en cuanto al desempeño en las tareas realizadas. Se han detectado, y determinado desde sus elementos, siete perfiles entre los cuales los tres primeros consideramos son más consistentes que el resto.

*O4.2. Caracterizar cada patrón obtenido como un perfil de sentido estructural.*

Detallamos los patrones comunes que presentan los perfiles.

*Perfil 1*: Un grupo de cinco estudiantes presenta en la representación de sus resultados un comportamiento similar y determinan un perfil que por la evolución de la gráfica se percibe que, salvo en la primera sesión, en el resto han desarrollado satisfactoriamente su trabajo en casi la totalidad de las tareas propuestas. Han subido en la segunda sesión hasta un nivel máximo y se mantienen en el mismo en el resto de las sesiones. Uno de ellos muestra unos resultados algo más bajos pero analizando su trabajo se aprecia que se trata de actuaciones que pueden atribuirse a "despistes". Su caracterización viene dada por: reconocimiento de parte de las relaciones en expresiones aritméticas, reconocimiento de estructura tanto externa como interna de las identidades notables y aplicación para transformar y complementar expresiones.

*Perfil 2*: En este caso, el perfil está determinado por cuatro estudiantes. El comportamiento de estos estudiantes es algo similar al del grupo anterior en cuatro sesiones y difiere en la sesión cuarta. En dicha sesión el trabajo a realizar cambia significativamente respecto de las anteriores al requerir trabajar con expresiones algebraicas, hasta la sesión anterior el trabajo había sido mayoritariamente con expresiones numéricas. Si bien las acciones a realizar coinciden en gran parte con las anteriores, el ámbito de trabajo es diferente. El refuerzo alcanzado mediante el trabajo de la sesión cuatro les hace presentar una buena actuación en la sesión quinta.

*Perfil 3*: Este perfil queda determinado por cuatro estudiantes, es similar en sus tendencias al perfil 2 pero los extremos de bajada y subida, en los resultados de sus actuaciones, son más acusados. En la sesión tres, que es en la que mejores resultados presentan, en general, tres de ellos han mostrado alto desempeño, y han mostrado bajo desempeño (en una ocasión nula) en la tarea con expresiones algebraicas en la sesión cuarta.

*Perfil 4*: El perfil 4 queda determinado por dos estudiantes uno de ellos (A20) solo asiste a las tres últimas sesiones. Este perfil presenta un aumento en las cuatro sesiones primeras, bajando en la quinta sesión. El comportamiento de las dos últimas sesiones es lo que hace especial a este perfil. En los dos casos difiere de la mayoría de los compañeros.

*Perfil 5:* Está delimitado este perfil por tres estudiantes que solo asisten a las tres últimas sesiones. Presentan la característica de tener un desempeño muy similar en las sesiones, si bien uno de ellos destaca por su desempeño en la última sesión.

*Perfil 6*: Este es un perfil que viene dado por un solo estudiante. Es atípico su desempeño en la comparación de las sesiones cuarta y quinta con el resto, se produce una suave bajada desde el valor obtenido con sus respuestas en la sesión cinco respecto a la cuatro. El refuerzo que para otros estudiantes ha supuesto el trabajo con expresiones algebraicas en la sesión cuarta no le ha ayudado para mantenerse o mejorar su desempeño en la sesión quinta.

*Perfil 7*: Perfil determinado por un solo estudiante. Su comportamiento no coincide con ninguno de sus compañeros, como ocurre con el perfil 5. Si bien en la tarea de encontrar números ocultos en expresiones numéricas de la segunda sesión, muestra un alto desempeño, baja en la sesión tres, así como en la sesión cuatro, alcanzando valores muy bajos en las últimas dos sesiones.

## *8.2 Conclusión*

Como ocurre en los experimentos de enseñanza las conclusiones no aparecen solo al final, sino que se van anotando a lo largo de diferentes capítulos. En nuestro caso dado que algún objetivo está relacionado con el aspecto teórico del sentido estructural y otros están relacionados con el trabajo empírico, en este punto recogeremos alguna reflexión sobre las dos partes señaladas

Ha sido necesaria una amplia revisión de la literatura para realizar un informe sobre el constructo sentido estructural y sus descriptores. Lo hemos hecho, y hemos avanzado en el mismo. Los descriptores los consideramos una guía a considerar por futuros investigadores. Los descriptores no deben de considerarse variables de tarea y preparar la intervención tomándolos como tales, sino que han de servir de referencia para lo que se pretende llegar a conseguir en el experimento y en las sesiones. En nuestro caso hemos tratado de dar coherencia al estudio enfocando una parte del análisis de los datos de los estudiantes en función de los descriptores.

En relación al trabajo empírico, mediante los análisis entre tareas, como el análisis retrospectivo del grupo en general y el análisis individual de los estudiantes, creemos haber dejado patente en los capítulos 6 y 7 lo que ha sucedido en el aula durante las cinco sesiones de nuestro experimento, cómo se ha desarrollado el mismo y algunas explicaciones sobre lo acaecido. Dicha información es la respuesta a los tres interrogantes que se plantean en este tipo de estudios ¿qué sucede? en el aula ¿cómo sucede? y ¿por qué sucede? en torno a un aprendizaje concreto.

## 8.3 Limitaciones de este trabajo

Este estudio, como sucede en los de su tipo, ha estado orientado a servir de mejora del trabajo en el aula. Hemos dedicado al mismo cinco sesiones, pero sería necesario un trabajo sistemático con más sesiones y más espaciadas en el tiempo para que el sentido estructural se fuese fijando en los estudiantes de manera paulatina y constante, forma que entendemos es más eficaz en la consecución de la formación matemática.

Por otra parte hemos tratado de controlar en todas nuestras posibilidades las variables intervinientes en el experimento, pero al ser una investigación desarrollada en un aula natural no es posible hacerlo con aquellas variables relacionadas con el desarrollo del trabajo empírico. Por ejemplo, en algunos casos aparecen resultados de estudiantes que por su trayectoria, bien habrían podido copiar de algún compañero sentado en una posición cercana. Copiar el trabajo de un compañero ocurre normalmente en el trabajo habitual de los estudiantes.

Dada la gran cantidad de datos recogidos, hemos tratado de hacer un análisis sistemático de los mismos, pero entendemos que aún se puede profundizar sobre ello. Por ejemplo, sería interesante reflexionar más sobre los datos, mirando individualmente el comportamiento de los estudiantes para ver cómo ha sido su aprendizaje a lo largo de estas sesiones.

En la preparación de las sesiones se introdujeron expectativas de aprendizaje para cada una de las sesiones, pero al no hacer una prueba escrita en la que evaluar el conocimiento de los estudiantes, no poseemos evidencias sobre las mismas y no podemos decir si se han cumplido dichas expectativas. Podemos pensar que la insistencia, en la puesta en común de cada una de las tareas, sobre la manera de trabajar las mismas desde un punto de vista relacional, haya dado pie a que algunos estudiantes hayan alcanzado los objetivos que nos proponíamos como expectativas de aprendizaje.

Respecto a los perfiles, si bien hemos delimitado siete perfiles, se ha hecho estudiando un número muy reducido de sujetos participantes, con la limitación añadida de que algunos no asisten a todas las sesiones de estudio.

## *8.4 Líneas abiertas de investigación con posibilidades de continuación*

Algunas tareas pendientes y que se pueden retomar en otros estudios consideramos que son:

Continuar en la reflexión y ampliación desde el punto de vista teórico del constructo sentido estructural.

Realizar una reproducción del trabajo, que no una réplica, (no se trata de hacer un estudio completamente similar, que no sería posible) incorporando las mejoras que se han ido señalando a lo largo de los análisis realizados tanto entre sesiones como en el análisis retrospectivo, con objeto de pulir el modelo elaborado y repetirlo en otros contextos.

Tomar un mayor número de estudiantes y estudiar sus perfiles de modo que se puedan contrastar los resultados obtenidos para los siete perfiles.

Realizar un análisis pormenorizado de los datos proporcionados por los estudiantes que han estado en todas las sesiones desarrolladas en este experimento, para determinar cómo ha sido durante el mismo su evolución en lo que al sentido estructural se refiere.

## *8.5 Principales aportes de la investigación*

El trabajo que hemos realizado, presentado en esta memoria, ha permitido enlazar las dimensiones teórica y práctica de la investigación en Didáctica de la Matemática en el ámbito del álgebra escolar. Los aportes científicos de nuestra investigación los vemos, por tanto desde dos vertientes, la educativa y la investigadora.

Por el tipo de estudio realizado consideramos que constituye un aporte para los profesionales de la educación tanto de primaria como de secundaria. Hemos realizado un diseño de una unidad de actuación relacionada con el desarrollo en los estudiantes del sentido estructural y se ha implementado bajo una metodología compuesta por trabajo individual y puesta en común (metodología no habitual en el grupo de estudiantes participante). La preparación del diseño ha llevado a la búsqueda de tareas con diferente grado de dificultad, tanto en el campo numérico como en el algebraico. Los profesionales de educación secundaria pueden aprovechar el tipo de tareas y trabajar en estas y otras similares con sus estudiantes. El análisis de los datos obtenidos ha mostrado que es necesario trabajar el sentido estructural en contextos aritméticos, cosa que se puede hacer en los niveles de educación primaria. Por su parte, la lista de descriptores del sentido estructural elaborada les será útil a dichos profesionales, ya que proporciona una guía para conocer dónde centrar la enseñanza para que los estudiantes puedan desarrollar sentido estructural.

Por sí mismo los perfiles de estudiantes encontrados pueden permitir a los profesionales de la enseñanza en secundaria entender el comportamiento de sus estudiantes cuando trabajen en álgebra.

Trataremos de dar visibilidad a este trabajo en congresos y revistas, de forma que llegue a los profesionales a los que estamos haciendo referencia.

En cuanto a la vertiente investigadora entendemos que nuestro trabajo aporta, dentro de los estudios realizados sobre la enseñanza/aprendizaje del álgebra escolar, una parte novedosa que viene a rellenar un hueco dentro de la misma, tanto por el tipo de estudio realizado como por la temática. Hemos avanzado “algo” en el constructo del sentido estructural, fundamentalmente con la elaboración del conjunto de descriptores del mismo y la delimitación de perfiles en los alumnos creemos que otros investigadores puedan tomar como punto de partida, tanto el aporte teórico, que se ha mejorado, como los resultados del experimento para impulsar nuevos experimentos.

# Referencias


Ainley, J., Wilson, K. y Bills, L. (2003). Generalising the context and generalizing the calculation. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 9-16). Honolulu, HI: PME.

Anderson, J. R. (1993). *Rules of the Mind*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 29-47). Caminha, Portugal: Sociedade Portugesa de Ciências de Eduacaçâo.

Arnau, D. Arevalillo-Herráez, M. y Puig, L. (2011). Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 257- 266). Ciudad Real, España: SEIEM.

Asiala, M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6*, 1-32.

Ballester, S. (1999). *Enseñanza de la matemática en dinámica de grupo*. La Habana, Cuba: Editorial Academia.

Banerjee, R. (2008). *Developing a learning sequence for transiting from arithmetic to elementary algebra*. Tesis doctoral. Mumbai, India: Bhabha Centre for Science Education, Tata Institute of Fundamental Research.

Banerjee, R. (2011). Is arithmetic useful for the teaching and learning of algebra? *Contemporary Education Dialogue, 8*(2), 137–159.

Banerjee, R. y Subramaniam, K. (2005). Developing procedure and structure sense of arithmetic expressions. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the*

*29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128). Melbourne, Australia: PME.

Barab, S. A. y Kirshner, D. (2001). Guest editors' introduction: Rethinking methodology in the learning sciences. *The Journal of the Learning Sciences*, *10*(1-2), 5-15.

Barnet, R. (1984). *Algebra* (2º Ed.). Traducción al español de Juan Bosco Aurioles. Mexico DF, México: McGRAW-HILL.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. Baroody y A. Dowker, (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching.* Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How children view equality sentences, Project for the Mathematical Development of Children* (No. 3). Technical Report. Tallahassee, FL: Florida State University.

Beishuizen, M., Van Putten, C. M. y Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction, 7*(1), 87-106.

Bell, A. (1995). Purpose in School Algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 41-73.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: two aspects. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 167-185). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A., Malone, J. A. y Taylor, P. C. (1987). *Algebra- an exploratory teaching experiment.* Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28$^{th}$ International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Bloedy- Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables in high school algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, T., A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Blöte, A. W., Van der Burg, E. y Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 627-638.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 99-119). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. R. (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School, 11*(3), 5-6.

Booth, L. R. (1983). *Misconceptions leading to errors in elementary algebra (generalised arithmetic)*. Tesis doctoral. Chelsea, WI: Chelsea College.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K–12* (pp. 20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. R. (1989). A question of structure or a reaction to: "the early learning algebra: a structural perspective". En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 57-59). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, R. L. y Thomas, M. J. (2000). Visualization in Mathematics Learning: Arithmetic problem-solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 169-190.

Breiteig,T. y Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: to reason, explain, argue, generalize and justify. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 225-232). Praga, República Checa: PME.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brown, C. A., Carpenter, T. P., Kouba, V. L., Lindquist, M. M., Silver. E. A. y Swafford, J. O. (1988). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry; mathematical methods, and attitudes. *Mathematics Teacher, 81*, 337-347.

Butto, C. y Rojano, M. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática, 22*(3), 55-86.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Berlín, Alemania: Springer- Verlag.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics* (pp. 113-131). Hillsdale, N.J.: Laurence Erlbaum Associates.

Carraher, D., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. (2003). Treating operations of arithmetic as functions. En D. W. Carraher y R. Nemirovsky (Eds.), *Videopapers in mathematics education research*. *CD-ROM issue of monograph of the Journal for Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). Pensamiento Numérico y Educación Matemática. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Ed.), *XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas* (pp. 23-32). Granada, España: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y THALES.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Peñalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 -94). Jaén, España: SEIM.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, E., Rico, L., Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y Aprendizaje de Estructuras Numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Cerdán, F. (2008). Las igualdades producidas en el proceso de traducción algebraico: estudio de las igualdades correctas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: SEIEM.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA, 4*(3), 99-110.

Cerulli, M. y Mariotti, M. A. (2001). L'Algebrista: A microworld for symbolic manipulation. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 179- 186). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Chaiklin, S. y Lesgold S. (1984). *Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions.* Technical report. Pittsburgh, Pennsylvania: University of Pittsburgh.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 33-42). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *88*(4), 286-290.

Clement, J., Narode, R. y Rosnick, P. (1981). Intuitive misconceptions in algebra as a source of math anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 3*(4), 36-45.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. y Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, *10*(1-2), 113-164.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), pp. 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education.* Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *The Journal of the learning sciences*, *13*(1), 15-42.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NI: Lawrence Erlbaum Associates.

Davis, R. B. (1983). Complex mathematical cognition. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 254-290). New York, NY: Academic Press New York.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, NJ: Ablex.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1988). *Children learning mathematics: a teacher's guide to recent research*. Oxford: School Council Publications.

diSessa A. A. y Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, y J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*, (pp. 63-85). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 360-380.

Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Drouhard, J. y Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12$^{th}$ ICMI Study* (pp. 227-264). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1986). Teaching mathematical induction I. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5, 305-317.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996) Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 25-41.

Filloy, E. (1991). Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 48-55). Assisi, Italia: PME.

Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del Algebra y de la Geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 11, 160-166.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

Filloy, E. y Rojano, T. (1991). Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and viceversa. En R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the thirteenth Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 29-35). Viginia Tech, USA: PME

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics* (Vol. 2, 368-375). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

Gilmore, C. K. y Inglis, M. (2008). Process-and object-based thinking in arithmetic. En O. Figueras et al (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 73-80). Morelia, México: PME.

Gray, E. M. y Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115–141.

Greeno, J. G. (1983). Forms of understanding in mathematical problem solving. En S. G. Paris, G. M. Olson y H. W. Stevenson (Eds.), *Learning and motivation in the classroom* (pp. 227-252). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Haapasalo, L. y Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(2), 139-157.

Hallett, D., Nunes, T. y Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of educational psychology, 102*(2), 395-406.

Harel, G. y Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 82-94). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Hawkins, J. (1991). *The Oxford Encyclopedic English Dictionary*. Oxford University Press, USA.

Healy, L. y Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: making connections with computers? *Mathematical Thinking and learning, 1*(1), 59-84.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Hiebert J. y Lefevre P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge:*

*The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italia: ERME.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Praga, República Checa: Charles University in Prague.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), P*roceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 436-445). Larnaca, Cyprus: CERME

Hotz, H. G. (1918). First-year algebra scales. *Contributions to education*. New York, NY: Columbia University.

Kadijevich, D. y Haapasalo, L. (2001). Linking procedural and conceptual mathematical knowledge through CAL. *Journal of Computer Assisted Learning*, *17*(2), 156-165.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (Eds.). (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. En D. Tall (Ed.), *Proceeding of* the 3rd PME *International Conference* (Vol. 1, 128-133). Coventry, England: Warwick University.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. En A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 91-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wanger y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33–59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kieran, C. (1991). A procedural–structural perspective on algebra research. En F. Furinghetti (Ed), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-253). Assisi, Italia: PME Program Committee.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1998). The changing face of school algebra. En B. Hodgson, C. Alsina, J. M. Alvarez, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 271-290). Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707- 762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Kieran, C. (2008). *What do students struggle with when first introduced to algebra symbols?* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, D. C.: National Academy Press.

Kirshner, D. (1989). The visual sintax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 274-287.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83-98). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics 11*-16 (pp. 102–119). Londres, UK: John Murray.

Lee, L. (1987). The status and understanding of generalised algebraic statements by high school students. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference* (Vol.1, pp. 316- 323). Montreal, Canada: PME.

Lee, L. y Wheeler, D. (1987). *Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalisation and justification.* Montreal, Canada: Concordia University.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research,* 60, 1-64.

Lesh, R. y Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp.197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Liebenberg, R., Linchevski, L., Olivier, A. y Sasman, M. (1998). Laying the foundation for algebra: developing an understanding of structure. En las actas del *4th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* (pp. 276-282). Pietersburg, Sudáfrica: University of the North.

Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999, Julio). *From numerical equivalence to algebraic equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI).* Presentado en el V congreso anual de la Asociación de Educación Matemática de Sur África (AMESA), Puerto Elizabeth. Descargado el 15 de Febrero de 2005 de http://www.wcape.school.za/malati/Files/Structure992.pdf.

Linchevski, L. y Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics, 30*(1), 39-65.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Linchevski, L. y Vinner, S. (1990). Embedded figures and structures of algebraic expressions. En G. Booker, P. Cobb, y T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 85-93). México DF, México: PME.

Lüken, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA, 7*(1), 41-50.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3). 217-232.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational studies in mathematics, 33*, 1-19.

Malara, N. y Iaderosa, R. (1999). The interweaving of arithmetic and algebra: some questions about syntactic and structural aspects and their teaching and learning. En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the first conference of the European Society for research in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 159-171). Osnabrück, Alemania: Instituto de Investigación en Educación Matemática.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.154-175). New York, NY: Routledge.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación Inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, formación de profesores e innovación curricular* (p. 103-120). Granada, España: Comares.

Markovits, Z., Eylon, B. y Bruckheimer, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. En A. F. Coxford y A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12.* (pp. 43-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), 2-8.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Mason, John (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. En R. Zaskis y S.R. Campbell, (Eds.), *Number theory in mathematics education: perspectives and prospects* (pp. 41–68). Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2011). Commentary on Part III. En J. Cai y E. Knuth. (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 557-577). Berlin, Alemania: Springer.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. (pp. 2- 63). UK: Sage y The Open University.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización.* Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.

McCormick, R. (1997). Conceptual and procedural knowledge. *International Journal of Technology and Design Education*, *7*(1), 141-159.

Miller, C. A., y Smith, B. D. (1994). Assessment of prerequisite Mathematics Vocabulary terms for intermediate and college algebra. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *16*(2), 39-50.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 5*, 750-759.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE, 266*, 45448.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *BOJA, 171*, 53-54.

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: pre-arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(1), 44-72.

Molina, M. (2004). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado.* Trabajo de investigación Tutelada. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores, M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 53-70). Tenerife, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Molina, M. (2009). Una Propuesta de Cambio Curricular: Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Suma, 65*, 7-15.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador*. Plaza de Titular de Universidad. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students´ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational, 7*(1), 341-368.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Mulligan, J., Mitchelmore, M. y Prescott, A. (2005). Case studies of children’s development of structure in early mathematics: A two-year longitudinal study. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1-8). Melbourne, Australia: PME.

Mulligan, J., Vale, C. y Stephens, M. (2009). Understanding and developing structure-Its importance for mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 1- 4.

National Council of Teachers Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Novotná, J. y Hoch, M. (2008). How Structure sense for algebraic expression or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 93-104.

Novotná, J., Stehlíková, N. y Hoch, M. (2006). Structure sense for university algebra. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stelíkova (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 249-256). Praga, República Checa: PME.

Palarea, Mª. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral. Tenerife, España: Universidad de la Laguna.

Peltier, M. (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimiento de resolución. *Educación Matemática, 15*(3), 29-55.

Petrovsky, A. V. (1988). *Psicología general*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Pierce, R. y Stacey, K. (2001). A framework for algebraic insight. En B. Perry, M. C. Mitchelmore y J. Bobis (Eds.), *Numeracy and Beyond: Proceedings of the twenty-fourth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (Vol. 2, pp. 418-425). Sydney, Australia: MERGA.

Pimm, D. (1991). Communicating Mathematically. En K. Durkin y B. Shire (Eds.), *Language in Mathematical Education: Research and Practice* (pp. 17-23). Philadelphia, PA: Open University Press.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 159-181.

Pomerantsev, L. y Korosteleva, O. (2002). Do prospective elementary and middle school teachers understand the structure of algebraic expressions? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, 1. Disponible en www.k-12prep.math.ttu.edu.

Radford, L. (2000). Students` processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. En T. Nakahara y M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Hiroshima, Japon: Hiroshima University.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (22ª ed.). Madrid, España: Autor.

Reeve, W. D. (1926). *A diagnostic study of the teaching problems in high school mathematics*. Boston, MA: Ginn.

Resnick, D. (1982). History of educational testing. En A. K. Wigdor y W. R. Garner (Eds.), *Ability testing: Uses, consequences, and controversies, Part II* (pp. 173-194). Washington, D. C.: National Academy Press.

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de Matemáticas. *Revista EMA*, 1(1), 4-24.

Rittle-Johnson, B. y Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review of the literature. En C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). Hove, UK: Psychology y Press.

Rittle-Johnson, B. y Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of educational psychology, 91*(1), 175-189.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, *93*(2), 346.

Rittle-Johnson, B. y Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561-574.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria.* Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2012). Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En M. Marín-Rodríguez, N. Climent-Rodríguez, G. Fernández, L. Blanco, y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 379-391). Ciudad Real, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización formal y modelización en álgebra. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds), *Investigación en educación matemática* (pp. 311-322). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Sasman, M., Olivier, A. y Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. En O. Zaslavski (Ed.), *Proceedings of the 23$^{rd}$ Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.161-168). Haifa, Israel: PME.

Schneider, R. (1993). *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge, UK: Cambirdge University Press.

Schneider, M. y Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental psychology, 46*(1), 178-192.

Schwartzman, S. (1977). Helping students understand the distributive property. *The Mathematics Teacher*, *70*(7), 594-595.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11$^{th}$ PME International Conference* (Vol. 3, pp. 162-169). Montreal, Canadá: PME.

Sfard, A. (1988). Operational versus structural method of teaching mathematics: case study. En A. Borbàs (Ed.), *Twelfth Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 560-567). Veszprém, Hungría: Ference Genzwein,OOK.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 151-158). Paris: Laboratoire PSYDEE.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: Los estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Revista EMA*, *6*(2), 95-140.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 191-228.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77,* 20-26.

Slavit, D. (1995, octubre). Operational sense in first grade addition. Presentada en *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH: PME.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 220-235). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Star, J. (2005). Re-conceptualizing procedural knowledge in mathematics. *Journal for research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411.

Star, J. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 132-135.

Star, J. R. y Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(3), 280-300.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of* *research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Subramaniam, K. y Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121-128). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Subramaniam, K. y Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 87-107). Berlin, Alemania: Springer.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. y Lins, R. (Eds.). (2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Tabak, I. (2004). Reconstructing context: Negotiating the tension between exogenous and endogenous educational design. *Educational Psychologist*, *39*(4), 225-233.

Tall, D. y Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 125-147.

Tall, D. Thomas, M., Davis, G., Gray, E. y Simpson, A. (1999). What is the object of encapsulation of a process? *Journal of mathematical behavior*, *18*(2), 223-241.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M. et al. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *1*, 81–104.

Thomas, M. y Tall, D. (2001). The long-term cognitive development of symbolic algebra. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. T. Zilliox (Eds.), *International congress of mathematical instruction (ICMI) working group proceedings-The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 2, pp. 590-597). Melbourne,Australia: ICMI.

Thomson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.189-243). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Thorndike, E. L., Coob, M. V., Orleans, J. S., Symonds, P. M., Wald, E. y Woodyard E. (1923). *The psychology of algebra*. New York, NY: Macmillan.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2008). Structure Sense and the use of variable. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 337-344). Morelia, México: PME y PME-NA.

Trujillo, P. (2008). *Proceso de generalización que realizan futuros maestros.* Trabajo fin de máster. Granada, España: Universidad de Granada.

Tsai, Y. L. y Chang, C. K. (2005, agosto). *The discussion of the implementation result about alternative approach of multiplicative identities*. Presentado en ICMI Regional Conference. The 3rd East Asia Regional Conference on Mathematics Education. Shanghai, Nanjing, y Hangzhou, República de China.

Turner, J. C. y Meyer, D. K. (2000). Studying and understanding the instructional contexts of classrooms: Using our past to forge our future. *Educational Psychologist*, *35*(2), 69-85.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra? En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 361-368). Bergen, Noruega: PME.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., Trigueros, M. (2008). *Enseñanza del algebra elemental. Una propuesta alternativa.* Editorial Trillas: México.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teacher, 80*, 428-438.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp. 7–13). Reston, VA.: National Council of Teacher Mathematics.

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria.* Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight*. Orlando, FL: Academic Press.

Vega-Castro, D. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables.* Trabajo fin de máster. Granada, España: Universidad de Granada.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012a). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233-258.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012b, Julio). Reproduction of algebraic structures by 16-18 year old students. Presentado en *12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12),* Seúl, Korea.

Vergnaud, G. (1984). Understanding mathematics at the secondary-school level. En A. Bell, B. Low, y J. Kilpatrick (Eds.), *Research in Mathematics Education* (pp. 27-35). Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Vergnaud G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l 'algèbre. En: C. Laborde, N. Balacheff (Eds.). *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique* (pp.189-199). Grenoble, Paris: La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 5-28) Hove, Inglaterra: Psychology press.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.) *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 328-340). Reston, VA: National Council of Teacher Mathematics.

Wagner, S., Rachlin, S. L. y Jensen, R. J. (1984). *Algebra learning project: Final report.* Atenas, Grecia: Universidad de Georgia.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. En M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 399-406). Utrecht, Los Países Bajos: PME.

Weinberg, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. En T. Lamberg, T. y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the PME-NA.* Stateline, NV: University of Nevada.

Welder, R. (2006). Prerequisite Knowledge for the Learning of Algebra. En *Proceedings of the 5th Annual Hawaii International Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields* (pp. 1642-1667). Honolulu, HI: American Statistical Association.

Wheeler, D. (1989). Contexts for research on the teaching and learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 278- 287). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(3), 169-181.

Yerushalmy, M y Gafni, R. (1992) Syntactic Manipulations and Semantic Interpretations in algebra: The effect of graphic representation. *Learning and Instruction*, *2*(4), 303-319.

Zaldívar Carrillo, M. E., Sosa Oliva, Y. y López Tuero, J. (2005). Definición de la flexibilidad del pensamiento desde la enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, 37*(4), 6.

Zorn, P. (2002, julio). Algebra, computer algebra, and mathematical thinking. Presentado en *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*. Hersonissos, Grecia: Universidad de Creta.

# Índice de Anexos

A. Textos consultados para la selección de tareas diseñadas.
B. Solicitud de autorización a los padres.
C. Asistencia por alumno a las sesiones de trabajo en el aula.
D. Resumen de los datos de la Sesión 2.
E. Tema tratado por los estudiantes durante la aplicación de la investigación.
F. Cuadernos de trabajo proporcionados a los estudiantes durante las sesiones.
G. Cuadernos de trabajos desarrollados por los estudiantes en cada sesión.
    - Sesión 1
    - Sesión 2
    - Sesión 3
    - Sesión 4
    - Sesión 5
H. Transcripciones de vídeos en clases.
    - Sesión 1
    - Sesión 2
    - Sesión 3
    - Sesión 4
    - Sesión 5
I. Tablas con codificaciones de frecuencias relativas a las categorías e indicadores de actuación
    - Codificaciones de cada una de las sentencias por sesión.
    - Codificaciones de cada uno de los estudiantes.
J. Desempeño individual de los estudiantes.
K. Gráficas representativas del Perfil de Sentido Estructural de cada estudiante.
L. Tablas comparativas del desempeño de los estudiantes en cada perfil