Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

Tesis Doctoral

INVENCIÓN-RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Fernanda Ayllón Blanco

Granada, 2012

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

INVENCIÓN-RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Memoria del trabajo de Tesis Doctoral realizado bajo la dirección de las Doctoras Dña. Encarnación Castro Martínez y Dña. Marta Molina González, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta María Fernanda Ayllón Blanco para optar al grado de Doctor en la especialidad de Didáctica de la Matemática.

Fdo.: María Fernanda Ayllón Blanco

Vº Bº de la Codirectora

Vº Bº de la Codirectora

Fdo.: Encarnación Castro Martínez

Fdo.: Marta Molina González

Esta investigación se ha realizado en el marco de trabajo del Grupo de investigación "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM-193) y dentro del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del plan Nacional de Investigación, Desarrollo e innovación 2010-2012 de Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

A mi marido José y a mis hijos Ignacio y Elena, por ser mi alegría y hacerme tan inmensamente feliz.
Por vuestro amor.

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a las profesoras Doctoras Dña. Encarnación Castro y Dña. Marta Molina, por permitirme compartir sus conocimientos y su experiencia docente e investigadora. Les agradezco el apoyo recibido y su continua disponibilidad para ayudarme. Sus aportaciones y comentarios han hecho que esta investigación sea finalmente una realidad.

Quiero dar las gracias a todas aquellas personas que han confiado en mí, que me han alentado y animado en los momentos de desánimo, en especial a mis tres queridas amigas y compañeras, Isabel Monge, Maribel Gómez y Ana Isabel Garralda, siempre han tenido tiempo para escucharme y aconsejarme.

A los equipos directivos y profesores de los tres centros educativos que han participado en este estudio, por su desinteresada y cariñosa acogida y por sus aportaciones para la realización de las recogidas de datos. Y en especial a cada uno de los alumnos que tan generosamente colaboraron para hacer posible este trabajo.

A Dña. Llenalia García Fernández por su eficaz trabajo estadístico y su ayuda prestada.

A mis padres y hermanas, que incondicionalmente me han dado su apoyo, ayudándome y animándome en todo momento.

A José por ayudarme a conseguir una vez más un sueño y compartir conmigo los sinsabores y alegrías de esta investigación. Por entender mis ausencias haciendo que no las notaran tanto nuestros hijos.

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

PRESENTACIÓN

Esta memoria recoge la investigación realizada por la autora para obtener el título de doctora por la Universidad de Granada, en el Programa de Doctorado "Didáctica de la Matemática" del departamento homónimo de dicha universidad.

Con la elaboración de esta memoria y la defensa del trabajo de investigación que aquí se presenta, se trata de poner cierre a una etapa del proceso de formación investigadora de la doctoranda que fue iniciado en el curso académico 2002-2003, cursando el conjunto de asignaturas del primer año del programa de doctorado y que fue seguido en el curso 2004-2005 de un período de investigación tutelada. En dicho periodo se produjo el Trabajo de Investigación Tutelada cuyo título es "*Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación*" (Ayllón, 2005); trabajo que constituye un primer estudio sobre el tema de investigación que se aborda en esta tesis doctoral. El objetivo de dicho Trabajo de Investigación Tutelada fue analizar la capacidad de invención de problemas de futuros profesores de educación primaria. Entre los resultados de este trabajo se puso de manifiesto que el conjunto numérico no influyó en el tipo de problemas inventados por los estudiantes que participaron en la investigación. Los problemas propuestos eran problemas sencillos del tipo de los que aparecen en los libros de texto. Sí se constató que la invención de problemas les obligó a pensar, tanto en la redacción de los problemas, como en diferentes estrategias y procedimientos a utilizar para resolver los problemas planteados y les permitió reflexionar sobre las componentes que han de entrar a formar parte de un problema.

Tras el estudio realizado nos plateamos varias vías de continuación. Una de las líneas de investigación abiertas era centrarnos en la formación sobre problemas y la invención de un grupo de futuros profesores y estudiar la influencia de dicha formación en su preparación de materiales para un aula determinada. Otra posibilidad que se consideró para proseguir la investigación, consistía en estudiar en los escolares de educación primaria el proceso de invención de problemas, relacionándolo con sus creencias sobre problema, e indagar en el conocimiento aritmético que presentan al inventar los problemas y el sentido numérico que ponen de manifiesto en dicha tarea.

Se optó por esta segunda opción para continuar el trabajo, si bien no era la prioritaria, por motivos que quedarán expuestos más adelante. En esta segunda línea se desarrolla este trabajo cuyo objetivo fundamental es indagar en: **el proceso de invención-resolución de problemas que realizan estudiantes de educación primaria.** La investigación realizada consiste en un estudio exploratorio/confirmatorio, con un diseño mixto que incluye dos etapas con enfoques diferentes, una centrada en la encuesta y otra en una prueba, como herramientas de recogida de datos. La primera recogida de datos fue realizada por el investigador Jorge Cázares para llevar a cabo su tesis doctoral, la cual no pudo cumplimentar debido a su fallecimiento de forma accidentada[1], la herramienta utilizada en tal ocasión consistió en una entrevista semiestructurada realizada a parejas de escolares del mismo curso de educación primaria. La segunda recogida de datos fue realizada por la autora de la presente investigación, utilizando un cuestionario individual que fue cumplimentado por una muestra más amplia de alumnos. En la realización de este cuestionario el alumnado debía de responder preguntas y efectuar algunas tareas por lo que consideramos que el mismo tiene parte de encuesta y parte de prueba.

En la primera etapa del estudio se obtuvieron unos resultados del análisis de los datos de las entrevistas que, en parte, se han contrastado con los resultados del análisis de los datos obtenidos mediante el cuestionario que respondieron mayor cantidad de estudiantes. En ambos casos las muestras han sido intencionales, procediendo de este modo a confirmar o rechazar los hallazgos que consideramos de mayor interés.

[1] E. Castro y J.L. Lupiáñez (Eds.) (2007). Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano Universidad de Granada.

Esta investigación ha sido dirigida desde sus inicios por la Dra. Encarnación Castro Martínez dentro de un equipo que en todo momento ha contado, al menos, con tres componentes. En su comienzo el equipo estuvo formado por los doctores Encarnación Castro Martínez y Luis Rico Romero y el doctorando Jorge Cázares Solorzano. Posteriormente el equipo sufrió un cambio, motivado por varias circunstancias, quedando compuesto por las doctoras Encarnación Castro Martínez y Marta Molina González y la doctoranda Mª Fernanda Ayllón Blanco. Tanto las doctoras como la doctoranda, son profesoras de Didáctica de la Matemática. Mª Fernanda Ayllón Blanco es profesora de la Escuela Universitaria de Magisterio "La Inmaculada" (centro adscrito a la Universidad de Granada) y Encarnación Castro Martínez y Marta Molina González lo son de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Grupo de investigación en el que se ubica nuestro trabajo

Este estudio ha sido realizado en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía.

El trabajo que desarrollan las personas que componen este grupo se organiza dentro de varias líneas de investigación entre las que se encuentran la línea Pensamiento Numérico y la línea de Resolución de Problemas. El trabajo que aquí se presenta se enmarca en la intersección de dichas líneas.

En la línea de Pensamiento Numérico y en el seno del grupo, se han realizado trabajos que caen dentro del campo de las estructuras numéricas y tratan de fenómenos de enseñanza/aprendizaje en los que intervienen conceptos numéricos. Castro (1994, p.13) define las competencias de esta línea del siguiente modo: "Comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas", y justifica esta afirmación basándose en el hecho de que los conceptos numéricos básicos, se trabajan en el medio escolar y se presentan y utilizan en el medio social, por lo que pertenecen a la cultura de los pueblos. El ámbito matemático que se considera comprende las nociones básicas de número y sistemas numéricos de rango superior, relaciones numéricas que se establecen en todos ellos, operaciones con dichos números y utilización de las mismas para resolver o proponer problemas (Rico, 1995). Se entiende aquí el conocimiento numérico como un modo de priorizar y caracterizar determinadas ramas de la matemática mediante el uso prioritario de las estructuras numéricas como herramientas conceptuales[2].

Los trabajos realizados por el grupo en la línea de Resolución de Problemas, tratan de dilucidar y establecer relaciones entre los problemas y otros aspectos que condicionan el proceso de planteamiento y resolución de problemas matemáticos en los distintos niveles del sistema educativo. Se centran en problemas de contenido aritmético y algebraico, preferentemente, poniendo el énfasis en la interrelación cognitiva entre características de los sujetos y las tareas que se les proponen para resolver.

En el grupo se entiende la construcción del conocimiento matemático como un fenómeno social y cultural y se considera que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad.

0.1 ESTRUCTURA DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

A continuación describimos brevemente la estructura de esta investigación con objeto de facilitar la comprensión del proceso que se ha seguido en su realización y el producto final que se presenta.

Una vez delimitado el tema de investigación y predeterminado un objetivo para la misma, procedimos al encuadre y contextualización del estudio aprovechando la experiencia del trabajo previo realizado en esta misma temática así como la consulta de literatura relativa a la misma. La revisión bibliográfica nos permitió conocer el estado de la cuestión que centra nuestro interés, esto es, estar al tanto de la investigación realizada sobre el tema y qué resultados se habían alcanzado sobre el mismo. Nos dio una base para identificar los elementos clave en los que profundizar para establecer el marco teórico del trabajo, el cual gira en torno a los siguientes elementos:

1. Definición de problema.
2. Tipos de problemas.
3. Clasificación de los problemas matemáticos según sus estructuras semánticas y operatorias, y el número de pasos.
4. Resolución de problemas aritméticos.
5. Invención de problemas aritméticos.

De las lecturas surgen, así mismo, preguntas e interrogantes que nos permitieron

[2] Más información en http://fqm193.ugr.es/.

precisar el problema de investigación y establecer los objetivos concretos del trabajo.

Una vez establecidos los objetivos se diseñó la recogida de datos en dos etapas. La primera etapa corresponde a un estudio exploratorio realizado con pocos sujetos y la segunda etapa es un estudio que permite reafirmar o refutar los hallazgos de la fase exploratoria, utilizando un mayor número de sujetos. Los instrumentos para la recogida de datos en cada caso serían, entrevistas semiestructuradas para la primera etapa y cuestionario para la segunda. Los enfoque metodológicos comparten enfoques cualitativos y cuantitativos. La Figura 0-1 recoge el proceso que estamos describiendo. Con la figura se pretende presentar la información de manera organizada, siendo conscientes de que dicha organización puede dar la impresión de un proceso que ha discurrido por caminos lineales, sin retrocesos, cuando en la realidad ha sido más un proceso de ida y vuelta entre las diferentes partes.

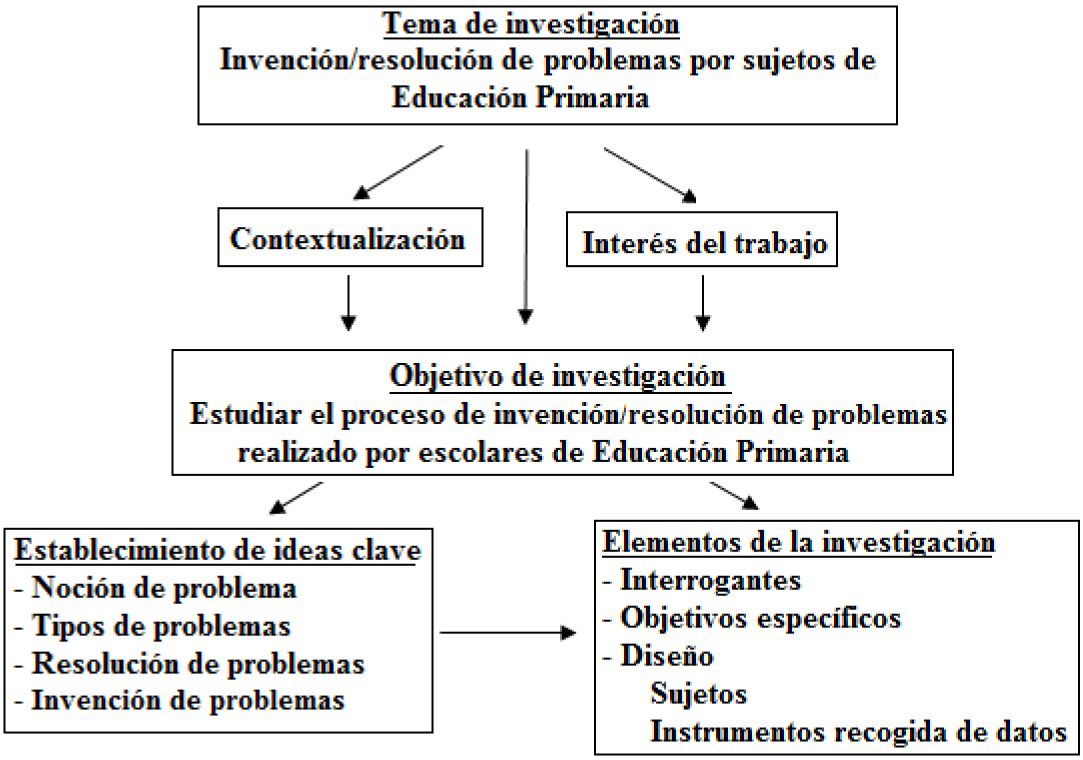


Figura 0.1. Estructura general del trabajo y principales relaciones entre los elementos considerados.

0.2 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE INVESTIGACIÓN

El informe de esta investigación, que se presenta a continuación, está estructurado en ocho capítulos, seguido del listado de las referencias bibliográficas utilizadas y de los anexos.

La estructura general del trabajo permite distinguir dos partes: una teórica y otra empírica. La parte teórica se recoge en los capítulos I, II, III y IV, la parte empírica en los tres capítulos siguientes V, VI y VII estando el último capítulo VIII dedicado a las conclusiones. Resumimos brevemente el contenido de cada uno de estos capítulos.

En el **Capítulo I** se plantea el problema de investigación que versa sobre la invención y resolución de problemas por parte de alumnos de educación primaria. Se detalla el origen y motivación de este trabajo doctoral, se muestra el lugar que ocupan la invención y resolución de problemas en el currículo de educación primaria, se señalan algunos de los beneficios que aporta la invención de problemas aritméticos en la adquisición y construcción del conocimiento matemático y se concluye indicando las preguntas de investigación con las que se inició la investigación y que dieron lugar a los objetivos generales y específicos abordados. Entre estos objetivos se encuentran analizar las capacidades de los alumnos de educación primaria para inventar y resolver problemas así como los conocimientos aritméticos que revelan durante el proceso de invención, su noción de problema y la consideración que tienen de problema difícil.

El **Capítulo II** presenta el marco teórico de este trabajo. En él se realiza una revisión literaria de conceptos clave tratados en nuestra investigación como problema, invención de problema, clasificación de problemas según su estructura semántica y operatoria, orden de dificultad que presentan los problemas aditivos y multiplicativos, resolución de problemas, estrategias, métodos y errores en la resolución de problemas aritméticos. Todo ello fundamentado en el estudio bibliográfico realizado tras el cual se han establecido relaciones e interpretaciones de los conceptos tratados.

El **Capítulo III** recoge una síntesis de los estudios sobre invención y resolución de problemas consultados en la búsqueda bibliográfica realizada, que preceden a esta investigación.

En el **Capítulo IV** se presenta el marco metodológico de esta investigación. Partiendo de los objetivos generales, específicos y del marco teórico del trabajo, se detallan los aspectos metodológicos particulares de este estudio: sus características generales, los sujetos participantes, las condiciones del estudio empírico y los instrumentos diseñados para las recogidas de datos realizadas correspondientes a los dos partes diferenciadas que se presentan en esta investigación (partes A y B), entre otros. El capítulo se organiza en tres fases: de decisión, de diseño, y de ejecución, desarrollando en cada una de ellas los elementos que las determinan.

Los **Capítulos V y VI** describen un análisis de los datos correspondientes a la primera recogida de datos de la investigación (parte A), en la que intervinieron 27 alumnos de un colegio concertado de Granada, C2. En el capítulo V se analiza cada una de las entrevistas semiestructuradas en las que participaron por parejas[3] alumnos de todos los cursos de educación primaria. En cada una de ellas se relatan las actuaciones y comportamientos de los alumnos mostrados a lo largo de la tarea, prestándose especial atención a cuatro factores: 1) creencias que ponen de manifiesto los estudiantes acerca de la noción de problema y su resolución, 2) las formulaciones de los problemas que inventan los alumnos y los procesos de resolución seguidos en la resolución de los problemas planteados por sus compañeros, 3) la clasificación que hacen los estudiantes como fáciles o difíciles de un listado de problemas planteados por el entrevistador y 4) los elementos considerados por los escolares para que un problema sea difícil.

En el capítulo VI, se lleva a cabo el estudio conjunto (global) de las respuestas dadas por los escolares en las entrevistas. El análisis se ha realizado agrupando los datos en los mismos cuatro bloques considerados en el capítulo V. En el primer apartado se recogen las creencias de los estudiantes acerca de la noción de problema, la necesidad de que un problema contenga datos numéricos, la utilidad de las operaciones en la resolución de problemas, la importancia de saber resolver problemas, los lugares donde resuelven problemas, la justificación sobre si el problema inventado es resoluble, si un problema se puede resolver de más de una forma y cuándo piensan que un problema es difícil. El segundo apartado presenta las producciones de los estudiantes en las que se distinguen: coherencia de los enunciados, estructuras operatorias y semánticas del problema, número de pasos presentes en el problema, conjunto numérico al que pertenecen los números presentes en el problema y cantidad de cifras de los números utilizados. El tercer apartado recoge y describe los procesos de resolución que llevaron a cabo los escolares. Dichos procesos de resolución se han analizado desde tres perspectivas: a) la propia resolución del problema (si necesitó ayuda para resolverlo, si seleccionó correctamente la operación aritmética que resolvía el problema, si era correcta la solución hallada y si pensaban que había otra forma alternativa de resolver el

[3] Con los 27 alumnos se hicieron 13 parejas y uno de ellos tuvo que realizar sólo la tarea al no presentarse su compañero el día de la entrevista.

problema); b) el cálculo utilizado por los alumnos en dicha resolución (la manera de calcular de los alumnos, oral, escrita o mental, si comenten fallos en los cálculos y si ratifican las operaciones seleccionadas); c) una comparación de dos esquemas, el teórico que presenta los pasos que requiere la resolución del problema siguiendo el orden de la historia que se describe en el enunciado y el esquema que los alumnos han seguido para la resolución. El último bloque está dedicado a las creencias de los estudiantes sobre la dificultad de los problemas. Se les muestran a los escolares entrevistados una serie de problemas para que los calificasen como fáciles o difíciles y se analizan las razones que dan para considerar a un problema difícil.

El **capítulo VII** atañe al análisis cuantitativo de los datos que corresponden a la parte B de la investigación. En esta segunda recogida de datos participaron un total de 351 alumnos de todos los cursos de educación primaria de un centro concertado de la provincia de Granada C3. Los resultados obtenidos se estudiaron y organizaron al igual que en el capítulo VI en cuatro bloques que concernían a: 1) creencias que manifestaron los alumnos sobre la utilidad de resolver problemas; 2) análisis de los enunciados planteados en base a su coherencia (si es simple o compuesto, la estructura semántica y operatoria a que corresponde), al número de cifras y al conjunto numérico que utilizaban en los enunciados, al número de preguntas formuladas y si utilizan alguna representación gráfica y la resolución del mismo; 3) procesos de resolución de los problemas planteados (si resuelven adecuadamente o no sus invenciones, estudio de las causas que dan lugar a resoluciones incorrectas y si utilizan alguna representación gráfica en sus resoluciones) y 4) estudio de la existencia de relación entre los problemas que los alumnos consideran fáciles y los que saben resolver.

El **Capítulo VIII,** el último de esta memoria de investigación, recoge la información que permite dar respuesta, a modo de conclusiones, a nuestros objetivos específicos de investigación. Se exponen las aportaciones del trabajo, y se destacan las principales cuestiones abiertas o perspectivas que se pueden investigar en un futuro como continuación de esta investigación.

Esta memoria se cierra con un volumen de anexos, donde se recogen los cuestionarios-prueba, las transcripciones de las entrevistas video grabadas, los datos de las distintas pruebas y las tablas de contingencia obtenidas en la toma de datos confirmatoria.

CAPÍTULO I

PROBLEMA A ESTUDIAR

El problema de investigación que se aborda en este trabajo se enmarca en la temática de la invención de problemas y la resolución de los mismos por estudiantes de educación primaria. Fundamentalmente nos centramos en el estudio de las capacidades de dichos estudiantes para inventar y resolver problemas, sus creencias acerca de lo que es un problema y los elementos que consideran que ha de tener un problema para que sea difícil. Si bien nuestro interés se centró, en principio, sobre la invención, posteriormente hemos unido la invención a la resolución debido a la influencia que sobre la invención tiene la resolución de problemas y la riqueza de información que proporciona al trabajo.

En este capítulo describimos el problema de investigación abordado en este trabajo. Para ello detallamos en primer lugar nuestro interés por el mismo y justificamos su pertinencia con argumentos sobre a) el papel que desempeña la invención de problemas, unida a la resolución, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, b) la contribución de este trabajo al conocimiento de la comunidad investigadora en educación matemática, c) el papel de la resolución e invención de problemas en el currículo escolar y d) su vinculación a trabajos previos que vienen realizándose en el seno del grupo de investigación FQM-193. Finalmente detallamos las preguntas de investigación que nos planteamos y que dieron lugar a que iniciásemos este trabajo de investigación, y enumeramos los objetivos a conseguir con el mismo. El tema queda organizado en tres apartados como muestra la Figura 1.1.

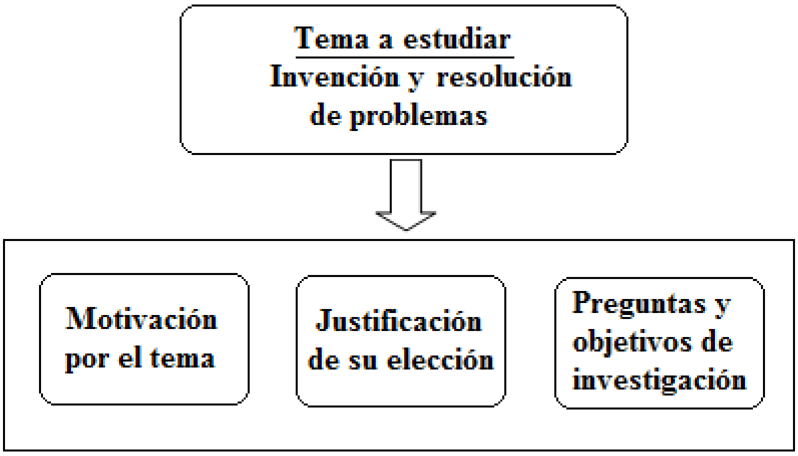


Figura I.1.Organigrama del capítulo 1.

I.1. MOTIVACIÓN DEL TEMA A INVESTIGAR

Después de haber realizado un trabajo de investigación previo relacionado con la invención de problemas en el que participaron como sujetos maestros en formación (Ayllón, 2005), a partir del cual la autora obtuvo la suficiencia investigadora, nuestro interés por el tema continúa y se centra, en este caso, en estudiar un proceso similar en los primeros niveles de la educación obligatoria.

En el trabajo de investigación tutelada se puso de manifiesto, además de la capacidad que tienen los profesores en formación de educación primaria para inventar problemas matemáticos, que la tarea de inventar problemas contribuye al desarrollo del pensamiento. Este hecho nos animó a continuar en esta línea de trabajo.

Nuestro interés inicial por este tema se debe a varias creencias personales que recogemos a continuación. Por una parte creemos que los conceptos numéricos, junto con la resolución e invención de problemas, constituyen el eje vertebrador de la mayor parte de los conocimientos matemáticos escolares. Tenemos también la creencia de que investigar sobre invención de problemas con niños de educación primaria permite indagar acerca de las capacidades matemáticas que poseen. Así mismo consideramos que el trabajo con problemas proporciona a los alumnos aprendizajes significativos sobre relaciones entre conceptos y, por ende, dentro de las estructuras numéricas. Por otra parte, consideramos primordial que nuestro trabajo de investigación pueda revertir en la práctica docente.

Indagar en las capacidades matemáticas que ponen en juego los estudiantes de educación primaria en la tarea de inventar y resolver problemas, nos permitirá (con conocimiento de causa) trasladar a los profesores que ejercen y a los que están en formación[4], el beneficio que supone trabajar la invención además de la resolución de problemas en el aula de educación primaria.

I.2. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA A INVESTIGAR

Justificamos la pertinencia de indagar en los procesos de invención y resolución de problemas por alumnos de los diferentes cursos de la educación primaria desde una triple vía. Por una parte desde la literatura en educación matemática, desde la cual se señala su potencial educativo y la pertinencia de realizar este estudio. Por otra parte desde un punto de vista curricular, y en tercer lugar por quedar dentro de las líneas de trabajo que se vienen desarrollando en el grupo de investigación FQM-193.

I.2.1. DESDE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Es ampliamente aceptado por la comunidad de investigadores de educación matemática que el trabajo con problemas permite a los estudiantes construir conocimiento matemático significativo. Así lo consideran autores de reconocido prestigio como Polya (1965), Freudenthal (1973) y Kilpatrick (1987), junto a muchos otros, apoyándose en diferentes argumentos. Se destaca el potencial de la resolución de problemas tanto como metodología de enseñanza como contenido de aprendizaje en sí mismo, reconociéndosele diferentes funciones en el aprendizaje de las matemáticas (ver apartado II.5.1.). En cuanto a la invención de problemas se señala que cuando un individuo inventa un problema ha alcanzado niveles de reflexión complejos, por tanto ha llegado a una etapa de razonamiento que hace posible la construcción de conocimiento matemático. Este hecho hace que la formulación de problemas aporte grandes beneficios a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Todo ello lleva a proponer que se potencie su trabajo en el aula. "El planteamiento y la resolución de problemas ha sido y es uno de los objetivos prioritarios de la Matemática. La resolución de problemas es un tema central en la construcción del conocimiento matemático y constituye una actividad cognitiva básica, que ha sido reconocida como esencial por la teoría y la práctica educativa" (Noda, 2000, p. I).

La resolución e invención de problemas constituyen una característica notable de la actividad matemática y un medio importante para desarrollar el conocimiento

[4] Recordamos que nuestra labor profesional consiste en formar profesores de educación primaria desde el área de conocimiento Didáctica de la Matemática.

matemático (NCTM, 2000). La actividad conlleva leer y examinar datos y pensar críticamente, señalan Davidson y Pearce (1988), y permite establecer conexiones entre conocimientos que se pueden poseer separadamente (Whitin, 2004). En relación con la invención se entiende que al generar un problema hay que adelantarse a la solución del mismo lo que requiere relacionar conceptos (Cifarelli y Sheets, 2009). Noda (2000) también recoge en su trabajo reflexiones en este sentido al indicar que el estudiante que enuncia sus propios problemas, basados en su interés y experiencia personal, evidencia un aspecto importante de la actividad matemática y de la investigación intelectual.

Si partimos de que desarrollar la inteligencia es un objetivo fundamental de la educación matemática y que tal desarrollo exige pensar y razonar, hemos de admitir que tanto la invención como la resolución de problemas apoyan dicho desarrollo. Ambas actividades obligan a pensar, examinando de forma crítica el enunciado y los datos del problema, y a utilizar diferentes estrategias y procedimientos para resolver la situación planteada ayudando además a afianzar lo aprendido.

En base a estas ideas postulamos que los alumnos deberían tener frecuentes oportunidades de formular problemas complejos, así como de resolverlos y estimularles a reflexionar sobre sus acciones.

Castro (2008) apunta el esfuerzo que se está realizando por parte de los investigadores por mostrar las ventajas de incorporar la resolución de problemas en innovaciones curriculares. Señala que tanto la resolución como la invención de problemas son temas que por su importancia han de quedar recogidos en los currículos oficiales de educación primaria. La necesidad de esta inclusión en las propuestas curriculares viene acrecentada por los resultados de investigaciones que evidencian la carencia de métodos o estrategias adecuadas, por los estudiantes, para la resolución de problemas (Córcoles y Valls, 2006; Harskamp y Suhre, 2007 y Santos, 2008). Pero solo dicha inclusión no conllevaría al éxito en esta parcela de conocimiento, se recomienda además que los profesores de matemáticas cumplan las propuestas curriculares y proporcionen abundantes y variadas oportunidades a sus estudiantes tanto para aprender a resolver problemas, como a inventar o plantear problemas en una gran cantidad de situaciones.

El papel del profesor es crucial. La elección de tareas y las formas de llevarlas a cabo contribuirán de forma decisiva a que el alumnado adquiera, o no, formas de pensar y hábitos de perseverancia que lo conducirán a ser un buen resolutor de problemas. El profesor que fomenta en sus alumnos la invención de problemas ayuda a que éstos vivan y adquieran un aprendizaje matemático rico, aprendiendo a perseverar, a realizarse preguntas sobre los problemas inventados y sus soluciones (Whitin, 2006).

La investigación existente en relación con la invención y resolución de problemas, además de poner de manifiesto su potencial educativo, muestra la riqueza de este campo como foco de investigación. En este sentido destaca la escasa atención prestada a la invención de problemas en comparación con la resolución (ver capítulo III), lo que hace especialmente pertinente su estudio. Los trabajos consultados, los cuales resumimos en el capítulo III de este informe, han analizado el potencial de diferentes formas de integrar la invención en la enseñanza, sus aportaciones a la resolución de problemas, y las diferentes habilidades que requiere el desarrollo de esta tarea, tanto con escolares como con profesores en formación y en ejercicio. La consulta bibliográfica nos permite dar una descripción general de la investigación realizada en esta temática, aún escasa y aislada, mostrando la pertinencia y necesidad de estudios tales como esta tesis doctoral.

I.2.2. DESDE UN PUNTO DE VISTA CURRICULAR

Atendemos a continuación a cómo el tema de la invención y la resolución de problemas está considerada en diferentes documentos curriculares.

Nuestra primera referencia parte de la Ley Orgánica de Educación (LOE, 2006), que establece en la actualidad el marco jurídico en que se debe basar la organización y acción educativa española. En el Real Decreto 1513/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la etapa de educación primaria, se señala que las matemáticas se entienden como

> *"un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan no sólo utilizar cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, hacerse preguntas, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, se puedan obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas.* " (BOE, 293, p. 43095).

Las competencias básicas hacen referencia explícitamente, en varias ocasiones, a la resolución de problemas aunque no a la invención. Se recoge como parte de la competencia matemática la interpretación de informaciones, datos y argumentaciones, tanto en el ámbito escolar como fuera de él, así como "la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas". Las estrategias de resolución de problemas y la interpretación de la realidad a partir de la información que se presenta en ellos dan sentido a la competencia matemática (BOE 293, p. 43059).

La resolución de problemas aparece a lo largo de toda la etapa educativa como un eje vertebrador de la actividad matemática, convirtiéndose en el principal soporte del aprendizaje matemático.

En los objetivos que aparecen en el anterior decreto no se incluye, en ningún caso, el tema de invención de problemas. Sin embargo, sí aparecen acciones relacionadas con la resolución de problemas en el segundo, tercero, cuarto y quinto objetivos.

2. *Reconocer situaciones de su medio habitual en las que existan problemas para cuyo tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formuladas mediante formas de expresión matemática o resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes, valorar el sentido de los resultados y explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos.*
3. *Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la convivencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.*
4. *Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas, que permitan disfrutar de los aspectos creativos, estéticos o utilitarios y confiar en sus posibilidades de uso.*
5. *Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental y medida, así como procedimientos de orientación espacial, en contextos de resolución de problemas, decidiendo, en cada caso, las ventajas de su uso y valorando la coherencia de los resultados.*

Por lo que al contenido se refiere, la invención de problemas tampoco aparece en el currículo de educación primaria, sí aparece el contenido sobre procesos de resolución de problemas y tiene una especial importancia pues es considerado como *"uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática"*. Se propone que se trabaje en la escuela con situaciones que partan de la realidad de los estudiantes, para que provoquen su interés y mantengan su atención: *"los contenidos de aprendizaje toman como referencia lo que resulta familiar y cercano al alumnado y se abordan en contextos de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista"* (MEC, 2006, pp. 101-117).

Los bloques en los que se dividen los contenidos del currículo de educación primaria plantean actividades para la comprensión y resolución de problemas, pero no para la invención de problemas. Sin embargo en los criterios de evaluación del primer y tercer ciclo vemos que la invención de problemas se recoge junto con la resolución de los mismos que aparece a lo largo de toda la etapa:

Primer ciclo

1. *Formular problemas sencillos en los que se precise contar, leer y escribir números hasta el 999.*

7. *Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos.*

8. *Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta y utilizando los algoritmos básicos correspondientes u otros procedimientos de resolución. Explicar oralmente el proceso seguido para resolver un problema.*

Segundo ciclo

2. *Realizar cálculos numéricos con números naturales, utilizando el conocimiento del sistema de numeración decimal y las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.*

8. *Resolver problemas relacionados con el entorno que exijan cierta planificación, aplicando dos operaciones con números naturales como máximo, así como los contenidos básicos de geometría, tratamiento de la información y utilizando estrategias personales de resolución.*

Tercer ciclo

2. *Realización de operaciones y cálculos numéricos sencillos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, que hagan referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.*

8. *En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución. Valorar las diferentes estrategias y perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas, tanto en la formulación como en la resolución de un problema. Expresar de forma ordenada y clara, oralmente y por escrito, el proceso seguido en la resolución de problemas.*

En lo que respecta a la regulación curricular que hace la Junta de Andalucía, el Decreto 230/2007 da a la resolución de problemas gran protagonismo, siendo el primero de los seis núcleos temáticos en la propuesta de contenidos para esta etapa educativa. Con él se pretende:

- Fomentar la autonomía e iniciativa personal.
- Promover la perseverancia en la búsqueda de alternativas de trabajo.
- Contribuir a la flexibilidad para modificar puntos de vista.
- Fomentar la lectura comprensiva.
- Organizar la información.
- Diseñar un plan y ponerlo en práctica.
- Interpretar y analizar los resultados en el contexto que se ha planteado.
- Tener habilidad para comunicar con eficacia los procesos y resultados seguidos.

El núcleo temático de la resolución de problemas se presenta como uno de los contenidos más relevantes donde el alumno debe de familiarizarse con estrategias resolutorias como la basada en cuatro pasos: comprensión del problema, incubación de ideas, ejecución del plan y comprobación de la solución (BOJA, 2007, p. 19).

Se sugiere en el núcleo temático 1, Resolución de problemas, que un medio a través del cual se introduzcan nuevos conceptos, sea la resolución de problemas y con objeto de facilitar la adquisición del pensamiento abstracto, aconseja hacerles pasar a los alumnos de situaciones problemáticas sencillas (1º y 2º ciclo) a otras más complejas (3º ciclo). Para ello se presentarán los problemas teniendo en cuenta el número de pasos (pasando de problemas de una etapa a dos o tres etapas) y las categorías semánticas, mostrando los problemas gradualmente en función de su dificultad.

Dentro del cuarto núcleo temático: Desarrollo del sentido numérico. Medida de magnitudes, tiene especial relevancia la resolución de problemas en las aportaciones metodológicas donde se sugiere que "*los problemas aritméticos escolares no deben ser, preferentemente, entendidos como un instrumento de comprobación del manejo de las operaciones elementales sino como un recurso fundamental para la comprensión de los conceptos de suma, resta, multiplicación y división. En esta etapa se sabrá sumar cuando se sea capaz de resolver una situación problemática en la que la suma sea la operación que deba usarse*" (BOJA, 2007, p. 21).

En el núcleo temático 5, Las formas y figuras y sus propiedades, también se indica que un recurso metodológico interesante es la resolución de problemas "*los conocimientos geométricos deben relacionarse con la resolución de problemas, a través de planteamientos que requieran la construcción de modelos o situaciones susceptibles de ser representadas a través de figuras o formas geométricas*" (BOJA, 2007, p. 21).

Respecto a la evaluación de la resolución de problemas (núcleo temático 1), el Decreto 230/2007 indica, que deben valorarse, más que los resultados obtenidos, aspectos como "*la lectura comprensiva del enunciado, la formulación e interpretación de los datos que intervienen, el planteamiento de la estrategia a seguir, la realización de las operaciones o la ejecución del plan, la validación de los resultados obtenidos y la claridad de las explicaciones*".

En este punto aparece la formulación de datos aunque no la invención de un planteamiento, pero creemos es un primer paso para introducir al alumno en la formulación de problemas.

En la evaluación del cuarto bloque temático se recoge la resolución de problemas contextualizados y cercanos al estudiante como instrumento de valoración. Se indica que se eviten los planteamientos memorísticos a través de la evaluación (quinto núcleo temático), donde en los criterios de valoración del aprendizaje aparece de nuevo la resolución de problemas como instrumento evaluativo: "*Es conveniente fomentar y valorar los procesos de investigación y deducción realizados para determinar las características y propiedades de las distintas formas planas y espaciales, a la vez que se valoran los procesos seguidos en el análisis, planteamiento y resolución de las situaciones y problemas de la vida cotidiana"* (BOJA, 2007, p. 22).

Otros documentos considerados curriculares a distinto nivel, como los del NCTM sí consideran la invención de problemas. En 1980 el NCTM ubica la resolución de problemas como primer objetivo de la enseñanza de las matemáticas y elabora un manual sobre este tema: Problema Solving in School Mathematics. Posteriormente los Estándares Curriculares de NCTM (1989, 2000) presentan la resolución de problemas como uno de los contenidos principales que se ha de desarrollar en el currículo escolar de matemáticas. Se señala el interés por la resolución de problemas como un foco de atención para la instrucción matemática y se propone que para desarrollar en los estudiantes la capacidad de *"resolver problemas matemáticos*", se les han de presentar problemas abiertos, sin solución única, y además habrán de formular otros. Explícitamente señalan que *"Los estudiantes deberían tener alguna experiencia reconociendo y formulando sus propios problemas, una actividad que es el corazón de hacer matemáticas" (*NCTM, 1989. p.138*).*

Aquí sí se menciona explícitamente la invención de problemas como un elemento a tener en consideración en el trabajo de los alumnos relacionado con los problemas matemáticos.

Estos documentos curriculares ejemplifican una consideración sobre la que existe acuerdo internacional: la resolución de problemas es un elemento curricular clave. Así se observa cuando se analizan documentos curriculares de otros países (Santos, 2008).

En los Países Bajos (Holanda), se le concede gran importancia a implementar un currículo orientado en problemas bajo los principios de la educación matemática realista. En China, los currículos se orientan hacia los problemas tanto en contenidos como en instrucción. También en Portugal, la investigación ha influido en los diseños curriculares oficiales. En Inglaterra la influencia de los problemas en el currículo se acrecienta a partir del informe Cockcroft (1985), en el que se propone la resolución de problemas como el tema principal en las clases de matemáticas en educación primaria señalándose que "Todos los alumnos han de adquirir cierta experiencia en la aplicación de las matemáticas adquiridas a las situaciones cotidianas y a la resolución de problemas que no constituyan exactamente repetición de los ejercicios ya practicados" (p.116).

La investigación que se ha ido realizando durante los últimos tiempos sobre resolución de problemas, tiene de este modo su reflejo, con posterioridad, en la enseñanza de las matemáticas y es a partir de finales de la década de los 70 cuando se toma conciencia de la importancia que tiene la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas y cobra fuerza la disposición de tomar la resolución de problemas como centro de la enseñanza de las matemáticas. Dicha disposición viene apoyada por publicaciones relevantes sobre el tema; sirvan como ejemplo el yearbook del NCTM de 1980 que se dedicó a la resolución de problemas. En ese mismo año la Agenda for Action, también del NCTM, se plantea como un objetivo que la resolución de problemas debe ser contemplada como el centro de la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética escolar. La corriente que se establece, considera que el núcleo del currículo, ha de venir determinado por los procesos de producción de conocimiento y para esa tarea la resolución de problemas tiene un papel privilegiado (Puig y Cerdán, 1988).

Los ejemplos recogidos muestran la preocupación por la resolución de problemas pero no por la invención. Consideramos que tal ausencia se puede deber a la poca cantidad de trabajos de investigación relacionados sobre invención de problemas y el poco tiempo transcurrido desde que se ha considerado como tema de investigación por los investigadores del área, como ponemos más delante de manifiesto en el capítulo III de esta memoria. La justificación que presentamos no está abalada, por tanto, por la presencia en el currículo de la invención de problemas unida a la resolución sino por la escasa aparición de la misma.

Creemos necesaria la indagación sistemática en esta parcela que se puede suponer un apéndice del trabajo de resolución, pero que se admite es importante y complementa dicho trabajo (ampliaremos estas ideas en el capítulo siguiente dedicado al marco teórico).

I.2.3. DESDE LA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN EN LA QUE SE INCLUYE

En la presentación se ha dicho que este trabajo se desarrolla en el Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e innovación de la Junta de Andalucía (FQM-193).

En lo concerniente a la investigación sobre problemas, en la década de los ochenta el grupo inició variados trabajos en los que se analizó la resolución de problemas y la invención a partir de situaciones reales vividas por alumnos que en aquella época eran alumnos de E.G.B. Fruto de esa investigación son, entre otras, las publicaciones de

Cobo, Fernández y Rico (1986): *Las situaciones reales de los problemas aritméticos*; García, Sevilla y Valenzuela (1986): *Invención y enunciado de preguntas que originan problemas matemáticos*; y González, Gutiérrez, Rico y Tortosa (1986): *Relación verbo-operación en los problemas de aritmética del tercer ciclo de E.G.B.*

Posteriormente, se ha continuado esta línea de investigación con diversos trabajos entre los cuales destacamos, por su mayor vinculación con esta investigación, la memoria de tercer ciclo y tesis doctoral de Castro (1991,1994): *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa y Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa, respectivamente*; la memoria de tercer ciclo de Cázares (2000): *La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo*; y el trabajo de suficiencia investigadora de Ayllón (2005): *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación*.

Este trabajo se justifica como continuación de los ya señalados que en cada uno de los casos se han centrado bien en resolución bien en invención de problemas.

I.3. PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Partiendo de los trabajos previos realizados en el seno del grupo FQM-193 y de una revisión bibliográfica que nos ha permitido conocer el estado en que se encuentra en la comunidad investigadora internacional, la investigación sobre la temática que se aborda en este trabajo, nos surgieron una serie de interrogantes que han guiado el planteamiento y diseño de este trabajo. Dichas preguntas nos han conducido posteriormente al planteamiento de objetivos de investigación que precisan el problema de investigación.

I.3.1 PREGUNTAS

Las interrogantes que a continuación planteamos fueron surgiendo de la revisión de los textos escritos, informes de investigación en su mayoría, relacionados con nuestro tema de interés. En unos casos se trata de preguntas abiertas que quedaron en dichos trabajos, en otras ocasiones han sido interrogantes que nos han surgido de las lecturas de los mismos:

- ¿Qué reacción tendrán los estudiantes de educación primaria ante la tarea de inventar problemas?

- ¿Qué dificultades encontrarán dichos estudiantes de educación primaria en la tarea propuesta?
- ¿Los enunciados que propongan incluirán las componentes básicas que conforman un problema?
- ¿Los enunciados inventados serán similares a los propuestos en los libros de texto o se desviarán de los mismos?
- ¿Los problemas inventados serán de una o varias etapas?
- En el caso de que haya más de una etapa ¿estarán unas subordinadas a otras?
- ¿Alguna estructura operatoria será utilizada de forma destacada en los problemas generados por los estudiantes?
- ¿Estarán representadas todas las estructuras semánticas, conocidas, de los problemas aditivos y multiplicativos?
- ¿Qué tipo de números utilizarán en la invención de problemas estos estudiantes?
- ¿Encontrarán dificultad para resolver los problemas planteados por ellos mismos?
- ¿Qué tipos de errores cometerán al realizar la tarea propuesta?
- ¿Qué caracterización harán de problema difícil?
- ¿Existirá relación entre sus conocimientos matemáticos y la caracterización de problema difícil realizada?

Excepto la primera pregunta que se refiere a la actitud de los estudiantes hacia la tarea, el resto se relacionan con la realización misma de las tareas y sus producciones. Las preguntas anteriores dieron pie a la formulación de los objetivos planteados en este trabajo de tesis.

I.3.2. OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo de investigación, como se recoge en la introducción, es:

Estudiar el proceso de invención/resolución de problemas que realizan estudiantes de educación primaria.

Dicho objetivo general se particulariza en cinco objetivos específicos:

O1. Identificar las creencias de alumnos de educación primaria sobre los problemas de matemáticas y su utilidad.

O2. Establecer la capacidad de estudiantes de educación primaria para inventar problemas.

O3. Establecer la relación entre la capacidad de inventar y resolver los problemas inventados de estudiantes de educación primaria.

O4. Identificar los conocimientos numéricos y aritméticos que estudiantes de educación primaria involucran en los problemas que inventan.

O5. Determinar la consideración que tienen alumnos de educación primaria de lo que es un problema difícil.

La consecución de cada uno de estos objetivos conlleva las siguientes acciones concretas:

En relación con O1:

(O1, A). Analizar las respuestas de los escolares a interrogantes que versan sobre qué es un problema; qué utilidad tienen los problemas; cuándo y dónde se resuelven problemas; la necesidad de los números en los problemas y la posibilidad de que existan distintas formas de resolver un problema.

En relación con O2:

(O2, A). Describir las reacciones de los estudiantes ante la tarea propuesta de invención de problemas.

(O2, B). Estudiar las producciones que proporcionan los escolares como respuesta a dicha tarea de inventar problemas en base a su coherencia y originalidad; su estructura semántica y operatoria; el número de preguntas formuladas; el número de operaciones involucradas en la resolución de los problemas inventados y el lugar que ocupa la incógnita en los problemas inventados.

(O2, C). Estudiar las dificultades que encuentran en su realización.

(O2, D) Valorar la capacidad de invención de problemas de los estudiantes de educación primaria.

En relación con O3:

(O3, A). Analizar la resolución de los problemas inventados.

(O3, B). Analizar dificultades de los estudiantes para resolver los problemas inventados por ellos.

En relación con O4:

(O4, A). Indagar sobre los tipos de números involucrados en los problemas inventados, así como la cantidad de cifras de los mismos.

(O4, B). Evaluar el dominio de los conocimientos algorítmicos de los estudiantes de educación primaria puesto de manifiesto en la tarea de invención y resolución de problemas.

En relación con O5:

(O5, A). Estudiar las características que presentan los problemas que los escolares califican de difíciles.

(O5, B). Recopilar y clasificar las componentes de los problemas que los estudiantes consideran que hacen que un problema sea difícil.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se precisa el significado de los conceptos clave en esta investigación, entre ellos problema, invención de problemas y resolución de problemas. Atendemos a aquellas clasificaciones y elementos que han sido destacados en la literatura relativa a la invención y resolución de problemas, dedicando una especial atención a los problemas aritméticos de enunciado verbal por su papel destacado en este trabajo. La información que aquí se recoge, junto al estado de la cuestión que se presenta en el siguiente capítulo, permite delimitar el área de estudio dentro de la cual se enmarca y fundamenta este trabajo.

Estructuramos el capítulo en cinco apartados que van a desarrollarse a continuación:

- Noción de problema
- Tipos de problemas
- PAEV: problemas aritméticos de enunciado verbal
- Resolución de problemas
- Invención de problemas

II.1. NOCIÓN DE PROBLEMA

En educación matemática se ha dedicado mucho esfuerzo a investigar en el ámbito de los problemas escolares. Una de las implicaciones de dicha investigación han sido las diversas definiciones que se han elaborado de problema, llegándose a ver los problemas matemáticos escolares desde diferentes puntos de vista y destacándose diferentes elementos en su composición. Esto ha dado lugar, a su vez, a diferentes clasificaciones de los mismos a las que atendemos en un apartado posterior. Recogemos aquí las principales definiciones y caracterizaciones de problema que hemos encontrado en la literatura.

II.1.1. CONCRECIÓN DE PROBLEMA

La expresión “problema” presenta varias acepciones si se indaga en diferentes diccionarios. Así en el de la Real Academia Española se dice de problema: a) Cuestión que se trata de aclarar; b) Proposición o dificultad de solución dudosa; c) Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin; d) Disgusto, preocupación; e) Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

La acepción d) es muy usual, y utilizada comúnmente en la vida diaria, hace referencia a situaciones adversas de la vida real. Así se dice, por ejemplo, “tengo un problema económico” para indicar la falta de dinero o “Pepito tiene un problema con la asignatura de matemáticas” si Pepito no logra superar dicha asignatura. Otra acepción, la e), hace referencia a situaciones desconocidas que presentan la ciencia o la tecnología. Esta acepción es la que vamos a considerar para nuestro trabajo, centrándonos en los problemas matemáticos escolares a los que referiremos más brevemente como problemas.

Por su parte, Moliner, (1986) precisa “problema” como una cuestión en la que hay algo que averiguar o alguna dificultad. Seco y Ramos (1999) definen “problema” como una “Cuestión a la que se busca una explicación o respuesta adecuada”, y como una “Proposición en que se formulan una o más preguntas que se han de contestar a partir de unos datos determinados”. También en la enciclopedia Encarta (2004) se dice de problema es una “cuestión que se trata de aclarar”, “conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin”, o “planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos”.

En el Diccionario de Filosofía de Ferrater (1981) se puede leer: “Por lo general un problema es una cuestión que se trata de aclarar o resolver —o en algunos casos resolver aclarando—. (…) El problema suele tener explícita o implícitamente la forma de una pregunta, pero no toda pregunta es necesariamente un problema".

Por lo que a problema matemático se refiere, hemos detectado en la literatura especializada las siguientes nociones sobre problema:

a) Polya (1962) considera que se encuentra frente a un problema cuando se ha de buscar, mediante una acción adecuada, un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

b) Cuestión de la que se conocen algunos datos los cuales hay que manejar convenientemente para encontrar otro que se busca (Bouvier y George, 1979).

c) Situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución. El conocimiento relevante de esa persona tiene que ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema (Kantowski, 1980 según citan Carrillo, 1996 y Espinosa, 2004).

d) Cuando una persona o grupo de personas están ante una situación que requiere una solución y aparentemente no hay un camino que conduzca a la misma, están ante un problema (Krulik y Rudnik, 1980).

e) "Siempre que haya una brecha entre donde uno está en este momento y donde uno quiere estar, y uno no sepa cómo encontrar el camino para cruzarla, uno tiene un problema" (Hayes, 1981, p.1).

f) Schoenfeld (1985) defiende que un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es la relación entre el individuo y la tarea, lo que hace de la tarea un problema para esa persona. Espinosa (2004) interpreta que, en esta defensa que realiza el investigador, la palabra problema se ha de interpretar como una situación difícil ante la que se encuentra el individuo, y que trata de resolver. Además apunta que la dificultad ha de ser intelectual y no algorítmica.

g) Una proposición práctica, en que se manda hacer alguna cosa, suponiendo ya sabidas otras, que se requieren para su ejecución (Bartolache, 1990, recogido en Larios, 2000).

h) Problema es una situación que conlleva ciertas cuestiones abiertas que retan intelectualmente a alguien que no posee inmediatamente métodos, procedimientos o algoritmos directos y suficientes para responder (Blum y Niss, 1991).

i) De Guzmán (1991) hace referencia a verdaderos problemas en matemáticas cuando se encuentra en una situación inicial desde la cual quiere llegar a otra final y no conoce el camino que lleva de una a otra.

j) El concepto de problema, según Carrillo (1996) debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento.

k) Estamos ante una situación problemática cuando tenemos una meta más o menos clara y no existe un camino inmediato y directo para alcanzarla; por lo tanto, nos vemos obligados a elegir una vía indirecta, a hacer un rodeo. Dicho de otro modo, existe un problema siempre que queremos conseguir algo y no sabemos cómo hacerlo, en cuanto que, los métodos que tenemos a nuestro alcance no nos sirven (Abrantes, 2002).

Entendemos que lo común de la noción que proporcionan todos estos autores es que se tiene un problema cuando existe una situación en la que es necesario superar un obstáculo para poder lograr una meta; a dicha situación se considera un problema. Esta acepción es la que adoptamos en este trabajo en el cual nos interesamos por los problemas matemáticos.

En especial nos centraremos en problemas aritméticos, empleando la definición dada por Puig y Cerdán (1988). Según estos autores un problema aritmético, en el contexto escolar, consiste en un enunciado verbal o escrito en el cual la información proporcionada es cuantitativa —los datos suelen ser cantidades definidas numéricamente—, la condición contenida en el enunciado expresa relaciones entre los datos de tipo cuantitativo, y la pregunta se refiere al descubrimiento o determinación de una o varias cantidades o relaciones entre las mismas.

II.1.2. CARACTERIZACIÓN Y COMPONENTES DE UN PROBLEMA

Desde el punto de vista psicológico Dorsch (1985) y Mayer (1986b) hacen una caracterización de lo que es un problema identificando sus componentes. Ambos autores coinciden en su caracterización si bien existe alguna diferencia en la forma de expresar la misma. Para Dorsch (1985) un problema es una especie de reto mental que, a diferencia de las tareas en sentido estricto, se conforma de:

1. Estado inicial no deseado,
2. Estado final deseado,
3. Barrera que impide la transformación de 1) a 2).

Mayer (1986b) entiende que un problema ha de tener las siguientes componentes:

- Datos, son las condiciones, objetos e información;
- Objetivos, lo que se supone que se quiere alcanzar;
- Obstáculos, son las secuencias correctas de comportamientos que resuelven el problema pero que no son inmediatamente obvias.

En las diferentes definiciones que aparecen en la literatura hay situaciones en las que un problema se caracteriza porque partirá junto al resolutor y será independiente del contenido de la situación, esto ocurre en las definiciones hechas desde la psicología, mientras que en matemáticas un problema es independiente del resolutor, pero no del contenido de la tarea o de la situación problema. La Educación Matemática busca un término medio entre ambas posturas.

Un problema queda determinado, como tal, cuando reúne en su enunciado una serie de componentes. Si además despierta motivación e interés en el resolutor, contiene los requisitos necesarios para considerarlo un buen problema.

Desde la educación matemática, destacamos las aportaciones de Castro, Gerofski, Santos, Parra, Larios y García quienes identifican componentes y requisitos de los problemas.

Castro (1994) señala que un problema debe tener los siguientes componentes:

- una proposición redactada mediante un texto oral o escrito,
- unos datos conocidos, que formarán parte de dicha redacción,
- una intención, movilizar una o más personas para que averigüen,
- una meta, obtener un resultado y

- un proceso, el modo de actuación para alcanzar el resultado.

Gerofski (1996), según Fernández (1997), destaca tres componentes de un problema. La primera componente es la “puesta en escena”, que establece la contextualización, los protagonistas y la localización de la historia que tiene lugar; aunque esta componente, a menudo, no sea esencial para la solución misma del problema. La segunda componente es de “información”, que da los datos que se necesitan para resolver el problema. A veces se da información irrelevante como señuelo para producir recelo en el resolutor inseguro. La tercera componente es la cuestión o pregunta a la que hay que encontrar respuesta, obtención de un resultado. Las componentes segunda y tercera de Gerofski corresponden a dos de las componentes que Castro considera necesarias para que exista un problema: datos conocidos y meta.

Santos (1997) y Parra (1990), apoyándose en Polya (1965), describen los requisitos que debe cumplir un problema. Señalan los siguientes aspectos:

- Que sea considerado como un proceso y no sólo como un resultado, y que además tenga diferentes métodos de solución y posibles resultados.
- Que despierte interés suficiente como para ser resuelto, que al alumno le interese para que, como dice Polya (1965), se concentre y desee ansiosamente resolverlo, que se entregue al problema "en cuerpo y alma".
- Que no exista garantía de que al aplicar un algoritmo se obtenga el resultado de manera inmediata.
- Que permita el desarrollo del razonamiento matemático, promoviendo una actitud positiva hacia la matemática.
- Que el error, al tratar de resolverlo, se convierta en una fuente de conocimiento.

Larios (2000) concluye que un problema obliga a los alumnos a establecer una interacción con situaciones en las que han de emplear sus propios conocimientos viéndose forzados a revisarlos, modificarlos o rechazarlos, a fin de construir un conocimiento nuevo.

Por su parte García (2001) considera que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1. Aceptación: El individuo o grupo debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
2. Bloqueo: Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.
3. Exploración: El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

II.2. TIPOS DE PROBLEMAS

La información sobre clasificaciones de problemas que encontramos en la literatura específica del área presenta algunas propuestas que llevan a clasificaciones muy simples y a otras más complejas; recogemos en este apartado una variedad de las mismas. En primer lugar presentamos clasificaciones generales que no atienden a los contenidos matemáticos implicados en la resolución del problema, pasando después a centrarnos en clasificaciones específicas para problemas de tipo aritmético.

II.2.1. EJERCICIO Y PROBLEMA

Algunos autores distinguen entre "ejercicios" y "problemas". Entre ellos se encuentran Butts (1980), Swenson (1994), Santos, (1997) y Larios (2000). Por ejercicio se considera la tarea rutinaria que requiere para su realización, fundamentalmente, de capacidad memorística. Swenson (1994) distingue los verdaderos problemas, de las situaciones rutinarias que no entrañan dificultad alguna para el resolutor. De la misma manera Butts (1980) establece distinción entre ejercicios y problemas. Entre los ejercicios considera dos tipos: a) ejercicios de reconocimiento, en ellos el resolutor ha de resolver, reconocer o recordar una definición o proposición y b) ejercicios de algoritmos, los que demandan la ejecución de un algoritmo, normalmente numérico. En los problemas distingue tres tipos: a) problemas de aplicación, aquellos que se formulan en un enunciado concreto, normalmente escrito, donde se puede utilizar algún algoritmo conocido por el resolutor; b) problemas de investigación, aquellos cuyas proposiciones no contienen ninguna estrategia para resolver el problema y c) situaciones problemas, aquellas situaciones planteadas que puedan requerir soluciones matemáticas.

Por su parte, Santos (1997) y Larios (2000) diferencian entre ejercicio y problema de la siguiente forma. El ejercicio se refiere a una actividad que no supone un reto para la creatividad y para el desarrollo de las habilidades matemáticas del individuo, mientras que en el problema el individuo trata de realizar una tarea que le resulta difícil. En los ejercicios, el resolutor, tras una breve reflexión, conoce si puede o no resolverlos aplicando un algoritmo conocido. La resolución de un problema requiere buscar un camino a seguir que en ocasiones no es evidente, apelar a conocimientos diferentes y a establecer relaciones entre ellos.

Según algunos autores, en la enseñanza actual, la mayor parte de las tareas propuestas a los alumnos en las aulas son ejercicios de aplicación de los algoritmos trabajados (Parra, 1990). En ellos, no se obliga al alumno a interactuar con situaciones que lo lleven a comprometer sus conocimientos, a revisarlos, a modificarlos, o rechazarlos para formar un conocimiento nuevo; condición que, como hemos recogido previamente, algunos autores consideran imprescindible para que una situación constituya un problema.

II.2.2. PROBLEMAS DE ENCONTRAR Y DE PROBAR

Polya (1962) hace una clasificación en problemas de encontrar, donde hay incógnita, datos y condición (la meta es averiguar la incógnita) y problemas de probar, donde hay hipótesis y condiciones (el objetivo es demostrar si una afirmación es válida o no). Estudiando esta clasificación, Noda (2000) manifiesta que un problema de encontrar se puede transformar en uno de probar en el momento en el que se hace una conjetura sobre su resultado. Y recíprocamente, si en un problema de probar se delimitan los objetivos, de manera que la conclusión tenga una relación con otro objeto que se toma como incógnita, este problema se transforma en uno de encontrar.

II.2.3. PROBLEMAS RUTINARIOS Y NO RUTINARIOS

Una clasificación de problemas en “rutinarios” y “no rutinarios” se encuentra en Verschaffel y De Corte (1996), si bien anteriormente Polya (1962) y posteriormente Pehkonen (1991) establecen también esta distinción. Problemas rutinarios son aquellos que se caracterizan porque: se resuelven de una única manera; en ellos el resolutor a golpe de vista ve de forma inmediata el camino que requiere su resolución; por medio de una o varias operaciones aritméticas con los números dados en el problema se llega al objetivo propuesto; no se requiere de mucho tiempo para resolver el problema; y por lo general presentan cuestiones cerradas. Estos problemas abundan en los libros de texto. Los problemas no rutinarios se consideran cuando el modelo matemático apropiado, o la solución, no son obvios ni indiscutibles; en ellos el resolutor a primera vista no sabe cómo abordar el problema; no basta con aplicar un algoritmo rutinario para resolver la situación; será la intuición y las experiencias anteriores las que guíen al resolutor; su resolución requiere de bastante tiempo; y presentan cuestiones más o menos cerradas o abiertas. Estos problemas escasean en los libros de texto.

Anteriormente Polya (1962) consideró problemas rutinarios a aquellos cuya resolución se puede alcanzar sustituyendo nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, por ejemplo, siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de algún viejo ejemplo. Este tipo de problemas los considera un caso particular de los verdaderos problemas. Por tanto, se podrían asemejar a los ejercicios y no a los problemas, aunque el autor no hace tal distinción.

A su vez Pehkonen (1991) considera que un sujeto no se encuentra ante un problema si al enfrentarse a una tarea inmediatamente reconoce los requisitos que ha de utilizar para resolverla. Esta situación constituirá una tarea rutinaria, pero no un problema.

En las últimas décadas también se ha seguido considerando esta distinción por los investigadores. Así, Noda (2000) denomina problema rutinario a los que se refieren a situaciones concretas, donde todos los datos del enunciado son necesarios para resolverlo, la solución es única, se resuelve aplicando un proceso de reglas, están presentes en los libros de texto y el contenido es el que se aprende en la escuela. Por otro lado, llama problema no rutinario a los que se refieren a situaciones en los que la información hay que buscarla, la solución no es obvia y para hallarla hay que relacionar resultados o conceptos conocidos. La idea de que los problemas rutinarios son los escolares aparecen en las consideraciones de otros autores como Jiménez (2008) que identifica los problemas rutinarios con los que se enfrentan diariamente los niños en la escuela: "describen situaciones en las que hay que relacionar a través de una operación aritmética las cantidades que figuran en el enunciado" (p. 39). Dicho autor recoge investigaciones en las que queda de manifiesto que la meta del problema rutinario es la ejercitación del último algoritmo estudiado.

Noda (2000) considera problemas no rutinarios aquellos que no se pueden resolver bien sin considerar las características particulares de cada situación. Entre ellos señala problemas absurdos, problemas que describen situaciones de la vida real y problemas de división con resto. Los problemas absurdos contienen varios datos numéricos, su estructura semántica es correcta pero carecen de significado y son irresolubles matemáticamente. Los problemas que describen situaciones de la vida real se pueden resolver correctamente teniendo en cuenta consideraciones de la vida cotidiana. Los problemas de división con resto corresponden a aquellos en los que su solución no se obtiene con la simple ejecución de la operación de la división.

Lago, Rodríguez, Enesco, Jiménez y Dopico (2008) profundizan en este tipo de problemas argumentando que giran en torno al significado y el tamaño del resto, y que requieren tener en cuenta el contexto en que son resueltos. Palm (2008) presenta un estudio en el que se observa que el rendimiento de los alumnos en este tipo de problemas mejora considerablemente cuando los enunciados se enmarcan en contextos de la vida real y no en contextos escolares.

En relación con los problemas no rutinarios, Jiménez (2008) señala lo poco adecuada que resulta su denominación como problemas realistas, por parte de investigadores de la línea de investigación *Matemáticas Realistas*, pues por lo que se caracterizan estos problemas es que se basan en situaciones de la vida real, atributo que también se cumple en muchos problemas matemáticos escolares.

II.2.4. PROBLEMAS TRADICIONALES Y CREATIVOS

Recogemos la clasificación presentada por Craig (1995) que distingue entre “problemas tradicionales” y “problemas creativos”. Para el autor, una situación determinada puede ser un problema para un individuo y no serlo para otro, dependiendo de si el individuo ha encontrado la solución antes, si la solución es evidente, y si la situación le motiva a realizar alguna acción para resolver el conjunto determinado de condiciones. La resolución de un problema tradicional es un intento individual de vincular las condiciones dadas con el fin deseado, utilizando caminos conocidos para alcanzar el fin. En cambio, el problema creativo tiene un conjunto conocido de condiciones, pero los medios para lograr el fin deseado no son obvios y requiere una reflexión más profunda, siendo a veces posible dar más de una solución al problema.

II.2.5. PROBLEMAS BIEN ESTRUCTURADOS Y MAL ESTRUCTURADOS

Algunos autores (Kilpatrick, 1987; Voss, Tyler y Yengo, 1983) proponen la utilización de las clasificaciones de Reitman (1965) o Simon (1973) quienes distinguen entre problemas "bien estructurados" y "mal estructurados". Los problemas bien estructurados se encuentran frecuentemente en los textos escolares. En ellos, el enunciado presenta la información necesaria para resolverlos, las reglas para encontrar la solución correcta son claras y se tienen criterios definidos para verificar la solución. En el otro extremo están los problemas mal estructurados que son similares a los problemas que nos encontramos en la vida diaria. Hay problemas mal estructurados que pueden convertirse a lo largo de la resolución en problemas bien estructurados.

Esta clasificación la amplía Frederiksen (1984) abarcando más variantes de la estructura de un problema y propone las siguientes categorías:

a) problemas bien estructurados: su formulación es clara, a través de un algoritmo conocido se llega fácilmente a su resolución y para comprobar que ésta es correcta se disponen de criterios;

b) problemas estructurados que requieren pensamiento productivo: se diferencian de los problemas bien estructurados, en que el resolutor tiene que diseñar total o parcialmente el procedimiento de resolución, es decir, el resolutor habrá de añadir algo que no es inmediatamente aparente en el problema;

c) problemas mal estructurados: la formulación del problema no es clara, no hay un procedimiento que garantice la solución, y el resolutor no tiene seguridad de que la solución conseguida sea la correcta.

Otros autores como Fredericksen (1984) y Simon (1973) señalan la existencia de problemas donde no hay suficiente información para la formulación del problema y otros en que habiendo una formulación completa, el proceso de solución no es posible (Kilpatrick, 1987).

II.2.6. PROBLEMAS BIEN Y MAL DEFINIDOS

Otra clasificación distingue entre problemas mal o bien definidos (Noda, 2000). Un problema "bien definido" corresponde a aquel en el que hay consenso acerca del estado final al que hay que llegar y se considera resuelto cuando el individuo alcanza dicho estado. Un problema "mal definido" es aquel en el que no hay un único estado final y donde los estados final e inicial no están bien especificados. Noda (2000) denomina bien definido a un problema cuando consiste en un problema de encontrar, análogo a los que se presentan en la escuela. Denomina problema mal definido al problema de encontrar que no cumple esta condición. Partiendo de esta caracterización los problemas mal definidos serán los que no tienen datos, tienen datos en exceso o le faltan datos (Noda, 2001).

II.2.7. PROBLEMAS ABIERTOS Y CERRADOS

Dependiendo de la descripción de las situaciones de partida y llegada, Pehkonen (1991) utiliza los términos "problema abierto" y "problema cerrado". En un problema cerrado ambas situaciones están claramente explicadas. Si la situación de partida y/o la de llegada son abiertas, es decir, no están claramente formuladas, entonces tenemos un problema abierto. Posteriormente, en 1995, este mismo autor presenta el uso del término problema abierto, como una clase "paraguas" que incluye: problema abierto-cerrado, planteamiento de problemas, situaciones de la vida real, campos o secuencias de problemas, problemas sin cuestiones y variaciones de problemas.

De esta manera, el problema cerrado es aquél cuyas condiciones y metas están totalmente limitadas y explicadas.

A partir de los distintos significados que presenta el término problema abierto en Matemáticas, Silver (1995) recoge que dicho término se usa frecuentemente para aquellos problemas que están sin resolver. En el momento en que alguien encuentre una solución se provoca la clausura del problema (por ejemplo, hasta 1993, el llamado "Último Teorema" de Fermat era un problema abierto). Otros significados son los siguientes: a) cuando el problema es susceptible de diferentes interpretaciones o respuestas; b) cuando invita a métodos diferentes de solución y c) cuando el problema sugiere otros problemas o generalizaciones.

II.2.8. PROBLEMAS DE ESTRUCTURA INDUCTORA, DE TRANSFORMACIÓN Y DE ORDENAMIENTO

Greeno (1978) presenta una clasificación propia de los problemas atendiendo a las acciones que debe realizar el sujeto para resolver el problema. Distingue tres tipos:

- Problema de "estructura inductora": aquel en el que el individuo ha de descubrir el patrón o el modelo implícito (por ejemplo, completar una serie).
- Problema de "transformación": el resolutor ha de buscar una secuencia de operadores que le permita pasar del estado inicial al final.
- Problema de "ordenamiento": el resolutor ha de ordenar todos los elementos que se le dan para obtener la solución.

II.2.9. OTRAS CLASIFICACIONES DE PROBLEMAS

Recogemos aquí las clasificaciones de problemas que presentan Borasi (1986) y Blanco (1993). El primero clasifica los problemas en ejercicios, problemas verbales, enigmas, prueba de una conjetura, problemas de la vida real, situaciones problemáticas y situaciones. El segundo investigador citado establece los siguientes tipos de problemas: ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos o de repetición, problemas de traducción simple o compleja, problemas de procesos, problemas sobre situaciones reales, problemas de investigación matemática, problemas de puzzles e historias matemáticas.

Por su parte, Noda (2000) recoge otro tipo de problemas los denominados "Opennes", que asocia a dos enfoques: a) problemas de varias soluciones y b) problemas planteados, donde los estudiantes reformulan problemas matemáticos basados en uno resuelto anteriormente (Shimada, 1977; Hashimoto y Sawada, 1984; Nohda, 1986 y Hashimoto, 1987). Esta idea volverá a aparecer cuando tratemos la invención de problemas.

II.2.10. TIPOS DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Algunas de las clasificaciones de los problemas atienden a los contenidos matemáticos o métodos que se escogen o requieren en su resolución. Esta situación lleva a distinguir entre problemas geométricos, problemas aritméticos y problemas algebraicos, entre otros. En este apartado nos centramos en los problemas aritméticos. Para estos tipos de problemas destacamos aquí tres clasificaciones.

Problemas aditivos y multiplicativos

Partiendo de la idea de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), los problemas aritméticos se clasifican dependiendo de la estructura operatoria que presenten. Si los mismos requieren las operaciones de suma o resta para su resolución, se les llama de estructura aditiva, y si requieren de multiplicación o división se les llama de estructura multiplicativa. En la investigación tienden a considerarse de forma separada la resolución de problemas aditivos de los multiplicativos. Así lo hacen, por ejemplo, Castro (1994) y Puig (1998).

Problemas de una o más etapas o problemas simples y compuestos

Los problemas aritméticos se clasifican también atendiendo al número de operaciones necesarias para llegar a la solución del problema. Puig (1998) distingue entre problemas de una etapa, si es necesaria una operación para resolverlo, y problemas de más de una etapa, si las operaciones necesarias son varias. En un problema de una etapa se distingue la parte informativa y la pregunta del problema. Uno de los ejemplos que da el autor es el siguiente:

Después llegó a casa del detective un niño que estaba preocupado. Le contó que tenía 27 coches de juguete y había perdido 12. Le quedaban muy pocos, pero no sabía cuántos. ¿Cuántos le quedaban?

La parte informativa corresponde a: *tenía 27 coches... perdió 12*, y la pregunta corresponde a *los que quedan*. De las tres cantidades del problema, dos corresponden a la parte informativa y una a la pregunta del problema (Puig, 1998). Esta composición de los problemas aritméticos de enunciado verbal, correspondiente a los problemas de una etapa, es común tanto para los de estructura aditiva como para los de estructura multiplicativa.

Por su parte Castro (1994) distingue entre problemas simples y compuestos al considerar que la clasificación por etapas puede confundirse con los problemas que necesitan varios pasos para obtener la solución. Un problema simple será aquel que requiera realizar una sola operación, de dos datos, para alcanzar el resultado. Cuando sea necesario realizar más de un tipo de operación para llegar a la solución diremos que estamos ante un problema compuesto (Castro y Castro, 1996). Cuando se requiere realizar varias veces una misma operación no se considera que estemos ante un problema compuesto. Este es, por ejemplo, el caso de los problemas multiplicativos, en el conjunto de los números naturales, los cuales pueden resolverse mediante una serie de sumas repetidas. En este caso no estaremos ante un problema compuesto, sino en uno que requiere múltiples pasos (de una misma operación aritmética) para obtener la solución. La diferencia entre pasos y operaciones se clarifica con este ejemplo: un problema que requiera hallar la media de 11 números, tiene 11 pasos y dos operaciones.

Distinguir entre operaciones y pasos es una tarea también presente en los trabajos del grupo de la Universidad de Stanford (Suppes, Lotus y Jerman, 1969 y Jerman y Rees, 1972) si bien estos autores no distinguen entre problemas simples y compuestos.

Otros autores como Durel (1928) distinguen, de forma análoga, entre el número de tipos diferentes de procesos de cálculo y el número de pasos requeridos para resolver el problema dado. Si los cálculos necesarios para resolver un problema aritmético consisten sólo en adiciones y multiplicaciones, entonces es un problema de dos procesos. Si la solución consta de dos multiplicaciones y una adición, entonces es un problema de tres pasos y dos procesos.

Tomando combinaciones de los cuatro procesos básicos (adición, substracción, multiplicación y división) de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres y de cuatro en cuatro se obtienen 15 tipos de problemas:

- Cuatro tipos de un proceso: (+), (-), (x), (:).
- Seis tipos de dos procesos: (+,-), (+, x), (+, :), (-, x), (-,:), (x,:).
- Cuatro tipos de tres procesos: (+,-, x), (+,-, :), (+, x, :), (-, x,:).
- Un tipo de cuatro procesos: (+,-, x, :).

(Castro, Rico, Castro y Gutiérrez, 1994).

Problemas encadenados y yuxtapuestos

Problemas encadenados son aquellos para cuya resolución se requiere del establecimiento de más de una relación entre los datos y, en consecuencia, la realización de dos operaciones o más (Castro y Castro, 1997). Aquí, el resultado final está supeditado al encuentro de un resultado parcial que se constituye en un dato necesario para resolverlo. Esta clasificación se asemeja a la de los problemas compuestos y los de más de una etapa, ya que requieren más de una operación para llegar a su solución.

Cázares (2000) hace referencia a los problemas yuxtapuestos como aquellos que parecen ser de dos o más etapas, cuando en realidad se trata de varios problemas simples o de una sola etapa que aparecen conjuntamente en el mismo enunciado y han de resolverse de forma encadenada, dependiendo el resultado final de la resolución de cada uno de ellos.

II.3. PAEV: PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE ENUNCIADO VERBAL

Se denominan problemas aritméticos de enunciado verbal, o problemas verbales, (PAEV) aquellos en los que la información aparece redactada mediante una o varias frases. Es decir, el enunciado de los mismos se presenta de forma verbal. Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad, entre otras, de facilitar al alumno un acercamiento entre aritmética y realidad, entre aritmética y aplicaciones a la vida real, lo que hace más significativo y valioso su estudio (Castro, 1994).

Se considera que

> "El fin de la aritmética (escolar) es desarrollar el conocimiento de las relaciones cuantitativas y la habilidad para resolver los problemas relativos a los números y la cantidad que se presentan en las transacciones ordinarias de la vida. Naturalmente, la aritmética no se estudia únicamente por saber aritmética, ni por la disciplina mental derivada de su estudio, sino por su aplicación en ciertas actividades esenciales de la vida. Cuánto más conocimiento tiene el alumno de estas actividades y de los objetos con que trata la aritmética, más significativa y valiosa le resulta la materia" (Reed, 1949, p. 301).

De ahí la importancia de que los problemas aritméticos verbales estén presentes en la formación matemática de los alumnos. A través de ellos pueden contextualizar y comprender los conceptos matemáticos y percibir la matemática como una herramienta práctica en la resolución de situaciones problemáticas cercanas a ellos y que están presentes en su día a día. La cercanía a los estudiantes de los contextos y acciones que se describen en los enunciados puede ser favorable a los estudiantes para identificar la situación descrita en los problemas y, con ello, las relaciones entre los datos y las incógnitas (Fernández, 1997). Los profesores deben proponer a los estudiantes problemas cercanos para que éstos se sientan comprometidos de alguna forma (Kilpatrick, 1995).

II.3.1. CLASIFICACIÓN DE LOS PAEV

Distintos autores presentan una clasificación de los PAEV como resultado del análisis que realizan de su enunciado verbal. En algunos casos tienen en cuenta los aspectos semánticos del problema, es decir, el significado de los conceptos y relaciones implicadas en el problema. Este es el caso de los trabajos realizados por Carpenter, Hiebert y Moser (1981), Carpenter y Moser (1982), Nesher (1982), Nesher, Greeno y Riley (1982) y Vergnaud (1982, 1991), entre otros.

Otros autores centran el análisis en la estructura operatoria. En este sentido en relación con la estructura aditiva se encuentran los trabajos de Bermejo, Lago y Rodríguez (1998), Briars y Larkin (1984), Caballero (2005), Carpenter et al (1981), Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984), Heller y Greeno (1979), Nesher (1980, 1982), Nesher et al (1982), Puig y Cerdán (1988), Vergnaud (1982, 1997), entre otros. En cuanto a la estructura multiplicativa señalamos los trabajos de Anghileri (1989), Bell, Creer, Grimison y Mangan (1989), Brekke (1991), Castro y Castro (1997), Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), Huinker (1989), Kouba (1989), Levain (1992), Luke (1988), Nesher (1988), Peled y Nesher (1988), Puig y Cerdán (1988), Schwarz (1981, 1988) y Vergnaud (1983, 1988).

Estos estudios han aportado resultados determinantes para comprender la conducta del sujeto a la hora de trabajar con problemas y han sido de utilidad para identificar las dificultades que presentan en los resolutores así como jerarquizar los problemas atendiendo a su dificultad. En los siguientes apartados atendemos a estas clasificaciones.

II.3.2. CLASIFICACIÓN DE LOS PAEV DE ESTRUCTURA ADITIVA DEBIDA A SU ESTRUCTURA SEMÁNTICA

El análisis global del significado del texto del problema ha resultado ser de elevada importancia para comprender los procesos utilizados por los niños al resolver los problemas. Dicho análisis lleva a establecer categorías de problemas. Heller y Greeno, en 1979, presentan tres categorías en la clasificación de los problemas aditivos: cambio, combinación y comparación. Esta categorización coincide con la que presentan Nesher y Katriel (1977) (recogido por Nesher, 1982, y Nesher et al, 1982). Más tarde, Carpenter y Moser (1982), añaden a dicha clasificación una categoría: la de igualación, coincidiendo con la clasificación propuesta por Romberg y Collis en 1980. Por otro lado Vergnaud (1982) realiza una clasificación tomando en consideración las relaciones que se establecen entre cantidades de magnitud y sus medidas y utiliza diferentes denominaciones para los mismos tipos de problemas.

Describimos, a continuación, estos cuatro tipos de problemas.

Los *problemas de cambio* son aquellos en la que la situación inicial se transforma en una situación final, debido a una acción que se produce. Aparecen tres momentos en estos problemas, un momento en el que está la situación inicial, el momento en que se produce el cambio y un tercer momento que corresponde a la situación final. Tanto las situaciones como el cambio vienen dadas por cantidades. Esta categoría coincide con la que Vergnaud (1982) llama transformación entre dos medidas: una transformación opera sobre una medida para asignarle otra medida. Nesher (1982) los denomina problemas dinámicos.

Carpenter y Moser (1982) consideran que el cambio puede ser de unión o de separación, según si produce aumento o disminución en la cantidad inicial. Considerando que son tres las cantidades que entran en juego en este tipo de problemas (inicial, cambio y final), dos conocidas y una desconocida, los enunciados de estos problemas pueden presentar 6 formas diferentes que recogemos en la Tabla II.1 (Puig y Cerdán, 1988).

	C.Inicial	C.Cambio	C.Final	Aumento	Disminución
Cambio 1	Conocida	Conocida	Desconocida	X	
Cambio 2	Conocida	Conocida	Desconocida		X
Cambio 3	Conocida	Desconocida	Conocida	X	
Cambio 4	Conocida	Desconocida	Conocida		X
Cambio 5	Desconocida	Conocida	Conocida	X	
Cambio 6	Desconocida	Conocida	Conocida		X

Tabla II.1. Tipos de problemas de cambio.

Los *problemas de combinación* no presentan ninguna acción, son problemas estáticos donde se presenta una relación entre un conjunto y dos subconjuntos disjuntos suyos, de manera que su unión es el conjunto total. Esta categoría coincide con la que Vergnaud (1982) denomina composición de dos medidas: dos medidas dan lugar a una nueva medida. Nesher (1982) los distingue como problemas estáticos. Carpenter et al (1981) y Carpenter y Moser (1982) los consideran problemas donde hay relaciones parte-parte-todo.

Se pueden presentar dos formas diferentes para estos problemas dependiendo de si la cantidad desconocida es una de las partes (no influye la parte que sea ya que tienen papeles análogos) o el todo como se recoge en le Tabla II.2.

	Parte	Parte	Todo
Combinación 1	Conocido	Conocido	Desconocido
Combinación 2	Conocido	Desconocido	Conocido
	Desconocido	Conocido	Conocido

Tabla II.2. Tipos de problemas de combinación.

En los *problemas de comparación*, al igual que en los de combinación, no hay implícita una acción, es decir presentan relaciones estáticas. Estos problemas implican la comparación de dos cantidades, donde una de ellas es el referente y la otra el referido. La tercera cantidad será el término de comparación: las expresiones que en el texto del problema expresan la comparación son "más que" y "menos que". A esta categoría Vergnaud (1982) la llama relación estática entre medidas: muestra la relación entre dos medidas.

Atendiendo a la cantidad desconocida en el problema (que puede ser una de las tres: referente, referido o término de comparación) y a que la comparación se puede establecer en términos de "más que" o "menos que", hay seis posibilidades para un enunciado de problema de comparación como se recoge en la Tabla II.3.

	Referente	Referido	T. Comparar	Más que	Menos que
Compara 1	Conocido	Conocido	Desconocido	X	
Compara 2	Conocido	Conocido	Desconocido		X
Compara 3	Conocido	Desconocido	Conocido	X	
Compara 4	Conocido	Desconocido	Conocido		X
Compara 5	Desconocido	Conocido	Conocido	X	
Compara 6	Desconocido	Conocido	Conocido		X

Tabla II.3. Problemas de comparación.

Una cuarta categoría corresponde a los *problemas de igualación* que distinguen Carpenter et al (1981) y Carpenter y Moser (1982). Estos problemas se consideran una mezcla entre los de cambio y los de comparación, ya que necesitan de una acción para que una cantidad llegue a igualar o alcanzar la otra, y hay una comparación a través del término "tantos como".

Dado que comparte las características de los problemas de cambio hay seis posibilidades diferentes en el enunciado de problemas de igualación, que coinciden con las posibilidades de los de cambio, como se muestra en la Tabla II.4.

	Referente	Referido	T. Igualación	Aumento	Disminución
Igualación 1	Conocida	Conocida	Desconocida	X	
Igualación 2	Conocida	Conocida	Desconocida		X
Igualación 3	Conocida	Desconocida	Conocida	X	
Igualación 4	Conocida	Desconocida	Conocida		X
Igualación 5	Desconocida	Conocida	Conocida	X	
Igualación 6	Desconocida	Conocida	Conocida		X

Tabla II.4. Problemas de igualación.

Respecto a esta categorización, Puig y Cerdán (1988) advierten que hay PAEV de una etapa que presentan características propias de varias de las categorías comentadas anteriormente, los llaman híbridos. Por ejemplo el siguiente problema es un híbrido entre cambio y combinación: "En un autobús van 20 personas. En una parada bajan las 8 mujeres. ¿Cuántos hombres quedan en el autobús?".

Estas categorías semánticas se han aplicado a problemas sencillos que resuelve el alumnado en los primeros años de enseñanza obligatoria. Por lo tanto, el conjunto numérico sobre el que se trabaja es el conjunto de los números naturales. Vergnaud (1998) en sus categorías acoge también a los números enteros.

La distinción que hace Nesher (1980) entre problema verbal estático y dinámico es la clave para diferenciar los problemas aditivos de cambio y combinación, así como los problemas de igualación y comparación. Un problema será estático cuando sus condiciones subyacentes se refieren a subconjuntos de un todo.

Un problema será dinámico si se distingue entre el estado inicial de la situación, en un tiempo T_1, un cambio provocado por una acción y ocurrido en un tiempo T_2, y un estado final localizado en un tiempo T_3.

Por su parte Fuson (1992) entiende que las situaciones estáticas son aquellas en las que las cantidades implicadas en el problema no cambian. Esta autora recoge 22 tipos de problemas aditivos estructuralmente diferentes, los cuales clasifica atendiendo a tres variables fundamentales: estructura semántica, tipo de relación y posición de la incógnita. Presenta así los siguientes casos:

- Cuatro estructuras semánticas alternativas: combinación, cambio, igualación y comparación.
- Dos tipos de relaciones: aumento o disminución para el cambio, igualación y comparación; y la disyuntiva entre una relación estática o dinámica para la combinación.
- Tres posibilidades para el dato desconocido, excepto en el caso de cambio que son dos.

Caballero (2005), partiendo de la propuesta de Fuson (1992), clasifica los problemas aditivos teniendo en cuenta dos aspectos: el tipo de operación implicada, unitaria o binaria, y la estructura, estática o dinámica.

Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) analizan la clasificación de Carpenter y Moser teniendo en cuenta el número de individuos presentes en el problema. Distinguen dos tipos:

a) cuando hay una sola persona en el problema. Aquí recogen dos situaciones, una en la que haya acción (problema de cambio) y otra en la que no haya acción (problema de combinación, comparación e igualación), y
b) cuando hay dos sujetos en el problema. En este caso, la acción puede ser consecuencia de un cambio interno (uno de los individuos modifica su dato y el otro no), o un cambio externo en la que uno de los sujetos cambia su cantidad, en la que puede haber relación o no entre los sujetos, de ahí que definan una categoría nueva “relacional”, que es aquella en la que existe una relación inicial de dos sujetos que mediante un cambio externo produce una relación final.

Ejemplo: Luisa tiene 4 cromos y Laura 5 más que ella. Luisa se encontró en un banco 3 cromos. ¿Cuántos cromos tiene ahora Laura más que María?

Para los problemas de más de una etapa se utilizan las mismas categorías semánticas de Carpenter y Moser. Vergnaud (1998) añade una categoría para problemas aditivos de más de una etapa que denomina "composición de transformaciones", en la que no se hace referencia a las cantidades inicial y final sino sólo a los cambios. (La idea matemática que subyace en ellos es la del número entero como operador).

II.3.3. ORDEN DE DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS ADITIVOS

Numerosos investigadores analizan el nivel de dificultad de los problemas en función de su categoría semántica y de la identidad de la cantidad desconocida en el problema. Este es el caso de Bermejo y Rodríguez (1987a, 1987b), Carpenter et al (1981), Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984), De Corte y Verschaffel (1985a, 1985b, 1987a), Kintsch y Greeno (1985), Nesher (1982), Nesher et al (1982) y Riley, Greeno y Heller (1983).

Riley y otros (1983) presentan estas categorías por orden de dificultad: cambio, combinación y comparación; aunque este orden se complica cuando interviene la posición de la incógnita (ver las Tablas II.1, II. 2, II.3 y II.4). En los problemas de cambio hay mayor facilidad en aquellos en los que la cantidad final es la desconocida, independientemente ya sean de aumento o disminución; siendo más difíciles los que presentan la incógnita en la cantidad inicial. En los problemas de combinación, los más fáciles son aquellos en los que la incógnita es la cantidad referida al conjunto total, frente a aquellos en los que la incógnita es una de las partes. En los problemas de comparación los del tipo más difícil son aquellos en los que la cantidad desconocida es la del referente.

Carpenter y Moser (1983) advierten que las categorías semánticas provocan en los escolares distintos procesos de actuación. También De Corte y Verschaffel y Pauwels, (1990) observan diferentes dificultades entre las categorías semánticas. Su estudio considera, entre otros elementos, los movimientos oculares de los niños durante la resolución de este tipo de problemas.

Otras investigaciones realizadas sobre problemas verbales de estructura aditiva (Briars y Larskin, 1984; Carpenter et al, 1981; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Nesher, 1982; Nesher et al, 1982; Vergnaud, 1982) indagan en cómo piensan los niños cuando resuelven problemas verbales que se resuelven con una suma o una resta. A partir de estas investigaciones además de clasificar los problemas en función de su estructura semántica, describen estrategias de solución y las dificultades que presentan.

Puig y Cerdán (1988), basándose en Riley et al (1983), recogen catorce clases de problemas, que comprenden los de cambio, combinación y comparación, clasificados en cuatro niveles de complejidad que se corresponden con la dificultad mostrada en investigaciones sobre la resolución de este tipo de problemas. La Tabla II.5 recoge esta información. En el nivel 1 están los problemas de cambio 1, cambio 2 y combinación 1. En el nivel 2 están los problemas de cambio 3 y cambio 4. En el nivel 3 esta un mayor número de problemas: cambio 5, cambio 6, combinación 2, comparación 1 y comparación 2, comparación 3 y comparación 1. En el nivel 4 están los problemas de comparación 5 y comparación 6.

Caballero (2005) establece por orden creciente de dificultad la siguiente escala: cambio, combinación, igualación y comparación. Advierte que en algunas circunstancias la noción de cambio se adquiere a la vez que las de comparación, combinación e igualación. Explica que la dificultad añadida que tienen los problemas de comparación y combinación sobre los de cambio es que éstos establecen relaciones estáticas entre más de un poseedor, mientras que los de cambio tan sólo afectan a uno de ellos.

En el capítulo III incluimos más información en relación a este tema, procedente de otras investigaciones.

Tipo de Problema	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Cambio 1	**X**			
Cambio 2	**X**			
Cambio 3		**X**		
Cambio 4		**X**		
Cambio 5			**X**	
Cambio 6			**X**	
Combinación 1	**X**			
Combinación 2			**X**	
Comparación 1			**X**	
Comparación 2			**X**	
Comparación 3			**X**	
Comparación 4			**X**	
Comparación 5				**X**
Comparación 6				**X**

Tabla II.5. Nivel de complejidad de los problemas de cambio, combinación y comparación.

II.3.4. CLASIFICACIÓN DE LOS PAEV DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA DEBIDA A SU ESTRUCTURA SEMÁNTICA

Aunque las clasificaciones semánticas de los problemas multiplicativos no están tan claramente establecidas como las de los aditivos, cabe citar los siguientes investigadores que han analizado esta cuestión: Anghileri (1989), Bell, Creer, Grimison y Mangan (1989), Brekke (1991), Brown (1981), Caballero (2005), Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epson (1999), Castro (1994, 2001), Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), Hendrickson (1986), Huinker (1989), Kouba (1989), Levain (1992), Luke (1988), Nesher (1988), Peled y Nesher (1988), Puig y Cerdán, (1988), Schwarz (1981, 1988) y Vergnaud (1983, 1988, 1993).

Schwartz (1988) distingue entre cantidades de magnitud intensivas (I) y cantidades de magnitud extensivas (E). Una magnitud extensiva es aquella que la unidad de referencia es una unidad simple, por ejemplo, metros, y una magnitud es intensiva si su unidad de referencia es el cociente de dos unidades, por ejemplo, kilómetros por hora. A partir de esta distinción clasifica los problemas multiplicativos en tres tipos: problemas con estructura I x E = E`, problemas con estructura E x E = E` y problemas con estructura I x I = I (Caballero, 2005).

Vergnaud (1983, 1988) agrupa los problemas multiplicativos en tres grupos: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple. En 1993 revisa esta clasificación, concluyendo la distinción de dos tipos de problemas de estructura multiplicativa: isomorfismo de medidas y producto de medidas (cálculo de áreas). Reconoce que las estructuras multiplicativas se basan en las aditivas, pero los problemas que le interesan son aquellos que no son reductibles a aspectos aditivos. En su análisis agrupa los problemas multiplicativos en:

a) problemas simples, aquellos que conllevan operaciones de multiplicación y división; enmarcándolos en dos grandes estructuras: el isomorfismo de medidas y el producto de medidas.

b) los problemas compuestos, es decir, problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes.

El isomorfismo de medidas incluye los problemas referidos a repartos iguales (personas y objetos), precios constantes (bienes y costos), movimiento uniforme (espacio y velocidad) y densidades constantes a lo largo de una línea (árboles y distancias), en una superficie o en un volumen.

Dado que la multiplicación desde el punto de vista semántico no es conmutativa se distinguen tres posibles problemas en la clase de isomorfismo de medidas dependiendo de cuál de las tres cantidades involucradas en el problema sea la incógnita:

- IM1: la incógnita es el resultado del producto.
- IM2: la incógnita corresponde al factor cuya magnitud es la misma que la del producto final.
- IM3: la incógnita es el factor cuya magnitud no difiere de la del producto final.

El producto de medidas es una estructura que contiene tres magnitudes, de manera que una de ellas es el producto cartesiano de las otras dos. Esta estructura contiene problemas relativos a áreas, volúmenes y productos cartesianos discretos. Dado que en este caso el producto es semánticamente conmutativo, caben solo dos posibilidades para estos problemas:

- PM1: representa a aquellos problemas en los que la incógnita es el producto cartesiano.
- PM2: representa a aquellos problemas en los que el producto cartesiano es conocido y la incógnita está en algunos de los espacios de medida originales.

El autor incluye en la categoría semántica de isomorfismo de medidas problemas de más de una etapa, los correspondientes a la regla de tres, y aporta una clasificación en la que sólo tienen cabida problemas multiplicativos de más de una etapa, los denominados de proporción múltiple. Se trata de problemas en los que dos espacios de medida independientes son proporcionales a un espacio de medida.

Estos problemas poseen características comunes a los de isomorfismo de medidas y a los de producto de medidas.

Vergnaud no habla de problemas de comparación, clase que introducen otros autores y que Brown (1983) llama de factor multiplicativo. Se trata de problemas en los que hay un factor escalar que compara dos cantidades extensivas de una misma magnitud (Puig y Cerdán, 1988): una cantidad es el referente y la otra es el referido. Para estos problemas hay tres posibilidades dependiendo de quién sea la incógnita:

- CM1: la incógnita es el referido.
- CM2: la incógnita es el factor escalar.
- CM3: la incógnita es el referente.

Bell et al (1989) hacen una clasificación similar a la de Vergnaud con diferente denominación. Categorizan los problemas multiplicativos en "simétricos o no simétricos". Consideran problemas simétricos aquellos en los que las dos cantidades juegan un papel que se pueden intercambiar (véase el caso de los problemas de áreas con las dimensiones ancho y largo). Este es el caso de los problemas de producto de medidas. Sin embargo, en los problemas de isomorfismo de medidas los papeles no son intercambiables y los denominan problemas asimétricos.

Bell y sus colaboradores sólo estudian los problemas asimétricos y los clasifican en siete tipos: grupos múltiples, medida repetida, razón, cambio de unidad (la misma unidad o unidades distintas, mezcla con unidades iguales y mezcla con unidades distintas (Castro, 1994).

A esta clasificación le asignan dos tipos de problemas de dividir: uno correspondiente a la división como partición**,** en las que se da la cantidad total y el número de partes, habiendo que hallar el tamaño de cada parte; y otro de división como cuotición**,** en el que se dan como datos el total y el tamaño de cada parte, debiéndose hallar el número de partes.

Castro (2001) apoyándose en la consideración de Schwartz (1988) sobre magnitudes extensivas e intensivas, propone una clasificación de los problemas de estructura multiplicativa que se resuelve a través de una sola operación. Presenta tres clases: proporcionalidad simple, producto cartesiano y comparación. En los problemas de proporcionalidad simple aparecen dos magnitudes extensivas y una intensiva.

En los problemas de producto cartesiano, se presentan dos cantidades extensivas y componiéndolas generan una tercera también extensiva, pero de distinta naturaleza a las anteriores. En los problemas de comparación se establece una comparación entre dos cantidades extensivas mediante términos como “tantas veces como/más que/menos que”.

El autor al que hacemos referencia, también considera la clasificación siguiente:

a) problemas de grupos iguales: aquellos en los que se trata de repartir equitativamente un conjunto de objetos;

b) de tasas: tratan de situaciones donde se adjudica una unidad de medida a un objeto o grupo de objetos y se quiere averiguar lo que le corresponde a una cantidad determinada de objetos;

c) de comparación aumento-disminución: donde se establece una comparación entre dos situaciones u objetos con los términos “tantas veces más” o “tantas veces menos”;

d) de combinación: aquellos problemas en los que se trata de establecer todas las posibles situaciones distintas conjugando dos atributos de un conjunto de elementos y

e) de producto de medidas: dónde se trata de averiguar el área o el ancho, alto, largo, de una superficie.

Caballero (2005) completa la clasificación presentada por Castro dividiendo los problemas de razón en cuatro tipos: porcentaje, porcentaje precio, porcentaje velocidad y porcentaje conversión monedas.

Nesher (1988), al igual que hizo con la estructura aditiva, busca las relaciones semánticas subyacentes en el texto para realizar una clasificación de los problemas multiplicativos. Distingue tres categorías:

- Mapping rule, que Puig y Cerdán (1988) traducen como regla de correspondencia, y que se corresponden con los problemas que Vergnaud denomina isomorfismo de medidas. Esta categoría la clasifica en dos tipos, de multiplicación y división, y dentro de la división distingue dos tipos, cuotitivo y partitivo.

- Problemas de comparación multiplicativa que Vergnaud los engloba como isomorfismo de medidas. Brown (1981) los llama de factor multiplicativo y Breeke (1991) los llama problemas de factor escalar.

- Problemas de multiplicación cartesiana que están incluidos en la categoría de producto de medidas de Vergnaud y que Schwartz define como problemas con estructura E x E = E`.

Hendrickson (1986) distingue cuatro clases de estructura multiplicativa:

- Cambio: los defiende de forma similar que los problemas aditivos de cambio. Hay un conjunto inicial que se transforma mediante un cambio numérico en un conjunto final. A la vez los divide en tres clases dependiendo de cuál es el dato desconocido, el producto total, el multiplicando o el multiplicador.
- Comparación: son una extensión de los problemas aditivos comparativos. Contestan a preguntas como: ¿qué parte de? y ¿cuántas veces tanto como? En estos problemas interviene un conjunto referente y un conjunto comparado. De igual manera que en la categoría anterior, subdivide estos problemas dependiendo de la incógnita que hay que hallar.
- Razón: son problemas que presentan dos variables (una dependiente y otra independiente) y una razón de proporcionalidad, como por ejemplo, kilómetros por hora. Los vuelve a dividir en tres categorías dependiendo de cuál sea la cantidad desconocida.
- Selección: incluye los problemas de tipo cartesiano, en los que hay que hallar el número de combinaciones, o bien el cardinal de uno de los conjuntos componentes.

Puig y Cerdán (1988) realizan una clasificación de los problemas multiplicativos a partir de la presentada por Vergnaud (1983) añadiendo una categoría más que el autor citado no considera y que sí lo hace Nesher (1987). Añaden también el modelo de operación propuesto por Brown (1981) para poder hacer referencia más fácilmente a la comprensión de las operaciones. La clasificación queda de la siguiente manera:

- Isomorfismo de medidas: Estos problemas corresponden a dos espacios de medida entre los que hay una proporción simple. En esta categoría hay tres posibilidades dependiendo de cuál es el dato desconocido. A esta categoría Nesher la llama regla de correspondencia y Brown razón. Vergnaud (1983) incluye en esta categoría los problemas de regla de tres, ya que tienen la misma estructura, aunque corresponden a problemas de más de una etapa.

- Comparación multiplicativa: Esta categoría semántica no fue considerada por Vergnaud. Brown la denomina problemas de factor multiplicativo. En estos problemas se comparan dos cantidades (del mismo tipo de magnitud) mediante una función escalar. También aparecen tres posibilidades dependiendo de cuál es el dato que haya que calcular.
- Producto de medidas: En esta categoría se incluyen los problemas correspondientes a volúmenes, áreas, o problemas combinatorios. Esta categoría, por ser semánticamente conmutativa, sólo presenta dos posibilidades según cuál sea el dato pedido. Nesher llama a esta categoría multiplicación cartesiana y Brown producto cartesiano.

Kouba (1989) clasifica los problemas atendiendo a la posición de la incógnita en tres categorías: problemas de multiplicación (la incógnita es el producto), problemas de división partitiva (la incógnita es el número de elementos de cada conjunto) y los problemas de división de medida (la incógnita corresponde al número de conjuntos).

En 1999, Carpenter et al proponen la siguiente clasificación de problemas multiplicativos: problemas de agrupamiento y partición (aquellos que pueden ser agrupados en grupos equivalentes), problemas simétricos (problemas de áreas, combinación y tablas) y los problemas no simétricos (problemas de razón, precio y multiplicación comparativa).

De todas las clasificaciones presentadas, para los problemas de estructura multiplicativa, las más divulgadas son las de Nesher (1988), Schwarz (1981, 1988) y Vergnaud (1983, 1988). No obstante, a diferencia de lo que ocurre en los problemas de estructura aditiva, no existe una clasificación universalmente aceptada. Por tanto, no hay acuerdo en el nombre de las clases de los problemas, aunque sí en las categorías básicas.

II.3.5. ORDEN DE DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Las investigaciones han puesto de manifiesto que la estructura semántica es una componente con un peso muy importante cuando se trata de determinar la dificultad de un problema (Dopico, 2001). En cuanto a los problemas multiplicativos, diferentes investigadores están de acuerdo en que los problemas de grupos iguales son más fáciles que los de comparación (Bell, Fischbein, y Greer, 1984; Bell, Creer, Grimison y Mangan, 1989; De Corte y Verschaffel, 1996; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985;

Kouba y Franklin, 1993; Mulligan y Mitchelmore, 1997; Nesher, 1992; Tirosh y Graeber, 1989). Zweng (1964) que entre los problemas de dividión, son más sencillos los de división patitiva y que los de razón son más fáciles que el resto.

La diferencia entre estos últimos radica en la forma de expresar lingüísticamente la división.

Brown (1981) examina la comprensión que tienen los niños ingleses de las cuatro operaciones aritméticas básicas, observando su capacidad para reconocer qué operación han de aplicar para resolver un problema aritmético verbal. Este análisis da como resultado que el modelo de multiplicación como adición repetida es más fácil que el de producto cartesiano y que los problemas de producto cartesiano que les resultan más sencillos son los de tipo partitivo. También concluye que el orden de dificultad de las operaciones es adición, substracción, división y multiplicación; resultado ratificado por Valentin y Champ (2005). A estos resultados Christou y Philippou (1998) añaden que los problemas más difíciles de multiplicación son los que corresponden al tipo de tasas.

De Corte, Verschaffel y Van Coillie (1988) advierten que los problemas simétricos tienen una mayor dificultad cuando el multiplicador es menor que la unidad.

La revisión bibliográfica llevada a cabo por Castro (1994) sobre las dificultades que presentan los problemas multiplicativos le lleva a manifestar que:

a) no hay acuerdo en qué categoría es la más fácil. Nesher (1988) dice que es la comparación, Hart (1981) y Brekke (1991) la de adición repetida;

b) el tipo de número, natural frente a decimal, es una variable importante a tener en cuenta;

c) no hay acuerdo sobre si la dificultad en un tipo de problema es resultado del tipo de problema o de la enseñanza recibida.

Al igual que para los problemas de estructura aditiva, daremos más información sobre este tema en el capítulo siguiente que presentan resultados de investigaciones sobre resolución de problemas.

II.4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

De igual forma que la idea de "qué es un problema", como hemos puesto de manifiesto en apartados anteriores, es diferente para distintos autores, así sucede con la idea de "qué es resolver un problema". La expresión varía desde la consideración de Puig (1993) como "la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante lo es y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (p. 21), hasta la consideración de Agre (1982) para quien la resolución de problemas es el proceso de aplicación de los conocimientos previamente adquiridos a situaciones nuevas y no familiares, o la postura intermedia que comenta Contreras (1998) que se refiere a la resolución de problemas como una tarea exclusivamente perceptiva y conceptual, en la que el sujeto que se enfrenta a ella la puede comprender dado su aprendizaje previo, pero no conoce aún un medio por el que la pueda resolver por lo que experimenta confusión, aunque no excesiva, ante la situación presentada. Partiendo de estas consideraciones este autor sostiene que la resolución de problemas es el proceso mediante el cual el individuo se desembaraza de su problema.

El auge en el interés por el proceso de resolución de problemas en el campo de la investigación en educación matemática se produce a partir de la publicación del libro de Polya (1965) "How solve it". Es aceptado por la comunidad de investigadores que este libro motiva que el tema pase a ser considerado en el área como un campo de estudio específico el cual ha recibido gran atención en las últimas décadas. Centrándose en el punto de vista escolar, Castro (2008) recoge varios componentes que señala Kilpatrick (1978) en la resolución de un problema: el *problema*, interrogante o cuestión que se plantea, el *alumno* (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva y la *situación* en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el *profesor*. La consideración de cada uno de ellos, por separado o conjuntamente, en interacción con los otros componentes, permite situar distintas líneas de investigación en resolución de problemas en educación matemática.

Estos estudios sobre resolución de problemas han tratado desde cuestiones más simples, como la ejecución de ejercicios, hasta la resolución de problemas complejos con la intención de hacer matemáticas como los matemáticos profesionales (Schoenfeld, 1992). Los resultados de la investigación han sido interpretados desde puntos de vista variados. También ha sido diferente el nivel educativo elegido para realizar los estudios de campo. Respecto a los primeros niveles, numerosas investigaciones, desde distintas perspectivas, han explorado la resolución de problemas aritméticos verbales (Baroody, 1988; Carpenter et al, 1981; De Corte y Verschaffel, 1987b; Fuson y Hall, 1983;Nesher, 1982 y Vergnaud, 1991, entre otros). En este nivel educativo la investigación sobre resolución de problemas ha sido más compacta y sistemática que en otros casos.

II.4.1. DIFERENTES CONSIDERACIONES CURRICULARES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas puede ser introducida en el aula bajo diferentes propósitos. Schroeder y Lester (1989) distinguen entre enseñar *sobre* resolución de problemas, *para* resolver problemas o *vía* resolución de problemas. La enseñanza sobre resolución de problemas se centra en trabajar estrategias de resolución, con el objetivo de que los estudiantes aprendan a resolver problemas. La enseñanza para resolver problemas se centra en la aplicación de conocimientos matemáticos aprendidos anteriormente para resolver problemas, con el objetivo de asentar los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes. La enseñanza vía resolución de problemas consiste en tomar a éstos como medios a través de los cuales aprender nuevo conocimiento matemático.

Se aprecia que los objetivos de estos propósitos, son diferentes. El objetivo asociado al primer propósito es que los estudiantes aprendan a resolver problemas. El asociado al segundo propósito es asentar los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes. El objetivo asociado al tercer propósito es utilizar la resolución de problemas como mediador a través del cual se trate de hacer la enseñanza de las matemáticas, como metodología de enseñanza; en tal caso el conocimiento matemático va surgiendo a medida que se va dando solución a los problemas.

En este mismo sentido Carrillo (1996) manifiesta que la resolución de problemas se puede considerar de tres formas: como un objetivo a alcanzar, como un proceso o como una destreza básica.

Enlazando con la idea de Carrillo, Noda (2000) señala que dependiendo de cómo se considere la resolución de problemas, el foco de atención variará. Cuando la resolución de problemas se considera una meta, lo que importa es aprender a resolver problemas, independiente de los problemas específicos, de procedimientos o métodos. Cuando se le considera como un proceso, lo que importa son los conceptos, métodos, procedimientos y estrategias puestos en juego. Cuando es considerada como una destreza básica, se requiere que los estudiantes, en general, adquieran destrezas en el enfrentamiento a problemas rutinarios, dejando el abordaje de verdaderos problemas a los alumnos más avanzados. Cuando se considera como una metodología de enseñanza lo importante es elegir aquellos problemas que permitan alcanzar el conocimiento matemático fijado.

En cuanto al potencial que ofrece la resolución de problemas para el aprendizaje, Pozo (1994) identifica dos tendencias generales de opinión: la que afirma que con la resolución de problemas el individuo adquiere estrategias que podrá aplicar a otro tipo de problemas, y la que sostiene que la resolución de problemas y su instrucción se abordan en las áreas y contextos específicos a los que se refieren los problemas.

Desde otra visión Carrillo (1995) considera que la resolución de problemas, como tarea compleja que es, ofrece una posibilidad para organizar la diversidad de niveles existentes en el aula, es un marco ideal para la construcción de aprendizaje significativo y fomenta el gusto por la matemática y el desarrollo de una actitud abierta y crítica. La resolución de problemas es el motor de la clase de matemáticas, lo que pone al estudiante ante el reto de hacer matemáticas.

Polya (1965), Gagné (1965) y Brown (1978), entre otros, señalan la estrecha relación de la resolución de problemas con el aprendizaje, argumentando que da lugar a la producción de conocimiento nuevo y también permite la aplicación de los conocimientos adquiridos a situaciones nuevas, no familiares. Así Polya (1962) sitúa la resolución de problemas como un indicador del conocimiento matemático de un individuo. Gagné (1965) toma la resolución de problemas como la forma más elevada del aprendizaje y Brown (1978) manifiesta que la resolución de problemas puede ser un tipo de aprendizaje matemático, al igual que la memorización simple, el aprendizaje algorítmico y el aprendizaje conceptual, diferenciándose de éstos en que la resolución de problemas puede ser una vía para la construcción de las estructuras anteriormente mencionadas (conceptuales, algorítmicas y de memorización).

II.4.2. ETAPAS Y ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Diferentes investigadores han establecido etapas en el proceso de resolución de problemas. En algunos casos su definición coincide aunque se utilicen diferentes expresiones. Estas etapas conducen a los autores a sugerir estrategias de utilidad para la resolución de problemas. Son, por tanto, de interés para enseñar a los alumnos a resolver problemas. Recogemos en la Tabla II.6 las propuestas de etapas hechas por diferentes investigadores, aglutinando la información recogida al respecto por Castro y

Castro (1996) y Espinosa (2004). A continuación comentamos algunas de estas propuestas.

Poincaré, 1908

1. Un periodo de trabajo consciente
2. Un periodo de trabajo inconsciente
3. Un segundo periodo de trabajo inconsciente

Dewey, 1910

1. Se siente una dificultad
2. La dificultad es definida y localizada
3. Se sugieren posibles soluciones
4. Se consideran las consecuencias
5. Se acepta una solución

Wallas 1926, citado en Mayer, 1986b

1. Preparación
2. Incubación
3. Iluminación
4. Verificación

Rossman, 1931

1. Observación de una necesidad o dificultad.
2. Formulación del problema.
3. Revisión de la información disponible.
4. Formulación de soluciones.
5. Examen crítico de las soluciones.
6. Formulación de nuevas ideas.
7. Examen y aceptación de nuevas ideas

Polya, 1965

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ejecutar el plan
4. Examinar la solución obtenida

Vinacke, 1952

1. Confrontación con el problema: notar que existe el problema
2. Trabajo en búsqueda de la solución
3. Solución

Merrifield, 1962

1. Preparación
2. Análisis
3. Producción
4. Verificación
5. Replicación

Hayes, 1981

1. Encontrar el problema
2. Representar el problema
3. Planificación de la solución
4. Llevar a cabo el plan
5. Evaluar la solución
6. Consolidar los beneficios

Bransford y Stein, 1984

1. Identificación del problema
2. Definición y representación del problema
3. Exploración de posibles estrategias
4. Actuación, fundada en una estrategia
5. Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades

Mayer, 1986b

1. Enunciado
2. Comprensión
3. Solución
4. Resultados

Schoenfeld, 1987

1. Análisis y comprensión
2. Diseño y planificación
3. Exploración
4. Verificación

Mason, Burton y Stacey 1988

1. Abordaje: Comprender el problema y concebir un plan
2. Ataque: Llevar a cabo el plan
3. Revisión: Reflexión sobre el proceso seguido

Puig, 1996

1. Lectura
2. Análisis
3. Exploración
4. Plan de ejecución
5. Verificación
6. Transición
7. Información nueva y evaluación local

Castro, 1995

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Osbom, 1963
1. Pensar todas las fases del problema
2. Seleccionar los subproblemas
3. Pensar qué información puede ayudar
4. Seleccionar las fuentes más probables de información
5. Pensar en todas las ideas posibles como claves del problema
6. Seleccionar las ideas que con mayor probabilidad conducirán a la solución
7. Pensar en todas las formas posibles de probar
8. Seleccionar las formas más seguras de probar
9. Imaginar todas las contingencias posibles
10. Decidir la respuesta final</td>
<td>1. Enunciado del problema
2. Comprensión
3. Solución
4. Respuesta</td>
</tr>
<tr>
<td>Carrillo, 1996
1. Identificación
2. Comprensión
3. Planificación y exploración
4. Ejecución
1. Verificación</td>
</tr>
<tr>
<td>Fernández, 1997
1. Planteamiento
2. Ejecución
3. Desempeño final</td>
</tr>
</table>

Tabla II.6. Etapas en la resolución de problemas propuestas por diferentes autores.

Como se aprecia en la Tabla II.6 hay autores anteriores a Polya que propusieron etapas, pero es a partir del trabajo de Polya (1965) cuando esta idea toma importancia. Polya plantea cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema y asigna a cada una de ellas una serie de preguntas que ayudarán a resolver el problema adecuadamente:

1) comprender el problema, estableciendo cuál es la meta, los datos y las condiciones de partida;

2) idear o elaborar un plan de actuación que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta;

3) llevar a cabo el plan ideado previamente, comprobando cada uno de los pasos dados;

4) mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado, comprobando si el resultado es correcto y está de acuerdo con lo pedido en el problema.

En la década de los 80 del siglo XX destacan los trabajos de Schoenfeld, quien parte del método heurístico de Polya, perfeccionándolo al derivar subestrategias más asequibles al trabajo con los estudiantes. En su obra “Mathematical Problem Solving” (1985) plantea cuatro categorías del conocimiento y comportamiento necesarias para caracterizar adecuadamente las formas de solucionar problemas. En este trabajo

Schoenfeld enumera cuatro factores que influyen de forma relevante en la resolución de problemas: recursos cognitivos, heurística, metacognición o control y creencias. Los recursos cognitivos incluyen los conocimientos matemáticos generales, por ejemplo, los algoritmos y las nociones matemáticas. La heurística se encarga de recopilar estrategias conocidas para resolver problemas. La metacognición es la capacidad de utilizar lo ya adquirido para lograr un objetivo. Las creencias son aquellas opiniones relacionadas con la resolución de problemas que pueden afectarle de forma adecuada o no.

Este autor distingue la siguiente lista de etapas y estrategias para resolver problemas:

1. <u>Análisis</u>*:*

a) Dibujar un diagrama siempre que sea posible.

b) Examinar casos especiales.

b.1) Seleccionar algunos valores especiales para ejemplificar el problema y familiarícese con él.

b.2) Examinar casos límite para explorar el rango de posibilidades.

b.3) Si hay un parámetro entero, darle sucesivamente los valores 1, 2… m y vea si emerge algún patrón inductivo.

c) Tratar de simplificar el problema.

c.1) Explotar la existencia de simetría.

c.2) Usar argumentos del tipo “sin pérdida de generalidad".

2. <u>Exploración</u>*:*

a) Considerar problemas esencialmente equivalentes.

a.1) Reemplazar condiciones por otras equivalentes.

a.2) Recombinar los elementos del problema de maneras diferentes.

a.3) Introducir elementos auxiliares.

a.4) Reformular el problema:

- Mediante un cambio de perspectiva o notación.
- Mediante argumentos por contradicción o contraposición.
- Asumiendo que se tiene una solución y determinando sus propiedades.

b) Considerar un problema ligeramente modificado.

b.1) Escoger submetas (tratando de satisfacer parcialmente las condiciones).

b.2) Relajar una condición y luego tratar de reimponerla.

b.3) Descomponer el dominio del problema y trabajar caso por caso.

c) Considerar problemas sustancialmente modificados.

c.1) Construir un problema análogo con menos variables.

c.2) Dejar todas las variables excepto una, para determinar su impacto.

c.3) Tratar de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.

3 Verificación de la solución.

a) Confirmar que la solución pasa las siguientes pruebas específicas:

a.1) ¿Se usan todos los datos pertinentes?

a.2) ¿Están de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?

a.3) ¿Soportan pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?

b) Confirmar que la solución pasa las siguientes pruebas generales:

b.1) ¿Puede ser obtenida de manera diferente?

b.2) ¿Puede ser sustanciada por casos especiales?

b.3) ¿Puede ser reducida a resultados conocidos?

b.4) ¿Puede utilizarse para generar algún resultado?

Puig y Cerdán (1988) presentan una propuesta para la resolución de problemas aritméticos verbales, basada en las ideas de Dewey y de Polya que consta de las siguientes fases:

1. Lectura 2. Comprensión 3. Traducción 4. Cálculo

5. Solución 6. Revisión 7. Comprobación**.**

Dichos autores subdividen en dos etapas, lectura y comprensión, la fase “comprensión” de Polya, haciendo hincapié de esta manera en la lectura del enunciado. La fase que Polya denomina “elaboración de un plan”, la llaman aquí traducción; en ella el resolutor elige la operación u operaciones aritméticas que necesita para resolver la situación. La fase de cálculo corresponde a la de "ejecución del plan" y en ella intervienen las destrezas algorítmicas de los estudiantes. Las últimas fases, de revisión y comprobación, coinciden con la de "verificación del resultado" de Polya.

Castro (1994) señala que en la resolución de un problema han sido identificadas dos fases generales: la comprensión del problema y la solución del mismo. La comprensión (representación mental) del problema se caracteriza mediante dos sub-etapas: a) traducción del problema a una representación interna, y b) integración del problema en una estructura coherente. De manera similar, la fase de solución de un problema también presenta dos sub-etapas: planificación y ejecución, que incluye seleccionar el proceso a seguir y ejecutar los cálculos necesarios para obtener una respuesta numérica. Kintsch y Greeno (1985) realizan una distinción similar entre los subprocesos de comprensión del problema. Cuando el resolutor lee el problema construye un "textobase", y se hace una representación mental del mismo. Esta representación mental expresa el contenido semántico del enunciado del problema. En este punto, el resolutor construye un modelo del problema que integra la información del "textobase" para expresar la situación matemática del problema. Un resolutor podría leer y comprender el texto de un problema pero no ser capaz de elegir la operación adecuada para obtener la solución (Castro, 1994).

Las fases que propone Carrillo (1996) en el proceso de resolución de un problema son cinco:

1) Identificación: el sujeto detecta un problema. Esto no quiere decir que sea capaz de resolver la situación, pero sí la ha identificado como problemática;

2) Comprensión: el resolutor procura comprender las partes de un problema, sus condiciones y conclusión. A veces la comprensión del problema se alcanza tras pasar por las fases 3, 4 y 5.

3) Planificación y exploración: el resolutor busca información con el fin de idear una estrategia que le resuelva el problema.

4) Ejecución: el sujeto desarrolla la estrategia seleccionada en la fase previa.

5) Verificación: el resolutor comprueba si lo obtenido tiene sentido o es correcto.

Wilson, Fernandez y Hadaway (1993) proponen considerar las etapas anteriores de una forma dinámica frente a la forma estática que se les atribuye. La Figura II.1, adaptada de los autores anteriormente referidos, contrasta ambas formas de visualizar la relación entre estas etapas.

Por último añadimos a las heurísticas que se recogen en la Figura II.1 las recopiladas por Cañadas, Durán, Gallardo, Martínez-Santaolalla, Peñas, Villarraga et al (2002), a partir de una amplia revisión bibliográfica: resolver un problema más sencillo, hacer una tabla, buscar pautas, empezar desde atrás, dar el problema por resuelto, generalizar, análisis del problema, representación y organización de la información, inferencia, deducción, ensayo y error (fortuito, sistemático, dirigido), descomponer el problema en sub-problemas, reducción al absurdo, búsqueda de incoherencias, análisis del caso más desfavorable, formulación de predicciones y torbellino de ideas.

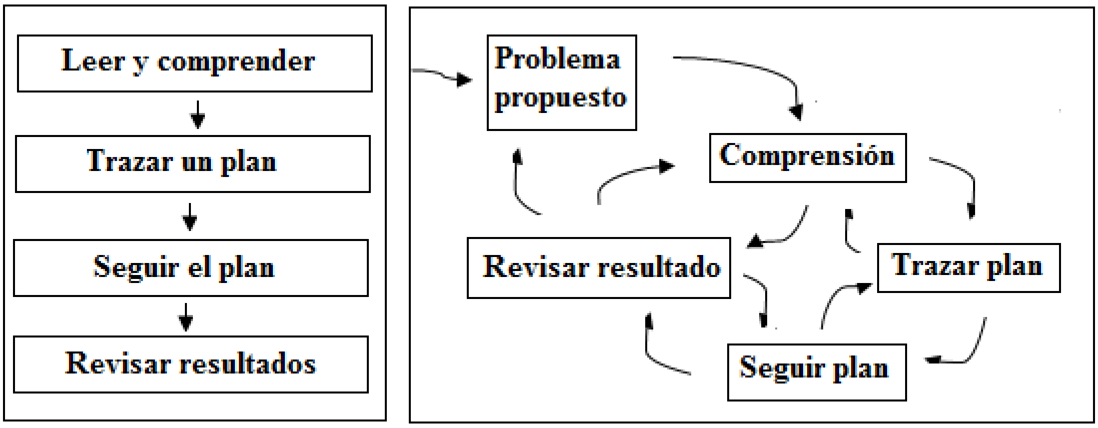


Figura II.1. Esquemas estático y dinámico de las etapas de resolución de problemas.

II.4.3. MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Además de las etapas y estrategias, que se pueden considerar como un procedimiento a seguir cuando se resuelve un problema, otros autores proponen métodos generales. Brandsford y Stein (1984) presenta el método IDEAL cuyas siglas corresponden a las iniciales de las acciones a realizar: Identificación del problema, Definición y representación del problema, Exploración de posibles estrategias, Actuación, fundada en una estrategia, y Logros, Observación y evaluación de los efectos producidos.

De Corte y Verschaffel (1989) presentan un modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales de sumas y restas, que dividen en las siguientes etapas:

1) A partir del enunciado del problema, el resolutor construye una representación del problema en términos de conjuntos y relaciones entre estos conjuntos.
2) El resolutor elige la operación para encontrar el valor desconocido en la representación del problema.
3) El resolutor ejecuta la operación o acción seleccionada.
4) El resolutor vuelve a la representación inicial del problema, sustituye el elemento desconocido por el resultado que ha obtenido y formula la respuesta.
5) El resolutor verifica las acciones realizadas con el fin de garantizar la corrección de las soluciones encontradas en la fase precedente.

Miguel de Guzmán (1991) orienta al resolutor para que resuelva problemas de forma adecuada con un modelo que relaciona las cuatro fases de Polya. En su modelo propone tres etapas: 1) Familiarización con el problema. 2) Búsqueda de estrategias y 3) Ejecución de las estrategias.

Otros métodos que se distinguen en la literatura se proponen para la resolución de tipos particulares de problemas, como por ejemplo los problemas resolubles mediante ecuaciones lineales (Cerdán, 2008; Martínez, 2011).

II.4.4. BUENOS RESOLUTORES

Un papel primordial en la resolución de problemas es el del resolutor. Diversos autores han centrado su atención en las características que identifican a los buenos resolutores.

En este apartado destacamos algunas de ellas. Cuando no se dan estas características se considera que el sujeto no es un buen resolutor.

Schoenfeld (1985) sugiere que los buenos resolutores se reconocen por las siguientes trazas:

- Poseen más conocimientos y mejor conectados lo que les proporciona esquemas ricos.
- Su atención no es dispersa, la centran en las características estructurales de los problemas.
- Son conscientes de sus puntos fuertes y débiles en la resolución de problemas.
- Conducen y regulan mejor sus propios esfuerzos.
- Se interesan por obtener una solución elegante de los problemas.

Carrillo (1996), por su parte, asigna las siguientes capacidades al buen resolutor:

- Es conocedor de las estrategias que ayudan en la comprensión, planificación, ejecución, verificación y transición.
- Tiene una buena organización temporal.
- Está motivado.
- Es perseverante.

- Tiene confianza en sus posibilidades-.
- Retiene información matemática, disponiendo de un conocimiento organizado.
- Es capaz de razonar con símbolos matemáticos y relaciones espaciales.
- Posee flexibilidad en sus procesos mentales.
- Procura claridad, simplicidad, economía y racionalidad en sus razonamientos y soluciones.
- Dispone de capacidad para la reversibilidad de los procesos mentales.
- Elige cuidadosamente los recursos, empleando un concepto integrador para relacionar detalles o principios abstractos para interpretar la información concreta.

En 2002, Abrantes y sus colaboradores caracterizan también a los buenos resolutores manifestando que se distinguen por:

- Poseer conocimientos matemáticos adecuados a los problemas con los que se va a enfrentar.
- Conocer diversas estrategias.
- Desear resolver el problema, una vez que ha sido aceptado como tal.

En relación con la invención, Brown y Walter (1990), argumentan que los buenos resolutores de problemas son capaces de inventar problemas originales; les basta con preguntarse qué ocurriría si modificaran algunos de los términos incluidos en los problemas que conocen.

II.5. INVENCIÓN DE PROBLEMAS ESCOLARES

Una de las líneas de indagación relacionada con los problemas es la que se refiere a la situación en que el alumnado proporciona problemas. Este hecho ha sido designado de diferentes formas por los diversos autores que han tratado este asunto. Kilpatrick (1987) lo designa como formulación de problemas, Silver (1994) habla de generación de problemas y Brown y Walter (1990) se refieren a plantear problemas.

En este trabajo adoptamos la expresión inventar, por considerarla más cercana al lenguaje de los alumnos que participan en esta investigación, y para dar variedad al vocabulario, utilizamos de forma sinónima las expresiones formular, enunciar, proponer y plantear. No obstante, como muestran los siguientes extractos, formalmente estos términos tienen significados próximos pero no equivalentes:

- Inventar es "encontrar una manera de hacer una cosa nueva, desconocida antes, o una nueva manera de hacer algo" (Moliner, 1986).
- Formular es "dar forma a algo valiéndose del lenguaje hablado o escrito" (Moliner, 1986).
- Enunciar es "exponer el conjunto de datos de un problema" (Real Academia Española 21º edición).
- Proponer significa hacer una propuesta (Real Academia Española 21º edición).
- Plantear quiere decir proponer, suscitar o exponer un problema matemático, un tema, una dificultad o una duda (Real Academia Española 21º edición).

Inventar un problema significa que no se toma un problema ya preparado y se presenta, sino que hay que producirlo en el momento. Consideramos que se ha de presentar una "historia verosímil" en la que aparezcan datos y un interrogante al que se ha de dar respuesta, teniendo todo coherencia interna.

A la acción de inventar o construir nuevos problemas se le considera una actividad intelectual y una forma eficaz de aprender matemáticas como han indicado autores de reconocido prestigio como Polya (1965), Freudenthal (1973) y Kilpatrick (1987). Se considera que cuando un individuo inventa un problema ha alcanzado niveles de reflexión complejos, por tanto ha llegado a una etapa de razonamiento que hace posible la construcción de conocimiento matemático. Este hecho hace que la formulación de problemas aporte grandes beneficios a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Todo ello lleva a proponer que se potencie su trabajo en el aula, para lo que se recomienda que los profesores de matemáticas proporcionen abundantes y variadas oportunidades a sus estudiantes tanto para aprender a resolver problemas, como a inventar o plantear problemas en una gran cantidad de situaciones (Abu-Elwan, 1999). Autores como Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi (2005) estudian el tipo de pensamiento que un alumno necesita para inventar problemas. Como resultado de sus investigaciones determinan los procesos cognitivos involucrados en esta tarea, los cuales identifican como sigue: editar información, seleccionar información, comprender y organizar información y traducir la información de una forma de representación a otra. Admiten que estos procesos también pueden ser compartidos por la resolución de problemas pero son imprescindibles en la invención de problemas.

II.5.1. Aspectos positivos de la invención de problemas para la educación matemática

Desde la investigación se señalan variados factores positivos que la tarea de inventar problemas aporta para la educación matemática. Uno de esos factores positivos hace referencia al incremento del conocimiento matemático ya que la tarea exige establecer conexiones entre conocimientos que se poseen separadamente, así como realizar una serie de acciones propias del aprendizaje. Al inventar un problema, el sujeto ha de utilizar diferentes conceptos matemáticos que, en ocasiones, ha construido en distintos momentos de su vida escolar y, a veces, de manera aislada. Ha de leer y examinar datos y pensar críticamente (Davidson y Pearce, 1988), discutir ideas, estrategias y soluciones a la vez que las cuestiona (Whitin, 2004). Con frecuencia ha de generalizar, siendo necesario escribir con claridad, exactitud y organización (Burçin, 2005; Petersen y Jungck, 1988; Polya, 1965; Solorzano, 1989; Wright y Stevens, 1980).

Ha de adelantarse a la solución del problema y, si éste no se reduce a un mero ejercicio de aplicación de un concepto, requerirá relacionar conceptos lo que le será de utilidad para incrementar su habilidad para aplicar los conceptos matemáticos y aprender a utilizar una variedad de estrategias para llegar a la solución de los problemas (Cázares, 2000; Cifarelli y Sheets, 2009; Dickerson, 1999; Tchoshanov, 2008; Whitin, 2004).

Otro aspecto positivo se refiere a la motivación. Está generalmente reconocido que la motivación representa un factor determinante en el aprendizaje del alumno sobre las matemáticas y que una buena motivación dará lugar a incrementar el rendimiento de los estudiantes.

Autores como Akay y Boz (2010), English (1997b) y Silver (1994) proponen como instrumento de motivación la invención de problemas. Esta actividad, junto a la resolución de problemas, favorece una actitud positiva en clase de matemáticas ya que, como señala Polya (1965), el trabajo con problemas ayuda a despertar la curiosidad de los alumnos y, por añadidura, la motivación. Para este autor, la experiencia de un alumno en matemáticas será incompleta si no tiene ocasión de resolver problemas que él mismo haya inventado.

Un tercer factor positivo que se le adjudica a la invención de problemas está relacionado con la ansiedad que, a algunos estudiantes, produce su relación con las matemáticas. En la medida en que la tarea de formular problemas fomente una disposición más favorable y responsable hacia las matemáticas contribuirá a rebajar la ansiedad de los estudiantes hacia las mismas. En los trabajos de Brown y Walter (1993), Burçin (2005), English (1997b), Moses, Bjork y Goldenberg (1990), Silver (1994), y Song, Yim, Shin y Lee (2007), estos autores sostienen que la invención de problemas reduce el miedo y preocupación por las matemáticas que en muchos casos padecen los alumnos.

El cuarto factor positivo hace alusión a la superación de errores matemáticos habituales que los estudiantes cometen. Así lo indican Brown y Walter (1993), English (1997b) y Silver, Mamona-Downs, Leung y Kenney (1996). Los autores señalados argumentan que esta actuación induce al alumno a elegir la información que ha de utilizar en la resolución del problema y a seleccionar los datos con los que ha de operar, haciendo que los errores resolutivos disminuyan.

El quinto elemento positivo alude a la creatividad. Se ha determinado que formular problemas ayuda positivamente al desarrollo de la creatividad del alumnado. Estudios como los de Ellerton (1986) y Krutetskii (1969) en los que intervienen dos grupos de alumnos con diferente nivel de habilidad matemática y se comparan sus producciones sobre la generación de nuevos problemas, determinan que los alumnos con talento matemático proponen buenos y abundantes problemas. Los autores referidos ponen de manifiesto una relación entre la habilidad para proponer nuevos problemas y el grado de creatividad y competencia matemática. Silver (1994) estudia la creatividad de los estudiantes atendiendo a lo que denomina fluidez, flexibilidad y grado de originalidad, asocian la fluidez con el número de problemas generados, la flexibilidad con el número de categorías diferentes de los problemas propuestos y la originalidad con el número de soluciones que admiten los problemas propuestos.

Esta autora identifica una relación directa entre la habilidad para proponer problemas y el grado de creatividad de los estudiantes.

Un sexto factor positivo está relacionado con la tarea evaluadora del profesorado. Se refiere a la posibilidad de utilizar la invención de problemas para evaluar ciertas capacidades matemáticas de los estudiantes. Una tarea de invención de problemas permitirá al profesor conocer las habilidades que tienen sus alumnos para usar su conocimiento matemático (Ayllón, 2005; Cázares, 2000; Lin, 2004; Mestre, 2002; Sheikhzade, 2008), así mismo permitirá analizar los procesos de pensamiento matemático de los sujetos investigados. Se destaca que la invención de problemas permite evaluar, en los estudiantes, su conocimiento, su forma de razonar y su desarrollo conceptual.

II.5.2. ESCENARIOS PARA PROPONER PROBLEMAS

La tarea de invención puede proponerse desvinculada o relacionada con la resolución de problemas. En este sentido Cázares (2000) distingue dos aproximaciones a la invención de problemas:

1) problemas inventados a partir del contacto del individuo con su medio. En este caso la invención se realiza antes de cualquier procedimiento de resolución, por ejemplo, cuando un individuo se enfrenta a una situación real donde tiene que hacer uso de los conocimientos matemáticos que posee para enunciar y resolver un problema.

2) problemas que se inventan dentro del proceso de resolución de un problema. En este segundo caso, como señala Silver (1994), la invención de problemas puede ubicarse antes, durante o después de la resolución.

En 1976, Kochen, Badre y Badre crearon un modelo con el que explicaban cómo son aplicables las matemáticas cuando los individuos se enfrentan a situaciones de su vida real y dichas situaciones requieren la formulación de un problema. El modelo propuesto consta de tres etapas:

1) la persona se encuentra ante una situación de su vida cotidiana difícil, esto la estimula a generar un enunciado de problema el cual puede ser representado de forma escrita u oral, y/o evidenciado a través de un comportamiento;

2) el sujeto convierte la situación en un problema matemático que puede abordar mediante sus conocimientos, y

3) para facilitar la resolución del problema, se divide éste en subproblemas, siendo la resolución más inmediata de esta manera.

Este modelo aporta una información esencial cómo la invención de problemas se puede realizar a partir de una dificultad que se presenta en el mundo real, y no únicamente en el contexto de una situación escolar, la cual en algunos casos puede resultar un tanto artificial para el alumno.

En cuanto al planteamiento de problemas en la resolución de otros problemas, Brown y Walter (1990) señalan que el alumnado ha de ser capaz de reinterpretar el problema original además de poseer conocimiento para resolver dicho problema.

En las diferentes etapas en la resolución de problemas que hemos recogido en un apartado previo, se reconoce, de forma más o menos explícita, la invención de problemas vinculada al proceso de resolución. Castro (1991) indica que Dewey en 1910, en sus cinco pasos para resolver problemas, propone en dos de ellos la invención, concretamente en las dos primeras etapas. En la primera, el sujeto se enfrenta ante una situación problemática que debe resolver. Cuando el individuo reconoce la dificultad, se ve en la necesidad de formular y delimitar adecuadamente el problema para intentar resolverlo, ello forma parte de la segunda etapa. También Rossman (1931), en sus dos primeras etapas, contempla la necesidad de formular el problema para poder resolverlo.

El autor manifiesta que cuando el individuo se enfrenta a una dificultad y realiza un análisis crítico de las soluciones, formula un nuevo problema.

En las etapas de resolución de problemas propuestas por Polya (1965), también se puede reconocer la invención de problemas, concretamente en la última "verificación de la solución obtenida". Del mismo modo se reconoce en las etapas de verificación de resultados y de replicación presentadas por Merrifield (1962).

Osborn (1963), en la segunda etapa, propone dividir el problema en sub-problemas para facilitar la resolución de éste y, en la novena etapa, sugiere imaginar todas las posibles contingencias. Silver (1997) concibe la actividad de dividir en sub-problemas como la formulación de nuevos problemas. Brightman (1980) reconoce la invención de problemas en la etapa de las acciones correctivas o reciclaje del problema. Hayes (1981), en la primera etapa para resolver un problema, señala la necesidad de encontrar o identificar el problema y, en la quinta, la evaluación de la solución. En el mismo sentido, Bransford y Stein (1984) proponen la identificación y definición del problema en sus dos primeras etapas y la evaluación de los resultados en la quinta, así como el desarrollo de las actividades realizadas para resolver el problema.

Estas observaciones constatan la existencia de una fuerte vinculación entre las acciones de resolución y formulación de problemas.

II.5.3. ESTRATEGIAS PARA PROPONER LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Entendemos aquí por estrategias las diferentes formas de enfrentar a los estudiantes a la tarea de proponer problemas. A veces la estrategia consiste en proponer problemas cambiando las condiciones asignadas, las variables concernientes o la estructura de un problema dado. Otras propuestas consisten en partir de representaciones dadas, historias presentadas, situaciones de la vida real, operaciones proporcionadas o alguna exigencia determinada.

Kilpatrick (1987) presenta una propuesta para formular problemas que se basa en estrategias de asociación, analogía, generalización y contradicción. Indica que cuando todas o parte de las condiciones dadas en un problema cambian o cuando un problema es revisado en diversas formas, se formula un nuevo problema para el que dichos cambios son necesarios para su solución.

Por su parte, Moses, Bjork y Goldenberg (1990) proponen cuatro principios para generar problemas a partir de uno dado:

Principio 1: El alumnado ha de saber distinguir los elementos que forman parte de un problema, estos son, la información conocida, la información desconocida y las restricciones que contengan. A partir de ahí, ha de considerar qué pasaría si alguno de ellos se modificase, considerando que desde un problema original se pueden generar muchos nuevos problemas cambiando la información conocida o la desconocida o las restricciones. Para ello se debe observar: a) la clase de información que proporciona el problema; b) la información que permanece desconocida y c) qué tipo de restricciones están implícitas en la respuesta.

Principio 2: Los estudiantes han de sentir confianza para proponer sus ideas, por ello el ambiente matemático debe ser confortable.

Principio 3: El profesor se ha de encargar de animar a sus alumnos a plantear nuevos problemas e interrogantes.

Principio 4: Será el profesor quien propicie en el alumnado la idea de dominio de un determinado contenido.

Brown y Walter (1990) realizan una separación del proceso de formulación de problemas en dos etapas: una que denominan de aceptación del problema y otra de exigencia del problema dado. En la etapa de exigencia pueden aparecer nuevas cuestiones a demanda del problema. A tal estrategia le llaman "What if not?" (Traducimos por: "Qué pasaría si…"). Los autores señalados usan tal estrategia con objeto de tener un método que permita formular nuevos problemas de forma sistemática.

Una serie de estudios posteriores trabajan la invención de problemas usando esta estrategia. Entre ellos, un estudio de English (1998) presenta un análisis sobre los procesos de niños menores de ocho años de edad cuando proponen problemas usando dicha estrategia en circunstancias que podrían considerase indistintamente como formales y no formales. Variando las condiciones con cuestiones no formales, surgen una diversidad de problemas en un problema asociado a un puzle. También Lavy y Bershadsky (2003) usan esta estrategia en un estudio de generación de problemas en un espacio geométrico por profesores en formación.

Silver, en 1994, describe dos situaciones idóneas en la invención de problemas: una es aquella en la que un individuo a partir de un hecho cualquiera genera problemas nuevos (ej., en una situación cotidiana de compra-venta); otra en la que a partir de un problema complejo se procede a la división de éste en problemas más sencillos. En este caso se presentan reformulaciones del problema inicial.

Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi y Sriraman (2005) recogen diferentes clasificaciones presentadas por otros autores sobre las formas de proponer las tareas sobre invención de problemas. Según dichos autores, Stoyanova (1998) las clasifica en situaciones libres, situaciones semiestructuradas y situaciones estructuradas. En las situaciones libres los estudiantes no tienen restricción para formular sus problemas, en las semiestructuradas a los estudiantes se les propone que inventen problemas con alguna similitud a otros dados, y en las situaciones estructuradas problemas dados se reformulan o se cambia alguna condición de los mismos. Silver (1995) hace una clasificación relacionando la situación de invención con la de resolución de problemas y toma como criterio para ella el momento de la invención, en relación con la resolución. Así considera: problemas que se formulan anteriormente a la solución, en el momento de la solución y después de la solución de un problema dado.

Otra clasificación recogida tanto en Silver (1995) como en Stoyanova (1998) está realizada tomando en cuenta la información que se le da al estudiante cuando se le propone la tarea: a) solamente se requiere que el estudiante proponga problemas (situación libre); b) que proponga un problema que responda a una respuesta dada; c) que se proponga un problema a partir de una cierta información proporcionada; d) proponer problemas teniendo en cuenta una situación; e) inventar problemas que se puedan resolver con un cálculo dado.

Como conclusión, Christou et al, (2005) establecen que hay una variedad de formas por las que proponer la tarea y que cada una de ellas proporcionará una constatación del proceso de invención de problemas con diferentes matices e informaciones. Estos autores señalan la necesidad de un marco teórico que pueda ser utilizado en las respuestas de una amplia gama de tareas y de diferentes grupos de edad, de manera que proporcione sistematicidad a las investigaciones. Proponen un modelo compuesto de cuatro pasos que se pueden dar cuando un sujeto plantea problemas: a) edición de información, b) selección de información cuantitativa, c) comprensión y organización de información cuantitativa y d) traducción (traslación) cuantitativa de una forma de representación a otra. En este modelo, la edición de información cuantitativa está asociada a situaciones libres, o sea, tareas que requieren que los estudiantes planteen problemas sin ninguna restricción. La selección de la información cuantitativa se asocia con tareas que requieren que los estudiantes planteen preguntas o problemas que se ajusten a respuestas dadas, actuando dichas respuestas como una restricción. Comprender información cuantitativa se refiere a tareas en las que los estudiantes plantean problemas a partir de cálculos matemáticos dados. Traslación (traducción) de información cuantitativa, requiere que los estudiantes planteen problemas apropiados en relación con gráficos, diagramas o cuadros dados.

Por su parte, Santos (2001) presenta cuatro estrategias que ayudarán al profesor a iniciar a sus alumnos en la invención de problemas:

1) Estrategia espontánea: a partir de una situación significativa para los niños, se iniciará un debate en torno a la misma, que permita desarrollar un proceso de problematización.

2) Estrategia de tema generativo: los alumnos eligen una temática y a partir de ella investigan los datos.

3) Estrategia de incentivo: ahora es el profesor el que elige un tema de contenido matemático para el debate, se trata de motivar a los niños para que formulen preguntas relacionadas con el tema.

4) Estrategia de analogía: a partir de un problema conocido se solicita presentar problemas semejantes.

II.5.4. INVENCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA

En relación con la enseñanza sobre la invención de problemas, Craig (1995) propone que la instrucción en invención de problemas en la escuela se haga desde la etapa de educación infantil. El papel del profesor en la invención de problemas aparece en el estudio de Leung y Silver, (1997) quienes afirman que para que los alumnos sean instruidos satisfactoriamente en la invención de problemas matemáticos, el profesor ha de tener un alto nivel de habilidad planteando problemas. Para ello, en la formación del profesor ha de estar incluido aprender a formular preguntas adecuadamente y motivar a los estudiantes para que inventen preguntas y las respondan correctamente.

Este último hecho coincide con el señalado por English (1997b). Abu-Elwam (1999) propone al profesorado estrategias para enseñar la invención de problemas. Invita a que incentiven a los niños a inventarse problemas con objeto de utilizarlas en actividades cotidianas: para hacer un concurso, para presentárselo a un amigo, etc.; otra propuesta es que a partir de un problema dado, el alumno se invente otro modificando u obviando preguntas o datos del enunciado.

Lin (2004) basándose en los beneficios que aporta la invención de problemas aconseja que el profesor adquiera un compromiso para incluir esta actividad de aprendizaje, lo que exigirá que el profesor conozca estrategias para presentárselas a sus alumnos con el fin de ayudarles en la tarea de inventar problemas. El maestro puede utilizar el conocimiento de los niños sobre sus actividades diarias y conseguir que los estudiantes identifiquen situaciones matemáticas en ellas. Este establecimiento de conexiones entre las matemáticas y la realidad reporta una habilidad importante en la exploración de la matemática.

La invención de problemas por los estudiantes cubre un amplio rango de actividades con significados variables en diferentes disciplinas que conllevan resolución de problemas que comprenden desde los bien definidos a los ambiguos, en un contexto simulador de laboratorio o en situaciones de la vida real. Esto obliga a que la evaluación de la capacidad de inventar problemas deba de ser un proceso, más que producto, mostrando evidencias del pensamiento individual sobre tareas ligadas a la resolución de problemas.

II.6. A MODO DE CIERRE

En este capítulo hemos presentado aspectos teóricos sobre los problemas, la resolución y la invención de problemas, extraídos de la consulta de fuentes bibliográficas de la Didáctica de la Matemática, y áreas afines. Se ha delimitado, por tanto la base que fundamenta esta investigación y los elementos que van a servir de referencia para realizar el análisis de los datos.

Para concluir y a partir de lo presentado, recogemos algunas consideraciones adoptadas en este trabajo:

Problema: una proposición, o historia, expresada mediante un texto oral o escrito, unos datos declarados que formarán parte de dicha historia, una meta implícita en o los interrogantes del problema, una relación existente entre los datos y los interrogantes, y un procedimiento implícito mediante el cual se llegará a dar respuesta a los interrogantes.

Los problemas los vamos a considerar de dos tipos: a) *simples:* una sola operación de dos cantidades y b) *compuesto:* más de una operación, pudiendo ser ambas del mismo tipo (Ej., dos sumas). No distinguimos entre etapas y pasos.

Para los problemas de estructura aditiva adoptamos la clasificación en cuatro tipos: cambio, combinación, comparación e igualación así como las diferentes tipos de cada uno de ellos recogidos en las Tablas II.1, II.2, II.3 Y II.4.

Para los problemas de estructura multiplicativa adoptamos la clasificación de Castro (2001) siguiente, anteriormente descrita: grupos iguales, de tasas, de comparación aumento-disminución, de combinación y de producto de medidas.

CAPÍTULO III

ESTUDIOS PREVIOS

En este capítulo presentamos una síntesis de los estudios previos sobre invención y resolución de problemas que hemos identificado en la búsqueda bibliográfica realizada. La información que aquí se recoge permite detallar el estado de la investigación en relación con el problema de investigación de esta tesis. Así mismo, junto al marco teórico detallado en el capítulo previo, delimita el área de estudio dentro de la cual se enmarca este trabajo.

III.1. INVESTIGACIÓN SOBRE INVENCIÓN DE PROBLEMAS

La formulación de problemas, si bien es reconocida como uno de los campos de investigación sobre problemas (Castro, 2000) ha recibido poca atención explícita en la investigación. Sobre este particular en 1979 Getzels señaló que existían docenas de afirmaciones teóricas, cientos de instrumentos psicométricos y miles de estudios empíricos sobre resolución de problemas, pero pocos y nada sistemáticos estudios sobre invención de problemas (Kilpatrick, 1987). La ciencia cognitiva provee de algunas ideas sobre formulación de problemas pero mucha de la literatura está relacionada con la reformulación de problemas ya formulados o de subproblemas y problemas relacionados. Más recientemente, Cruz (2006) analiza la producción en investigación sobre invención de problemas en comparación con resolución de problemas, entre los años 1975 y 2003, tomando como referencia la base de datos MATH-DI. En dicha base de datos encuentra 109.511 registros de los cuales solo 1.257 incluyen en la lista de palabras clave «problema posing».

La Figura III.1 muestra la comparación resultante de dicho estudio. Este análisis junto con otras reflexiones teóricas, lleva a Cruz a asegurar que a pesar de su importancia, la invención de problemas no ha sido totalmente tratada como parte del currículo de matemáticas y tampoco la investigación relacionada con el tema ha sido suficientemente sistemática.

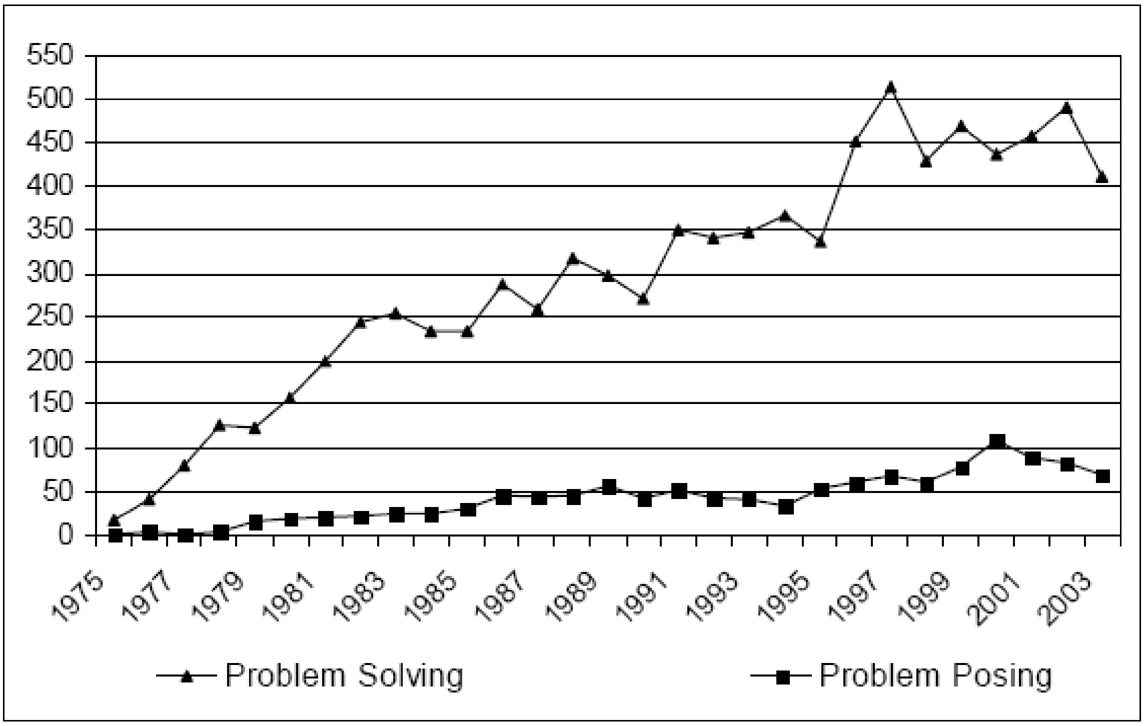


Figura III.1. Comparación de los artículos sobre Problem Solving y Problem Posing aparecidos en MATH-DI entre los años 1975 y 2003.

Como sugiere la Figura III.1, es sobre la década de los ochenta del siglo pasado cuando comienza a investigarse acerca de la invención de problemas, siendo la producción desde entonces continuada aunque bastante tímida. Según Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi y Sriraman (2005) y Pelczer, Voica y Gamboa (2008) pueden distinguirse tres líneas de estudio principales en las investigaciones realizadas. La primera línea se interesa por la relación entre la invención de problemas, la capacidad matemática de los sujetos y la resolución de problemas. En esta línea se sitúan las investigaciones de Cai (1998), English (1997a, 2003), Leung (1996), Mestre (2002), Silver (1994) y Silver y Cai (1996). Una segunda línea de trabajo se centra en las habilidades y procesos implicados en la acción de proponer problemas.

Tienen cabida aquí los trabajos de English (1997a, 1997b, 1998), Marshall (1995) y Silver y Cai (1996). La tercera línea trata las clasificaciones de tareas sobre invención de problemas. En este bloque están los trabajos de Lowrie (1999), Silver (1995) y Stoyanova (1998).

Indican los autores que si bien estas líneas son identificadas por estas etiquetas, las investigaciones recogidas en ellas son más ricas y tratan un abanico más amplio de aspectos a estudiar, respondiendo a un gran número de preguntas e inquietudes.

Partiendo de esta misma asunción, en nuestro caso presentamos las diversas investigaciones sobre invención de problemas que hemos consultado en el desarrollo de este trabajo, organizadas de acuerdo a dos criterios: el tipo de sujetos—escolares o profesores en formación—, y el foco de la investigación, distinguiendo entre: a) Invención vinculada a la resolución; b) Habilidades en los procesos de invención y c) Invención relacionada con la instrucción.

Recogemos a continuación un resumen de dichas investigaciones para establecer qué se ha trabajado en esta temática y cuál es el estado actual de la cuestión.

III.1.1. INVENCIÓN DE PROBLEMAS POR ESCOLARES

En este apartado sintetizamos las investigaciones sobre invención de problemas que hemos consultado en las que los sujetos participantes en el estudio son escolares.

Invención vinculada a la resolución

La invención de problemas aparece, en ocasiones, como una variable que permite predecir la capacidad de un individuo para resolver problemas o mejorar dicha capacidad. Kilpatrick (1987) detalla que los estudiantes que son capaces de inventar problemas matemáticos son buenos resolutores de problemas.

Silver (1994) proporciona evidencia de que el planteamiento de problemas tiene una influencia positiva en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas. Asegura que la tarea de formular problemas es fundamental dentro de la disciplina de las matemáticas y expone varias razones por las que la invención de problemas es beneficiosa tanto para los alumnos como para los profesores: 1) está relacionada con la creatividad del individuo, 2) es un instrumento que hace que los estudiantes sean mejores resolutores de problemas, 3) ayuda a que los estudiantes comprendan mejor los conceptos y procesos matemáticos, 4) mejora la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas y 5) ayuda a los alumnos a convertirse en aprendices autónomos.

Silver y Cai (1996) reportan una investigación realizada sobre invención de problemas utilizando 509 sujetos de sexto y séptimo grado a los que se proporciona una historia y se les pide que escriban tres preguntas que se les pueda dar respuestas a través de la historia planteada. Se analizaron los problemas propuestos considerando tres niveles: a) si las respuestas eran o no matemáticas, o se trataba de una declaración; b) para los problemas matemáticos, si se podían solucionar o no con los datos proporcionados y c) un análisis lingüístico sintáctico para los problemas resolubles, su estructura semántica. Analizaron, así mismo, la relación entre la capacidad de proponer problemas y la de resolver problemas. Entre los resultados de la investigación figura que los sujetos, ante una situación conocida, generaron un gran número de problemas que se podían resolver, muchos de ellos eran sintáctica y semánticamente complejos. Por ejemplo, inventaron problemas donde una solución dependía de otra previa que tenían que averiguar. Por otra parte, los sujetos considerados buenos resolutores generaron mayor número de problemas y más complejos que los sujetos considerados malos resolutores. Otro resultado de este estudio es que el desempeño en la resolución de problemas de los estudiantes está fuertemente correlacionado con su rendimiento en planteamiento de problemas.

Cai (1998) presenta un trabajo en el que se estudia y compara la capacidad de proponer y resolver problemas de 181 estudiantes de Estados Unidos y 223 de China, de sexto grado. Este estudio es continuación de la investigación de Silver y Cai (1996), anteriormente citada, y de otros trabajos que desarrollaron para examinar el pensamiento y razonamiento de los estudiantes tanto de Estados Unidos como de China. A los estudiantes se les suministró una prueba escrita en la que aparecen: a) cuatro ejercicios, uno para cada una de las cuatro operaciones básicas, algunos con números enteros y otros con decimales; b) una tarea en la que se presenta un patrón puntual (secuencia cuadrática) y se pide continuar el término siguiente y el término séptimo; c) un problema que se puede resolver con una división (de reparto) en el que se ha de considerar la división por exceso y d) una tarea para inventar problemas teniendo en cuenta una secuencia puntual. Las respuestas correspondientes a la invención de problemas se clasificaron en problemas de extensión y de no extensión, según si en el problema inventado extienden el patrón de la serie o solo consideran los términos dados. En los dos casos se distinguen tres tipos: factual (¿cómo es una determinada figura?, ¿cuántos puntos hay en una determinada figura?), comparativo (¿cuántos puntos hay en una figura determinada más que en otra?) y regla de formación de la secuencia (¿cuál es la regla que permite pasar de una figura a otra?). Entre los resultados obtenidos en dicho análisis señalamos que encontraron un comportamiento similar entre los dos grupos de estudiantes, americanos y chinos.

Cai y Huang (2002) continúan analizando el estudio realizado a los alumnos chinos y estadounidenses de sexto grado sobre el tipo de pensamiento que ponen de manifiesto al generar problemas y la relación existente entre la invención de problemas y su resolución. Los alumnos chinos tuvieron mejores resultados que los estadounidenses. Los autores manifiestan que esto es debido a que los niños estadounidenses prefieren elegir estrategias concretas y representaciones gráficas con dibujos frente a las estrategias abstractas y representaciones simbólicas que utilizan los chinos. Los investigadores aseguran que si todos los alumnos eligieran la misma estrategia no habría diferencias significativas entre los estudiantes de los dos países. Tanto los niños chinos como los norteamericanos inventaron problemas de distintos tipos, pero la relación entre el problema planteado y su resolución fue mayor en los niños chinos. Los autores concluyen que normalmente es más fácil resolver problemas que inventarlos y lo justifican por la falta de práctica que tiene los sujetos sobre esta actividad. Así mismo reconocen el impacto beneficioso de la invención de problemas sobre la resolución de los mismos.

Lowrie (2002) reporta una investigación sobre invención de problemas en la que estudia la capacidad de niños de seis y de ocho años de edad, que no habían sido expuestos previamente a situaciones de enseñanza-aprendizaje sobre invención de problemas. En el aula los alumnos estaban asistidos por un estudiante para profesor. A los niños se les indicaba que ellos debían de resolver el problema que plantearan por lo que se establecieron vínculos entre la resolución de problemas y planteamiento de problemas. Los estudiantes trabajaron una hora a la semana durante cinco semanas. La primera sesión se centró en hablar sobre plantear un problema, discutir sobre los requisitos necesarios para su resolución, resolver el problema, y una reflexión sobre la manera de resolver los problemas.

El formato de la segunda sesión permitió a los niños descubrir las relaciones entre los problemas planteados y la resolución de los mismos y al estudiante para profesor, obtener información sobre la percepción que tienen los niños sobre la resolución de problemas y sus preferencias con respecto a la estructura de los problemas. Durante las sesiones siguientes el estudiante para profesor tomó un papel activo en el trabajo sobre formulación de problemas.

Entre los resultados que Lowrie (2002) obtiene, señalamos los siguientes: todos los sujetos de primer y tercer grado participantes en el estudio generaron problemas aritméticos, muchos de los cuales requerían el cálculo numérico para obtener la solución. La mayoría de los niños generó problemas verbales tradicionales cuando se les propuso por primera vez que “inventasen un problema de matemáticas que quisieran solucionar". El autor considera como no tradicionales los problemas que tienen más de una solución, es posible utilizar diferentes estrategias adecuadas para solucionarlo o requieren más de la manipulación que de las operaciones (por ejemplo, medir la superficie del piso de un aula utilizando como unidad de medida un folio).

Todos los sujetos identificaron el tipo de operación aritmética necesaria para dar respuesta al problema planteado aunque algunos no llegaran a la respuesta correcta. Se observan diferencias entre el tipo de problemas que los estudiantes propusieron en la primera sesión y en sesiones posteriores, apareciendo más problemas de los considerados no tradicionales, lo que evidencia que las sesiones de enseñanza tuvieron un impacto inmediato sobre esta capacidad de inventar problemas.

Por último Lowrie manifiesta que la invención revierte en la comprensión de problema por parte de los niños, ya que la invención de problemas conlleva: 1) la identificación de los componentes que constituyen un problema, 2) el conocimiento del contenido matemático presente en el enunciado y 3) la elección adecuada de la operación aritmética que soluciona el problema. Su investigación también deja patente la fuerte relación existente entre la invención y resolución problemas y corrobora los resultados obtenidos en un análisis anterior que realizó en 1999, donde explica que las producciones que realizan los alumnos son análogas a las que hacen en clase, pero que con la ejercitación de esta tarea, los niños terminan inventando problemas que presentan preguntas más difíciles.

Carlson y Bloom (2005), así como Cifarelli y Cai (2005), observan que cuando los estudiantes se enfrentan al desafío de resolver un problema cuestionan sus acciones y objetivos, esta situación les conduce a la formulación de un nuevo problema. Por tanto advierten que la invención de problemas ayuda al estudiante a progresar en el proceso de resolución de problemas. Sin embargo, el estudio reciente de Penalva, Posadas y Roig (2010) manifiesta que no está clara la relación entre la resolución y el planteamiento de problemas. Se basan en los resultados obtenidos de su investigación, en la que proponen a 156 estudiantes universitarios de Ciencias Empresariales, una tarea en la que tenían que resolver un problema e inventar otro a partir de una situación dada que contuviesen conceptos de probabilidad. Los autores partían de dos objetivos, uno averiguar cómo conocían y usaban los alumnos los conceptos probabilísticos y otro obtener información sobre cómo plantean los estudiantes problemas de probabilidad, sin haber tenido una instrucción previa en la invención de problemas. Con los resultados obtenidos trataban de averiguar si había relación entre la resolución y la invención de problemas. La investigación concluye que existe una relación compleja entre la manera de resolver y formular problemas y no se encuentra un vínculo entre los buenos resolutores de problemas y los que mejor inventan problemas. Estos resultados son contrarios a los obtenidos por Cai (1998), Leung (1996), Silver (1994) y Silver y Cai (en 1996), aunque se asemejan a los presentados por Crespo (2003) quien afirma que un buen resolutor de problemas no tiene por qué ser un buen inventor de problemas.

Habilidades en los procesos de invención

Krutetskii (1976) y Ellerton (1986) estudian dos grupos de alumnos con diferente nivel de habilidad matemática comparando sus producciones sobre la generación de nuevos problemas a través de una prueba escrita. Sus análisis determinan que los alumnos con talento matemático son buenos proponiendo problemas y concluyen que hay relación entre la habilidad para proponer nuevos problemas y el grado de creatividad y competencia matemática.

Los estudios de English (1997a, 1997b, 1998) que versan sobre la capacidad de estudiantes de tercer, quinto y séptimo grado para generar problemas, muestran que los estudiantes de tercer grado, sujetos de dicho estudio, sólo crearon varios problemas de la categoría de cambio/parte-todo, por alteración de los contextos de unos problemas originales dados, centrándose en el funcionamiento y no en la estructura semántica de los problemas. La autora concluye que la comprensión de la estructura semántica de los problemas parece ser resultado de la instrucción. Los niños de quinto y séptimo grado, que participaron en programas específicos de invención de problemas, mostraron mayor facilidad en la creación de problemas solubles que sus homólogos que no participaron. La mayoría de los estudiantes participantes en el programa enunciaron problemas en los que intervenían relaciones semánticas más complejas. Los alumnos de quinto grado del grupo experimental mejoraron sus capacidades para modelizar[5] un nuevo problema en una estructura dada y en diversidad de contextos y de historias del problema. Algunos alumnos de quinto y séptimo grado desarrollaron la capacidad de percibir la estructura del problema como algo independiente de un contexto particular, lo que les brindó mayor flexibilidad para inventar problemas.

Marshall (1995) analizó las producciones de los estudiantes tomando en cuenta las estructuras semánticas y encontró que la mayoría de los estudiantes plantearon problemas matemáticos sintáctica y semánticamente complejos cuando la situación presentada era estimulante para ello.

Luque (2004) realiza un trabajo sobre la capacidad de alumnos de secundaria de inventar problemas en cuyo enunciado y resolución involucrasen fracciones.

Realiza una prueba escrita a un grupo de alumnos de tercer curso de secundaria en la que se les pide que inventen dos problemas en los que aparezcan fracciones, siendo el segundo de ellos muy difícil. Estos dos problemas además tenían que ser resueltos por el propio estudiante. Posteriormente se llevaron a cabo diez entrevistas a algunos de los estudiantes para indagar más en sus respuestas. Los datos proporcionaron, entre otras evidencias, que menos de la mitad de los alumnos inventaron un primer problema (el resto no dieron respuesta alguna) y de ellos solo una cuarta parte inventó un problema difícil. Consideran que un problema es difícil cuando tiene muchas operaciones o los números implicados tienen muchas cifras. En el análisis de los 22 problemas propuestos de destaca que 20 son de estructura aditiva y 2 de estructura multiplicativa. Las fracciones son utilizadas con significado de relación parte/todo y operador.

Burçin (2005) realiza su trabajo doctoral con la intención de estudiar si la invención de problemas favorece en los alumnos una actitud positiva hacia la probabilidad y la mejor

[5] Numerosas investigaciones que ponen su centro de interés en la modelización se basan en la invención de problemas por parte de los sujetos. No vamos a considerar en este trabajo dichas investigaciones.

comprensión de la misma. Para ello tomaron dos grupos de estudiantes como muestra. En el primero de ellos se realizó instrucción en invención de problemas y en el segundo se siguió la metodología tradicional para la enseñanza de la probabilidad. Se observó que el primer grupo presentaba mayores logros y mejores resultados que el que había recibido una instrucción tradicional.

Nicolaou y Pilippou (2007) llevan a cabo un estudio con 87 estudiantes de quinto y 87 de sexto grado tratando de explorar relaciones entre sus creencias sobre su eficacia en inventar problemas, su habilidad inventando problemas y su competencia matemática. A los sujetos se les aplicó un cuestionario cuyas tres cuartas partes estaban destinadas a medir sus creencias sobre su eficacia en la invención de problemas y la cuarta parte restante a medir su habilidad en inventar problemas. A partir de un dibujo proporcionado como estímulo, los estudiantes debían inventar dos problemas, uno que se resolviese con la operación 2:3 y uno que estuviese basado en un patrón numérico. Un análisis clúster de los datos basado en las tres variables (habilidad para proponer problemas, eficacia en proponer problemas y complejidad de los problemas propuestos) dio seis grupos de alumnos. De cada uno de los grupos se seleccionó un alumno al que se entrevistó. Entre los resultados que obtuvieron se encuentra una alta apreciación de su eficacia para proponer problemas tanto desde el resultado del cuestionario como desde las entrevistas y una modesta habilidad para proponer problemas.

La eficacia en proponer problemas estaba altamente correlacionada con el logro en matemáticas de los estudiantes. Las entrevistas confirmaron los resultados estadísticos obtenidos.

Alias, Ghazali y Ayub (2009) reportan un trabajo llevado a cabo con estudiantes de 8-9 años de edad de tres clases con competencia matemática diversa. Se les propusieron sentencias numéricas de sumas y restas de uno, dos y tres dígitos sobre las cuales debían inventar un problema que pudieran resolver con cada una de dichas sentencias. Los autores analizan las respuestas correctas atendiendo a la estructura semántica. Los resultados mostraron que: 1) a medida que avanza el curso escolar los niños inventan problemas más complejos, 2) los estudiantes se encuentran cómodos en la realización de esta tarea, 3) la mayor parte de los estudiantes inventan problemas basados en sus experiencias personales y 4) las estrategias utilizadas por los alumnos para inventar problemas contribuyen a que éstos sean más competentes en la resolución de problemas.

Invención relacionada con la instrucción

En este apartado distinguimos tres líneas de trabajo según si los estudios abordan la invención de problemas haciendo uso de tecnología o se centran en la invención como evaluación o como método de enseñanza. El objetivo común de estos trabajos es indagar en cómo la invención de problemas influye en el aprendizaje matemático.

Invención usando tecnología

Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi (2005) presentan una investigación sobre la utilidad de herramientas tecnológicas en la invención y resolución de problemas de geometría. Concluyeron que el software de geometría dinámica es un instrumento útil en la resolución e invención de problemas provocando que el alumno realice experimentos, conjeturas y generalizaciones.

Birch y Beal (2008) presentan una experiencia donde trabajan la invención de problemas a partir del sistema tutorial “Animal Watch”. Estos autores observaron que los estudiantes aprendieron sobre animales y utilizaron la invención de problemas en su aprendizaje. Los resultados avalan que la motivación del estudiante aumenta cuando inventa problemas a partir de situaciones reales y facilita el aprendizaje tanto de contenidos matemáticos como de otras disciplinas.

Nakano, Hirashima y Takeuchi (2002) desarrollan un programa relacionado con la invención de problemas verbales de adición y sustracción denominado “Intelligent Learning Environment”. Cuando el aprendiz propone un problema del tipo señalado el programa detecta si hay error y ayuda en su corrección. El estudio realizado implica la realización de pretest y postest antes del uso del programa para probar su eficacia y efecto en las producciones de los alumnos. También realizan encuestas de satisfacción a los alumnos y a los profesores sobre el uso del programa. Los resultados obtenidos son muy satisfactorios.

Invención como evaluación

Cobo, Fernández y Rico (1986) desarrollaron un trabajo de investigación con alumnos de educación primaria en el que la invención de problemas se presentaba como una tarea pensada para evaluar el uso que hacen los alumnos de los números en el contexto de la invención y resolución de problemas, el significado atribuido a los mismos y las relaciones que se establecen entre ellos, ya sea dentro o fuera de las operaciones. Se pretendía evaluar la percepción de las cantidades que los niños tienen o elaboran en el contexto de la resolución de problemas. Sobre la invención de problemas se plantearon una serie de requisitos necesarios para el éxito de la tarea:

- La formulación de problemas se debía plantear dentro de un contexto real, ya sea de compra-venta o cualquier otro aspecto que interese a los niños. Podía ser un tema propuesto por ellos.
- La situación debía ser original y ajena a cualquier situación escolar.
- El alumno había de estar en una situación que favoreciera la invención del enunciado y permitiera su resolución.
- Debía de resultar de interés para los niños.
- Las cantidades involucradas debían ser de un tamaño dentro del rango que los alumnos de cada curso escolar dominaran.
- La situación podía incluir objetos concretos de fácil manipulación.
- La situación debía ser tan amplia y rica en posibilidades que permitiera la participación de los niños de primero a sexto curso.
- Debía permitir la identificación de las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos, desde aspectos elementales hasta aquellos más elaborados, que permitieran describir desde las percepciones más simples de las cantidades hasta las más complejas que requieren una explicación más profunda.
- Debían implicar el uso de los conocimientos escolares para plantear y resolver problemas.
- Había de poder ocurrir en la vida común de una persona.
- Debía plantearse con cantidades discretas, ya que el estudio partía de trabajos previos referidos a la estimación en cantidades discretas, la inducción en la sucesión de series numéricas y en el razonamiento proporcional.

En 1998, Cázares, Castro y Rico a partir de situaciones de compra-venta analizan las producciones de un grupo de alumnos de todos los cursos de primaria y establecen cuatro niveles de desarrollo evolutivo de la competencia aritmética de los estudiantes en el proceso de invención de problemas aritméticos:

1. Ausencia de enunciado: dentro de este nivel consideran: a) representación gráfica de los objetos que se muestran, y b) cuestionamientos sobre los objetos y escritura de números.
2. Enunciado simple de problemas de estructura aditiva. Subdividiéndose este nivel en tres: a) enunciado incipiente, b) enunciado completo y c) enunciado de dos o más etapas.
3. Enunciado de problemas de estructura multiplicativa. Contiene dos categorías: a) enunciados de una etapa, y b) enunciados de dos o más etapas y
4. Operatividad de los problemas aritméticos escolares.

Mestre (2002) utiliza la invención de problemas como herramienta para el estudio de procesos cognitivos, analizando a través de esta tarea la transferencia de conceptos en diferentes contextos para identificar el conocimiento de los estudiantes, el razonamiento, y su desarrollo conceptual. En esta investigación participan estudiantes universitarios tras cursar una asignatura de introducción a la física. El estudio propone dos tareas. En la primera se presenta a los estudiantes una historia acompañada de un diagrama a partir de la cual se les pide que inventen problemas semejantes a los de los libros de texto, que tengan que resolverse con algún concepto físico como por ejemplo la ley de la conservación de la energía de Newton. La segunda tarea requiere que los participantes se inventen un problema a partir de un concepto físico dado. Los resultados indican que la invención de problemas es un instrumento evaluador de la comprensión de los conceptos físicos que tienen los estudiantes y que esta tarea posee una alta capacidad de transferencia de conocimientos. Advierten que encuentran en muchos casos invenciones que presentan fallos en la comprensión del concepto.

English (2003) en sus investigaciones pone de manifiesto que la invención de problemas proporciona una oportunidad para indagar sobre la comprensión de los estudiantes de los conceptos matemáticos y sus relaciones.

Sheikhzade (2010) reporta dos experimentos con estudiantes de noveno grado. En el primero de ellos a seis estudiantes les proporcionó una historia acompañada de un diagrama y les propuso plantear y resolver problemas con conceptos específicos en el contexto de entrevistas individuales de 50 a 60 minutos de duración. El autor analiza la comprensión de la tarea por parte de los estudiantes, los problemas propuestos por los sujetos y su capacidad para resolverlos. En concreto distinguió las siguientes variables: a) el número de problemas propuestos por cada individuo; b) el número de problemas que podían resolver; c) el número de problemas que se podían resolver con el concepto específico y d) el número de problemas de éstos últimos que el sujeto resolvía adecuadamente.

En el segundo experimento, a través de entrevistas de 60 a 70 minutos de duración, propuso a otros seis estudiantes que inventasen problemas similares a los que aparecen en los libros de texto. Seguidamente debían resolver los problemas propuestos. El análisis de la primera parte se hace de acuerdo a las mismas cuatro categorías del primer estudio. Un segundo análisis se centra en caracterizar el contexto en que cada problema se ha propuesto. Un tercer análisis versa sobre las explicaciones que dan los estudiantes en la entrevista sobre su interacción con dichos contextos y de su comprensión de cómo y por qué aplican conceptos y principios para resolver los problemas.

En ambos experimentos encontraron que aproximadamente la mitad de los problemas propuestos se podían resolver por el principio específico del contexto propuesto. En menos de un tercio de los problemas formulados en ambos experimentos, los sujetos dan una respuesta adecuada a cómo los problemas serán resueltos por el principio específico. En las conclusiones se indica que tanto la resolución como la invención de problemas son herramientas potentes para evaluar la comprensión de los estudiantes y su habilidad para transferir conocimiento de unos contextos a otros.

En el mismo año Alexander y Ambrose llevan a cabo una investigación con quince alumnos de los últimos cursos de educación primaria y uno de secundaria, a los que se les pide que inventen problemas a resolver con la suma de fracciones 1/2 + 2/3. El estudio revela que de los dieciséis alumnos, trece redactaron un enunciado y tres estudiantes no lo hicieron alegando que se trataba de una tarea demasiado difícil. Los estudiantes utilizaron mayormente los significados de área y de conjunto y situaciones relacionados con alimentos redondos: pizza, galletas, queso, tartas y manzanas. Entre los errores cometidos por los estudiantes destacan la inconsistencia de unidades a lo largo del problema (algunos estudiantes cambiaron la unidad de referencia) y la acción referida en el problema (se plantearon problemas resolubles mediante restas, productos o divisiones). Los problemas mostraron que los estudiantes tenían una visión limitada de las fracciones. Las autoras señalan que la invención de problemas les ayudó a conocer el grado de comprensión que tenían los estudiantes sobre el concepto de fracción y sus dificultades, y afirman que la tarea propuesta permite contextualizar significativamente las fracciones, por ello animan a los profesores a utilizar la invención de problemas como herramienta de evaluación.

Invención como método de enseñanza

Santos (2001) estudia la invención de problemas como un método para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al proceso dinámico que se produce en el planteamiento de un problema lo llama problematización. Señala que si este proceso es adecuado, producirá un problema bien formulado que, en el aula de matemáticas, llevará a que los niños adquieran un correcto aprendizaje. Asegura que los factores esenciales de este proceso son la acción, el diálogo, un enfoque de las matemáticas desde fuera, la aceptación del vínculo entre sociedad y escuela, y la reconceptualización de la noción de los prerrequisitos para aprender matemáticas.

Para la autora la acción aparece cuando el alumno experimenta conflictos intelectuales al reflexionar sobre un problema matemático. El diálogo lo interpreta como la escucha paciente por parte del profesor para lograr una buena comunicación con su grupo de alumnos. Considera que un enfoque externo de las matemáticas permite reconocer los aspectos socio-culturales, que constituyen factores importantes en la acción pedagógica de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El vínculo establecido entre la sociedad y la escuela tiene dos significados para la autora; uno, que los problemas de la comunidad educativa deben ser tratados como problemas institucionales y pedagógicos; y otro, que se ha de realizar un esfuerzo en la enseñanza de las matemáticas para que éstas estén relacionadas con la vida cotidiana. En cuanto a la reconceptualización de la noción de prerrequisito para aprender matemáticas propone que el docente no obstaculice la búsqueda de soluciones del alumno imponiéndole que tenga unos conocimientos previos antes de enseñarle temas nuevos. Explica que por ejemplo si los alumnos se enfrentan a problemas geométricos que requieren la comprensión del concepto de área y no lo han trabajado nunca de forma sistemática, es mejor que el profesor primero desarrolle en los estudiantes una noción más intuitiva o concreta de la misma.

III.1.2. INVENCIÓN DE PROBLEMAS POR PROFESORES Y FUTUROS PROFESORES

En este segundo apartado recogemos investigaciones cuyos sujetos de estudio son profesores o futuros profesores y, por tanto, existe la intencionalidad de que el trabajo redunde no sólo en los sujetos participantes sino también en sus alumnos o futuros alumnos.

Invención vinculada a la resolución

Uno de los pioneros en utilizar la reformulación de problemas con el fin de solventar las dificultades en la resolución de problemas aditivos fue Hudson (1983). En sus estudios mostró que para niños de educación infantil, la reformulación de problemas aditivos de comparación, hecha por el profesor, facilitaba la comprensión y resolución de los mismos. En esta misma línea, Jiménez (2008) propone la introducción de problemas de comparación mediante la reformulación del enunciado explicitando mejor la relación *más que* a través de objetos que faciliten la representación del problema.

Davis-Dorsey, Ross y Mirrinos (1991) estudiaron, en niños de segundo a quinto curso de educación de primaria, la influencia que la reformulación y personalización de los problemas tenía en la comprensión y solución de problemas matemáticos. La tarea consistía en modificar los enunciados de los problemas de manera que los nombres de los personajes que aparecían en ellos se sustituían por los de los propios estudiantes. A partir de ahí se presentaba una historia cuyos protagonistas eran los niños. El relato se basaba en los datos que se recogieron en un cuestionario sobre los gustos personales de los alumnos, sus amigos, etc. Los resultados obtenidos les permitieron afirmar a los investigadores que la personalización y reformulación de los problemas incrementaba la motivación en los alumnos, mejoraba su comprensión sobre los enunciados, a la vez que acrecentaba la relación existente entre los esquemas mentales del estudiante y el problema planteado.

En 1999, Abu- Elwan analiza el beneficio que aporta la invención sobre la resolución de problemas en maestros en formación, concluyendo la mejora en su rendimiento en la resolución de problemas. Los objetivos de este estudio eran desarrollar la habilidad de inventar problemas en profesores de grados medios y proporcionar un discurso sobre formulación de problemas que pudiera ser usado por esos profesores en sus aulas. La experiencia se realizó con 60 estudiantes futuros profesores de secundaria separados en tres grupos de 20 estudiantes por grupo. Un grupo actuó de control y en los otros dos grupos se llevó a cabo un tratamiento diferente. El tratamiento en uno de los grupos fue mediante trabajo con problemas de un libro de texto y en el otro grupo el tratamiento se hizo a partir de situaciones semiestructuradas. Se les realizó un pretest a los tres grupos y un postest después de 4 semanas de tratamiento. Los resultados obtenidos muestran diferencias significativas de medias entre pretest y postest de los grupos sometidos a tratamiento, así como diferencias significativas en las medias de los resultados de postest de cada uno de los grupos considerados (con y sin tratamiento).

Lavy y Shriki (2007) exploran los efectos que experiencias en invención de problemas producen en el conocimiento matemático de profesores en formación así como en la resolución de problemas. Para ello utilizan la estrategia "que pasaría si" y, como herramientas de evaluación, los portafolios y las discusiones en clase.

Entre los resultados obtienen que el proceso de inventar problemas propicia en los futuros profesores la consolidación de conceptos básicos de matemáticas, el desarrollo de su habilidad para examinar definiciones y atributos de los objetos matemáticos así como para validar argumentos y apreciar conexiones entre objetos matemáticos, y una mejora en la resolución de problemas.

En 2008, Jacobs y Ambrose llevaron a cabo una investigación donde participaron 65 profesores y 231 estudiantes. El estudio se realizó mediante entrevistas, una por cada estudiante, donde éste mantenía una conversación con un profesor que le presentaba problemas que tenía que resolver. En total se resolvieron 1018 problemas. La investigación aporta pautas de comportamiento que pueden seguir los profesores de matemáticas en la enseñanza de la resolución de problemas entre las que se encuentra la reformulación de problemas. Las autoras presentan ocho categorías de actuación del profesor. Cuatro se refieren al comportamiento que tiene el profesor antes de que el alumno llegue a la respuesta correcta: 1) asegurarse que el niño entienda el problema; 2) hacer cambios en el problema que al reformularlo coincida con otro de menor nivel, estos cambios podían referirse por ejemplo al tipo de número, a su magnitud o a alguna estructura matemática; 3) comprobar que el niño haya resuelto el problema y 4) recordarle al niño que puede utilizar otras estrategias para su resolución. Las otras cuatro corresponden a actuaciones del docente una vez que el estudiante ha alcanzado la respuesta correcta: 5) fomentar la reflexión sobre la estrategia que el niño acaba de terminar; 6) motivar al niño a explorar posibles estrategias múltiples y sus conexiones;

7) promover que el niño piense en la notación simbólica y 8) hacer un repaso de problemas relacionados con el problema que el niño acaba de resolver. Las investigadoras no pretenden que los profesores sigan exhaustivamente estas categorías con sus alumnos sino que las proponen como una guía para que puedan realizar mejor su tarea de enseñanza en el campo de resolución de problemas ya que se tienen evidencias de que cuando se planea previamente la actuación del profesor en el aula, el aprendizaje matemático de los alumnos es más productivo.

Kar, Özdemirb, İpek y Albayraka (2010) estudian la relación entre las habilidades de invención y resolución de problemas, sobre series y secuencias, que muestran profesores en formación observando una correlación significativamente alta.

Chen, Van Dooren, Chen y Verschaffel (2010) trabajan con 128 profesores en formación y docentes en ejercicio de escuelas de primaria en China, sobre la resolución y la invención de problemas de división con resto, que se pueden considerar problemas de la vida real. A los participantes en la investigación se les pidió que resolvieran tres problemas de división con resto, que plantearan un problema a partir de tres expresiones simbólicas dadas y, por último, se les entregaron dos cuestionarios que tenían que evaluar donde estudiantes de primaría habían resuelto un problema y habían inventado otro. Estos autores relacionan las respuestas de los sujetos con la evaluación que hacen a sus estudiantes. Constatan que los profesores se comportan coherentemente tanto al resolver e inventar sus propios problemas, como cuando evalúan los problemas resueltos e inventados por estudiantes de primaria. Con estos resultados manifiestan que existe una correspondencia entre las pruebas que realizan los profesores y las evaluaciones que llevan a cabo.

Habilidades en los procesos de invención

Gonzales (1996, 1998) realiza un estudio exploratorio sobre el proceso de formulación de problemas de profesores en formación tanto de educación primaria como de secundaria. Suministra a los sujetos cierta información contenida en un gráfico a partir de la cual han de inventar cinco preguntas. Su objetivo es dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Qué información de la dada está contenida en las preguntas planteadas en los problemas propuestos por los estudiantes? y ¿Qué tipo de respuesta exigen las preguntas planteadas?

Respecto a la primera pregunta establece cinco categorías: 1) *Dada:* la pregunta hace referencia a la información que se da en la situación matemática; 2) *Modificada:* la pregunta hace referencia a la información que se ha dado y se modifica con un supuesto al plantear la pregunta; 3) *Extendida:* la pregunta hace referencia a información dada pero la magnitud de la misma ha sido notablemente aumentada; 4) *Añadida:* la pregunta hace referencia a nueva información proporcionada en la pregunta planteada. Esta información es etiquetada como “nueva", ya que no se encuentra en la gráfica, sino que ha sido creada por el estudiante y 5) *Otra:* en esta categoría se recogen preguntas que no tenían sentido o no se pudiesen responder por falta de información.

Para responder a la segunda pregunta Gonzales busca patrones entre los tipos de actividades necesarias para responder a las preguntas formuladas por los profesores en formación, estableciendo las siguientes categorías: 1) *Observación:* la pregunta puede ser contestada por la simple lectura o la observación de la gráfica; 2) *Cálculo:* la cuestión se responde mediante operaciones aritméticas; 3) *Traducción:* la pregunta se puede responder haciendo un cambio de una forma de representación a otra; 4) *Interpretación:* la respuesta consiste en hacer inferencias a partir de los datos tal como se presentan en la gráfica; 5) *Solicitud:* para responder es necesario reducir la situación dada a una familiar; 6) *Evaluación:* la cuestión requiere hacer un juicio crítico que se basa en análisis de datos; 7) *Percepción*: la pregunta requiere centrar la atención en determinados aspectos de la gráfica y 8) *Otros*: esta categoría recoge aquellas preguntas que no tenían sentido, que no se podían responder con la información dada o presentaban cualquier otra carencia.

La comparación entre las respuestas de los profesores en formación de primaria y secundaria arrojó, entre otra, la siguiente información: el 76% de los futuros profesores de primaria y el 56% de los de secundaria hicieron referencia a la información que aparecía en el gráfico y el 8% y 39%, respectivamente, contenían información modificada, ampliada o añadida. El 16% de las preguntas de los futuros profesores de primaria cayó en el grupo “otros” frente al 5% de las preguntas de los futuros profesores de secundaria. Al 30% de las preguntas del grupo de primaria solo se requiere hacer una observación y dar la respuesta directamente de la gráfica, mientras que sólo el 9% de las preguntas del grupo de secundaria estaban en esta categoría. Un alto porcentaje de las preguntas de ambos grupos requiere de la realización de algoritmos.

Leung y Silver (1997) realizan una investigación en la que examinan los problemas que proponen un grupo de maestros en formación. La decisión de investigar las respuestas de estos sujetos se basa, según los autores, en la importancia que este conocimiento tiene desde dos ámbitos diferentes. Por una parte conocer la capacidad de los futuros profesores en estas tareas y, por otra, que comprendan que la tarea les puede ayudar en su trabajo profesional. Entre los objetivos del estudio estaba analizar la creatividad de los sujetos en relación con esta capacidad de inventar problemas matemáticos.

Para la ocasión elaboran un test en el que los estudiantes para profesores debían de inventar problemas aritméticos a partir de situaciones presentadas en forma de narración o historia. Analizan el orden de las palabras utilizadas en los problemas, la presencia o ausencia de información numérica específica para poder resolver el problema y presencia, o no, de información numérica irrelevante.

Entre sus resultados encuentran que por lo general los sujetos dan respuestas razonables. Proponen problemas en un 98% de los casos. La mayoría de los problemas propuestos son plausibles, tienen información suficiente y son de varios pasos. Los sujetos de este estudio proponen problemas que no solo son resolubles sino que son un tanto complejos. Cada problema propuesto se analizó como una respuesta independiente. En el análisis de los procesos de invención consideraron grafos para representar los mismos.

Lavy y Bershadsky (2003) y Lavy Shriki (2007) reportan dos estudios sobre generación de problemas de geometría por profesores en formación. En el segundo caso habían recibido formación previa sobre resolución de problemas. los autores clasifican los tipos de enunciados en función del cambio de datos. Los resultados de ambos estudios aportan un conjunto de componentes y organizadores para la categoría de problema propuesto, que sirve al investigador como base para el análisis en las categorías de problemas que son propuestos por los estudiantes. Los investigadores también hacen uso de la estrategia ¿Qué pasa si no? para que fuese usada por los futuros profesores en sus tareas de invención de problemas sobre geometría del espacio.

Ayllón (2005) presenta un estudio a partir de una experiencia llevada a cabo con futuros profesores de educación primaria, en la que se les propone inventar tres problemas aritméticos cuyos datos han de pertenecer, uno al conjunto de los números naturales, otro al de los enteros negativos y otro al conjunto de los números racionales.

Como resultado de los distintos análisis aplicados a los problemas inventados por los maestros en formación obtuvo los siguientes resultados:

La tarea de inventar problemas resultó de gran interés para los alumnos. Mediante esta actividad los futuros profesores adquirieron conocimiento didáctico sobre su labor en el aula relacionada con los problemas. Se obtuvo información sobre los conceptos numéricos y las capacidades que sobre la aritmética y el sentido numérico poseían los profesores en formación. Ningún alumno manifestó haber realizado tal tarea alguna vez, por lo que se consideró que la invención de problemas no es una práctica habitual en los centros educativos. Los maestros en formación tienen capacidad para formular problemas tanto aditivos como multiplicativos, de una o más etapas, pero prefieren al generar sus problemas optar por los aditivos de más de una etapa. Casi todos los problemas inventados pueden ser considerados como “problemas típicos escolares”. El desarrollo de esta actividad ayudó a los estudiantes a comprender qué es un problema y qué características ha de tener.

Chapman (2011) presenta una investigación realizada a 40 maestros en formación sobre invención de problemas y valora la repercusión que tiene esta actividad en el aprendizaje matemático. La tarea se centra en la generación de nuevos problemas y la reformulación de problemas. A los estudiantes, que no fueron instruidos previamente, se les pidió que inventaran un problema partiendo de cada una de las siguientes categorías:(i) libre, (ii) similar a un problema dado, (iii) abierto (con más de una solución), (iv) con diferente estructura semántica que un problema dado pero resoluble con la misma operación, (v) conteniendo un determinado concepto matemático, (vi) formulado a partir de unos datos determinados, (vii) reformulación de un problema dado, (viii) reformulación de un problema mal formulado y (ix) un problema basado en una imagen dada. Los resultados obtenidos evidencian que los problemas inventados estaban influenciados por la experiencia adquirida al resolver problemas, tanto en los conceptos matemáticos elegidos como en la creatividad plasmada en el enunciado. Para la mayoría de los participantes las tareas (iii) y (iv) entraban en conflicto con su experiencia de aprendizaje matemático, generaron problemas cerrados y de una única estructura semántica. Estos hechos implican la necesidad de integrar la invención de problemas como parte del aprendizaje de los profesores en formación, de manera que se establezca un vínculo biunívoco entre la construcción del aprendizaje matemático y la invención de problemas, permitiendo que ambos campos se apoyen mutuamente.

Invención relacionada con la instrucción

Crespo (2003) presenta un trabajo realizado sobre invención de problemas en el que instruye a profesores de primaria en formación sobre la práctica de esta tarea en sus futuras aulas. Entre sus objetivos está el estudiar los cambios producidos en los problemas que proponen para sus alumnos durante la instrucción realizada a través de un curso. Concretamente trata de dar respuesta a las tres preguntas siguientes: ¿Cómo son los problemas que los estudiantes para profesor proponen a sus alumnos? ¿Cómo cambia esta práctica? ¿Qué factores contribuyen a esta práctica? El curso se programó para 11 semanas. Cada semana incorporaba un seminario y una clase de experiencia de campo. En cada seminario a los futuros profesores se les comprometía con quehaceres matemáticos como resolver problemas y discutir soluciones y métodos, y exploraciones pedagógicas consistentes en analizar la importancia de la instrucción sobre problemas, anticipar el trabajo de los alumnos y reordenar los problemas para los diferentes grados. Se trataron tres temas pedagógicos: enseñanza por comprensión, diseño y análisis de tareas matemáticas y dotar de sentido el pensamiento de los niños. El tema matemático fue pensamiento multiplicativo: razonamiento sobre proporción, multiplicación y división, porcentaje y valor relativo.

Los problemas que los profesores en formación enunciaron en las primeras sesiones generalmente admitían una sola respuesta y eran resolubles con un cálculo simple. Los nuevos problemas inventados con posterioridad son etiquetados por la autora como más “audaces” al tratarse de problemas que requieren más que una operación aritmética, problemas abiertos, con más de una solución, que fomentan la exploración y son más complejos desde un punto de vista cognitivo.

Lin (2004) presenta un trabajo realizado con profesores de aula inmersos en un proyecto que trata de realizar una evaluación integral de la instrucción. La participación en el proyecto obliga a los profesores a generar tareas matemáticas que incluyan: a) un método de evaluación que permita a los estudiantes manifestar su fortaleza; b) estimular a los estudiantes a hacer conexiones entre ideas matemáticas; c) promover calidad en la invención de problemas, la justificación y formas de pensamiento; d) generar tareas creativas que unan procesos y conceptos matemáticos; e) generar tareas para evaluar qué y cómo los estudiantes aprenden de una lección. En este trabajo Lin se centra en analizar los problemas propuestos por los estudiantes y las dificultades que los profesores de dichos estudiantes perciben en la realización de la tarea. Las tareas desde las cuales los estudiantes proponían problemas pertenecían a cuatro categorías:1)sentencias numéricas; 2) representación pictórica; 3) lenguaje matemático y 4) colección de varias soluciones tomadas de las lecciones de cada día. Entre las conclusiones destaca que el estudio ayudó a los profesores a entender que el proponer problemas es un proceso natural del aprendizaje de las matemáticas. También se observó que cuando los profesores proponen a los estudiantes tareas de invención de problemas, éstas se convierten en instrumentos útiles para la construcción y comprensión de las matemáticas así como una herramienta de evaluación.

Akay y Boz (2009) analizan las concepciones de un grupo de profesores de ciencias en formación, sobre las ventajas y desventajas del uso de la invención de problemas en la enseñanza. Dichos sujetos habían participado en una tarea de invención de problemas relacionada con el concepto de integral en un curso de Cálculo. Los autores pudieron comprobar que los futuros profesores mejoraban su actitud hacia las matemáticas ya que la invención de problemas merma los temores y ansiedades que con frecuencia provoca esta disciplina, que aumentaba el sentimiento de responsabilidad en ellos como futuros docentes y disminuían los conceptos matemáticos que no entendían bien del todo.

Estos mismos autores en 2010 realizan un trabajo donde investigan la influencia que ejerce la instrucción sobre formulación de problemas sobre la actitud hacia las matemáticas de 82 profesores en formación. Se trata de un diseño experimental con pretest, postest y una instrucción de 60 horas repartidas en 10 semanas. Los datos se analizan mediante técnicas estadísticas y se constata que la actitud de estos estudiantes para profesores hacia la matemática mejora significativamente después de la instrucción.

Un grupo de trabajos con profesores o estudiantes para profesor se centran en el uso de la tecnología en la invención de problemas. Este es el caso del estudio de Yerushalmy, Chazan y Gordon (1990) quienes presentan un trabajo que venían realizando desde 1984 con profesores en formación sobre inventar problemas geométricos en un entorno con “GEOMETRIC SUPPOSERS” teniendo en cuenta consideraciones pedagógicas como preparar tareas que ellos puedan posteriormente llevar a su aula de geometría. Los estudiantes para profesor antes de redactar los problemas tenían que elegir el contenido geométrico del problema y pensar sobre el tipo de problema, la envergadura o posibilidades del problema y la habilidad o formación del estudiante. Posteriormente mientras escribían los enunciados debían considerar cómo plantear el objetivo del problema, una descripción de alguna construcción en el problema, y el proceso de instrucción. Todas estas categorías les sirvieron para analizar el comportamiento de los futuros profesores en actividades de invención de problemas y en el uso del programa informático. Los autores concluyen que el uso de "GEOMETRIC SUPPOSERS" ayuda a los estudiantes en la formulación de problemas.

Abramovich y Cho (2008) recogen una investigación realizada con profesores de primaria en formación los cuales proponían problemas utilizando una hoja de cálculo. Precisan los autores que la hoja de cálculo se puede considerar un soporte cultural pertinente para desarrollar nuevos materiales curriculares para las clases de matemáticas, aprovechable por tanto, en un trabajo de generar problemas. Definen la coherencia didáctica de un problema como la intersección entre la coherencia numérica, la coherencia del contexto y la coherencia pedagógica del problema y analizan los problemas propuestos por los sujetos que participan en la investigación en función de dicha coherencia.

Actuaciones del profesor en la invención

Variados autores que desarrollan investigaciones sobre la invención de problemas presentan afirmaciones sobre el papel del profesor en dicha actividad. Leung y Silver (1997) afirman que para que los alumnos sean instruidos satisfactoriamente en la invención de problemas matemáticos, el profesor ha de tener un alto nivel de habilidad planteando problemas. Para ello, en la formación del profesor ha de estar incluido aprender a formular preguntas adecuadamente y motivar a los estudiantes para que inventen preguntas y las respondan correctamente.

Lin (2004) basándose en los beneficios que aporta la invención de problemas como medio de mejora para la capacidad resolutoria del individuo y su actitud hacia las matemáticas, advierte que el profesor ha de adquirir un compromiso para incluir esta actividad en el aprendizaje de las matemáticas y argumenta que esta inclusión exige que el profesor averigüe estrategias para presentárselas a sus alumnos con el fin de ayudarles a inventar problemas. Abu-Elwam (1999) comparte estas creencias y propone al profesorado estrategias para enseñar la invención de problemas. Invita a que incentiven a los niños a inventarse problemas con objeto de utilizarlas en actividades cotidianas: para hacer un concurso, para presentárselo a un amigo, etc. Otra propuesta es que, a partir de un problema dado, el alumno se invente otro modificando u obviando preguntas o datos del enunciado.

El maestro puede utilizar el conocimiento de los niños sobre sus actividades diarias y conseguir que los estudiantes identifiquen situaciones matemáticas en ellas. Este establecimiento de conexiones entre las matemáticas y la realidad reporta una habilidad importante en la exploración de la matemática. Además de esto, si el profesor anima a los alumnos a formularse preguntas creará un ambiente de confianza para que el niño pueda inventar sus propios problemas (Chua y Yeap, 2008). La invención de problemas obliga al profesor a confiar en los estudiantes, en sus capacidades, en sus recursos y experiencias, haciendo el aprendizaje significativo para ellos (Nixon- Ponder, 1995).

Hsu, Wuc, Wongb, Yanga y Hsud (2005) señalan que la enseñanza de invención de problemas requiere más tiempo de dedicación del profesorado al alumnado, pues igual que la resolución de un problema se puede enseñar a un grupo de alumnos a la vez, esta forma de trabajo no es recomendable en la invención de problemas.

Por esto proponen un sistema metodológico que ayude al profesorado en la instrucción de invención de problemas. Este sistema se limita a inventar problemas que contengan la palabra área y consiste en que el estudiante genere enunciados a partir de la combinación de palabras, y de una herramienta de ingeniería basada en ontologías denominada InfoMap, que ayuda a formular problemas con un determinado concepto matemático. El sistema se estructura en cinco módulos: invención del problema, diagnóstico, base de conocimientos concepto, batería de preguntas, y libreta del estudiante. La base de conocimiento/concepto es una herramienta del sistema que se utiliza para clasificar los problemas que se quieren plantear, por ejemplo, si se trata de hallar el área de un rectángulo a partir de sus dimensiones habría que categorizarlo como problemas de área rectangular. En el momento en que el estudiante inicia la sesión, Infomap presenta un banco de preguntas adecuadas para él que permiten ubicar la tarea a realizar según el contenido matemático elegido. Seguidamente el alumno inventa un problema geométrico de áreas y el programa diagnostica si hay conceptos incorrectos o falta de información en su formulación. El estudiante concluye su trabajo con la revisión y, en ocasiones, con la reformulación de su enunciado en base a la información obtenida sobre los posibles errores cometidos, para finalmente guardarlos en su carpeta de trabajo.

III.1.3. SÍNTESIS

La mayoría[6] de los antecedentes anteriormente recogidos ponen de manifiesto que cuando los sujetos que inventan problemas son escolares, existe una correlación entre la resolución y la invención de problemas. Se afirma que los buenos resolutores formulan problemas más complejos que los que no lo son, y que a los estudiantes les es más fácil resolver problemas que inventarlos debido a la falta de práctica en esta tarea. Los resultados que reportan las investigaciones indican que la resolución y la invención de problemas constituyen instrumentos evaluadores potentes de la comprensión de conceptos matemáticos. Así mismo, se muestra que gran parte de los estudiantes generan problemas basados en sus experiencias personales que se asemejan a los que encontramos en los libros de texto.

Para los investigadores es notable la capacidad de los estudiantes de primaria y secundaria de generar problemas y sugieren que la complejidad de los mismos depende de la instrucción recibida.

Los estudios realizados con profesores y futuros profesores coinciden con los resultados anteriormente expuestos con escolares. Los autores comparten la necesidad de que se instruya a los futuros docentes en la invención de problemas, ya que si éstos tienen un alto nivel de habilidad planteando problemas, podrán motivar y enseñar a sus alumnos a inventar preguntas que puedan resolver adecuadamente. También piden un compromiso por parte de los docentes para que incluyan la invención de problemas en sus clases, asegurando que esta tarea les ayudará a crear un ambiente relajado que merme los temores y ansiedades que provoca esta disciplina, fomentará su confianza en las capacidades de sus estudiantes y mejorará la actitud en los alumnos para el aprendizaje de las matemáticas.

[6] A excepción de los estudios de Crespo, 2003 y Penalva, Posadas y Roig, 2010 que no ven clara la relación entre invención y resolución de problemas.

III.2. INVESTIGACIÓN SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A continuación sintetizamos los resultados de las investigaciones que hemos consultado sobre resolución de problemas aritméticos. Algunos de estos trabajos han sido referidos previamente en el marco teórico. Distinguimos cinco grupos de estudios según los resultados que obtienen: sobre errores al resolver problemas, sobre la comprensión del problema en relación con las operaciones aritméticas, sobre la comprensión del problema en relación con la estructura semántica y sintáctica, sobre factores que condicionan la dificultad de los problemas, y aportaciones sobre perspectivas de investigación.

Así mismo señalamos que si bien para investigar la resolución de problemas se han empleado diferentes metodologías, destaca con mayor frecuencia una aproximación clínica (Wilson, Fernández y Hadaway, 1993). En esta aproximación las tareas de resolución de problemas son propuestas a los estudiantes y se estudia el desempeño de los mismos en dichas tareas. A menudo se les entrevista y se les anima a hablar sobre lo que ellos escriben y a exteriorizar sus experiencias y su proceso de pensamiento. Schoenfeld (1983) indica cómo debe de usarse una aproximación clínica con pares de sujetos en una entrevista, indicando que el diálogo entre estudiantes a menudo sirve para tomar decisiones importantes y tales decisiones raramente son descubiertas a partir de simples protocolos.

III.2.1. INVESTIGACIONES SOBRE ERRORES AL RESOLVER PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Distintos autores utilizan sus investigaciones para analizar las razones por las que la mayoría de los estudiantes comenten errores en la resolución de problemas aritméticos. “Varios estudios sobre resolución de problemas en aritmética han mostrado que la mayoría de los errores que cometen los estudiantes en problemas verbales se debe a la falta de comprensión de la estructura del problema más que a errores de cálculo.” (Castro, 1994, p. 36). Esta afirmación es apoyada por los resultados de los estudios de Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist y Reys (1980), De Corte, Verschaffel y De Win (1985) y Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988), entre otros, los cuales ponen de manifiesto que muchos estudiantes que realizan bien determinados cálculos no resuelven, o cometen errores en la resolución de problemas verbales en los que para obtener la solución sólo se requiere de esos mismos cálculos (Castro, 1994).

En la revisión que hacen Castro, Rico y Gil (1992), sobre los estudios realizados hasta la fecha indicada sobre resolución de problemas aritméticos de enunciados verbales, consideran que éstos responden a cinco enfoques: lingüístico, de variables estructurales, de sentencias abiertas, el enfoque semántico y enfoque de esquemas mentales. Sintetizamos a continuación cada uno de estos enfoques a partir de la información proporcionada por dichos autores. Esta síntesis permite mostrar que la dificultad que un problema presenta para los estudiantes no está determinada solo por la destreza de cálculo que tengan, sino que hay otros muchos aspectos involucrados en los errores que los estudiantes pueden cometer. Como señalan Lindvall e Ibarra (1980) conocer los procesos incorrectos que emplean los estudiantes para resolver tipos específicos de problemas es útil para diagnosticar las habilidades de los niños y para planificar la instrucción. Mulhern (1989) y Rico (1993) hacen su aportación al realizar una revisión de la literatura al respecto.

Enfoque lingüístico

Las investigaciones que se centran en el enfoque lingüístico tratan dificultades como la habilidad lectora, la legibilidad de los textos y los factores lingüísticos. En algunas investigaciones (Monroe y Engelhart, 1933; Reed, 1949) se pone de manifiesto que si la habilidad lectora es buena, la habilidad para resolver problemas verbales aumenta. Aiken (1971) obtiene un coeficiente de correlación significativo entre la habilidad lectora y el éxito en la resolución de problemas.

También se ha estudiado la influencia de la legibilidad del enunciado de los problemas, que aparecen en los libros de texto, en la correcta resolución de problemas (Barnett, 1980).

Enfoque de variables estructurales

El enfoque de variables estructurales fue utilizado por Kilpatrick (1978) y Goldin y McClintock (1980) los cuales se refieren al concepto de variable de tarea como características de los enunciados de los problemas, que asumen un valor particular dentro de un conjunto de valores posibles. Anteriormente Nesher (1976) considera que el problema aritmético verbal puede ser descrito mediante un número finito de características discretas a las que llama variables estructurales. Siguiendo el texto de Castro, Rico y Gil (1992), Puig y Cerdán (1988) clasifican en dos categorías los estudios realizados bajo este enfoque: los que pretenden predecir la dificultad de un problema en función de sus variables estructurales y los que tratan de determinar si una variable concreta afecta de forma significativa al nivel de dificultad del problema. Castro (1994) denomina a la primera categoría análisis global de variables y, a la segunda, análisis parcial de variables.

Las investigaciones que entran en la categoría de análisis global suponen la dificultad de un problema como compendio de las dificultades aportadas por cada una de las variables estructurales. En este grupo, según cita el autor, estarían investigaciones como las de Suppes, Loftus y Jerman (1969), Jerman (1973), Jerman y Rees (1972) y Jerman y Mirman (1974). Estos últimos recopilan las variables estructurales en dos grandes bloques: variables lingüísticas y computacionales. Dentro de las lingüísticas están, entre otras: longitud, palabras, números, oraciones, elementos de las oraciones, signos de puntuación y símbolos. Entre las variables computacionales se encuentran, entre otras: conversión, memoria, longitud y operaciones. Searle, Lorton y Suppes (1974) analizan como posibles factores que afectan a la dificultad de un problema, el número de operaciones y de pasos, la variable longitud, la comprensión de secuencia, pista verbal y conversión. Estos autores ponen de manifiesto la importancia de la variable longitud, donde expresan el gradual desarrollo de los niños en la comprensión de sentencias de menor a mayor número de palabras y la dificultad que tienen para retener sentencias. En su trabajo observaron que sólo las variables operaciones, secuencia y conversión son significativas en su influencia en los errores.

En la categoría de análisis parcial se trata de determinar factores que influyan en el quehacer de los alumnos cuando resuelven problemas. Como ejemplo se recoge el trabajo de Linville (1976) que estudia la dificultad en función del vocabulario y el de Nesher (1976) que trata sobre las variables número de pasos, presencia o no de información superflua, y presencia o no de palabras clave.

Enfoque de sentencias abiertas

El enfoque de sentencias abiertas se refiere a los estudios que tratan sobre las dificultades relativas a sentencias numéricas simples de adición y substracción, siendo el trabajo de Weaver (1971, 1972, 1973) el más representativo de la primera época. Posteriormente, el trabajo de Grouws (1972) analiza el rendimiento en sentencias abiertas de adición y substracción en función del sexo. Posteriormente en 1974 utiliza la técnica de entrevista individual para investigar los métodos que usan los niños al resolverlas. Lindwall e Ibarra (1980) identifican estrategias que no llevan a una solución correcta y la frecuencia con que las utilizan los escolares. El estudio lo realizan mediante pruebas escritas donde los niños han de resolver problemas relacionados con sentencias abiertas. Los autores analizan su habilidad para leerlas y la influencia que tiene el uso de material manipulativo. Por la misma época, Hiebert (1982) estudia las estrategias seguidas por niños de primer grado en la resolución de problemas aditivos con datos menores que 10. Los niños podían utilizar material manipulativo para la resolución de los problemas. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que la posición de la incógnita tiene una influencia sustancial en la conducta que siguen los niños. En Castro, Batanero, Rico y Castro (1991) se pone de manifiesto que la posición de la incógnita repercute significativamente en el nivel de dificultad de un problema. El estudio lo realizan con niños de 10 a 12 años.

Enfoque semántico

El enfoque semántico se refiere a la necesidad de conocer el significado del texto en el que se enuncia un problema verbal para poder resolverlo, ya que se supone una influencia decisiva en la elección de la operación para la resolución del mismo. Las variables de contenido semántico describen los significados de las palabras y de las expresiones matemáticas presentes en el enunciado. Dentro de este enfoque se encuentran investigaciones que tienen en cuenta la inclusión de palabras clave en los enunciados.

Éste es el caso del trabajo de Suppes, Lotus y Jerman (1969) que encontraron en sus investigaciones que la presencia o no de palabras clave no tiene efectos significativos para la dificultad de un problema; resultados que fueron confirmados en los trabajos de Jerman (1973) y Nesher (1976).

Webb (1979) argumenta que los niños han de resolver gran cantidad de problemas con enunciado verbal que estén expresados en un lenguaje natural. Para llegar a la solución correcta han de comprender el enunciado y saber traducir las expresiones matemáticas que aparecen en el problema. Este autor diferencia entre palabras clave y vocabulario matemático. Todo ello hace que las variables semánticas influyan en la dificultad que tiene un problema para ser resuelto.

Puig y Cerdán (1988) señalan el papel que desempeñan las palabras en la elección de la operación que resuelve el problema. Las clasifican en dos tipos: las que tienen una influencia clave en esta elección y las que no la tienen. Las palabras que no desempeñan un papel en la elección de la operación sirven para conectar el problema con la realidad o bien para delimitar el problema dentro de un contexto. Estos autores estudian la influencia de las palabras que son clave en la interpretación del significado de un enunciado, haciendo dos distinciones en base a significados parciales del texto y a un análisis global del mismo (considerando el texto como un todo). El análisis global no considera las palabras clave cómo los únicos determinantes en la interpretación del significado de un problema, mientras que el análisis parcial sí. Los autores Puig y Cerdán concluyen que el análisis más adecuado y actualizado es el global.

Dentro de este mismo enfoque, en otra dirección, está el trabajo de González, Gutiérrez, Rico y Tortosa (1985) quienes estudian el papel de los verbos de acción como determinante en la elección de la operación aritmética para la resolución de problemas.

Enfoque de esquemas mentales

Los enfoques teóricos más utilizados en las investigaciones sobre resolución de problemas se basan en analizar qué esquema mental utiliza el resolutor cuando resuelve un problema. Son importantes las aportaciones que hacen Carpenter y Moser (1982), Nesher (1982), Vergnaud y Duran (1983) y Riley, Greeno y Heller (1983).

Dentro de este enfoque se distinguen dos corrientes: la impulsada por Vergnaud, que utiliza el cálculo relacional como concepto esencial para comprender el funcionamiento cognitivo del sujeto y la corriente basada en las categorías semánticas de los problemas.

III.2.2. COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA EN RELACIÓN CON LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Muchas de las investigaciones que tratan de errores ponen su acento en encontrar la causa que produce el error. Entre ellas destacamos aquí las que relacionan el origen del error con el aprendizaje de los conceptos aritméticos. Investigaciones como las de Carpenter, Hiebert y Moser (1981, 1983) y Carpenter y Moser (1983), ponen de manifiesto la capacidad de los niños de resolver problemas de suma y resta antes incluso de recibir instrucción formal sobre los algoritmos de la estructura aditiva. A su vez manifiestan que muchos de los errores cometidos ante la elección de la operación necesaria (suma o resta) para resolver el problema, los cometen los alumnos que han recibido previamente instrucción formal de los conceptos aritméticos. También observan que los alumnos que han resuelto problemas antes de aprender los algoritmos comenten menos errores cuando elijen la operación adecuada para resolver un problema.

Desde otro punto de vista Mayer (1986a, 1986b), considera que se puede descomponer la resolución de problemas matemáticos en dos partes, una es el proceso de comprensión y la otra el proceso de solución, y que los estudiantes cometen errores en algunos problemas matemáticos debido más a la dificultad en la fase de comprensión que en la fase de llegar a la solución (cálculo).

Se trata en ambos casos de la existencia de una sima entre el aprendizaje de las operaciones aritméticas y las situaciones problemáticas que las mismas pueden resolver. Esta disociación lleva a casos extremos como a que ante un planteamiento (o historia) incoherente, si aparecen números, haya estudiantes que realicen operaciones y encuentren una solución a lo planteado. Este es el caso de la situación "En un barco hay 26 corderos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?" que tiene respuesta por parte de estudiantes después de realizar alguna operación aritmética entre los números que aparecen en el relato.

Una solución que proponen Carpenter et al (1981) para esta situación es introducir las operaciones a partir de problemas verbales, integrando éstos en el currículo, y no usar los problemas como ejercicios de aplicación de los algoritmos ya aprendidos.

III.2.3. COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA EN RELACIÓN A LA ESTRUCTURA SEMÁNTICA Y LA POSICIÓN DE LA INCÓGNITA

Entre los factores estudiados y que repercuten en la comprensión de un problema aritmético está la estructura semántica del enunciado del mismo. Independientemente de las habilidades aritméticas de los estudiantes, hay estudios en los que se manifiesta que los alumnos comprenden y resuelven unos tipos de problemas mejor que otros. Algunos de estos resultados forman parte del marco teórico de este trabajo.

Hay unanimidad entre autores en que los problemas de comparación ofrecen mayor dificultad que el resto de categorías. Por su parte, Bermejo, Lago y Rodríguez (1994), Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999), De Corte y Verschaffel, (1987a) y Lago, Rodríguez y Caballero (1999) dan una explicación al hecho de que los problemas aditivos más sencillos sean los de cambio. Se debe, según los autores, a que hacen referencia a una acción que modifica a una única magnitud.

En la investigación se le ha dedicado especial atención a la estructura semántica de comparación tanto en problemas aditivos como en multiplicativos. En ambos casos se recogen informaciones donde se detectan diferencias de comprensión. Respecto a la aditiva, Briars y Larkin (1984), Morales, Shute y Pellegrino (1985), Riley et al (1983) y Riley y Greeno (1988) estudian cómo influye la estructura semántica de comparación en la comprensión de problemas por niños de los primeros niveles de enseñanza. En cuanto a la multiplicativa, en 1987, Lewis y Mayer construyen un modelo del proceso de comprensión para explicar la diferencia de dificultad entre los problemas aritméticos verbales de comparación de estructura aditiva y multiplicativa. Para ello, clasifican los problemas de comparación en aquellos que tienen enunciado consistente o inconsistente. Los problemas de enunciado consistente son aquellos en los que los datos conocidos son el referente y el factor de comparación, por lo que la incógnita es el valor del comparado, mientras que en los problemas de enunciado inconsistente los datos conocidos son el comparado y el factor de comparación, y el desconocido el referente.

Lewis y Mayer llegan a la conclusión de que cuando el enunciado es consistente el resolutor posee un conjunto de esquemas que le permiten llegar a la solución con menos errores que si el enunciado es inconsistente. Otra característica del modelo propuesto por estos autores, concierne al término comparativo empleado en el enunciado. Lewis y Mayer distinguen entre términos comparativos “no marcados” (“más que” y “veces tanto como”), y los “marcados” (“menos que” y “1/3 tanto como”) y advierten que la dificultad presentada por los alumnos es mayor cuando el término comparativo empleado en el enunciado es “marcado”.

Posteriormente, Verschaffel, De Corte y Pauwels (1992) confirman parcialmente el trabajo realizado por Lewis y Mayer. Estos autores realizan dos experiencias con estudiantes universitarios. En una emplean problemas de comparación de un solo paso de adición y substracción, y en otra proponen problemas de comparación de dos pasos en las que aparecen las cuatro operaciones básicas. Los problemas de comparación de un solo paso no confirman el modelo de Lewis y Mayer, pero los problemas de comparación de dos pasos en cambio sí confirman este modelo. Tanto en los problemas propuestos por Lewis y Mayer (1987) como en los presentados por Verschaffel, De Corte y Pauwels (1992) se aprecia que sólo los problemas inconsistentes contienen pronombres. El uso de la referencia pronominal puede causar dificultades a los lectores a la hora de resolver problemas y este hecho puede ser el causante de la diferencia de dificultad entre los problemas consistentes e inconsistentes. Otro aspecto por lo que los estudiantes comenten errores en la resolución de problemas de comparación de enunciado inconsistente, es la aplicación de una estrategia de resolución basada en palabras clave. Muchos alumnos no intentan comprender el problema, sólo miran la palabra clave y eligen una operación que esté asociada a ella. Esta estrategia puede tener éxito en los problemas consistentes pero no en los inconsistentes (Castro, 1994).

Entre los factores que influyen en los errores que cometen los alumnos al resolver problemas está la posición de la incógnita en el enunciado de un problema. Los estudios realizados tratan, a la vez, los dos factores, estructura semántica y posición de la incógnita, con lo que se complica el establecer una jerarquía por dificultad de los problemas.

Casajús (2005, p. 121), apoyándose en investigaciones realizadas sobre resolución de problemas de estructura aditiva (Bermejo y Rodríguez, 1990; Nesher, 1982), explica la influencia de la posición de la incógnita en un problema independientemente de su estructura semántica: “los PAEV con la incógnita en el resultado parecen ser más fáciles (…). La explicación de tales resultados (…) puede deberse a que los alumnos disponen de un esquema general que les informa de la estructura y la intención del problema. Los problemas en los que la incógnita es el conjunto inicial o de referencia, son los que revisten mayor dificultad de resolución. La dificultad se incrementa aún más cuando ésta se sitúa en el conjunto inicial”.

Los trabajos de Carpenter (1986) y Díaz y Bermejo (2007) confirman dicha afirmación para el caso de los problemas de cambio. Para los problemas de combinación no hay consenso sobre qué posición de la incógnita favorece la comprensión. Para Riley et al (1983) los más fáciles son aquellos en los que la incógnita es la cantidad referida al conjunto total, frente a aquellos en los que la incógnita es una de las partes. Para Caballero (2005) los de mayor dificultad son los que presentan la incógnita en el primer sumando.

En los problemas de comparación los del tipo más difícil son aquellos en los que la cantidad desconocida es la del referente (Bermejo y Rodríguez, 1990; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998).

III.2.4. INFLUENCIA DE OTROS FACTORES EN LA DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS

Se han caracterizado otros factores que intervienen y afectan a la resolución de los problemas aritméticos. Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988) mostraron a partir de su estudio que si se presentan en un problema los números con formato verbal en vez de en formato numérico, el problema presenta una dificultad añadida.

Nesher (1982) habla de tres variables que condicionan la dificultad de un problema: lógicas, sintácticas y semánticas; y señala factores que facilitan o dificultan la resolución. Así los problemas que se presentan mediante dibujos resultan más fáciles y la información superflua en el enunciado interfiere y dificulta la realización de un problema. La longitud del enunciado, el número de operaciones, el tamaño de los números y la presencia de símbolos en vez de números concretos incrementan la dificultad del problema. La posición de la pregunta, la relación entre el orden de presentación de los datos en el enunciado y el orden en que deben de colocarse para operar, constituyen otras fuentes de dificultad (López de los Mozos, 2001).

Lester (1994) también estudia las variables que hacen difícil un problema y las clasifica en cuatro grupos: de contenido, de estructura, de sintaxis y de conducta heurística.

Puig y Cerdán (1988) presentan variables que responden a un interés particular para la resolución de problemas aritméticos: variables sintácticas, de contexto y de contenido. Dichas variables permiten analizar tanto el proceso de comprensión que realizan los alumnos en la resolución de problemas como los errores cometidos durante su resolución.

Estos autores entienden por *variable sintáctica* cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Dentro de este tipo de variables distinguen:

a) el tamaño del problema, que se puede medir por el número de frases o palabras;

b) la complejidad gramatical, que refiere al tipo de oraciones que constituyen el texto del problema;

c) la presentación de los datos, mediante números, símbolos o palabras;

d) la situación de la pregunta en el texto del problema: si el texto completo es una interrogación en la que se entremezclan la información y la pregunta del problema, si la pregunta está situada al final del texto, etc.

e) la secuencia u orden de presentación de los datos: si el orden en el que aparecen los datos corresponde o no con el orden en que éstos han de ser considerados para efectuar las operaciones que conducen a la solución del problema.

Las variables de *contenido y contexto* dan cuenta del significado del texto. Las de contenido se refieren al significado matemático profundo, y las de contexto lo hacen a significados no matemáticos. Las variables de contenido las clasifican siguiendo las ideas de Webb (1979) en:

a) Tema matemático: considera la distinción entre áreas y entre las pequeñas parcelas de las matemáticas.
b) Campo de aplicación: el enunciado del texto del problema y los conceptos que aparecen en él corresponden a otras disciplinas (física, química,…) y los conceptos matemáticos tienen un mero carácter instrumental.
c) Contenido semántico, palabras clave y vocabulario matemático.
d) Variables que describen los elementos del problema, se distinguen los problemas de texto matemático de los que no lo son.
e) Equipo matemático utilizable: se tiene en cuenta que en determinadas situaciones didácticas el uso propio del material es portador de contenido matemático.

Respecto a las variables de contexto, Webb (1979) hace referencia al formato de presentación y el escenario o contexto verbal. En cuanto al formato, observar que éste puede presentarse de modo manipulativo, pictórico, simbólico, verbal o una combinación de todo. La presencia de dibujos en los problemas corresponden a los primeros niveles escolares, progresivamente van despareciendo los dibujos para dar paso al texto escrito. En cuanto al marco, distingue entre el familiar y no familiar, aplicado y teórico, concreto y abstracto, hipotético y de hecho.

Caballero (2005) enumera como factores que influyen en la dificultad de los problemas verbales de adición y substracción algunos de los ya señalados, como la estructura semántica, la ubicación de la incógnita o el tipo de sentencia, además el tamaño de las cantidades, el nivel de abstracción de los sumandos y la presencia o no de ayudas. Jiménez (2008) afirma que estos factores deben considerarse de forma conjunta con la estructura del problema.

Otras investigaciones realizadas sobre problemas verbales de estructura aditiva (Briars y Larkin, 1984; Carpenter et al, 1981; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Nesher, 1982; Nesher, Greeno y Riley, 1982; Vergnaud, 1982) tratan de investigar cómo piensan los niños cuando resuelven problemas verbales de suma o resta. A partir de estas investigaciones clasifican los problemas en función de su estructura semántica a la vez que describen estrategias de solución y sus dificultades.

En cuanto a los problemas compuestos se refiere, también se han realizado investigaciones sobre factores que afectan a la dificultad del problema. Gutiérrez, Rico, Morcillo, Castro, Castro, Fernández et al (1993) realizan un estudio sobre dos agentes que hacen que se diferencien unos problemas aritméticos de otros. El primero es el conjunto numérico con el que se expresan las cantidades (natural, entero, decimal) y el tipo de magnitudes asociadas (discretas y continuas). El segundo es si existe una relación entre los datos numéricos del problema o más de una, refiriéndose así a los problemas simples y compuestos. También hacen alusión a cómo la posición de la incógnita condiciona la facilidad de un problema aritmético simple y consideran que este hecho se aplica igualmente a los problemas compuestos. Dentro de los problemas compuestos analizan tres criterios diferenciadores: a) Estructura semántica de la primera y segunda relación; b) Relaciones de aumento/disminución y c) Forma del enlace entre las dos relaciones. En su investigación concluyen que en los problemas compuestos la relación de disminución en el primer paso es más difícil que las relaciones de aumento en primer paso. También dejan constancia de que la influencia de la relación de aumento o disminución en segunda posición, tiene un peso menor sobre la dificultad del problema, que la que tiene en la primera posición.

III.2.5. APORTACIONES SOBRE PERSPECTIVAS PARA LA INVESTIGACIÓN

Schoenfeld (1992) afirma que la literatura sobre resolución de problemas de matemáticas es difícil de interpretar debido al poco consenso existente en la comunidad de investigadores sobre el significado de los términos relacionados con el tema. Expresiones tan básicas como "problema" y "resolución de problemas" tienen y han tenido significados variados y, en ocasiones, contradictorios. Así por ejemplo, el término "resolución de problemas" se identifica tanto con problemas que necesitan múltiples procedimientos como con la realización de ejercicios (Noda, 2000; Schoenfeld, 1983; Stanic y Kilpatrick, 1988). Schoenfeld contempla la necesidad de investigar más en la resolución de problemas, proponiendo las siguientes líneas:

1. Profundizar en el significado de términos que aún no están claramente establecidos, como resolución de problemas.
2. Buscar nuevos métodos de investigación en resolución de problemas y la mejora de los existentes.
3. Estudiar la influencia del dominio de conocimiento en aspectos de la resolución de problemas.
4. Investigar sobre creencias y afectos de los estudiantes en resolución de problemas.
5. Explorar sobre la instrucción en resolución de problemas y su evaluación.

En el mismo sentido se manifiesta Lester (1994) que recoge la siguiente serie de recomendaciones para actuar en la resolución de problemas, algunas de ellas coincidentes con las expuestas de Schoenfeld anteriormente.

1. Necesidad de dar mayor prioridad al desarrollo de la teoría de resolución de problemas.
2. Necesidad de clarificar el significado de resolución de problemas.
3. Desarrollar los instrumentos de investigación que permiten medir las actuaciones y observar la conducta.
4. Indagar sobre cómo hacer la enseñanza de la resolución de problemas y sobre el tiempo necesario para llevar a cabo un tratamiento eficaz.

Analizando las propuestas anteriores hechas por Lester y Schoenfeld, se aprecia que la resolución de problemas es un tema que no está agotado desde el punto de vista de la investigación, sino que se ha de seguir investigando. Se conoce poco sobre cómo se desarrolla la habilidad para resolver problemas y qué factores influyen en su desarrollo; sobre cómo se puede ayudar a los estudiantes a ser mejores resolutores de problemas y, por tanto, mejores hacedores de matemáticas.

III.2.6. SÍNTESIS

La revisión bibliográfica muestra que la causa principal por la que los estudiantes comenten errores al resolver problemas es la falta de comprensión de los enunciados, que les impide elegir adecuadamente las operaciones resolutorias, y no los fallos de cálculo. Los investigadores comprueban que los niños que tienen una habilidad lectora buena son mejores resolutores de problemas que los que no la tienen y que variables como la estructura semántica, el lugar donde se encuentra la incógnita, el número de pasos, presentar los números en formato verbal en lugar del numérico, la longitud del enunciado y el tamaño de los números tienen una considerable repercusión en la dificultad de un problema.

No encontramos consenso en la influencia de las palabras clave sobre la resolución de problemas, algunos diferencian éstas de las que corresponden al vocabulario matemático, otros constatan su influencia en base a significados parciales pero no globales del texto, y otros afirman que las palabras que determinan la elección de la operación que resuelve el problema son los verbos de acción.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

En este capítulo describimos el modo en que se ha llevado a cabo esta investigación. La Figura IV.1 presenta un esquema de los contenidos del capítulo. Dicha figura muestra la organización de todo el trabajo realizado, desde que se gesta hasta que finaliza. Si bien la organización de la memoria y el orden en que están distribuidos los capítulos reflejan cierta estructura del trabajo, el procedimiento seguido no ha sido tan lineal como se aprecia en el documento, esto se pondrá de manifiesto al desarrollar dicho esquema.

Distinguimos cuatro fases fundamentales en el desarrollo del trabajo cuyos componentes las determinan:

a) Fase de decisión: es el momento en el que se toma la determinación de realizar el trabajo considerando su viabilidad y la elección del tema sobre el que versará el mismo.

b) Fase de diseño: etapa en la que se diseña la investigación, lo que incluye una serie de actuaciones que comprenden desde la elaboración del marco teórico, el planteamiento de objetivos, la elección de la muestra, la selección del marco metodológico, el diseño y construcción de los instrumentos para la recogida de datos y la planificación de la acción o acciones a desarrollar. Todas estas actuaciones están encaminadas a preparar el trabajo empírico.

c) Fase de ejecución: hace referencia a la puesta en práctica de dicho diseño. En esta fase se produce la recogida de datos, el análisis de los mismos y se obtienen conclusiones.

d) Fase de redacción del informe o memoria de la investigación: es el momento culminante donde se le da forma al documento a presentar de manera que sea riguroso y legible y que recoja de forma comprensiva y organizada la investigación realizada, permitiendo su réplica a partir de la información aportada.

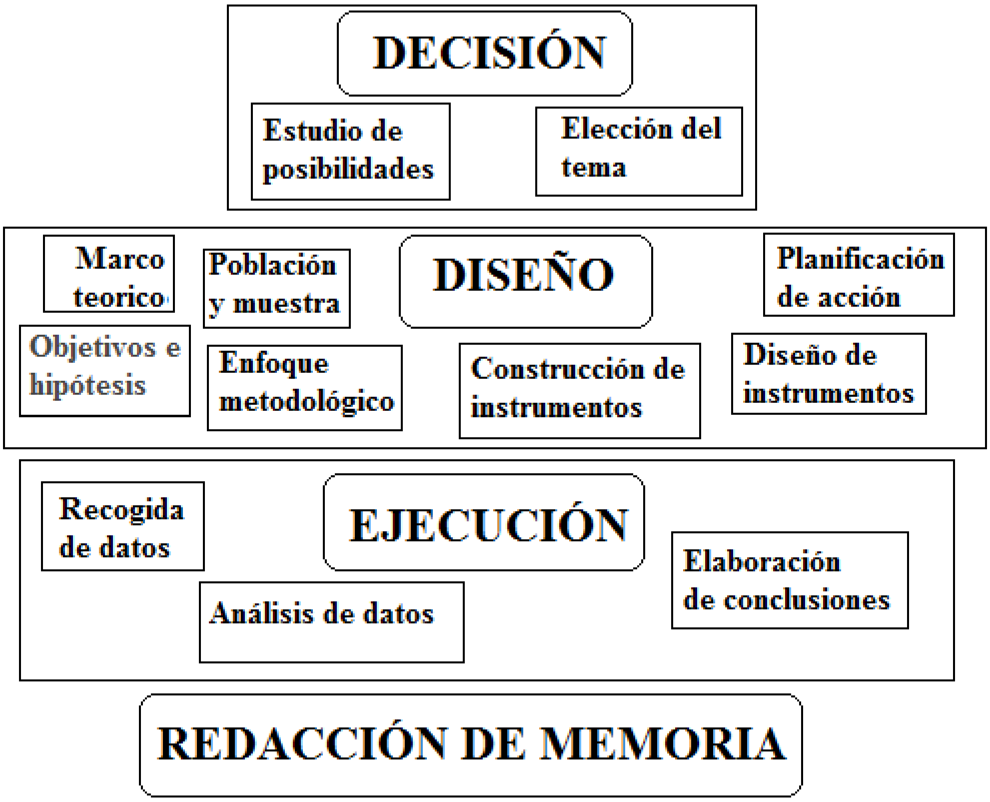


Figura IV.1.Fases del estudio.

Para organizar el presente capítulo seguimos el esquema IV.1. Nos centramos en detallar cada una de estas fases y los elementos que comprenden. Dado que el trabajo se compone de dos estudios diferenciados vamos a hacer referencia a ellos en relación a cada una de las cuatro fases señaladas, en aquellos apartados que así lo requieran.

IV.1. DECISIÓN

Para entender cómo se llega a tomar la decisión de realizar este trabajo hay que relatar algunos hechos acaecidos durante décadas pasadas en el grupo de investigación en el que se enmarca esta investigación.

Por la década de los ochenta, del pasado siglo, en el seno del grupo se formó un equipo de investigación compuesto por profesores internos y externos al departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Entre los externos figuraban profesores de universidad de otros departamentos y profesores de educación primaria (antigua EGB). Uno de los trabajos que el grupo realizó fue un estudio experimental en el que a un grupo de alumnas que cursaban 7º de EGB se les sometió a un tratamiento que consistió en trabajar la invención de problemas utilizando folletos publicitarios sobre las rebajas de un centro comercial. El trabajo realizado, los datos obtenidos en el experimento y la interpretación de los mismos están recogidos en la memoria de investigación cuyo título es “Resolución de problemas en el tercer ciclo de la EGB” de Castro, Castro, Rico, Valenzuela, García, Pérez et al, editada en 1995 por el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Con la incorporación de nuevas personas al equipo de investigación, y como continuación del trabajo, surgen dos inquietudes que dan lugar a la realización de dos trabajos de investigación tutelada. Estos trabajos fueron desarrollados por los estudiantes Jorge Cázares Solórzano y María Fernanda Ayllón Blanco (autora de esta tesis doctoral) en los años 2000 y 2004, respectivamente. El primero de ellos dio lugar a una Memoria de Tercer Ciclo titulada “La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo”. El segundo, por el cambio de planes de estudios, consistió en un Trabajo de Investigación Tutelada denominado “Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación”.

Ambos estudios fueron continuados en trabajos de tesis doctorales sobre la invención de problemas. La preparación del proyecto de tesis del primero de los trabajos citados, continuación de la investigación de tercer ciclo, fue inmediata. Se realizó el diseño de la nueva investigación y se hizo la recogida de información, pero un desgraciado accidente truncó la vida de Jorge Cázares y provocó que el trabajo quedara parado en el momento de haber hecho la recogida de los datos empíricos. Pasado cierto tiempo, la doctoranda María Fernanda Ayllón mostró interés por la continuación del proyecto de tesis que había quedado interrumpido; habiendo trabajado en un marco teórico similar en su Trabajo de Investigación Tutelada, el tema no le era ajeno.

Concluyendo, la parte del trabajo que se presenta realizada por Cázares fue la construcción parcial del marco teórico sobre invención de problemas (recogida en la memoria de tercer ciclo), la preparación de su proyecto de investigación (recogido en el libro “Investigaciones en Pensamiento Numérico. Libro Homenaje a Jorge Cázares” editado por la editorial de la Universidad de Granada, en el año 2007) y la preparación del protocolo de entrevistas y realización de las mismas a 27 estudiantes de primaria. A partir de ahí, la transcripción de las entrevistas y el análisis de los datos obtenidos en ellas, han sido realizados por la investigadora autora de esta memoria. El estudio empírico al que estamos haciendo referencia constituye una parte del trabajo de investigación elaborado (parte A) para esta tesis que es continuado con otro trabajo empírico posterior (parte B). En apartados siguientes detallaremos las características de ambas partes.

IV.2. DISEÑO

La investigación que presentamos está realizada bajo un diseño mixto el cual incorpora los dos enfoques cualitativo y cuantitativo. Es un diseño mixto en dos etapas (Hernández, Fernández y Baptista, 2008) una de las cuales se construye sobre la otra. A este modelo en dos etapas Creswell (2005) le llama diseños exploratorios, según recogen Hernández et al (2008). En nuestro caso son dos etapas consecutivas de un mismo planteamiento del problema en donde se integran y complementan los métodos cualitativo y cuantitativo. Dicha integración se considera posible y fructífera para el estudio de muchos fenómenos sociales (Rodríguez, Pozo y Gutierrez, 2006).

La primera etapa o parte A de la investigación responde a un enfoque cualitativo, y la segunda etapa o parte B a un enfoque cuantitativo. Las características fundamentales de ambas partes del estudio, las cuales tratamos en los siguientes apartados, se recogen en la Tabla IV.1. La necesidad de hacer explícita la selección y manejo de las técnicas seleccionadas, que señala Gutiérrez (2010), nos lleva a la siguiente descripción. El hecho de tomar técnicas cuantitativas y cualitativas ha estado condicionado por los objetivos de la investigación, al tratarse de un estudio exploratorio y asumir la necesidad de corroborar ciertos resultados con una muestra más amplia de sujetos.

	Parte A	**Parte B**
Marco teórico	Sobre problemas, resolución e invención	Sobre problemas, resolución e invención
Objetivos	Relacionados con la resolución e invención de problemas	Relacionados con la resolución e invención de problemas
Población y muestra	Muestra reducida de 27 estudiantes. Diferentes cursos de primaria	Muestra más amplia de 351 estudiantes. Diferentes cursos de primaria
Enfoque metodológico	Cualitativo-cuantitativo	Cualitativo-cuantitativo
Instrumentos	Entrevista semiestructurada	Cuestionario-prueba
Recogida de datos	En el año 2001	En el año 2010
Registro de los datos	Grabaciones de video y audio, posteriormente transcritas	Prueba escrita

Tabla IV.1. Principales características de las dos partes que componen la investigación realizada.

IV.2.1. CARACTERÍSTICAS COMUNES A AMBAS PARTES DE LA INVESTIGACIÓN

Como se detalla en la Tabla IV.1 algunas de las características de las partes A y B de esta investigación son comunes. Este es el caso del marco teórico y los objetivos de investigación.

Partiendo del marco teórico de los estudios previos sobre invención de problemas desarrollados en el seno del grupo de investigación, se realizó una revisión de las investigaciones a nivel internacional para determinar el estado de la cuestión de nuestro problema de investigación. Esta consulta bibliográfica y la información existente del trabajo realizado por Jorge Cázares nos proporcionaron una serie de interrogantes que transformamos en objetivos generales y específicos de investigación. No consideramos oportuno formular hipótesis. Toda esta información a la que nos referimos ha quedado recogida en el capítulo I de esta memoria.

El marco teórico se ha ido construyendo a lo largo de todo el tiempo en el que se ha dilatado esta investigación: parte se delimitó a lo largo del desarrollo de la parte A del estudio y otra parte mayor se fue consolidando a lo largo de la parte B. Ha quedado recogido en el capítulo II de esta memoria.

IV.2.2. POBLACIÓN Y MUESTRA

Teniendo en cuenta que nuestro interés es el estudio del desempeño de los estudiantes de educación primaria en tareas de invención y posterior resolución de problemas, la población considerada son los alumnos españoles de primaria. De dicha población se han utilizado tres muestras intencionadas: dos para la parte A y otra para la parte B del estudio. La primera muestra de la parte A corresponde a alumnado de todos los cursos de educación primaria que en el año 2001 estaban matriculados en un colegio concertado del extrarradio de la ciudad de Granada (lo denominamos C1).

La segunda muestra estuvo constituida por alumnos de un colegio concertado de la ciudad de Granada (lo denominamos C2). En una primera intervención estuvo formada por 139 estudiantes que correspondían a todos los cursos de primaria y que finalmente quedó reducida, como se muestra en la Tabla IV.2, a una muestra intencional de 27 estudiantes distribuidos por los diferentes cursos de primaria del siguiente modo: 5 de primer curso, 4 de los cursos segundo, tercero, quinto y sexto, y 6 de cuarto curso. En total participaron 15 chicos y 12 chicas. Al hacer la elección de los alumnos se pretendió que el número de chicas y de chicos fuese el mismo para formar parejas a entrevistar con un chico y chica de cada curso. Este objetivo no se consiguió debido a la no autorización de algunos padres para que sus hijos fuesen grabados en video, lo que dejó la distribución entre chicos y chicas que muestra la Tabla IV.2.

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Total
Chicos	4	1	1	4	3	2	15
Chicas	1	3	3	2	1	2	12

Tabla IV.2. Distribución de chicos y chicas por cursos en la muestra del centro C2.

Para referirnos a estos estudiantes utilizaremos las siguientes iniciales:

Chicos: J.A., R.L. U.T. y J.N. (1º curso); J.I. (2º curso); A.T. (3º curso); L.I., S.V., P.H. y J.S. (4º curso); U.A., I.G. y J.E. (5º curso); R.R. y J.J. (6º curso).

Chicas: C.N. (1º curso); F.T., M.R. y T.C. (2º curso); J.L., E.L. y C.R. (3º curso); C.L. y C.T. (4º curso); M.T. (5º curso); L.R. y L.S. (6º curso)

Todos los estudiantes estaban escolarizados en el centro indicado. Las características de este centro son las siguientes: es concertado, está situado en un barrio no céntrico de la ciudad de Granada, la zona en la que está enclavado hace que su alumnado pertenezca a una gran diversidad de clases sociales, y goza de elevado prestigio en la ciudad por la preparación que proporciona a su alumnado en los diferentes ámbitos formativos.

Para la parte B del estudio, la muestra, también intencional, fue de 351 estudiantes de un colegio concertado de la ciudad de Granada (lo denominamos C3), distribuidos por todos los cursos de educación primaria tal y como se muestra la Tabla IV.3.

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Total
Chicos	26	32	33	44	41	24	200
Chicas	21	39	13	30	34	14	151
Nº	47	71	46	74	75	38	351

Tabla IV.3. Número de alumnos por curso en la muestra de la parte B del estudio.

Los cursos que han colaborado lo han hecho en pleno por lo que la distribución de chicos y chicas es la que existe en la matrícula del propio centro. Las características de este colegio son las siguientes: es concertado, está situado en el centro de la ciudad de Granada, y es muy demandado por padres de nivel sociocultural alto, incluso con residencia alejada del colegio; no obstante, la obligatoriedad a acoger a los niños de la zona cuyas familias lo deseen hace que el nivel sociocultural de los alumnos sea de gran variedad.

IV.2.3. ENFOQUES METODOLÓGICOS

Por metodología o lógica de la investigación se entiende el conjunto de etapas que se recorren en una investigación para alcanzar las metas diseñadas en la misma (Gutiérrez, 2010). Son etapas que siendo más o menos comunes proporcionan el sostén para analizar los datos en base a la fundamentación teórica sobre la que se apoyen.

Consideramos que nuestra investigación se encuadra en un enfoque metodológico mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), incluido en un diseño de métodos múltiples (Teddlie y

Tashakkori, 2003) dado que comparte elementos de los métodos cualitativo y cuantitativo. La investigación de métodos mixtos o múltiples, también denominada integrada, investigación multimétodos, o estudios triangulados, combinan enfoques de investigación cualitativos y cuantitativos para conseguir una comprensión amplia y profunda así como corroboración de resultados (Johnson, Onwuegbuzie y Turner, 2007). Estos autores señalan que los motivos que subyacen a esta combinación de enfoques son puramente pragmáticos, buscando aportar los resultados más informativos, completos, equilibrados y útiles a partir de la combinación de puntos de vista, recogidas de datos, análisis y técnicas de inferencia, cualitativas y cuantitativas.

En la investigación realizada, la parte A se caracteriza por:

a) la utilización de datos cualitativos;

b) los datos son tomados "desde dentro";

c) ser subjetiva, orientado al descubrimiento;

d) ser exploratoria, descriptiva e inductiva;

e) los datos son "reales", "ricos", "profundos”,

f) no generalizables; y

g) holista, ya que asume una realidad dinámica.

La parte B se caracteriza por:

a) empleo de datos cualitativos;

b) la medición penetrante y controlada;

c) ser objetiva;

d) situarse al margen de los datos ("desde fuera");

e) orientada a la comprobación;

f) inferencial e hipotética-deductiva;

g) orientada al resultado;

h) fiable, datos "sólidos" y repetibles;

i) generalizable; y

j) asume una realidad estable

(Cook y Reichardt 1986).

Resumidamente: Tomando las partes A y B separadamente cada una responde a un método diferente de aproximación a los datos, considerando método a la "gama de aproximaciones empleada en la investigación educativa para reunir los datos que se van a utilizar como base para la inferencia y la interpretación, para la explicación y la predicción" (Cohen y Manion, 1990; p.71). Como se ha indicado anteriormente, para la parte A del trabajo, el instrumento utilizado ha sido la entrevista clínica semiestructurada y, para la parte B un cuestionario-prueba escrito. Realizamos a continuación una descripción de dichos instrumentos.

IV.2.4. INSTRUMENTOS PARA LA RECOGIDA DE DATOS

Toda investigación requiere de técnicas para recoger los datos, éstas son las formas y modalidades en las que se puede concretar cada una de las etapas u operaciones (Colas y Buendía, 1992). Las técnicas han de concretarse en instrumentos que sirvan como herramientas a dichas técnicas. Para la parte A del trabajo, se han realizado entrevistas clínicas semiestructuradas. Para la parte B, se ha utilizado un cuestionario-prueba escrito. Realizamos a continuación una descripción general de dichos instrumentos.

ENTREVISTA

La entrevista es una herramienta específica en investigación, es uno de los instrumentos de las técnicas de encuesta de la investigación social (el otro es la encuesta), que puede ser utilizado para examinar diferentes aspectos del pensamiento de las personas incluyendo la comprensión de conceptos numéricos básicos, complejas ideas sobre la realidad, juzgar sus creencias y responder a test de inteligencia (Ginsburg, 1997). Se le considera "como un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido a través de los objetivos de investigación, tratando de hacer una descripción, una predicción o de dar una explicación sistemática. Comprende la reunión de datos a través de una interacción oral" (Cohen y Manion, 1990, p. 378).

Ginsburg (1997) da seis razones para el uso de las entrevistas clínicas en la investigación educativa:

1) Ofrecen la posibilidad de tratar los problemas de los sujetos de forma equivalente,

2) Ayudan a examinar la fluidez natural del pensamiento,

3) Ayudan en la investigación sobre el potencial de aprendizaje,
4) Favorecen la comprensión del pensamiento en un contexto personal,
5) Permiten trabajar con lo individual y con lo general,
6) Plasman un especial tipo de metodología "justa", especialmente apropiada en una sociedad multicultural.

Tipos de entrevistas

Cohen y Manion (1990) distinguen, entre otras, las entrevistas estructuradas y no estructuradas. A ellas Buendía (1992) añade la semiestructurada. En la estructurada, la secuencia y redacción de las preguntas se determina, dejándose poca libertad al entrevistador para introducir modificaciones. Si se le permite alguna modificación también se especifica por adelantado. Se caracteriza por ser una situación cerrada. La semiestructurada es más flexible y abierta que la estructurada. El entrevistador tiene la libertad de alterar el orden y la forma de preguntar, así como el número de preguntas a realizar. Se dispone de un guión de base que puede ser modificado por intereses de la entrevista, aunque manteniéndose el objetivo para el cual fue preparado y los diversos puntos sobre los que debe de obtenerse información.

En nuestro estudio utilizamos una entrevista semiestructurada como medio para recoger información relativa a los objetivos de la investigación. Como describe Tuckman (citado por Cohen y Manion, 1990) hace posible medir lo que sabe una persona, lo que le gusta o disgusta, sus valores y preferencias, permitiendo a partir de ese conocimiento, sugerir hipótesis e identificar variables y relaciones.

La entrevista, como señala Ginsburg (1997), no es un proceso espontáneo, aunque deba de parecer espontáneo, fluido e indudablemente fácil. Es en realidad el resultado de una larga preparación y entrenamiento. En nuestro caso, se siguió un largo proceso hasta conseguir el diseño final de la misma que posteriormente se presenta.

CUESTIONARIO-PRUEBA ESCRITA

El instrumento de recogida de datos utilizado en la segunda etapa de esta investigación comparte rasgos tanto de un cuestionario como de una prueba. Los cuestionarios son uno de los instrumentos básicos de las técnicas de encuesta (Buendía, 1992). El cuestionario consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o más variables a medir; es considerado una entrevista altamente estructurada y un medio útil y eficaz para recoger información en un tiempo relativamente breve. Las pruebas, por su parte, son "instrumentos técnicamente construidos que permiten a un sujeto, en una situación definida (ante determinados reactivos o ítems), evidenciar la posesión de determinados conocimientos, habilidades, destrezas, nivel de logros, actitudes, características de personalidad, etc. Son instrumentos que permiten apreciar una variable, tal como es definida por la misma prueba o instrumento" (García Ramos, 1994, p. 81). Dado que en el cuestionario que se utiliza en esta investigación los sujetos han de poner en juego su conocimiento matemático para inventar y resolver problemas y evaluar los problemas que se les proponen, además de dar opiniones, consideramos que comparte aspecto de una prueba.

Este instrumento o herramienta de recogida de datos presenta ventajas y desventajas. Una de las ventajas consiste en requerir relativamente poco tiempo para reunir información sobre grupos numerosos. Entre las desventajas están el que las respuestas escondan la verdad o produzcan notables alteraciones en ella y, por otro lado, que las respuestas sean poco claras o incompletas, haciendo muy difícil su codificación.

En nuestro caso creemos que las desventajas se minimizan por el tipo de sujetos que intervienen en el estudio y el tipo de preguntas que se les hace.

IV.2.5 DISEÑO DE LA ENTREVISTA

Dedicamos este apartado a detallar el proceso de diseño de la entrevista, el protocolo finalmente establecido y la colección de problemas seleccionados para la misma, así como otros detalles sobre la forma de realización de la entrevista y de una sesión previa realizada en el aula habitual de clase de los estudiantes.

Para llegar al diseño final de la entrevista tal como se aplicó finalmente, se dieron cuatro pasos que se recogen resumidamente en el Figura IV.2.

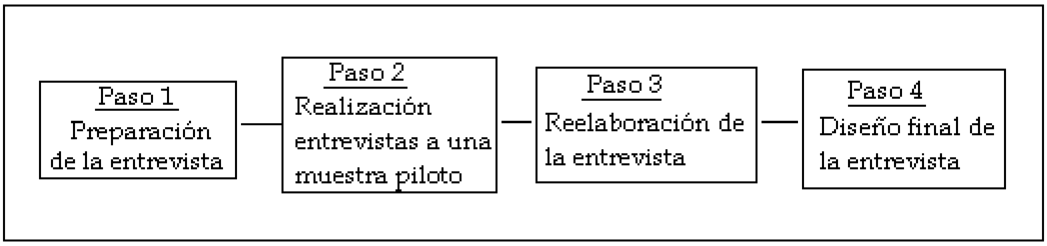


Figura IV.2. Pasos en la elaboración de la entrevista.

Paso 1. Se planificó la realización de una sesión en cada una de las clases de educación primaria del centro C1. En dicha sesión se le habló al alumnado de inventar problemas y posteriormente inventaron algunos. Después, pasados unos días, se realizó una entrevista clínica individual a algunos estudiantes de los diferentes cursos.

Para el trabajo en el aula se prepararon unas tarjetas en las que aparecían artículos cotidianos, cercanos a los estudiantes, con sus precios de venta, con la excepción de una tarjeta que mostraba una cancha de tenis. Estas tarjetas fueron diseñadas tomando folletos de publicidad en los que aparecían artículos con sus precios. Los precios tenían como unidad de referencia *la peseta*, por lo que los números que aparecían eran números naturales[7]. Los artículos elegidos, para la confección de las tarjetas, eran familiares a los niños, y las cantidades numéricas que aparecían tenían un número de cifras similar. Todas las tarjetas fueron presentadas en un gran panel, expuestas en una parte visible de la clase; si algún alumno o alumna lo necesitaba podía levantarse a examinarlo. Utilizando estas tarjetas, los estudiantes debían inventar un problema de compraventa y buscar un procedimiento para su resolución. Si lo consideraban oportuno podían sugerir un procedimiento alternativo. A continuación, se les pidió que inventasen un problema que fuese más difícil que el que habían formulado anteriormente.

En la preparación de la entrevista individual intervino el equipo implicado en la investigación. Los estudiantes entrevistados debían de elegir tres tarjetas, una de ellas debía de ser la de la cancha, e inventar tres problemas que hiciesen referencia a cada una de las tarjetas. La entrevista se componía además de otras preguntas abiertas que acompañaban a la de invención del problema y que perseguía indagar en la concepción de los estudiantes sobre los problemas y la resolución de los mismos.

Paso 2. Se realizó tanto la sesión conjunta como las entrevistas posteriores a niños del centro concertado C1 y se analizó tanto el desarrollo de las mismas como los datos proporcionados por ellas. Se constató la necesidad de modificar el formato de la entrevista y la forma de desarrollarla, de manera que la información que proporcionara fuese lo más rica posible. Para la recogida de datos posterior se decidió mantener la sesión conjunta y buscar estudiantes que, siendo del mismo nivel educativo, estuviesen

[7] Recordamos que las entrevistas se realizaron en el año 2001, cuando en España seguía empleándose la peseta como moneda aunque ya se comenzaba a hablar del euro, tratando de que la población se familiarizara con su valor y con el proceso de conversión entre euro y peseta.

escolarizados en otro centro para evitar el efecto aprendizaje que se pudiese haber producido en el alumnado del primer colegio.

Paso 3. Para realizar la sesión conjunta del segundo colegio (C2), se utilizaron las tarjetas anteriormente mencionadas. La realización de esta actividad fue individual siguiendo el esquema descrito en el paso 1. Los estudiantes rellenaron un formulario que recogía los datos siguientes: curso, problema de compraventa, resolución, justificación del problema, justificación del procedimiento, justificación del resultado, comprobación, procedimiento alternativo, justificación de la resolución de diferentes maneras, problema difícil, aceptación del problema, justificación de la resolución y características del problema difícil. A continuación se hace una descripción general del mismo.

El procedimiento mediante el cual se aplicó el formulario fue el siguiente:

- Se le proporcionó a cada niño una copia del cuestionario;
- Se le dieron instrucciones generales acerca de cómo debían responder a cada uno de los planteamientos;
- Se realizó el primer ejemplo de manera conjunta para que los niños no tuvieran dificultad al resolver las siguientes cuestiones;
- En el caso de los niños de primer curso, se les leyeron cada una de las instrucciones y en algunos otros se escribió lo que los niños verbalizaron como un problema;
- No se hicieron comentarios acerca de la validez de las respuestas proporcionadas por los niños;
- Cuando los niños preguntaron sobre algún dato o situación del problema, se les ayudó siempre y cuando, dicha ayuda no interfiriera en las respuestas proporcionadas por ellos;
- Las respuestas proporcionadas por los niños para cada una de las situaciones están consideradas para su análisis tal y como fueron propuestas por ellos.

Los problemas inventados por cada uno de estos alumnos fueron clasificados y ordenados en una escala de dificultad creciente.

Paso 4. Para el diseño final de la entrevista se tuvo en consideración que las preguntas y las tareas a realizar quedasen redactadas de manera clara y precisa de forma que los estudiantes entendiesen qué debían hacer. Las preguntas y tareas debían poner de manifiesto el pensamiento de los estudiantes entrevistados tratando de animarlos para que lo describiesen tanto como fuese posible. La secuencia de cuestiones se organizó desde lo más general a lo más específico (siguiendo las recomendaciones de Ginsburg, 1997).

En esta fase se reelaboró la entrevista que se presentaría a parejas de estudiantes de cada uno de los cursos que participarían en la tarea. El nuevo y definitivo diseño quedó con un cuerpo dividido en tres partes además de una introducción pensada para que los estudiantes se familiarizasen con el entrevistador. La primera parte estaba compuesta por una serie de preguntas relacionadas con los problemas y con los números que aparecen en los problemas, como por ejemplo ¿qué entendéis por problema? o ¿para qué creéis que sirve un problema? (en el primer caso) ¿los problemas matemáticos tienen números? o ¿para qué sirven los números en un problema? La segunda parte estaba dedicada a la invención/resolución de un problema por los estudiantes. También se les planteaban algunas preguntas, por ejemplo, una vez escrito el problema inventado se leería en voz alta y el entrevistador preguntaría a su autor si creía necesario cambiar algo del mismo, o una vez resuelto, si creían que el problema podría ser resuelto de otra forma. La tercera parte se dedicaba a indagar sobre problemas difíciles, se les presentarían a los entrevistados varios problemas ya preparados y ordenados por un orden de dificultad teórico y se les indagaría sobre si consideraban, o no ese problema difícil. La sesión terminaría pidiendo a los entrevistados que dijesen aquello que creían que caracterizaba a un problema difícil.

También se tomaron decisiones sobre la metodología de la entrevista. Dichas decisiones se concretaron en que a los estudiantes se les entrevistarían por parejas siendo los alumnos de cada pareja del mismo curso.

Protocolo de la entrevista

El diseño final dio como resultado el protocolo que se muestra a continuación.

Se comienza recordando a los niños que en otra ocasión había estado en el colegio haciendo con ellos un trabajo que consistía en inventar problemas y que ahora harán algo parecido. *"Yo me llamo Jorge soy de México, también soy profesor, ahora estoy estudiando en la Universidad de Granada.* *¿Os acordáis de mi nombre?* *¿Sí? Yo me acuerdo de vuestro nombre: tú te llamas (Antonio) y tú (Paco).* *¡Muy bien! Ya nos acordamos de nuestros nombres.* *Ahora vamos a trabajar un poco, ¿vale?* *Os he elegido porque sé que vosotros sabéis contestar muy bien.* *Vamos a trabajar sobre algunas cosas de las que habéis hecho el otro día.* *¿Os acordáis que estuvimos inventando problemas de matemáticas?* *¡Muy bien!... En la clase de matemáticas ¿resolvéis problemas?* *¿Sí? ¡Muy bien! ¿Dónde más resolvéis problemas?* *Y en casa ¿también resolvéis problemas?* *Cuando vais al supermercado ¿resolvéis problemas de matemáticas?* *¿Por qué creéis que no?* *¿Por qué creéis que sí?* *¿Y vosotros sabéis qué es un problema?* *¿Sí? ¿Qué es un problema para vosotros?* *Los problemas que hicisteis el otro día ¿tenían números?* *¿Sí?... ¿Todos los problemas deben tener números?* *¡Muy bien! ¿Para qué creéis que sirven los números en un problema?* *Y las operaciones ¿para qué creéis que sirven?* *¿Creéis que os sirve para algo saber resolver problemas?* *¿Para qué?* Ahora invéntate un problema muy difícil para que (Antonio) lo resuelva. *Y tú invéntate otro para que (Paco) también lo resuelva.* *El tuyo debe quedar bien hecho para que (Paco) lo entienda.* *Y el tuyo también debe quedar bien para que (Antonio) pueda saber qué tiene que hacer para resolverlo.*

Se da tiempo para que lo escriban. Si los niños lo desean, el entrevistador lo puede escribir si ellos lo dictan.

Ahora vamos a leer los problemas y vosotros me decís si están bien.

Se leen los problemas.

Si le hace falta algo, se lo podéis poner.

Si le sobra algo, se lo podéis quitar.

Se da tiempo para que lo modifiquen.

¡Muy bien! Ahora vamos a cambiar de folio para ver si tú puedes resolver el problema que ha inventado (Antonio) y tú el que ha inventado (Paco).

¿Creéis que se entiende el problema que ha inventado (Antonio)?

¿Por qué?

¿Creéis que se entiende el problema que ha inventado (Paco)?

¿Por qué?

Con los datos que tenéis del problema ¿podéis resolverlo?

¿Sí? ¿Por qué?

¿Os atrevéis a resolverlo?

Se da tiempo para que los niños lo resuelvan.

¿La operación (procedimiento) sirvió para resolver el problema?

¿Por qué creéis que sí?

¿Por qué creéis que no?

La operación ¿está bien hecha?

¿Cómo sabéis que está bien?

Antonio, el resultado que habéis obtenido ¿está bien?

¿Cómo lo sabéis?

Paco, y tu resultado ¿está bien?

¿Cómo lo sabéis?

Se da tiempo para que el niño compruebe la operación.

El problema que ha inventado (Antonio) ¿puedes resolverlo de otra manera?

¿Cómo?

El problema que ha inventado (Paco) ¿puedes resolverlo de otra manera?

¿Cómo?

Se da tiempo para que realicen el procedimiento alternativo.

¿Obtuvisteis el mismo resultado?

¿Por qué crees que obtuvisteis el mismo resultado?

¿Por qué creéis que también se puede resolver el problema de otra manera?

¿Creéis que un problema puede resolverse de diferentes maneras?

¿Por qué?

Una vez que los niños han terminado con esta parte, se continúa leyéndole un problema más difícil que el propuesto por él.

Ahora os leeré otro problema. Un niño me dijo que este problema era más difícil que los que vosotros habéis hecho (se lee un problema).

¿Vosotros creéis que es más difícil que el que habéis inventado?

¿Por qué creéis que es más difícil?

¿Por qué creéis que no es tan difícil?

¿Sí? ¿Cómo lo sabéis?

¿Es fácil?

¿Podéis explicarme cómo lo resolverías?

Si el niño no explica el procedimiento que utilizaría y prefiere resolverlo, se le permite que lo resuelva, pero lo importante es saber que se puede comprender un problema más difícil.

Si los niños creen que no es más difícil porque lo pueden comprender, se lee otro problema de mayor complejidad y se les interroga nuevamente.

Ahora os leeré otro problema. Este sí es muy difícil. Otro niño me dijo que este problema era el más difícil de los que él conocía (se lee un problema de mayor complejidad).

¿Vosotros creéis que es mucho más difícil que el que habéis inventado?

¿Por qué creéis que es más difícil?

¿Sí? ¿Cómo lo sabéis?

¿Cómo creéis que debe ser un problema muy difícil?

¿Qué pensáis que debe tener un problema más difícil?”

Colección de problemas seleccionados para examinar por los alumnos

En la Tabla IV.4 se recogen los problemas que se seleccionaron para ser presentados a los estudiantes en la entrevista, indicándose el tipo de problema según la estructura semántica y la sentencia a la que responde. Estos problemas fueron seleccionados de las invenciones realizadas por los alumnos en la sesión conjunta. La colección total de problemas considerada se elaboró utilizando los problemas de la sesión señalada y los de la sesión similar realizada con los estudiantes del colegio C1. Dichos problemas se clasificaron, una vez desechados los que no respondían a las exigencias de la tarea propuesta. Se eligió de cada clase aquel que se consideró más adecuado, por su lenguaje y temática, y se prepararon en unas tiras de papel, con letras grandes, para que pudieran ser leídas tanto por los estudiantes como por el entrevistador.

Problemas	**Tipo/Sentencia**
1. Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas. También compró una goma. En total pagó 35 pesetas. ¿Cuánto vale la goma?	Cambio 3 a +? = c
2. Yo compré una caja de lápices de 195 pesetas y una goma, en total pagué 300 pesetas. ¿Cuánto vale la goma?	Cambio 3 a +? = c
3. Paco pagó con una moneda para comprarse una pepsi que vale 47 pesetas y le sobraron 53 pesetas. ¿De cuánto era la moneda con que pagó Paco?	Cambio 6 ? - b = c
4. Jorge paga con un billete para comprarse una mochila que vale 1.790 pesetas. Le sobraron 3.210 pesetas. ¿De cuánto era el billete con que pagó Jorge?	Cambio 6 ? - b = c
5. Ramón tenía algunas pesetas. Su madre le dio 35 pesetas más. Ahora Ramón tiene 50 pesetas. ¿Cuántas pesetas tenía Ramón al principio?	Cambio 5 ? + b = c
6. Ramón tenía algunas pesetas. Si su madre le dio 350 pesetas más. Ahora Ramón tiene 630 pesetas. ¿Cuántas pesetas tenía Ramón al principio?	Cambio 5 ? + b = c
7. Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas y una goma que vale 6 ptas. ¿Cuánto tiene que pagar?	Cambio 1 a +b = ¿
8. Paco tenía 35 canicas. Después jugó y perdió 7 canicas. ¿Cuántas le quedaron en total?	Cambio 2 a - b = ¿
9. Luis ha comprado 3 fantas y María otras más. Si entre los dos tienen 11 fantas. ¿Cuántas fantas compró María?	Combinación 2 a +? =c
10. Mi madre compró varios cartones de leche y mi padre 93 cartones. Ahora tenemos 155 cartones. ¿Cuántos cartones compró mi madre?	Combinación 2 ? + b = c
11. Una pepsi vale 47 pesetas. Si Julio tiene 25 pesetas y quiere comprar una pepsi. ¿Cuántas pesetas le faltan para comprar la pepsi?	Comparación 3 a +? = c
12. Jorge fue a ver las mochilas y la que más le gustó costaba 1995 pesetas y él solo tenía 1500 pesetas ¿cuánto le falta para comprar la mochila?	Comparación 3 a +? = c
13. Una pepsi vale 47 pta. ¿Cuánto costarán 5 botellas de pepsi?	Tasa a x b = ?

Problemas	Tipo/Sentencia
14. En 8 estanques hay 64 ranas. ¿Cuántas ranas hay en un estanque?	G.I. partitiva a x ? = c
15. Hay 19 lápices y 15 cajas. Van a meter los lápices en cajas. ¿Cuántos lápices tocarán a cada caja?	G.I. partitiva a x ? = c
16. Hay 64 ranas, 8 ranas en un estanque. ¿Cuántos estanques hay?	G.I. cuotitiva ? x b = c
17. Javi tiene 20 helados, y los quiere repartir entre sus amigos. ¿Para cuántos amigos le alcanzarán si regala 2 helados a cada uno?	G.I. cuotitiva ? x b = c
18. Si en la tienda hay una mochila que vale 1995 pesetas y tiene el 10% de descuento. ¿Cuánto te costará ya con el descuento?	Compuesto Tanto por ciento/cambio
19. Una cancha deportiva mide 336 m cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros. ¿Cuánto medirá de ancho?	Producto medidas a x ? = c
20. Cada mochila vale 1995 pesetas, compro 4 mochilas y llevo 10000 pesetas ¿me faltaría o me sobraría? Si te sobra cuánto te sobra.	Compuesto Tasa: a x b = ? Cambio: a - b= ?
21. Alejandro fue a comprar lápices y el papel del precio decía: 199 pesetas, antes 295 pesetas. Compró 5 paquetes, ¿cuánto pagó por ellos? ¿Cuánto hubiera pagado a precio normal?	Compuesto a x b = ? Tasa a x b = ? Tasa
22. Si Jorge quiere 4 mochilas que valen 1995 pesetas y tenían el 20%, ¿cuánto le costaron?	Compuesto Tanto por ciento cambio a - b= ?

Tabla IV.4. Problemas que se presentaron a los alumnos en las entrevistas.

Hacemos constar que los problemas que aparecen en dicho listado no están ordenados totalmente por dificultad. Se presentan en primer lugar doce problemas simples de estructura aditiva, los cinco siguientes son simples de estructura multiplicativa y, entre el resto, hay dos problemas de porcentajes, compuestos, uno de producto de medidas, otro de tasas y otro de estructura aditiva/multiplicativa.

Como se verá en la Tabla VI.12 de respuestas, uno de dichos problemas (10) no fue utilizado.

Forma de realización

Una vez realizadas las preguntas de la encuesta e inventados y resueltos los problemas, se pasa a valorar los problemas de siguiente modo:

- A cada pareja se les presentaban un número de esos problemas, no superior a nueve, (hubo un promedio de 6,6 problemas por pareja), variando el número y el tipo de problema dependiendo del curso al que perteneciese la pareja a la que se estuviera entrevistando y las diferentes respuestas que fueran dando. Se tomaron los acuerdos siguientes:

- A los alumnos de 1º y 2º curso se les mostraría un problema de cambio 3, cambio 6 o cambio 5, en ese orden dependiendo del tipo de problema inventado por ellos en el cuestionario-prueba. Si se viera conveniente también se les presentaría un problema de combinación 2 o comparación 3.

- A los estudiantes de 3º y 4º curso se acordó mostrarles, en el siguiente orden, los problemas simples de cambio 5 ó 6 o comparación 3, multiplicativos simples de tasa, de grupos iguales, de partición y de cuotición, problemas compuestos de tanto por ciento y cambio, un problema simple de producto de medidas, y otro compuesto de tasas; siempre en función del problema que ellos habían inventado.

- A los alumnos de 5º y 6º curso se les mostrarían los problemas simples de cambio 5 ó 6 o comparación 3, de grupos iguales de cuotición, problemas compuestos de tanto por ciento y cambio, y compuesto de tasas. También dependiendo del problema que hubieran inventado los estudiantes, se les podía mostrar un problema de producto de medidas, en el cual se desconozca una de las partes.

- Por último, se acordó, que a partir de 3º curso se podría añadir un problema de más de una etapa que combinara las estructuras aditivas y multiplicativas.

IV.2.6. DISEÑO DEL CUESTIONARIO-PRUEBA ESCRITA

Obtenidos los resultados de las entrevistas y seleccionados aquellos datos que queríamos confirmar, elaboramos el cuestionario-prueba tomando como variables independientes aquellas cuestiones que quedaban establecidas por las exigencias de los datos a confirmar.

En la elaboración del cuestionario-prueba se han tenido en consideración los criterios que propone Best (1982):

a) Ser tan breve como sea posible y solo lo bastante extenso para obtener los datos esenciales (solo ocupa un folio a doble cara en el cual los estudiantes han de incluir toda la información).

b) Darle un aspecto atractivo (se le han incluido viñetas de identificación que facilitan la inclusión de algunas respuestas).

c) Presentar las instrucciones de forma clara y completa (aparece una sencilla explicación al principio del mismo).

d) Plantear las preguntas de forma objetiva, sin sugestiones hacia lo que se desea como respuesta (las preguntas son asépticas).

e) Presentar las preguntas en un orden psicológico adecuado, precediendo las de tipo general a las específicas (se ha respetado esta idea).

f) Se ha evitado preguntas molestas (en lugar de hablar de problemas que les resulten difíciles se habla de problemas fáciles los cuales han de resolver).

En cuanto al contenido a incluir en el cuestionario-prueba, había quedado ya delimitado al analizar los datos recogidos en las entrevistas previamente realizadas. De igual forma, para la codificación y organización de las respuestas se parte de los resultados obtenidos en la parte A del estudio.

Descripción del cuestionario-prueba

El cuestionario-prueba preparado consta de tres apartados:

a) preguntas genéricas sobre algunas creencias sobre problemas;

b) inventar un problema que fuese difícil para sus compañeros de clase;

c) presentación de unos problemas (3 para 1º curso y 4 para el resto de los cursos) sobre los cuales debían decir cuáles les parecían fáciles y resolver sólo los que consideraron fácil.

El cuestionario-prueba es similar para todos los cursos, pero a la vez tiene particularidades para cada ciclo de educación primaria atendiendo a que el desarrollo cognitivo de los estudiantes evoluciona y, por tanto, es diferente en cada curso. Todos los cuestionarios-prueba tienen en común las preguntas que han de responder los alumnos. Difieren en los problemas que han de analizar y resolver, cambian las operaciones que involucraban y su estructura semántica.

Las características a las que responde el cuestionario-prueba son las siguientes. Respecto a su aplicación: el estudiante contesta de forma individual por escrito y sin que intervenga el encuestador. En cuanto al tipo de preguntas, son abiertas, los estudiantes pueden expresarse libremente, dentro del tema tratado, y redactan sus propias respuestas.

El cuestionario-prueba para primero solo tiene tres problemas. Dos de ellos, el primero y tercero, presentan la misma estructura semántica (cambio) la diferencia entre ellos radica en los números: en el primer problema se trata de números de una sola cifra, en el tercer problema los números son de tres cifras. El segundo problema es de combinación y los números son de dos cifras como máximo.

Los cuestionarios-prueba para el resto de los cursos presentan cuatro problemas. De estos hay siempre dos de la misma estructura pero cambiando el orden de magnitud de los números. Según los cursos a los que estuviese dirigido el cuestionario-prueba se va incrementando el grado de dificultad de los problemas. Los cuestionarios-prueba de tercer y cuarto curso, así como los de quinto y sexto curso, son los mismos. Se utilizaron, por tanto, cuatro cuestionarios-prueba diferentes.

La Tabla IV.5 presenta una descripción de los problemas incluidos en los cuestionarios-prueba, que fueron diseñados por las investigadoras teniendo en cuenta tres variables: tipo de problema, número de cifras máximo de los números que aparecen y sentencia que los representa.

Problema	1º curso	2º curso	3º y 4º cursos	5º y 6º cursos
1	Cambio 1 1 cifra a+b=?	Combinación 2 2 cifras a+? = c	Cambio 2 5 cifras a=¿+c	Comparación 4 cifras a+b=?
2	Combinación 2 2 cifras a+?=c	División 2 cifras a:?=c	Combinatoria 1cifra 2+1=?	Combinatoria 1cifra 3+2+1=?
3	Cambio 1 3 cifras a+b=?	Combinación 2 4 cifras a+? = c	Cambio 2 2 cifras a=¿+c	Comparación 3 cifras a+b=?
4		Compuesto Aditivo 3 cifras	Compuesto Multiplicativo/a ditivo 2 cifras	Compuesto Multiplicativo/ aditivo 3 cifras

Tabla IV.5. Análisis de los problemas propuestos en el cuestionario-prueba, según estructura operatoria, nº de etapas y nº de cifras.

En la Tabla IV.5 se aprecia que los problemas de cambio tipo 1 solo fueron propuestos a estudiantes de 1º curso (son los problemas considerados más fáciles), reservándose los problemas de cambio tipo 2 para 3º y 4º curso. Los problemas de comparación, al ser considerados los de mayor complejidad dentro de los problemas simples de estructura aditiva, se incluyen solo en los cuestionarios-prueba de 5º y 6º curso. Algunos tipos se van manteniendo en cursos sucesivos, así el problema 2 de 1º curso es el mismo que el 1 de 2º curso. Los compuestos aparecen a partir de 3º curso solo con la operación de suma, continúan los compuestos combinando las dos estructuras a partir de 4º curso. El problema de combinatoria que consideramos no rutinario aparece en 3º y 4º curso y se mantiene en 5º y 6º, aumentando en uno la cantidad inicial que pasa de 3 a 4 objetos.

Dentro de cada cuestionario-prueba, los problemas 1 y 3 tienen la misma estructura, cambian la cantidad de cifras de los números del problema, siendo éstos siempre de no más de 5 cifras.

Se incluye a continuación el cuestionario-prueba común de 3º y 4º, a modo de ejemplo, el resto aparecen en el Anexo B.

Cuestionario para 3º y 4º curso

Nombre..Curso...... Años.......

1. Lee las preguntas siguientes y pon una X donde corresponda.

¿Sabes qué es un problema de matemáticas?.........................Si □ No □

¿Has resuelto alguna vez un problema de matemáticas?.......Si □ No □

¿Crees que es importante saber resolver problemas?.............Si □ No □

¿Por qué?

2. ¿Cuándo resuelves problemas de matemáticas, además de en el colegio? Escribe tu respuesta.

3. Inventa un problema que creas que va a ser difícil de resolver por tus compañeros de clase y escríbelo a continuación.

4. Escribe por qué el problema que has inventado será difícil para tus compañeros.

5. Resuelve el problema que has inventado.

6. Lee los problemas siguientes y pon una X donde corresponda.

Con sus ahorros Victoria se ha comprado un coche que le ha costado 18.357 Euros y le han quedado 4.987 Euros ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Victoria?	Fácil □ Difícil □
Juan ha comprado 3 bloques de helado, uno de fresa, otro de chocolate y otro de limón, quiere hacer helados de dos sabores ¿Cuántos helados diferentes puede hacer Juan?	Fácil □ Difícil □
De los libros de una biblioteca los lectores han retirado 45 y han quedado 89 ¿Cuántos libros había en la biblioteca?	Fácil □ Difícil □
Un agricultor recoge 16 kilos de fresas. La cuarta parte de las fresas las ha puesto en cajas de 2 kilos y el resto en cajas de 3 kilos. ¿Cuántas cajas ha llenado de fresas? ¿Le ha sobrado?	Fácil □ Difícil □

7. De los cuatro problemas anteriores, resuelve aquellos que creas que son fáciles.

IV.3. EJECUCIÓN

Una vez diseñados los instrumentos, seleccionados los grupos de alumnos y preparados los protocolos de la entrevista y el cuestionario-prueba, se determinaron las fechas de realización de las actuaciones.

Para la parte A, entre los días 21 de marzo al 3 de abril del año 2001 se presentó la primera tarea a los seis cursos de educación primaria del colegio concertado C2. La realización de las entrevistas se desarrolló los días 17, 18, 19 y 20 de abril del mismo año. Las tareas se realizaron en horario escolar: la sesión de grupo en las aulas que había asignadas a cada curso y las entrevistas en una sala, utilizada habitualmente para otros fines (ej., como reuniones de pocas personas), que fue habilitada para la ocasión. En la sala no había ruidos externos y se procuró que no se produjesen interrupciones, por personas externas, en el transcurso de la entrevista. Allí se instaló la cámara de video.

El desarrollo del cuestionario-prueba de la parte B se llevó a cabo del 24 al 28 de mayo del año 2010. La tarea como ya se ha dicho se realizó en el colegio concertado C3. Dicho centro consta de tres líneas, es decir hay tres grupos de cada curso educativo. Nuestra intención fue que participaran todos los grupos de cada uno de los cursos de educación primaria, para ello debían de estar de acuerdo los profesores de cada uno de los grupos. Se habló con el director de educación primaria del centro educativo, se le explicó en qué consistiría la tarea y se le presentaron los cuestionarios que se les pasarían a los alumnos con el objeto de que, junto con su equipo docente, dieran el visto bueno o propusieran alguna modificación a los mismos. Finalmente decidieron participar un total de 15 grupos de 18, repartidos de la siguiente forma: tres grupos de cada uno de los cursos de 2º, 4º y 5º y dos grupos de cada uno de los cursos de 1º, 3º y 6º. La actividad se desarrolló en horario escolar, con el profesor del grupo presente y en el día y momento que éste estimó oportuno. A los niños no se les avisó previamente de la actividad.

IV.3.1 RECOGIDA DE DATOS

Los datos producidos en la parte A del trabajo se recogieron a través de grabaciones en video y mediante las hojas de papel en las que los estudiantes realizaron las anotaciones de los problemas que generaron y las resoluciones de los mismos. En la parte B del trabajo los datos fueron recogidos en su totalidad a través de las respuestas escritas que produjeron los estudiantes. Todos estos datos se prepararon para su posterior análisis. Para las respuestas orales a las preguntas planteadas en la entrevista se construyeron categorías de respuestas. Los datos relativos a la invención y resolución de problemas se recogieron en fichas preparadas para tal fin, en las cuales se recogían todas aquellas variables necesarias para dar satisfacción a algunos de los objetivos planteados. Todo ello junto con su análisis, constituye el contenido de los capítulos V, VI y VII de esta memoria.

Las respuestas a las entrevistas semiestructuradas fueron recogidas en tres tipos de tablas de doble entrada, para cada curso de estudiantes participantes. En dichas tablas se consideraron las diferentes variables en la horizontal y en la vertical los diferentes estudiantes, formándose una matriz de datos.

En el primer bloque de tablas (apartado VI.2.) se recogen las producciones de los alumnos tal cual fueron realizadas, por lo que incluyen faltas de ortografía en algunos casos, y las siguientes variables: coherencia del enunciado, si se había resuelto correctamente el problema inventado, el tipo de problema según el número de pasos, estructura semántica y operatoria, número de cifras empleadas en la invención, conjunto numérico elegido en el problema formulado y si se había formulado más de una pregunta en el enunciado.

El segundo bloque de tablas (apartado VI.4.) recogen en la horizontal, la clasificación de los problemas que se les habían propuesto a los estudiantes en base a si los consideraban fáciles y si éstos los resuelven correctamente o no los resuelven.

El último tipo de tabla (Tablas VI.1 a VI.7) que se elaboró para cada uno de los cursos, presentaba en la vertical distintas categorías, donde se agrupaban las respuestas de los alumnos acerca de la cuestión que se les preguntaba, como por ejemplo, si creían que la resolución de problemas es importante y por qué.

IV.3.2 ANÁLISIS DE LOS DATOS

Los datos recogidos en las entrevistas fueron analizados de forma cualitativa. Las entrevistas, una vez transcritas, se sometieron a un análisis que permitió detectar elementos del pensamiento de los estudiantes, a partir de sus expresiones, gestos y actuaciones. A su vez dieron lugar a tablas que fueron sometidas a un análisis cuantitativo centrado en la interpretación de los patrones que mostraban las producciones de los estudiantes.

Los datos del cuestionario-prueba se han analizado estadísticamente, usando elementos de estadística básica. Las variables cualitativas son descritas utilizando frecuencias absolutas y porcentajes, presentados en tablas y en gráficas de barras. En las tablas se muestran las frecuencias y porcentajes correspondientes a cada categoría de las variables cualitativas estudiadas. Para cada una de estas variables, se representan dos tipos de datos en gráficas de barras: frecuencias absolutas por ciclo o curso y, porcentajes en cada curso o ciclo. Para estudiar las diferencias por cursos o ciclos de las variables cualitativas se ha realizado un análisis bivariante mediante tablas de contingencia y se ha aplicado la prueba estadística de Chi-cuadrado de Pearson en el caso en que la frecuencia esperada fuese superior a 5 en al menos el 80% de las casillas con las opciones de respuestas de las variables (Dugard, Todman y Staines, 2010). En el caso de respuestas múltiples el test de Chi-cuadrado usado fue una variante de éste, corregido por la dependencia entre las respuestas múltiples de un mismo sujeto (Field, 2009). La prueba estadística de Chi-cuadrado se realiza con el objetivo de contrastar la hipótesis nula de igualdad de comportamiento entre los cursos o ciclos. De este modo el que la prueba sea significativa implica la negación de igualdad entre cursos o ciclos, indicando diferencias de comportamiento según el curso o ciclo o, lo que es equivalente, una relación de dependencia entre la variable y el curso o ciclo al que el alumno pertenece. En el caso de estudio de otras dos variables de interés, la interpretación es equivalente: la relación de respuestas en las categorías de una de las variables, depende de las categorías de clasificación de la otra variable de estudio (varía en función de las categorías de las variables). En otras palabra, la relación de respuestas entre categorías son diferentes (Noruis, 2011).

Las pruebas estadísticas se realizaron a un nivel de significación del 5%. El software utilizado fue el IBM SPSS versión 19.

Toda esta información está recogida en el capítulo VII.

IV.3.3. ELABORACIÓN DE CONCLUSIONES

Para la elaboración de las conclusiones se tienen en consideración los resultados de las dos partes de este trabajo, la relación que ha aparecido entre las mismas y si los resultados de la parte B confirman los obtenidos en la parte A. Esta información constituye el capítulo VIII.

IV. 4. CRONOGRAMA DE LA INVESTIGACIÓN

Como cierre a este capítulo presentamos una descripción del cronograma seguido en el desarrollo de esta investigación, detallando las acciones concretas realizadas y las personas implicadas en cada periodo de este trabajo, así como el centro escolar en el que se trabajó (Tabla IV.6).

Periodo	Acciones	Centro	Personas implicadas
Anterior al año 2001	Preparación entrevistas individuales		Encarnación Castro Jorge Cázares Luís Rico
20 Febrero 2001	Realización de encuestas individuales	C1	
Marzo 2001	Preparación entrevistas por parejas		
Del 17 al 20 de Abril de 2001	Realización entrevistas por parejas	C2	
Septiembre a Octubre de 2007	Decisión del tema a investigar. Estudio de posibilidades y elección del tema		María Fernanda Ayllón Encarnación Castro
Octubre de 2007 a Mayo de 2007	Transcripciones de las entrevistas		
Mayo de 2007 a Junio de 2011	Elaboración y redacción del marco teórico		María Fernanda Ayllón Encarnación Castro Marta Molina
Marzo 2008 a Enero de 2010	Análisis de los datos de las entrevistas a parejas		
Marzo a Mayo de 2010	Preparación de la encuesta/prueba		
19 de Mayo a 4 de Junio de 2010	Realización de la encuesta/prueba	C3	
Septiembre 2010 a Enero 2012	Análisis de los datos de la encuesta/prueba		
Enero-Febrero 2012	Elaboración de conclusiones		
Marzo- Abril 2012	Formalización del informe de investigación		

Tabla IV.6. Cronograma de la investigación realizada.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS ENTREVISTAS

Se presenta en este capítulo un análisis cualitativo de cada una de las entrevistas realizadas a las parejas de escolares pertenecientes a los diferentes cursos de primaria. Se inicia el análisis, en cada caso, con una breve descripción general del comportamiento de cada pareja de alumnos y se continúa tomando en consideración cuatro factores, o componentes que están presentes en las preguntas del entrevistador y tienen que ver con:

1. Creencias que muestran los alumnos acerca de los problemas y su resolución.
2. Enunciados inventados por los alumnos y proceso de resolución de los mismos por sus compañeros.
3. Etiquetado de problemas como fácil o difícil.
4. Elementos que caracterizan un problema difícil.

En un último apartado recogemos a modo de resumen aquellos aspectos que consideramos más genéricos en el desarrollo de las entrevistas.

V.1. ENTREVISTA J.A.- R.L. (1º CURSO)

Desde el principio de la entrevista J.A. muestra una actitud relajada. En la primera parte de la entrevista participa menos que su compañero y tarda en responder. Pasado un tiempo trata de adquirir protagonismo y se muestra muy hablador. Por su parte, R.L., a lo largo de la entrevista, se muestra inquieto y nervioso. No deja de tocarse las manos y el pelo, y gesticula con frecuencia. Mira poco al entrevistador, muestra cierta timidez.

En la primera parte de la entrevista se muestra más participativo y responde rápidamente a las preguntas que se le hacen. Posteriormente, presenta una actitud pensativa y retraída y tiende a dejarse llevar por las respuestas de J.A.

V.1.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE J.A.- R.L.

El entrevistador pregunta qué es un problema de matemáticas. La respuesta es rápida por las dos partes. R.L.: "sumas y restas". J.A. reafirma: "las restas".

A continuación se les pregunta dónde resuelven problemas. J.A. contesta inmediatamente: "en el colegio". Se les insiste que piensen en otros lugares, el entrevistador les hace algunas propuestas: "¿en la escuela?", "¿aquí, en el cole?", "¿y dónde más?", "¿en el supermercado resuelven problemas?". Ellos no reconocen resolver problemas ni en casa ni al hacer la compra. Cuando el entrevistador les nombra los deberes recuerdan unas actividades sobre bocadillos y otra relacionada con unos niños en la playa, que habían realizado, las dos muy difíciles, y que identifican con resolver problemas, aunque no se hace explícito en qué consisten estas actividades.

El entrevistador les pregunta ¿qué es un problema? a lo que R.L. responde: "la suma". Y cuando el entrevistador insiste, responde: "la resta". De nuevo J.A. repite la última palabra que dice R.L.: "la resta".

Tratando de que relacionen problemas con problemas aritméticos, el entrevistador les pregunta si esos problemas que inventaron en la clase anterior tienen números y en caso afirmativo, para qué sirven éstos. Ambos estudiantes afirman a la vez que sí a la primera parte de las preguntas, demorándose un poco en responder a la segunda cuestión. R.L. insiste de nuevo en la operación suma al indicar: "los números sirven para hacer sumas". J.A., por su parte, no habla de operaciones y alude a una posible respuesta a un problema: "pues yo que sé, para saber cuántos años tiene uno..."

El entrevistador hace varias preguntas a los niños sobre la utilidad de las operaciones de suma y resta en los problemas. La respuesta de ambos es la misma: "para aprender" R.L. vuelve a referirse a la suma y la resta: "para aprender a sumar", "y a restar". Cuando el entrevistador insiste para que le digan algo más, establece relaciones de orden entre los números: "Que el 5 es mayor que el 2, y el 2 es menor que el 5".

Entendemos por creencias aquello que manifiestan los estudiantes en respuesta a la cuestión planteada.

V.1.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE J.A.- R.L.

El entrevistador les comunica que van a inventar problemas. En este punto J.A. se anima, relaciona las ideas tratadas hasta ese momento en la entrevista planteando progresivamente las siguientes cuestiones: "¿con números?", "¿podemos poner sumas y restas?", "¿puede ser restar para abajo uno que es muy grande y luego es muy chico y no sabes cuántas son?" El entrevistador responde a esas inquietudes indicando que como ellos quieran, siempre que sea un problema.

R.L. piensa sobre lo que va a inventar y J.A. escribe rápidamente. Al terminar la tarea los dos niños se muestran contentos y sonrientes. Ambos han inventado una operación aritmética con números de dos cifras: R.L. ha escrito «10+10» y J.A. «¿39-20?». Están seguros de que no han de modificar nada en sus enunciados y que éstos se pueden resolver.

Al pasar a resolver el "problema" planteado por el compañero, J.A. afirma que es fácil encontrar el resultado de la operación propuesta por R.L., dice que es veinte tras realizar el cálculo mentalmente, utiliza la estrategia de basarse en hechos numéricos conocidos. Posteriormente explica su estrategia: "Porque una decena y otra decena es 20*",* "la suma de dos decenas es veinte*"*, poniendo de manifiesto que reconoce 10 como una decena. Cuando el entrevistador les pide que escriban su respuesta, parecen no entender qué han de hacer pues se quedan quietos. Al cambiar la petición preguntando a J.A. si ya ha resuelto el problema, éste reacciona y escribe el resultado de la suma.

Al finalizar J.A. mira el trabajo que está haciendo R.L. que aún no ha terminado y se muestra inseguro. J.A. le va corrigiendo: "te estás equivocando. Si es menos, ¿por qué pones un 50?" (J.A. parece que se refiere a que el resultado de una resta no puede ser mayor que el minuendo). R.L. cuenta desde el minuendo hasta llegar al substraendo utilizando sus dedos. Toma dos veces las dos manos para conseguir veinte dedos. Hace una pausa para pensar qué número es el anterior a 24, pierde la cuenta y el resultado que obtiene es 20 y no 19, como sería lo correcto. Con el objetivo de que reconozca su error el entrevistador le pregunta cuánto es la suma de 20 y 20. Realiza el cálculo mentalmente y vuelve a equivocarse y responde: "veinte y veinte son treinta. Hace un comentario: "Pero eso es menos". Entendemos por este comentario que conoce que la suma de substraendo y resultado ha de ser igual al minuendo. Se siente insatisfecho del resultado obtenido pero no percibe donde está su error.

En este proceso de resolución de la resta 39-20, R.L. manifiesta dificultades que pueden ser debidas a la tarea o a cierta ansiedad causada por la atención y comentarios continuados que recibe de J.A. Ha estado muy pendiente de cómo resuelve R.L. el problema y le ha ido cuestionando lo que hace. Esta circunstancia provoca que R.L. borre lo que ha escrito y se muestre inseguro. Ha indicado a J.A. cómo seguir cuando se para en veinticuatro y le dice: "veinte tres, veinte dos" dando muestras de conocer el proceso de conteo hacia atrás en el tramo de la tercera decena. Ambos alumnos se muestran seguros de sus resultados.

Ante la pregunta del investigador sobre si las operaciones que han inventado se pueden resolver de otras maneras, ambos se quedan pensativos. R.L. responde que sí pero no hace ninguna propuesta. J.A. recuerda una forma que les enseñó el maestro que consiste en separar los números en decenas y unidades y sumarlas separadamente. Observamos que hace referencia a un conocimiento procedimental el cual considera aplicable para la resta 39-20 pero no para la suma 10+10: "10+10 no se puede hacer de otra manera pero para 39-20 sí, ya que tiene los números más grandes*"*.

V.1.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE J.A.- R.L.

El entrevistador explica a los estudiantes que les va a mostrar unos problemas para que decidan si son o no difíciles. J.A. pregunta: ¿tendrán números como 999, 800 o 900?, a través de estas preguntas entendemos que relaciona la dificultad de los problemas con la magnitud de los números involucrados.

A continuación el entrevistador lee cuatro problemas estableciéndose un diálogo entre él y los escolares sobre la dificultad de cada uno de ellos.

Primer enunciado (P, 1)*: «Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas. También compró una goma. En total pagó 35 pesetas. ¿Cuánto vale la goma?»*

Los dos niños responden con rapidez que el problema presentado por el entrevistador es fácil, aunque rápidamente J.A. plantea algunas dudas: "¿Dónde está la goma?" y "¿Qué es lo que vale?". Se muestra confuso sobre cuál es el dato que se ha de obtener para resolver el problema. Ante una nueva lectura del problema, responde con prontitud y seguridad afirmando que la goma vale 35 ó 19 pesetas (ambas cantidades aparecen dadas en el enunciado del problema). Ante la insistencia del entrevistador sobre si se trata de un problema fácil o difícil explica "Yo no encuentro cuánto vale la goma 19 ó 35 pesetas*"* y procede a sumar las dos cantidades para hallar el precio de la goma utilizando el algoritmo estándar de la suma.

R.L. sostiene que el problema es fácil, si bien no da las razones de por qué lo es ni dice si lo ha resuelto o no. Se muestra muy callado siendo su intervención posterior a la de su compañero, por lo que no podemos decidir sobre si se trata de su opinión sobre la dificultad del problema o copia al compañero.

Segundo enunciado (P, 9): *«Luís ha comprado 3 Fantas y María otras Fantas más. Al final los dos tienen 11 Fantas. ¿Cuántas Fantas compró María?»*.

Al leerlo la reacción de J.A. es de alegría, exclama: "¡Éste sí que está guay!" Al igual que en el anterior problema, su primera respuesta es inmediata y como solución da un dato del enunciado, 11. Cuando se le advierte que no se pregunta cuántas fantas tienen entre los dos, responde "¿3?, ¿4?, ¿5?, ¿6?, ¿7?, ¿9?, ¿15 pueden ser?*"* propone números tratando de averiguar la respuesta correcta. Concluye que es difícil cada vez que no ha recibido una respuesta afirmativa por parte del entrevistador.

R.L. parece de nuevo dejarse llevar por la respuesta de J.A. reconociendo este problema como difícil no dando justificación de su respuesta.

Tercer enunciado (P,11)*: «Una Pepsi vale 47 pesetas Si Julio tiene 25 pesetas y quiere comprar una Pepsi, ¿cuántas pesetas le faltarán para comprar la pepsi?»*.

J.A. se alegra al leer el enunciado. Dice que el problema es fácil y lo resuelve siguiendo una estrategia de contar hacia adelante desde el número menor hasta llegar al número mayor, utilizando objetos. En principio intenta hacerlo contando con los dedos pero como ve dificultad en retener la cantidad, escribe los números del 1 hasta 47 en el papel, y cuenta a partir del 26, asignándole la etiqueta uno al número 26, dos al 27 y así sucesivamente hasta llegar al 47, obteniendo como resultado veintidós.

R.L. reacciona como en los problemas anteriores. Con sus gestos da a entender que le supone un gran esfuerzo pensar y afirma estar de acuerdo con que el problema es fácil y con lo hecho por J.A., sin justificar su respuesta.

Cuarto enunciado (P, 5): *«Ramón tenía algunas pesetas. Su madre le dio 35 pesetas más. Ahora Ramón tiene 50 pesetas ¿Cuántas pesetas tenía Ramón al principio?»*.

De nuevo en este problema J.A. responde rápidamente y da como solución un dato del enunciado, 35. No obstante entendemos que esta respuesta no es de la misma naturaleza que cuando en los dos primeros problemas responde con un dato del mismo enunciado, por la razón siguiente: J.A. no entiende por qué el entrevistador no da por válida su respuesta. La palabra más lo ha confundido, de sus comentarios se desprende que entiende que si le ha dado 35 pesetas más es porque ya tenía 35 de partida; esto lo pone de manifiesto con varias expresiones de justificación: "Su madre le dio 35 más, porque tiene otras 35. Pues 35 porque otras 35 más son 50. Y su madre le dio 35 más y tenía 50, pero antes tenía 35. Porque si dice que le da otras 35 más, pues entonces tenía 35". Cree además erróneamente que 35+35 es igual a 50.

R. L. repite en varias ocasiones el enunciado del problema planteado. Afirma que es difícil. En su justificación señala que el enunciado dice "algunas pesetas", señalando la cantidad inicial. La expresión "algunas" le desconcierta.

V.1.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN J.A.- R.L.

Tras la discusión sobre la dificultad de estos cuatro problemas, el entrevistador pregunta a los alumnos por lo que ha de tener un problema para que sea difícil. Ante esta solicitud, J.A. da una respuesta de tipo general: "Que no sepa hacerlo". Por su parte, R.L. responde utilizando un caso concreto, vuelve al último problema y da una explicación de por qué lo considera difícil: "Pues ese de Ramón que tenía algunas pesetas. Yo qué sé cuántas pesetas tenía". J.A. cambia su respuesta por "No sé" R.L. repite también "No sé".

V.1.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA J.A.- R.L.

En muchas ocasiones de la entrevista, uno de los estudiantes (ocurre en ambos casos) se deja llevar y se limita a responder lo que dice su compañero. J.A. muestra este comportamiento en la parte previa a la invención, mientras que R.L. lo hace a partir de la resolución de los problemas inventados, tras haber experimentado dificultades en dicha resolución.

Ambos estudiantes ponen de manifiesto, tanto en sus respuestas como en el problema inventado, que para ellos un problema es una operación aritmética. A su vez, vinculan los problemas únicamente a labores escolares.

Presentan dominio del cálculo escrito aditivo con números de dos cifras, en el cálculo mental cometen errores. J.A. muestra un buen sentido numérico al realizar algunas operaciones de forma mental, haciendo uso de la equivalencia entre diez unidades y una decena, considerando números como objetos contables (asigna uno a 26, etc.) y al corregir a su compañero en la resolución de la resta 39-20 basándose en la magnitud de los números y el significado de dicha operación. También muestra conocimiento procedimental de los algoritmos estándares de la suma y la resta. R.L. utiliza estrategias de conteo hacia atrás para el cálculo de la resta.

En cuanto a la consideración de los problemas presentados por el entrevistador, intentan resolverlos y les parecen difíciles aquellos que no saben resolver o no están seguros de haber resuelto bien. Solo es resuelto el tercer problema, de igualación, con uno de los sumandos desconocidos y no resuelven los de combinación con sumando desconocido. En un primer momento (en los dos primeros problemas) tienden a dar como resultado del problema alguno de los números que aparecen en el enunciado del mismo, realizar alguna operación conocida entre los datos o dar respuestas al azar. Posteriormente no ocurre así. Resuelven los dos últimos problemas aunque en el cuarto (problema de cambio con la cantidad inicial desconocida) se produce una confusión en la interpretación de la palabra “más” unida al error de confundir que 50 es igual a 35+35, que lleva a una solución no correcta.

Cuando se les pregunta por la caracterización de un problema difícil se observa que uno de los estudiantes ha generalizado y el otro hace referencia a un caso particular. En ambos casos la consideración es no saber resolver el problema, pero no indican cuales pueden ser las causas para ello.

V.2. ENTREVISTA U.T.- J.N. (1º CURSO)

Ambos estudiantes están sonrientes y se muestran atentos a lo largo de toda la entrevista; manifiestan su complicidad mirándose con frecuencia. U.T. exterioriza su satisfacción sobre estar siendo grabado en vídeo. Este alumno es más hablador que su compañero J.N. el cuál utiliza con frecuencia los gestos para responder a las cuestiones formuladas. A lo largo de la entrevista es variable quién lidera la respuesta de las diferentes cuestiones de la misma.

V.2.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE U.T.- J.N.

El entrevistador pregunta a los estudiantes si suelen resolver problemas en clase y en casa, J.N. asiente y confirma: "todos los días". U.T. solo asiente. Sobre la pregunta de si resuelven problemas en el supermercado J.N. asiente con la cabeza y U.T. matiza su respuesta: "pues si me traigo una libreta y un boli". U.T. asegura que cuando va al mercado va sumando y pone un ejemplo: "digo esto vale por lo menos… sumo 17 euros más…no se qué…17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28". Por su parte J.N. dice: "algunas veces tengo problemas" y posteriormente añade "casi nunca" no haciéndose explícito a qué tipo de problemas se refiere aunque la expresión "tengo" nos sugiere que se refiere a problemas no necesariamente matemáticos.

El entrevistador pregunta a los niños si saben qué es un problema. Ambos expresan concepciones diferentes. J.N. responde rápidamente: "Una cosa que tienes que resolverla". U.T. después de meditar su respuesta responde: "Pues la suma".

Cuando se les pregunta si los problemas tienen números y para qué sirven los números del problema, U.T. vuelve a relacionarlo con la suma y pone un ejemplo: "si pones un cien más doscientos algo, eso sí que es un problema". Por su parte, J.N. explica que los números sirven "para ponértelo más fácil". Entendemos que J.N. considera que los números facilitan la resolución del problema.

El entrevistador pregunta para qué creen que sirven las operaciones de los problemas, J.N. dice: "Para aprender. Para saberlos". U.T. que anda despistado no responde a la pregunta pero entra en la conversación argumentando que: "[...] el maestro nos enseña" (se refiere a resolver problemas). Entendemos que las respuestas de los niños no es una respuesta a la cuestión planteada sino que hace referencia a la adquisición de conocimiento.

V.2.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE U.T.- J.N.

El entrevistador les plantea que inventen un problema. Antes de comenzar a escribir U.T. pregunta a J.N. "¿tú cuánto sabes contar?" y éste responde "cuatrocientos mil". Los dos estudiantes proceden a redactar sus enunciados.

Una vez que han escrito sus producciones el investigador lee el problema que ha inventado U.T.: "«¿Cuántas camisetas hay en el mercado?»". Al preguntarle si es un problema que se puede resolver, U.T. explica: "Él se lo tiene que inventar". Entendemos que se refiere a que se debe inventar la respuesta. J.N. matiza la propuesta de su compañero: "Será cuántas hay en una tienda del mercado". U.T. justifica el que en el enunciado no se haga referencia a una tienda de supermercado: "En el mercado pueden estar porque cuando yo voy al mercado ¿no? tiene camisetas o lo que sea".

El entrevistador lee el problema planteado por J.N.: "«¿Qué le falta a la fuente?»*"* y pregunta a J.N. si es un problema que se puede resolver. J.N. responde moviendo la cabeza afirmativamente.

Observamos que en ninguno de los dos casos, al proponer un problema, no se ha considerado el dialogo mantenido previamente con el entrevistador sobre la presencia y utilidad de los números en un problema.

Se cambian los folios entre ellos para que procedan a resolver los problemas. J.N. pregunta: "¿Puedo poner un número muy alto, muy alto?". U.T. le responde que puede poner mil. Se establece en ese punto una discusión, entre los niños, con cierta rivalidad por ver quien dice el número más alto.

El entrevistador pide a los niños que resuelvan el problema. J.N. muestra no estar seguro de qué hacer y está pendiente de su compañero. U.T. escribe y borra varias veces. Finalmente da su respuesta: "Le falta… el agua". Y la justifica: "Porque si la fuente está seca no puede venir el agua". J.N. confirma que la respuesta es la correcta. A la pregunta del entrevistador sobre si se puede resolver ese problema de otra manera contesta afirmativamente pero dice no saber cómo.

J.N. da como respuesta 454 al problema propuesto por su compañero, sobre el número de camisetas que hay en el mercado. U.T. rechaza esta respuesta: "Era mil, no has acertado". El entrevistador trata de que observe que en el enunciado no había información que pudiera hacer pensar a J.N. que la respuesta era mil, a lo que U.T. responde: "No le puedo decir que es mil porque si no se copia abajo". Ante la insistencia del entrevistador U.T. explica que esa es la respuesta correcta porque: "él (se refiere a J.N.) sabe contar hasta mil".

J.N. mantiene su respuesta y muestra dificultades para expresar oralmente el número que ha escrito. U.T. dice: "Entonces no sabes contar". Creemos ver que asocia no saber contar a no poder leer el número. También pensamos que la dificultad de J.N. para leer el número 454 que ha escrito pueden ser debidas a la presión de las diversas preguntas que le hacen en ese momento tanto U.T. como el entrevistador. J.N. reconoce que puede resolverse el problema de otras formas pues "hay muchos números, como ejemplo diez mil". De nuevo U.T. no considera correcta la respuesta pero en este caso juzga su razonabilidad atendiendo a si resulta o no lógica: "10.000 camisetas no vale, 10.000 camisetas en un mercado, llegaría hasta el cielo*"*. En estas afirmaciones que U.T. muestra comprender que 10.000 es una cantidad de un orden de magnitud muy superior a 1.000.

V.2.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE U.T.- J. N.

El entrevistador indica a los estudiantes que les va a leer unos problemas que han inventado otros niños, para que ellos decidan si son fáciles o difíciles de resolver. En esta parte de la entrevista los alumnos se esfuerzan por entender los problemas, preguntando sobre el enunciado cuando tienen dudas o no recuerdan algún dato.

Primer enunciado (P, 7): *«Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas. También compró una goma. En total pagó 35 pesetas. ¿Cuánto vale la goma?»*

U.T. afirma que es difícil dando la siguiente justificación: "Porque no sabemos cuánto vale la goma". El entrevistador sugiere el uso de los números del problema a lo que explica: **"**Vamos a ver, un lápiz es más que una goma y entonces la goma tendría que ser 19, porque la goma es menos, y 35 el lápiz". Observamos que U.T. asocia los dos números del problema con los precios de los artículos que aparecen en el mismo y como no le parece lógico que la goma cueste más dinero que el lápiz, cambia las condiciones dadas en el problema.

Parecería que J.N. ha estado al margen de la discusión entre el entrevistador y U.T. pero cuando el entrevistador le pregunta sobre cómo lo resolvería dice: "Poniendo aquí 19, como dijo U.T.". Ha copiado el resultado. J.N. considera que el problema es fácil.

Segundo enunciado (P, 3): *«Paco pagó con una moneda para comprarse una Pepsi que vale 47 pesetas y le sobraron 53 pesetas ¿De cuánto era la moneda con que pagó Paco?»*.

Los niños piden aclaraciones sobre algunos números del problema "¿Una lata o dos?, ¿Y le sobraron cuánto?", por lo que el entrevistador vuelve a leerlo. J.N. responde de inmediato: "De 100". Esta respuesta espontánea, no la justifica cuando se le pide que cómo sabe que es de 100, dice habérsela inventado: "Me lo acabo de inventar". "No sé si está bien o está mal". Ante esta falta de justificación no podemos afirmar que J.N. haya resuelto el problema a través de operar con los números, pero nos atrevemos a afirmar que posee un buena intuición para reconocer resultados por estimación.

Los dos niños dicen que es un problema difícil. Posiblemente J.N. repite lo que dice U.T., pues cuando de nuevo el entrevistador pregunta si se puede resolver el problema, asiente sin mucho convencimiento. U.T da como resultado del problema un dato del mismo, y afirma que la moneda con la que se pagó es de 47 pesetas. El entrevistador le plantea si existen monedas de 47 pesetas y J.N. rápidamente responde que no. U.T al entender que no ha resuelto bien el problema dice que es difícil.

Tercer enunciado (P, 5): *Ramón tenía unas pesetas, su madre le dio 35 pesetas más. Ahora Ramón tiene 50 pesetas. ¿Cuántas pesetas tenía Ramón al principio?*

J.N. responde con rapidez, quiere ser el primero en dar la respuesta. Los dos estudiantes responden que son 35. Al decirles el investigador que esas son las pesetas que le dio su madre, U.T. modifica su respuesta y dice: 50. Como el entrevistador les sugiere que 50 era lo que tenía al final concluyen que el problema es difícil. U.T. expresa "más difícil*" y* J.N. dice "más todavía*"*. La justificación dada por U.T. se refiere a la ausencia de cantidad en la primera frase del enunciado: "Pues vamos a ver. No se sabe porque aquí (señalando el texto) no tiene número. Tendría…"

Cuarto enunciado (P, 9): *«Luís ha comprado 3 Fantas. María otras más. Al final los dos tienen 11 Fantas. ¿Cuántas Fantas compró María?».*

Las respuestas de los dos niños en este caso son rápidas. Inicialmente U.T. después de decir tres, un número del enunciado del problema, pregunta: "Que si juntamos los dos onces serán veinte" (cuenta con los dedos). J.N. afirma que es ocho y mantiene su respuesta mostrándose en desacuerdo sobre que la respuesta sea 20, por ser demasiado grande: "se pasa". Estas observaciones de J.N. así como el resultado correcto que da del problema, apoyan nuestra consideración anterior sobre la capacidad que tiene J.N. para hacer cálculo mental y estimación de resultados de operaciones.

Los dos estudiantes concluyen que el problema es difícil, si bien J.N. da su respuesta después de U.T. como hace a lo largo de la entrevista cuando se le pide su opinión.

Quinto enunciado (P, 1): *«Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas y una goma que vale 6 pesetas ¿Cuánto tiene que pagar? ».*

U.T. responde rápidamente: “Difícil”. Después de escuchar de nuevo el problema a petición suya, muestra haber identificado la estructura del problema reformulando parte del mismo: “Si juntamos los dos, la goma y el lápiz, ¿cuánto valdría?”. Inmediatamente da 24 como respuesta, habiendo realizado el cálculo con cierto apoyo del conteo con los dedos.

A la pregunta del entrevistador de si es un problema difícil U.T. responde: “Si es 24 no es difícil, pero si no es 24 sí que es difícil”. Observamos que U.T. supedita la facilidad del problema a la corrección de su respuesta y no está convencido de que ésta sea correcta. J.N. considera que el problema es fácil, aunque a continuación pide que se le repita el enunciado, realiza la suma empleando los dedos, y obtiene la respuesta correcta. Justifica que su respuesta es correcta diciendo: “Porque lo he sumado”.

Sexto enunciado (P, 8): *«Paco tenía 35 canicas. Después jugó y perdió 7 canicas. ¿Cuántas le quedaron? ».*

Después de contar con los dedos y escribir en el folio U.T. da como respuesta 27 explicando “Porque perdió 7 y nosotros vamos contando…vamos contando”. Señala con los dedos y hace como si contara hacia atrás. Muestra haber relacionado el verbo perder con la operación de substracción, si bien se equivoca cuando realiza el conteo.

J.N. no resuelve el problema ha visto lo hecho por su compañero y asegura que es fácil. U.T. le sigue y dice que es fácil.

V.2.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN U.T.- J. N.

Al finalizar el último problema, se les cuestiona sobre los elementos que caracterizan un problema difícil. La respuesta de los niños es inmediata. J.N dice: “Números altos y preguntas difíciles”. U.T. asegura: “Eso es lo que quería decir yo. Preguntas difíciles”.

V.2.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA U.T.- J. N.

Estos dos estudiantes, con sus respuestas, dan muestras de entender que la resolución de un problema está vinculada a la invención de una respuesta razonable en el contexto descrito por el mismo. Puede haber influido en ello el hecho de que se les ha pedido que inventen un problema y es posible que entiendan que la respuesta también hay que inventarla. Solo reconocen hacer problemas en el contexto escolar y fuera de él si disponen de útiles para escribir.

Consideran que un problema es algo que hay que resolver y en uno de los casos se hace mención a problemas no matemáticos y en otro de los casos se identifica problema con operación aritmética. Cuando han de plantear un problema no utilizan números pero sí enuncian una frase en la que hay un interrogante, a responder con un número, en uno de los casos. Consideran que la inclusión de números en un problema facilita su resolución.

Por lo general, tienden a resolver el problema propuesto para decidir si es fácil o difícil, haciendo, a veces, coincidir la solución con uno de los datos del problema. Solo consideran fácil el problema de cambio-separación con resultado desconocido.

Tienden a utilizar el conteo como estrategia para realizar los cálculos, apoyándose en el uso de los dedos, mostrando algunas dificultades en su ejecución. Uno de ellos muestra gran coherencia en las respuestas dadas como solución a los problemas planteados.

Respecto a los factores que intervienen en la dificultad de un problema, de forma general, indican que son difíciles aquellos problemas que tengan números altos y preguntan difíciles.

V.3. ENTREVISTA C.N. (1º CURSO)-F.T.-M.R. (2º CURSO)

C.N. es una estudiante de primero que quiere participar en las entrevistas pero que no tiene pareja porque ésta ha faltado a clase. El entrevistador, para no dejarla desairada, decide unirla a la pareja de 2º curso formada por F.T. y M.R. aunque les realiza la entrevista casi separadamente. A lo largo de la entrevista las tres alumnas se muestran contentas y no dejan de sonreír, si bien en algún momento M.R. da muestras de cansancio. C.N. se comporta muy tímidamente, cuando interviene siempre lo hace con una sonrisa y con cierto nerviosismo. En ocasiones se deja llevar por las respuestas de sus compañeras y en otras, guarda silencio. M.R. está inquieta, se mueve continuamente. F.T. está relajada durante toda la entrevista. Es muy habladora y expresiva, disfruta de la actividad y participa constantemente. La entrevista a C.N. es más breve que a las otras dos alumnas, por ese motivo el análisis que se presenta es más sintético.

V.3.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE C.N.- F.T.- M.R.

El entrevistador tras unas frases de presentación procede a realizar las preguntas correspondientes. La primera pregunta es: “Y en su clase de matemáticas, ¿resuelven problemas…?" F.T. y M.R. reconocen que en clase resuelven problemas. F.T. especifica que los problemas que hacen en clase corresponden a los que hay en el libro de texto:

"[….] vamos con el libro y estamos repasando las cosas que teníamos anteriores".

Cuando se les cuestiona si hay otros lugares donde resuelvan problemas que no sean ni en el colegio ni en el libro de texto, las tres alumnas se refieren a problemas que resuelven en casa (tanto los que resuelven al hacer los deberes que les mandan, como los que les ponen sus padres). F.T.: “mi madre me puso sumas, restas y estoy empezando con las divisiones”; M.R.: “A mí mi padre, en un libro de matemáticas que tiene, me hace en un folio problemas y ahí los hago”; C.N.: “Mi madre me compra libretas. Pongo las respuestas”.

No reconocen resolver problemas cuando van a hacer la compra. M.R.:“Yo voy a comprar y ella (su madre) me dice lo que me queda pero que no hago problemas de chuches”. C.N. “paga mi madre”.

A la pregunta del entrevistador sobre qué es un problema, F.T. responde: “Un problema es que tengo por ejemplo 10 caramelos y mis amigas me piden 3. ¿Entonces cuántos caramelos me quedan?” M.R. y C.N. contestan que no saben decir lo que es un problema.

A continuación el entrevistador les pregunta si los problemas tienen números y para qué sirven los números en los problemas. F.T. después de un párrafo largo expresa: “… poníamos el número que valía y lo restábamos o lo sumábamos con otro”. M.R. contesta: “Para sumar, restar o multiplicar”. C.N. no contesta.

El entrevistador pregunta ahora para qué sirven las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir en un problema. M.R. responde: “Para saber lo que sale”. F.T. repite lo que dice su compañera y añade: “Y para aprender mucho más porque si haces más sumas, más restas, más multiplicaciones y más divisiones, sabes más y lo puedes hacer mejor”. C.N. dice que para comprar. F.T.: “Para aprender más y todo eso, porque si sabes más, llegas más pues llegas a ser más estudiante que las demás […]”.

V.3.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE C.N.- F.T.- M.R.

El entrevistador les comunica que van a inventar problemas y les pide que cada una ponga su nombre en el folio que les ha dado. Les indica que M.R. resolverá el problema de F.T. y viceversa. C.N. resolverá su propio problema. F.T. pregunta si pueden inventarse un problema sobre lo que quieran. A lo que el entrevistador le responde: “De lo que quieran ustedes, de multiplicar, de dividir, de sumar, de restar”.

Dada por finalizada la tarea de inventar un problema, el entrevistador lee el enunciado que ha escrito M.R.: "«Ana ha comprado 8 cajas de manzanas y en cada caja hay 4 manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total?"». A la pregunta de si cree que está bien ella asiente, contesta con la cabeza y decide que no ha de cambiar nada a su enunciado. Se procede a la lectura del enunciado inventado por F.T.: "«Miguel Ángel tiene 2 bolsas de pipas. Cada bolsa de pipas tiene 10 pipas. Da 8 a los niños. ¿Cuántas pipas le quedan a Miguel Ángel en total?»".

Se intercambian los problemas para proceder a su resolución. Mientras tanto el entrevistador lee el enunciado que se ha inventado C.N.: "«Ana ha ido a comprar al supermercado y ha comprado 3 libros y 10 caramelos y a sus amigos les ha dado 8. ¿Y en total?»" Esta estudiante asiente cuando se le pregunta si está bien el problema con los datos que plantea y niega cuando se le dice si quiere modificar lo que se ha inventado.

M.R. y F.T. están resolviendo los problemas. F.T. pregunta 4 x 8 son 48, ¿no?" M.R. responde: "No, 8 x 4 son 32". F.T. procede a contar con los dedos. Utiliza de una mano los cinco dedos y de la otra tres. Cuenta cuatro veces los ocho dedos. Dice que le sale 31. Pero según dice M.R. el resultado de 8x4 es 32 así, que vuelve a contar y escribe 32. El entrevistador le cuestiona si con esa operación puede resolver bien el problema. Ella responde que sí: "Porque me da muy bien. Es que lo he hecho dos veces y ha salido en la primera 31 y me he dado cuenta que era 32 […] lo he vuelto a contar y creo que no me he equivocado esta vez". A la pregunta si puede resolver de otra manera el problema, responde utilizando la propiedad conmutativa de la multiplicación: "Pues 4 x 8", y procede a resolverlo. Comienza de nuevo a contar con los dedos, en esta ocasión haciendo grupos de cuatro: "4 y 4, 16… 32. Me sale 32". El recuento es más rápido en este caso que cuando lo realiza de ocho en ocho. Muestra conocer el significado de la multiplicación, utilizando una suma reiterada para realizar la multiplicación.

M.R. ha resuelto el problema, cuando se le pregunta si cree que el problema está bien resuelto afirma que sí ya que ha restado. Se refiere a la segunda operación que es la única que escribe en el papel. El producto del número de bolsas (2) por las pipas que tiene cada una de ellas (10) lo hace mentalmente. A la petición de si puede comprobar el cálculo dice: "Pues haciendo 13 - 8. No, 13 + 8" (comete un error al decir el resultado de la resta 20-8). Como se ha equivocado al hacer la resta el entrevistador le propone que haga la operación de nuevo. M.R. revisa la operación 20-8, utiliza los dedos, cuenta en silencio y obtiene la respuesta correcta que comprueba sumando la diferencia y el substraendo. C.N. dice que la operación de restar con la que se resuelve el problema que ha inventado está bien. Su argumento es: "Porque en clase […] pues me enseñan a sumar y a restar". Y asegura que no hay otra forma de resolverlo.

V.3.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL POR C.N.-F.T.- M.R.

El entrevistador explica que les va a presentar una serie de problemas para que ellas decidan si son difíciles o fáciles. F.T. le pregunta: "Es decir, si es más fácil que el que hemos hecho nosotros, ¿no?". El entrevistador responde que también pueden compararlos con otros que conozcan. Presenta primero unos problemas a M.R. y F.T. y, posteriormente, al final de la entrevista, hace lo mismo con C.N.

Primer enunciado (P, 5): *«Ramón tenía algunas pesetas. Su madre le dio 35 pesetas más. Ahora Ramón tiene 50 pesetas ¿Cuántas pesetas tenía Ramón al principio?»*

F.T.: "¡Ya sé!, hay que averiguar las pesetas que tenía Ramón al principio porque "Ramón tenía algunas pesetas". M.R. dice: "55". Por su actuación en otros problemas creemos que da como resultado un dato del enunciado y que, por despiste, dice 55 pesetas en lugar de 50. Esta respuesta hace pensar a F.T. y dice que es un problema difícil. Lo cual no le impide que intente resolverlo: "Éste es difícil, más difícil que los que hemos visto pero vamos a ver si lo podemos hacer". "A 35 que le daban le restamos 50 y entonces es lo que le faltaría a éste". Reconoce que es un problema que se resuelve mediante una resta y al describir la operación cambia el orden del minuendo y el substraendo. M.R. dice: "Yo creo que son 80". F.T. gesticula con las manos, se ríe y pregunta: "¿80 le van a faltaaaar….?" Parece dejar entrever que entiende que 80 no puede ser el resultado. Vuelve a insistir: "Yo, a los 35 que hay aquí, le restaría los 50 y ésas son las que le faltaban, las que tenía Ramón".

El entrevistador pregunta a M.R. cómo resolvería el problema. M.R. se encoge de hombros y añade: "No sé, contando, sumando. No sé, 35 más 50".

Considera, igual que F.T. que este es un problema difícil.

Segundo enunciado (P, 7): *«Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas. También compró una goma. En total pagó 35 pesetas. ¿Cuánto vale la goma?»*

M.R. da como solución "35". Un dato del problema: El entrevistador le advierte que eso es el total y F.T. le explica lo que dice el problema y lo que hay que hacer para solucionarlo: “No, lo que quiere referirse […] que Pepe compró un lápiz con 19 pesetas y también compró una goma. En total, 35. Entonces le tenemos que sumar a ver lo que nos sale hasta 35, es lo que creo yo”. Por la explicación de F.T. percibimos que la alumna comprende el enunciado y sabe cómo llegar a la solución. Utiliza la estrategia de contar el número de “saltos” que hay que dar para llegar desde el número menor hasta el mayor.

M.R. insiste en que la solución es 25. El entrevistador le pregunta de donde sale el 25 y responde: “de sumar, 19 más 5”. El entrevistador le vuelve a preguntar de dónde ha sacado el 5 y ella señala el 35 del enunciado. No está atenta en lo que está haciendo. Mientras tanto, F.T. ha estado haciendo operaciones y dice que el resultado del problema es 16.

El entrevistador pregunta si se trata de un problema más fácil o más difícil. F.T. contesta inmediatamente: “más fácil”. M.R. sigue distraída, se le repite la pregunta, y dice poco convencida: “más difícil”.

Tercer enunciado (P, 3)*: «Paco pagó con una moneda para comprarse una Pepsi que vale 47 pesetas y le sobraron 53 pesetas ¿De cuánto era la moneda con que pagó Paco?».*

F.T. comenta que no entiende el problema, el entrevistador lo lee de nuevo. M.R. responde: “una [moneda] de 47”. Nuevamente da como respuesta un dato del enunciado, pero se queda muy pensativa. F.T. señala que podría ser una moneda de 500 y M.R. indica: “de 100”. Afirma se trata de un problema más fácil. No ha operado ni da explicación de cómo obtiene la respuesta por lo que no hay indicios de si finalmente entendió el problema y realizó un cálculo mental o hizo una aproximación a la moneda más cercana a 47 o acertó por azar.

F.T. continúa preguntando: “Entonces espérate. Paco pagó con una moneda para comprarse una Pepsi, una Pepsi-Cola ¿no?, que valía 47 y el tenía 53, ¿no? Yo creo que ya sé cuánto son 6, le sobraron 6”. Ha cambiado el enunciado del problema, resuelve el nuevo enunciado y considera que se trata de un problema más difícil.

Cuarto enunciado (P, 9): *«Luís ha comprado 3 Fantas. María otras más. Al final los dos tienen 11 Fantas. ¿Cuántas Fantas compró María?».*

F.T. indica que el problema es muy fácil. M.R. va diciendo números: “6, 3”, vuelve a decir 6. Parece estar contando. Finalmente dice: "11". De nuevo da como resultado un dato del problema. F.T. interviene: "8 compró la otra. Porque de los tres que tenemos, es casi como el otro (percibe similitud entre las estructuras de los dos problemas, éste y el anterior) de los tres que tenemos sumamos 4, 5, 6, 7… y lo que nos quede con los dedos es eso". M.R. dice que el problema es más fácil y seguidamente, sin dar explicaciones, que más difícil.

Quinto enunciado (P, 11): *«Una Pepsi vale 47 pesetas. Si Julio tiene 25 pesetas y quiere comprar una Pepsi, ¿cuántas pesetas le faltarán para comprar la Pepsi?»*

M.R. dice: "47 pesetas". Vuelve a dar un dato del enunciado. El entrevistador le recuerda que eso es lo que vale la Pepsi no lo que le falta. A lo que M.R. continúa: "25 más… He contado 25 hasta… hasta 47". F.T. la escucha con atención y dice que ella ha hecho lo mismo. No llegan a dar la respuesta correcta, seguramente M.R. erró en el conteo, pero sí indican cómo llegan a obtenerla. Las dos coinciden en que es un problema más fácil.

Sexto enunciado (P, 13): *«Una Pepsi cuesta 47 pesetas ¿Cuánto costarán cinco botellas de Pepsi?»*

Las dos niñas responden inmediatamente y casi a la vez: "Muy difícil". M.R. explica: "Porque hay que contar mucho". F.T. indica: "Este es muy difícil porque si le quitamos los 47 a los 5 no sabemos... creo que quedarían 42". La estructura de este problema coincide con los que han inventado y han resuelto las dos niñas, sin embargo al serles leído por el entrevistador les parece algo extraño, no reconocible. Puede ser que en este momento estén cansadas o que se deba a que en este problema intervienen números de mayor magnitud y una variable nueva: el segundo dato se presenta dentro de la interrogación junto al dato a calcular.

A continuación recogemos las respuestas de C.N. a esta parte de la entrevista. Estas cuestiones fueron planteadas a C.N. al final de la entrevista de M.R. y F.T., una vez éstas abandonaron la habitación.

Primer enunciado (P, 1)*: «Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas. También compró una goma. En total pagó 35 pesetas. ¿Cuánto vale la goma?»*

C.N. ante la pregunta del entrevistador: "¿Tú crees que sea un problema más difícil o más fácil?" Responde: "así, así". Gira la mano varias veces, sugiriendo que el problema no es ni una cosa ni otra. Entiende el problema y plantea cómo resolverlo, refiriéndose a ir añadiendo términos desde el número menor hasta el mayor: “sumándole”. Habla muy bajito, sonríe. El entrevistador le dice: ¿Qué le sumarías? Y ella contesta: “19 hasta 35”.

Segundo enunciado (P, 7)*: «Pepe compró un lápiz que vale 19 pesetas y una goma que vale 6 pesetas ¿Cuánto gastó en total?»*

Dice que es un problema un poco más fácil. Y que la solución es: “13” (lo que escribe en el folio es 19 – 6 = 13).

Tercer enunciado (modificación de P, 3)*: «Paco compró una Pepsi de 47 pesetas, pagó con 50 pesetas ¿Cuánto le sobró?»*

En el folio realiza la resta 47 – 50 = 10 utilizando el algoritmo de la resta. Tras un tiempo responde: “10”. Asiente cuando se le pregunta si está bien el resultado. El entrevistador le insiste para que responda si es fácil o difícil pero no logra que C.N. conteste.

V.3.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL C.N.-F.T.- M.R.

El entrevistador pregunta: “¿Para ustedes qué creen que debe tener un problema para que sea difícil?” F.T. recuerda uno de los que se le han presentado previamente y da a entender que considera difíciles aquellos problemas en los que hay que contar mucho: “Por ejemplo, lo de la Pepsi, lo que tú has dicho, 45 vale la Pepsi-Cola, pues dice que un niño que nada más tiene 19. Pues tenemos que llegar... éste es un problema difícil porque tenemos que contar con los dedos hasta 45 y así no tenemos tantos dedos”. Para M.R. los problemas difíciles son aquellos que tienen números mayores como por ejemplo: “35 + 85, porque es un número muy mayor”.

El entrevistador le pregunta a C.N. lo que tendría que tener un problema para que fuera difícil. Su respuesta no es inmediata y el entrevistador tiene que ir sonsacándosela. “Pues 90….” Dice la estudiante. Continúa hablando tras insistirle el entrevistador, “90 menos…”, “menos 20”. El entrevistador le dice: “Una operación de resta, ¿verdad?, grande.” C.N. asiente. La entrevista finaliza.

V.3.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA C.N.- F.T.- M.R.

Las tres alumnas consideran que resuelven los problemas de los libros de texto y no lo hacen fuera del contexto escolar. No identifican problemas en situaciones cotidianas. A través de la entrevista se observa que las niñas saben lo que es un problema, pero no dan una definición o explicación sobre ello.

Las escolares de 2º curso indican que los números tienen que estar presentes en un problema para poder averiguar lo que se le pide. Realizan los cálculos sencillos mentalmente y el resto contando con los dedos, para la diferencia cuentan desde el minuendo hasta llegar al substraendo, el número de dedos utilizados es el resultado. Para la multiplicación utilizan el conteo de grupos iguales (sumas reiteradas) y aunque conocen el hecho numérico no lo utilizan para resolver el problema sino que lo hacen contando, el hecho numérico les sirve de referencia para comprobar si se equivocan, o no, al contar los dedos. En cuanto a propiedades de las operaciones muestran conocer que en una resta el minuendo es igual al substraendo más la diferencia y en el producto la propiedad conmutativa.

Los problemas que proponen son coherentes, muy sintéticos y con la información muy precisa. Inventan enunciados multiplicativos de grupos iguales y los resuelven correctamente, sin embargo, cuando el entrevistador les presenta uno similar en estructura no lo reconocen y aseguran que se trata de un problema difícil.

La comprensión de los enunciados de los problemas que se les proponen es variable, una de las estudiantes tiene mayor facilidad que la otra para dicha comprensión, reconociendo iguales estructuras en problemas diferentes. La que se muestra más cansada está más despistada; su respuesta inmediata cuando no comprende el enunciado es dar un dato presente en el mismo.

La decisión final para decir si un problema es fácil o difícil pasa por dar con la solución del mismo.

En cuanto a C.N. no inventa un enunciado coherente. Respecto de los problemas que le resultan fáciles o difíciles poseemos escasa información: el primer problema lo plantea bien pero no lo cataloga, el segundo opina que es más fácil pero lo resuelve mal y del tercero no se pronuncia sobre su dificultad y la solución que da es incorrecta. Los elementos que caracterizan a un problema difícil los intuye el entrevistador a raíz de su respuesta aunque ella no da una sentencia firme; parece referir a restas con números de varias cifras.

V.4. ENTREVISTA T.C.- J.I. (2º CURSO)

Estos dos estudiantes se muestran tímidos en la primera parte de la entrevista. J.I. es algo más decidido que su compañera y al principio sus intervenciones son más rápidas. T.C. cuando contesta, lo hace una vez que su compañero ha intervenido. En el resto de la entrevista ambos se muestran más cómodos e intervienen con más confianza. J.I. manifiesta su contento al saber que se les está grabando. Participan e intervienen por igual, aunque en la última parte T.C. suele tomar la iniciativa.

V.4.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE T.C.- J.I.

Comienzan la entrevista respondiendo a la pregunta donde suelen resolver problemas de matemáticas. J.I.: "…dicen que vale cinco duros y yo tengo veinte duros. Entonces le doy 20 duros y él me tiene que dar la vuelta, que son 15 duros". Reconoce que cuando compra chucherías realiza problemas ya que entrega dinero y el vendedor le tiene que dar la vuelta. T.C. dice que ella no resuelve problemas en situaciones de compra-venta: "Sí compro, pero no hago los problemas".

El entrevistador pregunta si saben qué es un problema de matemáticas. Los dos niños recuerdan la tarea que resolvieron el día pasado en clase de matemáticas. J.I. responde en voz baja y con las manos entrelazadas delante de la cara, aún se siente tímido "[…] que era de un hombre que iba a dar una vuelta en el barco, salió a las 11 y llegó a las 12 y teníamos que saber cuánto duró". T.C.: "Ayer hicimos una ficha de un problema, que era que un niño compró 8 lápices o lo que sea y... eran tres cajas con ocho lápices y teníamos que multiplicar tres por ocho".

A la pregunta de si los problemas han de tener números, J.I. hace distinción entre problemas: "Los de matemáticas sí…, pero cuando hacemos problemas de lenguaje tenemos que escribirlo". T.C. asiente tímidamente moviendo la cabeza. Ambos coinciden en que los números que hay en los problemas sirven para realizar operaciones con las que se resolverá el problema. : J.I. **"**Para sumar y restar". T.C. "y multiplicar."

V.4.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE T.C.-J.I.

El entrevistador les indica que cada uno de ellos ha de inventarse un problema muy difícil que seguidamente tendrá que resolver su compañero. Se aclaran algunas dudas planteadas por los estudiantes, por ejemplo, T.C. pregunta: "¿Pero escribiéndolo o lo hacemos con los números?" J.I.: "¿Escribiéndolo y después la respuesta?"...¿Ella tiene que saber si es suma o resta?

Una vez que tienen sus producciones el entrevistador lee el problema de J.I. «Ayer fui a una tienda y me compré 5 cajas de juguetes y en cada caja hay 100 juguetes. ¿Cuántos juguetes compré en total?» Se le da a J.I. la oportunidad de cambiar el enunciado, si lo considera necesario, pero lo deja como lo ha hecho. T.C. asiente con la cabeza cuando se le pregunta si puede resolver el problema que ha inventado J.I.: "Porque sé que es multiplicar y lo he entendido bien".

A continuación el entrevistador lee la producción de T.C.: «En una tienda se han vendido 100 lápices, luego 20, después 999 y por último 393. ¿Cuántos lápices se han vendido en total?» T.C. manifiesta que el problema que ha inventado está bien por lo que no necesita realizarle ninguna modificación. J.I. dice que ese problema lo puede resolver y lo hará mediante una suma. Ante la pregunta del entrevistador por qué cree que se resuelva con esa operación. J.I. duda y dice: "No, resta porque va quitando lápices, van comprando más. En la tienda van comprando lápices y cada vez hay menos". El entrevistador le dice: "Pero la pregunta es: ¿cuántos lápices se han vendido en total?" J.I. reacciona rápidamente, se da cuenta de su error: "¡Ah! Sumando".

Se intercambian los folios y proceden a resolver los problemas inventados. Ambos utilizan para ello los algoritmos estándares de lápiz y papel. Al concluir, T.C. confirma que la operación que ha realizado resuelve el problema: "Porque aquí pone que ayer fui a una tienda y me compré cinco cajas de juguetes y en cada caja hay cien juguetes, y tienes que multiplicar cinco por cien". Explica que la operación es correcta por su sencillez: "Pues porque la del cien y la del cinco son muy fáciles para mí."

El entrevistador pregunta a J.I. si la operación que ha realizado resuelve el problema. El niño asiente con la cabeza y explica: "Porque si quieres saber cuántos lápices se vendieron en total, tienes que ir sumando lo que estáis vendiendo". J.I.: se encoge de hombros cuando se le pregunta cómo sabe que el resultado obtenido es correcto: "Porque… no sé… mientras vas sumando, te va saliendo eso". El entrevistador le pregunta si conoce alguna manera de comprobar su respuesta. J.I. se queda pensativo. La suma que ha realizado tiene más de dos sumandos y eso le causa dificultades:

"Pues… sumando menos... es que así no se podía. Tenía que ser con dos, porque sumas éste más éste, menos éste y te da..." T.C. le dice que se está confundiendo con la prueba de la resta, y asegura que la operación que ha hecho J.I. es correcta.

Con el objetivo de que piensen si los problemas se pueden resolver de más de una forma, el entrevistador primero les pregunta si para los problemas que acaban de inventar habrá otra manera de resolverlos. T.C. dice no saber y J.I. apunta que él sólo conoce una y que si hay otra no la recuerda. El entrevistador les pregunta si eso mismo les ocurre con todos los problemas. J.I. explica que cuando tiene que multiplicar como en el libro de texto vienen las tablas, las mira para comprobar si lo ha calculado bien. T.C. a su vez reconoce que ella también ha recurrido en ocasiones al libro: "¡Yo también hacía muchas veces eso!, que por ejemplo, yo había hecho seis por seis y luego miro lo que había puesto y lo pongo". J.I. sigue reflexionando e identifica la propiedad conmutativa de la multiplicación como método alternativo: "Y si no está seis por dos, miras dos por seis".

Los dos escolares en su conversación con el entrevistador llegan a presentar la multiplicación como suma reiterada, T.C.: "Doce. Hombre, es que tienes que sumar dos veces seis" y lo consideran otra forma de resolver el problema, J.I.: **"**Entonces sí hay otra manera para saberlo". T.C.: "Pues sumando cien veces cinco o cinco veces cien, y es más fácil cinco veces cien porque es más corto".

V.4.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE T.C.-J.I.

El entrevistador explica que les va a mostrar unos problemas que inventaron otros niños. J.I. pregunta si son los que inventaron F.T. y M.R. Les dice que fueron otros niños que no conocen. La tarea consiste en que les digan si esos problemas son más difíciles o más fáciles.

Primer enunciado (P, 2)*: «Yo compré una caja de lápices de 195 pesetas y una goma. En total pagué 300 pesetas. ¿Cuánto vale la goma?»*

Los dos alumnos dicen que se trata de un problema más fácil. Dan sus argumentos explicando cómo lo resolverían. T.C.: "Para mí sí es fácil porque tienes que encontrar el número que sumándolo con eso, te dé 300". J.I. se confunde en la operación que hace mentalmente: "205 pesetas vale la goma. Porque para 100 más 200 son 300 y entonces, como les faltan cinco números para llegar a 200, digo 205, y después más... si le quitas el cinco será 995... 200". Ambos comprenden el problema.

Segundo enunciado (P, 3)**:** *«Paco pagó con una moneda para comprarse una Pepsi que vale 47 pesetas y le sobraron 53 pesetas. ¿De cuánto era la moneda con que pagó Paco?»*

De primeras los dos niños afirman, a la vez, que es un problema más difícil. Cuando el entrevistador les pregunta por qué lo creen así los dos se quedan muy pensativos. J.I. (después de tomarse un tiempo) concluye que la moneda era de 100 pesetas y explica cómo lo ha averiguado: "Porque 40 más 50 son 90, entonces 97 más 3 son 100". Ha realizado las operaciones mentalmente sumando primero las decenas y después le ha sumado las unidades de cada número. J.I. cambia su respuesta y dice que le parece fácil como el problema anterior (suponemos que el cambio se debe a que ha comprendido el enunciado y ha resuelto el problema). Por su parte T.C. afirma que no sabe cómo resolverlo y finalmente dice: "Es más difícil que el otro". J.I.: **"**Más o menos parecido". T.C.: **"**Para mí es mucho más difícil".

Tercer enunciado (P, 5): *«Ramón tenía algunas pesetas. Su madre le dio 35 pesetas más. Ahora Ramón tiene 50 pesetas. ¿Cuántas pesetas tenía Ramón al principio?»*

T.C. interviene afirmando que es un problema fácil que se resuelve restándole a 50 pesetas las 35 que le dio su madre, no resuelve el problema. J.I. parece distraído pero está calculando mentalmente la solución y da como respuesta 25 pesetas, explica: "Porque 50 menos 30 son 20 y estas cinco unidades se las damos porque éstas nos las hemos quitado y ya son 25*"*. El profesor trata que se dé cuenta que no es el resultado correcto: "Pero dices quitado, no aumentado". T.C., a la pregunta del entrevistador sobre cómo resolvería el problema dice: "50 menos 35". T.I.: **"**Yo es que éste lo veo tan fácil como el otro". J.I.: "Más fácil".

Cuarto enunciado (P, 11): *«Una Pepsi vale 47 pesetas. Si Julio tiene 25 pesetas y quiere comprar una Pepsi, ¿cuántas pesetas le faltan para comprar la Pepsi?»*

J.I. piensa en voz alta, intenta hacer las operaciones mentalmente, reconoce que tiene dificultades. El entrevistador le recuerda que no necesita que le diga el resultado sólo cómo lo resolvería y si es más difícil que los otros. Mientras tanto, T.C. lo ha resuelto y dice que el resultado: "es 22". J.I. afirma que se ha de calcular mediante la resta 47–25. T.C. asegura: **"**Más fácil, para mí es más fácil. J.I.: "Como los otros".

Quinto enunciado (P, 13): *«Una Pepsi cuesta 47 pesetas, ¿cuánto costarán cinco botellas de Pepsi?»*

T.C.**: "**Yo lo sé: tienes que sumar 5 veces 47". Reconoce que es un problema multiplicativo y de nuevo alude al significado de la multiplicación: "Sí porque si dice que cuánto costarán cinco botellas de Pepsi y una Pepsi vale 47, pues tienes que sumar… tienes que multiplicar cinco por 47. Es lo mismo sumar cinco veces 47 ó 5 por 47". J.I. comparte los argumentos de su compañera y coincide con ella en que se trata de nuevo de un problema más fácil.

Sexto enunciado (P, 14): *«En 8 estanques hay 64 ranas, ¿cuántas ranas hay en un estanque?»*

T.C. es de nuevo la primera en intervenir: "Pues yo creo que es 64–8". J.I. afirma rápidamente que no es así pero, piensa en voz alta: "Pues… Sumándole el 8, ocho veces… por ejemplo 64–8 lo sumas y entonces ya sabes cuántos peces quedan en un estanque y eso, vas quitando hasta que queda en uno 8 y sabes que en un estanque queda eso". T.C.: **"**Pues no lo sé, para mí éste es más difícil que los otros". J.I. no se pronuncia sobre la dificultad del problema.

Séptimo enunciado (P, 17): *«Javi tiene 20 helados y los quiere repartir entre sus amigos. ¿A cuantos amigos les podrá dar si regala 2 helados a cada uno?»*

T.C. reconoce que es un problema de división cuotitiva que propone resolver utilizando restas reiteradas: "Pues tienes que ir sumando… esto restando a 20 menos 2 hasta que llegues a cero… luego, los doses que le hayas restado, pues lo sumas y entonces ya lo sabes". J.I. ha escuchado atento el argumento de T.C. y ha realizado la operación mentalmente: "Entonces a 14 niños". El entrevistador le pregunta cómo ha llegado a ese resultado. J.I. acompañando su explicación con gestos dice: "Porque he ido sumando 2 + 2 y cada dos es un niño. 2 + 2 ya son dos niños, que son cuatro, y así hasta llegar a 20. Le puede dar a 14 niños". El investigador insiste: "Entonces será un problema más fácil o más difícil. J.I: **"**Fácil, fácil como los otros". T.C. no dice nada de la dificultad.

Octavo enunciado (P, 15): *«Hay 19 lápices y 15 cajas. Van a meter los lápices en las* *cajas, ¿cuántos lápices tocarían a cada caja?»*

Ambos niños establecen un diálogo a través del cual van dando forma a sus pensamientos. El entrevistador pregunta a J.I. si conoce la forma de resolver el problema, a lo que éste responde: restando 19-15. Como el entrevistador no le corrige dice: "Entonces en cada caja hay 2". T.C. no está de acuerdo con la respuesta: "Pero no está bien porque si 19-15, según el número que te quede entonces eso es lo que le vas quitando al 19 y ésos son los lápices que tocan a las cajas…""Entonces puedes ir quitando 2 hasta que llegues a cero y si no los has metido en 15 cajas, entonces es el número que…". J.I. manifiesta no saber resolver el problema y asiente cuando el entrevistador le pregunta si esto hace que lo considere un problema difícil. T.C. también lo considera difícil: "A mí también me parece un poco más difícil".

V.4.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN T.C.-J.I.

El entrevistador pregunta qué elementos creen que debe de tener un problema para que sea difícil. Los estudiantes dicen: J.I."Muchos números, dividir". T.C. "Dividir y multiplicar". Los niños explican que aún no saben dividir bien y por ello les resultan difíciles este tipo de problemas.

V.4.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA T.C.-J.I.

Estos alumnos de 2º curso reconocen que los problemas son tareas matemáticas y para explicar qué es un problema recurren a casos concretos, a enunciados que han trabajado en clase. No dudan en que los problemas matemáticos han de tener números, condición indispensable para que éstos se puedan resolver. Si bien uno de ellos muestra una concepción más amplia de los problemas, al aceptar que existen otro tipo de problemas que no incluyen números, refiriéndose a problemas no matemáticos, y al relacionar problemas con situaciones de compra-venta.

Muestran manejar números de tres cifras, y las operaciones de suma y productos sencillos entre ellos. Inventan y resuelven correctamente los problemas, poniendo de manifiesto conocer la propiedad conmutativa del producto, el significado de la multiplicación como suma repetida y de la división como resta reiterada.

Realizan operaciones mentalmente, a veces por descomposición y recomposición de los números, si bien en ocasiones no llegan al resultado correcto.

Entre los problemas aditivos, uno de los estudiantes considera muy difícil el de cambio con resultado desconocido y sentencia asociada ? - b = c. El otro estudiante considera que todos tienen dificultad similar, si bien en algunos tiene dificultad para llegar a la solución y en otros no. Respecto a los multiplicativos indican que son fáciles aquellos en que el resultado es desconocido, siendo los problemas multiplicativos con uno de los factores desconocidos los que les plantean dificultades y reconocen como difíciles. Ahora bien, en estos problemas se pone de manifiesto que no conocen la operación de dividir, como después indican, pero sí que lo intentan y a veces lo consiguen, resolver dichos problemas a través de restas reiteradas. En ocasiones no lo consiguen por falta de sistematicidad en el proceso.

En la mayoría de los casos indican si el problema es fácil o difícil después de tratar de resolverlo. Las respuestas sobre qué ha de tener un problema para ser difícil las dan de forma genérica, indican que tengan gran cantidad de números o las operaciones de producto y división.

V.5. ENTREVISTA A J.L.-E.L. (3º CURSO)

Las dos estudiantes participan animadamente en la entrevista, la cual transcurre en un clima agradable y de confianza. Al comienzo E.L. está algo inquieta, se toca la oreja y en ocasiones contesta con risa nerviosa. Entre las niñas existe complicidad, se miran con mucha frecuencia buscando el apoyo de una en la otra. Participan en igual medida excepto en la última parte de la entrevista en la que E.L. toma la iniciativa y J.L. se deja llevar por la opinión de su compañera.

V.5.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE J.L.-E.L.

El entrevistador les recuerda que unos días atrás habían trabajado sobre problemas y les pregunta si habitualmente resuelven problemas del mismo tipo que los que trabajaron ese día en clase. J.L. responde: “más o menos” y E.L. balbuceando: “Bueno, cuando hay una página, por ejemplo, solución de problemas, pues son todos de problemas. Pero nada más que una página en el tema”.

Al preguntarles sobre si resuelven problemas en otros lugares además de en el colegio, contestan a la vez, tratando de acordar una respuesta común: “No, bueno sí”. El entrevistador les insiste: “¿En casa, por ejemplo?” Las niñas dudan: “En casa, no”. Inicialmente lo niegan. Seguidamente J.L. se reafirma en sus afirmaciones previas: “Alguna vez, de vez en cuando he hecho algún problema, pero en casa nunca”. E.L.

cambia su respuesta afirmando: “Cuando nos mandan deberes”. El entrevistador les pregunta si resuelven problemas en el supermercado, E.L. explica: “Bueno, yo cuando me da mi madre dinero de sobra pues más o menos hago la cuenta” (si bien no se muestra muy convencida de que eso sea resolver problemas). J.L.: “Bueno algunas… cojo dinero y alguna vez no sé el dinero que va a costar, entonces yo tengo que hacer la cuenta”. Ante la insistencia del entrevistador en que piensen más lugares donde resuelven problemas E.L. añade: “Bueno yo, como tengo un bar, pues hay una piscina, entonces pues hay que pagar, …yo cuando se va la (persona) que está en la taquilla yo me quedo un ratillo y la gente que viene pues yo la atiendo y sé hacer bien las cuentas”.

El entrevistador les pregunta si saben lo que es un problema y las dos niñas contestan a la vez en voz muy baja que no. El entrevistador les explica que se refiere a problemas como los que resuelven en clase. J.L. (señalándose la sien con el dedo) dice: “¿Para forzar tu memoria?”. Por su parte, E.L. asocia problema con situaciones problemáticas no necesariamente matemáticas: “Pues un problema que tiene un chico y lo quiera resolver”.

Ambas están convencidas que los problemas han de tener números, los cuales sirven para poder resolver las operaciones. Para explicar la utilidad de las operaciones de los problemas, J.L. pone un ejemplo de compra-venta: “Para saber cuánto… por ejemplo, si estás en el supermercado, pues para saber cuánto tienes que dar, … para saber cuánto dinero tienes que darle”. E.L. completa la idea: “Para saber la cuenta, también”.

A continuación se les pregunta para qué sirve saber resolver problemas. Las niñas coinciden en que les ayuda a aprender a realizar las operaciones aritméticas. J.L.: “… A mí me sirve para, no sé, para aprender y hacer, dividir y multiplicar y todo eso, pues también divides y multiplicas pero de otra forma”. E.L.: “Pues para aprender a dividir, para aprender a sumar y para aprender más cosas”.

V.5.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE J.L.-E.L.

A continuación se les propone la tarea de que han de inventar un problema difícil para que lo resuelva su compañera. E.L. pregunta; “¿Tiene que ser muy difícil?”. J.L. le pide que le ponga uno fácil. E.L. le susurra: “De multiplicar”.

Una vez acaban de escribir ambas alumnas, el entrevistador lee el siguiente problema planteado por E.L.: «Yo tengo 1.404 pesetas. En mi cumpleaños me regaló mi padre

2.000 pesetas y mi abuela me regaló 20.000 pesetas. Si quito lo de mi padre, ¿cuánto me quedará?» (Se aprecia que E.L. no ha cumplido la palabra dada a J.L. ya que el problema que ha inventado no se resuelve con una multiplicación).

J.L., por su parte, ha escrito el siguiente enunciado: «En mi clase somos 25 niños, pero mañana sólo vendrán 8 niños menos. ¿Cuántos niños seremos en total?». No considera necesario cambiar nada. Parece reconocer que el problema no es muy difícil: "Podría ponerlo un poco más largo, pero es que no se me ocurre".

Ambas manifiestan saber cómo resolver el problema inventado por su compañera. Hablan entre ellas, en susurros, sobre el número de operaciones a realizar para resolver el problema inventado por E.L. Para J.L. se resolvería haciendo dos operaciones: "Porque sumas esto y esto y después, pues restas lo del padre con el resultado". E.L. trata de mostrarle que no es necesario: "No, porque le quitas, tú no cuentas lo del padre, ¿no?, no cuenta, como si no estuviera y te pregunta, si quito lo del padre, ¿cuánto me quedará?, ¿no?" E.L. reconoce en el problema que ha planteado los datos necesarios para la solución de los que no lo son. Espera a que J.L. asiente y continúa: "Pues entonces tienes que sumar el dinero que tengo yo y el que me dio mi abuela. Y ya lo tiene todo, ¿no?". J.L. permanece un momento en silencio y finalmente dice: "Pues que puede hacerse de las dos maneras".

Al explicar el modo en que resuelven los problemas, E.L. indica haber realizado una resta: "Porque te pregunta, te dice, que hoy estamos 25 niños y mañana habrá 8 niños menos, y después ¿cuántos niños seremos en total? Entonces tienes que restar y tenemos el total de 17 niños". Reconoce que puede comprobar la operación con la prueba de la resta, pero tiene algunas dificultades en recordarla por lo que su compañera interviene para recordársela.

J.L. resuelve el problema con la suma 1.404 + 20.000 y explica: "Porque como tengo 1.404 pesetas de mi cumpleaños, me regaló mi padre 2.000 pesetas y mi abuela me regaló 20.000 pesetas. Si quito lo de mi abuela, mi padre, pues, ¿cuánto me quedará?" y añade: "Tú tienes que poder hacerlo con dos operaciones o con una".

Posteriormente, ante la pregunta del investigador, reitera que el problema puede resolverse de más de una forma. Por su parte E.L. dice no saber si su problema se puede resolver de otra manera. Al plantearles esta misma pregunta de forma general, se quedan pensativas. E.L. dice que las sumas y su compañera relaciona la suma con la multiplicación y la resta con la división: "La resta se puede resolver de distinta manera, porque yo creo que se puede también con la división, me parece y la suma con la multiplicación".

V.5.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE J.L.-E.L.

El entrevistador presenta la tarea siguiente indicando: "Aquí tengo yo unos problemas que me han hecho otros niños. Estos problemas se los voy a mostrar y quiero que me digan si ustedes creen que sean más difíciles o más fáciles".

Primer enunciado (P, 13)*: «Una Pepsi cuesta 47 pesetas, ¿cuánto costarán 5 botellas de Pepsi?»*

E.L. afirma que es más fácil pero no sabe dar una explicación. J.L. ratifica la respuesta de su compañera. A la pregunta del entrevistador sobre cómo resolvería el problema indica: Yo, multiplicando"…"47 x 5". E.L. está de acuerdo.

Segundo enunciado (P, 4)***:** *«Jorge pagó con un billete para comprarse una mochila que vale 1.790 pesetas. Le sobraron 3.210 pesetas. ¿De cuánto era el billete con el que pagó Jorge?»*

E.L. responde inmediatamente: "Con 5.000 […] porque 5.000 es más que 3.210. ¿No? Porque no hay otro billete". A J.L. le convence el argumento de su compañera: "De 5.000". Argumenta comparando la magnitud de las cantidades y utilizando su conocimiento de los billetes, no hace operaciones: "De 10.000 no puede ser porque sobraría y de 1.000 tampoco..., el de 4.000 no existe". Ambas concluyen que se trata de un problema más fácil.

Tercer enunciado (P, 16): *«Hay 64 ranas, 8 ranas en cada estanque. ¿Cuántos estanques hay?»*

E.L. dice: "¿Éste? Pues… igual" (entendemos que se refiere a igual dificultad). Pero a su compañera le parece más difícil. J.L.: "No, éste es más difícil". E.L.: "No, yo creo que no, porque es dividir"... "Porque es que está repartiendo las ranas en 8 estanques". J.L. entiende cómo su compañera resuelve el problema, aún así, sigue diciendo que es difícil.

Cuarto enunciado (P, 19): *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?»*

E.L. afirma que se trata de un problema más difícil. En un primer momento no sabe cómo resolver pero posteriormente dice: "Yo creo que hay que sumar todo esto, y después el resultado que tiene hay que restarlo, ¿no?, con esto". Con la mirada pide el consentimiento de su compañera y ésta se lo da. Como cree haber resuelto bien el problema, afirma que es un problema más fácil. Aunque J.L. ha aceptado la resolución de su compañera mantiene su idea de que el problema es difícil.

Quinto enunciado (P, 20): *«Cada mochila vale 1.995 pesetas, compro 4 mochilas. Si pago con 10.000 pesetas, me sobraría… ¿Me faltaría o me sobraría? Si te sobra, ¿con cuánto te sobra?»*

E.L. se apresura a responder: "Me sobra". Piensa en voz alta explicando su respuesta: "Cuatro mochilas. Cuatro por ciento y pico". Toca el hombro de su compañera y le pide ayuda. Pide un papel para hacer operaciones.

Las dos niñas resuelven el problema haciendo operaciones con papel y lápiz. Los resultados coinciden. El entrevistador pregunta: "¿Entonces será un problema más difícil o más fácil?" y E.L. responde: "Más fácil ¿no? Es que gracias al papel. El papel, gracias al papel". Suponemos que al tratarse de números altos han necesitado realizar los cálculos escritos y no mentalmente.

Sexto enunciado (P, 22): *«Jorge quiere 4 mochilas que valen 1.995 pesetas, cada una y tienen el 20% de descuento. ¿Cuánto le costarán?»*

Las estudiantes gesticulan indicando que no saben. J.L.: "Si no hemos dado el por ciento, pues…". E.L. por un momento piensa que no va a afectar al problema y dice: "Que dará lo mismo, porque es un número, nosotros no queremos el tanto por ciento". El entrevistador le indica que el tanto por ciento hay que calcularlo ya que es el descuento. Las dos coinciden en que es un problema más difícil ya que no saben resolverlo. E.L.**:** "Porque no sabemos hacerlo".

V.5.4. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA J.L.-E.L.

Se pone de manifiesto que el trabajo con los problemas es una tarea escolar, que principalmente se hace sobre la página del libro que dice "solución de problemas" y que se pueden hacer en casa cuando hay deberes. La insistencia en la reflexión lleva a identificar las tareas de compra-venta (pagos y devoluciones) como ocasiones en las que se resuelven problemas. No se responde a la pregunta ¿qué es un problema? Si bien aparece la idea de problema no matemático. Las alumnas expresan que los problemas han de tener números para poder resolverse a través de cuentas. Utilizan números hasta de cuatro cifras para las adiciones y de dos para la división. Muestran conocer la reversibilidad de la acción juntar-quitar una cantidad y se intuye la resolución de problemas de división a través de restas reiteradas. Este conocimiento lo utilizan para justificar que a veces un problema se puede resolver de formas diferentes. Presentan cualidades para realizar cálculo mental por descomposición-recomposición de las cantidades, cuando éstas son especiales (números con ceros finales), y necesidad de cálculo escrito en otros casos.

No consideran difícil un problema de estructura aditiva donde la incógnita está en el resultado y cuya sentencia es de la forma [ ] = a + b aunque los números involucrados sean de cuatro cifras.

Para los problemas de estructura multiplicativa les resultan complicados aquellos que presentan un factor desconocido, tanto de cuotición como de producto cartesiano (estos últimos ni los intentan, no saben dividir aún) y no pueden resolver los problemas que requieran conocimiento matemático no estudiado (como el porcentaje).

V.6. ENTREVISTA A.T.- C.R. (3º CURSO)

Los niños parecen estar tranquilos y predispuestos para la tarea desde el principio. Ambos intervienen en igual medida. En la última parte de la entrevista se muestran un poco más cansados e inquietos, les cuesta seguir sentados en la silla. Pero, sin embargo, están contentos y muy involucrados en la tarea.

V.6.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE A.T.- C.R.

Ante la cuestión del entrevistador sobre qué es un problema, ambos estudiantes responden de forma genérica, uno de ellos indicando que hay un texto que plantea una situación a resolver (C.R.: “Pues es unas cuantas frases que ponen algo, que el que lo ha escrito lo sabe pero quiere que nosotros lo resolvamos, entonces pues lo pone para que nosotros lo hagamos.) y el otro que hay una pregunta a la que se puede dar respuesta haciendo operaciones (A.T. “Es una pregunta que la tienes que resolver haciendo cuentas”). A continuación, se produce un diálogo entre los alumnos en el que van completando sus primeras intervenciones. A.T. profundiza en los elementos que tiene un problema matemático, considera que todo problema tiene que tener números y que para resolverlo se utilizan las operaciones aritméticas: “Yo creo que es una pregunta para resolverla con datos y operaciones, para resolverla con cuentas”. Por su parte C.R. considera que además el enunciado ha de indicar lo que se ha de hacer para llegar a la solución: “Que el problema puede tener números pero que diga algo que se pueda hacer”. Con esta afirmación se percibe que no está de acuerdo con la generalización de su compañero de que todos los problemas han de tener números, enfatizando la necesidad de que se describa una situación a resolver, lo que sugiere que no considera las operaciones aritméticas, en sí mismas, como problemas. Los dos estudiantes consideran que resolver problemas conlleva aprendizaje. C.R.: “Aprender a hacer sumas, restas…”. A.T.: “Pero a la hora de aprender también un poquito más de hacer problemas”.

Vuelven a insistir en estas ideas cuando el entrevistador pregunta para qué creen que sirve resolver problemas, los dos coinciden en que la resolución de problemas forma parte de su aprendizaje matemático. C.R.: “Para aprender una cosa más de matemáticas”. A.T: “Para de mayor aprender muchas cosas y tener trabajo”.

V.6.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE A.T.- C.R.

El entrevistador les plantea la tarea de inventar un problema muy difícil para que lo resuelva su compañero. A.T. comenta: “Lo más difícil para nosotros es la división” (la están aprendiendo últimamente). Una vez terminado, el entrevistador lee el problema, planteado por A.T.: “«De una casa he sacado 1.213 cucharas pero yo nada más quiero un cuarto de cucharas. ¿Cuántas son las cucharas que yo quiero?»”.

C.R. con gesto de contrariedad dice entender el problema y pregunta: “¿Una multiplicación, no?”. Responde A.T.: “No, un cuarto”. Después de algunas sugerencias del entrevistador C.R. dice: “Es una división entre 4 me parece a mí”… “porque un cuarto essss. Yo tengo que dividir todo eso entre 4 y cojo un cuarto y entonces eso es lo que quiere él”.

El problema inventado por C.R. y que lee el entrevistador dice: “«Tengo 50 canicas y un amigo me ha dado 60 y mi madre 80, pero se me han perdido 90 y me he encontrado

5. ¿Cuántas canicas tengo ahora? »".

A.T. protesta con un golpecito en la mesa y le dice: "...me lo has puesto más difícil, que tiene muchas operaciones. Es suma y resta pero que tiene muchas operaciones". Mientras lo resuelve muestra su esfuerzo sacando la lengua y mordiéndose el labio. Da una explicación del proceso que ha seguido en la resolución del problema: "Tengo 50, un amigo me da 60 y mi madre me da 80, pues 50 + 60 +80. Y ahora operación dos, como es una resta nada más se puede hacer de dos y 190 – 90 son 100. Y ahora, esto de 90, pues 100 + 5 son 105. Ésta y ésta las puedo hacer perfectamente con la cabeza". Como comentó en la primera parte de la entrevista los números cuyas unidades son cero le resultan sencillos para poder operar con ellos mentalmente ("[…] cuando son números más bien acabados en ceros porque son mucho más fáciles"). Pone de manifiesto conocer que la suma no ha de limitarse a dos términos pero sí la resta. Justifica que su respuesta es correcta al haber hecho lo que pide la pregunta: "Porque lo que he hecho ha sido lo que me pide la pregunta y lo que me pide la pregunta es con lo que se tiene que resolver el problema". Indica haber comprobado la resta con la prueba: "Porque le he hecho la prueba". Para la suma reconoce que no hay prueba. "La suma no tiene prueba".

C.R. ha resuelto el problema mediante la división pero no sabe si la resolución de la operación es correcta: "Es que yo no lo sé, yo a la división no le sé hacer la prueba". A.T.: "Es multiplicar. ¿Te la digo yo? Es multiplicar 103 x 4" (se lo escribe en el folio). C.R. le recrimina que en el enunciado que ha inventado no le ha indicado cómo podía resolver el problema, mientras que ella sí lo había hecho: "Pero tú aquí no me has dicho que… que tú ahí, en la ésa, tú no has escrito… por ejemplo, yo te he escrito ahí como una forma de que tú sepas que tienes que hacer esas tres operaciones pero tú a mí no me has escrito eso". A.T., se justifica: "Pero yo te he dicho que cuánto quiero, y yo te he dicho que un cuarto". No obstante, C.R. no está conforme con la operación hecha para resolver el problema, a la pregunta del entrevistador: "Esta operación que hiciste, ¿sirve para responder a la pregunta que hizo A.T.?", responde: "No, pero ya me ha dicho que es por cuatro". Ante la insistencia del entrevistador sobre si la operación da respuesta al problema vuelve de nuevo a la misma idea: "No sé, pero es que no sé si de verdad es una división". A.T. por su parte está muy seguro: "Sí, es una división pero ahora tienes que saber si la división está bien. Tienes que multiplicar el resultado que te ha salido por el divisor y te tiene que salir el dividendo".

A continuación el entrevistador se centra en preguntar si conocen otra manera de resolver los problemas. A.T. explica que haciendo más las operaciones: "Porque, mira, podría poner 50 + 60 y después 60 + 80 y ya me saldría esto y quedaría así". Sigue explicando poniendo de manifiesto su conocimiento implícito de la propiedad asociativa de la suma: "Primero me saldría 50 + 60 y me saldría el resultado. Y ahora sumaría el resultado con 80. Porque la cuenta es siempre la misma, lo que pasa es que porque la cambies siempre te sale el mismo resultado". C.R. dice que ella no cree que el problema se pueda resolver de otra forma: "Me parece que no" […] "No sé, es que la división, no conozco otra forma de hacerlo".

El entrevistador les pregunta de manera general: "¿Creéis que se puede resolver un problema de diferentes maneras?" Los dos indican que depende del tipo de problema. A.T.: "Según qué tipo de problema sea. El de la división, yo creo que no; el de la multiplicación, sí; el de la resta también… No el de la resta según, pero depende porque resolverlo de otra manera sería con la prueba de la resta". C.R.: "En la división, como no se conoce otra forma de hacerlo, pues tienes que hacer la división. Luego, si quieres, puedes hacer la prueba. En las sumas sí se puede".

V.6.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE A.T.- C.R.

El entrevistador les dice a los estudiantes: "… les voy a leer un problema, que un niño me dijo el otro día en otra escuela que este problema era más difícil que el que yo os acabo de decir. Se lo voy a leer. Ustedes me dicen si es más difícil o no es más difícil". Los estudiantes tratan de dejar clara la pregunta. A.T.: "¿De qué? ¿Del que ella me ha preguntado él a mí?" […] "¿Que si es difícil o que si no?". El entrevistador contesta con la misma frase: "Qué si es difícil o que si no".

Primer enunciado (P, 6): *«Ramón tenía algunas pesetas. Su madre le dio 350 pesetas más. Ahora Ramón tiene 630 pesetas. ¿Cuántas pesetas le dio su madre a Ramón?»*

A.T. interviene rápidamente, señalando el enunciado: "Pues mira, su madre le dejó a Ramón 350". El entrevistador le vuelve a leer el problema y A.T. afirma: "Es un problema con trampa pues no hay que realizar ningún cálculo para resolverlo. Al interrogante del entrevistador de ¿por qué?, responde: "Porque lo pone aquí, 350 pesetas le dio su madre. Problema con truco". El entrevistador pide explicaciones. C.R.

interviene (se ha dado cuenta de por qué A.T. está tan enfadado): "Porque aquí pone: ¿cuántas pesetas le dio su madre? Y aquí: su madre le dio 350 pesetas, más". Los estudiantes siguen con sus argumentos en el mismo sentido (tenemos la sospecha que el entrevistador se ha despistado) hasta que convencen al entrevistador de que la pregunta estaba incluida en el enunciado del problema. A.T.: "¿Cuántas pesetas le dio su madre a Ramón? Pues le dio 350 pesetas, no le dio ninguna más. C.R.: "Por ejemplo, él tenía 50 pesetas y su madre le dio 300, entonces ahora tiene 350. Pero es que aquí pone su madre le dio".

Responden que es un problema fácil, si bien podía no haberlo sido. A.T: "Es un problema con truquillo y algunos problemas con truquillo te cuesta trabajo resolver". C.R. indica que le ha hecho dudar un poco la palabra más: "Porque tú sabes desde el principio que su madre le dio 350 pero luego pone pesetas más, y entonces ahí tú ya te pierdes un poco".

Entendemos que el entrevistador se equivocó al leer el problema y que la pregunta que habría de haber formulado es "¿cuántas pesetas tenía Ramón al principio?" como lo hace en las entrevistas que lo presenta. Esta sería al menos una de las razones por las que los niños no entienden el problema.

Segundo enunciado (P, 12): *«Jorge fue a ver las mochilas y la que más le gustó costaba 1.995 pesetas y él sólo tenía 1.500 pesetas. ¿Cuánto le falta para comprar la mochila?»*

Aseguran que de esos problemas han hecho muchos. C.R. "…nos lo han hecho un montonazo". A.T.: "Es más fácil pero tendría que hacer una cuenta". El entrevistador pregunta: "¿Qué cuenta? ". Y C.R. responde: "A 1.995 le puedes restar 1.500 pesetas y ya es lo que le falta". A.T.: "Es lo mismo que iba a decir". Los dos están de acuerdo en que es facilísimo.

Tercer enunciado (P, 14)***:*** *«En ocho estanques hay 64 ranas, ¿Cuántas ranas hay en un estanque?»*

C.R. contesta: "64 entre 8". Como el entrevistador pregunta ¿por qué? los dos niños explican que esa operación resuelve el problema: "Porque te pone tienes que dividir 64 entre 8 y te sale lo que hay en un estanque". Este problema, según esta pareja de escolares, es muy fácil.

Cuarto enunciado (P, 18)*: «Si en la tienda hay una mochila que vale 1.995 pesetas y tiene el 10% de descuento, ¿cuánto te costará la mochila con el descuento?»*

Los estudiantes quedan desconcertados, hasta ahora sabían resolver los problemas propuestos. A.T.: **"**Pues yo, como no sé poner descuento". C.R. a la vez que niega con la cabeza dice: "Yo tampoco". Los estudiantes no se pronuncian sobre si el problema es fácil o difícil. Ante la pregunta del entrevistador en este sentido A.T. dice: "Es que todavía no lo hemos aprendido. Si lo hubiéramos aprendido, lo hubiéramos *resolvido*. Eso se aprende en quinto."

Quinto enunciado (P, 21): *«Alejandro va a comprar lápices y en el papel del precio decía: 199 pesetas, antes 295 pesetas. Compró cinco paquetes, ¿cuánto pagó por ellos? ¿Cuánto hubiera pagado por el precio normal? »*

Los dos estudiantes leen el enunciado y van diciendo cómo lo resolverían. A.T.: "295 x 5 y aquí 199 x 5". Por su parte C.R. dice: "Esto es lo que va a pagar y esto es lo que hubiera pagado". No se pronuncian sobre la dificultad del problema, se supone que no han encontrado dificultad.

Sexto enunciado (P, 19)**:** *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 43 metros, ¿cuánto medirá de ancho?* »

Los estudiantes leen la primera frase del problema a la vez y en voz alta*:* "Una cancha mide 336 m cuadrados de área". A.T. interrumpe la lectura y advierte que les ocurre lo mismo que con el problema anterior: "Pues mira, el cuadrado de área no sabemos lo que es". El entrevistador cambia a otro problema.

Séptimo enunciado (P, 17): *«Javi tiene 20 helados y los quiere repartir entre sus amigos. ¿A cuantos amigos les podrá dar si regala 2 helados a cada uno?»*

A.T. protesta de la forma en que se presenta la información: "Pero, ¿cuántos amigos tiene? Es que si no te informan muy bien, no puedes…". C.R. ha entendido, parece divertirse y le explica que lo que hay que averiguar es el número de amigos: "No, porque tú tienes que poner cuántos amigos". A.T. lo entiende y exclama: "¡Ah!! 20 entre dos. 20 entre 2 son 10". Los estudiantes dicen, al unísono, que se trata de un problema fácil.

A pesar del cansancio que muestran, al ponerse de pie, han participado en la entrevista con mucho entusiasmo.

V.6.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN A.T.- C.R.

El entrevistador procede a finalizar la entrevista preguntando: "¿Cuál sería para ustedes un problema que fuera muy difícil?, ¿qué tendría que tener?". Los estudiantes no responden de forma general sino que se refieren a los problemas que no han sabido hacer de los propuestos anteriormente por el entrevistador. A.T.: "El del 10% y el de la cancha con los metros cuadrados". C.R.: "No, el de el área de cuadrados". Después señalan elementos concretos: A.T.: "Una palabra, cualquier cosa que no conozcamos"; C.R.: "Una cosa matemática que no conozcamos"; A.T.: "Que sea un problema que no se puede hacer".

V.6.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA A.T.- C.R.

Los dos niños tienen claro que la resolución de problemas forma parte del aprendizaje escolar y que éste les permitirá desenvolverse en situaciones de la vida cotidiana. Estos estudiantes reconocen que en un problema habrá texto de explicación y pregunta que hay que resolver. Los números presentes en el problema permitirán resolverlo operando con dichos números, si bien uno de los alumnos no considera necesario que los problemas tengan números. Utilizan números de cuatro cifras y la idea inicial de fracción con numerador la unidad. No cometen errores de cálculo. Sobre las operaciones reconocen la suma como operación opuesta a la resta y un estudiante el producto como operación inversa del cociente (le llaman prueba de las operaciones). Este mismo estudiante pone de manifiesto un manejo de la propiedad asociativa de la suma. Apoyándose en estas propiedades indican que algunos problemas se podrían hacer de más de una forma. Realizan cálculo mental en situaciones sencillas.

Si conocen cómo se resuelve un problema indican que es fácil, y se justifican en que no han dado la materia cuando no conocen cómo resolver un problema, pero no lo intentan, ni dicen que sea difícil. Inventan problemas de un solo paso pero resuelven problemas de más de un paso. Generalizan sobre qué ha de tener un problema para ser difícil refiriendo a la inclusión de alguna palabra o elemento que desconocen o a problemas que no puedan resolverse.

V.7. ENTREVISTA C.L.-L.I. (4º CURSO)

Desde el principio se aprecia una actitud muy tímida en L.I. con las dos manos sobre la mesa no levanta la vista de ellas, su voz es débil y en ocasiones titubea al responder. C.L. muestra seguridad en sus respuestas, mira al entrevistador cuando éste habla y cuando ella le responde. A medida que avanza la entrevista L.I. va adquiriendo confianza, mira al entrevistador y sus respuestas adquieren más firmeza, pero al final de la misma está distraído.

V.7.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE C.L.- L.I.

El entrevistador pregunta a L.I. qué es un problema. La respuesta tarda en llegar. Tras pensárselo muy bien responde balbuceando: “Una operación”. Hace la misma pregunta a C.L., ésta con prontitud y seguridad contesta: “Pues aprender a hacer el problema, lo que te preguntan y responderlo”. De su intervención deducimos que para ella un problema es una pregunta a la que hay que darle una respuesta.

La pregunta siguiente es si los problemas que hicieron el otro día, los que resuelven en clase tienen números. C.L. responde; “Si”. Busca la aprobación de su compañero que se muestra ausente. El entrevistador trata de que L.I. se vaya involucrando en la actividad por lo que se dirige a él y le pregunta: “¿Para qué crees que sirvan los números en un problema?”. Responde con mucha lentitud: “Pues, para entenderlo mejor”. C.L. al hacerle la misma pregunta dice: “Pues no sé, para entenderlo mejor, para poder resolver el problema”. Respecto a la cuestión sobre la utilidad de las operaciones, C.L. insiste en su idea anterior: “Pues para ayudarte a resolver el problema”. L.I. no contesta inicialmente y ante la insistencia del investigador dice: “Pues para realizar un problema”. Al preguntarles sobre la utilidad de saber resolver problemas C.L. responde: “Pues para poder aprender y poder hacerte mayor y ser independiente” (enfatiza su papel formativo). L.I.: “Para aprender”. […] “Pues, matemáticas”.

V.7.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE C.L.- L.I.

El entrevistador les da las instrucciones, y tras inventar cada uno un problema proceden a leer el de C.L.: “«En un garaje de coches tienen 140 ruedas, le quieren poner ruedas a 40 coches y con las restantes a 40 motos. ¿Cuántas ruedas le ponen a los coches? ¿Y a cuántas motos? ¿Cuántas ruedas sobran?»”.

El entrevistador pregunta si entiende el problema C.L. dice: “Si” y L.I. distraído pregunta ¿cuál? Al señalarle que se refiere al problema de C.L. expresa: "Sí lo escuché pero no lo entiendo", además añade que no cree que pueda resolverlo. Posiblemente estas respuestas influyeron para que el entrevistador no cambiase los problemas entre la pareja y decidiese que cada uno resolviese el problema que había inventado. C.L. no quiere cambiar nada a su problema.

El entrevistador lee el enunciado de L.I.: "«Un rascacielos tiene 96 pisos y en cada piso hay 25 habitaciones. ¿Cuántas habitaciones hay en el rascacielos?»". L.I. (parece más animado). Los dos estudiantes aseguran que entienden el problema y C.L. explica cómo resolverlo: "Pues multiplicar los pisos por las habitaciones que hay en cada piso". L.I.: "Multiplicando [...] los pisos por las habitaciones".

El entrevistador les pide que resuelvan los problemas inventados. Cada uno de los niños resuelve el problema que ha propuesto. L.I. explica: "Multiplicar 25 por las habitaciones que hay y me ha salido 2.400". Al pedírsele que justifique que su respuesta es correcta afirma con seguridad: "Porque es un problema de multiplicar". El entrevistador le cuestiona sobre si conoce alguna forma de comprobar la operación, pero Luís no entiende a qué se refiere ni entiende lo que su compañera le susurra al oído. Asegura no saber cómo se haría. Cuando se le pregunta si se puede resolver de otra manera su problema o algún otro que conozca, su respuesta es: "Me parece que no".

C.L. explica su resolución del problema: "Pues dividir 140, que son las ruedas entre cuatro, que se le ponen cuatro ruedas por cada coche y sale en total 35 ruedas por coche". Ella explica que puede comprobar su respuesta multiplicando 35 por 4 pero que este problema no se puede resolver de otras maneras, aunque esto sí es posible en los problemas multiplicativos cambiando el orden de los factores.

V.7.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE C.L.- L.I.

El entrevistador les dice que los próximos problemas no los van a resolver pero "quiero que ustedes me digan si es más difícil o más fácil que el que ustedes se inventaron".

Primer enunciado (P, 4): *«Jorge pagó con un billete para comprarse una mochila que vale 1.790 pesetas. Le sobraron 3.210 pesetas. ¿De cuánto es el billete con el que pagó Jorge?».*

L.I. contestar: "Creo que es más fácil". Pero al indicarle que lo justifique cambia su respuesta: "Pues, más difícil, un poco más difícil". C.L. ha permanecido mientras tanto releyendo el problema presentado y dice: "Pues yo creo que más fácil". [...] "Pues porque tiene menos parte del problema y bueno es más fácil de obtener, menos números". Explica cómo lo resolvería: "Pues sumando lo que le sobró más lo que vale y así sabrían lo que era el billete". El entrevistador le pregunta a L.I. cómo resolvería él el problema: "Pues yo, dividiendo 3.210 entre 1.790".

Segundo enunciado (P, 19)***:*** *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?».*

L.I. no da su opinión sobre este enunciado. C.L. indica: "Yo creo que un poco más difícil". [...] "Pues… no estoy segura, porque yo no lo entiendo muy bien".

Tercer enunciado (P, 13): *«Una Pepsi cuesta 47 pesetas. ¿Cuánto costarán cinco botellas de Pepsi?»*

C.L.: "Más fácil" (…) "Porque al ser más pequeño y al darte los datos de lo que vale una, pues luego te preguntas cuánto valen más de ésas, pues multiplicas y éste era más fácil".

Cuarto enunciado (P, 16): *«Hay 64 ranas, 8 ranas en cada estanque. ¿Cuántos estanques hay?»*

C.L. responde con seguridad tras realizar cálculos mentalmente: "Cuatro". Comete un error de cálculo pero utiliza una estrategia correcta: "Dividiendo 64 ranas con 8, con 8 ranas en cada estanque". El entrevistador intenta que L.I. participe. El niño dice que le parece un problema más fácil. Ha entendido el problema y lo ha resuelto mentalmente. Da las razones por las que es fácil: "Porque 64 ranas, 8 estanques".

El entrevistador le pregunta: "¿Cómo sabes que hay 8 estanques? ¿Cómo hiciste para saber?" L.I. "Pues, multiplicar".

V.7.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DÍFICIL SEGÚN C.L.- L.I.

Al preguntarles qué debe tener un problema para que sea difícil, C.L. explica: "Pues muchos problemas, pues que tenga muchos números, muchas fracciones" (…) "que tenga un poquillo de lío para que se confunda y que sea un poco más difícil". L.I. dice: "Pues… eh… muchos números y una resta o suma o división difícil, una operación difícil".

V.7.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA C.L.- L.I.

La actitud de esta pareja es desigual por lo que es complicado hacer un resumen de su actuación. La entrevista también es atípica, tiene una duración menor que el resto y los problemas no se intercambian entre los estudiantes para su resolución. Sobre qué es un problema, las respuestas son dispares: una operación y pregunta para resolver. Los números que ha de tener el problema sirven para resolverlo. Los problemas que enuncian involucran estructura multiplicativa e incluyen números que no pasan de dos cifras. Los problemas inventados los resuelven produciéndose en uno de ellos un error de expresión en una de las soluciones parciales, así como no llegar a responder lo que el problema exige.

La dificultad de los problemas presentados se ha encontrado en aquellos cuyo contenido no conocen. Uno de los estudiantes argumenta como uno de los factores que hace fácil un problema el hecho de que tenga menos números y el enunciado sea más breve. Las características que hacen difícil un problema según estos alumnos son que tengan muchos números, que incluya fracciones o alguna operación difícil, y tengan "lío".

V.8. ENTREVISTA A C.T- S.V. (4º CURSO)

Inicialmente los niños se muestran tímidos, responden con gestos y se tapan la cara con las manos. Por ese motivo y con el objetivo de hacer que se relajen, el entrevistador les explica que su maestra los ha elegido a ellos por saber trabajar muy bien y que a él le gustaría averiguar qué saben hacer.

Conforme transcurre la primera parte de la entrevista los niños poco a poco se van sintiendo más cómodos y relajados. S.V. está más motivado que C.T. Pasado la primera parte de la entrevista, ambos se involucran más en la actividad.

V.8.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE C.T- S.V.

Cuando el entrevistador les pregunta donde resuelven problemas S.V. dice no resolver problemas fuera de la clase de matemáticas. C.T. dice: "En la casa, los deberes". S.V. añade. "Pero muy poco". Sobre si resuelven problemas en el supermercado cuando van a comprar, S.V. indica que no, y C.T. que a veces: "Cuando mi madre va a comprar algo, le digo cuánto cuesta no se qué" […] Con un papel y un lápiz". Por su parte S.V. sigue manteniendo su opinión: "No, yo compro y ya está […] Porque voy rápido y además yo lo hago con un boli".

A la cuestión de qué es un problema para ellos, hecha por el entrevistador, los dos coinciden en que se trata de algo que tienen que resolver. C.T.: "Te piden que tú resuelvas una cosa, ¿no?". S.V.: "Resolver algo" El entrevistador trata de llegar a precisar si en los problemas hay números y pregunta "¿Qué cosas debe tener para ser un problema?" C.T. dice: "Datos" y S.V. añade: "Multiplicar y dividir", a continuación los dos responden que sí a la pregunta directa del entrevistador sobre si los problemas han de tener números. S.V.: "Porque si no tiene números no puedes multiplicar ni sumar y entonces no sabes lo que te sale". Su compañera coincide con él.

Las operaciones con dichos números sirven según, S.V.: "Para que sepas el resultado que sale" y C.T.: "Es que si tú vas a resolver un problema, haces una operación y sabes el resultado, pero si está bien, sino no. Aseguran que los problemas se pueden resolver de más de una forma. S.V. argumenta: "Pues si es multiplicar, también puedes sumar. Porque dices 4×175, sumas $175 + 175 + 175 + 175$". Por su parte, C.L. dice: "Sí, más de una porque la división es lo contrario de la multiplicación y entonces en la división tú puedes restar muchas veces, o algo así, pero en la multiplicación sí porque la multiplicación es la suma repetida y en vez de hacer todo esto muchas veces, pues lo pones por 4".

Los dos ven útil saber resolver problemas:

> S.V.: "Sí, para que en las tiendas no te estafen, bueno, no te timen, y para, si quieres saber un resultado de algo, en vez de hacerlo de otra manera que lo hagas como un problema".
>
> C.R.: "Para que luego puedas hacer cosas mayores. Porque si tú no sabes matemáticas ahora, ahora ya, eres tonto".

V.8.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE C.T- S.V.

El entrevistador presenta la tarea siguiente, insiste en que van a inventar un problema difícil, que se lo van a intercambiar entre ellos para resolverlo y que ha de estar claro para que el compañero lo entienda. Cuando finalizan su tarea el entrevistador comienza leyendo el problema de C.T.: "«En una tienda hay 37.000 canicas que meten en 39 bolsas. ¿Cuántas canicas cabrán en cada bolsa y cuántas canicas sobran?»" Aunque C.L. indica que se le ha ocurrido otro, considera que no va a cambiar nada de su problema. Seguidamente se lee el problema inventado por S.V.: "«En una carretera hay 223 coches. En el puente hay 22 coches. El puente se cae y la mitad pasa y la otra mitad se cae. ¿Cuántos coches quedan? ¿Cuántos se caen? ¿Cuántos han pasado el puente?»". A la pregunta del entrevistador de si sabe qué hay que hacer, C.T. responde: "No" (hace un gesto que parece indicar no entender el problema).

S.V. duda si cambiar algo y no lo hace ya que en ese momento se produce un diálogo entre los estudiantes sobre el enunciado:

C.T.: ¿Cómo que cuántos han pasado el puente? Es que los coches que quedan son los que han pasado el puente, así que es lo mismo”.

S.V.: “No, pero todos no han pasado porque en el puente sólo hay 22”.

C.T.: “Y los que no pasan son los que se caen”.

Interviene el entrevistador pidiendo a C.T. que señale qué quitaría él en el enunciado. C.T. responde y el diálogo entre los estudiantes continúa.

C.T.: “Lo de cuántos han pasado el puente, es lo mismo que cuántos coches quedan porque los coches que quedan son los que han pasado el puente”.

S.V.: “Pero todos no han pasado”.

C.T.: “Pero esto es lo mismo que esto”.

S.V.: “¿Cuántos coches quedan? Hay que quitárselo”.

C.T.: “Pues ya está, los coches que quedan son los mismos que han pasado el puente”.

S.V.: “Es que mira: si hay 223, 22 están en el puente, sólo 22, los otros están más atrás, y sólo hay 22 en el puente, y si el puente se cae y pasa la mitad, ¿cuántos coches quedan?” Entre todos: “¿Cuántos coches se caen y cuántos coches han pasado el puente?”

C.T.: “¡Ah! Ya. Explícate mejor. Ya está”.

De este diálogo creemos que C.T. entiende que las preguntas ¿Cuántos coches quedan? y ¿Cuántos han pasado el puente? tienen la misma respuesta lo que da lugar a una discusión entre ellos. S.V. trata de hacerle entender que no está teniendo en cuenta el resto de coches que hay en la autovía. Ante lo que considera incomprensión de su compañera, insiste y defiende su postura agitando el lápiz. Finalmente la convence y C.T. le reprocha no explicarse bien.

A continuación se intercambian los problemas para proceder a su resolución. C.T. explica al entrevistador cómo ha resuelto el problema y las razones por las que está segura de que es correcto: “Porque para ver cuántos coches hay en el puente, de los 223 coches… Hay 22 coches en el puente, de los 223, para ver los coches que quedan que no están en el puente, los resto, y quedan 201. De los 22 que hay en el coche, la mitad se caen. La mitad dividido entre 2 y 11 pasan y 11 se caen. Y luego, los que pasan se los sumo a esto, porque dice que cuántos coches quedan de todos, se lo sumo y me salen los que quedan menos los 11 que se han caído. Es lo que te da aquí más los 11 que quedan”.

C.T. asegura que conoce la pruebas de las operaciones, las cuales ha realizado mentalmente y también que no ha cometido errores: “A la resta, la suma; a la división, la multiplicación, pero lo hago en la cabeza, y a la suma pues la resta”. El entrevistador le pregunta si podría resolver el problema de otra manera, a lo que responde: “Yo creo que no” (…) “Bueno, sí. Esto lo podía haber hecho, en vez de 201 + 11, 223 – 11 pero…”. El entrevistador le pregunta si los problemas se pueden resolver de diferentes maneras, responde C.T.: “Hay algunos que sí y otros que no. […] Los de las multiplicaciones, las restas y las sumas. No, la resta no. Y la suma se puede cambiar por la multiplicación”.

S.V. considera que con los datos que se han proporcionado en el enunciado se puede resolver el problema, dice que la operación que lo resuelve es la división, a la cuestión de cómo sabe que la operación de división sirve para resolver el problema vuelve a repetir el problema como si su sola lectura justificase la operación: “Porque si en una tienda hay 37.000 canicas en 39 bolsas… ¿Y cuántas canicas sobran?” El entrevistador asiente y S.V. continúa: “28, ¿no?” (Dirigiéndose a C.T.) […] “Son 28 porque si hay 37.000 canicas y hay que meterlas en 39 bolsas, pues hay que dividir por 39 para saber cuántas canicas hay que meter en cada bolsa”.

S.V. indica que ha comprobado que el resultado es correcto aplicando la prueba de la división: “Multiplicar lo que sale en el cociente por el divisor. Si el resto de aquí te sale igual que el dividendo, es que está bien”. Después de indicar que el problema no se puede resolver de otra manera, piensa que se podrían utilizar objetos: “Hombre sí, pero te tirarías ahí, 37.000 canicas, con palitos. C.T. considera que sería la misma forma: “Pero eso también es división”. S.V. coincide con C.T. en que los problemas de multiplicar también se pueden hacer mediante sumas.

V.8.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE C.T- S.V.

El entrevistador les explica lo que a continuación van a hacer: "Ahora les voy a poner un problema… Este problema que un niño de otro grupo me dijo que era difícil. Yo quiero que ustedes me digan si realmente es difícil o no".

Primer enunciado (P, 4): *«Jorge pagó con un billete para comprarse una mochila que vale 1.790 pesetas. Le sobraron 3.210 pesetas. ¿De cuánto es el billete con el que pagó Jorge?».*

C.T. contesta rápido: "De 5.000, ¿no?" El entrevistador les dice que quiere que les diga si el problema es más fácil o más difícil. Los dos están de acuerdo: "Más fácil" dice C.T.; "Menos difícil dice S.V. […] porque es como si fuera una x". Ante la respuesta de S.V. el entrevistador le pide más información: "¿Cómo una x? ¿Quieres que te dé una hoja para que me digas cómo?" C.T. también pide un folio y se disponen a escribir los dos. S.V. sigue argumentando: "Porque tienes que adivinar el billete y tienes que adivinar primero lo que te sale". S.V. resuelve el problema utilizando el algoritmo estándar de la suma para realizar el cálculo 1790 + 3210 = 5000, no utilizando ninguna incógnita. Mientras C.T. insiste en su respuesta previa: "Pues es de 5.000" […] "Porque si tú compras con un billete una mochila que vale 1.790 pesetas y te sobran 3.210 pesetas, cuando sumes esto vas a saber de cuánto es el billete".

Ambos alumnos coinciden en que el problema es más fácil. S.V. lo justifica: "Pero porque hay que sumar sólo". C.R. recuerda: "Pero yo no necesito…" (Creemos que se refiere a que no necesitaba hacer la operación).

Segundo enunciado (P, 18): *«Si en la tienda hay una mochila que vale 1.995 pesetas y tiene el 10 por ciento de descuento, ¿cuánto te costará la mochila con el descuento?».*

C.T. responde: "¡Yo qué sé!". S.V. añade: "Es que no sabemos todavía lo del descuento". C.T. da una explicación ante la insistencia del entrevistador sobre la dificultad: "Es que lo de los por ciento no nos lo han enseñado" […] "Pero a lo mejor, si sabes ya eso, no es tan difícil". El entrevistador insiste: ¿Pero creen que es difícil? C.T. responde: "Porque como no nos han enseñado eso, no lo sabemos resolver". S.V. ha intentado resolverlo pero no lo ha conseguido.

Tercer enunciado (P, 20)**:** *«Cada mochila vale 1.995 pesetas. Compro 4 mochilas. Si* *pago con 10.000 pesetas, ¿me faltaría o me sobraría?¿ Si te sobra, ¿cuánto te sobra?».*

C.T. responde: "Sobraría". El entrevistador recuerda que deben decir si es más o menos difícil. Ambos estudiantes indican que es menos difícil. S.V. explica: "Hay que multiplicar 1.995 por esto, después restarlo…no, se multiplica esto por esto y si sale más de 10.000 es que te falta…". A la pregunta de si es fácil o difícil, C.T. responde: "Fácil porque si sabes lo que sobra, lo que te dé esto menos 10.000, pues ya sabes lo que te sobra".

Cuarto enunciado (P, 19): *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?».*

S.V. se queda pensativo y C.T. dice: **"**Yo creo que tienes que restar esto menos esto, ¿no?". S.V. pregunta: "¿12 metros de ancho?" El entrevistador le pregunta cómo sabe que son 12 metros de ancho. S.V.: "He dividido por dos […] Porque a lo mejor el campo de largo es la mitad de ancho".

Reconocen que el problema es más difícil y S.V. explica su afirmación: "Porque es que ya te lías porque cuando dice que una cancha mide 336 metros cuadrados de área, si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?, no se puede saber porque yo por lo menos no lo entiendo".

V.8.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN C.T- S.V.

La respuesta a la pregunta sobre qué debe tener un problema para ser difícil, C.R.: "Datos difíciles" y S.V. pone ejemplos: "Pues lo del 40%, cosas de ésas; como mi hermano, que está dando ahora –que está en la ESO– la x, que tienes que adivinar el número que es la x".

V.8.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA C.T- S.V.

Se ha puesto de manifiesto que los estudiantes consideran que un problema consiste en averiguar algo desconocido utilizando "lápiz y papel". Los problemas han de tener datos numéricos para poder operar con ellos y llegar a la solución. Los problemas, fundamentalmente, se hacen en la clase y en la casa, aunque reconocen que las tareas de comprar producen problemas. Expresan que resolver problemas es útil para desenvolverte en el vida y un estudiante entiende que si una persona no sabe se le considera tonta.

Reconocen que un problema se puede resolver de diferentes formas. Muestran conocer las diferentes operaciones básicas y las relaciones entre ellas: entre la suma y resta (opuestas), la multiplicación y división (inversas), la multiplicación y la suma (suma reiterada) y la división y la resta (resta reiterada). Utilizan números hasta de cinco cifras. No cometen errores de cálculo y hacen cálculo mental en situaciones de complementariedad a un número terminado en ceros. A través de un diálogo entre ambos estudiantes, reinterpretan un enunciado del problema que no estaba claro en su primera formulación.

Para los problemas que saben hacer, dicen que son fáciles sin necesidad de hallar la solución, para los que no saben hacer no dicen que son difíciles, justifican que no conocen el concepto matemático necesario para resolverlos. Al preguntarles directamente señalan que elementos como datos numéricos o incógnitas harían que un problema fuese difícil.

V.9. ENTREVISTA J.S.- P.H. (4º CURSO)

Los niños a lo largo de la entrevista están tranquilos, se les ve a gusto no se levantan de sus sillas y gesticulan con las manos. P.H. se toca con frecuencia el pelo. Ambos dan muestras de complicidad y aunque al final de la entrevista están cansados continúan y ponen atención a lo que les dice el entrevistador.

V.9.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE J.S.- P.H.

El entrevistador les hace recordar la actividad de inventar problemas que habían realizado días anteriores y les pregunta por lugares donde resuelven problemas. Los estudiantes contestan, a la vez, que en clase y a veces en casa. P.H. apunta que en el supermercado es posible que resuelvan problemas pero que esta acción se produce sin ser conscientes de ello: “A lo mejor lo hacemos sin darnos cuenta porque decimos: si compramos este bote de leche y éste, ¿nos dará, con el dinero que tenemos, para poderlo comprar?” J.S. identifica que las situaciones de compra-venta equivalen a resolver problemas: “Yo con las chuches seguro que hago problemas o cuando mi madre me manda coger allí al lado, a la frutería a comprar fruta o el pan”.

Seguidamente el entrevistador trata de averiguar qué es un problema para estos estudiantes. P.H. hace referencia a realizar operaciones aritméticas: “La suma, la división, la resta y algo que tienes que hacer para saber lo que te da o lo que te falta…”

J.S.: "O lo que sobra" […] "Divisiones, restas, multiplicaciones, sumas…". El entrevistador les pregunta: "¿Todos los problemas deben tener números o no?" Contestan, J.S.: "Sí, pero hay otros que tenemos que hacer que ponen una frasecilla y luego tenemos que hacer el problema entero" y P.H.: "Sí, como la división que hay que hacer, o la multiplicación o lo que sea, creo que sí". Los dos están convencidos de que los números sirven para hacer las operaciones que resuelve el problema. P.H.: "Para poder hacer luego la operación y para poder resolver el problema".

En relación a la utilidad de la resolución de problemas, responde P.H.: "Para exámenes", y J.S.: "También si somos médicos o científicos... Científico yo no quiero ser porque te haces un lío con todo, yo quiero ser como mi padre, que está allí, en una oficina, haciendo problemas, atendiendo a gente...". Vuelve a decir P.H.: "Para que no te timen".

V.9.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE J.S.- P.H.

El entrevistador les introduce en la nueva tarea. "Ahora vamos a inventar un problema. P.H. va a inventar un problema muy difícil para que lo resuelva J.S. y J.S. un problema muy difícil para que lo resuelva P.H". El comentario de J.S. es: "A mí se me da muy bien resolver problemas, a no ser que me pongan división o multiplicación". También hace dos preguntas: "¿Se puede poner en vez de, por ejemplo 8.000, ponerlo en número ponerlo en letra?" […] "¿Puedo hacerlo en euros?". El entrevistador le dice que en la unidad monetaria que él quiera que la condición es que sea difícil.

Al terminar el trabajo, J.S. lee el problema que ha inventado: "«En una tienda había cinco cartones de leche. Cada cartón cuesta 600 céntimos pero se me había olvidado poner las pesetas, cada dos céntimos son una peseta. ¿Cuántas pesetas son? ¿Cuánto cuestan los cinco juntos?»". Los dos estudiantes dicen que el problema está bien y que se puede resolver con esos datos.

El entrevistador lee el problema de P.H.: "«En un supermercado hay 20 millones de póster iguales y los reparten entre medio millón 227 personas. ¿Cuántos pósters le dan a cada persona?»"

J.S. dice que es correcto lo que ha inventado su compañero aunque comenta: "Es un poco de lío, pero está bien". El entrevistador le pregunta la razón de su comentario y J.S.: "Pues, tantos póster… Y tantas personas, digo, tantos póster y tan pocas personas pues me hago un poco de lío". El entrevistador le pregunta: "Bueno, pero ¿se puede resolver? J.S. responde que sí.

Los alumnos se disponen a resolver los problemas pero J.S. no escribe, el entrevistador le dice: "Aunque no lo resuelvas, dime cómo se resuelve". J.S.: "Es que sería 20 millones dividido entre medio millón 277 personas". Encontró un inconveniente para hacer la operación en las cantidades tan grandes que hay en el problema. El entrevistador pregunta: ¿Entonces se tiene que resolver con la división?, J.S. le responde: "Sí porque con la resta no creo". P.H. ratifica la respuesta de su compañero añadiendo: "Porque es haciéndolo con la división, pero es muy larga". Ambos estudiantes indican que ese tipo de operaciones no las saben hacer. El entrevistador pregunta: "¿Tú por qué crees que esto sí se puede resolver, P.H.?" Y responde P.H.: "Porque hay que hacer 20 millones, eh! 20 millones entre medio millón 277 y ya te sale y luego le haces la prueba para ver si lo tienes bien" […] "Eso es multiplicando y ya está y dijo la seño que si ya sabes multiplicar por tres cifras ya sabes multiplicar por todas".

Durante la resolución por P.H. del problema inventado por J.S. se produce un diálogo entre ambos alumnos.

P.H.: "Cinco juntos cuestan 6.000".

J.S.:"Te falta ahí… Hubieras puesto 600 x 2".

P.H.: "Ya lo he hecho mentalmente 600 x 2, ¿no? (…) "1200 x 2, ¿no?"

J.S. sigue pensando que le falta 600 x 2 y lo justifica: "Porque es así como se resolvería". El entrevistador pregunta a P.H. si las operaciones que ha escrito le sirven para resolver el problema.

P.H.: "Sí. No, espérate, yo ahora tengo que sumar".

J.S.: "¿Qué tienes que sumar? Lo has multiplicado y ya está" [...] "Porque si hay 600 céntimos y dos céntimos son 1 peseta, pues 600 x 2 son 1200. Y 1200 pesetas pues lo multiplico entre 5 cartones de leche. Si lo multiplico entre 5 cartones de leche pues es lo que hay y entonces pues me sale 600, 6.000 y ya está".

P.H. afirma que los cinco cartones cuestan 6000. Creemos que ha realizado mentalmente primero 2 x 5 y su resultado lo multiplica por 600. Como inmediatamente su compañero le recrimina que no ha hecho 600 x 2, él le contesta que lo ha realizado mentalmente aunque no tiene claro lo que tiene que hacer. Con la insistencia por parte de su compañero de cómo se hace el problema decide escribir lo que éste dice y ambos dan el problema por resuelto aunque la solución obtenida no es la correcta.

P.H. solo reconoce una forma de comprobar si la operación está bien, es usando la calculadora pues afirma que "no tiene prueba". J.S. relaciona la multiplicación con la suma repetida al sugerir otra forma de resolverlo: "Pues sería sumando, pero no vas a estar todo el rato, sumando, sumando…". Al preguntarles por la posibilidad de resolver los problemas de otra manera, ambos alumnos muestran reconocer la posibilidad de resolver los problemas de multiplicación mediante una suma repetida:

P.H.: "Si es multiplicación, pues sumando"

J.S.: "Y multiplicando y ya está".

P.H.: "Y multiplicando y si es restando, pues restando y ya está, y si es dividiendo pues yo creo que dividiendo".

V.9.3. Etiquetado de un problema como fácil o difícil de J.S.- P.H.

El entrevistador comenta que les va a decir un problema que un niño le dijo que era más difícil que los que los que ellos se habían inventado.

Primer enunciado (P, 4)*: «Jorge pagó con un billete para comprarse una mochila que vale 1.790 pesetas. Le sobraron 3.210 pesetas. ¿De cuánto es el billete con el que pagó Jorge?».*

J.S. responde "De 5.000". Los dos estudiantes consideran que es un problema menos difícil. J.S. explica: "Eso, mirando los dos y los sumas y lo que te salga, pero a simple vista sabes que es de 5.000 porque de 4.000 no hay billetes y de 2.000…" P.H. está de acuerdo con J.S. y explica: "Porque dice Jorge paga con un billete, para comprarse… Jorge pagó con un billete para comprarse una mochila que vale 1.790 pesetas y le sobraron 3.200 pues si sumas esto y esto son 5.000."

Segundo enunciado (P, 18): *«Si en la tienda hay una mochila que vale 1.995 pesetas y tiene el 10 por ciento de descuento, ¿cuánto te costará la mochila con el descuento?».*

Los dos estudiantes dicen expresiones relacionadas con el porcentaje: P.H.: "El 100 %. No, el…"; J.S y P.H.: "El 10 %"; J.S.: "Sería quitándole a esto diez". El entrevistador pregunta si les parece más difícil o más fácil. La respuesta de los estudiantes no es unánime: P.H.: "Más o menos igual"; J.S.: "No, más difícil, el otro era más fácil que éste" [...] "Porque con el 10%…". Ante la pregunta del entrevistador ambos estudiantes afirman saber resolverlo e intentar dar una explicación:

J.S: "Porque lo del 10%, como le ponen el 20% es que le suman 20 kilos más, 20 gramos más".

P.H.: "No, que le quitan, le quitan dinero".

J.S.: "Pero si pone 20 no sé qué más… y si pone menos…".

No discuten con el profesor que asegura que el problema es algo más difícil.

Tercer enunciado (P, 19)**:** *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?».*

P.H. afirma: "Fácil, multiplicas esto por esto", a lo que J.S. añade: "No, hay que dividir". P.H. le da la razón inmediatamente: "Es verdad, hay que dividirlo". El entrevistador les pide que justifiquen su respuesta. J.S. muy animado da una explicación: "Porque si esto es del área, el área es todo (pinta un cuadrado en el aire) y si de largo mide eso, pues de ancho se divide y te da lo que te da. Éste es mucho más fácil. Éste es más fácil". P.H. regresa a su primera idea, el problema y dice: "Que es multiplicación, creo yo". J.S.: "No, es división. Multiplicación te saldría más que esto". (Se refiere al área y señala el dato del enunciado). Este estudiante distingue claramente entre múltiplos y divisores. Reconoce que si multiplica obtendrá un número mayor a los datos del enunciado por lo que el resultado superará a la cantidad dada del área. Intuye que el área se forma como producto de dos magnitudes unidimensionales, y las relaciona correctamente con la magnitud bidimensional que forman. Los dos afirman que el problema es mucho más fácil:

J.S.: "Para mí es mucho más fácil".

P.H.: "Mucho más".

Cuarto enunciado (22): *«Jorge quiere 4 mochilas que valen 1.995 pesetas. Cada una tiene el 20% de descuento ¿Cuánto le costarán? ».*

J.S. identifica este enunciado con el segundo que les presentó el entrevistador, su actuación, por tanto, es igual que en dicho problema: "Igual que el otro, igual que el otro. Hay que quitarle el 20 y ya está”. El entrevistador llama la atención: “Pero aquí dice que quiere 4 mochilas”. P.H. dice: “20 x 4”. J.S. explica: “Más fácil, no, esto se multiplica por 4 y después se resta… y después este 20% se le quita a cada mochila, primero se le quita a cada mochila y después se multiplica”. Después de seguir el razonamiento de su compañero P.H. dice: “¡chupado!”.

V.9.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN J.S.- P.H.

Ante la pregunta del investigador sobre qué debe de tener un problema para ser difícil, los alumnos enumeran P.H.: “Números altos, J.S.: “Y pasarlo de euros a pesetas o de céntimos” […] “O de céntimos a euro”. P.H.: “No, de céntimos a pesetas” […] “Multiplicaciones y divisiones con muchas cifras”.

V.9.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA J.S.- P.H.

Ambos alumnos reconocen que la actividad de resolver problemas la realizan en el colegio y en casa pero también en situaciones de compra venta, señalan que en este último caso puede hacerse sin ser conscientes de ello. Esta idea la consideramos de sumo interés ya que lo que sucede en realidad es que si hacen cálculos en situaciones de compra-venta, no son conscientes de que eso constituye resolver un problema, aunque en muchos casos son del tipo de los que resuelven en las aulas. Para ellos un problema consiste en resolver operaciones aritméticas, las cuatro operaciones básicas, con el objetivo de averiguar algún dato de interés en el contexto del problema. Los dos alumnos están de acuerdo en los aspectos positivos que tiene la resolución de problemas y los beneficios que aportan a las personas su aprendizaje, ya sea como formación para desempeñar algunas profesiones o para la vida en general.

Aunque han usado números muy altos en uno de los problemas los han expresado verbalmente, no han utilizado cifras ni han realizado operaciones con ellos, han descrito la operación que se haría con ellos para resolver el problema. En otro caso la relación céntimo/peseta no se ha utilizado correctamente y la solución del problema no es razonable pero no se advierte. Reconocen que la multiplicación equivale a una suma repetida para solucionar los problemas de otra manera. En el problema donde aparece el porcentaje, que no saben hacer, describen la forma cómo se resolvería el problema. El problema de la cancha lo resuelven, mostrando uno de los estudiantes entender la relación entre área y lados del rectángulo. “El lado no puede ser mayor que el área” (no se específica la unidad y al tratarse de números naturales la relación es correcta). Solo encuentran difícil uno de los problemas propuestos por el investigador.

Los elementos que incluyen para caracterizar un problema como difícil son: la presencia de números altos, el requerir cambio de unidad monetaria y operaciones de multiplicar y dividir de muchas cifras.

V.10. ENTREVISTA A M.T.-U.A. (5º CURSO)

Los estudiantes están tranquilos y participan activamente en la tarea. En ocasiones no respetan el turno de palabra y se van pisando sus intervenciones uno a otro. Ambos son resolutivos, parecen tener buenas ideas y muestran comprensión de conceptos aritméticos. En la primera parte de la entrevista, con frecuencia ponen ejemplos para explicar sus afirmaciones. M.T. ríe en todo momento y acepta con agrado las bromas de su compañero. La actitud de los niños hace que la entrevista se desarrolle en un clima de confianza y agrado. Al final de la entrevista se muestran algo cansados.

V.10.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE M.T.-U.A.

El entrevistador introduce la situación hablando de los problemas que habían inventado en fechas anteriores. Los estudiantes reconocen que resuelven problemas en clase de matemáticas y en otros lugares: U.A.: “En el fútbol”; M.T. lo explica: “Sí, para echar equipos porque si no, nos equivocamos, por ejemplo”. El entrevistador les insiste para ver si se les ocurren más lugares: “Pues fuera del colegio” dice U.A. Se les proponen lugares como en la casa o en el supermercado. M.T. dice que en los dos sitios, pero U.A. asegura que en el supermercado no se resuelven problemas. El entrevistador para hacerle reflexionar le dice: “Y cuando compras chuches ¿cómo resuelves problemas?” U.A. responde: “Pues sumando, multiplicando, según las chuches que tenga”. A su vez M.T. añade: “Por ejemplo, si un chupa chups con chicle cuesta 2 duros, si tengo por ejemplo 5, pues voy haciendo cosas para saber cuántos tengo que llevar.” U.A. dice: “Pues en la casa, con los hermanos, para repartirnos las chuches cuando traen y eso”.

Cuando se les pregunta para qué es útil saber resolver problemas, responden U.A.: “Porque si no, sería uno un analfabeto y no sabría, nos engañan”. M.T.: “Nos podrían engañar y todo” [...] “Porque si una chuche cuesta 2 duros, pues nos podrían cobrar 5, porque no entendemos”. Todas sus respuestas están relacionadas con el engaño.

Cuando el entrevistador les pregunta qué es un problema no contestan a la pregunta y siguen dando ejemplos y argumentos acerca de la utilidad de resolver problemas. U.A.: "Pues cuando vas a comprar alguna cosa, tienes dinero y tienes que comprarlo pues tienes que repartir las cosas en diferentes…". M.T. hace una aportación similar: "Cuando en las tiendas por ejemplo te ponen los precios. Tú por ejemplo vas con 5.000 pesetas pues te ponen los precios, para que tú por lo menos vayas calculando a ver cuántos productos puedes comprar que lleguen hasta 5.000 pesetas". De sus respuestas se aprecia que los dos alumnos reconocen un problema como una situación en la que se requiere realizar ciertos cálculos para alcanzar alguna conclusión.

Responden con firmeza que sí cuando se les pregunta si los problemas tienen que tener números. Y dicen que estos números constituyen los datos de un problema. M.T.: "Para datos". Y que con los números se resuelven operaciones aritméticas:

U.A.: "Pues multiplicar, divisiones".

M.T.: "Sumas, divisiones".

El objetivo de estos cálculos es resolver el problema.

V.10.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE M.T.-U.A.

El entrevistador indica que van a inventar un problema muy difícil, y les explica que se lo van a intercambiar para resolverlo. Cuando los estudiantes han terminado de escribir, el entrevistador procede a su lectura. Comienza por el problema enunciado por U.A.: "«Pablo va al supermercado a comprar naranjas. Las naranjas cuestan cada una 100,5 pesetas. Si compras 414 naranjas, ¿cuánto dinero gastará Pablo?»". M.T. cree poder resolver el problema con los datos proporcionados en el enunciado. Seguidamente el entrevistador lee el problema que ha inventado M.T.: "«Julia tiene en su coche 20,5 litros de gasolina. Julia hace un viaje de 3 horas. Cada hora gasta 6,8 litros y aparte se hace 1,5 litros de gasolina más. ¿Cuántos litros de gasolina tiene Julia en su coche?»" Pregunta a U.A. si entiende el problema y éste responde moviendo la cabeza en señal afirmativa.

Los estudiantes proceden a resolver los problemas con el algoritmo estándar. Cuando terminan, el entrevistador pregunta a M.T.: "¿Por qué crees que con esas operaciones se resuelve el problema?" M.T. justifica la multiplicación que ha realizado: "Porque si una naranja cuesta 100,5 pesetas pues 414 naranjas nos tendría que dar lo que cuesta una, pero lo tenemos que multiplicar por las que quiero comprar". Afirma que para asegurarnos de que la operación está bien hecha basta con volver a hacerla. El entrevistador le dice si podría resolver el problema de otro modo. M.T. se queda pensativa: "Si quieres sumar todo…." Busca a su compañero con la mirada y se ríen. M.T. se ha quedado un poco bloqueada, finalmente U.A le ayuda: "100,5 tendrías que sumarlo 414 veces".

El entrevistador pide a U.A. que explique por qué cree que lo que ha hecho es correcto. U.A.: "No sé, pero sé que está bien". El entrevistador insiste en un par de ocasiones: "¿Cómo podemos estar seguros de que está bien?" U.A. propone utilizar la calculadora. Se le pide que busque otra alternativa ya que no tienen calculadora. U.A.: "Pues volviéndolo a hacer".

El entrevistador pregunta: ¿Creéis que los problemas se pueden resolver de diferentes maneras? a lo que los estudiantes responden que depende del problema: "Algunos" (U.A.), "Depende del que sea" (M.T.). Los que ellos han propuesto no se pueden resolver de otra manera, los que se resuelven de otra manera son "En los que se multiplica" según U.A. porque "Multiplicar es sumar" dice M.T., añadiendo "Y también se pueden los de dividir" […] "Porque el cociente lo multiplicas, espera, el cociente lo multiplicas por el divisor y te tiene que salir el dividendo" […] "Y también la resta"; U.T. continúa: "Sumándolo".

V.10.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE M.T.-U.A.

El investigador les explica que han de analizar problemas y decir si son fáciles o difíciles.

Primer enunciado (P, 18): *«Si en una tienda hay una mochila que vale 1.995 pesetas y tiene el 10% de descuento, ¿cuánto te costará la mochila ya con el descuento?»*

M.T. afirma: "Más fácil". U.A. asiente. El entrevistador les pide que justifiquen su respuesta. M.T. dice: "Pues porque es el tanto por ciento. Porque sí. A mí me resulta más fácil hacer el tanto por ciento que otras cosas". El entrevistador pregunta por cómo lo resolverían U.A. explica: "Pues mira, quitándole a esto el 10%. Haciendo 1.995 entre 10. No, no me acuerdo". M.T. tampoco lo recuerda bien: "El 10% de 1.995 serían 1.995 dividido entre 10 que serían 199… no, espera. Sería lo mismo, ¿no? Bueno no. El resultado, a 1.995 lo divides entre 10 y a ese resultado lo quitas a 1.995 ya sale el 10%".

Pegunta a Juan si cree que lo que ha explicado M.T. es correcto, asiente con la cabeza. Los dos reiteran que es un problema fácil.

Segundo enunciado (P, 19)**:** *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?»*

M.T. responde: "Yo lo sé, a 336 le quitas 24 metros que tiene un lado y te sale lo que tiene el otro". U.A. concluye: "Y ya está". Ambos dicen que es un problema más fácil. El entrevistador les pide que den razones a su afirmación. M.R. explica: "Pues porque solo hay que hacer una cuenta y porque es restar. Y porque tiene pocos datos y se tarda menos."

Tercer enunciado (P, 22)**:** *«Jorge quiere 4 mochilas que valen 1.995 pesetas cada una y tenían el 20% de descuento. ¿Cuánto le costarán?»*

Se dan cuenta que el tiempo de los verbos que aparecen en el problema no coincide. U.A. pregunta: "¿Cuánto ahora?" El problema dice que el descuento se realizó en el pasado por lo que U.A. interpreta que ya no lo tiene. M.T. también lo entiende así y explica cómo resolvería el problema: "Le costarían 1.995 x 2 porque ha dicho tenían el 20% entonces ahora no lo tiene entonces sería 1.995 x 2". El entrevistador les dice que se trata de un error que se produjo al escribirlo, que las mochilas aún tienen el descuento. M.T. explica: "Entonces, tendrías que sumar 1.995 + 1.995, o multiplicarlo por 2". U.A. le corrige: "No, 1.995 x 4. Porque quiere 4 mochilas. Y luego haces el 20%". Dice que ha de hacer dos pasos, primero ha de calcular lo que valen las cuatro y proceder a efectuar el descuento.

Ambos escolares dicen que es un problema más difícil. El entrevistador les dice que si acaban de narrar la forma de resolverlo cómo puede ser que no les parezca fácil. Respuesta de U.A.: "El nuestro era más fácil que éste (…) \`Joé´ con el mil novecientos". Parece dar a entender que la dificultad se debe a presentar un número de cuatro cifras.

Cuarto enunciado (P, 20): *« Cada mochila cuesta 1.995 pesetas. Compro 4 mochilas. Si pago con 10.000 pesetas, ¿me faltaría o me sobraría? Si te sobra, ¿cuánto te sobra?*

M.T. responde con prontitud: "Me sobraría porque, mira, multiplico 1.995 x 4 y el resultado se lo quito a 10.000 y entonces me sobra porque…" U.A. interviene dando a entender que en esta ocasión el problema es más fácil: "Al no haber ni por cientos ni historias de ésas”. M.T. lo clarifica: “Claro, es más fácil. Me sobraría. Tendrías que hacer la multiplicación y la resta para saber cuánto dinero te sobra”.

Quinto enunciado (P, 16)*: «Hay 64 ranas, 8 ranas en cada estanque. ¿Cuántos estanques hay?»*

El entrevistador pregunta: “¿Y éste? ¿Sería más fácil o más difícil?” Ambos dicen a la vez: “64 entre 8” (…) “Es un problema más fácil”.

V.10.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN M.T.-U.A.

El entrevistador pregunta cómo sería pare ellos un problema difícil. U.A. responde: “En el que haya porcentajes”. M.T. añade: “Los que no hemos dado” (…) “La raíz cuadrada” [...] “Cubo”.

V.10.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA M.T.-U.A.

Estos estudiantes consideran que la resolución de problemas no es únicamente una tarea escolar y la reconocen en situaciones de juego y de compra-venta. Dicen resolver problemas en casa y no se refieren a los deberes. De sus respuestas se aprecia que reconocen un problema como una situación en la que se requiere realizar ciertos cálculos para alcanzar alguna conclusión. Exigen que dicha situación contenga números con los que habrá que operar para resolver el problema. Reconocen los aspectos positivos que tiene la resolución de problemas afirmando que permite la alfabetización y desarrolla la habilidad de identificar situaciones de engaño. Los dos estudiantes exponen en varias ocasiones la idea de que la resolución de problemas permite que una persona averigüe la veracidad de algo. No dan una explicación de qué es un problema, lo hacen ejemplificando con problemas que enuncian.

Utilizan números naturales de cinco cifras y números decimales de forma correcta, calculan porcentajes y no cometen errores de cálculo. Conocen la relación existente entre la multiplicación y la suma, la cual mencionan para indicar formas diferentes de resolver un mismo problema. Entre los problemas que se les han presentado y que han resuelto, no entienden el problema de producto de medidas.

No necesitan realizar el problema de forma escrita para catalogarlo de fácil o difícil. Dicen cómo se podría resolver. Los problemas que saben resolver los consideran fáciles, si bien entre ellos han establecido diferencias señalando elementos como la operación implicada, el número de operaciones a realizar, o la magnitud de los números. Al preguntarles de forma directa, señalan como elementos que hacen difícil un problema conceptos matemáticos no estudiados, poniendo algunos ejemplos.

V.11. ENTREVISTA I.G.- J.E. (5º CURSO)

Los dos alumnos se encuentran cómodos con el entrevistador. A lo largo de la entrevista J.E. va un poco detrás de su compañero siendo I.G. el primero en intervenir en la mayoría de las preguntas. Con frecuencia corrige a su compañero y trata de convencerle con sus argumentos. J.E. se deja orientar aunque en ocasiones no queda convencido.

V.11.1 CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE I.G.- J.E.

Se introduce la entrevista con una amplia conversación sobre el trabajo realizado días anteriores, en relación a lo que tuvieron que hacer y lo que no habían entendido. Al interrogante del entrevistador sobre donde resuelven problemas además de en clase de matemáticas, que ellos han apuntado, los estudiantes hacen referencia a situaciones de compra venta: J.E.: "Muchas veces tenemos que ir a comprar nosotros, pues entonces tenemos que calcular cuánto dinero"; I.G.: "Pues también hacemos una lista, como nosotros encargamos pues de un catering, ¿no?, pues entonces nosotros cogemos la revista y decimos pues éste, ¿cuánto vale?, tal, tal y después 2, pues multiplicarlo por 2 y después sumamos todo y así nos hacen la cuenta. Así por si nos van a engañar, ¿no?, pues entonces, ya lo tenemos hecho". Además apunta que una ventaja para los que saben resolver problemas, es que no les engañen en el precio.

Sobre la pregunta ¿Qué es un problema? la respuesta de I.G. incluye un planteamiento y una resolución: "Pues un problema para mí es una cuestión en la que a ti te plantean, ¿no?, y entonces tú lo tienes que resolver, a ver cuánto te da". J.E. interviene en el mismo sentido pero matizando que es necesario operar aritméticamente: "Pues, muy parecido, pero que tienes que resolver unas cosas que te van planteando y tienes que ir sumando según sea el problema".

Cuando el entrevistador les pregunta si todos los problemas tienen números o algunos no, la respuesta de los estudiantes, quizá inducida por el entrevistador, son en la idea de que algunos no los tienen:

I.G.: "Hombre, casi la mayoría tienen números pero alguno que otro no".

> J.E.: "Algunos tienen números, pero algunos tienes que explicarlos con tus palabras. Diciendo… no escribir diciendo números, escribiendo números sino diciendo con tus palabras en él, te ponen un problema y tú vas diciendo con tus palabras la solución".

Considera que al explicar verbalmente cómo se llega a la solución del problema no hay un uso de los números. El entrevistador continúa preguntándoles sobre la utilidad de los números en un problema. J.E. indica "Para averiguar el resultado de ese problema". I.G. añade: "Porque sin los números tú no calculas esos números, pues entonces no puedes saber ni el resultado porque sin números no hay nada". Este razonamiento modifica su afirmación anterior sobre que algunos problemas no tienen números.

Al preguntarles sobre la utilidad que tienen las operaciones en un problema, los dos estudiantes inventan un problema en el que indican la operación a utilizar en su resolución. El entrevistador les insiste para obtener una sentencia general, a lo que I.G. responde: "Pues para tener el resultado final".

V.11.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE I.G.- J.E.

El entrevistador les explica que van a inventar un problema que sea difícil cada uno y que se los van a intercambiar para resolverlos. Una vez que han terminado de redactar sus enunciados, el entrevistador procede a leer el problema de J.E.: "«Ana compró un coche que vale 2.500.000 pesetas. (Se miran entre ellos). Primero pagó 300.000 pesetas, luego pagó 400.000 pesetas, y el resto lo pagó en 25 mensualidades. ¿Cuánto pagó en cada mensualidad?»" A la pregunta del entrevistador a I.G. sobre si se entiende el problema, éste responde: "Sí, sí se entiende". A continuación lee el inventado por I.G.: "«Juan compra 3 barras de pan y dos paquetes…»" I.G. interrumpe la lectura diciendo que se ha equivocado, considera que no está lo suficientemente claro. El entrevistador continúa con la lectura del problema: "«Cada barra cuesta 65 pesetas y cada paquete cuesta 235 pesetas y ya saben que en un euro son en pesetas 166,38. ¿Cuántos euros, con sus decimales, ha pagado Juan?»". J.E. señala: "Yo creo que sí lo puedo hacer. Un poquillo difícil". […] "¿Tú quieres que te ponga cuánto cuesta en euros?" I.G. le responde, explicándole lo que tiene que hacer para resolverlo: "Sí y tú ya sabes que son 166,38 pesetas, ¿no?, pues entonces tú los decimales tienes que multiplicar todas las cosas y saber su total, ¿no? y después tienes que dividirlo en euros, es decir, el euro vale 166,8". J.E. se queda conforme y se intercambian los folios para resolver los problemas.

Resuelven los problemas. I.G. mira la resolución que ha hecho J.E. y le dice: “Pero es que lo has hecho mal, porque tú tienes que sumar esto y esto”. J.E. admite sin vacilar lo que dice su compañero. El entrevistador le pregunta por qué ha de sumar y responde I.G.: “Porque no ha sumado el paquete de chicles con las barras de pan, ¿no? y entonces lo que ha hecho es dividir los 166,38 euros entre los chicles. Es decir, que se ha equivocado”. J.E. borra lo que ha escrito y procede a resolver de nuevo el problema.

I.G. explica cómo ha resuelto el problema inventado por J.E.: “Pues yo he hecho, Ana compró un coche de 2.500.000 pesetas. Primero pagó 300.000 pesetas, luego pagó 400.000 pesetas y entonces lo he sumado y me salen 700.000. El resto lo paga en 25 mensualidades. Pues he hecho 700.000,..., 2.500.000 – 700.000 = 1.800, ¿no? 1.800 lo he dividido entre 25 lo que me da un resultado 72.000 pesetas por cada mensualidad”. Posteriormente justifica la validez del método empleado: “Porque si yo multiplico una cosa y tengo que restarle y sumarle, y por ejemplo tú quieres saber el total de algo, pues tienes que sumar todas las cosas, ¿no? y después sí se lo tienes que restar a algo para ver lo que te sobra, pues lo que te queda de la resta lo divides entre el número tal y te da el resultado. Porque siempre haciendo las operaciones hay un cálculo mental”. En este párrafo I.G. trata de explicar el significado de las operaciones que ha utilizado: la suma como el total de los dos primeros pagos, la resta para ver lo que queda por pagar y la división para repartir la deuda en mensualidades. Mezcla con una idea errónea sobre cálculo mental. Afirma estar convencido de que sus cálculos son correctos porque los ha repasado, y propone realizar todo el recorrido de las operaciones en orden inverso como otro método de comprobación. El entrevistador le pregunta si se le ocurre otra forma de resolver el problema. I.G. tarda en contestar: “Yo creo que sí, pero ahora complicarme la cabeza…”

J.E. sigue resolviendo el problema. Interrumpe la conversación de su compañero con el entrevistador, no sabe cómo hacer la división que tiene decimales en el divisor. Ha dividido el dividendo (671) sólo entre la parte entera del divisor (166) y no sabe qué hacer con la parte decimal (38). I.G. dice: “Pues le añades un 0”. Los estudiantes siguen involucrados en el desarrollo de la división.

A la pregunta del entrevistador de si cree que con esas operaciones se resuelve el problema J.E. dice: “Yo creo que sí”. […] “Porque si yo tengo aquí 3 barras y cada una vale 65 pesetas, para saber cuánto valen las 3 barras tengo que multiplicarlo por 3 que son las 3 barras. Y los chicles lo mismo, si cada paquete de chicles vale 235 y compra 2 paquetes, pues tengo que multiplicar 2 paquetes, por 2, para ver cuánto cuestan los 2 paquetes. Y luego lo sumo para saber cuánto valen las 3 barras de pan y los dos paquetes y lo que me da lo divido entre los euros que quieres saber".

Al pedirle el entrevistador que justifique que sus operaciones están bien hechas recurre a la prueba aritmética de las operaciones: "La división, multiplicándolo todo por 166,38". […] "Y las otras… multiplicación no tiene prueba. ¿No?" I.G.: "La multiplicación sí tiene prueba, lo divides".

J.E. finalmente dice que utilizando las tablas de multiplicar puede comprobar que no se ha equivocado en las operaciones y asegura que el problema no se puede resolver de otra forma.

Al preguntarles si, de forma general, hay problemas que se resuelvan de varias formas, los dos responden al mismo tiempo: "Sí, muchos", e inventan un problema para justificar su respuesta. […] I.G.: "Yo creo que todos". […] "Nosotros todavía no hemos dado una teoría mayor…" y J.E. completa la idea: "Es que tenemos que dar la materia de dos o más resultados iguales".

V.11.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE I.G.- J.E.

El entrevistador les comenta que les va a mostrar problemas que han hecho otros niños, para que los lean y digan si los consideran más fáciles o más difíciles que los que ellos han propuesto.

Primer enunciado (P, 18)*: «Si en una tienda hay una mochila que vale 1.995 pesetas y tiene el 10% de descuento, ¿cuánto te costará la mochila ya con el descuento?»*

Los dos afirman que se trata de un problema fácil. I.G. explica: "Yo creo que es fácil". J.E. continua: "Es fácil, sí" […] "Porque tienes que averiguar el 10% de 1.995". I.G. expresa cómo solucionarlo: "Que yo creo que sería 199,5 que sería el 10%. Pues tú quítaselo a esto y ya tienes el problema hecho". Los dos consideran que el problema es fácil.

Segundo enunciado (P, 19)***:** *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?»*

I.G. hace preguntas relacionadas con las unidades de medida. J.E. explica: "Yo creo que a las 336 tienes que quitarle 24". I.G. no se muestra de acuerdo: "No, yo creo que no" […] "Si tú tienes 24 metros por aquí y 24 metros por aquí, pues 24 lo multiplicas por 2 y después se lo quitas a esto. Y lo que te salga lo divides entre 2, ¿no?" Siguen discutiendo sobre esta idea. El 2 que introduce L.G. se debe a que hay 2 lados iguales y parece confundir el área con el perímetro. Terminan de la misma forma que comenzaron. J.E. dice: "De ancho, pues tiene que medir, pues unos…" I.G. continúa: "196 y le quitas 8 son 180 y….". Reconocen que el problema es más difícil que los que ellos han inventado. J.E. justifica: "Porque tienes que calcular más operaciones y tienes que pensar más".

Tercer enunciado (P, 20)**:** *«Cada mochila vale 1.995 pesetas. Compro 4 mochilas. Si pago con 10.000 pesetas, ¿me faltaría o me sobraría? ¿Si te sobra con cuánto te sobra?»*

I.G. afirma que es más fácil explicando: "Aquí hay que multiplicar. Y después…". J.E. continúa: 1"995 x 4, y luego lo que te dé lo divides entre 10.000. Y tú, si te falta, pones aquí que me falta". I.G. añade: "Y si te sobra, pones aquí que te sobra. Aquí te pregunta…" "Entonces el resultado de 1.995 x 4, después se lo quitas a 10.000 y lo que te sobre". Ambos dicen que es un problema fácil.

Cuarto enunciado (P, 22): *«Jorge quiere 4 mochilas que valen 1.995 pesetas cada una y tenían el 20% de descuento. ¿Cuánto le costarán?»*

I.G. responde: "Yo creo que es fácil porque si tú multiplicas las mochilas por 4 y bueno tienes que… a una mochila que vale 1.995 tienes que quitarle el 20%." J.E. dice: "No, mira. Tienes que multiplicar 1.995 pesetas x 4 y luego de lo que te dé, tienes que averiguar el 20%". I.G. replica: "No porque esto te dice que cada una tenía el 20%, no las 4 a la vez". J.E. acepta la advertencia de su compañero ("¡Ah!, cada una") e I.G. continúa explicando: "Por eso te digo que a lo mejor… se puede hacer de las dos…". Entendemos que ve la posibilidad de hacer el cálculo de dos formas diferentes. Los dos indican que es un problema fácil.

Quinto enunciado (P, 12): *«Jorge fue ayer a ver las mochilas y la que más le gustó costaba 1.995 pesetas y él sólo tenía 1.500. ¿Cuánto le falta para comprar la mochila?»*

J.E. lee en voz alta el enunciado. Cuando termina se echa las manos a la cabeza con un gesto de alegría y sorpresa. Se ha dado cuenta de que es un problema muy fácil. Por su parte I.G. se le adelanta y dice: "495 pesetas, éste es muy fácil". Ha realizado la operación mentalmente. J.E. lo explicita: "1.995 – 1.500 = 495. Éste es muy fácil". I.G. insiste en la facilidad del problema y añade: "Ése no hay que hacerlo ni con cálculo en el papel ni nada".

Sexto enunciado (P, 6): *« Ramón tenía algunas pesetas. Su madre dio 350 pesetas más. Ahora Ramón tiene 600 pesetas. ¿Cuántas pesetas tenía Ramón al principio?»*

El problema lo ha leído en voz alta J.E., nada más terminar prosigue: "Ah claro, a 630 le quitas las 350 y lo que te dé es el resultado". I.G. añade: "Es el resultado de lo que Ramón tenía… " J.E. continúa: "Al principio. Antes que su madre le diera 350 pesetas".

Los dos estudiantes concluyen que estos últimos problemas son muy fáciles.

V.11.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN I.G.- J.E.

El entrevistador no ha preguntado a esta pareja de estudiantes qué debe de tener un problema para ser considerado difícil. Recogemos aquí lo que han dicho en algún punto de la entrevista sobre el particular.

J. E. "Porque tienes que calcular más operaciones y tienes que pensar más.

I.G.: "Ése no hay que hacerlo ni con cálculo en el papel ni nada".

V.11.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA I.G.- J.E

Inicialmente los alumnos ubican la resolución de problemas dentro del entorno escolar, pero no la consideran como contenido único de la asignatura de matemáticas. Reconocen que en las situaciones de compra-venta también se resuelven problemas y la utilidad principal de saber resolver problemas es evitar los engaños. Ambos consideran necesarios los números, los cuales sirven para obtener el resultado. Hacen una caracterización de problema en la que se considera un planteamiento y una resolución, las operaciones aritméticas llevarán a dicha solución, si bien en ocasiones solo hay que explicar con palabras.

En sus enunciados y resolución de problemas utilizan números muy elevados, aunque con muchos ceros finales, e introducen la transformación entre euros y pesetas, lo que conlleva el uso de decimales. En las operaciones simples, aunque con números altos, no han tenido dificultad ni errores. Algunas las han realizado mentalmente, no así la división con decimales en el divisor. Si no conocen una respuesta lo justifican diciendo que eso no lo han estudiado.

Conocen que las operaciones de multiplicar y dividir son inversas. Entre los problemas presentados en la entrevista, solamente el de la cancha no lo encuentran fácil, ni lo resuelven, aunque han hecho intentos de resolverlo pero al no estar de acuerdo entre ellos en sus razonamientos.

Expresan que un problema es más difícil cuando hay que hacer más operaciones y pensar más. Aquellos que no requieren cálculo escrito están entre los sencillos.

V.12. ENTREVISTA L.S.-L.R. (6º CURSO)

A lo largo de la entrevista hay un ambiente agradable en el que las dos niñas se encuentran cómodas. L.S. al principio participa más que su compañera, pero conforme se desarrolla la entrevista se equilibran las intervenciones de las dos. Las estudiantes están atentas a lo que el entrevistador les va preguntando y realizan las tareas que se les proponen con diligencia. Ambas dan muestras de complicidad.

V.12.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE L.S.-L.R.

El entrevistador comienza la entrevista indicando que van a trabajar con problemas como los que hicieron en días pasados y les pregunta si en la clase resuelven problemas. Las estudiantes responden que sí y sin más preguntas L.R. dice**: "**Los problemas de matemáticas son al final los problemas de la vida diaria". Sin embargo a continuación reconoce no resolver problemas fuera de clase: "No, fuera del colegio no resolvemos problemas". A la pregunta del entrevistador sobre si los hacen al comprar chuches o en la compra del supermercado L.R. dice: "Hombre las cuentas yo siempre las hago, para saber cuánto cuestan y...". […] "No, en la clase y ya está... A veces en verano la seño nos manda cuadernillos". El entrevistador pregunta a las estudiantes qué creen que sea un problema. Las dos se quedan en silencio, se miran, sonríen y piensan su respuesta. L.S. dice: "No sé explicarlo bien". Ante la insistencia del entrevistador dice: "Pues no sé. Bueno pues un problema que tienes que resolverlo, yo qué sé es que…".

En principio L.R. dice: "Pues yo, depende de qué problema" y tras reflexionar indica: "En general... es que no lo sé, en general no lo sé explicar […]. Pues un problema es algo que te pasa y lo resuelves; o las matemáticas, un problema que te ponen cuentas y las resuelves".

¿Y para ti L.S.? La estudiante se suma al argumento de su compañera: "Pues eso, que cuando es un problema que tiene una persona lo mismo, que tienes que intentar arreglarlo con él, si ha tenido problemas con una persona o algo. Y si es un problema de matemáticas, pues intentar pensar un poco a ver qué es lo que te quiere decir que hagas. Si no puedes resolverlo, vas a la maestra".

Las estudiantes responden sí a la pregunta del entrevistador: "¿Todos los problemas tienen números?" pensando únicamente en problemas matemáticos. Las dos estudiantes dan su opinión sobre la utilidad que tienen los números en los problemas, L.S.: "[...] nos está describiendo el problema para que luego tú los resuelvas, siempre te ponen alguna cifra o algo, y entonces tú de esa cifra ya sacas la otra cifra para resolverlo. Por eso siempre tienes que utilizar números. Bueno, en problemas de matemáticas…". L.R.: "Yo los problemas de matemáticas creo que tienen números, para si por ejemplo, te pone que cuánto cuesta cada lápiz y te pone los números... vamos, lo que cuesta, pues los sumas para resolver el problema".

El entrevistador aprovecha las intervenciones de las estudiantes para preguntarles sobre la utilidad de las operaciones aritméticas en los problemas. Las dos coinciden en que sirven para poder resolver los problemas. L.S. explica: "Para practicar también, para aprender, o también algunas veces para cuando ya eres más mayor y no le tienes que entregar al profesor a lo mejor lo haces mentalmente y pones el resultado o también te sirven para eso ahora, para poner el resultado".

Sobre la pregunta para qué sirve saber resolver problemas, L.S. responde: "…tienes que ser hábil para saber cuánto dinero te han devuelto y ser rápida porque a lo mejor estás en el coche y te pilla a una hora y mirando el dinero que te han devuelto, a lo mejor te han devuelto menos de la cuenta y te tienen que devolver más". En esa misma idea L.R.: "Yo creo que para… cuando vas de compras saberte manejar bien con el dinero" […] "Para desarrollarte" […] "Para aprender, también".

V.12.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE L.S.-L.R.

Se da comienzo a la parte dedicada a la invención de problemas. El entrevistador indica: "Vamos ahora a inventar un problema muy difícil" […] "El más difícil que sepan". Explica cómo van a proceder. Una vez plasmado en el papel los enunciados se procede a leer el problema que ha inventado L.R. "«Laura tiene 758 ciento unavos caramelos y Juan 805, ciento veinteavos de caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Juan más que Laura?»" L.R. dice que su problema es muy fácil, y aunque el entrevistador le da la oportunidad de cambiar el enunciado ella dice que lo deja como está. Su compañera dice que lo puede resolver.

Seguidamente se lee la invención de L.S.: "«Mario compró dos camas y una mujer le quitó una. Mario volvió a la tienda y volvió a comprar nueve camas más. Una cama vale 16.999 pesetas, ¿cuánto dinero se ha gastado en total?»" La estudiante no quiere realizar ningún cambio al enunciado y L.R. explica que el problema se puede resolver.

Las dos alumnas proceden a resolver el problema que ha enunciado su compañera. El entrevistador pide a L.R. que justifique su respuesta y ella dice: "Porque lo único que se tiene que hacer es multiplicar, sumar las dos camas y las nueve camas, te salen 11 camas, y lo multiplicas por 16.999 pesetas". Afirma que para saber si está bien lo que ha hecho se puede hacer la prueba, pero no recuerda como era: "¿Restar, por, dividir?...yo creo que con este resultado… sumar es que no se puede". (No recuerda el procedimiento). Dice que si lo repasa comprobaría si se ha equivocado. A la pregunta de si el problema se podrá resolver de otra manera responde que sí y explica: "…se podría poner otra cuenta más. Yo he sumado las camas que ha comprado mentalmente y se podría poner 9 más 2, que son 11 camas, y ya lo multiplicaríamos por 16.999". No se le ocurre otra forma de resolver el problema. El entrevistador le pregunta si conoce problemas que se resuelvan de varias maneras. L.R. dice que sí, pero que en ese momento no recuerda ninguno.

L.S. sigue resolviendo el problema que ha inventado su compañera. La mira y se queja por la dificultad de la operación. Tiene dificultad para restar las fracciones con números tan altos en el denominador, si los números fuesen más bajos le sería más fácil resolver la resta entre fracciones. L.R. le dice: "Hombre, el denominador, una vez que sacas el mínimo común múltiplo, ya lo demás es muy fácil". Dice L.S.: "Es restando nada más...".

Una vez que finaliza el entrevistador le pregunta por qué cree que esa operación es la que resuelve el problema, L.S. contesta: "Porque buscando el mínimo común múltiplo a estos dos…", se da cuenta de que ha hecho algo incorrecto. En la resolución, una vez calculado el mínimo común múltiplo ha procedido a restar los numeradores, sin efectuar cambio alguno en ellos: "Que yo creo que lo tengo mal porque yo creo que cuando ya has sacado el mínimo común múltiplo tienes que dividir esto entre esto y el resultado lo multiplicas por esto, y lo que te salga lo pones aquí. Y en esta operación lo mismo, simplemente que con esto y el resultado lo pones aquí. Entonces ya se resta y te sale el resultado. Yo creo que es así".

L.R. no está de acuerdo, ya que ha hecho la prueba y no le da el mismo resultado. Piensan si no habrá dos formas de llegar al resultado. L.S. dice que si coinciden los resultados de las dos formas alternativas de resolución es que serán válidos los dos, pero sigue pensando que lo que ha escrito en el papel no es correcto. El entrevistador le pregunta cómo hacer para saber si la operación está bien hecha, L.S. indica que la haría más veces. Entonces el entrevistador le cuestiona si cree que haya problemas que se puedan resolver de diferentes maneras. L.S. responde que sí y añade: "Por ejemplo, te ponen que sumes una cosa, otra cosa y otra cosa, yo casualmente hago primero las dos cosas y el resultado lo sumo a la última, y sale lo mismo y a mí me gusta más. Y sale de diferentes maneras, el resultado es el mismo pero…".

V.12.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE L.S.-L.R.

El entrevistador dice: "… ahora les voy a mostrar unos problemas que tengo yo aquí […] Quiero que me digan ustedes si será un problema más fácil o más difícil". L.S.: "¿Cómo que si será? Es que no lo entiendo". El entrevistador procede a leer el primer enunciado.

Primer enunciado (P, 18)*: «En la tienda hay una mochila que vale 1.995 pesetas y tiene un 10% de descuento. ¿Cuánto costará ya con el descuento?»*

L.R. responde: **"**Yo no sé, yo creo que este problema es un poco más difícil porque lo del 10%... L.S. añade: "Los por ciertos los hemos dado pero ya no me acuerdo". L.R. extrañada, pregunta: "¿Los por ciento los hemos dado?" […] "Pues yo no me acuerdo bien". El entrevistador pregunta cómo resolverían el problema y después de unos intentos previos, L.R. dice: **"**Yo creo que restando seguro pero no sé qué hay que restarle". Ha identificado la estructura del problema pero no conoce el mecanismo que le permite realizar el porcentaje de un número. Consideran que se trata de un problema más difícil.

Segundo enunciado (P, 16): *«Hay 64 ranas, 8 ranas en cada estanque, ¿cuántos estanques hay?»*

L.S. explica: "A 64 habrá que dividirle 8 para saber cuántos estanques hay, porque dice que hay 64 ranas, y 8 ranas hay en cada estanque". L.S. está de acuerdo y apunta que la solución es que hay 8 estanques. Las dos coinciden en que es un problema más fácil.

Tercer enunciado (P, 19)**:** *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?»*.

L.R. lee el problema junto con el entrevistador. Finalizada la lectura L.S. pregunta: "¿De área es de ancho?" El entrevistador le dice que el área es todo. Después de esta aclaración, L.S propone: "Pues a esto le restas 24 y sabes cuánto hay de ancho. Yo creo que es así" […] "Al total de esto le restas esto y sale el resto y es cuánto mide de ancho. Creo que es así… Bueno, creo, no, estoy segura". L.R. añade: "Yo creo que sí". Ambas coinciden en que es un problema muy fácil. El entrevistador con objeto de que sigan reflexionando les pregunta: "Pero si restas a 636 metros cuadrados, 24 m, ¿tú crees que puedes saber la medida del ancho de la cancha?" L.S. percibe la unidad de medida: "Pero es que son cuadrados…Pero eso no tiene nada que ver para resolver el problema. Sigue explicando: "Sí tiene que ver porque aquí ya dice que nada más que 24 metros, si dijera cuadrados es como nosotros decimos. Es que metros cuadrados son así, los metros así, es un metro…". Dibuja un cuadrado sobre la mesa. Ante esta nueva situación dicen no saber resolver el problema y afirman que se trata de un problema más difícil.

Las escolares piden al entrevistador que les explique cómo se resuelve el problema. Éste les dice que lo hará cuando finalicen la entrevista.

Cuarto enunciado (P, 20): *«Cada mochila vale 1.995 pesetas. Compro cuatro mochilas y pago con 10.000 pesetas, ¿me faltaría o me sobraría? Si te sobra, ¿cuánto te sobra?»*.

L.R. trata de completar el enunciado de este problema e indica: "Si te sobra, pon cuánto te sobra". L.S. explica: "Pues primero multiplicamos 1.995 por 4 mochilas que se ha comprado y ya lo que salga, si le sobra dinero se lo restamos a esto y si le falta pues le decimos cuánto le falta, ¿no?" L.R. responde que cree que está bien: "[…] he hecho la cuenta […] mentalmente. Yo he puesto, en vez de 1.995, como a 1.995 le queda un duro para las 2.000 pesetas he calculado ya 2.000 pesetas. Me ha salido 8.000". Ambas concluyen que es un problema muy fácil.

Quinto enunciado (P, 22): *«Jorge quiere cuatro mochilas que valen 2.995 pesetas cada una y tenían el 20% de descuento. ¿Cuánto le costará?».*

Las estudiantes dicen que es más difícil porque hay tantos por cientos y le piden al entrevistador que les explique cómo se hace: “Si nos lo explica, pues ya sabremos algo más”.

Sexto enunciado (P, 21): *«Alejandro va a comprar lápices y en el papel del precio decía: 199 pesetas, antes 295 pesetas. Compró cinco paquetes, ¿cuánto pagó por ellos? ¿Cuánto hubiera pagado por el precio normal?».* Dicen que se trata de un problema muy fácil y L.S. explica que lo resolvería multiplicando por cinco ambos precios.

V.12.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN L.S.-L.R.

Para finalizar el entrevistador les pregunta: “¿Y ustedes qué creen que deba tener un problema para que sea difícil?” L.S. afirma: “Unas cuentas y mucho lío… Por ejemplo, ahora te dan esto y luego te devuelven esto y luego…, ahora te van a dar otra cosa y luego tienes que pagar y te falta dinero… todas esas cosas”. L.S. coincide con su compañera en que tengan más de una operación. Por su parte, L.R. advierte que los problemas de tanto por ciento no son difíciles. Y que está segura que los aprenderán en seguida una vez que se los expliquen.

V.12.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA L.S.-L.R.

Las dos alumnas distinguen entre problema y problema matemático. Consideran que en los dos tipos hay que resolver alguna cuestión, y en el segundo caso requiere de la realización de cálculos. L.R. asocia problema matemático con los problemas que se realizan en el ámbito escolar y aunque reconoce que hace cálculos en situaciones de compra-venta distingue éstos de los problemas escolares.

Sus invenciones constituyen problemas matemáticos. Creen que hay problemas que se pueden resolver de más de una forma y puntualizan que los distintos caminos de resolución de un problema llevan al mismo resultado. Proponen el cálculo mental, la repetición de un algoritmo y la propiedad asociativa como vías distintas de resolver un problema.

Realizan cálculo mental en el análisis de la dificultad de los problemas. Hacer de otra forma un problema se asimila a hacer la operación de otra forma. Los problemas aditivo-multiplicativos y los multiplicativos de grupos iguales de cuotición les resultan muy fáciles. Como factores que condicionan la dificultad de los problemas señalan la presencia de números muy grandes, números fraccionarios con denominadores altos, muchos datos u operaciones a realizar y conceptos desconocidos para ellas. No obstante, matizan que si les explican los conceptos que desconocen los podrían aprender y el problema no tendría por qué ser difícil. Manifiestan predisposición para adquirir nuevos conocimientos. Muestran imprecisión en el vocabulario y expresiones matemáticas.

V.13. ENTREVISTA R.R.- J.J. (6º CURSO)

Los niños se muestran comunicativos, aunque al principio J.J. se frota las manos con cierta inquietud y R.R. no deja de acomodarse el jersey. R.R. lleva la iniciativa de la entrevista. J.J. toma más protagonismo en la última parte de la entrevista.

V.13.1. CREENCIAS SOBRE PROBLEMAS Y SU RESOLUCIÓN DE R.R.- J.J.

El entrevistador introduce la entrevista con referencias a la sesión de trabajo que habían tenido, los estudiantes hacen memoria y recuerdan algo de lo que hicieron. Les platea entonces una pregunta sobre si en clase resuelven problemas como esos. Responden que ahora están haciendo otro tipo de problemas: “Ahora estamos dando otro tipo de problemas” (J.J.), “Tipos con decimales y fracciones…” (R.R.). Ante la pregunta de si resuelven problemas en otros sitios aparte del colegio, J.J. afirma: “Hombre pues en mi casa, yo a veces también, resuelvo”. R.R. añade: “Cuando tengo examen, repaso problemas, divisiones, sumar, restar, multiplicar, decimales, ecuaciones y eso”.

El entrevistador les cuestiona si cuando compran chuches o van al supermercado también resuelven problemas. J.J. responde: “Pues en una tienda había palitos de regaliz y yo iba a comprar cuando era pequeño. Y entonces había cinco palitos de regaliz y me dijeron que costaba cinco duros cada uno, yo no entendía lo de los duros. Entonces, me enseñaron a multiplicar por ejemplo, un duro por cinco regalices son igual a 5 duros”. R.R. encogiéndose de hombros dice: “Pues no, no. Bueno, […] Mamá, esto cuesta 75 u 80. Pues vamos a suponer que 80 y 80 por otro lado es 160 y a lo mejor tengo 200, pues me tiene que devolver 40, y…”.

A estos estudiantes no se les formula la pregunta de qué es un problema. J.J. opina que no todos los problemas tienen números aunque reconoce que no recuerda ninguno que no presente números. También apunta que los números facilitan la resolución de los problemas, opinión que comparte su compañero. El entrevistador le pregunta a continuación sobre la utilidad de las operaciones en los problemas. R.R. explica: “Yo creo que para no tener que hacerlo mentalmente, a lo mejor si te pone que 80 cuesta un lápiz y quieres comprar tres, multiplicas 80 por tres, pues te sale el resultado más fácil que mentalmente”. Indica que sirven para evitar el cálculo mental mostrando identificar el término operación con la representación escrita de los cálculos. En esta ocasión J.J. expresa conformidad con la exposición de su compañero.

Seguidamente el entrevistador les pregunta sobre la utilidad de saber resolver problemas. Los dos niños consideran que la resolución de problemas les aportará beneficios en su vida adulta. J.J. manifiesta: “Pues, por ejemplo para cuando yo sea mayor, me pongan eso y yo no lo entienda, me pongan algo, ¿no?, y yo no sepa lo que es, pues me servirá pues para hacerlo y comprenderlo mejor”. R.R. además añade que saber resolver problemas es una alternativa al uso de la calculadora: “[…] para algo mejor tienes que hacer una cosa y no tienes calculadora, saber resolver problemas te sirve para solucionarlo”. El escolar, más que a saber resolver problemas, parece referirse a saber resolver operaciones aritméticas.

V.13.2. ENUNCIADOS Y PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE R.R.- J.J.4

El entrevistador les indica: “Ahora vamos a inventar un problema muy difícil”. Después de explicarle que se lo han de intercambiar para resolverlo y transcurrido el tiempo necesario para la redacción de los enunciados, el entrevistador lee el problema propuesto por J.J.: “«En un supermercado hay unos artículos de limpieza que en total cuestan 20.000 pesetas y antes costaban 10.000 pesetas. ¿Cuánto se han rebajado estos artículos de limpieza?»” […] ¿Con estos datos se puede resolver este problema? R.R. contesta: “Sí, pero yo creo que también se puede hacer más difícil” […] “Y más fácil también”. J.J. decide no cambiar nada al problema.

El entrevistador lee el problema propuesto por R.R.: “«En un tren hay 20 vagones. En cada vagón hay 30 asientos y en cada asiento se pueden sentar dos personas. En un par de vagones sólo hay 15 asientos. El tren va lleno y dos personas van de pie en cada vagón. ¿Cuántas personas hay en el tren?»”.

El entrevistador les pregunta si creen que con los datos que aparecen se puede resolver el problema. J.J. se queda en silencio, mueve la cabeza con gesto de duda y finalmente expresa: “No sé”. R.R. dice: “Yo creo que sí pero tiene que ser una persona que sepa bastante porque es difícil, yo creo, y yo creo que tienes que hacer bastantes operaciones.” Decide que no le va a cambiar nada al enunciado. J.J. indica que intentará resolverlo.

R.R. termina de resolver el problema y el investigador le pide que explique por qué cree que la operación elegida (una resta) resuelve correctamente el problema. El estudiante mira en repetidas ocasiones su folio y no sabe cómo hacer la justificación. El entrevistador le formula otra pregunta: “¿Cómo podemos estar seguros de que está bien?” El niño no duda y responde: “Pues haciendo su prueba”. Trata de recordar el nombre del minuendo: “Pues… sumando, este como se llama… minuendo”. “Sí, el sustraendo más el resto y te tiene que salir el minuendo” (en vez de responder sobre la justificación de que el problema está bien resuelto, indica hacer la prueba para comprobar que la operación está bien hecha). Ante la pregunta de si puede resolver el problema de otra forma, responde que sí con rapidez y da la siguiente explicación: “Pues, poniendo 10.000, que son… pues lo multiplicas por 2… No, me parece que es 20.000 lo divides entre dos. Creemos que se ha dado cuenta que el artículo lo han rebajado a la mitad y es la razón por la que decide dividir entre dos.

Mientras R.R. escribe, J.J. ya ha terminado de resolver el problema y el entrevistador le pregunta por qué cree que es correcto su procedimiento. El estudiante explica con detalle cada uno de los pasos que ha dado, afirma que los cálculos están bien y para demostrarlo repasa las cuentas en voz alta. Ante la insistencia del entrevistador J.J. afirma que para tener más seguridad hay que hacerlo varias veces. Conforme habla parece reflexionar y apunta otra opción recordando la prueba de la resta: “O si no quieres comprobar estas dos operaciones, puedes comprobar la suma restándole 60 entre 7. Si te sale el minuendo, está bien”. El alumno dice que no se le ocurre ninguna otra forma de resolver el problema.

R.R. ha terminado de hacer la división y comprueba que ha obtenido el mismo resultado que al restar, por lo que confirma que su problema se puede resolver de más de una forma.

El entrevistador pregunta a J.J.: "A ver, ¿con esta operación se resuelve el problema?". J.J. Responde: "Creo que sí" […] "Porque en un tren hay 20 vagones y en cada vagón hay 30 asientos. Se tendría que multiplicar para saber el total que hay en todos los vagones, ¿no? Y a mí me ha salido 60" […] "También te pone que en un par de vagones sólo hay 15 asientos. Entonces, los 15 los debería de dividir entre el par. Los divides y así sabes ya los asientos que hay en cada par" […] "Entonces aquí ya sabes el total de personas de cada par. Pues lo sumas y ya te da el resultado y yo creo que está bien". El entrevistador pregunta: "¿Y las operaciones crees que están bien?", J.J responde afirmativamente: "Porque 30 por 20 son 60. Y 15 entre 2, 7 por dos catorce, que es lo más cercano que hay a 15, y a 15 una. Y luego 60 + 7 son 67, eso está claro. Repasa las operaciones. No cree que este problema se pueda resolver de otra manera.

El entrevistador pregunta si hay problemas que se puedan resolver de diferentes maneras. J.J. asiente con la cabeza y R.R. dice: "Yo creo que sí. Yo he hecho problemas que se pueden resolver de muchas maneras". El entrevistador le pide que explique. R.R. pone un ejemplo donde alude a la equivalencia entre multiplicación y suma reiterada:

"Porque a lo mejor es lo mismo que diga dos por diez a decir diez más diez". J.J. apoyándose en las idea de su compañero dice: "A 30 le quitas 20 y te sale 10; o que pongas 10 por 1 también te saldría (interpreta que si dos operaciones dan un mismo resultado quiere decir que hay dos alternativas de resolución de un mismo problema).

V.13.3. ETIQUETADO DE UN PROBLEMA COMO FÁCIL O DIFÍCIL DE R.R.- J.J.

El entrevistador continúa con la entrevista. Ahora les dice: … "les voy a mostrar los problemas… y quiero que ustedes se fijen bien…Quiero que me digan si estos problemas creen que son más difíciles o más fáciles".

Primer enunciado (P, 18): *«Si en una tienda hay una mochila que vale 1.995 pesetas y tiene el 10% de descuento, ¿cuánto te costará la mochila ya con el descuento?»*

Los estudiantes responden que no saben qué es el por ciento, R.R.: "Yo creo que es normal si tú controlas bien el por ciento, yo es que no te puedo decir porque no sé cuánto es el diez por ciento,...". J.J. añade: "Yo tampoco". Los estudiantes insisten en que la dificultad depende del conocimiento que se tenga de los conceptos implicados en el problema, R.R. explica: "Pero quien sepa, una persona que sea inteligente, que sepa lo que es el 10%, el 20%, 30%, a lo mejor le puede ser fácil y todo pero para mí este problema es difícil porque yo no sé...”. J.J. continúa: “Yo opino lo mismo que R.R, si nosotros hubiéramos ya dado en nuestro colegio el por ciento, para nosotros sería muy fácil saber lo que ha dado el 10% de 1.995 pesetas”.

“¿Cómo lo resolverían si supieran el 10%?” les pregunta el entrevistador. R.R. explica: “Yo... el 10% son, voy a poner yo que son 500 Pesetas A lo mejor pongo 1995 – 500 y se saca…”. La dificultad encontrada se refiere a calcular el porcentaje. Los dos niños piensan que esa es una forma de resolver el problema. Afirman que el problema será fácil para aquellas personas que lo entiendan y difícil en caso contrario.

Segundo enunciado (P, 19)**:** *«Una cancha mide 336 metros cuadrados de área. Si de largo mide 24 metros, ¿cuánto medirá de ancho?»*

Los dos estudiantes dicen con convicción que se trata de un problema más fácil que el anterior. J.J justifica esa afirmación: **“**Éste es mucho más fácil que el anterior” […] “Porque nosotros aquí entendemos lo de ancho y largo y en cambio en el anterior, vuelvo a repetir que lo del por ciento ya no... No se nos da muy bien todavía”. El entrevistador le pregunta cómo resolverían este problema. R.R. contesta con seguridad: “Pues yo, si la cancha mide 336 metros cuadrados pues a 336 le quitaría 24 y eso es lo que sale de ancho. Yo pienso que es así”. J.J. añade: “Yo lo mismo”.

Tercer enunciado (P, 16)**:** *«Hay 64 ranas, ocho ranas en cada estanque, ¿cuántos estanques hay?»*

J.J. responde: “Más fácil, porque en este problema, hay 64 ranas y hay ocho ranas en cada estanque, pues tú tendrías que dividir 64 entre 8” […] “Con eso ya encontraría la respuesta”. Vuelve a recordar que el primer problema al no entenderlo le parecía difícil circunstancia que no le ocurre con este.

R.R. extiende la argumentación de su compañero condicionando la dificultad del problema tanto a los conocimientos adquiridos como al gusto por las matemáticas del resolutor: “Yo pienso de este problema que depende para quien sea, puede ser más fácil o más difícil porque a la mejor para mí, no es que me cueste mucho la división ni nada de eso, que me gusta, pero a lo mejor para una persona que no le gustan las divisiones ni las matemáticas ni nada, este problema puede ser muy difícil”.

Cuarto enunciado (P, 21): *«Alejandro fue a comprar lápices y el papel del precio decía: 199 pesetas, antes 295 pesetas. Compró cinco paquetes, ¿cuánto pagó por ellos?, ¿cuánto habría pagado a precio normal?»*

J.J. afirma: “Éste es más difícil.” […] “Éste es más difícil por dos razones sencillas, porque aquí hay dos operaciones ¿no? Hay dos operaciones, que… un poco difíciles y porque a 199 pesetas, averiguar cuántos paquetes compró si antes costaba 295, a mí eso me parece un poco la cuestión”. Como en el enunciado aparecen dos preguntas dice que se han de realizar dos operaciones (asocia cada pregunta con una operación).

R.R. añade: “Yo también lo veo más difícil, me parece que es el segundo más difícil porque el por ciento me parece que fue el primero que para mí, […] Yo no lo veo muy claro.”

El entrevistador pregunta cómo podrían resolverlo. J.J. explica: “A 295 le restas 199” […] “Y lo que te salga es la primera pregunta, es lo que le sobra”. El entrevistador les vuelve a leer el problema con objeto de que sigan pensando acerca de su resolución. J.J. reconoce: “No tengo mucha idea de este problema pero yo creo que a 295 pesetas le quitas 199 pesetas y eso es, lo que [...], que es la primera respuesta. En la segunda, ¿cuánto le hubiera pagado a precio normal?, eso ya no lo entiendo”. R.R. está de acuerdo y repite la misma idea.

Quinto enunciado (P, 20): *«Cada mochila vale 1.995 pesetas. Compro cuatro mochilas. Si pago con 10.000 pesetas, ¿me faltarían o me sobrarían? Si te sobra, ¿cuánto te sobra?»*

R.R. indica: “Yo creo que este problema también es fácil”. J.J. muy animado, expone su opinión: “Es muy fácil porque aquí sólo tienes que dividir 1.995 entre 4 y te sale lo que es el precio que se gastó de 10.000 pesetas. Yo pienso que te sobraría”. R.R. se percata del error de su compañero y le corrige: “…tienes que multiplicar 1.995 por cuatro y si llega a las 10.000 pues no me sobró nada ni me faltó nada, pero si no llega, puedes poner 10.000 menos lo que te ha salido de la multiplicación de esto y eso es lo que te sobra o lo que te falta”. J.J. reconoce su error, dice que es un problema fácil y se lamenta de no haberlo pensado más.

Sexto enunciado (P, 22): *«Jorge quiere cuatro mochilas que valen 1.995 pesetas cada una y tienen el 20% de descuento. ¿Cuánto le costarán?»*

Los dos estudiantes perciben que aparece otra vez el tanto por ciento y utilizan los mismos argumentos. J.J. dice: "Éste es igual que antes, tiene por ciento y como nosotros no entendemos lo del por ciento, si lo hubiéramos entendido, nos hubiera resultado bastante fácil resolverlo pero si no, yo no lo sé hacer. Más adelante, como daremos el por ciento, pues lo sabré hacer". R.R. continúa: "Yo creo que el problema lo veo difícil para mí, que no sea otra persona, pero yo creo que podría resolverlo. Yo creo que sí". […] "Me parece que es poniendo 1.495 dividido entre 20 y lo que te salga eso es lo que… Me parece que eso del 20% es lo que te rebajan, ¿no?"

Séptimo enunciado (P, 12): *«Jorge fue a ver unas mochilas y la que más le gustó costaba 1.995 pesetas y él sólo tenía 1.500 pesetas. ¿Cuánto le falta para comprar la mochila?»*

J.J. responde con prontitud y mucha seguridad: "Éste es muy fácil, sólo hay que restar 1.995 a 1.500 y ya te sale lo que le falta". […] "Que serían 400 y algo". R.R. dice que él piensa lo mismo y da el resultado de la resta: "Yo creo que igual, que le faltaría 495, me parece, pero no sé si es 495. Yo digo que también, igual, que a 1.995 le restas 1.500 pesetas y lo que te salga es lo que le falta para...".

Octavo enunciado (P, 6): *«Ramón tenía algunas pesetas. Su madre le dio 350 pesetas más. Ahora Ramón tiene 630 pesetas. ¿Cuántas pesetas tendría Ramón al principio?»*

J.J. dice: "Éste es fácil" […] "Porque es por ejemplo… éste es fácil en número porque si su madre le dio 350 pesetas y ahora tiene 630.000, 630 pesetas, pues tendría 300 y algo pesetas. A petición del entrevistador explica cómo resolvería el problema: "Pues yo haría a 630 pesetas le quitaría 350 pesetas y entonces sale exacto".

R.R. dice: "Yo digo igual. Al principio no lo veía muy claro pero ahora… Sí, yo lo veo fácil".

Noveno enunciado (P, 4): *«Jorge pagó con un billete para comprarse una mochila que vale 1.790 pesetas Le sobraron 3.210 pesetas ¿De cuánto era el billete con el que pagó Jorge?»*

R.R. indica: "Yo lo veo fácil también porque nada más que por los números lo sabes también como con el otro problema que nos has puesto. Que pones a 3.210 le sumas 1.790 y lo que te sale es con el billete que pagó. Creo que es así" […] "Yo creo que el billete era de 5.000". J.J. añade: "Yo también".

V.13.4. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL SEGÚN R.R.- J.J.

Para concluir el entrevistador les cuestiona sobre qué creen que deba tener un problema para que se difícil. J.J. explica: "Pues con mucho pensar. El saber lo que es. Pensar, por ejemplo, tú tienes que poner varias veces si pusieron más personas, se quitaron más personas del tren… Todo ese tipo de cosas hace que tú pienses lo que es el problema y entonces, una vez que ya hayas pensado y hayas sumado, restado, multiplicado y dividido, lo sabes seguro. Lo único que hace falta para resolver un problema es la capacidad y el pensar". Como R.R. no responde a la cuestión planteada, el entrevistador le repite la pregunta y R.R. continúa con el argumento de su compañero:

"Más preguntas para que te comas el coco, pensar y a ver si lo sacas. Y yo creo que los problemas es para la capacidad mental, para tener más capacidad a la hora de pensar o hacer algo, sí".

V.13.5. RESUMEN CORRESPONDIENTE A LA ENTREVISTA R.R.- J.J.

Estos estudiantes ubican la resolución de problemas dentro de las tareas escolares, tanto en las que realizan en el colegio como las que hacen en casa. Consideran que no todos los problemas han de tener números, aunque no recuerdan ningún problema que no los tenga, e indican que los números sirven para resolver los problemas y facilitan dicha resolución. Reconocen que hay problemas en las situaciones de compraventa, e indica que en dicho contexto también se aprenden matemáticas. El hecho de que dos operaciones distintas coincidan en el resultado, lo identifican con tener distintas formas de resolución. Creen que el conocimiento de la resolución de problemas es bueno para aquellas ocasiones en las que no se disponga de una calculadora, por lo que asocian la resolución de problemas a saber realizar operaciones aritméticas.

Inventan enunciados con números altos, con ceros finales o planteamientos muy elaborados. Realizan cálculo mental al analizar la dificultad de los problemas.

No consideran difíciles los problemas aditivos ni los multiplicativos de grupos iguales cuotitivos y dan la solución a los mismos rápidamente. El problema de producto de medidas lo consideran como un problema de resta de cantidades. Cuando un enunciado contiene un concepto desconocido para ellos, lo indican y advierten que esta circunstancia condiciona y dificulta su resolución. Les resultan difíciles los problemas de más de una etapa y los que presentan más de una pregunta en su enunciado. También consideran más difíciles, aquellos problemas en los que tienen que invertir más esfuerzo y tiempo para resolverlos. Consideran que, para algunas personas, un factor que puede condicionar la dificultad de un problema es su mayor o menor gusto por ese tipo de problemas. Por otra parte, argumentan que la presencia de números que acaban en cero, independientemente del número de cifras que tengan, y el uso de la calculadora facilitan la resolución de un problema.

Presentan imprecisiones en el lenguaje matemático. Estos estudiantes ubican la resolución de problemas dentro de las tareas escolares, tanto en las que realizan en el colegio como las que hacen en casa. Consideran que no todos los problemas han de tener números, aunque no recuerdan ningún problema que no los tenga, e indican que los números sirven para resolver los problemas y facilitan dicha resolución. Reconocen que hay problemas en las situaciones de compraventa, e indica que en dicho contexto también se aprenden matemáticas. El hecho de que dos operaciones distintas coincidan en el resultado, lo identifican con tener distintas formas de resolución. Creen que el conocimiento de la resolución de problemas es bueno para aquellas ocasiones en las que no se disponga de una calculadora, por lo que asocian la resolución de problemas a saber realizar operaciones aritméticas.

Inventan enunciados con números altos, con ceros finales o planteamientos muy elaborados. Realizan cálculo mental al analizar la dificultad de los problemas.

No consideran difíciles los problemas aditivos ni los multiplicativos de grupos iguales cuotitivos y dan la solución a los mismos rápidamente. El problema de producto de medidas lo consideran como un problema de resta de cantidades. Cuando un enunciado contiene un concepto desconocido para ellos, lo indican y advierten que esta circunstancia condiciona y dificulta su resolución. Les resultan difíciles los problemas de más de una etapa y los que presentan más de una pregunta en su enunciado. También consideran más difíciles, aquellos problemas en los que tienen que invertir más esfuerzo y tiempo para resolverlos. Consideran que, para algunas personas, un factor que puede condicionar la dificultad de un problema es su mayor o menor gusto por el tipo de problemas o los conceptos involucrados en el mismo. Por otra parte, argumentan que la presencia de números que acaban en cero, independientemente del número de cifras que tengan, y el uso de la calculadora facilitan la resolución de un problema.

Presentan imprecisiones en el lenguaje matemático.

V. 14. OBSERVACIONES FINALES DEL CAPÍTULO

Las entrevistas se han realizado con normalidad, según se muestra en los grabaciones en video, algunos escolares, sobre todo de los primeros cursos se muestran nerviosos y tímidos en un principio, emociones que van remitiendo en el transcurso de la entrevista. Algún estudiante muestra satisfacción por ser grabada la entrevista pensando que le puede hacer famoso.

La duración de las entrevistas resultó larga y algunos estudiantes mostraron cansancio.

Las respuestas de los estudiantes no fueron forzadas por el entrevistador que no obstante insistía cuando no obtenía una respuesta satisfactoria a sus preguntas.

En casi todos los casos, uno de los miembros de la pareja toma la avanzadilla y va por delante, mientras el otro le sigue, si bien en ocasiones se cambian los papeles entre ellos. Este hecho que puede pensarse como un inconveniente de la entrevista a pares, tiene su contrapartida en el hecho de que los estudiantes hablaron más (creemos) que si se hubiese tratado de una entrevista individual.

Se constata la dificultad para un entrevistador, en entrevistas clínicas semiestructuradas, de hacer las preguntas exactamente con las mismas palabras en todos los casos. Aunque se mantenga el significado, las palabras cambian; incluso en el planteamiento de los problemas, cambiaron algunas palabras.

En los estudiantes, sobre todo de cursos inferiores, hemos detectado capacidades aritméticas que han puesto de manifiesto en sus acciones y explicaciones; dichas capacidades tienen que ver con el conteo, cálculo mental o el reconocimiento de la magnitud de números.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LAS ENTREVISTAS

En este capítulo presentamos un análisis cuantitativo de las entrevistas que constituye un análisis globalizado de todo lo ocurrido en las mismas. Las entrevistas han sido objeto de un estudio cualitativo en el capítulo anterior consistente en un análisis individual y detallado de cada una de ellas.

Para este análisis global de las entrevistas consideramos las siguientes cuatro componentes o partes de las entrevistas:

a) Creencias de los estudiantes acerca de los problemas y su resolución.

b) Enunciados planteados.

c) Procesos de resolución.

d) Creencias de los estudiantes sobre la dificultad de los problemas.

Estos apartados se corresponden con los del capítulo anterior, con alguna salvedad. Los apartados b) y c) se corresponden con el punto 2 del capítulo anterior; aquí aparecen separados en dos debido a nuestro interés de darle más relevancia. Así mismo el punto 4 del tema anterior “Elementos que caracterizan un problema difícil”, queda aquí recogido en el apartado d).

VI.1. CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DE PROBLEMA

Con el objetivo de describir las creencias de los estudiantes sobre aspectos que tienen que ver con los problemas y su resolución, se les planteó en las entrevistas una serie de cuestiones que aportan información al respecto y cuyo análisis conforma este apartado. Analizamos aquí las respuestas dadas por los estudiantes a las cuestiones de la entrevista relativas a:

1. definición o caracterización de qué es un problema;
2. necesidad de que el enunciado de un problema matemático contenga datos numéricos;
3. utilidad de las operaciones aritméticas en la resolución de un problema;
4. utilidad de saber resolver problemas;
5. lugares donde se suelen resolver problemas;
6. justificación de que el problema inventado es resoluble y
7. diferentes estrategias por las que se puede resolver un problema.

Recordemos que estas cuestiones fueron realizadas en diferentes momentos de la entrevista. Las cinco primeras constituyeron la primera parte de las mismas y, además de proporcionar datos sobre el pensamiento de los alumnos, sirvieron para establecer un clima de confianza entre los alumnos y el investigador. Las cuestiones 6 y 7 se plantearon una vez que cada componente de la pareja de estudiantes había inventado su problema.

Los resultados del análisis los presentamos considerando a los sujetos agrupados por ciclos ya que al hacerlo por curso los datos quedaban muy dispersos y no proporcionaban patrones de comportamiento reconocibles.

Dado que se consideró que el foco principal de la entrevista era la propuesta por los estudiantes de un enunciado de problema y las cuestiones tenían un papel secundario, algunas de ellas no fueron formuladas en todas las entrevistas, como pondremos de manifiesto en cada caso.

Como algunos estudiantes proporcionaron más de una respuesta, en los datos que recogemos en las tablas, el número de éstas no coincide con el número de estudiantes. Hay respuestas repetidas, este hecho se debe a que al trabajar por parejas, algunos estudiantes repetían lo que su compañero decía. Las hemos recogido en los dos casos pensando que el estudiante que repite lo que ha dicho su compañero, si bien no está expresando una respuesta propia original, al menos muestra estar de acuerdo con ella.

VI.1.1. DESCRIPCIÓN DE PROBLEMA

Las respuestas de los estudiantes acerca de qué es un problema son variadas como se muestra en la Tabla VI.1. La clasificación de las mismas la presentamos en dos bloques. En el primero de ellos, el bloque no matemático, se incluyen aquellas respuestas que indican que un problema ayuda a reforzar y ejercitar la memoria o que asocian un problema con una situación a solventar, sin precisar el tipo de situación. El segundo bloque refiere a problemas matemáticos: engloba las respuestas de los estudiantes que hacen referencia a tener que resolver una cuestión con cuentas o alguna operación específica, las que describen una situación en las que se pueden presentar problemas aritméticos y aquellas en las que se da un ejemplo de problema matemático como respuesta.

RESPUESTAS		**Ciclo**		
		1º	**2º**	**3º**
PROBLEMA				
Reforzar memoria	J.L.**:** Para forzar tu memoria		*	
Planteamiento a resolver	J.N.: Una cosa que tienes que resolverla	*		
	C.R.: Son unas cuantas frases […] para que nosotros lo resolvamos.		*	
	S.V.: Resolver algo		*	
	C.T.: Te piden que tú resuelvas una cosa		*	
	C.L.: […] lo que te preguntan y responderlo		*	
	E.L: Problema que tiene un chico y lo quiere resolver		*	
	L.S.: Cuando es un problema que tiene una persona lo mismo, que tienes que intentar arreglarlo con él…			*
	L.R.: Un problema algo que te pasa y lo resuelves			*
PROBLEMA MATEMÁTICO				
Descripción de situación	P.H.: Algo que tienes que hacer para saber lo que te da o lo que te falta…		*	
	J.S.: Algo que tienes que hacer para saber lo que te da o lo que te falta…		*	
	M.T.**:** en las tiendas […] vas calculando […]			*
	U.A.: […] vas a comprar alguna cosa, tienes dinero [...] y tienes que repartir			*
	L.R.: Los problemas de matemáticas son al final los problemas de la vida diaria			*
	I.G.: Es una cuestión en la que a ti te plantean, […] tú lo tienes que resolver, hallar cuánto te da			*
	L.S.: Y si es un problema de matemáticas, pues intentar pensar un poco a ver qué es lo que te quiere decir que hagas			*
Responder una pregunta mediante cuentas	A.T**.:** Pregunta para resolverla con operaciones, para resolverla con cuentas			
	J.E.: […] te van planteando y tienes que ir sumando según sea el problema			*
	L.R.: […] un problema que te ponen cuentas y las resuelves			*
Realizar una operación aritmética	R.L.: Las sumas y restas	*		
	U.T: La suma	*		
	J.A.: Sólo la resta	*		
	P.H.: La suma, la división, la resta		*	
	L.I.: Una operación		*	
	A.T. Aprender a hacer sumas y restas		*	
	C.R.: Aprender a hacer sumas y restas		*	
Ejemplo, sin descripción	I.S: por ejemplo, […] un hombre que iba a dar una vuelta en el barco y salió a las 11 y llegó a las 12 y teníamos que saber cuánto duró	*		
	T.C.: Un niño compró 8 lápices o lo que sea y… eran tres cajas con ocho lápices y teníamos que multiplicar tres por ocho	*		

Tabla VI.1. Clasificación de las respuestas de los estudiantes por ciclo educativo sobre qué es un problema.

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

Dos estudiantes de 1º ciclo, uno de 1º curso (C.N.) y otro de 2º curso (M.R.) dicen que no saben responder a esa pregunta. A una pareja de 3º ciclo (J.J. y R.R.) no se le formula la pregunta.

Se observa en la Tabla VI.1 que desde el primer ciclo de educación primaria los estudiantes[8] ponen de manifiesto que consideran un problema como una situación o cuestión que han de resolver. Son los estudiantes de 2º ciclo los que más expresan dicha idea, que también está presente en 3º ciclo. En las respuestas de los estudiantes de 1º, hay un predominio de la asociación de las operaciones (cuentas) a la idea de problema. Y entre los estudiantes de 3º ciclo predomina la descripción de situaciones en las que se pueden resolver problemas.

Las respuestas que se dan a través de un ejemplo corresponden al 1º ciclo; no aparecen ni en 2º ni en 3º ciclo. Las respuestas que hablan de operaciones aritméticas corresponden al 1º y 2º ciclo, no aparecen en 3º ciclo. Atendiendo a los problemas inventados por los estudiantes, se concluye que los estudiantes de 1º ciclo consideran que la realización de operaciones aritméticas constituye un problema, no viendo necesario que un problema deba tener un planteamiento y una cuestión a responder.

VI.1.2. NECESIDAD DE QUE EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA CONTENGA DATOS NUMÉRICOS

Las respuestas de los estudiantes respecto a la necesidad de que el enunciado de un problema contenga datos numéricos se recogen en la Tabla VI.2. Para organizar los datos en la tabla se ha considerado una clasificación en dos bloques, partiendo de que todas las respuestas fueron de tipo afirmativo: sí y sí condicionado. Las justificaciones que aportan los estudiantes refieren a la necesidad de operar, la comprensión del problema, su resolución y la dificultad del problema.

[8] Cuando hablamos de estudiantes, en estos apartados, nos referimos a los sujetos que participaron en las entrevistas.

RESPUESTAS		Ciclo 1º	2º	3º
SÍ				
Sin justificar	J.L.	*		
	E.L.	*		
Justificación basada en operaciones	R.L.: Para sumar	*		
	J.A.: No sé, para saber cuántos años tiene uno	*		
	U.T.: Porque si ponen 100 + 200 algo, eso sí que es un problema	*		
	J.I.: Para sumar, restar y multiplicar	*		
	M.R.: Para sumar, restar y multiplicar	*		
	S.V.: Porque si no tiene números no puedes multiplicar ni sumar y entonces no sabes		*	
	J.L.: Si, para hacer la operación		*	
	U.A.: Para multiplicar, divisiones			*
Justificación basada en la comprensión	C.L.: Para entenderlo mejor		*	
	L.I.: Para entenderlo mejor		*	
Justificación basada en la resolución de problemas	A.T.: Sí deben tener números porque si no, no se puede hacer el problema		*	
	J.E.: Para averiguar el resultado de ese problema			*
Justificación basada en dificultad de la resolución de problemas	J.N.: Sí, para ponértelo más fácil	*		
	R.R.: Yo creo que para que sean más fáciles. Yo creo que con los números es más fácil resolver el problema			*
	J.J.: Te facilita el resolverlo, te ayuda y este tipo de cosas			*
SÍ CONDICIONADO				
Tipo de problema	J.I.: Los de matemáticas sí	*		
	J.S.: Sí, pero hay otros que ponen una frasecilla…		*	
	C.R.: Que el problema puede tener números pero que se diga algo que se pueda hacer		*	
	C.T.: De matemáticas, sí		*	
	P.H.: Sí, los de división y multiplicación		*	
	L.S.: Siempre tienes que utilizar números. Bueno, en problemas de matemáticas…			*
	L.R.: Yo los problemas de matemáticas creo que tienen números …			*
	J.J.: Unas veces sí y otras veces no pero ahora mismo no me acuerdo de ninguno que no tenga número			*
	J.E.: Algunos no, […], no diciendo el número sino escribiendo palabras			*
	I.G.: la mayoría tienen números pero alguno que otro no			*

Tabla VI. 2. Clasificación de las respuestas de los estudiantes a la cuestión: ¿es necesario que un problema contenga datos numéricos?

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

Un estudiante de 1ºciclo (C.N.) no responde a la cuestión planteada.

En las respuestas dadas a esta cuestión se aprecia que en el 1º ciclo los estudiantes mayoritariamente asocian los números del problema con la necesidad de realizar operaciones. El pensamiento de que los números ayudan a comprender el problema es expresado por los alumnos de 2º ciclo mientras que los de 3º refieren a que facilitan su resolución. De las respuestas recogidas en el bloque de "sí condicionado" se desprende, de nuevo, la idea de que hay problemas matemáticos y otros que no lo son. Ocurre con estudiantes, de los tres ciclos siendo mayoritaria en 2º y 3º ciclo.

VI.1.3. UTILIDAD DE LAS OPERACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Clasificamos las respuestas que aportan los estudiantes entrevistados sobre la utilidad que tienen las operaciones en la resolución de un problema en dos grupos: el primero recoge aquellas respuestas que describen una situación que bien puede dar lugar a un problema; el otro aquellas que indican una utilidad para el aprendizaje. Dentro de este último grupo se destacan tres tipos de respuestas: las que hacen referencia a resolver problemas, las que indican conocer resultados (suponemos que de un problema) y las que se refieren a hacer cálculos.

	RESPUESTAS	**Ciclo**		
		1º	**2º**	**3º**
	DESCRIBE SITUACIÓN			
	J.S.: Si yo tengo cinco caramelos y los quiero repartir, pues tengo que hacer una operación y después el resultado		*	
	J.L.: Si estás en el supermercado, pues para saber cuánto tienes que dar		*	
	I.G.: Tienes que comprar 2 camisetas, […] entonces tú tienes que multiplicar esa operación para saber cuánto son las dos camisetas			*
	J.E.: Una camiseta vale 1.375 pesetas y quieres comprarte 3, lo tienes que multiplicar por 3			*
	UTILIDAD PARA EL APRENDIZAJE			
Para aprender	U.T.: Para aprender	*		
	J.A.: para aprender a sumar y a resta	*		
	R.L.: para aprender a sumar y a resta			
	F.T.: Para aprender más sumas, más restas…	*		
Para resolver problemas	J. N.: Para resolverlos	*		
	R.L.: Para hacer problemas...	*		
	P.H: Para resolver el problema		*	
	C.L. Para resolver el problema		*	
	L.I.: Para realizar el problema		*	
	C.T.: Es que si tú vas a resolver un problema, haces una operación y sabes el resultado		*	
	I.G.: Para tener el resultado final			*
	U.A.: Para resolver problema			*
	J.J.: Te ayuda a facilitar a resolver la operación y es más fácil que pensar			*
	M.T.: Para resolver el problema			*
	L.R.: Para resolver el problema			*
Conocer resultados	S.V.: Que sepas el resultado que sale		*	
	M.R.: Para saber lo que sale	*		
	F.T.: Para saber lo que sale	*		
Cálculos	E.L: Saber la cuenta		*	
	L.S.: Para practicar cuentas			*
Cálculo mental	L.S.: Para cuando ya eres más mayor … a lo mejor lo haces mentalmente			*
	R.R.: Yo creo que para no tener que hacerlo mentalmente, a lo mejor si te pone que 80 cuesta un lápiz y quieres comprar tres, multiplicas 80 por tres y eso es más fácil que mentalmente, que es más difícil			*

Tabla VI. 3. Clasificación de las respuestas de los estudiantes por ciclo educativo respecto a la cuestión sobre utilidad de las operaciones en los problemas.

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

Un estudiante de 1º ciclo (C.N.) no responde a la pregunta. A dos parejas una de 1º ciclo (T.C. y J.I.), y otra de 2º ciclo (A.T. y C.R.) no se les plantea la pregunta.

Entre las respuestas vemos, por ciclos, lo que sigue. Describir una situación lo hacen estudiantes de 2º y 3º ciclo, no así los de 1º ciclo. La respuesta sobre utilidad para aprender quedan en el 1º ciclo. La idea de que las operaciones sirven para resolver los problemas es la que más aparece entre las respuestas de los tres ciclos, si bien hay un ligero aumento conforme se sube de ciclo. Si se unen estas respuestas con las que indican conocer el resultado, el número de respuestas de cada ciclo es el mismo.

Concluimos de aquí que la idea de que los números en el problema sirven para llegar a un resultado, está en los estudiantes desde el primer ciclo y se mantiene con posterioridad.

Vuelve a aparecer la idea de que los números sirven para hacer cuentas y en estudiantes de 3º ciclo se hace alusión al cálculo mental.

VI.1.4. UTILIDAD DE SABER RESOLVER PROBLEMAS

Las distintas respuestas de los estudiantes a la cuestión sobre la utilidad de saber resolver problemas las recogemos en la Tabla VI.4. En dichas respuestas se aprecia que a veces se relaciona la resolución de problemas con el hecho de aprender para algo; otras veces con miras a tener una profesión o trabajo; en otras ocasiones queda de manifiesto que la resolución de problemas supone un aprendizaje que permite un beneficio escolar, como pasar de curso, o social como no ser timados en transacciones comerciales. Se justifica de esta forma la utilidad de saber resolver problemas. Un estudiante de 3º ciclo (J.J.) hace referencia a comprender y pensar, pero se aleja de la cuestión planteada ya que la segunda frase de su respuesta respondería mejor a una cuestión en la que interviniesen requisitos para resolver un problema: “Para comprenderlo mejor. Lo único que hace falta para resolver un problema es la capacidad y el pensar”.

RESPUESTAS		Ciclo 1º	2º	3º
APRENDIZAJE				
Genérico	U.T.: […] los problemas que hacemos… el maestro nos enseña.	*		
	J.N.: Para aprenderlos	*		
	L. R.: Para aprender			*
Escolar	J.N.: Para pasar de curso		*	
	U.T.: Para pasar de curso		*	
	P.H.: Para exámenes		*	
	A.T.: Para aprender una cosa más de matemáticas		*	
	C.R.: Para aprender una cosa más de matemáticas		*	
	L.I..: Aprender matemáticas		*	
	J.L..: Aprender y hacer […] multiplicar y dividir		*	
	E.L.: Aprender y hacer […] multiplicar y dividir		*	
	R.R.: […] tienes que hacer una cosa y no tienes calculadora, saber resolver problemas te sirve para solucionarlo			*
Social	C.N.: Para comprar	*		
	C.T.: Para que no te timen		*	
	P.H.: Para que no te timen		*	
	C.T.: Para que luego puedas hacer cosas mayores		*	
	S.V.: Para que no te estafen		*	
	J.S.: Pues como ayuda, […] o para comprar y cosas así		*	
	C.L.: Hacerte mayor y ser independiente		*	
	A.T.: Para de mayor aprender muchas cosas		*	
	U.A.: Porque si no, sería uno un analfabeto y no sabría, nos engañan			*
	L.R.: Para cuando vas de compras saberte manejar bien con el dinero			*
	L.S.: Cuando vas a comprar tienes que ser hábil para saber cuánto dinero te han devuelto y ser rápida porque […]			*
	J.J.: Por ejemplo para cuando yo sea mayor, me pongan eso y yo no lo entienda, me pongan algo y yo no sepa lo que es, pues me serviría para hacerlo			*
	R.R.: […] cuando sea mayor saber resolver las cosas			*
	M.T.: Nos podrían engañar y todo			*
Profesional	J.S.: Ser médico o científico		*	
	A.T.: Tener trabajo		*	
	L. R.: Para desarrollarte			*

Tabla VI.4. Clasificación de las respuestas de los estudiantes por ciclo educativo respecto a la utilidad de resolver problemas.

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

Dos estudiantes de 2º ciclo (P.H. y C.R.) responden poniendo un ejemplo de situaciones en las que se puede resolver un problema. Dos estudiantes de 1º ciclo (M.R. y F.T.), no contestaron a la pregunta. A dos parejas de 1º ciclo (T.C. y J.I.; R.L. y J.A.) y una de 3º ciclo (I.G. y J.E.), no se les formuló esta pregunta. Este último hecho da lugar a que la mayor parte de las respuestas correspondan a estudiantes de segundo ciclo.

El mayor número de respuestas cae en el bloque que hemos denominado social, seguido del escolar. Interpretamos este hecho como que estos estudiantes están muy concienciados de la importancia social de las matemáticas y que además éstas tienen un amplio reflejo en el trabajo escolar que vienen desarrollando.

La información recogida en la Tabla VI.4 pone de manifiesto que estudiantes de 2º y 3º ciclo consideran que la resolución de problemas forma parte del aprendizaje entendido a veces como formación para la vida, que les ayuda a formarse integralmente como personas y a crearse un futuro profesional.

En el 3º ciclo algún estudiante, como hemos comentado, piensa que la resolución de problemas tiene un valor instrumental que les permite aprender a pensar.

VI.1.5. LUGARES DÓNDE RESUELVEN PROBLEMAS

Con esta pregunta se pretende conocer los lugares en los que los estudiantes reconocen realizar la actividad de resolver problemas. Todos los estudiantes reconocen hacer problemas en clase y en la casa, al hacer los deberes. En las entrevistas se aprecia que el entrevistador pregunta, con insistencia, por otros lugares diferentes al colegio en los que se suele resolver problemas, intentando que los estudiantes consideren situaciones no escolares. Recogemos en la Tabla VI.5 aquellas respuestas que hacen referencia a situaciones diferentes al colegio o a la casa al hacer los deberes, procedentes de trece de los estudiantes.

Establecemos una clasificación de las respuestas en dos clases: las que hacen referencia a situaciones de compraventa y otras, que denominamos situaciones de socialización, que tratan de relaciones con amigos, parientes o compañeros.

RESPUESTAS		Ciclo		
		1º	2º	3º
SITUACIONES NO ESCOLARES				
De compra	U.A.: Sólo si me llevo una libreta y un “boli”	*		
	J.N.: […] yo, cuando voy al mercado, lo voy sumando	*		
	J.S.: Yo cuando compro pan, chuches y fruta, que tengo que hacer más cuentas…		*	
	P.H.: […] cuando estoy en el supermercado comprando algo		*	
	J.L.: […] alguna vez no sé el dinero que va a costar, entonces yo tengo que hacer la cuenta		*	
	E.L.: […] cuando me da mi madre dinero de sobra pues más o menos hago la cuenta		*	
	E.L.: […] como tengo un bar, pues hay una piscina, […] entonces la gente que viene pues yo la atiendo y sé hacer bien las cuentas		*	
	I.G.: […] tienes que ir a la panadería. Muchas veces tenemos que calcular			*
	J.E.: Muchas veces tenemos que ir a comprar nosotros, pues entonces tenemos que calcular cuánto dinero			*
	J.J.: Yo resolví una vez. [...] me enseñaron a multiplicar por ejemplo, un duro por cinco regalices son…			*
De socialización	U.A.: En el fútbol		*	
	M.T.; Sí, para echar equipos		*	
	U.A.: […] con los hermanos, para repartirnos las chuche			*

Tabla VI.5. Clasificación de las respuestas de los estudiantes por ciclo educativo respecto a los lugares donde se resuelven problemas.

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

A una pareja de 1º ciclo (T.C. y J.I.) y dos parejas de 2º ciclo (C.R y A.T.; C.L. y L.I.) no se les formuló esta pregunta en sus entrevistas. El resto de estudiantes, ante la insistencia del entrevistador, admitieron resolver problemas fuera del colegio.

Se aprecia en la tabla que la situación de compraventa es la que más aparece en las respuestas, tanto en 2º como en 3º ciclo. Esto puede deberse a que en la sesión inicial se les pidió a los estudiantes que inventaran un problema de compra-venta y a que este es uno de los lugares sugeridos por el entrevistador en sus preguntas.

En el análisis de las entrevistas se muestra que el hecho de resolver problemas en casa se debe a las tareas encomendadas por el profesor o por sus padres, y los problemas que resuelven son los propuestos en el libro de texto. Como se muestra en el siguiente extracto de entrevista, un estudiante (3º ciclo, 12 años) identifica los problemas de matemáticas como problemas que surgen en la vida, pero muestra no reconocer en qué momentos o lugares se resuelven.

> L. R.: Los problemas de matemáticas son al final los problemas de la vida diaria.
>
> ENTREVISTADOR: Y esos problemas ¿se resuelven fuera del cole?
>
> L. R.: No, fuera del colegio no resolvemos problemas.

Dado que a lo largo de la entrevista se invita a los estudiantes a reflexionar sobre sus actuaciones en situaciones de compra-venta, se obtienen respuestas de estudiantes de 3º ciclo en las que admiten realizar cálculos en dichas situaciones pero consideran que eso no es resolver problemas sino realizar operaciones aritméticas (L.R y R.R., 3º ciclo). Un estudiante de 1º curso considera que sí se resuelven problemas fuera del entorno escolar, que lo puede hacer en aquellas ocasiones en las que las cuentas sean fáciles de realizar y disponiendo de un soporte (como papel y lápiz) para realizarlas.

> ENTREVISTADOR: ¡Ah! Y cuando van al supermercado, ¿resuelven los problemas?
>
> U.A.: Sólo si me llevo una libreta y un "boli".

VI.1.6. JUSTIFICACIÓN SOBRE SI ES RESOLUBLE EL ENUNCIADO INVENTADO

Excepto el estudiante R.L. (1º ciclo), todos afirman con rotundidad que sí se puede resolver el problema que han formulado. Algunos de ellos (8) acompañan su afirmación con alguna explicación. Hemos clasificado las explicaciones en dos clases, como se recogen en la Tabla VI.6, según si se usa como argumento la operación aritmética que se ha de realizar para resolver el problema o se usa un problema como ejemplo.

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

En 8 casos, los argumentos explicativos se basan en las operaciones aritméticas que hacen posible la resolución del problema. Si bien son pocas respuestas las que se tienen, vemos que las mismas se encuentran en alumnos de todos los ciclos pero va decreciendo a medida que se avanza en el ciclo educativo.

RESPUESTAS		Ciclo 1º	2º	3º
JUSTIFICACIONES				
Indican operaciones	J.I.: Sí, con la suma	*		
	T.C.: Porque sé que es multiplicar y lo he entendido bien	*		
	T.C.: Tienes que multiplicar cinco por cien	*		
	J.A.: Porque una decena y otra decena es 20	*		
	P.H.: Sí, con la división		*	
	C.T.: Sí, porque he hecho la prueba		*	
	L.I.: Porque es un problema de multiplicar		*	
	L.R. Porque lo único que se tiene que hacer es multiplicar. Sumar las dos …y las nueve,… te salen once… y lo multiplicas por 16.999 :			*
Uso de ejemplo	M.T.: Si una naranja cuesta 100,5 pesetas pues 414 naranjas …nos tendría que dar lo que cuesta una, pero lo tenemos que multiplicar por las que quiero comprar			*

Tabla VI.6. Clasificación de las respuestas de los estudiantes por ciclo educativo respecto a si el problema que han inventado se puede resolver.

VI.1.7. ESTRATEGIAS UTILIZABLES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este apartado se recoge la información obtenida sobre el pensamiento de estos estudiantes acerca de la posibilidad de poder utilizar más de una estrategia para resolver los problemas matemáticos escolares. Para ello se les pidió que pensaran en los problemas inventados u otros diferentes, y decidieran si se podrían solucionar correctamente utilizando diferentes estrategias.

En la Tabla VI.7 recogemos las aportaciones de los entrevistados. Las respuestas aparecen clasificadas en tres grandes bloques: los que opinan que sí hay diferentes formas de resolver problemas, los que no saben, y los que dicen que depende del problema. Para las respuestas que son de “sí” o “no” aparecen respuestas sin y con justificación. No ocurre así para las condicionales.

RESPUESTAS		Ciclo 1º	2º	3º
SÍ				
Sin justificar	M.R.	*		
	C.T.: Los de las multiplicaciones y las sumas		*	
	U.A.: En los que se multiplica			*
Justificación basada en las propiedades estructurales de las operaciones	F.T.: el 8 se pone arriba y el 10 abajo	*		
	T.C.: Pues sumando cien veces cinco o cinco veces cien	*		
	J.I.:[…] si no está seis por dos, miras dos por seis	*		
	C.L.: El de alguna multiplicación, cambiar el orden del factor		*	
	A.T.: :[…] cambiando los lugares se puede		*	
	L.S.: […] hago primero las dos cosas y el resultado lo sumo a la última,			*
Justificación basada en la “prueba”	A.T.: Con la prueba		*	
	L.R.: Se puede hacer una prueba			*
	I.G.: […] pueden tener la prueba			*
Justificación basada en la relación entre operaciones	A.T: […]la multiplicación pues tienes que sumar muchas cosas		*	
	S.V.: Si es multiplicar, también puedes sumar		*	
	C.T.: División es lo contrario de la multiplicación y entonces en la división tú puedes restar		*	
	E.L.: La resta se puede resolver de distinta manera, :[…] se puede también con la división, […] y la suma con la multiplicación		*	
	M.T.: La resta […] lo sumas al resultado y te tiene que dar el de arriba		*	
	M.T.: El cociente lo multiplicas por el divisor y te tiene que salir el dividendo			*
	R.R.: Lo mismo que diga dos por diez a decir diez más diez			*
	M.T.: Multiplicar es sumar			*
	J.J.: 30 le quitas 20 y te sale 10; o 10 por 1 también te saldría			*
CONDICIONADO				
	C.R: Según qué tipo de problema sea. […] De restar no	*		
	J.L.: Según qué tipo de problema sea. […] De restar no		*	
	C.T.: Algunos sí, y otros no		*	
	E.L: Algunas no, las restas		*	
	P.H.; Si es multiplicación, pues sumando		*	
	J.S.: Si es multiplicación, pues sumando			*
	M.T.: Depende del que sea			*
	U.A.: Algunos			*
NO				
Sin justificar	C.N: No	*		
	L.I: Me parece que no		*	
Justificación basada en falta de conocimiento	I.G.: Todavía no hemos dado una teoría mayor			*
	J.E.: Tenemos que dar la materia de dos o más resultados iguales			*
NO JUSTIFICA				
No sabe	T.C.: Yo qué sé.	*		

Tabla VI. 7. Clasificación de las respuestas de los estudiantes por ciclo educativo respecto a si los problemas se pueden resolver de más de una forma.

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

No se formula la pregunta a dos parejas de 1º curso (R.L. y J.A.; U.T. y J.N.).

La mayoría de los alumnos reconocen la posibilidad de resolver un problema con varias estrategias. Los estudiantes que justifican su afirmación basándose en las propiedades estructurales de las operaciones, tienen en cuenta la propiedad conmutativa tanto de la suma como del producto (2º ciclo). Un alumno de 3º ciclo se refiere a la propiedad asociativa de la suma. Si consideramos unidas las respuestas que hacen alusión a la prueba con las que establecen relación entre operaciones, recogeríamos la mayor cantidad de respuestas dadas por los estudiantes de 2º y 3º ciclo. Nuestra interpretación a este hecho es que reconocen las relaciones entre las diferentes operaciones aritméticas (que la multiplicación se puede considerar como una suma repetida, la división como una resta reiterada, que la suma y la resta son dos operaciones opuestas, o que la multiplicación y la división son operaciones inversas), si bien puede ser que este conocimiento no esté totalmente formalizado. Los estudiantes de 3º ciclo que advierten que no saben si es posible resolver un problema de varias formas, lo justifican indicando que se trata de un contenido escolar que les tienen que enseñar o que se les ha olvidado cómo resolver problemas de varias maneras.

VI.2. ANÁLISIS DE LOS ENUNCIADOS PLANTEADOS

Recogemos en este apartado el análisis de los enunciados propuestos por los estudiantes cuando se les pidió que inventaran un problema que resultara difícil de resolver por su compañero. Para realizar este análisis hemos tomado en consideración: a) la coherencia del enunciado, b) el tipo de problema y c) el esquema que presenta el enunciado. Consideramos la coherencia del enunciado formada por una serie de elementos a saber: i) una historia verosímil, ii) la utilización de datos numéricos, iii) el planteamiento de una pregunta o interrogante a responder y iv) la existencia de relación entre datos e interrogante. En cuanto al tipo de problema, tomamos como elementos para su caracterización: i) el número de etapas necesarias para su resolución, ii) la estructura operatoria subyacente en el mismo, iii) su estructura semántica y iv) el tipo de números utilizados en el enunciado. El esquema del problema se construye siguiendo el orden de aparición de los datos en la historia del problema y su relación operatoria.

En dichos esquemas teóricos aparecen las siguientes abreviaturas:

D: dato del problema; R,D: resultado obtenido de haber operado unos datos del enunciado (por medio de la operación indicada), que se utiliza como nuevo dato; S: solución obtenida.

VI.2.1. TABLAS DE ANÁLISIS DE LOS ENUNCIADOS PLANTEADOS

Recogemos a continuación las producciones de los 27 estudiantes entrevistados, organizadas en tablas según los elementos del análisis citado previamente. Cada una de estas tablas recoge los datos del estudiante que propone el problema, el enunciado planteado y el análisis del mismo realizado.

<table>
<tr><td>Curso 1º</td><td colspan="4">Estudiante J.A.</td><td>7 años</td></tr>
<tr><td>Problema 1</td><td colspan="5">¿39 - 20?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>-----</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Aditiva</td><td>----</td><td>2 cifras-N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">--</td></tr>
</table>

Tabla VI.8. Tipo de problema inventado por J.A.

<table>
<tr><td>Curso 1º</td><td colspan="4">Estudiante R.L.</td><td>6 años</td></tr>
<tr><td>Problema 2</td><td colspan="5">10 + 10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>NO</td><td>-----</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
Operación sin signo igual
0 preguntas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Aditiva</td><td>----</td><td>2 cifras-N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">--</td></tr>
</table>

Tabla VI. 9. Tipo de problema inventado por R.L.

Curso 1º	Estudiante U.T.				7 años
Problema 3	*¿Cuántas camistas hay en el mercado?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	NO
	NO	NO	SÍ	----	Comentarios
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	Frase interrogativa 1 pregunta
	----	----	----	----	
Esquema teórico	--				

Tabla VI.10. Tipo de problema inventado por U.T.

Curso 1º	Estudiante J.N.				7 años
Problema 4	*¿que le falta a la fuente?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	NO
	NO	NO	SÍ	……	Comentarios
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	Frase interrogativa 1 pregunta
	----	----	----	----	
Esquema teórico	--				

Tabla VI.11. Tipo de problema inventado por J.N.

<table>
<tr><td>Curso 1º</td><td colspan="4">Estudiante C.N.</td><td>7 años</td></tr>
<tr><td>Problema 5</td><td colspan="5">Ana ha ido a comprar al supermercado y ha comprado tres libros y diez caramelos y a sus amigos le a dado ¿8 y en total?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>NO</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>----</td><td>----</td><td>----</td><td>2 cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">---</td></tr>
</table>

Tabla VI.12. Tipo de problema inventado por C.N.

<table>
<tr><td>Curso 2º</td><td colspan="4">Estudiante F.T.</td><td>8 años</td></tr>
<tr><td>Problema 6</td><td colspan="5">Miguel Angel tiene dos bolsas de pipas cada bolsa de pipas tiene 10 pipas 8 a los niños ¿Cuantas pipas le quedan a Miguel Angel en total?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>NO</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>----</td><td>----</td><td>----</td><td>2 cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">---</td></tr>
</table>

Tabla VI.13. Tipo de problema inventado por F.T.

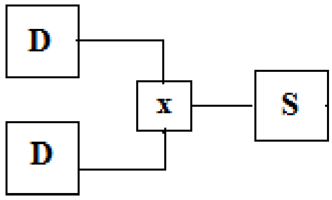
Curso 2º	Estudiante M.R.				7 años
Problema 7	*Ana ha comprado 8 cajas de manzanas y en cada caja hay 4 manzanas. ¿Cuantas manzanas hay en total?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	<u>Comentarios</u>
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV SIMPLE
	1	Multiplicativa	Tasa	1 cifras N	1 pregunta
Esquema teórico					

Tabla VI.14. Tipo de problema inventado por M.R.

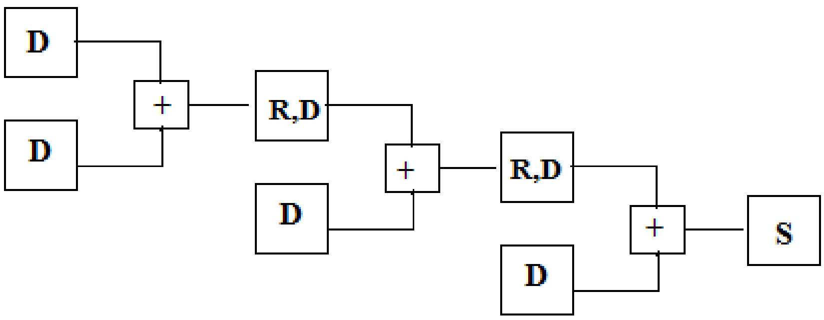
Curso 2º	Estudiante T.C.				7 años
Problema 8	*En una tienda se han bendido 100 lapices luego 20 despues 999 y por último 393. ¿Cuántos lapices se han bendido en total?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	<u>Comentarios</u>
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV COMPUESTO
	3	Aditiva	Cambio-unión	3cifras N	1 pregunta
Esquema teórico					

Tabla VI.15. Tipo de problema inventado por T.C.

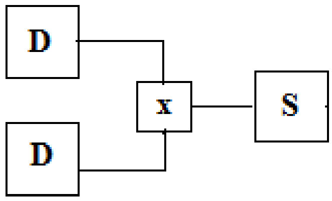
<table>
<tr><td>Curso 2º</td><td colspan="4">Estudiante J.I.</td><td>8 años</td></tr>
<tr><td>Problema 9</td><td colspan="5">Ayer fui a una tienda y me compré 5 cajas de juguetes y en cada caja hay 100 juguetes. ¿Cuántos juguetes compré en total?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV SIMPLE
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Multiplicativa</td><td>tasa</td><td>3cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.16. Tipo de problema inventado por J.I.

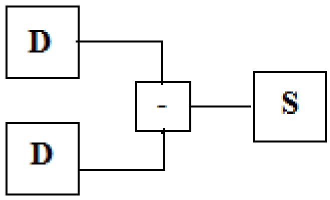
<table>
<tr><td>Curso 3º</td><td colspan="4">Estudiante J.L.</td><td>8 años</td></tr>
<tr><td>Problema 10</td><td colspan="5">En mi clase somos 25 niños pero mañana solo vendran 8 niños menos. ¿Cuántos niños seremos en total?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEVSIMPLE
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Aditiva</td><td>Cambio</td><td>2cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.17. Tipo de problema inventado por J.L.

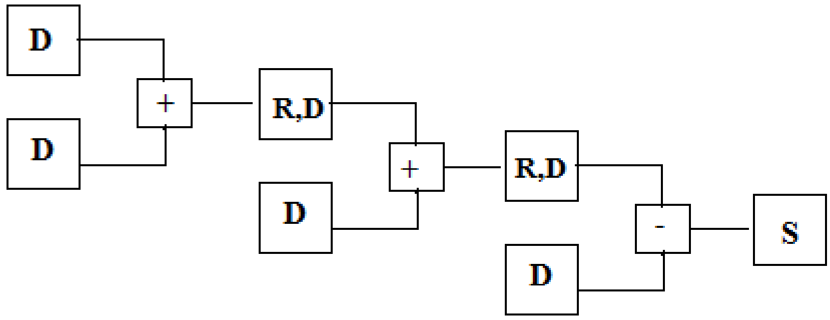
Curso 3º	Estudiante E.L.				9 años
Problema 11	*Yo tengo 1404 pesetas en mi cumpleaños me regalo mi padre 2000 pesetas y mi abuela me regalo 20.000 pesetas. Si quito lo de mi padre, ¿cuánto me quedará?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	Comentarios
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV
	3	Aditiva	Cambio	5 cifras N	COMPUESTO 1 pregunta
Esquema teórico					

Tabla VI.18. Tipo de problema inventado por E.L.

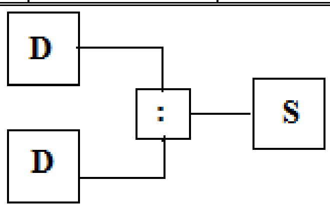
Curso 3º	Estudiante A.T.				8 años
Problema 12	*De una casa he sacado 1.213 cucharas pero yo nada más quiero un cuarto de cucharas. ¿Cuántas son las cucharas que yo quiero?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	Comentarios
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV SIMPLE
	1	Multiplicativa	G.I. Partición	4 cifras N	1 pregunta
Esquema teórico					

Tabla VI.19. Tipo de problema inventado por A.T.

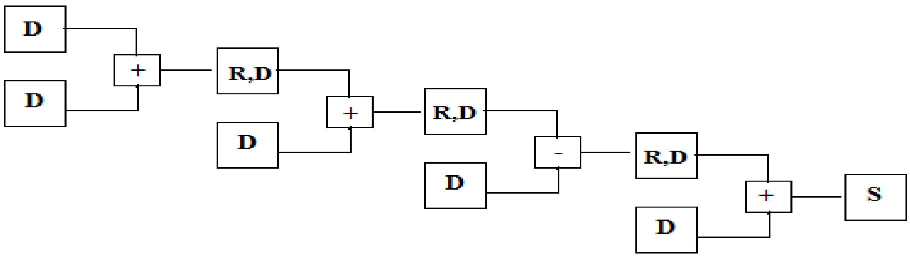
<table>
<tr><td>Curso 3º</td><td colspan="4">Estudiante C.R.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 13</td><td colspan="5">Tengo 50 canicas y un amigo me ha dado 60. Y mi madre 80. Pero se me an perdido 90. Y me he encontrado 5. ¿Cuantas canicas tengo ahora?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia Verosímil</td><td>Datos numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV
COMPUESTO
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Aditiva</td><td>Cambio</td><td>2 cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.20. Tipo de problema inventado por C.R.

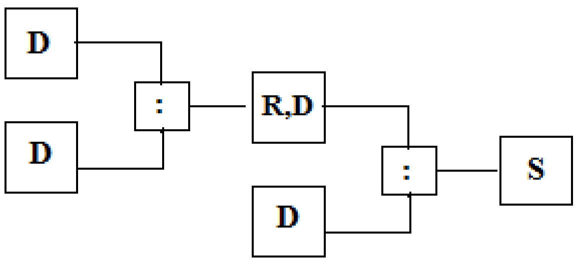
<table>
<tr><td>Curso 4º</td><td colspan="4">Estudiante C.L.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 14</td><td colspan="5">En un garaje de coches, tienen 140 ruedas. Le quieren poner ruedas a 40 coches, y con las restantes, a 40 motos. ¿Cuantas ruedas le ponen a los coches? ¿Y a cuantas motos? ¿Cuantas ruedas sobran?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia Verosímil</td><td>Datos numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV
COMPUESTO
3 preguntas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Multiplicativa</td><td>Grup.Iguales partición</td><td>3 cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.21. Tipo de problema inventado por C.L.

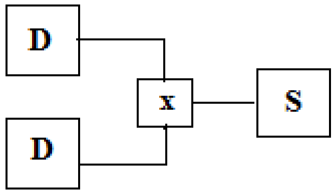
Curso 4º	Estudiante L.I.				9 años
Problema 15	*Un rascacielos tiene 96 pisos y en cada piso hay 25 habitaciones. ¿Cuantas habitaciones hay en el rascacielos?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	<u>Comentarios</u>
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV SIMPLE
	1	Multiplicativa	Tasa	2 cifras N	1 pregunta
Esquema teórico					

Tabla VI.22. Tipo de problema inventado por L.I.

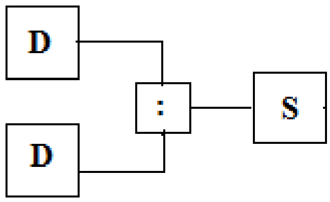
Curso 4º	Estudiante C.T.				9 años
Problema 16	*En una tienda hay 37.000 canicas que meten en 39 bolsas. ¿Cuantas canicas cabrán en cada bolsa y cuántas canicas sobran?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	<u>Comentarios</u>
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV SIMPLE
	1	Multiplicativa	Grup.Iguales Partición	5 cifras N	2 preguntas
Esquema teórico					

Tabla VI.23. Tipo de problema inventado por C.T.

Curso 4º	Estudiante S.V.				9 años
Problema 17	*En una carretera hay 223 coches. En el puente hay 22 coches. El puente se cae y la mitad pasa y la otra mitad se cae. ¿Cuantos coches quedan? ¿Cuantos se caen? ¿Cuantos han pasado el puente?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	NO
	SÍ	SÍ	SÍ	NO	<u>Comentarios</u> EXCESO DE DATOS 3 preguntas
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	
	----------	------------	------------	3 cifras N	
Esquema teórico	--				

Tabla VI. 24. Tipo de problema inventado por S.V.

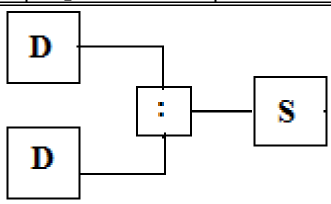
Curso 4º	Estudiante P.H.				9 años
Problema 18	*En un supermercado hay veinte millones de poster iguales y los reparten entre medio millo 227 personas. ¿Cuantos posters le dan a cada persona?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	<u>Comentarios</u> PAEV SIMPLE 1 pregunta
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	
	1	Multiplicativa	Grup.Iguales partición	8 cifras N	
Esquema teórico					

Tabla VI. 25. Tipo de problema inventado por P.H.

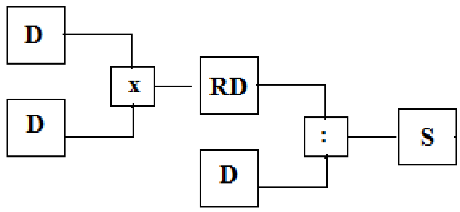
Curso 4º	Estudiante J.S.				9 años
Problema 19	*En una tienda había cinco cartones de leche cada cartón, cuesta 600 centimos. Pero se le había olvidado poner las pesetas, y cada 2 centimos son 1 peseta. ¿Cuantas pesetas son? ¿Cuanto cuestan los cinco juntos?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	Comentarios
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV COMPUESTO
	2	Multiplicativa	Tasa	3 cifras N	2 preguntas
Esquema teórico					

Tabla VI.26. Tipo de problema inventado por J.S.

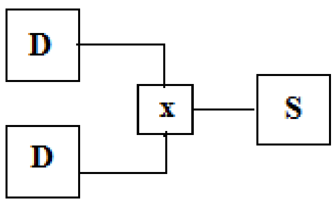
Curso 5º	Estudiante U.A.				10 años
Problema 20	*Pablo va al supermercado a comprar naranjas. Las naranjas cuestan cada una 100,5 pesetas. Si compras 414 naranjas: ¿Cuánto dinero gastará Pablo?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	Comentarios
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV SIMPLE
	1	Multiplicativa	Tasa	3 cifras D	1 pregunta
Esquema teórico					

Tabla VI.27. Tipo de problema inventado por U.A.

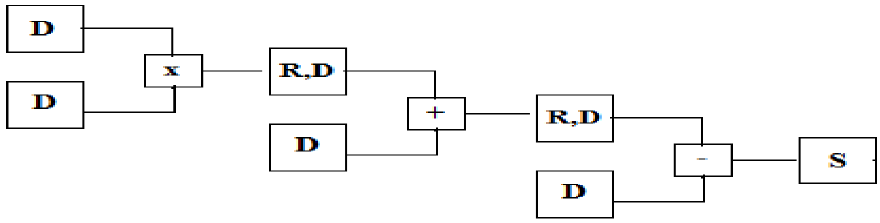
<table>
<tr><td>Curso 5º</td><td colspan="3">Estudiante M.T.</td><td colspan="2">10 años</td></tr>
<tr><td>Problema 21</td><td colspan="5">Julia tiene en su coche 20,5 litros de gasolina. Julia hace un viaje de 3 horas cada hora gasta 6,8 litros y aparte se hace 1,5 litro de gasolina más. ¿Cuántos litros de gasolina tiene Julia en su coche?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV COMPUESTO
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Multiplicativa
Aditiva</td><td>Tasa
Cambio</td><td>2 cifras D</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

Tabla VI.28. Tipo de problema inventado por M.T.

<table>
<tr><td>Curso 5º</td><td colspan="3">Estudiante J.E.</td><td colspan="2">10 años</td></tr>
<tr><td>Problema 22</td><td colspan="5">Ana compro un coche que vale 2.500.000 ptas. Primero pago 300.000 ptas, luego pago 400.000 ptas y el resto lo pago en 25 mensualidades. ¿Cuánto pagó en cada mensualidad?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV COMPUESTO
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Aditiva
Multiplicativa</td><td>Cambio
Grup.Iguales partición</td><td>7 cifras N</td></tr>
</table>

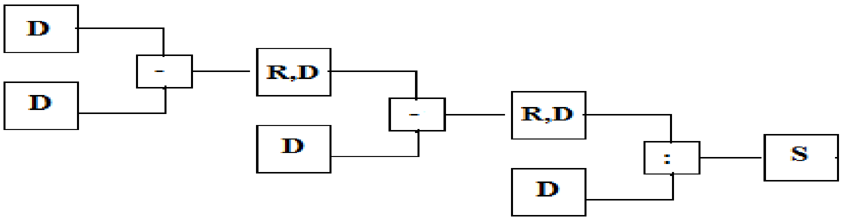
Esquema teórico	

Tabla VI. 29. Tipo de problema inventado por J.E.

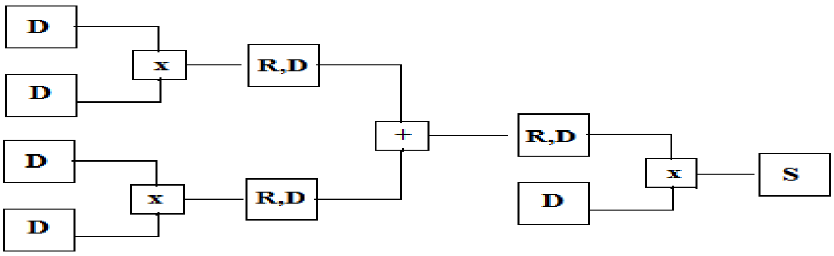
Curso 5º	Estudiante I.G.				10 años
Problema 23	*Juan compra 3 barras de barras de pan y 2 paquetes de chicles. Si cada barra cuesta 65 pts y cada paquete cuesta 235 pts y ya saben que un euro son en pesetas 166,38. ¿Cuantos euros con sus decimales a pagado Juan?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	<u>Comentarios</u>
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV COMPUESTO 1 pregunta
	4	Aditiva Multiplicativa	Cambio Tasas	3 cifras D	
Esquema teórico					

Tabla VI.30. Tipo de problema inventado por I.G.

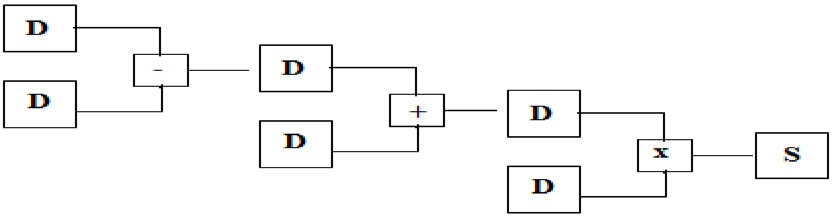
<table>
<tr><td>Curso 6º</td><td colspan="4">Estudiante L.S.</td><td>11 años</td></tr>
<tr><td>Problema 24</td><td colspan="5">Mario compro dos camas y una mujer le quito una. Mario volvio a la tienda y volvió a comprar nueve camas más. Una cama vale 16.999 pts. ¿Cuánto dinero se ha gastado en total?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV COMPUESTO
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Aditiva Multiplicativa</td><td>Cambio
Tasa</td><td>5 cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

Tabla VI.31. Tipo de problema inventado por L.S.

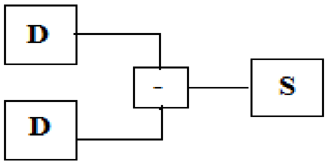
<table>
<tr><td>Curso 6º</td><td colspan="4">Estudiante L.R..</td><td>11 años</td></tr>
<tr><td>Problema 25</td><td colspan="5">Laura tiene 758/101 de caramelos y Juan 805/120 de caramelos. ¿cuantos caramelos tiene Juan más que Laura?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV SIMPLE
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Aditiva</td><td>Comparación</td><td>3 cifras F</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

Tabla VI.32. Tipo de problema inventado por L.R.

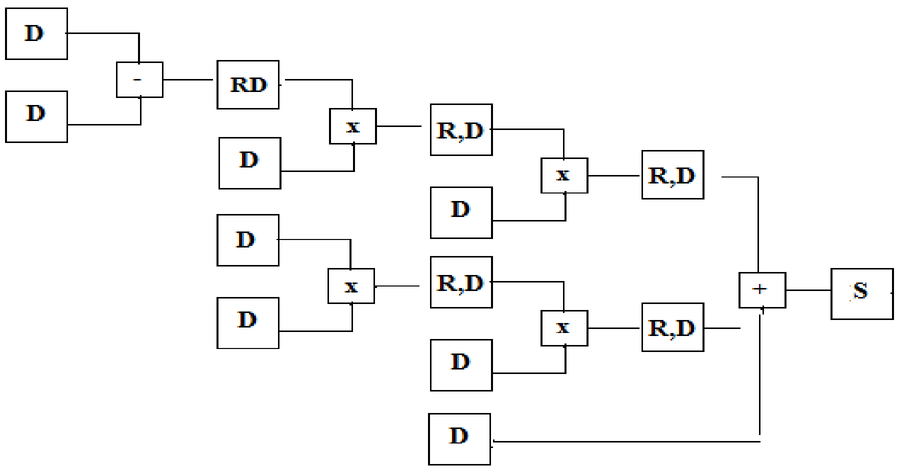
Curso 6º	Estudiante R.R.				12 años
Problema 26	*En un tren hay 20 vagones, cada vagón hay 30 asientos. En cada asiento se pueden sentar 2 personas, en un par de vagones solo hay 15 asiento. El tren va lleno y dos personas van de pie en cada vagón. ¿Cuántas personas hay en el tren?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos Numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	Comentarios
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	PAEV COMPUESTO 1 pregunta
	6	Multiplicativa Aditiva	Tasa, Combinación.	2 cifras N	
Esquema teórico					

Tabla VI.33. Tipo de problema inventado por R.R.

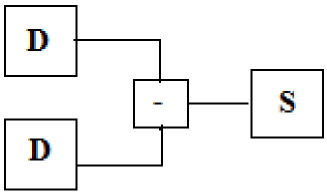
<table>
<tr><td>Curso 6º</td><td colspan="4">Estudiante J.J.</td><td>11 años</td></tr>
<tr><td>Problema 27</td><td colspan="5">En un supermercado hay unos articulos de limpieza que en Total cuestan 20.000 PTS y antes costaba 10.000 PTS. ¿Cuanto se han aumentado esos articulos de limpieza?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coherencia de Enunciado</td><td>Historia
Verosímil</td><td>Datos
Numéricos</td><td>Interrogante</td><td>Relación
pregunta/datos</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>
PAEV
SIMPLE
1 pregunta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo de problema</td><td>Número etapas</td><td>Estructura Operatoria</td><td>Estructura Semántica</td><td>Tipo de Números</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Aditiva</td><td>Cambio</td><td>5 cifras N</td></tr>
<tr><td>Esquema teórico</td><td colspan="5">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.34. Tipo de problema inventado por J.J.

VI.2.2. RECOPILACIÓN DE LOS ANÁLISIS DE LOS ENUNCIADOS PLANTEADOS

Los datos de los análisis de los problemas propuestos aparecen resumidos en la Tabla VI.35.

La tabla pone de manifiesto los resultados que a continuación comentamos.

Coherencia de los enunciados

Excepto los estudiantes de 1º curso, uno de segundo (F.T.) y uno de cuarto (S.V.), el resto enuncian problemas coherentes, que tienen solución a través del uso de los números dados en el problema, operándolos adecuadamente. La no coherencia de los enunciados señalados, excepto en el del alumno de 4º curso, es debida a una historia no verosímil y a la inexistencia de relación entre los datos y la pregunta que se formula en el enunciado.

Curso	Problema	H.V	D.N	N.I.	P/D	C.E.	Nº Etapas	E.O.	E.S.	T.N
1º	1	No	Sí	1	---	No	1	Aditivo	---	2N
	2	No	Sí	0	---	No	1	Aditivo	---	2N
	3	No	No	1	---	No	---	---	---	---
	4	No	No	1	---	No	---	---	---	---
	5	No	Sí	1	No	No	---	---	---	2N
2º	6	No	Sí	1	No	No	---	---	---	2N
	7	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Multip.	Tasa	1N
	8	Sí	Sí	1	Sí	Sí	3	Aditivo	Cambio	3N
	9	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Multip.	Tasa	3N
3º	10	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Aditivo	Cambio	2N
	11	Sí	Sí	1	Sí	Sí	3	Aditivo	Cambio	5N
	12	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Multip.	G. I. Partición	4N
	13	Sí	Sí	1	Sí	Sí	4	Aditivo	Cambio	2N
4º	14	Sí	Sí	3	Sí	Sí	2	Multip.	G. I. Partición	3N
	15	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Multip.	Tasa	2N
	16	Sí	Sí	2	Sí	Sí	1	Multip.	G.I. Partición	5N
	17	Sí	Sí	3	No	No	---	---	---	3N
	18	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Multip.	G.I. Partición	8N
	19	Sí	Sí	2	Sí	Sí	2	Multip.	Tasa	3N
5º	20	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Multip.	Tasa	3D
	21	Sí	Sí	1	Sí	Sí	3	Multip./Aditivo	Tasa/Cambio	2D
	22	Sí	Sí	1	Sí	Sí	3	Adit./Multip.	Cambio/G.I. Partición	7N
	23	Sí	Sí	1	Sí	Sí	4	Adit./Multip.	Cambio/Tasa	3D
6º	24	Sí	Sí	1	Sí	Sí	3	Aditivo/Multip.	Cambio/Tasa	5N
	25	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Aditivo	Comparación	3F
	26	Sí	Sí	1	Sí	Sí	6	Multipl./Aditivo	Tasa/Comb.	2N
	27	Sí	Sí	1	Sí	Sí	1	Aditivo	Cambio	5N
Total		20SÍ 7NO	25SÍ 2NO	22-1 1-0 2-2 2-3	20SI 3NO 4--	20SÍ 7NO	12-1 2-2 5-3 2-4 1-6 5---	8Aditivos 9Multip. 3Adit./Mult 2Mult./Adit. 5 ---	5 Cambio 1Comp 5 Tasa 4 G.I. Partic. 3Tasa/Camb 1Camb/G.I. 1Tasa/Comb 7 ---	21-N 3-D 1-F 1-1C 9-2C 8-3C 1-4C 4-5C 1-7C 1-8C 2---

Tabla VI.35.Clasificación de las producciones inventadas por los estudiantes.

H.V.: historia verosímil; D.N.: datos numéricos; N.I.: número de interrogantes: P/D: relación datos y pregunta; C.E.: coherencia del enunciado; N.E.: número de etapas; E.O.: estructura operatoria; E.S.: estructura semántica; T.N.: tipos de números; Adit.: aditivo; Multip.: multiplicativo; G.I.: grupos iguales; Partic.: partición; Camb.: cambio y Comb.: combinación.

Número de etapas

En relación a las etapas[9], predominan los problemas de una etapa (12/22), seguidos por los de tres etapas (4/22) y los de dos y cuatro etapas aparecen con la misma proporción (3/22). También aparece un problema de seis etapas. La clasificación de las producciones que recogemos en la Tabla VI.36 pone de manifiesto que no hay relación entre el curso y el número de etapas de los problemas propuestos

	Curso						Total
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Problemas simples	2	2	2	3	1	2	12
Problemas compuestos	0	1	2	2	3	2	10

Tabla VI.36.Clasificación de las invenciones por curso según nº de etapas.

Todos los enunciados, excepto en uno de los que se propone realizar una operación, llevan interrogantes. La mayoría presentan un único interrogante incluso en algunos problemas que son de más de una etapa (en algún caso de trata de sumas de varios sumandos). El dato relevante de este hecho es que los problemas con más de una pregunta corresponden todos a estudiantes de 4º curso.

Estructura operatoria

Todos los enunciados de estudiantes de los cursos anteriores a 5º involucran una sola estructura operatoria ya sea aditiva (8 casos) o multiplicativa (9 casos). Es en 5º y en 6º curso donde se proponen enunciados que involucran las dos estructuras aditiva-multiplicativa (3 casos), y multiplicativa-aditiva (2 casos). Un dato a destacar es el predomino absoluto de la estructura multiplicativa en 4º curso y la aparición de la estructura aditiva en 6º curso en dos casos en los que se proponen problemas de una sola etapa.

[9] Al estudiar el número de etapas se han contabilizado los dos planteamientos que correspondían a operaciones aditivas a pesar de no constituir problema matemático.

Estructura operatoria y número de etapas

Vemos en la Tabla VI.37 que cuando la operación que resuelve el problema es aditiva, el número de problemas de una etapa es mayor al de más de una etapa (5 enunciados frente a 3). Cuando se trata de la estructura multiplicativa, también se inventan más problemas de una etapa que de más de una (7 sobre 2). El número de enunciados de más de una etapa donde se combinan las dos estructuras operatorias, adición y multiplicación, ha supuesto un total de 5 enunciados. Por tanto, los problemas de más de una etapa se reparten equitativamente en dos grupos: las producciones donde aparecen a la vez las dos estructuras operatorias y en las que se presenta tan sólo una estructura operatoria.

A partir de 2º curso aparecen los enunciados aditivos de más de una etapa y los multiplicativos de una etapa. Los multiplicativos de más de una etapa los encontramos sólo en las producciones de cuarto curso.

		Curso						Total
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Aditivos	Simples	2		1			2	5
	Compuestos		1	2				3
Multiplicativos	Simples		2	1	3	1		7
	Compuestos				2			2
Aditivo-multiplicativos						3	2	5
Total		2	3	4	5	4	4	22

Tabla VI.37.Clasificación de las invenciones por cuso según la estructura operatoria y al número de etapas

Estructura semántica

Referente a la estructura semántica la mayor parte de los problemas aditivos pertenecen a la categoría de cambio, tanto en los simples como en los compuestos. Un solo problema aditivo de los simples es de comparación y otro entre los compuestos es de combinación. De los de la estructura multiplicativa, entre los simples hay 3 de grupos iguales partitivos y 4 de tasas. Entre los compuestos hay 1 de tasas y 1 de grupos iguales partitivos. Cuando se utilizan las dos estructuras operatorias en los enunciados, aparecen como categorías semánticas la de cambio, para la parte aditiva, combinada con el significado de tasas y grupos iguales partitivos (3 casos y 1 respectivamente) para la parte multiplicativa. Encontramos un problema aditivo-multiplicativo del tipo combinación y tasas.

Conjunto numérico

Por lo que a los números utilizados en los enunciados se refiere, destacamos la presencia de los números naturales que es exclusiva hasta 4º curso incluido; aparecen números decimales en 5º curso solamente en 3 casos y racionales en un caso en 6º curso. El número de cifras que presentan estos números son mayoritariamente 2 (9 casos) y 3 (8 casos). También aparecen números de 5 cifras (4 casos), y de 1, 4, 7 y 8 cifras (1 caso de cada uno).

VI.3. ANÁLISIS DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN

En este apartado detallamos las dificultades observadas en la tarea realizada por los estudiantes de educación primaria de resolver el problema planteado por su compañero de entrevista, desde tres perspectivas:

1) la propia resolución del problema;

2) el cálculo utilizado en dicha resolución y

3) la comparación de dos esquemas: el teórico que resulta de representar el problema siguiendo el orden que indica la historia del problema y el esquema seguido por los estudiantes según el orden de la resolución.

Respecto al apartado 1) indagamos sobre si necesitaron ayuda para resolver el problema, si a través de las operaciones seleccionadas se daba respuesta al problema, si conocen otra forma de llegar a la respuesta, y si la respuesta obtenida es correcta. Respecto al apartado 2) nos centramos en la forma de hacer el cálculo (oral, escrito, mental), si se reafirman en las operaciones elegidas para resolver el problema y si cometen errores al hacer los cálculos. Para el apartado 3) se enfrentan los dos esquemas identificando semejanzas y diferencias entre ellos. Las abreviaturas que se utilizan tienen el mismo significado en ambos esquemas, ya indicado en el apartado VI.2.

VI.3.1. TABLAS DE ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES

Para realizar el análisis detallado previamente se han elaboraron una serie de tablas, una para cada uno de los estudiantes, recogiendo toda esta información. Todas ellas se incluyen a continuación.

<table>
<tr><td>Curso 1º</td><td colspan="12">Estudiante R.L.</td><td>6 años</td></tr>
<tr><td>Problema 1</td><td colspan="12">¿39 – 20?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de
resolución</td><td colspan="3">Necesita ayuda</td><td colspan="3">Operaciones adecuadas</td><td colspan="3">Resolución alternativa</td><td colspan="3">Solución correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO</td><td colspan="3">------------</td><td colspan="3">-------------</td><td colspan="3">SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="4">Tipo de cálculo</td><td colspan="4">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="4">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="4">Escrito</td><td colspan="4">--------------</td><td colspan="4">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="6">Esquema Teórico</td><td colspan="7">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="6">------------------------------------</td><td colspan="7">---</td></tr>
</table>

Tabla VI.38. Resolución de R.L.

<table>
<tr><td>Curso 1º</td><td colspan="12">Estudiante J.A</td><td>6 años</td></tr>
<tr><td>Problema 2</td><td colspan="12">10 + 10</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de
resolución</td><td colspan="3">Necesita ayuda</td><td colspan="3">Operaciones adecuadas</td><td colspan="3">Resolución alternativa</td><td colspan="3">Solución correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO</td><td colspan="3">------------</td><td colspan="3">-------------</td><td colspan="3">SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="4">Tipo de cálculo</td><td colspan="4">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="4">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="4">ESCRITO</td><td colspan="4">-----------------</td><td colspan="4">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="6">Esquema Teórico</td><td colspan="7">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="6">--------------------------------------</td><td colspan="7">---</td></tr>
</table>

Tabla VI.39. Resolución de J.A.

<table>
<tr><td>Curso 1º</td><td colspan="12">Estudiante J.N.</td><td>7 años</td></tr>
<tr><td>Problema 3</td><td colspan="12">¿Cuántas camistas hay en el Mercado?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de
resolución</td><td colspan="3">Necesita ayuda</td><td colspan="3">Operaciones adecuadas</td><td colspan="3">Resolución alternativa</td><td colspan="3">Solución correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO</td><td colspan="3">------------</td><td colspan="3">-------------</td><td colspan="3">---------</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="4">Tipo de cálculo</td><td colspan="4">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="4">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="4">----------</td><td colspan="4">-----------------</td><td colspan="4">--------------------</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="6">Esquema Teórico</td><td colspan="7">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="6">-------------------------------------</td><td colspan="7">---</td></tr>
</table>

Tabla VI.40. Resolución de J.N.

Curso 1º	Estudiante U.T.				7 años
Problema 4	*¿que le falta a la fuente?*				Comentarios
Proceso de resolución	Necesita ayuda	Operaciones adecuadas	Resolución alternativa	Solución correcta	
	NO	------------	----------	----------	
Operatoria	Tipo de cálculo	Reafirmación en operaciones	Errores de cálculo		
	----------	-----------------	---------		
Comparación de esquemas	Esquema Teórico		Esquema Mostrado		
	------------------------------------		---		

Tabla VI.41. Resolución de U.T.

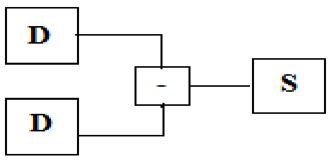
Curso 1º	Estudiante [10] C.N.				6 años
Problema 5	*Ana ha ido a comprar al supermercado y ha comprado tres libros y diez caramelos y a sus amigos le a dado ¿8 y en total?*				Comentarios Reinterpreta el problema planteado por ella misma. No hace uso de uno de los datos.
Proceso de resolución	Necesita ayuda	Operaciones adecuadas	Resolución alternativa	Solución correcta	
	NO	------------	NO	----------	
Operatoria	Tipo de cálculo	Reafirmación en operaciones	Errores de cálculo		
	ESCRITO	SÍ	NO		
Comparación de esquemas	Esquema Teórico		Esquema Mostrado		
	-------------------------------------				

Tabla VI.42. Resolución de C.N.

[10] Esta alumna realizó parte de la entrevista sola por lo que inventa y resuelve su propio problema.

<table>
<tr><td>Curso 2º</td><td colspan="4">Estudiante M.R.</td><td>7 años</td></tr>
<tr><td>Problema 6</td><td colspan="4">Miguel Angel tiene dos bolsas de pipas cada bolsa de pipas tiene 10 pipas 8 a los niños ¿Cuantas pipas le quedan a Miguel Angel en total?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

Reinterpreta el problema planteado por su compañero.

No justifica la idoneidad de la operación para resolver el problema.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de

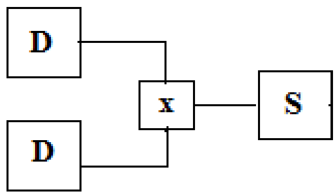
resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>------------</td><td>NO</td><td>----------</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td>Tipo de cálculo</td><td>Reafirmación en operaciones</td><td colspan="2">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>ESCRITO</td><td>SÍ</td><td colspan="2">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2">--------------------------------------</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.43. Resolución de M.R.

<table>
<tr><td>Curso 2º</td><td colspan="4">Estudiante F.T.</td><td>8 años</td></tr>
<tr><td>Problema 7</td><td colspan="4">Ana ha comprado 8 cajas de manzanas y en cada caja hay 4 manzanas. ¿Cuantas manzanas hay en total?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de

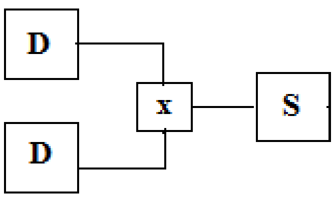
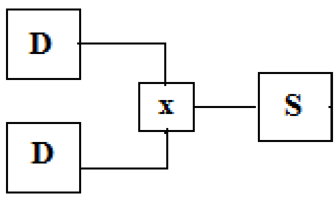
resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SI</td><td>SÍ</td><td>SI</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td>Tipo de cálculo</td><td>Reafirmación en operaciones</td><td colspan="2">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>ESCRITO</td><td>SÍ</td><td colspan="2">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.44. Resolución de F.T.

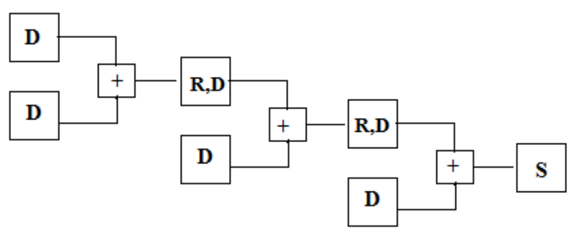
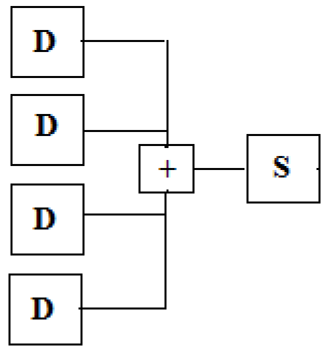
Curso 2º	Estudiante J.I.				8 años
Problema 8	*En una tienda se han bendido 100 lapices luego 20 despues 999 y por ultimo 393. ¿Cuántos lapices se han bendido en total?*				<u>Comentarios</u> Los dos esquemas son equivalentes.
Proceso de resolución	Necesita ayuda	Operaciones adecuadas	Resolución alternativa	Solución correcta	
	NO	SI	NO	SI	
Operatoria	Tipo de cálculo	Reafirmación en operaciones	Errores de cálculo		
	ESCRITO	SÍ	NO		
Comparación de esquemas	Esquema Teórico		Esquema Mostrado		
					

Tabla VI.45. Resolución de J.I.

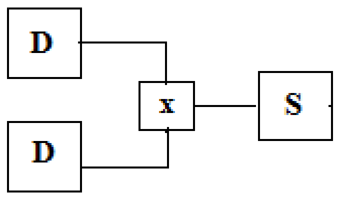
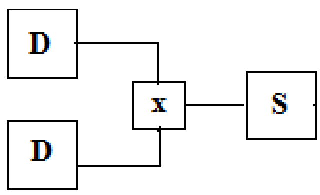
Curso 2º	Estudiante T.C.				7 años
Problema 9	*Ayer fui a una tienda y me compre cinco cajas de juguetes y en cada caja hay cien juguetes. ¿Cuántos juguetes con pre en total?*				<u>Comentarios</u>
Proceso de resolución	Necesita ayuda	Operaciones adecuadas	Resolución alternativa	Solución correcta	
	NO	SÍ	NO	SÍ	
Operatoria	Tipo de cálculo	Reafirmación en operaciones	Errores de cálculo		
	ESCRITO	SÍ	NO		
Comparación de esquemas	Esquema Teórico		Esquema Mostrado		
					

Tabla VI.46. Resolución de T.C.

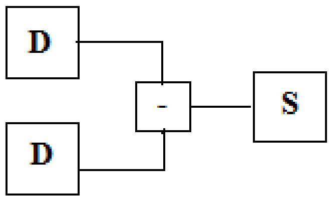
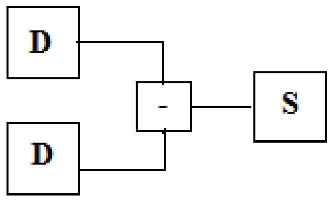
<table>
<tr><td>Curso 2º</td><td colspan="12">Estudiante E.L.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 10</td><td colspan="12">En mi clase somos 25 niños pero mañana solo vendran 8 niños menos. ¿Cuántos niños seremos en total?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td colspan="3">Necesita ayuda</td><td colspan="3">Operaciones adecuadas</td><td colspan="3">Resolución alternativa</td><td colspan="3">Solución correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO</td><td colspan="3">SI</td><td colspan="3">SÍ</td><td colspan="3">SI</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="4">Tipo de cálculo</td><td colspan="4">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="4">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="4">ESCRITO</td><td colspan="4">SÍ</td><td colspan="4">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="6">Esquema Teórico</td><td colspan="7">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="6">
</td><td colspan="7">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.47. Resolución de .E.L

<table>
<tr><td>Curso 2º</td><td colspan="12">Estudiante J.L.</td><td>8 años</td></tr>
<tr><td>Problema 11</td><td colspan="12">Yo tengo 1404 pesetas en mi cumpleaños, me regalo mi padre 2000 pesetas y mi abuela me regalo 20.000 pesetas. ¿Si quito lo de mi padre cuanto me quedará?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>
Confusión entre 2.000 y 20.000

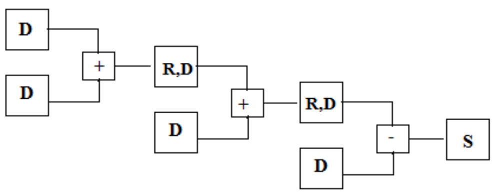
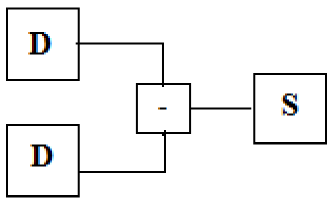
El enunciado permite resolver el problema con un solo paso.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td colspan="3">Necesita ayuda</td><td colspan="3">Operaciones adecuadas</td><td colspan="3">Resolución alternativa</td><td colspan="3">Solución correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO</td><td colspan="3">SÍ</td><td colspan="3">NO</td><td colspan="3">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="4">Tipo de cálculo</td><td colspan="4">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="4">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="4">ESCRITO</td><td colspan="4">SÍ</td><td colspan="4">SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="6">Esquema Teórico</td><td colspan="7">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="6">
</td><td colspan="7">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.48. Resolución de J.L.

<table>
<tr><td>Curso 3º</td><td colspan="4">Estudiante C.R.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 12</td><td colspan="4">De una casa he sacado 1.213 cucharas pero yo nada más quiero un cuarto de cucharas. ¿Cuántas son las cucharas que yo quiero</td><td rowspan="4"><u>Comentarios</u>

Su compañero le indica la operación a realizar y confía en él.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de

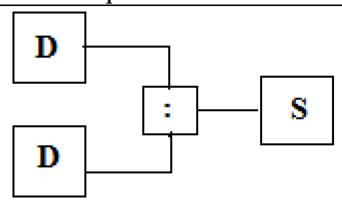
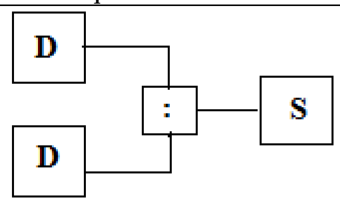
resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>NO</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>Operatoria</td><td colspan="4"><table><tr><td>Tipo de cálculo</td><td>Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr><tr><td>ESCRITO</td><td>NO</td><td>NO</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.49. Resolución de C.R.

<table>
<tr><td>Curso 3º</td><td colspan="4">Estudiante A.T.</td><td>8 años</td></tr>
<tr><td>Problema 13</td><td colspan="4">Tengo 50 canicas y un amigo me ha dado 60. Y mi madre 80. Pero se me an perdido 90. Y me he encontrado 5. ¿Cuantas canicas tengo ahora?</td><td rowspan="4"><u>Comentarios</u>

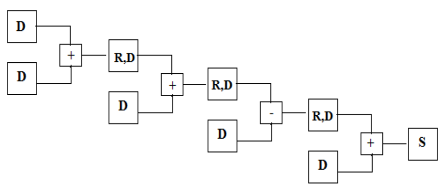
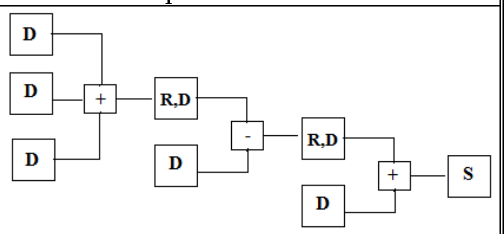
Cambia parcialmente el esquema de resolución por uno equivalente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>Operatoria</td><td colspan="4"><table><tr><td>Tipo de cálculo</td><td>Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr><tr><td>ESCRITO</td><td>SÍ</td><td>NO</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.50. Resolución de A.T.

<table>
<tr><td>Curso 4º</td><td colspan="6">Estudiante L.I.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 14</td><td colspan="6">En un garaje de coches, tienen 140 ruedas. Le quieren poner ruedas a 40 coches, y con las restantes, a 40 motos. ¿Cuantas ruedas le ponen a los coches? ¿Y a cuantas motos? ¿Cuantas ruedas sobran?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

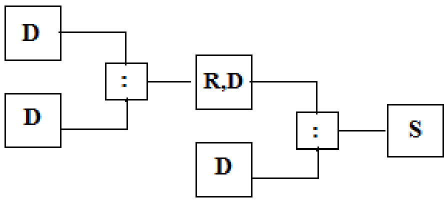
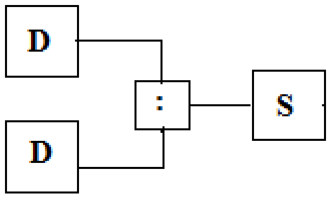
Los datos no permiten una resolución que responda al esquema teórico.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td colspan="2">Operaciones adecuadas</td><td colspan="2">Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td colspan="2">SÍ</td><td colspan="2">NO</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="2">Tipo de cálculo</td><td colspan="3">Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESCRITO</td><td colspan="3">SÍ</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="3">Esquema Teórico</td><td colspan="4">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="4">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.51. Resolución de L.I.

<table>
<tr><td>Curso 4º</td><td colspan="6">Estudiante C.L.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 15</td><td colspan="6">Un rascacielos tiene 96 pisos y en cada piso hay 25 habitaciones. ¿Cuantas habitaciones hay en el rascacielos?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

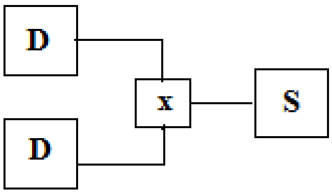
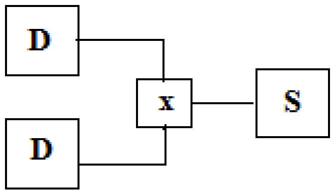
No justifica la idoneidad de la operación para resolver el problema.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td colspan="2">Operaciones adecuadas</td><td colspan="2">Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td colspan="2">SÍ</td><td colspan="2">NO</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="2">Tipo de cálculo</td><td colspan="3">Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESCRITO</td><td colspan="3">SÍ</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="3">Esquema Teórico</td><td colspan="4">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="4">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.52. Resolución de C.L.

<table>
<tr><td>Curso 4º</td><td colspan="12">Estudiante S.V.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 16</td><td colspan="12">En una tienda hay 37.000 canicas que meten en 39 bolsas. ¿Cuantas canicas cabrán en cada bolsa y cuantas canicas sobran?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

Las respuestas son el cociente y resto de una división.

Uso de objetos es la resolución alternativa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de

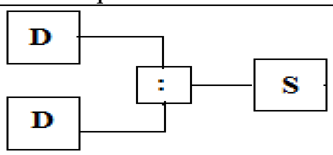
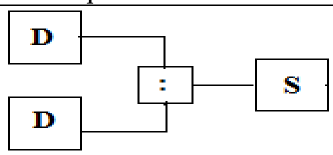
resolución</td><td colspan="3">Necesita ayuda</td><td colspan="3">Operaciones adecuadas</td><td colspan="3">Resolución alternativa</td><td colspan="3">Solución correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO</td><td colspan="3">SÍ</td><td colspan="3">SÍ</td><td colspan="3">SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="4">Tipo de cálculo</td><td colspan="4">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="4">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="4">ESCRITO</td><td colspan="4">SÍ</td><td colspan="4">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="6">Esquema Teórico</td><td colspan="7">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="6">
</td><td colspan="7">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.53. Resolución de S.V.

<table>
<tr><td>Curso 4º</td><td colspan="12">Estudiante C.T.</td><td>9 años</td></tr>
<tr><td>Problema 17</td><td colspan="12">En una carretera hay 223 coches. En el puente hay 22 coches. El puente se cae y la mitad pasa y la otra mitad se cae. ¿Cuantos coches quedan? ¿Cuantos se caen? ¿Cuantos han pasado el puente?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

No entiende la historia del problema.

Reinterpreta el problema.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de

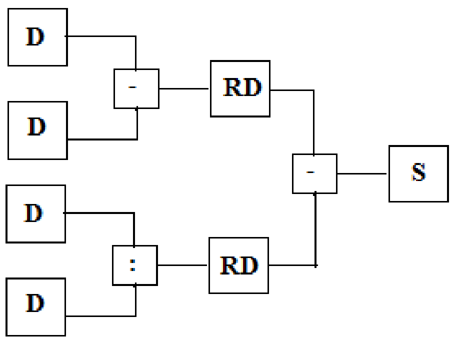
resolución</td><td colspan="3">Necesita ayuda</td><td colspan="3">Operaciones adecuadas</td><td colspan="3">Resolución alternativa</td><td colspan="3">Solución correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">SI</td><td colspan="3">--------------</td><td colspan="3">SÍ</td><td colspan="3">---------</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="4">Tipo de cálculo</td><td colspan="4">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="4">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="4">ESCRITO</td><td colspan="4">SÍ</td><td colspan="4">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="6">Esquema Teórico</td><td colspan="7">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="6">-------------------------------------</td><td colspan="7">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.54. Resolución de C.T.

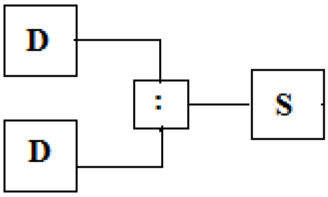
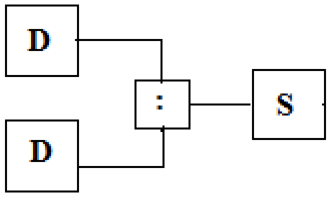
Curso 4º	Estudiante J.S.				9 años
Problema 18	*En un supermercado hay veinte millones de poster iguales y los reparten entre medio millo 227 personas. ¿Cuantos posters le dan a cada persona?*				<u>Comentarios</u> No realiza operaciones, indica correctament e cómo se resolvería el problema. No justifica la idoneidad de la operación para resolver el problema.
Proceso de resolución	Necesita ayuda	Operaciones adecuadas	Resolución alternativa	Solución correcta	
	NO	SÍ	NO	-------	
Operatoria	Tipo de cálculo	Reafirmación en operaciones	Errores de cálculo		
	Expresado oralmente	----------------	------		
Comparación de esquemas	Esquema Teórico		Esquema Mostrado		
					

Tabla VI.55. Resolución de J.S.

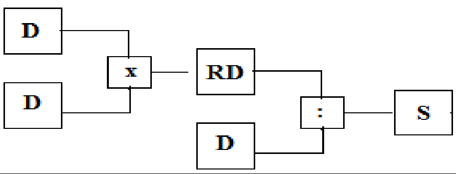
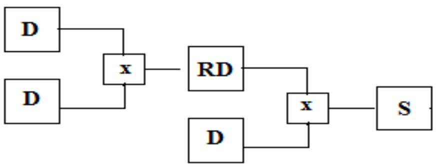
Curso 4º	Estudiante P.H.				9 años
Problema 19	*En una tienda había cinco cartones de leche cada cartón, cuesta 600 centimos. Pero se le había olvidado poner las pesetas, y cada 2 centimos son 1 peseta. ¿Cuantas pesetas son? ¿Cuanto cuestan los cinco juntos?*				<u>Comentarios</u> En el último paso cambia la operación de dividir por la de multiplicar.
Proceso de resolución	Necesita ayuda	Operaciones adecuadas	Resolución alternativa	Solución correcta	
	NO	NO	NO	NO	
Operatoria	Tipo de cálculo	Reafirmación en operaciones	Errores de cálculo		
	ESCRITO	SÍ	NO		
Comparación de esquemas	Esquema Teórico		Esquema Mostrado		
					

Tabla VI.56. Resolución de P.H.

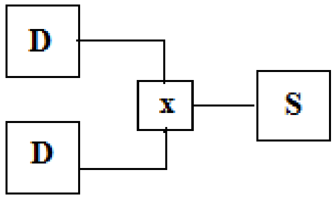
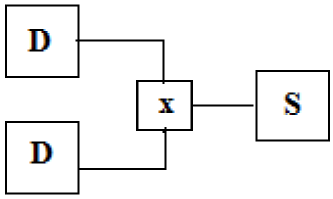
<table>
<tr><td>Curso 5º</td><td colspan="4">Estudiante M.T.</td><td>10 años</td></tr>
<tr><td>Problema 20</td><td colspan="4">Pablo va al supermercado a comprar naranjas. Las naranjas cuestan cada una 100,5 pts. Si compras 414 naranjas: ¿Cuánto dinero gastará Pablo?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td>Tipo de cálculo</td><td colspan="2">Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>ESCRITO</td><td colspan="2">SÍ</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.57. Resolución de M.T.

<table>
<tr><td>Curso 5º</td><td colspan="4">Estudiante U.A.</td><td>10 años</td></tr>
<tr><td>Problema 21</td><td colspan="4">Julia tiene en su coche 20,5 litros de gasolina. Julia hace un viaje de 3 horas cada hora gasta 6,8 litros y aparte se hace 1,5 litro de gasolina más. ¿Cuántos litros de gasolina tiene Julia en su coche?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

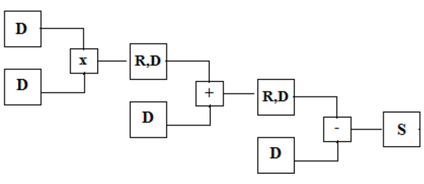
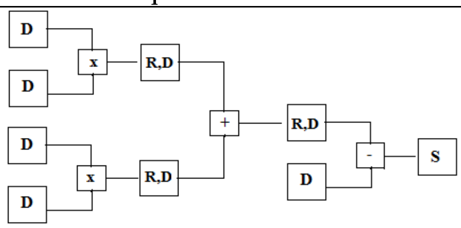
Realiza un producto innecesario.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>NO</td><td>NO</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td>Tipo de cálculo</td><td colspan="2">Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>ESCRITO</td><td colspan="2">SÍ</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.58. Resolución de U.A.

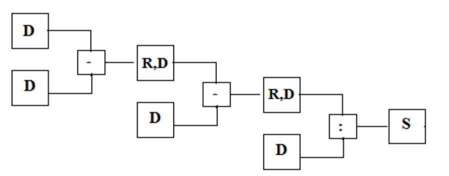
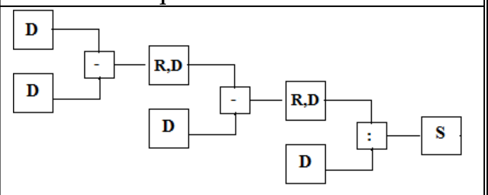
<table>
<tr><td>Curso 5º</td><td colspan="6">Estudiante I.G.</td><td>10 años</td></tr>
<tr><td>Problema 22</td><td colspan="6">Ana compro un coche que vale 2.500.000 ptas. Primero pago 300.000 ptas, luego pago 400.000 ptas y el resto lo pago en 25 mensualidades. ¿Cuánto pagó en cada mensualidad?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td colspan="2">Operaciones adecuadas</td><td colspan="2">Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td colspan="2">SÍ</td><td colspan="2">NO</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="2">Tipo de cálculo</td><td colspan="2">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="2">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESCRITO</td><td colspan="2">SÍ</td><td colspan="2">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="3">Esquema Teórico</td><td colspan="4">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Tabla VI.59. Resolución de I.G.

<table>
<tr><td>Curso 5º</td><td colspan="6">Estudiante J.E.</td><td>10 años</td></tr>
<tr><td>Problema 23</td><td colspan="6">Juan compra 3 barras de barras de pan y 2 paquetes de chicles. Si cada barra cuesta 65 pts y cada paquete cuesta 235 pts y ya saben que un euro son en pesetas 166,38. ¿Cuantos euros con sus decimales a pagado Juan?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

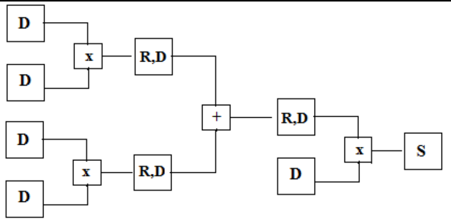
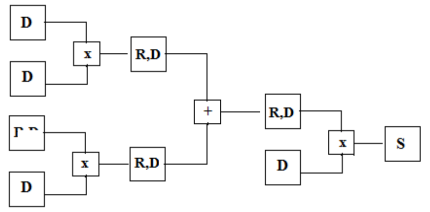
El compañero le indica las operaciones a realizar.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td colspan="2">Operaciones adecuadas</td><td colspan="2">Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td colspan="2">SÍ</td><td colspan="2">NO</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td colspan="2">Tipo de cálculo</td><td colspan="2">Reafirmación en operaciones</td><td colspan="2">Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESCRITO</td><td colspan="2">SÍ</td><td colspan="2">NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="3">Esquema Teórico</td><td colspan="4">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Tabla VI.60. Resolución de J.E.

<table>
<tr><td>Curso 6º</td><td colspan="4">Estudiante L.R.</td><td>11 años</td></tr>
<tr><td>Problema 24</td><td colspan="4">Mario compro dos camas y una mujer le quito una. Mario volvio a la tienda y volvió a comprar nueve camas más. Una cama vale 16.999 pts. ¿Cuánto dinero se ha gastado en total?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

El estudiante realiza mentalmente la resta de la primera etapa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de

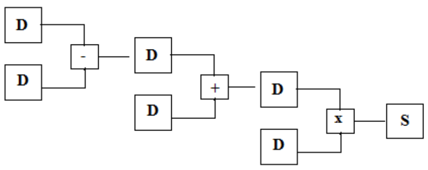
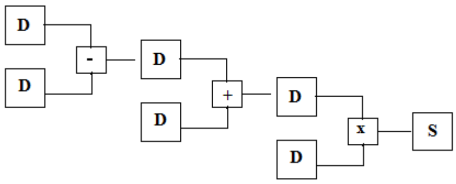
Resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td>Tipo de cálculo</td><td colspan="2">Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>MENTAL Y ESCRITO</td><td colspan="2">SÍ</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Tabla VI.61. Resolución de L.R.

<table>
<tr><td>Curso 6º</td><td colspan="4">Estudiante L.S.</td><td>11 años</td></tr>
<tr><td>Problema 25</td><td colspan="4">Laura tiene 758/101 de caramelos y Juan 805/120 de caramelos. ¿cuantos caramelos tiene Juan más que Laura?</td><td rowspan="5"><u>Comentarios</u>

Comete un error de proceso al hallar las fracciones equivalentes (conserva los numeradores iniciales).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso de

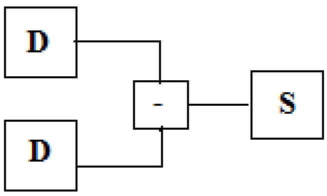
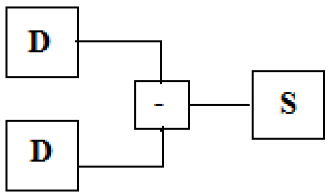
Resolución</td><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>NO</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operatoria</td><td>Tipo de cálculo</td><td colspan="2">Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>ESCRITO</td><td colspan="2">SÍ</td><td>NO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Tabla VI.62. Resolución de L.S.

<table>
<tr><td>Curso 6º</td><td colspan="4">Estudiante J.J.</td><td>11 años</td></tr>
<tr><td>Problema 26</td><td colspan="4">En un tren hay 20 vagones, cada vagón hay 30 asientos. En cada asiento se pueden sentar 2 personas, en un par de vagones solo hay 15 asiento. El tren va lleno y dos personas van de pie en cada vagón. ¿Cuántas personas hay en el tren?</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>

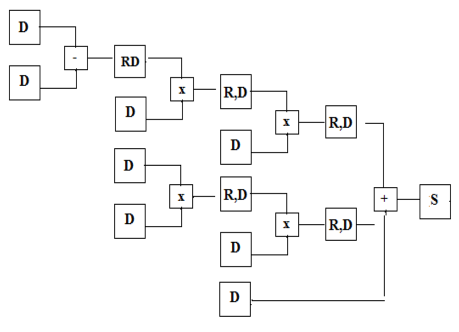
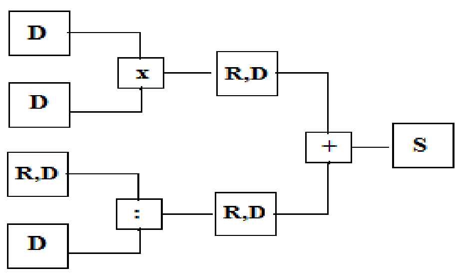
No realiza todos los pasos que el problema requiere.</td></tr>
<tr><td>Proceso de Resolución</td><td colspan="4">
<table>
<tr><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>NO</td><td>NO</td><td>NO</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Operatoria</td><td colspan="4">
<table>
<tr><td>Tipo de cálculo</td><td>Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>ESCRITO</td><td>SÍ</td><td>NO</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparación de esquemas</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Tabla VI.63. Resolución de J.J.

<table>
<tr><td>Curso 6º</td><td colspan="4">Estudiante R.R.</td><td>12 años</td></tr>
<tr><td>Problema 27</td><td colspan="4">En un supermercado hay unos articulos de limpieza que en Total cuestan 20.000 PTS y antes costaba 10.000 PTS. ¿Cuanto se han aumentado esos articulos de limpieza?</td><td rowspan="3"><u>Comentarios</u>

Llega a la solución de dos formas: por división entre 2 y por resta.

No justifica la idoneidad de la operación para resolver el problema.</td></tr>
<tr><td>Proceso de resolución</td><td colspan="4">
<table>
<tr><td>Necesita ayuda</td><td>Operaciones adecuadas</td><td>Resolución alternativa</td><td>Solución correcta</td></tr>
<tr><td>NO</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td><td>SÍ</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Operatoria</td><td colspan="4">
<table>
<tr><td>Tipo de cálculo</td><td>Reafirmación en operaciones</td><td>Errores de cálculo</td></tr>
<tr><td>ESCRITO</td><td>SÍ</td><td>NO</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Comparación</td><td colspan="2">Esquema Teórico</td><td colspan="3">Esquema Mostrado</td></tr>
</table>

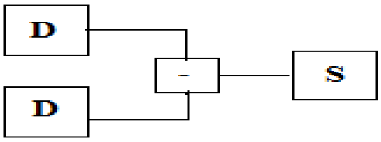
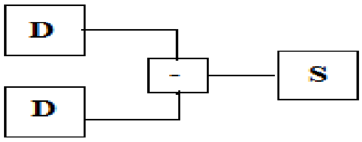
de esquemas		

Tabla VI.64. Resolución de R.R.

VI.3.2. RECOPILACIÓN DE LOS ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES

Los datos de los análisis de las resoluciones realizadas por los estudiantes, presentados en el apartado anterior, aparecen resumidos en la Tabla VI.65.

Curso	Alumnos	Nº problema	Necesita ayuda	Operación Adecuada	Resolución alternativa	Solución correcta	Tipo cálculo	Reafirma Operaciones	Errores cálculo
1º	RL	1	No	----	----	Sí	Escrito	----	No
	JA	2	No	----	----	Sí	Escrito	----	No
	JN	3	No	----	----	----	----	----	----
	UT	4	No	----	----	----	----	----	----
	CN	5	No	----	No	----	Escrito	Sí	No
2º	MR	6	No	---	No	---	Escrito	Sí	No
	FT	7	No	Sí	Sí	Sí	Escrito	Sí	No
	JI	8	No	Sí	No	Sí	Escrito	Sí	No
	TC	9	No	Sí	No	Sí	Escrito	Sí	No
3º	EL	10	No	Sí	Sí	Sí	Escrito	Sí	No
	JL	11	No	Sí	No	No	Escrito	Sí	Sí
	CR	12	Sí	Sí	No	Sí	Escrito	No	No
	AT	13	No	Sí	Sí	Sí	Escrito	Sí	No
4º	LI	14	No	Sí	No	Sí	Escrito	Sí	No
	CL	15	No	Sí	No	Sí	Escrito	Sí	No
	SV	16	No	Sí	Sí	Sí	Escrito	Sí	No
	CT	17	Sí	----	Sí	----	Escrito	Sí	No
	JS	18	No	Sí	----	----	Oral	----	----
	PH	19	No	No	No	No	Escrito	Sí	No
5º	MT	20	No	Sí	Sí	Sí	Escrito	Sí	No
	UA	21	No	No	No	No	Escrito	Sí	No
	IG	22	No	Sí	No	Sí	Escrito	Sí	No
	JE	23	Sí	Sí	No	Sí	Escrito	Sí	No
6º	LR	24	No	Sí	Sí	Sí	Mental-Escrito	Sí	No
	LS	25	No	Sí	No	No	Escrito	Sí	No
	JJ	26	No	No	No	No	Escrito	Sí	No
	RR	27	No	Sí	Sí	Sí	Escrito	Sí	No
Total			24 No 3 Si	17 Si 3 No 7---	14 No 8 Si 5---	16 Si 5 No 6---	24 Escrito 1Oral 1Mental 2---	21 Si 1 No 5---	23 No 1Si 3---

Tabla VI.65. Análisis del proceso de resolución empleado por los estudiantes.

De los datos recopilados en la Tabla VI.65 se desprenden conclusiones referentes a cada uno de los elementos que encabezan las columnas y que recogemos a continuación.

Necesidad de ayuda para resolver el problema

De los 27 niños que participaron en la prueba, 24 no necesitaron ayuda para resolver el problema que les propuso el compañero de entrevista. Dos estudiantes (C.R., 3º curso y J.E., 5º curso) necesitaron ayuda de su compañero de entrevista para resolver el problema propuesto. Sus respectivos compañeros les indicaron la operación con que podían hallar la solución al problema que finalmente resuelven bien. Un estudiante (C.T. 4º curso) necesitó que su compañero le explicara lo que había redactado, pues afirmaba que no entendía bien su lectura. Se trata del problema 17 que nosotros clasificamos como no coherente al no tener relación los datos con la cuestión planteada en el mismo.

Concluimos que, por lo general, estos estudiantes trabajan los problemas de forma autónoma.

Adecuación de las operaciones a la resolución del problema

Diecisiete de los estudiantes utilizan las operaciones adecuadas para dar respuesta al problema y tres no lo hacen. De los tres últimos, uno (P.H., 4º curso) cambia una operación en la que ha de dividir por una de multiplicar, otro (U.A., 5º curso) hace un producto innecesario que modifica el esquema de solución y le lleva a un resultado erróneo, y otro (J.J., 6º curso) realiza solo parte de las operaciones que se requieren para dar solución al problema. Hay siete estudiantes a los que esta categoría les deja fuera por varios motivos: dos de ellos (J.N., 1º curso y U.T., 1º curso) debido a que la solución a la pregunta planteada no necesita de la realización de operaciones, sino de averiguar o razonar una respuesta lógica. Tres estudiantes (C.N., 1º curso; M.R., 2º curso y C.T., 4º curso) reinterpretan el enunciado inventado por sus compañeros que hemos clasificado como problema no coherente al no guardar relación (o no ser clara) el interrogante del problema con los datos proporcionados en el mismo. Otros dos alumnos (N.R. y J.A., 1º curso) resuelven una operación en vez de un problema, por lo que no necesitaron elegir ninguna operación ya que venía dada.

Podemos decir a la vista de estos datos, que estos estudiantes en la mayoría de los casos usan las operaciones adecuadas para resolver los problemas. Además se observa en la Tabla VI.65 que sólo uno de los estudiantes cometió errores de cálculo.

Proceso alternativo para la resolución del problema

Catorce estudiantes no consideran que haya una forma diferente, a la utilizada, de resolver el problema y ocho consideran que sí la hay. Entre los que dicen que no, dos (I.G., 5º curso y J.E., 5º curso) indican que ha de existir otra forma para resolver el problema pero que ellos la desconocen por no haberla trabajado en clase.

Entre los que dicen que sí hay otra forma, dos estudiantes (F.T., 2º curso y C.L., 4º curso) argumentan que la multiplicación que han realizado se podría haber sustituido por sumas reiteradas. Dos estudiantes (F.T., 2º curso y A.T., 3º curso) proponen cambiar el orden de los sumandos y estos mismos estudiantes apuntan a utilizar el cálculo mental cómo método alternativo para alcanzar la solución del problema. Un alumno (S.V., 4º curso) propone utilizar objetos. Hay cinco estudiantes a los que esta componente no les afecta por el tipo de problema que han de abordar (problemas 1, 2, 3, 4 y 18).

La mayoría de estos estudiantes piensan que no hay otra forma de resolver el problema diferente a la que han realizado. La minoría que responde afirmativamente considera que se trata de hacer el mismo cálculo de otra forma.

Obtención de la solución correcta

Solo cinco estudiantes no obtienen la solución correcta del problema que su pareja le plantea. Dieciséis llegan a la solución correcta y, en el caso de los seis restantes, no es posible precisar si la respuesta es correcta o no ya que resolvieron problemas no coherentes.

Detallamos lo ocurrido en los casos de los estudiantes que no llegan a la solución correcta:

- J.L. (3º curso) sufre una confusión entre dos números que van seguidos de ceros.
- P.H. (4º curso) cambia una operación por otra.
- L.S. (6º curso) comete un error al hallar fracciones equivalentes para restarlas manteniendo los numeradores iniciales.
- U.A. (5º curso) realiza una operación más de las necesarias.
- J.J. (6º curso) no realiza todos los pasos necesarios en el problema.

En los tres primeros casos el esquema del problema se mantiene, en los otros dos no.

Una mayoría amplia de estudiantes llegan a obtener la solución correcta del problema planteado.

Tipo de cálculo

La forma escrita es casi exclusivamente la utilizada por estos estudiantes para hacer los cálculos. Un estudiante (J.S., 4º curso) no realiza el cálculo, solo dice la operación a realizar por tratarse de números que sobrepasaban las ocho cifras, manifiesta que entiende perfectamente el problema planteado y que sabe cómo resolverlo, pero no opera. Otro estudiante (L.R., 6º curso) hace mentalmente un cálculo mental muy sencillo (restar uno).

Reafirmación en las operaciones utilizadas

Todos los estudiantes, excepto C.R. (3º curso), se reafirman en el cálculo hecho para resolver el problema. C.R. por su parte no está seguro pero confía en que su compañero, que le ha indicado la operación a realizar, no se haya equivocado.

VI.4. CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LA DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS

En este apartado recogemos los análisis de dos conjuntos de datos relativos a las respuestas de los estudiantes sobre la dificultad de los problemas. El primer apartado refiere a la parte de la entrevista en la que se pidió a los estudiantes que etiquetaran como fáciles o difíciles una serie de problemas que se les fueron presentando. La segunda parte recoge el análisis de las respuestas de los estudiantes sobre qué elementos hacen difícil un problema.

VI.4.1. ANÁLISIS DEL ETIQUETADO DE PROBLEMAS COMO FÁCILES O DIFÍCILES

A las parejas que participaron en esta tarea se les presentaron entre un mínimo de cuatro problemas y un máximo de nueve. En cada curso al menos una de las parejas dijo que le parecían difíciles dos problemas, excepto una pareja de primer curso que consideró difíciles cuatro problemas de los seis que se les presentaron (dos de ellos a pesar de la dificultad los resolvieron bien) y las dos parejas de quinto curso que sólo catalogaron como problema difícil uno de los presentados, aunque no coincidieron en la elección del mismo.

En la Tabla V.66 se presentan las respuestas de los estudiantes sobre la facilidad de los problemas presentados distinguiendo entre fácil, difícil y no entiende el enunciado. Dentro de las categorías fácil y difícil señalamos si el estudiante resuelve o no el problema, y en su caso si la resolución es o no correcta. Se ha incluido además en esta tabla aquellos casos en los que los estudiantes resuelven el problema dando un dato del enunciado.

	1º ciclo								2º ciclo										3º ciclo							
	1º c.		1º c.		2º c		2º c		3ºc.		3ºc.		4ºc.		4ºc.		4ºc.		5º c.		5º c.		6º c.		6º c.	
1	D																									
2																										
3				D																						
4																										
5			D	D	D																					
6																										
7					D																					
8																										
9	D			D		D																				
10																										
11					D																					
12																										
13																										
14																										
15																										
16																										
17																										
18																										
19																										
20																										
21																										
22																										

Tabla VI..66. Respuestas de los estudiantes sobre la dificultad de los problemas presentados.

Fácil resuelve bien; Fácil resuelve mal; Fácil no resuelve;

Difícil resuelve bien; Difícil resuelve mal; Difícil no resuelve;

Difícil, no entiende el enunciado; No entiende el enunciado;

D. Dato del enunciado

Al analizar las respuestas de los estudiantes, presentadas en la Tabla VI.66, se observa que en una mayoría de ocasiones las respuestas de los dos componentes de la pareja es la misma. Los casos en los que la respuesta no es la misma corresponden a alumnos de los tres primeros cursos. Solamente hay dos casos en los que no se responde a la pregunta.

Relación entre la resolución y la dificultad de los problemas

Recordamos que en esta parte de la tarea no se le pide explicitamente al alumno que resuelva el problema solo que lo catalogue como fácil o difícil. Sin embargo, vemos que mayoritariamente, e indepedientemente de su sentencia sobre la dificultad del problema, proceden a resolverlo.

Consideramos un hecho positivo que más de la mitad de los estudiantes (29 de 47) una vez que manifiestan la dificultad de un problema, procedan a resolverlo, llegando en 9 ocasiones a resolverlo bien. En 12 casos deciden no resolver los problemas habiéndolos etiquetado como difíciles y en 7 justifican su dificultad al no entender el enunciado.

En el primer ciclo en cinco ocasiones resuelven correctamente problemas que consideran difíciles. En los otros dos ciclos, esto sólo le sucede una vez a una pareja de tercer curso y a otra de quinto. En los demás cursos los estudiantes no resuelven los problemas que consideran difíciles, o lo hacen de forma incorrecta.

Solo en 11 de las 77 ocasiones en las que afirman que un problema es fácil no lo resuelven o en su caso lo hacen mal, situación que es más frecuente en primer ciclo. Destacamos que tres parejas de estudiantes de primer ciclo, en al menos dos ocasiones, utilizaron datos del enunciado para dar respuesta a la pregunta que se les formulaba. Este tipo de respuesta tuvo lugar en primer y segundo ciclo.

En segundo y tercer ciclo coinciden en tildar el problema 19 de fácil pero no lo saben resolver. Mayoritariamente, cuando los alumnos afirman que un problema es fácil lo resuelven correctamente. Además se observa que en una mayoría de ocasiones la percepción de la facilidad del problema está asociada a saber resolverlo.

En todas las entrevistas hay, al menos, un problema para el que los entrevistados han dicho que es fácil y se ha resuelto bien. Este hecho es especialmente importante para las parejas de primer curso que cuando inventan un problema parecen no entender qué partes ha de tener un texto para constituir un problema.

Muy pocos estudiantes de cada uno de los ciclos resuelven mal aquellos problemas que consideran fáciles. También se da en todos los cursos la situación de considerar un problema dificil y resolverlo bien.

Dificultad por tipo de problema

Cinco de los problemas propuestos (2, 4, 12, 17 y 20) han sido calificados de fáciles y resueltos bien por todas las parejas a las que se les presentaron, a excepción de una pareja de 4º en el problema 4 que no llegan a la solución correcta. Tres de ellos (4, 12, 20) tratan de una situación de compra y manejo de dinero. Dichos problemas corresponden a los tipos: cambio 3, cambio 6, comparación 3, grupos iguales de tipo cuotitivo y el último compuesto de tasas y cambio 2.

Ocho problemas (1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11), todos ellos de estructura aditiva, solo se le presentaron a alumnos de 1º y 2º curso. Los escolares de 1º curso encuentran fácil y a su vez resuelven bien tres problemas: uno de cambio 3 (problema 1), otro de cambio 2 (problema 8) y otro de comparación 3 (problema 11), todos con números de dos cifras. Los de 2º curso consideran fácil y resuelven bien un problema de tipo cambio 3 (problema 2). La mitad de estos estudiantes opinan que son fáciles, aunque no llegan a una solución correcta, un problema de cambio 6 (problema 3), otro de cambio 5 (problema 5), otro de cambio 1 (problema 7), otro de combinación 2 (problema 9) y otro de comparación 3 (problema 11). El resto de los alumnos de 2º o bien opinan que los problemas son difíciles (problemas 3, 5, 7 y 9) o dicen que son fáciles pero no resuelven bien (problema 11).

El problema 4 (Cambio 6) solo se presentó a alumnos de 3º en adelante, lo consideraron fácil y lo resolvieron bien todos menos uno que lo solventó mal.

Los problemas 5 y 6 (Cambio 5) son el mismo problema si bien en el 5 las cantidades son números de dos cifras y en el 6 las cantidades son números de tres cifras. Por esta razón agrupamos sus resultados. Este tipo de problema presentó dificultad para entender su redacción tanto en una pareja de 1º curso (con los números pequeños) como para otra de 3º curso (con los números grandes), no sucediendo así con una pareja de 2º (con números pequeños) ni en cursos superiores de 5º y 6º (con números grandes).

Los problemas 13, 14, 15 y 17 corresponden a la estructura multiplicativa de tipo: tasas (13), grupos iguales tipo partitivo (14 y 15), y grupos iguales tipo cuotitivo (17), por lo que no fueron propuestos a los escolares de primer curso. El problema de tasas se lee a estudiantes de 2º, 3º y 4º curso y todos excepto dos alumnos de segundo (que lo consideran difícil), lo catalogan como un problema fácil y lo saben resolver. El problema 14 se presenta en 2º y 3º curso, y son los alumnos del curso superior quienes lo resuelven correctamente además de considerarlo fácil; en 2º curso se opina que es difícil y no se sabe resolver. El problema 15 es del mismo tipo que el 14, solo se lee a niños de 2º curso y aunque opinan que es difícil uno de ellos lo resuelve bien. El problema de tipo cuotitivo tanto los estudiantes de 2º como de 3º afirman que es fácil y saben resolverlo.

El problema 16 (grupos iguales tipo cuotitivo) lo resuelven bien todos los estudiantes a los que se les presentó, si bien una pareja de 3º curso lo califica de difícil.

Los dos problemas de porcentajes (18 y 22) resultaron ser difíciles para la mayoría de las parejas a las que se les presentó. Los alumnos de 3º y 4º no conocen el concepto por lo que no saben de qué se les habla, no lo entienden o lo consideran difícil y no lo resuelven. Los alumnos de 5º consideran el problema fácil y lo resuelven bien. Los estudiantes de 6º curso que los consideran fáciles no los resuelven bien y el resto lo considera difícil. Dejan constancia que el tanto por ciento es un concepto que han estudiado pero se les ha olvidado.

El problema 19 (producto de medidas), de la cancha, solo lo consideran fácil y lo resuelven bien cuatro estudiantes. El resto a los que se les propuso, o no entiende el problema, dice que es fácil y lo resuelve mal, o dice que es difícil y lo resuelve mal. El estudiante de 4º curso que lo resuelve bien podría haberlo hecho al azar. Lo creemos así por el hecho de que en el resto de la entrevista sus respuestas no son especialmente diferentes al resto de las de sus compañeros de curso. Este es un problema de producto de medidas de los que no se suelen trabajar en aritmética, está asociado a la geometría.

El problema 21 (compuesto tipo tasa), lo consideran fácil cuatro alumnos, dos de tercero y dos de sexto y todos ellos lo resolvieron satisfactoriamente; hubo dos estudiantes de sexto que lo catalogaron de difícil y no alcanzaron la solución adecuada.

Dado que en los problemas planteados los números que aparecen no superan las cuatro cifras y el número de operaciones a realizar es dos como máximo, no se ha podido detectar si las variables números grandes y muchas operaciones en el problema proporcionan o no dificultad a los problemas.

VI.4.2. ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN UN PROBLEMA DIFÍCIL

Recordamos que, según estaba diseñada la entrevista, la cuestión sobre qué hace difícil un problema se les plantea a los estudiantes al final de la misma.

Hemos clasificado las respuestas de los estudiantes distinguiendo cuatro tipos que se refieren a: i) enunciado del problema; ii) conceptos involucrados en el enunciado o en su resolución; iii) los datos del problema; iv) el número de etapas del problema. En la categoría de enunciado hemos introducido la respuesta "Porque no sabemos hacerlo" tomándonos la licencia de interpretar que no se sabe hacer porque no se entiende el enunciado.

Producciones de los estudiantes según el ciclo educativo

Dos alumnos de 1º ciclo, para contestar a esta pregunta ponen un ejemplo. Uno de ellos (R.L.) es un problema que le resultó muy difícil y aún recordaba: "El que Ramón tenía algunas pesetas no me ponía ningún número ahí, sólo que 35 le daba la madre. ¿Y qué tenía al principio?"

Otra estudiante (C.N.) propone una operación aritmética: 90 menos… 20

A dos parejas de estudiantes, una de 1º ciclo (U.T. y F.T.) y otra de 3º ciclo (I.G. y U.A.) no se les formula esta pregunta.

Como se puede apreciar en la Tabla VI.67, estudiantes de los tres ciclos señalan que un problema es difícil si está relacionado con algún concepto no estudiado. Varían, según ciclo, los contenidos que señalan como no estudiados. Mientras en el ciclo 1º se nombra la división, en el 2º se habla de porcentajes, de x y de descuentos, y en el 3º ciclo se sigue hablando de porcentajes y del cambio entre pesetas y euros.

La magnitud de los números es una dificultad que señalan estudiantes de 1º y 2º ciclo, cosa que no hacen los de 3º ciclo. La cantidad de números que aparece en el problema también se considera dificultad para el 2º ciclo.

El que un problema tenga más de una etapa es considerado que añade dificultad a un problema, por estudiantes de 3º ciclo y uno de 2º ciclo, no siendo considerada esta posibilidad por los de 1 ciclo.

	RESPUESTAS	Ciclo		
		1º	**2º**	**3º**
Enunciado del problema	J.N.: Preguntas difíciles	*		
	J. A.: Preguntas difíciles	*		
	J.A.: Que no sepa hacerlo	*		
	E.L.: Porque no sabemos hacerlo		*	
	C.L.: Que tenga un poquillo de lío para que se confunda		*	
	A.T.: Algunos problemas con truquillo te cuesta trabajo resolver		*	
	J.E.: […] tienes que pensar más.			*
	J.J.: Con mucho pensar. El saber lo que es			*
Conceptos involucrados en el problema, no estudiados	T.C.: Dividir y multiplicar es también un poco difícil. Todavía no sabemos dividir	*		
	J.I.: Dividir, es que yo sé dividir un poquillo	*		
	A.T.: Lo más difícil para nosotros es la división[…] es lo más difícil y lo último que estamos aprendiendo		*	
	A.T.: cualquier cosa que no conozcamos		*	
	C.R: Algo que no conozcamos		*	
	C.T: El tanto por ciento		*	
	S.V.: Es que no sabemos todavía lo del descuento		*	
	S.V.: Problemas con x		*	
	J.L.: Si no hemos dado el por ciento, pues…		*	
	L.S.: Tantos por cientos. Los % los hemos dado pero ya no me acuerdo			*
	M.T.: los de los %. Lo que no hemos dado. Cubo. Raíz cuadrada			*
	L.S.: Yo creo que los problemas del % no son difíciles, lo que pasa es que como no nos lo sabemos.			*
	J.J.: Si nosotros hubiéramos ya dado en nuestro colegio el por ciento…			*
	J.E.: […] pasarlo de euros a pesetas o de céntimos			*
	P.H.: […] pasarlo de euros a pesetas o de céntimos			*
Datos del problema	J.N.: Números altos	*		
	M.R.: Hay números muy mayores	*		
	T.C.: Muchos números	*		
	C.T.: Datos difíciles		*	
	P.H. :Números altos		*	
	P.H.: Divisiones y multiplicaciones de muchas cifras		*	
	J.S.: Muchas cifras		*	
	L.I.: Muchos números		*	
	C.L.: Muchas fracciones		*	
Etapas de resolución	E.L.: Hay que hacer dos operaciones		*	
	R.R.: Más preguntas			*
	L.R.: De hacer varias cuentas, vamos, de multiplicar, de restar, de multiplicar varias operaciones.			*
	J.J.: Dos operaciones un poco difíciles			*
	J:E.:Porque tienes que calcular más operaciones			*

Tabla VI..67. Clasificación de las respuestas de los estudiantes por ciclo educativo respecto a las características de un problema difícil

VI.5. A MODO DE RESUMEN

Seguidamente presentamos de forma resumida y global las respuestas de los escolares aportando algunas explicaciones posibles de por qué se producen dichas respuestas.

Todos los alumnos responden e intentan argumentar qué es un problema para ellos. Desde primer ciclo se pone de manifiesto que un problema requiere de una pregunta a la que se le ha de dar una respuesta y que por tanto éste constituye un elemento imprescindible para considerar un enunciado como tal. La palabra resolver aparece en múltiples ocasiones (esto ocurre en todos los ciclos), refiriéndose a veces a situaciones generales y otras a contextos exclusivamente matemáticos. Pensamos por tanto, que estos alumnos diferencian problema, de problema matemático. Para que un problema sea matemático consideran, en el primer ciclo, imprescindible la presencia de datos numéricos en el enunciado, asociándolos a la necesidad de realizar operaciones aritméticas; en segundo ciclo, manifiestan que los números facilitan la comprensión de un problema y en tercer ciclo, hacen referencia a que los números proporcionan la resolución del problema. Por tanto, los alumnos tienen claro que un problema matemático ha de tener datos numéricos. Esto también se refleja en sus producciones donde en casi todas, 25 de 27, hay presencia de números en sus enunciados. Respecto al ítem que versa sobre la utilidad de las operaciones en la resolución de un problema, se recoge que mayoritariamente los estudiantes de los tres ciclos, piensan que las operaciones son necesarias para resolver los problemas permitiendo así conocer el resultado de lo que se pide en el enunciado. Esta idea se vincula a la necesidad de que existan datos numéricos, pues con éstos y las operaciones se pude alcanzar un resultado. Los lugares donde resuelven problemas los estudiantes son por unanimidad en casa o en el colegio, y cuando se les pide que piensen en situaciones no escolares en las que pueden resolver problemas aparece mayoritariamente la idea de compra-venta en todos los ciclos, aunque es superior en segundo y tercer ciclo.

En cuanto a si sus invenciones se pueden resolver, todos excepto uno, afirman con rotundidad que sí, aunque sus explicaciones son escasas y éstas se basan en las operaciones aritméticas que hacen posible la resolución del problema. Creemos que los alumnos no contemplan la posibilidad de haber inventado un problema al que no se le pueda dar una solución y que ésta puede ser la causa por la que presentan tal seguridad en sus afirmaciones. Pensamos que el hecho de que las explicaciones a sus manifestaciones sean escasas se puede deber a que se trata de algo que consideran evidente y vinculado, es decir, probablemente para ellos todo problema se tiene que poder resolver.

De hecho estos alumnos reconocen la posibilidad de que un problema se pueda resolver de diferentes formas. Esta creencia la justifican principalmente basándose en las relaciones que presentan las distintas operaciones aritméticas, es decir, la multiplicación es una suma reiterada, lo mismo que la división con la resta, o el hecho de que suma y resta sean operaciones opuestas o la multiplicación y división sean inversas. Estos argumentos ponen de manifiesto que los estudiantes poseen un conocimiento al menos informal de las relaciones que se establecen entre las operaciones. Sin embargo cuando resuelven sus producciones y se les insta a que las resuelvan de más de una forma aseguran que no existe otra forma distinta de resolver el problema además de la que ellos proponen. Como se ve, se presenta una contradicción entre sus opiniones y actuaciones, intuimos que esto es debido a la práctica inusual en las aulas por parte del profesor de presentar problemas resueltos por varios caminos y/o de animar a los alumnos a pensar formas alternativas de resolver un mismo problema.

Las razones por las que algunos enunciados formulados se catalogaron como no coherentes fueron principalmente que no se presenta una historia verosímil y la inexistencia de relación entre los datos y la pregunta que se formula en el enunciado.

El número de producciones simples y compuestas de estos alumnos es similar en términos globales. Se aprecia un ligerísimo aumento de invenciones compuestas a partir de segundo ciclo respecto a primer ciclo, pero no encontramos relación entre el curso y el tipo de problema en función del número de etapas y tampoco observamos que exista un vínculo entre el número de etapas y el número de interrogantes presentes en el enunciado. De hecho la mayoría de problemas compuestos presentan una única pregunta al igual que las invenciones simples. Nos parece relevante y consideramos positivo el hecho de que desde segundo curso los estudiantes inventen problemas compuestos y también que mayoritariamente éstos los hayan generado formulando solo una cuestión, pues estos enunciados presentan mayor complejidad que los que mediante preguntas sucesivas guían los pasos que se han de seguir para alcanzar la solución.

En cuanto a la estructura operatoria, excepto en tercer ciclo donde aparecen problemas en los que se combinan las dos operaciones, en el resto aparecen problemas o solo aditivos o solo multiplicativos. El análisis de las producciones según su estructura operatoria y número de etapas nos permite ver que, cuando se utiliza un único tipo de operación (suma/resta o multiplicación/división), los problemas son mayoritariamente simples, y que los problemas compuestos se reparten a partes iguales cuando aparecen las dos estructuras operatorias que cuando se presenta solo una.

Los problemas aditivos tanto simples como compuestos corresponden mayoritariamente a problemas de cambio, del resto de categorías semánticas solo se recoge de comparación en un problema de una etapa y de combinación en otro de más de una etapa. En los problemas multiplicativos, independientemente si son simples o compuestos, las categorías que se presentan son las de tasas y grupos iguales partitivos en proporciones casi idénticas. Estas categorías permanecen también cuando se combinan la estructura aditiva y la multiplicativa.

En cuanto a los datos numéricos que aparecen en los enunciados, a partir de quinto curso deja de ser exclusivo el conjunto de los números naturales, apareciendo números decimales. En sexto curso también tienen representación los números racionales. Los estudiantes utilizan mayoritariamente números de 2 y 3 cifras, aunque algunos llegan hasta incluir números de 8 cifras. Por tanto, vemos una evolución conforme avanzamos de curso en cuanto a la presencia de distintos tipos de números, aunque el conjunto de los números naturales es el que prevalece a lo largo de toda la etapa. Se aprecia desenvoltura por parte del alumnado en el manejo del tamaño de números.

Los estudiantes trabajaron la resolución del problema de manera autónoma dado que casi ninguno necesitó ayuda para resolver la invención de su compañero. Esto nos lleva a pensar que la resolución de problemas es una práctica frecuente para los estudiantes y que a dicha tarea se enfrentan habitualmente solos, por lo que no solicitan ayuda para realizarla. Consideramos que este grupo de alumnos comprende el significado y los distintos contextos en los que se pueden presentar las operaciones básicas, debido a que la mayoría identifica correctamente las operaciones que resuelven los problemas inventados, además de obtener, casi todos ellos, la solución correcta del problema. En esta parte de la investigación los alumnos casi por unanimidad utilizan la forma escrita para proceder al cálculo de las operaciones.

Queda patente por los resultados obtenidos que existe relación entre la resolución y la dificultad de un problema. Mayoritariamente los estudiantes que consideran fácil un enunciado lo resuelven correctamente, correspondiendo preferentemente a primer ciclo las ocasiones en las que no se produce esta circunstancia. Se aprecia que estos alumnos no se merman el enfrentarse a resolver un problema, y pensamos que es muy positivo el hecho de que más de la mitad de ellos intentaran resolver un problema aún cuando lo consideran difícil.

Referente a los elementos que consideran que hacen difícil un problema tiene un peso considerable, en los tres ciclos, la idea relacionada con conceptos olvidados o no estudiados, el tamaño de los números, en los dos primeros ciclos y el número de etapas de un problema en los últimos cursos.

Los hallazgos presentados en este capítulo informan sobre: la idea de la noción de problema que tienen los estudiantes de educación primaria; razones en las que se basan aquellos estudiantes que consideran útil saber resolver problemas; lugares que identifican los estudiantes donde se resuelven problemas; sus creencias sobre la necesidad de que un problema matemático tenga datos numéricos; la capacidad de estudiantes de primaria para inventar problemas matemáticos coherentes; el análisis de la estructura operatoria, semántica, el número de pasos que utilizan al inventar problemas y el número de preguntas que incluyen; el estudio de la resolución de sus invenciones y en su caso las dificultades que manifiestan; la identificación del conjunto numérico que prefieren utilizar en sus invenciones así como de la cantidad de cifras de los números involucrados; las características que tienen los problemas que consideran difíciles; las componentes que para los estudiantes de primaria hacen que un problema sea difícil; y el estudio de la relación entre lo que saben resolver y lo que consideran fácil o difícil.

Dado que el número de participantes por curso en este análisis era reducido, procedemos en el siguiente capítulo a analizar una segunda toma de datos, donde el número de participantes era considerablemente mayor, que nos ayudará a confirmar o refutar parte de los resultados obtenidos y nos permitirá, por tanto, sustentar más sólidamente las conclusiones a las que se lleguen.

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE LOS DATOS RECOGIDOS EN LA PRUEBA CONFIRMATORIA

Presentamos en este capítulo el análisis de los datos recogidos en la prueba para la parte confirmatoria de la investigación. Recordemos que los estudiantes que nos proporcionaron estos datos son alumnos de todos los cursos de primaria de un colegio concertado (lo hemos denominado colegio C3) y que el número total de alumnos que realizaron el cuestionario fue de 351, de los cuales 47 eran de 1º curso, 71 de 2º curso, 46 de 3º curso, 74 de 4º curso, 75 de 5º curso y 38 de 6º curso. Dicho análisis lo hemos realizado a través de un estudio estadístico[11] atendiendo a la distribución de las respuestas de los estudiantes, según curso y ciclo, por categorías definidas a partir de los datos y utilizando tablas y gráficos de forma uniforme a lo largo de los diferentes apartados. Estructuramos el análisis en los cuatro grandes apartados que presenta la prueba, con subapartados en algunos de ellos, a saber:

[11] Ha quedado expuesta en el capítulo IV sobre metodología

VII.1. Creencias sobre la utilidad de la resolución de problemas.

VII.1.1. Importancia de saber resolver problemas: análisis por cursos y ciclos.

VII.1.2. Razones por las que la resolución de problemas es importante: análisis por cursos y ciclos.

VII.1.3. Lugares donde resuelven problemas: análisis por cursos y ciclos.

VII.2. Análisis de los enunciados planteados.

VII.2.1. Coherencia del enunciado: análisis por cursos y ciclos.

VII.2.2.Características de los enunciados inventados no coherentes: análisis por cursos y ciclos.

VII.2.3. Razones por las cuales el problema inventado era difícil**:** análisis por cursos y ciclos.

VII.2.4. Número de pasos: análisis por cursos y ciclos.

VII.2.5. Estructura operatoria: análisis por cursos y ciclos.

VII.2.5.1. Estructura operatoria según el número de pasos

A) Problemas simples: aditivos y multiplicativos: análisis por cursos y ciclos.

B) Problemas compuestos: aditivos, multiplicativos y Aditivos-multiplicativos: análisis por cursos y ciclos.

VII.2.6. Estructura semántica

VII.2.6.1. Estructura semántica de los problemas aditivos: análisis por cursos y ciclos.

VII.2.6.1.1. Estructura semántica y número de pasos de los problemas aditivos.

A) Estructura semántica de los problemas aditivos simples: análisis por cursos y ciclos.

B) Estructura semántica de los problemas aditivos compuestos: análisis por cursos y ciclos.

VII.3. Procesos de resolución de los problemas planteados.

VII.3.1. Soluciones de los problemas inventados: análisis por cursos y ciclos.

VII.3.2. Resoluciones incorrectas en la resolución del problema mostradas en los protocolos: análisis por cursos y ciclos.

VII.3.3. Representación gráfica utilizada.

VII.4. Relación entre los problemas que consideran fáciles y su solución.

Como se aprecia todos los subapartados aparecen analizados agrupando los datos por cursos y ciclos, excepto en el epígrafe VII.2.7.1 y desde los subapartados VII.9.1 hasta VII.9.8., con ello pretendemos seguir el mismo protocolo que se ha utilizado en el análisis de datos del capítulo VI, donde el estudio se realizó únicamente por ciclos dado que los datos eran mucho menos cuantiosos que en esta segunda recogida de datos. Además al agruparlos por ciclos se consigue una representatividad similar en cada uno de los ciclos en cuanto al número de alumnos que participaron, cosa que no ocurre en los diferentes cursos.

VII.1. CREENCIAS SOBRE LA UTILIDAD DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para indagar sobre lo que piensan los estudiantes acerca de la utilidad de la resolución de problemas se les plantearon dos ítems en la prueba, en el primero debían responder si consideran importante la resolución de problemas, en el segundo ítem debían de explicar la respuesta dada en el ítem anterior.

VII.1.1. IMPORTANCIA DE SABER RESOLVER PROBLEMAS

Del total de alumnos participantes en el estudio el 98% responden que es importante saber resolver problemas y solo un 2% responde que no es importante (Tabla VII.1).

	Frecuencia	Porcentaje
No importante	7	2,0
Importante	344	98,0
Total	351	100,0

Tabla VII.1. Importancia de la resolución de problemas. Total.

Análisis por cursos

En el Anexo C se recoge la Tabla C.1 con los resultados del análisis estadístico de los datos sobre las variables a las que nos referimos en este epígrafe. A partir de ella obtenemos la Tabla VII.2 que muestra los datos obtenidos de cada uno de los cursos. En ella aparecen frecuencias absolutas y porcentajes dentro de cada una de las categorías consideradas.

		No importante	**Importante**	**Total**
1º Curso	Recuento	2	45	47
	% dentro de la categoría	28,57	13,08	13,39
2º Curso	Recuento	1	70	71
	% dentro de la categoría	14,29	20,35	20,23
3º Curso	Recuento	1	45	46
	% dentro de la categoría	14,29	13,08	13,11
4º Curso	Recuento	2	72	74
	% dentro de la categoría	28,57	20,93	21,08
5º Curso	Recuento	1	74	75
	% dentro de la categoría	14,29	21,51	21,37
6º Curso	Recuento	0	38	38
	% dentro de la categoría	0,00	11,05	10,83
Total	Recuento	7	344	351
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.2. Importancia de la resolución de problemas. Por curso.

A partir de las frecuencias absolutas de esta tabla obtenemos la Figura VII.1 en ella se aprecia que en todos los cursos la mayoría de las respuestas están en la dirección de que la resolución de problemas es importante. En el caso de sexto curso, ningún alumno manifiesta que la resolución de problemas no es importante.

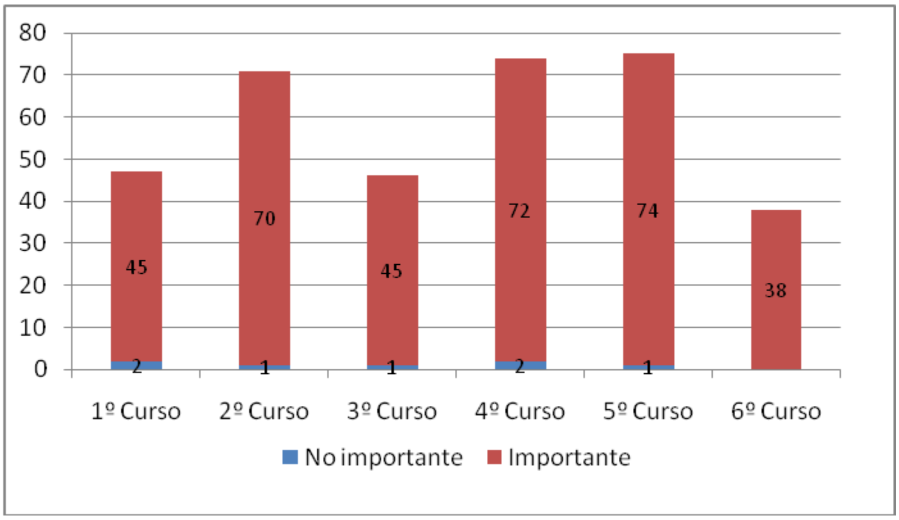


Figura VII.1. Importancia de la resolución de problemas. Frecuencias absolutas por curso.

La Figura VII.2 representa los porcentajes de alumnos, por curso, que respondieron a cada una de las categorías sobre la importancia o no de saber resolver problemas.

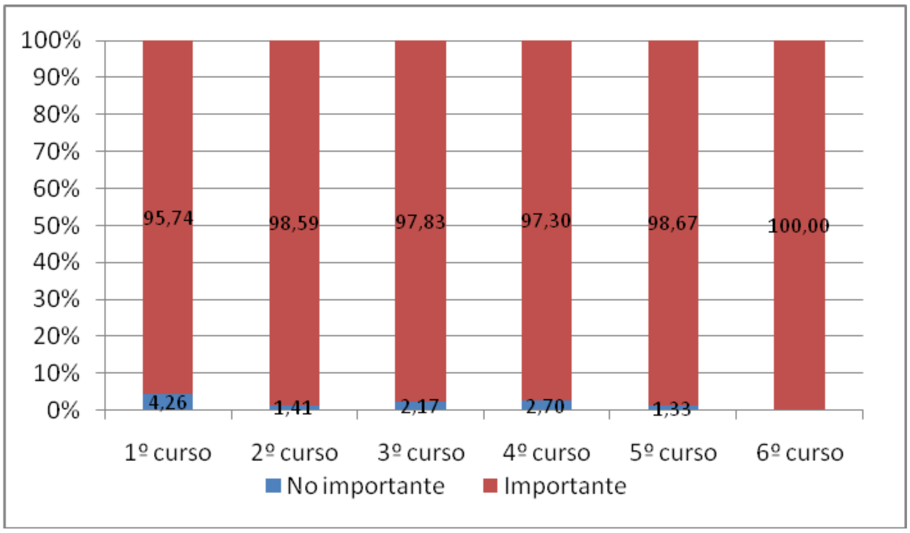


Figura VII.2. Importancia de la resolución de problemas. Porcentajes por curso.

De dicha Gráfica destacamos que en primer curso se da el mayor porcentaje de estudiantes que considera no importante el conocimiento sobre resolución de problemas, si bien este porcentaje es muy pequeño, no llega a 4,5 %. Los estudiantes de los cursos tercero y cuarto proporcionan un porcentaje similar y también muy bajo (2,17 y 2,70 respectivamente). En el curso de segundo, el porcentaje es ínfimo (no llega a 1,5). En sexto curso es nulo.

Los datos apuntan a que la mayoría de los estudiantes consideran que el conocimiento sobre resolución de problemas es importante, y esta creencia no depende del curso en el que se encuentran.

Análisis por ciclos

Organizados los resultados por ciclos (Tabla VII.3) se percibe que de los estudiantes que han opinado sobre la importancia de la resolución de problemas, de cada uno de los tres ciclos tienen una representación porcentual similar, oscilando entre 32.56% y el 34.01%.

		No importante	Importante	Total
Ciclo 1	Recuento	3	115	118
	% dentro de la categoría	42,86	33,43	33,62
Ciclo 2	Recuento	3	117	120
	% dentro de la categoría	42,86	34,01	34,19
Ciclo 3	Recuento	1	112	113
	% dentro de la categoría	14,29	32,56	32,19
Total	Recuento	7	344	351
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.3. Importancia de la resolución de problemas. Por ciclo.

De acuerdo con lo dicho para los cursos, se observa en la Figura VII.3 el porcentaje, por ciclo, de aquellos que opinan que son importantes y aquellos que no, siendo éste similar en primer y segundo ciclo y casi despreciable en tercer ciclo.

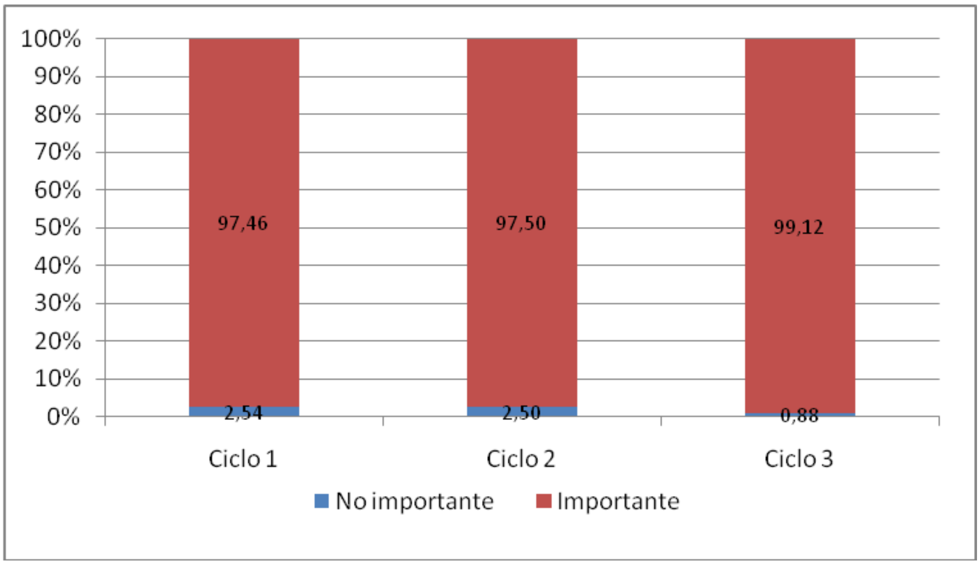


Figura VII.3. Importancia de la resolución de problemas. Porcentajes por ciclo.

En ninguno de los casos por curso o por ciclo se pudieron aplicar las pruebas estadísticas de la chi-cuadrado puesto que no se cumplían los supuestos de partida de que el porcentaje de casillas con frecuencia esperada superior a 5 fuese mayor al 80% por lo tanto las pruebas estadísticas no son fiables y robustas para su aplicación de comparación de respuestas según el curso o ciclo del alumno (ver Tablas C.2 y C.4 del Anexo C).

VII.1.2. RAZONES POR LAS QUE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ES IMPORTANTE

En este apartado atendemos inicialmente (indicamos con A) a si los estudiantes justifican o no su respuesta. Posteriormente expondremos el análisis de las razones que dan para asegurar la importancia de resolver problemas (indicamos con B). Las explicaciones de los estudiantes a la cuestión sobre por qué consideran importante saber resolver problemas las agrupamos en cuatro bloques[12]:

a) genérico, donde recogemos las respuestas en las que la resolución de problemas se relaciona con el aprendizaje en general,

b) escolar, aquellas en las que se muestra un beneficio escolar, como puede ser aprender a calcular mejor o pasar de curso,

c) social, hacen referencia a la contribución positiva de la resolución de problemas, al ayudar a las personas a desarrollarse, o al saber realizar adecuadamente acciones de compra-venta y

[12] Estos mismos bloques se han utilizado al analizar esta misma cuestión en las entrevistas

d) profesional, las que consideran que representan una ayuda para poder tener una profesión o trabajo.

En el Anexo C está incluido el estudio estadístico realizado sobre las variables *razones* que dan los estudiantes, por curso. (Ver Tablas C.5 y C.6)

Análisis por cursos

PARTE A) En la Tabla VII.4 se recogen los valores correspondientes a las justificaciones sobre la importancia de saber resolver problemas matemáticos.

De entre los estudiantes que dijeron que la resolución de problemas es importante (344), un número elevado de ellos justifican su afirmación (338) y muy pocos (6) no hacen justificación, como muestra la penúltima fila de dicha tabla.

En la Tabla VII.4 se recogen las frecuencias absolutas y los porcentajes dentro de las categorías de *justificar*, o no, la respuesta.

		No Justifica	Justifica	Total
1º Curso	Recuento	3	42	45
	% dentro de la categoría	50,00	12,43	13,08
2º Curso	Recuento	2	68	70
	% dentro de la categoría	33,33	20,12	20,35
3º Curso	Recuento	0	45	45
	% dentro de la categoría	0,00	13,31	13,08
4º Curso	Recuento	1	71	72
	% dentro de la categoría	16,67	21,01	20,93
5º Curso	Recuento	0	74	74
	% dentro de la categoría	0,00	21,89	21,51
6º Curso	Recuento	0	38	38
	% dentro de la categoría	0,00	11,24	11,05
Total	Recuento	6	338	344
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.4. Justificación de la importancia de la resolución de problemas. Por curso.

Las frecuencias absolutas en cuanto a justificación o no de los estudiantes, consideradas por curso, quedan representadas en la Figura VII.4 donde se aprecia que son pocos los estudiantes que no justificaron su respuesta sobre la cuestión anterior, relacionada con la importancia de saber resolver problemas.

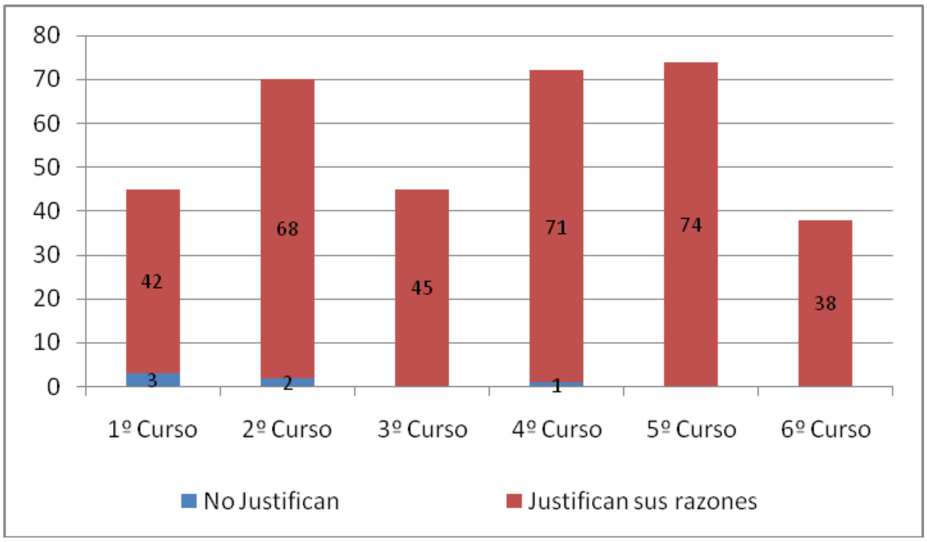


Figura VII.4. Justificación de la importancia de la resolución de problemas. Frecuencias absolutas por curso.

Los porcentajes de los categorías presentes en cada curso se han representado en la Figura VII.5 donde se ve que en primer curso es donde se produce el mayor porcentaje de no justificaciones (casi 7%) seguido de segundo curso (casi 3%), el caso de cuarto curso representa un porcentaje demasiado bajo y en el resto de los cursos, el porcentaje de justificación es del 100%.

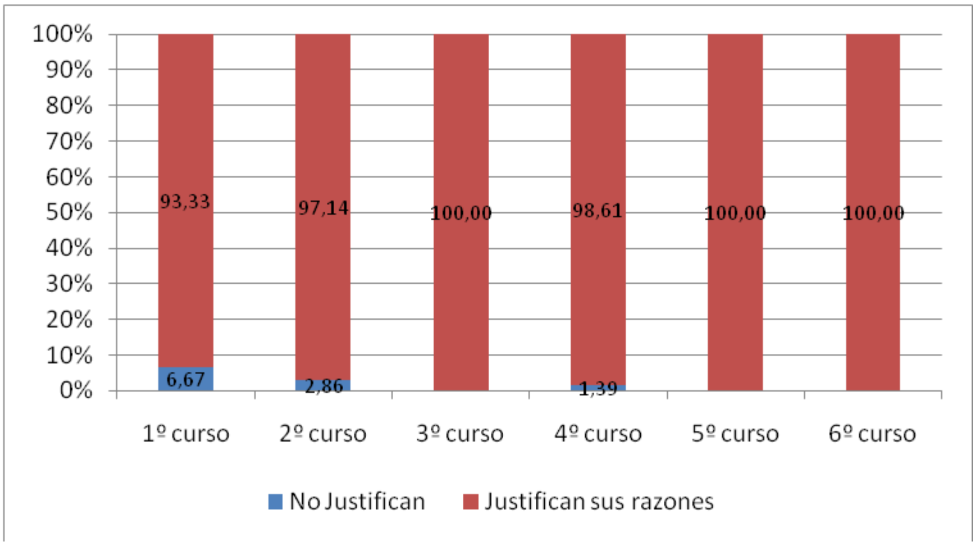


Figura VII.5. Justificación de la importancia de la resolución de problemas. Porcentajes por curso.

PARTE B). La Tabla VII.5 muestra la distribución de las 374 justificaciones dadas por los estudiantes. La tabla recoge las frecuencias absolutas, por cursos, de las justificaciones, clasificadas en las cuatro categorías de las razones consideradas: genérico, escolar, social y profesional. También se recogen los porcentajes, de dichas categorías, por curso.

		Razones				
		Genérico	**Escolar**	**Social**	**Profesional**	**Total**
1º Curso	Respuestas	25	19	3	0	47
	% dentro de la categoría	23,58	14,62	2,46	0,00	12,57
2º Curso	Respuestas	29	34	6	4	73
	% dentro de la categoría	27,36	26,15	4,92	25,00	19,52
3º Curso	Respuestas	16	24	9	3	52
	% dentro de la categoría	15,09	18,46	7,38	18,75	13,90
4º Curso	Respuestas	11	24	39	2	76
	% dentro de la categoría señalada	10,38	18,46	31,97	12,50	20,32
5º Curso	Respuestas	20	21	35	5	81
	% dentro de la categoría	18,87	16,15	28,69	31,25	21,66
6º Curso	Respuestas	5	8	30	2	45
	% dentro de la categoría	4,72	6,15	24,59	12,50	12,03
Total	Respuestas	106	130	122	16	374
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.5. Razones sobre la importancia de saber resolver problemas. Por curso.

En la última columna de la Tabla VII.5 se aprecian dos bloques, de tres cursos en cada uno de ellos, en cuanto a la aportación de respuestas a esta cuestión. Uno de los bloques está formado por los estudiantes de los cursos segundo, cuarto y quinto con mayor porcentaje (cercanos al 20%), el otro bloque está formado por los estudiantes de los cursos primero, tercero y sexto con menor porcentaje cercano al 12% , que en un solo caso se aproxima al 14%.

En la penúltima fila, y mirando los datos de mayor a menor, se percibe que: un total de 130 estudiantes (34,76%) justifican con razones escolares la importancia de saber resolver problemas, esto es: porque permite aprender conceptos matemáticos, ayuda a sacar buenas notas y permite avanzar al siguiente nivel educativo. Muy cercano a estas aportaciones encontramos el número de respuestas relacionadas con lo social (130, 32,62%), donde se considera que el saber resolver problemas representa un beneficio social. En cuanto a lo que hemos denominado genérico, el número de respuestas es de 106 (28,34%). En estos casos aluden a una razón que relacionan con el aprendizaje matemático, por lo que se ha etiquetado como de tipo general. La razón profesional solo ha sido considerada en 16 justificaciones (4,28%); en ellas los estudiantes, entre otras razones, señalan que el conocimiento de saber resolver problemas les permitirá conseguir un puesto de trabajo y realizarlo de manera satisfactoria.

En la categoría denominada genérico, un mayor porcentaje de respuestas proviene de alumnos de primer y segundo curso y en menor porcentaje de cuarto y sexto curso. En el bloque escolar, el mayor porcentaje corresponde a los alumnos de segundo curso y el menor a los de sexto curso. En el social, el mayor porcentaje de aportaciones las realizan los alumnos de cuarto curso y en menos porcentaje los estudiantes de primero. En la categoría de profesional un mayor porcentaje de esta justificación se dio entre alumnos de segundo y quinto curso y en ninguno de primer curso.

Las frecuencias absolutas han dado pie a la construcción de la Figura VII.6, en la que se visualiza la cantidad de razones de cada tipo aportada en cada curso. Se aprecia que en primer curso no aparece la razón profesional. En el resto de los cursos aparecen todas las razones, si bien la frecuencia de dichas razones es variable.

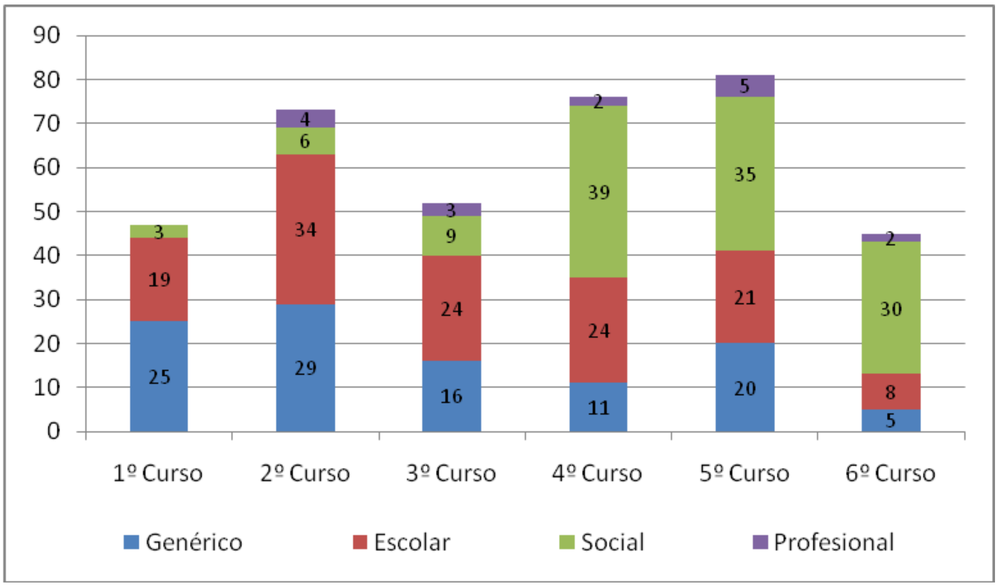


Figura VII.6. Razones sobre la importancia de saber resolver problemas. Frecuencias absolutas por curso.

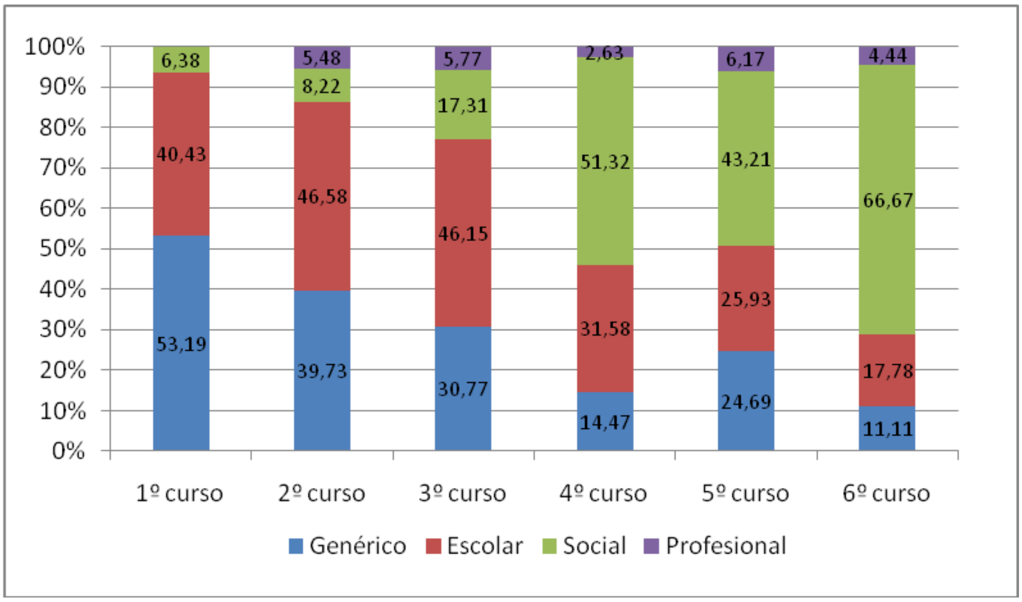


Figura VII.7. Razones sobre la importancia de saber resolver problemas. Porcentajes por curso.

Se observa que el porcentaje de alumnos en primer curso que justifica la importancia por razones genéricas es mayor que la de los otros cursos. En segundo y tercer curso comienza a aparecer la razón profesional que sigue apareciendo tímidamente en el resto de los cursos. La razón social también tiene escasa presencia en los tres primeros cursos. En estos cursos la razón que predomina es la escolar, seguida de la genérica. En los escolares de cuarto, quinto y sexto curso cambia la tendencia y consideran la razón social como fundamental para saber resolver problemas, seguidas de la escolar, genérica y profesional.

Tres tipos de dichas razones (genérico, escolar y social) aparecen con frecuencia más alta y con un porcentaje similar, si bien la categoría escolar tiene mayor representación y la profesional aparece de forma testimonial.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruce.

Análisis por ciclos

PARTE A). La Tabla VII.6 (procedente de la Tabla C.7 del Anexo C, que resulta del estudio estadístico) muestra las frecuencias absolutas y los porcentajes, por ciclos, de los estudiantes que justifican y no justifican la importancia de la resolución de problemas. Se observa que los que no justifican son, en su gran mayoría, alumnos de primer ciclo; no existiendo ningún alumno de tercer ciclo que deje de justificar.

		No Justifica	Justifica	Total
Ciclo 1	Recuento	5	110	115
	% dentro de la categoría	83,33	32,54	33,43
Ciclo 2	Recuento	1	116	117
	% dentro de la categoría	16,67	34,32	34,01
Ciclo 3	Recuento	0	112	112
	% dentro de la categoría	0,00	33,14	32,56
Total	Recuento	6	338	344
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.6. Justificaciones sobre la importancia de saber resolver problemas. Por ciclo.

En la Figura VII.8 se muestra esta misma información distinguiendo los porcentajes dentro de cada ciclo educativo.

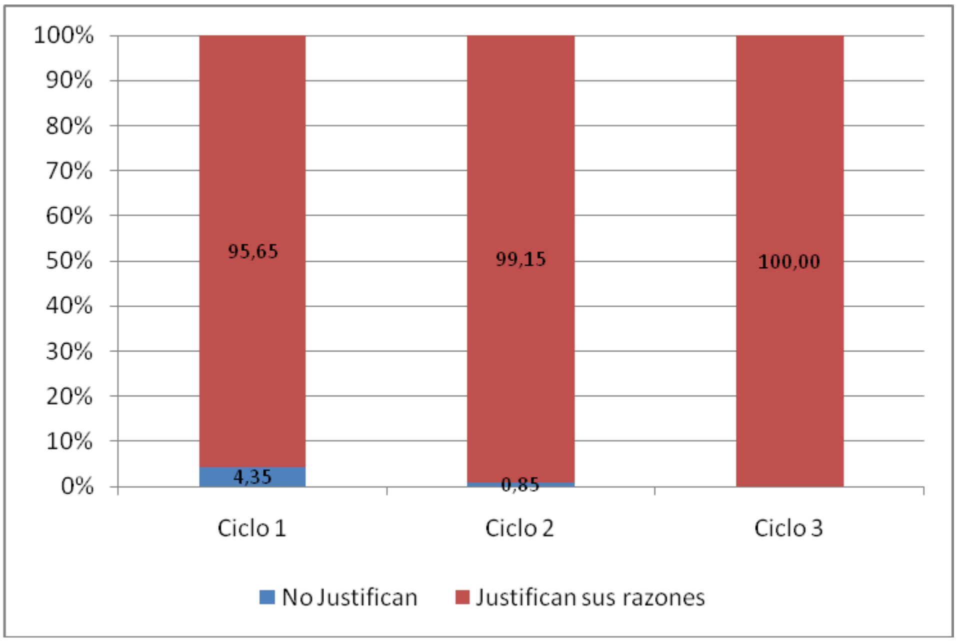


Figura VII.8. Justificaciones sobre la importancia de saber resolver problemas. Porcentajes por ciclo.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruce.

PARTE B). Respecto al número de respuestas dadas a la cuestión de por qué es importante saber resolver problemas, considerando los sujetos agrupados por ciclos, se obtiene que la participación de cada uno de los ciclos es muy similar, alrededor del 33 %.

En la Tabla VII.7 (procedente de la Tabla C.8 del Anexo C, obtenida del estudio estadístico) se presenta el porcentaje de las razones dadas para la justificación de las respuestas, por ciclos. Se aprecia que en el bloque genérico, donde la principal razón para aprender a resolver problemas es su aporte de conocimiento que les permitirá desarrollar su inteligencia, el 50.94% de las respuestas pertenecen a los alumnos de primer ciclo. El resto se reparte entre segundo y tercer ciclo, que presentan porcentajes similares. Por su parte, la justificación escolar, cuyos argumentos se basan en el aprendizaje que se alcanza al saber realizar correctamente operaciones aritméticas, al adquirir conceptos matemáticos o que este aprendizaje es una condición necesaria para avanzar de curso escolar, se reparte con porcentajes cercanos entre primer y segundo ciclo, 40.77% y 36.92% respectivamente, y más del 22% corresponde a tercer ciclo. Las categorías profesional y social aparecen en mayor porcentaje en tercer ciclo y en menor porcentaje en primer ciclo.

		Razones				
		Genérico	**Escolar**	**Social**	**Profesional**	**Total**
Ciclo 1	Respuestas	54	53	9	4	120
	% dentro de la categoría	50,94	40,77	7,38	25,00	32,09
Ciclo 2	Respuestas	27	48	48	5	128
	% dentro de la categoría	25,47	36,92	39,34	31,25	34,22
Ciclo 3	Respuestas	25	29	65	7	126
	% dentro de la categoría	23,58	22,31	53,28	43,75	33,69
Total	Respuestas	106	130	122	16	374
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.7. Razones sobre la importancia de saber resolver problemas. Por ciclo.

La Figura VII.9 muestra los porcentajes, por ciclo, de cada una de las categorías de *razones* por las que los estudiantes justifican la importancia de resolver problemas. Los estudiantes de primer ciclo se refieren fundamentalmente a las categorías genérica y escolar, ambas con porcentajes similares, con escasa representación de las dos razones restantes. Un 7.5% identifica que resuelve problemas en situaciones de compraventa, que la resolución de problemas les permitirá discernir, cuando sean personas adultas, en las distintas situaciones que se les planteen y que este conocimiento les aporta agilidad en sus tareas cotidianas. La idea del mundo laboral aún está lejana en edades tempranas aunque aparece recogida en el 3,33% de las respuestas. En segundo ciclo las razones aportadas por el alumnado en cuanto a la utilidad de saber resolver problemas corresponden a razones genéricas, escolares y sociales, estas dos últimas con el mismo porcentaje y algo menor que el porcentaje correspondiente a las razones genéricas. En este ciclo casi un 4% de los estudiantes aseguran que la resolución de problemas es importante para desarrollarse profesionalmente. Para los estudiantes de tercer ciclo el argumento basado en lo social es el que expresan mayoritariamente. Más de la mitad de ellos, reconocen el beneficio personal que obtienen los individuos que resuelven problemas al desenvolverse de forma satisfactoria en la sociedad actual. En segundo lugar describen situaciones escolares asociadas al aprendizaje matemático. Le sigue la importancia de un aprendizaje general a lo que contribuye para su adquisición la resolución de problemas. En último lugar con un 5.56% reconocen que el saber resolver problemas se utiliza en tareas profesionales, y aseguran que les será útil este conocimiento en un futuro.

Resumiendo, en primer ciclo, el porcentaje de estudiantes que da una razón de tipo genérico es mayor que en segundo y tercer ciclo. Por lo contrario, en primer ciclo, el porcentaje de respuestas basadas en la razón social o profesional es una quinta parte del porcentaje de tercer ciclo, el cual corresponde a más de la mitad de las respuestas dadas en dicho ciclo.

Para comprobar si las respuestas obtenidas por ciclo difieren se realizó la prueba estadística de la chi-cuadrado. Se encontraron diferencias significativas por ciclo entre las razones aludidas para justificar la importancia de la resolución de problemas (chi-cuadrado= 98.967, gl= 8, p-valor<0.0001, ver Tabla C.9 del Anexo C).

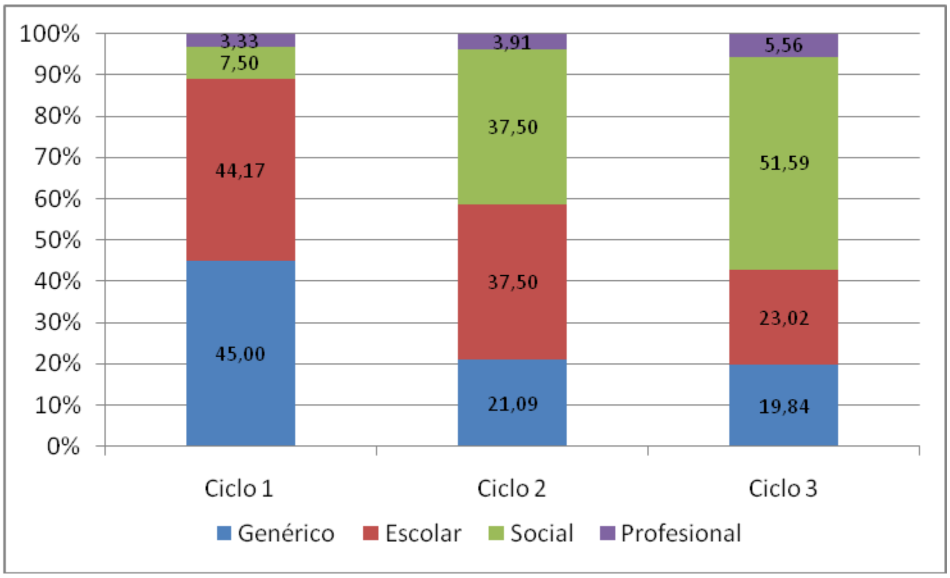


Figura VII.9. Razones sobre la importancia de saber resolver problemas. Porcentajes por ciclo.

VII.1.3. LUGARES DONDE LOS ESTUDIANTES RESUELVEN PROBLEMAS

Seguidamente analizamos las respuestas que dieron los estudiantes acerca de los lugares donde ellos resuelven problemas matemáticos. Las aportaciones las agrupamos en tres bloques:

a) *de compra*, hacen referencia a situaciones de compra-venta,

b) *de socialización*, situaciones relacionadas con parientes o amigos,

c) *casa-colegio*, recoge las respuestas que indican los lugares donde principalmente resuelven problemas al hacer sus deberes.

A veces los estudiantes indicaron más de un lugar donde resuelven problemas, por ello el número de respuestas supera al número de participantes. Como lo hemos hecho en epígrafes anteriores presentamos el estudio por cursos y ciclos a partir del análisis estadístico de las variables *lugares* donde resuelven problemas los estudiantes (Anexo C, Tablas C.10 y C.11).

Análisis por cursos

Recogemos en la Tabla VII.8 las frecuencias absolutas por curso y los porcentajes dentro de cada categoría. El mayor número de respuestas recogidas corresponden a estudiantes de los cursos cuarto, quinto y segundo, siendo inferior y próximo al 12% las de los cursos primero, tercero y sexto. En cuanto a las categorías, la que tiene mayor representación (329, 88,44%) es la categoría de casa-colegio, le siguen las correspondientes a situaciones de compra-venta (30, 8,1%) y por último las de socialización (13, 3,5%). La categoría de compra la consideran principalmente los alumnos de quinto y sexto curso y no tiene representación alguna en los estudiantes de primer y tercer curso (Tabla VII.8). En cuanto a las respuestas relacionadas con socialización, se ponen de manifiesto en todos los cursos aunque con poca presencia que oscila entre 1 alumno en primero, tercero y quinto curso a 5 en el caso de sexto curso. La categoría de casa-colegio aparece alrededor de un 21% en los cursos de segundo, cuarto y quinto, registrándose su menor porcentaje en sexto curso con un 9,4%.

		Lugares en los que resuelven los problemas			
		De compra	**De socialización**	**Casa-colegio**	Total
1º Curso	Respuestas	0	1	45	46
	% dentro de la categoría	0,00	7,69	13,68	12,37
2º Curso	Respuestas	1	2	70	73
	% dentro de la categoría	3,33	15,38	21,28	19,62
3º Curso	Respuestas	0	1	45	46
	% dentro de la categoría	0,00	7,69	13,68	12,37
4º Curso	Respuestas	5	3	71	79
	% dentro de la categoría	16,67	23,08	21,58	21,24
5º Curso	Respuestas	12	1	67	80
	% dentro de la categoría	40,00	7,69	20,36	21,51
6º Curso	Respuestas	12	5	31	48
	% dentro de la categoría	40,00	38,46	9,42	12,90
Total	Respuestas	30	13	329	372
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.8. Lugares en los que resuelven problemas. Por curso.

En la Figura VII.10 se aprecian las frecuencias absolutas, por curso, referidas a cada una de las categorías. Observamos que en los cursos de primero y tercero los alumnos no hacen referencia a la categoría compra, las situaciones de compra-venta (aunque de forma escasa) aparecen en los tres últimos cursos y que en todos los cursos predomina la categoría casa-colegio.

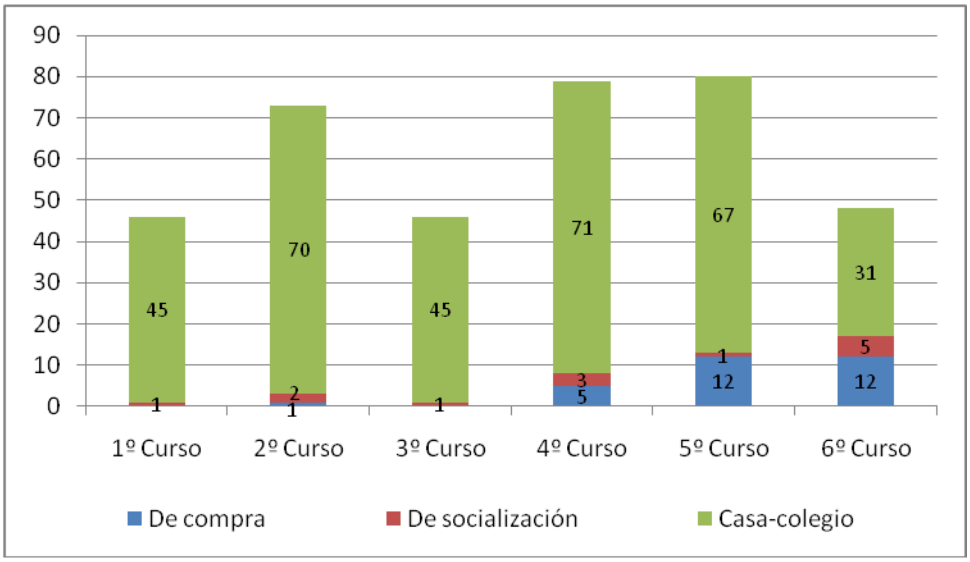


Figura VII.10. Lugares en los que resuelven problemas. Frecuencias absolutas por curso.

La Figura VII.11 muestra los porcentajes de respuestas proporcionadas respecto a los lugares donde resuelven problemas, según el curso al que pertenece el alumno. Se percibe un predominio de respuestas relativas a la casa y al colegio (las cuales se refieren a donde hacen los deberes escolares), que va disminuyendo conforme aumenta el curso al que pertenecen los estudiantes. La categoría de socialización está presente en todos los cursos aunque en un porcentaje inferior al 4%, salvo en sexto curso. En el primer y tercer curso ningún alumno respondió que resolviera problemas en situaciones de compra-venta en comparación con el 25% de los alumnos de sexto curso.

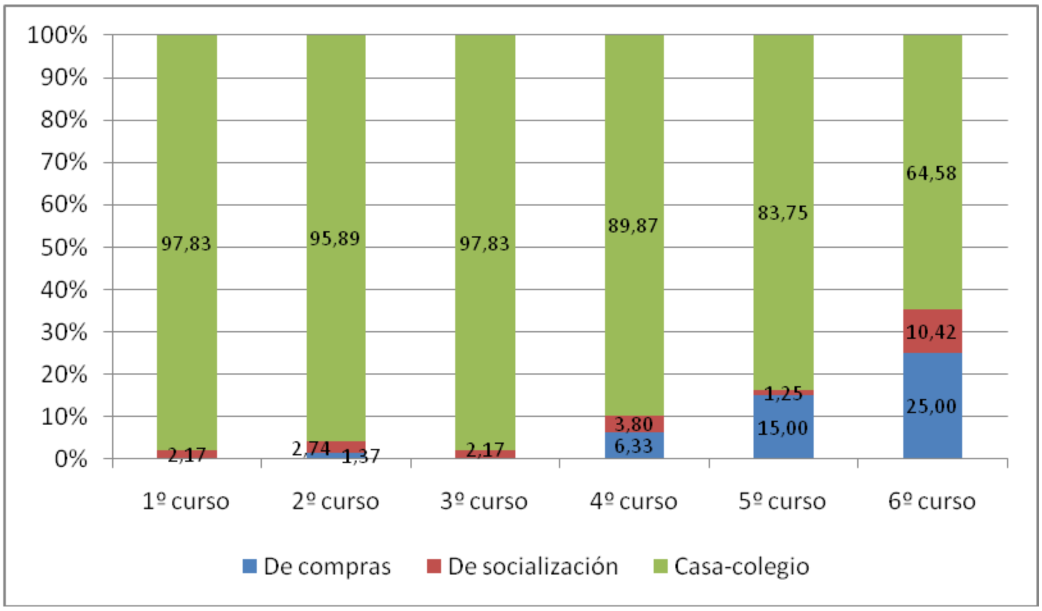


Figura VII.11. Lugares donde resuelven problemas. Porcentajes por curso.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

Análisis por ciclos

La Tabla VII.9 muestra las respuestas de los escolares sobre el lugar donde resuelven problemas los estudiantes según el ciclo. Las respuestas que refieren a la casa o colegio proceden en porcentajes similares (entre 29 y 35) de cada uno de los ciclos. En este caso el porcentaje de respuestas de primer y segundo ciclo es mayor que el que corresponde a las otras categorías de lugares donde resuelven problemas. Cuando se indica que los problemas se resuelven en situaciones de compra-venta la gran mayoría de respuestas proceden de alumnos de tercer ciclo.

		Lugares en los que resuelven los problemas			
		De compra	**Socialización**	**Casa-cole**	**Total**
Ciclo 1	Respuestas	1	3	115	119
	% dentro de la categoría	3,33	23,08	34,95	31,99
Ciclo 2	Respuestas	5	4	116	125
	% dentro de la categoría	16,67	30,77	35,26	33,60
Ciclo 3	Respuestas	24	6	98	128
	% dentro de la categoría	80,00	46,15	29,79	34,41
Total	Respuestas	30	13	329	372
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.9. Lugares en los que resuelven problemas. Por ciclo.

En la Figura VII.12 se observa que en primer ciclo apenas un 4% de las respuestas indican que resuelven problemas en lugares diferentes a la casa o el colegio, porcentaje que alcanza el 7,2% en segundo ciclo y es superior al 20% en tercer ciclo. Se percibe una tendencia creciente en los porcentajes de las categorías de compra y de socialización conforme aumenta el ciclo.

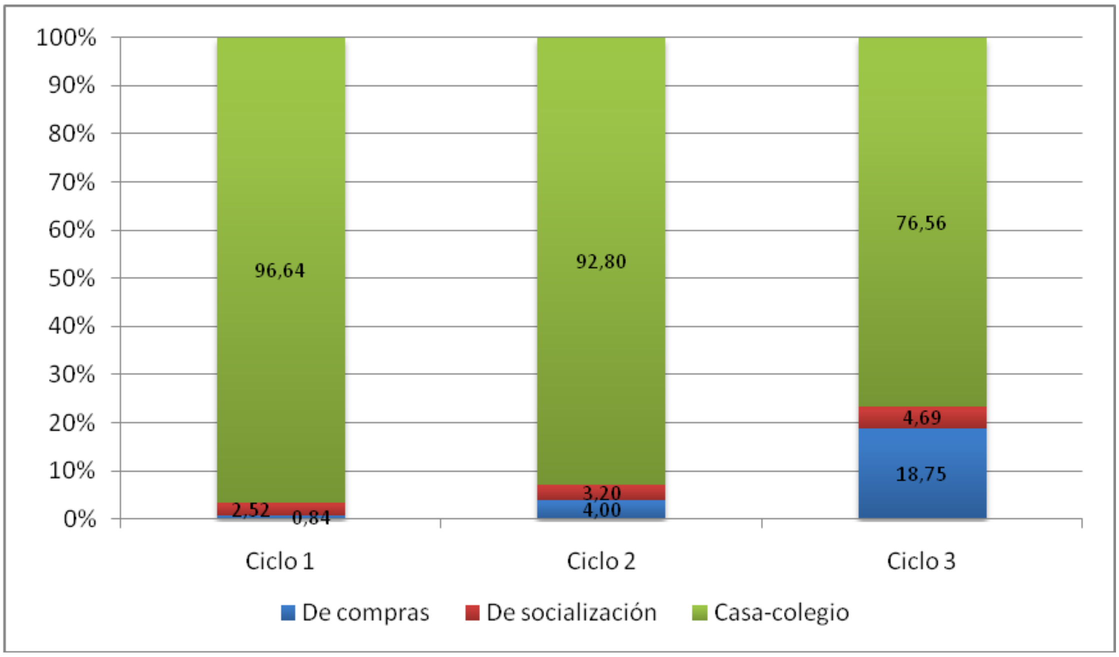


Figura VII.12. Lugares en los que resuelven problemas. Porcentajes por ciclo.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

VII.2. ENUNCIADOS PLANTEADOS

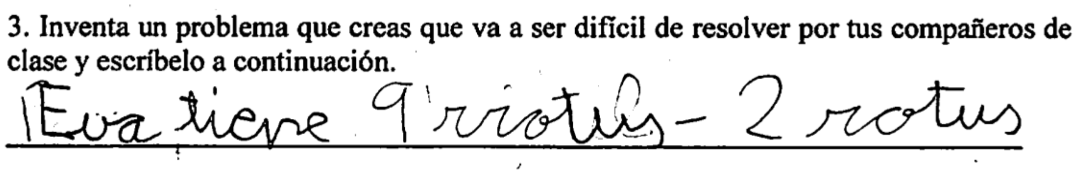
En este epígrafe analizamos los problemas inventados por los alumnos. Los hemos clasificado tomando en cuenta la coherencia del enunciado, el número de pasos involucrados en el problema, el tipo de estructura operatoria y semántica que presenta, la cantidad de cifras de que se componen los datos, el conjunto numérico al que pertenecen los números que aparecen en el problema y el número de preguntas formuladas en sus producciones.

VII.2.1. COHERENCIA DEL ENUNCIADO

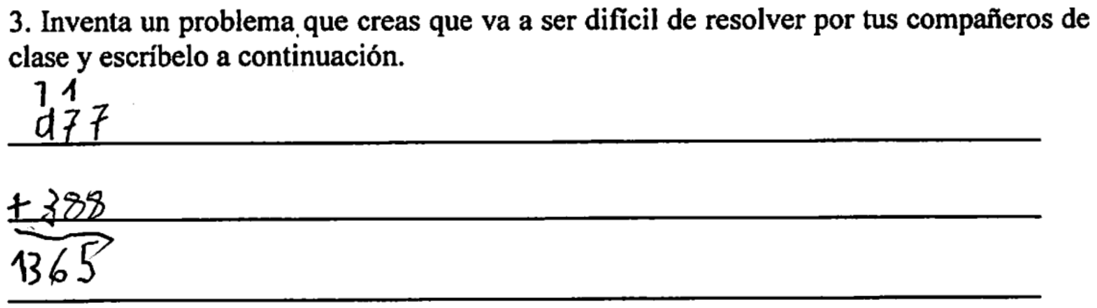
Como ya se ha indicado, un total de 351 escolares participan en el estudio, de los cuales tenemos respuestas de 343. Cada estudiante debía inventar un problema con la condición de que le resultase difícil a sus compañeros de clase. De los problemas inventados 270 son coherentes (78,7%). Como se recoge en el capítulo VI (epígrafe VI.2) se han tomado en cuenta las siguientes variables para considerar la coherencia de los enunciados planteados: a) planteamiento de una historia verosímil, b) utilización de datos numéricos, c) formulación de al menos una pregunta o interrogante a la que había que responder, d) existencia de relación entre datos e interrogante. Considerando que un problema es coherente cuando las respuestas son afirmativas en todos y cada uno de los elementos enumerados.

No todos los problemas inventados por los estudiantes han sido coherentes, bien debido a que no cumplen los requisitos necesarios para constituir un problema (según las pautas indicadas en el párrafo anterior[13]) o bien porque inventaron una operación aritmética. Algunos estudiantes describen situaciones que no corresponden a un problema matemático. A continuación, a modo de ejemplo, presentamos algunos de estos enunciados procedentes de estudiantes de diferentes cursos.

Por ejemplo un alumno de 1º curso escribe:


3. Inventa un problema que creas que va a ser difícil de resolver por tus compañeros de clase y escríbelo a continuación.

Eva tiene 9 rotus - 2 rotus

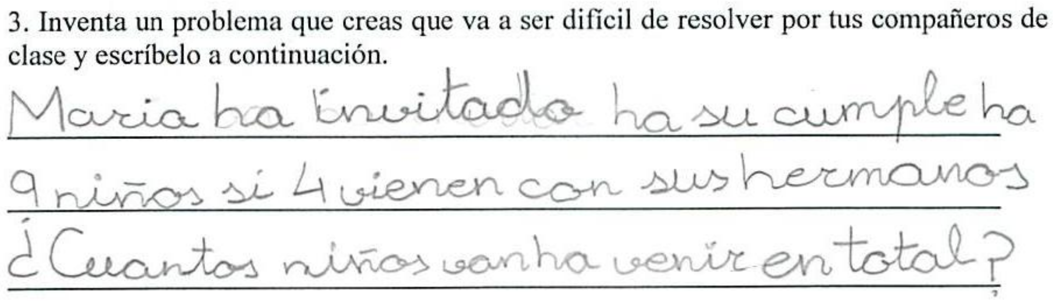

3. Inventa un problema que creas que va a ser difícil de resolver por tus compañeros de clase y escríbelo a continuación.

11
977
+388
1365

Figura VII.13.: Ejemplo 1 de problemas no coherentes de 1º curso

Ambos enunciados corresponden a ejercicios (de acuerdo con nuestro marco teórico); en cada uno de ellos hay que calcular el resultado de una operación aritmética. El primer alumno asocia las cantidades a un conjunto de objetos e intenta ubicar el enunciado en una situación real pero no llega a describir tal situación y tampoco formula pregunta. El segundo estudiante escribe directamente la operación. Un tercer alumno redactó:

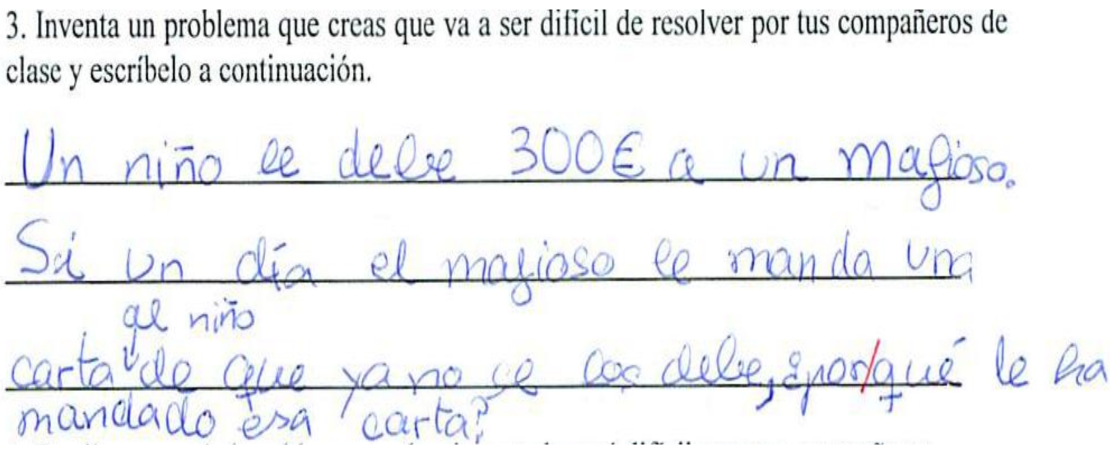
[13] Para más información ver capítulo II.


3. Inventa un problema que creas que va a ser difícil de resolver por tus compañeros de clase y escríbelo a continuación.

Maria ha Envitado ha su cumple ha 9 niños si 4 vienen con sus hermanos ¿Cuantos niños van ha venir en total?

Figura VII.14.: Ejemplo 2 de problema no coherente de 1º curso

Se puede apreciar cómo la pregunta del enunciado producido por el estudiante no se puede contestar por falta de datos (se podría suponer que cada niño tiene solo un hermano pero no hemos querido hacer interpretaciones de lo escrito). En cuarto curso encontramos este otro enunciado:


3. Inventa un problema que creas que va a ser difícil de resolver por tus compañeros de clase y escríbelo a continuación.

Un niño le debe 300€ a un mafioso. Si un día el mafioso le manda una carta al niño de que ya no se los debe, ¿porqué le ha mandado esa carta?

Figura VII.15. Problema no coherente de un alumno de 4º curso

Los enunciados no coherentes no forman parte del análisis que se realiza posteriormente en cuanto al tipo de problema formulado.

Análisis por cursos

La Tabla VII.10 muestra las frecuencias absolutas, por curso, y los porcentajes dentro de cada categoría a estudiar, a partir de los resultados estadísticos recogidos en el Anexo C, Tabla C.12. En la Tabla VII.10 se aprecia que el mayor porcentaje de problemas no coherentes proceden de alumnos de tercer y cuarto curso, con 23,29 y 31,51% respectivamente, y el menor de primero y sexto curso (9,59%). Así mismo se aprecia que el mayor porcentaje de problemas coherentes procede de segundo y quinto curso (22,96 y 21,85%), siendo el doble de los porcentajes correspondientes a tercero y sexto curso.

Tabla de contingencia Curso y Coherencia				
		No Coherentes	Coherentes	Total
1º Curso	Recuento	7	38	45
	% dentro de la categoría	9,59	14,07	13,16
2º Curso	Recuento	9	62	71
	% dentro de la categoría	12,33	22,96	20,76
3º Curso	Recuento	17	29	46
	% dentro de la categoría	23,29	10,74	13,45
4º Curso	Recuento	23	51	74
	% dentro de la categoría	31,51	18,89	21,64
5º Curso	Recuento	10	59	69
	% dentro de la categoría	13,70	21,85	20,18
6º Curso	Recuento	7	31	38
	% dentro de la categoría	9,59	11,48	11,08
Total	Recuento	73	270	343
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.10. Problemas inventados según su coherencia. Por curso.

La Figura VII.16 muestra una representación de las frecuencias absolutas mostradas en la Tabla VII.10 de enunciados coherentes y no coherentes inventados por el alumnado. Observamos que en todos los cursos, las invenciones son coherentes mayoritariamente.

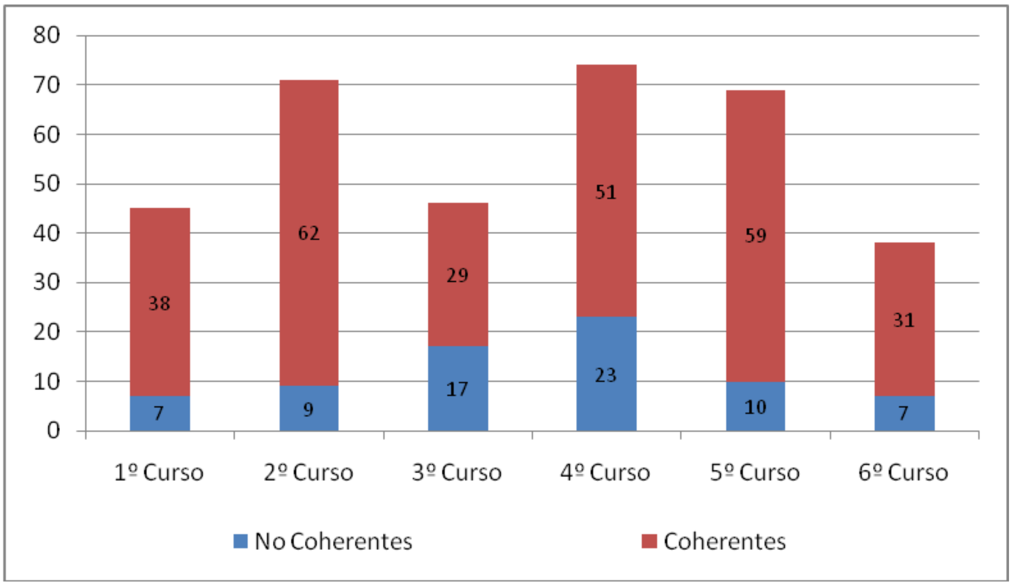


Figura VII.16. Problemas inventados según su coherencia. Frecuencias absolutas por curso.

En la Figura VII.17 se observa que más del 80% de los problemas propuestos por los alumnos de primer, segundo, quinto y sexto curso son coherentes (en estos cursos el porcentaje es similar), porcentaje que queda por debajo del 70% en los cursos de tercero y cuarto curso.

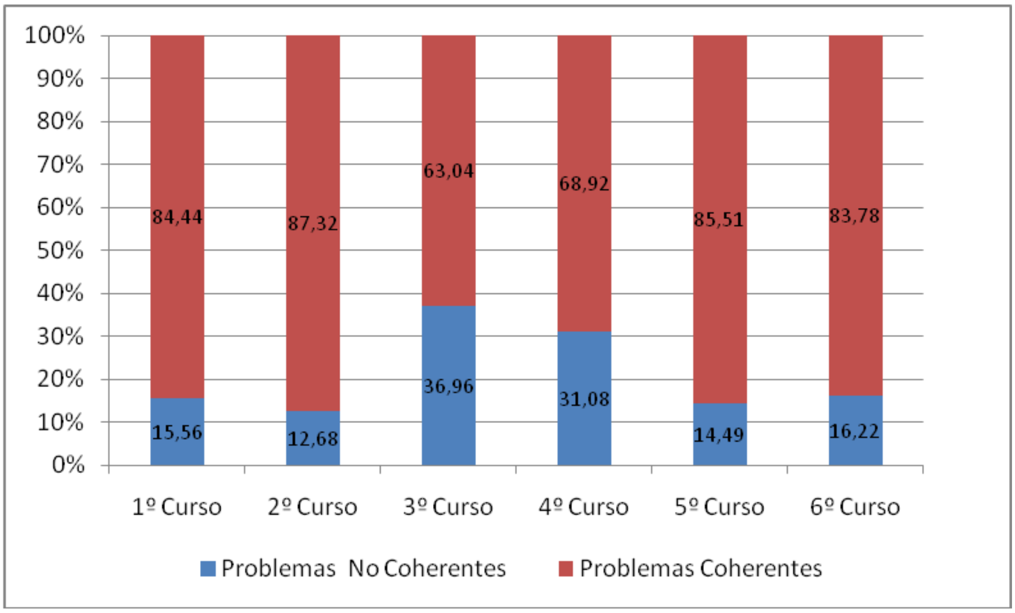


Figura VII.17. Problemas inventados según su coherencia. Porcentajes por curso.

Para estudiar la hipótesis de diferencias significativas entre la distribución de problemas coherentes y no coherentes por curso se realizó la prueba de la chi-cuadrado. Se observó que existen diferencias significativas en la distribución de problemas coherentes según el curso al que pertenezca el alumno (chi-cuadrado=17.091, Gl=5, p-valor=0.004, ver Tabla C.13 del Anexo C).

Análisis por ciclos

De los problemas coherentes planteados, el mayor porcentaje corresponde a primer ciclo, seguido por el tercer ciclo y el segundo, con porcentajes cercanos al 30% en los tres casos. A segundo ciclo corresponde aproximadamente el 55% de los enunciados no coherentes, siendo dicho porcentaje similar en los otros dos ciclos (Tabla VII.11 la cual proviene del análisis estadístico que se recoge en la Tabla C.14 del Anexo C).

		No Coherentes	Coherentes	Total
Ciclo 1	Recuento	16	100	116
	% dentro de la categoría	21,92	37,04	33,92
Ciclo 2	Recuento	40	80,00	120
	% dentro de la categoría	54,79	29,63	35,09
Ciclo 3	Recuento	17	90	107
	% dentro de la categoría	23,29	33,33	31,20
Total	Recuento	73	270	343
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.11. Problemas inventados según su coherencia. Por ciclos.

La Figura VII.18 muestra la relación entre los problemas coherentes y no coherentes inventados por los estudiantes según el ciclo al que pertenecen. Así, los problemas coherentes presentan un alto porcentaje entre los inventados por estudiantes de primer y tercer ciclo (superior al 80%), siendo dicho porcentaje menor (67% aproximadamente) en los estudiantes de segundo ciclo. Diferencias que se encontraron significativas a un nivel de significación del 5% (chi-cuadrado=16.144, Gl=2, p-valor<0.0001 ver Tabla C.15 del Anexo C).

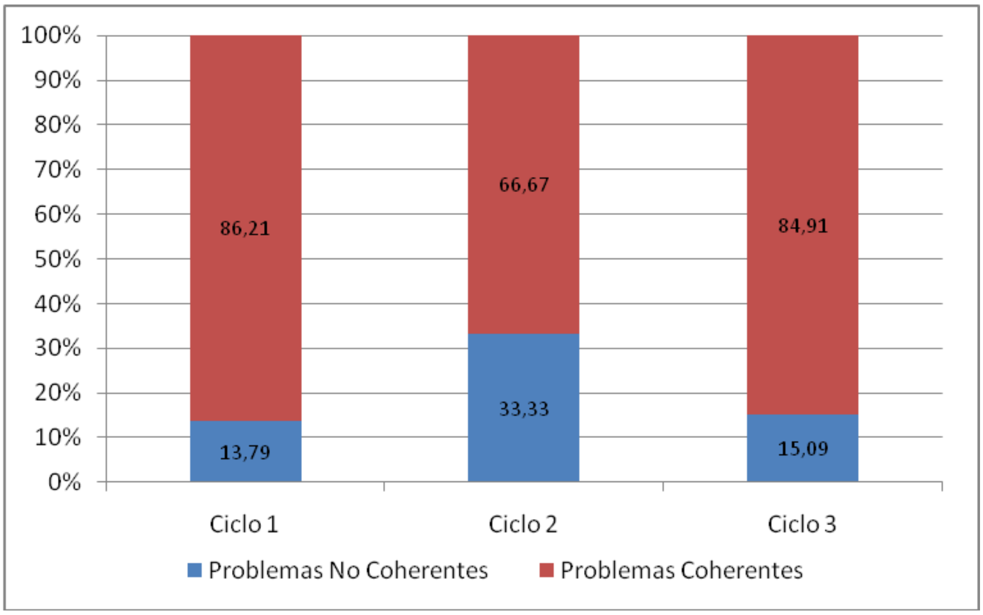


Figura VII.18. Problemas inventados según su coherencia. Porcentajes por ciclo.

VII.2.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS ENUNCIADOS INVENTADOS NO COHERENTES

En este apartado estudiamos las causas por las que no son coherentes algunos de los enunciados que inventaron los estudiantes. El estudio de los problemas no coherentes se ha hecho tomando las cuatro categorías señaladas en el párrafo anterior, esto es, presentan una historia verosímil, los enunciados contienen datos numéricos, se formulan una o más preguntas y existe relación entre datos y la/s pregunta/s realizada/s.

Análisis por cursos

La Tabla VII.12 se construye con los resultados obtenidos del análisis estadístico que aparece en la Tabla C.16 del Anexo C y presenta las frecuencias absolutas así como la distribución de porcentajes por curso de las categorías. En las columnas de la Tabla VII.12 aparecen las categorías en las que se cumple la norma que hace que un problema sea coherente. Por tanto, hablaremos de no coherencia cuando se incumpla al menos una de estas variables.

En la mayoría de los casos los problemas no coherentes presentan datos numéricos, sin embargo no existe en ninguno de los enunciados relación entre pregunta (cuando se formula) y datos. La categoría datos numéricos tiene su mayor representatividad en tercer y cuarto curso, siendo en cuarto curso donde se presentan más de la mitad de los problemas no coherentes por falta de interrogante. En los cursos de segundo, quinto y sexto es donde se produce mayor número de problemas no coherentes, debido a verosimilitud del enunciado. En primero, tercero y cuarto curso el porcentaje de problemas que no son coherentes pero que contenían una historia verosímil, se duplica al menos con respecto a los otros cursos.

		No Coherente	**Historia verosímil**	**Datos numéricos**	**Interro-gante**	**Relación pregunta datos**
1º Curso	Respuestas	7	6	7	2	0
	% dentro de la categoría	9,59	19,35	10,29	4,08	0,00
2º Curso	Respuestas	9	3	9	7	0
	% dentro de la categoría	12,33	9,68	13,24	14,29	0,00
3º Curso	Respuestas	17	10	16	12	0
	% dentro de la categoría	23,29	32,26	23,53	24,49	0,00
4º Curso	Respuestas	23	8	22	18	0
	% dentro de la categoría	31,51	25,81	32,35	36,73	0,00
5º Curso	Respuestas	10	3	10	6	0
	% dentro de la categoría	13,70	9,68	14,71	12,24	0,00
6º Curso	Respuestas	7	1	4	4	0
	% dentro de la categoría	9,59	3,23	5,88	8,16	0,00
Total	Respuestas	73	31	68	49	0
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	0,00

Tabla VII.12. Razones sí cumplidas de los problemas no coherentes. Por curso.

La Figura VII.19 proporciona las frecuencias absolutas recogidas en la Tabla VII.12, en ella se observa que en las invenciones no coherentes de los alumnos, nunca se encuentra relación entre la pregunta formulada y los datos que contienen los enunciados. El resto de las categorías sí aparecen en todos los cursos pero con frecuencia variable.

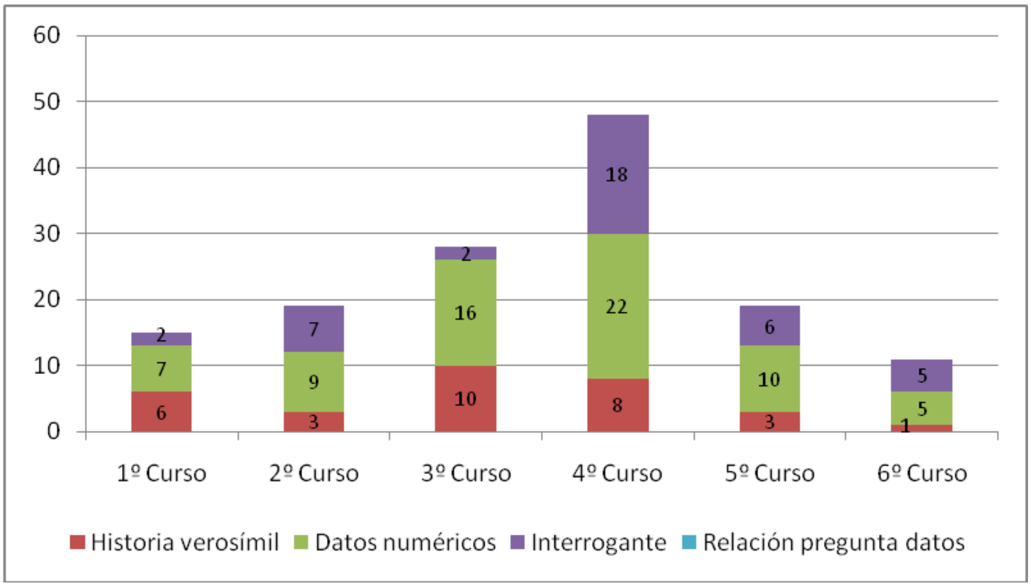


Figura VII.19. Razones sí cumplidas de los problemas no coherentes. Frecuencias absolutas por curso.

Se percibe en la Figura VII.20 que los problemas no coherentes tienen una causa relacionada con los datos numéricos de alrededor del 50% entre los problemas inventados en cada uno de los cursos. La carencia de un interrogante se manifiesta también como una causa frecuente de la falta de coherencia en los cursos primero y tercero, seguidos aunque en menor grado por los cursos de segundo, cuarto, quinto y sexto. Así mismo la falta de verosimilitud de la historia presenta una frecuencia alta en segundo, cuarto, quinto y sexto curso.

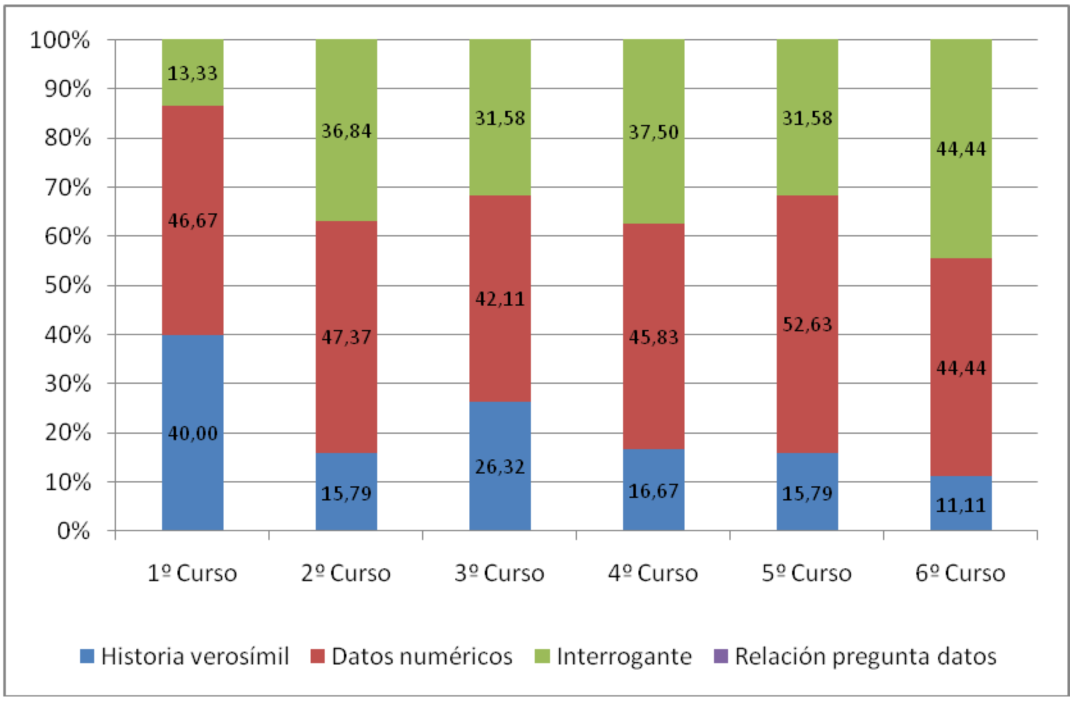


Figura VII.20. Razones sí cumplidas de los problemas no coherentes. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Al agrupar por ciclos se obtiene que, la mayoría de los problemas no coherentes de primer y segundo ciclo contienen verosimilitud en la historia, y en tercer ciclo es la causa de mayor incidencia. La falta de interrogante en el enunciado es mayoritaria en los alumnos del primer y tercer ciclo (Tabla VII.13, consecuencia de la Tabla C.17 del Anexo C). En casi todos los problemas no coherentes encontramos datos numéricos, esto es común en los tres ciclos.

		No Coherentes	Historia verosímil	Datos numéricos	Interrogante	Relación pregunta datos
Ciclo 1	Respuestas	16	9	16	9	0
	% dentro de la categoría	21,92	29,03	23,19	22,50	0,00
Ciclo 2	Respuestas	40	18	38	20	0
	% dentro de la categoría	54,79	58,06	55,07	50,00	0,00
Ciclo 3	Respuestas	17	4	15	11	0
	% dentro de la categoría	23,29	12,90	21,74	27,50	0,00
Total	Respuestas	73	31	69	40	0
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	0,00

Tabla VII.13. Razones sí cumplidas de los problemas no coherentes. Por ciclo.

Por su parte, la Figura VII.21 muestra que en todos los ciclos aproximadamente el 50% de los problemas no coherentes se debe a la categoría denominada datos numéricos. Tanto en primero como en segundo ciclo los enunciados no coherentes que presentan una historia verosímil e interrogantes tienen una presencia similar, en torno al 25%. En tercer ciclo se reducen los problemas no coherentes con historia verosímil y aumentan los que formulan un interrogante. La causa debida a la relación pregunta datos no se he detectado.

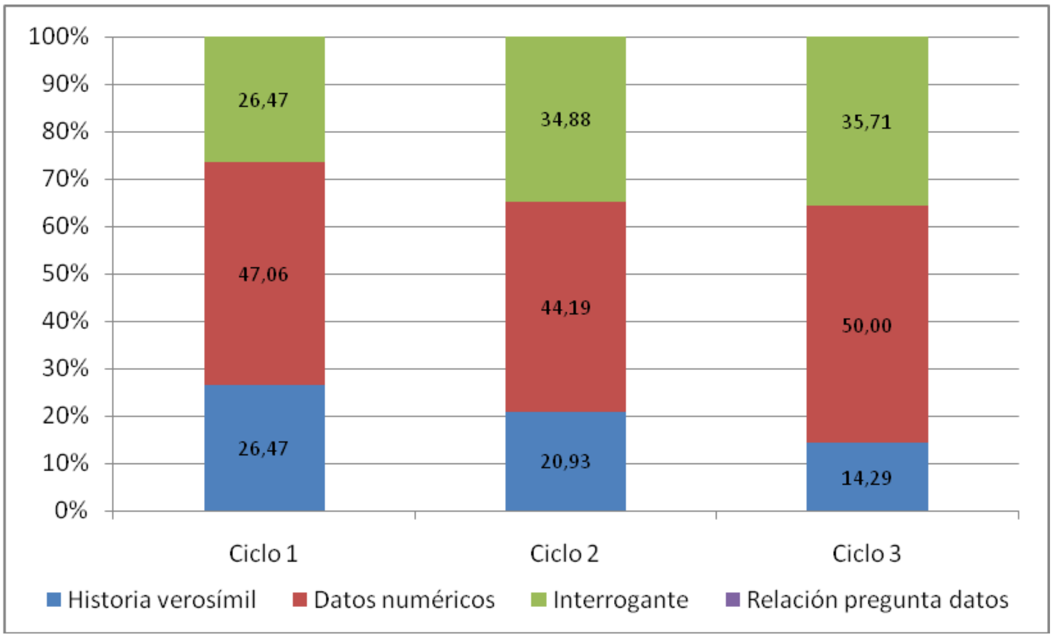


Figura VII.21. Razones sí cumplidas de los problemas no coherentes. Porcentajes por ciclo.

VII.2.3. RAZONES POR LAS CUALES EL PROBLEMA INVENTADO ERA DIFÍCIL

Seguidamente exponemos las razones que dan los estudiantes para responder a la preguntan de por qué consideraban que el problema que ha planteado es difícil. Agrupamos sus respuestas distinguiendo cuatro categorías que se refieren a: a) enunciado del problema; b) conceptos involucrados en el enunciado o en su resolución; c) datos del problema; d) número de etapas del problema. Como en otras ocasiones algunos estudiantes aportaron más de una respuesta por lo que el total de las mismas no coincide con el número de participantes.

Análisis por cursos

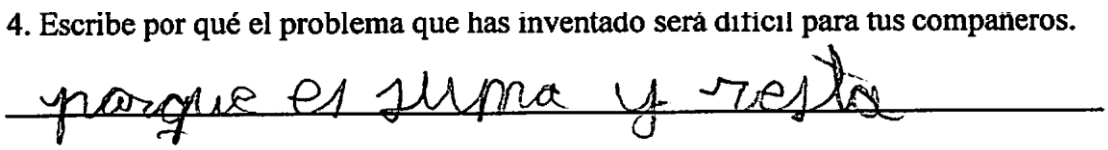
Se obtuvieron 296 respuestas al interrogante ¿por qué es difícil el problema que has inventado? En el Anexo C recogemos la Tabla C.18 con los resultados obtenidos del análisis estadístico sobre las variables que tratamos en este epígrafe. Con ellos se elabora la Tabla VII.14 que presenta los porcentajes por categorías de las respuestas aportadas desglosadas por cursos y las frecuencias absolutas.

En el cómputo general, los conceptos no estudiados involucrados en el problema y el enunciado del mismo son las dos causas señaladas en mayor medida, seguidas de las etapas de resolución y de los datos del problema. Ambas parejas de categorías presentan similar frecuencia cercana al 35% en el primer caso y al 15% en el segundo caso. De los estudiantes de quinto y de segundo curso es de donde mayormente surge la asociación de la dificultad de los problemas de matemáticas con los conceptos involucrados y de los de cuarto curso la asociación al enunciado del problema. Respecto a la dificultad asociada a los datos, son los estudiantes de primer curso los que proporcionan un porcentaje mayor, siendo los de cuarto y quinto curso los que aportan un mayor porcentaje en las respuestas que aluden al número de etapas necesario en la resolución.

		Por qué es difícil el problema inventado				
		Enunciado del problema	**Conceptos involucrados en el problema, no estudiados**	**Datos del problema**	**Etapas de resolución**	**Total**
1º Curso	Respuestas	11	14	10	1	36
	% dentro de la categoría	10,78	13,08	23,26	2,27	12,16
2º Curso	Respuestas	18	25	6	6	55
	% dentro de la categoría	17,65	23,36	13,95	13,64	18,58
3º Curso	Respuestas	15	11	8	6	40
	% dentro de la categoría	14,71	10,28	18,60	13,64	13,51
4º Curso	Respuestas	27	15	5	12	59
	% dentro de la categoría	26,47	14,02	11,63	27,27	19,93
5º Curso	Respuestas	19	27	7	12	65
	% dentro de la categoría	18,63	25,23	16,28	27,27	21,96
6º Curso	Respuestas	12	15	7	7	41
	% dentro de la categoría	11,76	14,02	16,28	15,91	13,85
Total	Respuestas	102	107	43	44	296
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII.14. Respuestas según las distintas categorías de dificultad de sus invenciones. Por curso.

Encontramos en la Figura VII.23 las frecuencias absolutas por curso de las razones por las que el problema inventado era difícil. Observamos que aunque en todos los cursos están presentes las cuatro categorías, en primer curso solo un alumno apunta que su problema es difícil debido al número de etapas del mismo (véase Figura VII.22).


4. Escribe por qué el problema que has inventado será difícil para tus compañeros.

porque es suma y resta

Figura VII.22.: Razones por las que es difícil la invención de un alumno de 1º curso

Es común para todos los cursos que las categorías más frecuentes corresponden al tipo de enunciado del problema y a los conceptos involucrados en el problema o no estudiados.

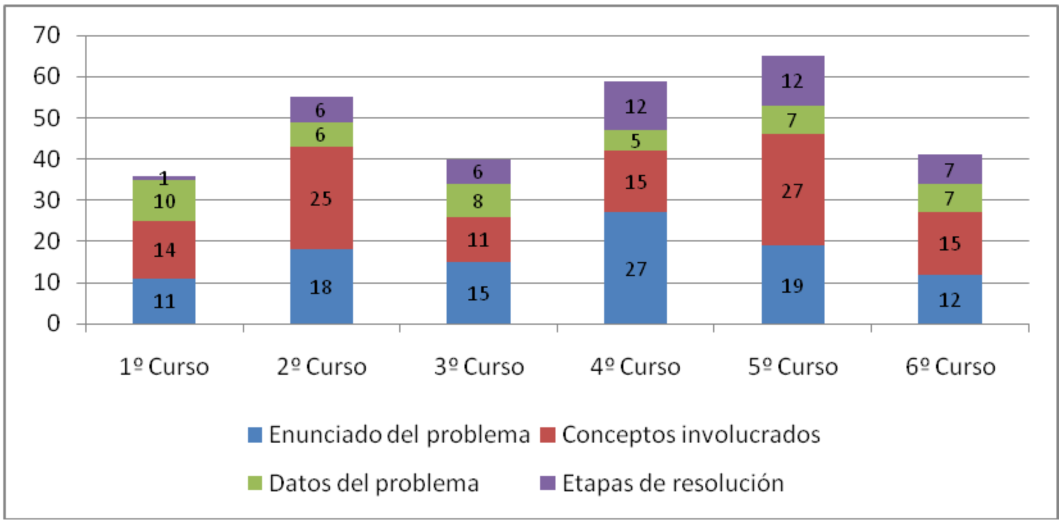


Figura VII.23. Respuestas según las distintas categorías de dificultad de sus invenciones. Frecuencias absolutas por curso.

Comparando los resultados obtenidos por cursos (Figura VII.23) se observa que la frecuencia de la variable número de etapas para resolver un problema es menor en los tres primeros cursos que en los tres últimos cursos. Los porcentajes de respuestas que atribuyen la dificultad del problema al enunciado inventado y a los conceptos involucrados es el mayor de las cuatro categorías, en todos los cursos. No se encontraron diferencias significativas en las razones de dificultad según el curso aunque existe una tendencia a ser significativas las diferencias en los porcentajes observados (chi-cuadrado=30.19, Gl=20, p-valor=0.067 ver Tabla C.19 del Anexo C).

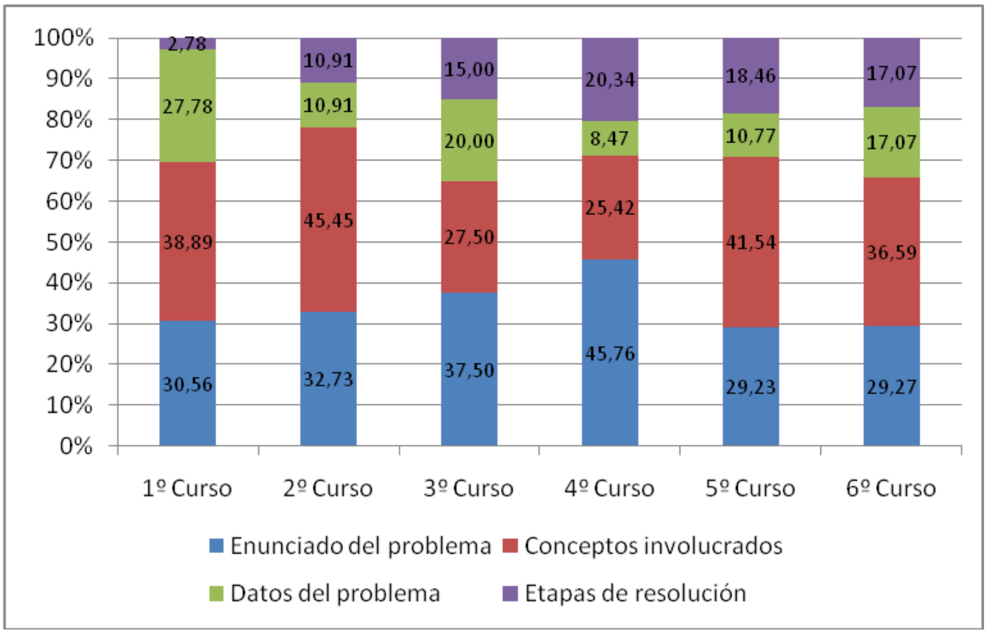


Figura VII.24. Respuestas según las distintas categorías de dificultad de sus invenciones. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Al observar los mismos datos por ciclos en la Tabla VII.15 (parte de sus datos se recogen en la Tabla C.20 del Anexo C) se percibe que los tres ciclos aportan un porcentaje similar a la categoría datos del problema, destacando segundo ciclo por su mayor aportación a las respuestas que aluden al enunciado del problema y menor aportación a las respuestas que aluden a los conceptos involucrados en el problema.

		Por qué es difícil el problema inventado				
		Enunciado del problema	**Conceptos involucrados en el problema, no estudiados**	**Datos del problema**	**Etapas de resolución**	**Total**
Ciclo 1	Respuestas	29	39	16	7	91
	% dentro de la categoría	28,43	36,45	37,21	15,91	30,74
Ciclo 2	Respuestas	42	26	13	18	99
	% dentro de la categoría	41,18	24,30	30,23	40,91	33,45
Ciclo 3	Respuestas	31	42	14	19	106
	% dentro de la categoría	30,39	39,25	32,56	43,18	35,81
Total	Respuestas	102	107	43	44	296
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 15. Respuestas según las distintas categorías de dificultad de sus invenciones. Por ciclo.

En la Figura VII.25 se encuentra la distribución de respuestas de dificultades por ciclo. Se observa que en primer ciclo los estudiantes aluden preferentemente a los conceptos matemáticos que recoge el problema y a la magnitud de los datos, y en menor medida a los referidos al enunciado del problema y a las etapas de resolución. En segundo ciclo se encuentra mayor alusión a la dificultad ligada al enunciado y etapas del problema, y menor dificultad en los conceptos y datos. En tercer ciclo la dificultad mayor se asigna a los conceptos que aparecen en el problema y en las etapas de resolución, con menor frecuencia de dificultad ligada a los datos y enunciado.

Así mismo si comparamos unos cursos con otros, se observa que el enunciado del problema presenta mayor dificultad en segundo ciclo que en el primero y tercero, y que la dificultad basada en los conceptos se considera mayor en el primer y tercer ciclo en comparación con el segundo. La dificultad respecto a los datos del problema y las etapas se pone de manifiesto en igual medida en los ciclos segundo y tercero, sin embargo cuando lo comparamos con el primer ciclo se observa que la dificultad en las etapas de resolución aumenta un 10% con respecto al segundo y tercer ciclo y la dificultad debida a los datos del problema disminuye en un 4%. Estas diferencias en las distribuciones de respuestas sobre el grado o razón de dificultad encontrado entre los distintos ciclos resultaron ser estadísticamente significativas (Chi-cuadrado=17.837, Gl=8, p-valor=0.022, ver Tabla C.21 del Anexo C).

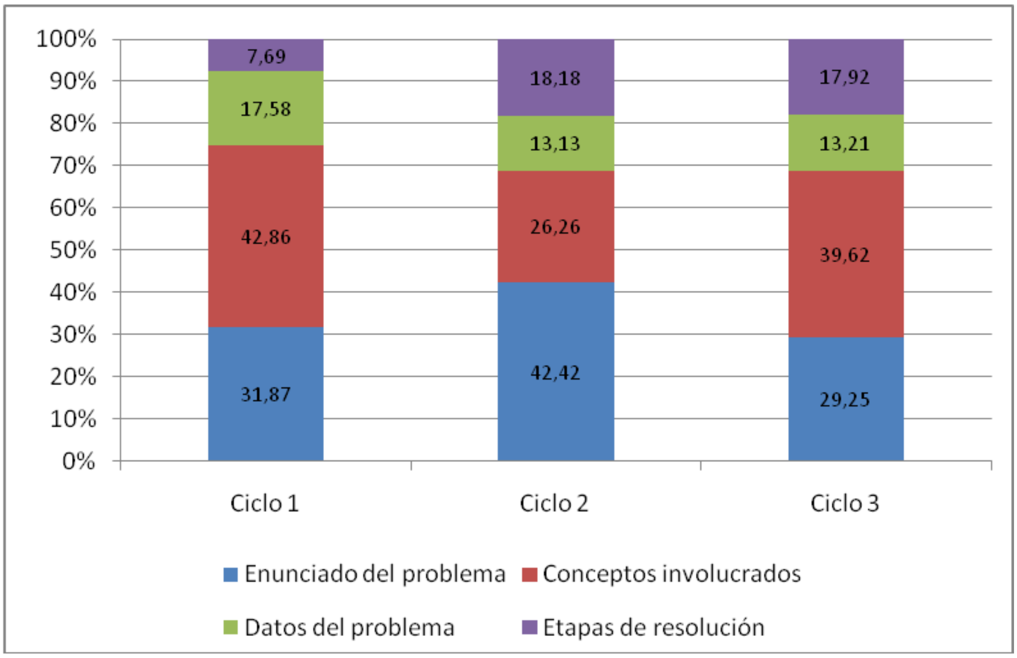


Figura VII.25. Respuestas según las distintas categorías de dificultad de sus invenciones. Porcentajes por ciclo.

VII.2.4. NÚMERO DE PASOS

Para analizar los problemas inventados según el número de pasos, consideramos si dichos enunciados corresponden a un problema simple (si involucra una sola operación para su resolución) o compuesto (si es necesaria más de una operación para resolverlo).

Análisis por cursos

En el Anexo C recogemos la Tabla C.22 procedente del estudio estadístico de los datos sobre las variables que a continuación se van a tratar, a partir de la cual obtenemos la Tabla VII.16. En ella aparecen las frecuencias absolutas por cursos y los porcentajes dentro de cada una de las categorías consideradas.

Al analizar el tipo de problema, simple o compuesto, creado por los estudiantes observamos los siguientes resultados: la mitad de los problemas simples han sido propuestos por alumnos de primer y segundo curso, el mayor porcentaje, más de la mitad, de problemas compuestos proceden de alumnos de cuarto y quinto curso. Así pues, es más probable que observando un problema simple, éste proceda de primer y segundo curso que cuando se trate de un problema compuesto. De igual modo, observando un problema compuesto es más probable que éste se haya inventado por un alumno de cuarto o quinto curso que cuando analizamos un problema simple (Tabla VII.16).

		Tipo de problema		**Total**
		Compuesto	Simple	
1º Curso	Recuento	3	35	38
	% dentro de la categoría	2,56	22,88	14,07
2º Curso	Recuento	19	43	62
	% dentro de la categoría	16,24	28,10	22,96
3º Curso	Recuento	13	16	29
	% dentro de la categoría	11,11	10,46	10,74
4º Curso	Recuento	31	20	51
	% dentro de la categoría	26,50	13,07	18,89
5º Curso	Recuento	31	28	59
	% dentro de la categoría	26,50	18,30	21,85
6º Curso	Recuento	20	11	31
	% dentro de la categoría	17,09	7,19	11,48
Total	Recuento	117	153	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 16. Problemas simples y compuestos. Por curso.

Tomando las frecuencias absolutas de la Tabla VII.16 se realiza la Figura VII.26 donde se encuentran las frecuencias, por curso, de los problemas según el número de pasos de los mismos, es decir, si es simple o compuesto. La figura evidencia que en todos los cursos se inventan problemas simples y compuestos, y que en los cursos de tercero, cuarto y quinto aparecen casi con la misma frecuencia los dos tipos de problemas. En primer y segundo curso el número de problemas simples es superior al de problemas compuestos.

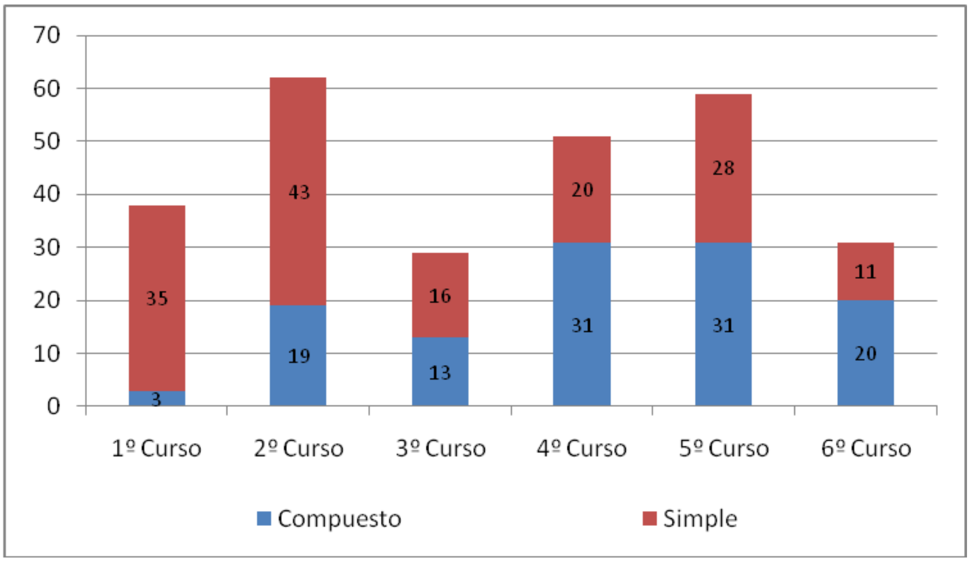


Figura VII.26. Frecuencias por curso de los problemas simples o compuestos.

La Figura VII.27 muestra la distribución del tipo de problema según el curso. Se observa cómo el porcentaje de problemas compuestos va aumentando con el curso escolar si bien en quinto curso se produce un cambio en esta tendencia, ya que hay un retroceso en porcentaje respecto a cuarto curso. Este aumento progresivo es significativo estadísticamente, observándose diferencias entre los cursos de mayor y menor grado, donde los estudiantes tienden a hacer más problemas simples con respecto a los de mayor grado donde disminuye la simplicidad de los problemas y presentan problemas compuestos (Chi-cuadrado=37.554, Gl=5, p-valor<0.0001, ver Tabla C.23 del Anexo C).

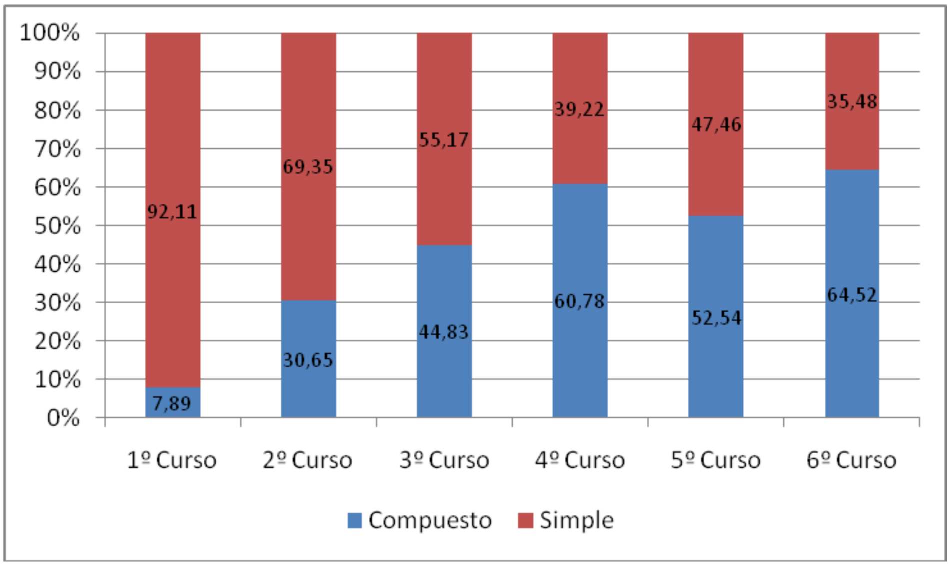


Figura VII.27. Problemas simples y compuestos. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

La Tabla VII.17 (se obtiene como resultado del estudio estadístico que se llevó a cabo y que originó la Tabla de contingencia C.24 que aparece en el Anexo C) muestra los porcentajes de problemas simples y compuestos por ciclo. De los problemas simples la mitad pertenecen a alumnos de primer ciclo en contraste con el 18,80% de los problemas compuestos propuestos. Un alto porcentaje de alumnos del segundo y tercer ciclo realizaron problemas compuestos.

		Tipo de problema		**Total**
		Compuesto	Simple	
Ciclo 1	Recuento	22	78	100
	% dentro de la categoría	18,80	50,98	37,04
Ciclo 2	Recuento	44	36	80
	% dentro de la categoría	37,61	23,53	29,63
Ciclo 3	Recuento	51	39	90
	% dentro de la categoría	43,59	25,49	33,33
Total	Recuento	117	153	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 17. Problemas simples y compuestos. Por ciclo.

En la Figura VII.28 se observa la diferencia, en porcentaje, entre los tipos de problemas simples y compuestos producidos por los escolares de los tres ciclos educativos. Se percibe un salto entre primero y segundo ciclo en cuanto a la invención de problemas compuestos y simples, que pasa de ser una diferencia notable a favor de los simples en primer curso a una diferencia menor a favor de los compuestos en segundo y tercer ciclo. Estas diferencias son significativas (Chi-cuadrado=29.48, Gl=2, p-valor<0.0001, ver Tabla C.25 del Anexo C).

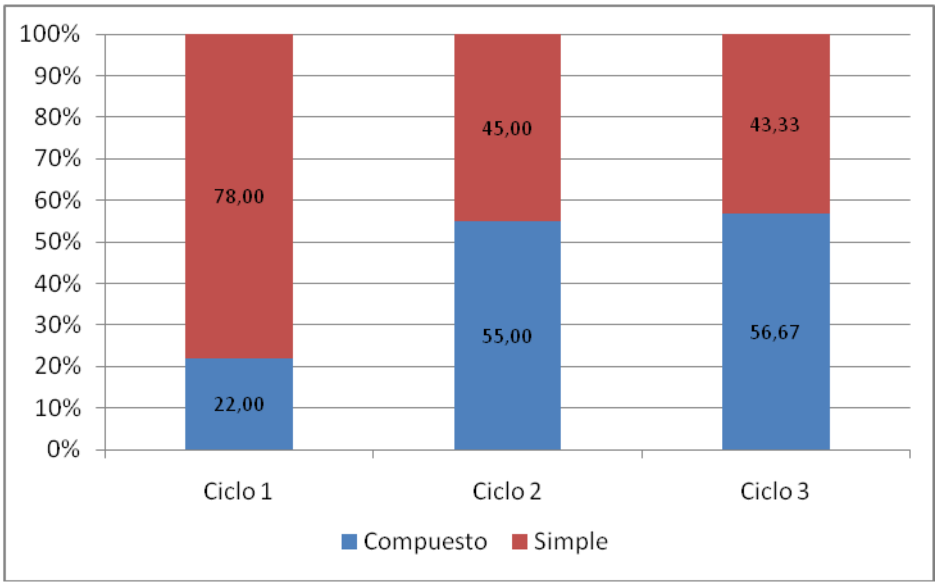


Figura VII.28. Problemas simples y compuestos. Porcentajes por ciclo.

VII.2.5. ESTRUCTURA OPERATORIA

Hemos analizado los problemas inventados por los estudiantes atendiendo a la estructura operatoria, aditiva y multiplicativa, a la que corresponden los problemas planteados.

De todos los problemas coherentes (270), en el 43.33% de los casos el problema es de tipo aditivo, el 28.89% de tipo multiplicativo y el 27.78% de tipo aditivo-multiplicativo.

Análisis por cursos

Tras el estudio estadístico de los datos (Anexo C, Tabla C.26) se genera la Tabla VII.18 que recoge las frecuencias absolutas por cursos y los porcentajes dentro de cada categoría. En dicha tabla vemos que en todos los cursos aparecen problemas de tipo aditivo y también multiplicativo y, desde segundo curso, problemas donde se combinan ambas estructuras.

La Tabla VII.18 muestra que aproximadamente el 32% de los problemas aditivos procede de primer curso, en comparación con el 1% de los multiplicativos que se presentaron en dicho curso y el 0% de los aditivos-multiplicativos. Por otra parte se observa que el porcentaje de aditivos-multiplicativos procedente de sexto curso es 21% en contraste con menos de un 1% en el caso de los aditivos. La distribución por curso según el tipo de problema es más variada en segundo, tercer, cuarto y quinto curso.

		Tipo de problema			Total
		Aditivo	**Multiplicativo**	**Aditivo y multiplicativo**	
1º Curso	Recuento	37	1	0	38
	% dentro de la categoría	31,62	1,28	0,00	14,07
2º Curso	Recuento	33	18	11	62
	% dentro de la categoría	28,21	23,08	14,67	22,96
3º Curso	Recuento	9	12	8	2
	% dentro de la categoría	7,69	15,38	10,67	10,74
4º Curso	Recuento	25	10	16	51
	% dentro de la categoría	21,37	12,82	21,33	18,89
5º Curso	Recuento	12	23	24	59
	% dentro de la categoría	10,26	29,49	32,00	21,85
6º Curso	Recuento	1	14	16	31
	% dentro de la categoría	0,85	17,95	21,33	11,48
Total	Recuento	117	78	75	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 18. Problemas según la estructura operatoria. Por curso.

Obtenemos la Figura VII.29 a partir de las frecuencias absolutas de la tabla anterior, donde se recogen los problemas inventados por los alumnos de cada curso atendiendo a su estructura operatoria. Podemos ver que la estructura aditiva-multiplicativa no se presenta en ninguno de los enunciados de primer curso. Los problemas multiplicativos aparecen desde primer curso (aunque no es significativo ya que solo hay una producción) y los problemas aditivos están presentes de forma simbólica en sexto curso con una invención. En el resto de los cursos aparecen las tres categorías con frecuencias variables.

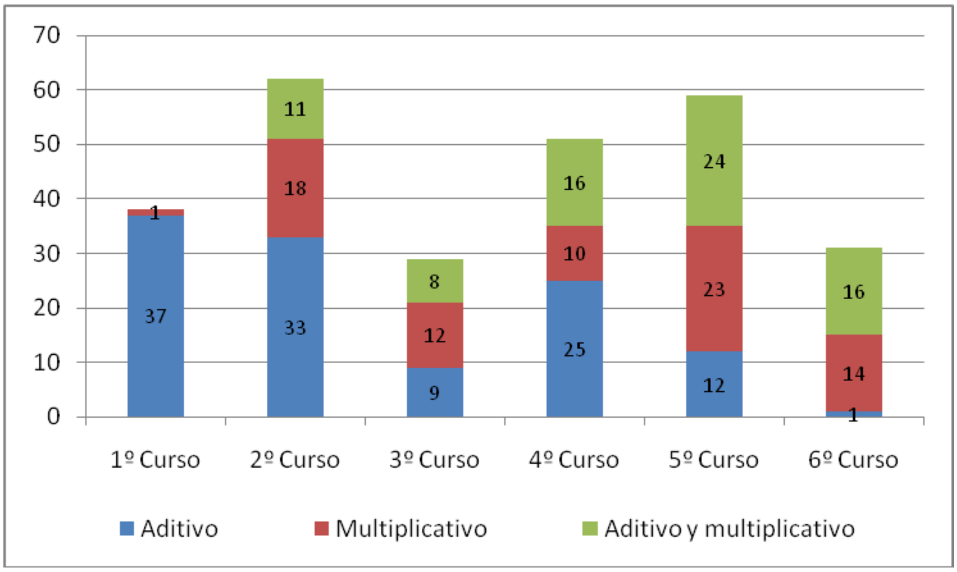


Figura VII.29. Problemas según la estructura operatoria. Frecuencias absolutas por curso.

En la Figura VII.30 que representa dentro de cada curso los porcentajes correspondientes a las tres categorías, se observa cómo disminuye el porcentaje de problemas aditivos cuando el nivel del curso aumenta, salvo en cuarto curso que se incrementan, siendo inferior al 4% en sexto curso. Las diferencias encontradas entre los cursos con respecto al tipo de problema planteado son significativas (Chi-cuadrado=87.099, Gl=10, p-valor<0.0001, ver Tabla C.27 del Anexo C). Esto mismo ocurre con el porcentaje de problemas multiplicativos solo que en sentido creciente.

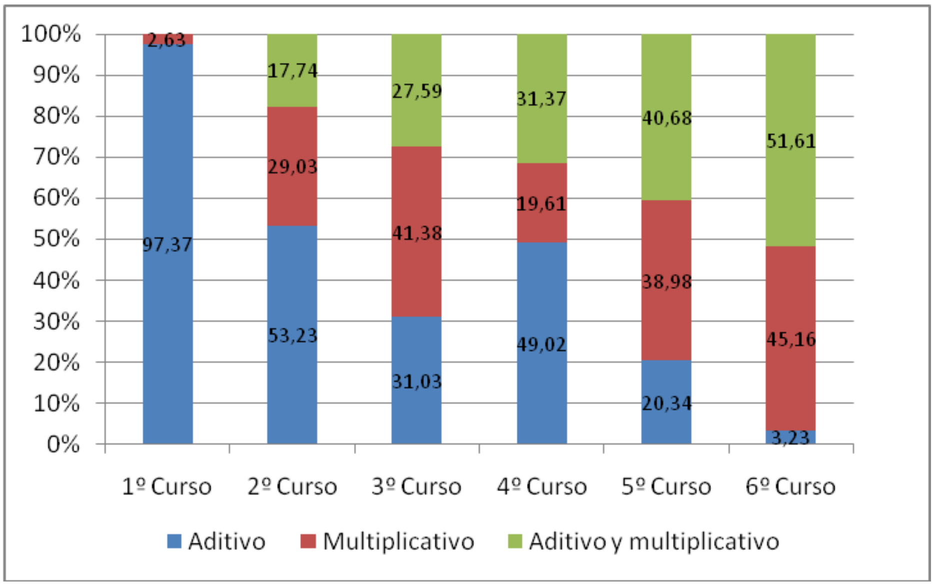


Figura VII.30. Problemas según la estructura operatoria. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

La distribución por ciclos educativos de los problemas inventados, según su estructura operatoria, muestra que es entre dos y cuatro veces más probable que un problema de tipo aditivo provenga de un estudiante de primer ciclo que uno de tipo multiplicativo o aditivo-multiplicado, respectivamente. Sin embargo, un problema aditivo-multiplicativo es más probable que proceda de un escolar de tercer ciclo que uno que es aditivo (Tabla VII.19 procedente de la Tabla C.28 del Anexo C).

		Tipo de problema			Total
		Aditivo	**Multiplicativo**	**Aditivo y multiplicativo**	
Ciclo 1	Recuento	70	19	11	100
	% dentro de la categoría	59,83	24,36	14,67	37,04
Ciclo 2	Recuento	34,00	22,00	24,00	80
	% dentro de la categoría	29,06	28,21	32,00	29,63
Ciclo 3	Recuento	13	37	40	90
	% dentro de la categoría	11,11	47,44	53,33	33,33
Total	Recuento	117	78	75	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 19. Problemas según la estructura operatoria. Por ciclos

Se observa, al igual que en la distribución de problemas por curso, que el tipo de problema varía de manera significativa entre los ciclos de modo que a mayor ciclo menor porcentaje de problemas aditivos y mayor porcentaje de problemas multiplicativos y aditivos-multiplicativos (Figura VII.31) (Chi-cuadrado=61.125, Gl=4, p-valor<0.0001 ver Tabla C.29 del Anexo C).

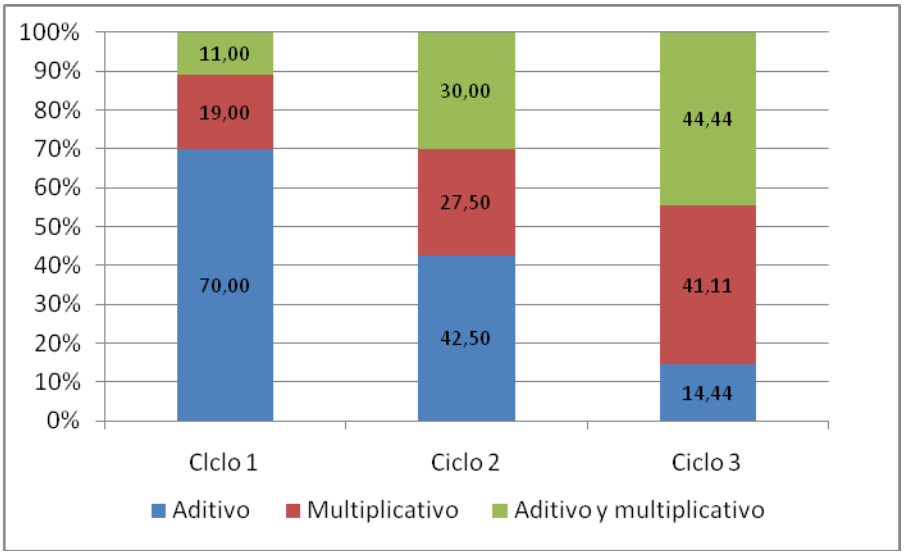


Figura VII.31. Problemas según la estructura operatoria. Porcentajes por ciclos.

VII.2.5.1. Estructura operatoria según el número de pasos

Combinamos en este apartado la estructura operatoria de los problemas con el número de pasos que hay involucrados en los mismos. En primer lugar se describen los resultados obtenidos para los problemas simples y posteriormente para los problemas compuestos, por curso y ciclo.

A. Problemas simples: aditivos y multiplicativos

De los 270 problemas coherentes planteados un total de 153 (56,67%) fueron simples, éstos a su vez se pueden clasificar en multiplicativos simples o aditivos simples. La siguiente subsección describe la clasificación de problemas simples por curso y ciclo.

Análisis por cursos

De todos los problemas simples inventados por los estudiantes, 87 son aditivos simples y 66 multiplicativos simples. De los aditivos simples casi el 40% provienen de alumnos de primer curso y solo un 1.5% de los multiplicativos simples provienen de dicho curso. Más de un 30% de los multiplicativos simples proceden de quinto curso en y aproximadamente menos de un 10% de los aditivos simples proceden de dicho curso. Esta tendencia en el aporte por curso a cada tipo de problema simple también se percibe en sexto curso (Tabla VII.20).

		Aditivos Simples	Multiplicativos Simples	Total
1º Curso	Recuento	34	1	35
	% dentro de la categoría	39,08	1,52	22,88
2º Curso	Recuento	26	17	43
	% dentro de la categoría	29,89	25,76	28,10
3º Curso	Recuento	6	10	16
	% dentro de la categoría	6,90	15,15	10,46
4º Curso	Recuento	12	8	20
	% dentro de la categoría	13,79	12,12	13,07
5º Curso	Recuento	8	20	28
	% dentro de la categoría	9,20	30,30	18,30
6º Curso	Recuento	1	10	11
	% dentro de la categoría	1,15	15,15	7,19
Total	Recuento	87	66	153
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 20. Problemas simples según su estructura operatoria. Por cursos

Presentamos la Figura VII.32 a partir de las frecuencias absolutas que aparecen en la tabla anterior, la cual se obtiene de los resultados alcanzados en el análisis estadístico recogido en la Tabla C.30 del Anexo C. En la figura vemos que en sexto curso solo se recoge un problema aditivo simple y otro multiplicativo simple en primero. En el resto de los cursos aparecen las dos categorías con frecuencias más abundantes aunque variables.

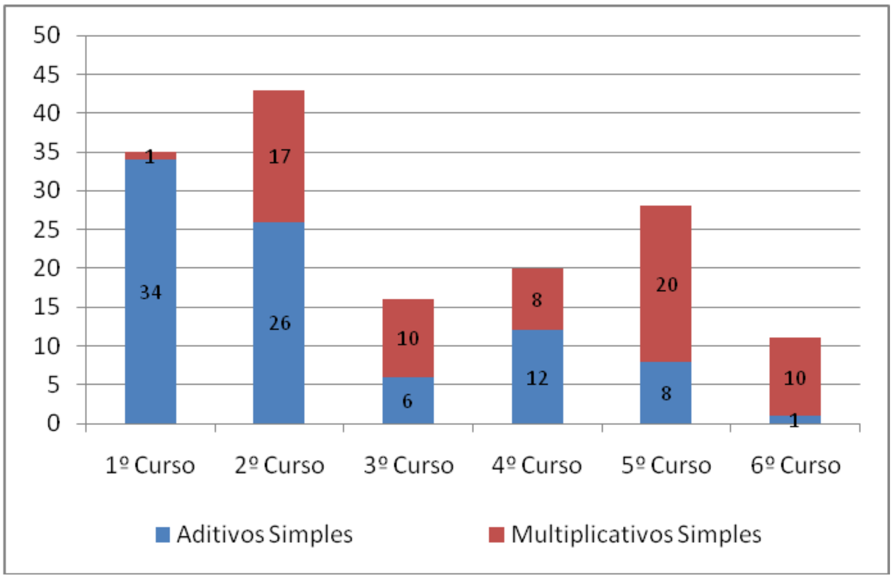


Figura VII.32. Problemas simples según su estructura operatoria. Frecuencias absolutas por curso.

En la Figura VII.33 se observa la distribución por porcentaje de problemas simples atendiendo a su estructura operatoria (multiplicativa o aditiva) en cada uno de los cursos. La gran mayoría de problemas simples de primer curso son aditivos. El porcentaje de problemas aditivos simples disminuye cuando el grado del curso aumenta aunque se observa que el porcentaje de problemas aditivos simples en cuarto curso vuelve a ser tan frecuente como en segundo curso. Estas diferencias encontradas en el tipo de problema simple presentado, según el curso al que pertenece el alumno, son significativas (Chi-cuadrado=45.27, Gl=5, p-valor<0.0001, ver Tabla C.31 del Anexo C).

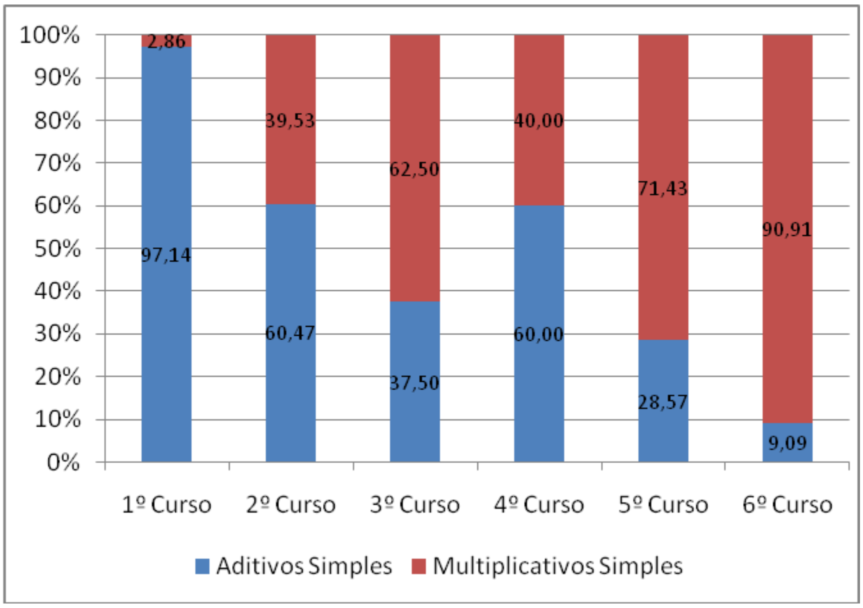


Figura VII.33. Problemas simples según su estructura operatoria. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Con respecto a los ciclos se observa en la Tabla VII.21 (obtenida a partir de la Tabla C.32 del Anexo C) que casi un 70% de los problemas aditivos simples proceden de primer ciclo y aproximadamente un 45% de problemas multiplicativos simples proceden de tercer ciclo. EL aporte de problemas multiplicativos simples de primer y segundo ciclo es similar, sin embargo segundo ciclo aporta un problema aditivo simple por cada tres que aporta primer ciclo.

		Aditivos Simples	Multiplicativos Simples	Total
Ciclo 1	Recuento	60	18	78
	% dentro de la categoría	68,97	27,27	50,98
Ciclo 2	Recuento	18	18	36
	% dentro de la categoría	20,69	27,27	23,53
Ciclo 3	Recuento	9	30	39
	% dentro de la categoría	10,34	45,45	25,49
Total	Recuento	87	66	153

Tabla VII. 21. Problemas simples según su estructura operatoria. Por ciclos.

En la Figura VII.34 se observan la distribución de problemas simples por ciclo, se aprecia una disminución de los problemas aditivos simples conforme aumenta el ciclo al que pertenece el alumno, siendo estas diferencias significativas (Chi-cuadrado= 31.63, Gl=2, p-valor<0.0001, ver Tabla C.33 del Anexo C).

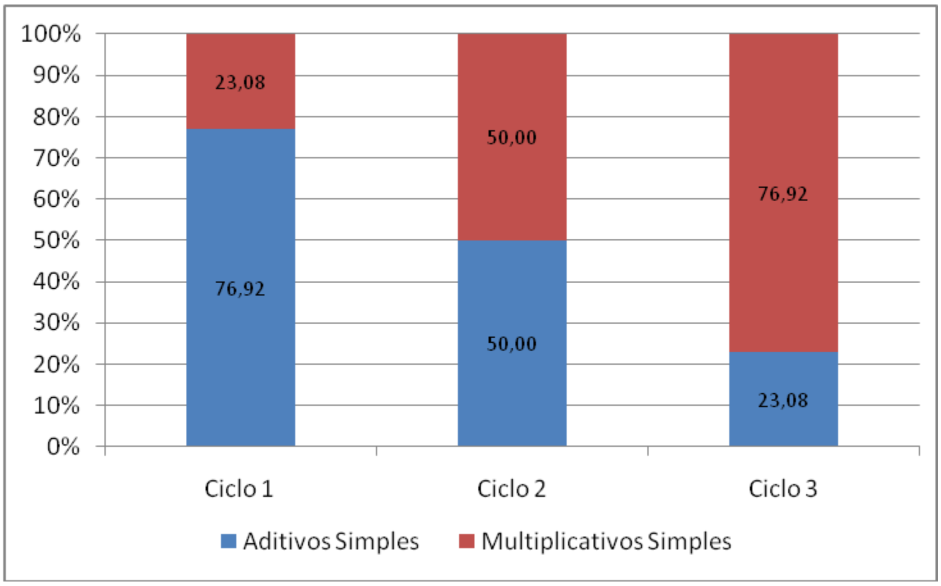


Figura VII.34. Problemas simples según su estructura operatoria. Porcentajes por ciclo.

B. **Problemas compuestos: aditivos, multiplicativos y aditivos-multiplicativos**

De los 270 problemas coherentes planteados un total de 117 son compuestos, éstos a su vez los clasificamos en compuesto aditivo (todas las operaciones necesarias para su resolución pertenecen a la estructura aditiva), compuesto multiplicativo (todas las operaciones necesarias para su resolución pertenecen a la estructura multiplicativa) y aditivo-multiplicativo (se requiere de las dos estructuras). La siguiente subsección describe la clasificación de problemas compuestos por curso y ciclo.

Análisis por cursos

Los resultados del análisis estadístico realizado, que se recogen en el Anexo C (Tabla C.34), permiten construir la Tabla VII.22 donde aparecen frecuencias absolutas y porcentajes dentro de cada una de las categorías consideradas.

Organizados los datos se observa que el mayor aporte de problemas aditivo-multiplicativos procede de quinto curso (32%) seguidos de cuarto y sexto curso con un 21,33%, y el menor aporte procede de primer ciclo donde ningún problema compuesto corresponde a esta categoría. El aporte de problemas compuestos multiplicativos decrece conforme decrece el curso, correspondiendo 4 problemas de sexto curso a esta categoría y ninguno de primer curso. Los problemas compuestos aditivos se presentan en todos los cursos salvo en sexto y proceden en su mayoría de cuarto curso (43,33%) (Tabla VII.22).

		Compuesto Aditivo	**Compuesto Multiplicativo**	**Aditivo y multiplicativo**	**Total**
1º Curso	Recuento	3	0	0	3
	% dentro de la categoría	10,00	0,00	0,00	2,56
2º Curso	Recuento	7	1	11	19
	% dentro de la categoría	23,33	8,33	14,67	16,24
3º Curso	Recuento	3	2	8	13
	% dentro de la categoría	10,00	16,67	10,67	11,11
4º Curso	Recuento	13	2	16	31
	% dentro de la categoría	43,33	16,67	21,33	26,50
5º Curso	Recuento	4	3	24	31
	% dentro de la categoría	13,33	25,00	32,00	26,50
6º Curso	Recuento	0	4	16	20
	% dentro de la categoría	0,00	33,33	21,33	17,09
Total	Recuento	30	12	75	117
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 22. Problemas compuestos según su estructura operatoria. Por cursos

La Figura VII.35 presenta las frecuencias recogidas en la tabla anterior. Observamos que los estudiantes de primer curso únicamente inventan problemas compuestos de estructura aditiva, y los de sexto curso no inventan ninguno de este tipo. En segundo, tercero, cuarto y quinto curso aparecen problemas compuestos de los tres tipos de categorías que estudiamos en este epígrafe, aunque las frecuencias son diferentes en cada uno de los cursos.

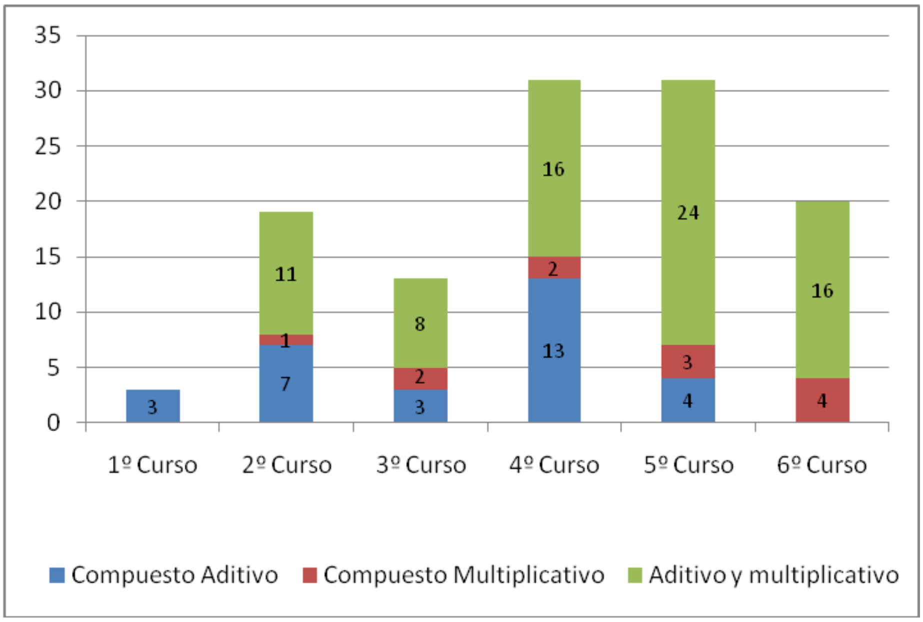


Figura VII.35. Problemas compuestos según su estructura operatoria. Frecuencias absolutas por curso.

La Figura VII.36 muestra los porcentajes de tipos de problemas, dentro de cada uno de los cursos. Se observa que el porcentaje de problemas compuestos aditivos disminuye cuando el grado del curso aumenta hasta cuarto curso, donde de nuevo los tipos de problemas compuestos aditivos vuelven a ser más frecuentes. A partir de cuarto, hasta sexto, se aprecia de nuevo una disminución de este tipo de problemas. Es decir, además del curso de primero se destaca el cuarto curso por el porcentaje elevado de problemas aditivos compuestos. Los problemas compuestos multiplicativos son los que tienen una menor presencia en todos los cursos salvo en sexto.

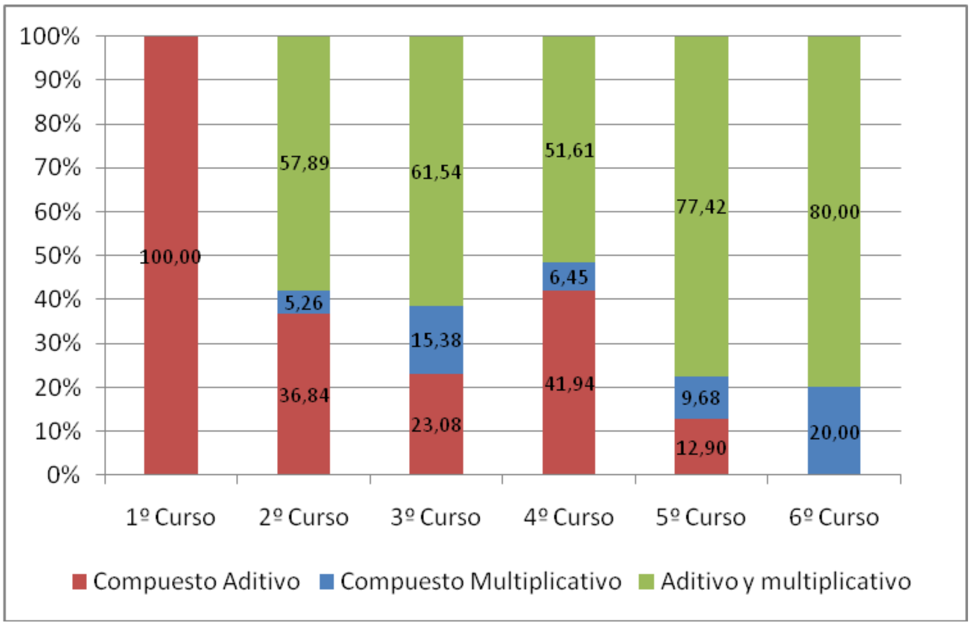


Figura VII.36. Problemas compuestos según su estructura operatoria. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Cuando estudiamos el tipo de problema compuesto, por ciclo, se observa que los problemas compuestos aditivos proceden en su mayoría de segundo ciclo, le siguen los que proceden de primer ciclo y por último los que proceden de tercer ciclo. El aporte del segundo ciclo a las categorías de problemas compuestos, no únicamente aditivos, es similar. En tercer ciclo es donde se propone un porcentaje más alto de problemas compuestos multiplicativos y aditivo-multiplicativos, en un porcentaje superior al 50%.

		Compuesto Aditivo	**Compuesto Multiplicativo**	**Aditivo y multiplicativo**	**Total**
Ciclo 1	Recuento	10	1	11	22
	% dentro de la categoría	33,33	8,33	14,67	18,80
Ciclo 2	Recuento	16	4	24	44
	% dentro de la categoría	53,33	33,33	32,00	37,61
Ciclo 3	Recuento	4	7	40	51
	% dentro de la categoría	13,33	58,33	53,33	43,59
Total	Recuento	30	12	75	117
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 23. Problemas compuestos según su estructura operatoria. Por ciclos

Con respecto a la distribución de tipo de problema compuesto, según el ciclo, se observa en la Figura VII.37 que el porcentaje de problemas compuestos aditivos disminuye cuando el grado del ciclo aumenta, encontrándose diferencias significativas en el uso del tipo de compuesto por ciclo (Chi-cuadrado=15.94, Gl=4, p-valor=0.003, ver Tabla C.36 del Anexo C). A mayor ciclo, le corresponde mayor complejidad del tipo de problema compuesto.

En primer ciclo aparecen en mayor porcentaje los problemas compuestos aditivos y menor de problemas compuestos multiplicativos o aditivos-multiplicativos, al igual que ocurre con segundo ciclo, si bien las diferencias entre los diferentes tipos de compuestos aparecen en menor grado. En tercer ciclo son más frecuentes los tipos de problemas compuestos multiplicativos y aditivos-multiplicativos y menos frecuentes los problemas aditivos compuestos.

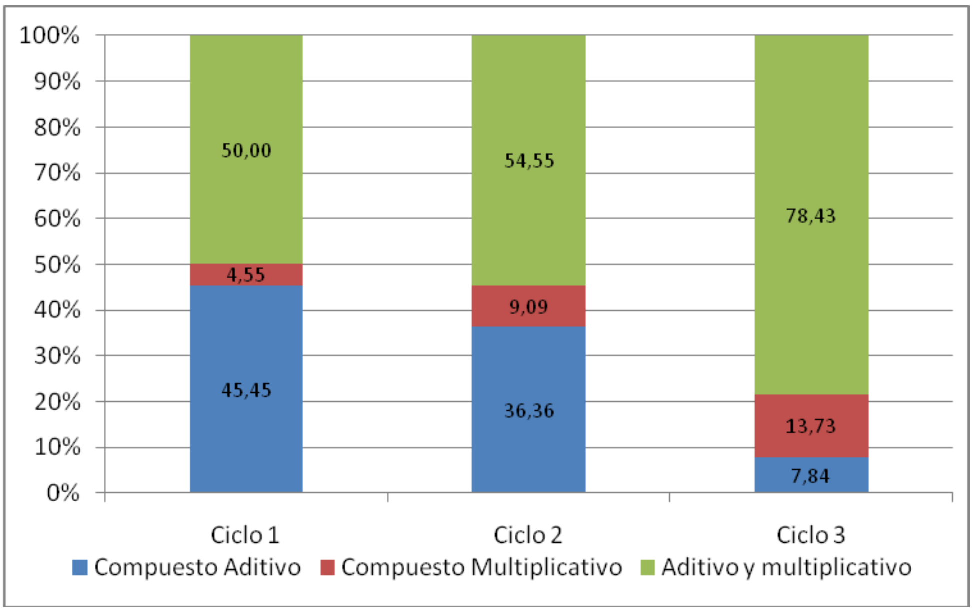


Figura VII.37. Problemas compuestos según su estructura operatoria. Porcentajes por ciclo.

VII.2.6. ESTRUCTURA SEMÁNTICA

En este apartado procedemos a detallar la información obtenida al clasificar los problemas originales inventados por los escolares en base a la estructura semántica de cada uno de ellos.

VII.2.6.1. Estructura semántica de los problemas aditivos

Los problemas aditivos están dentro de cuatro grupos semánticos: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación[14]. En el análisis del tipo de problema de acuerdo a su estructura semántica se han considerado todos los problemas aditivos planteados, tanto simples como compuestos. Un recuento de los mismos muestra que el mayor número de problemas aditivos inventados por los alumnos son de cambio, 75 problemas (55,97%); seguidos de los de combinación, 40 problemas (29,85%); los problemas de comparación son 12 (8,96%) de los inventados y 7 (5,22%) los de igualación.

Análisis por cursos

De los problemas aditivos, el mayor porcentaje corresponde a los inventados por escolares de primer curso, le siguen en porcentaje los proporcionados por segundo curso y cuarto curso, pocos proceden de los estudiantes de quinto curso y un solo problema es proporcionado por alumnos de sexto curso. La Tabla VII.24 muestra la distribución por estructura semántica de los problemas aditivos que inventaron los estudiantes de cada curso. Dicha tabla como se viene advirtiendo a lo largo del capítulo procede del análisis estadístico realizado que dio lugar a la Tabla C.37 ubicada en el Anexo C. En la tabla indicada presentamos las frecuencias absolutas de las producciones recogidas y los porcentajes de las categorías que se analizan, por cursos. Los problemas de combinación los formulan principalmente los alumnos de segundo curso, con el 35% y los que menos, los estudiantes de quinto curso. Respecto a los problemas de comparación los estudiantes de cuarto aportan la tercera parte, seguidos de los de segundo curso. Los problemas de igualación mayoritariamente corresponden a las formulaciones de los estudiantes de cuarto curso.

[14] Estos tipos de problemas están descritos en el capítulo II, apartado II.3.2.

		Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Total
1º Curso	Respuestas	25	10	2	2	39
	% dentro de la categoría	33,33	25,00	16,67	28,57	29,10
2º Curso	Respuestas	17	14	3	2	36
	% dentro de la categoría	22,67	35,00	25,00	28,57	26,87
3º Curso	Respuestas	7	2	1	0	10
	% dentro de la categoría	9,33	5,00	8,33	0,00	7,46
4º Curso	Respuestas	15	11	4	3	33
	% dentro de la categoría	20,00	27,50	33,33	42,86	24,63
5º Curso	Respuestas	10	3	2	0	15
	% dentro de la categoría	13,33	7,50	16,67	0,00	11,19
6º Curso	Respuestas	1	0	0	0	1
	% dentro de la categoría	1,33	0,00	0,00	0,00	0,75
Total	Respuestas	75	40	12	7	134
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 24. Categorías semánticas de los problemas aditivos. Por curso.

En todos los cursos predominan los problemas de cambio, aunque en sexto aparece un solo problema de este tipo y no aparecen problemas de ninguna de las tres categorías restantes. En tercero y quinto curso los alumnos no inventan problemas de igualación, y en el resto de los cursos los inventan en un número muy pequeño. Todo esto lo podemos encontrar en la Figura VII.38 que representa las frecuencias absolutas presentes en la Tabla VII.24.

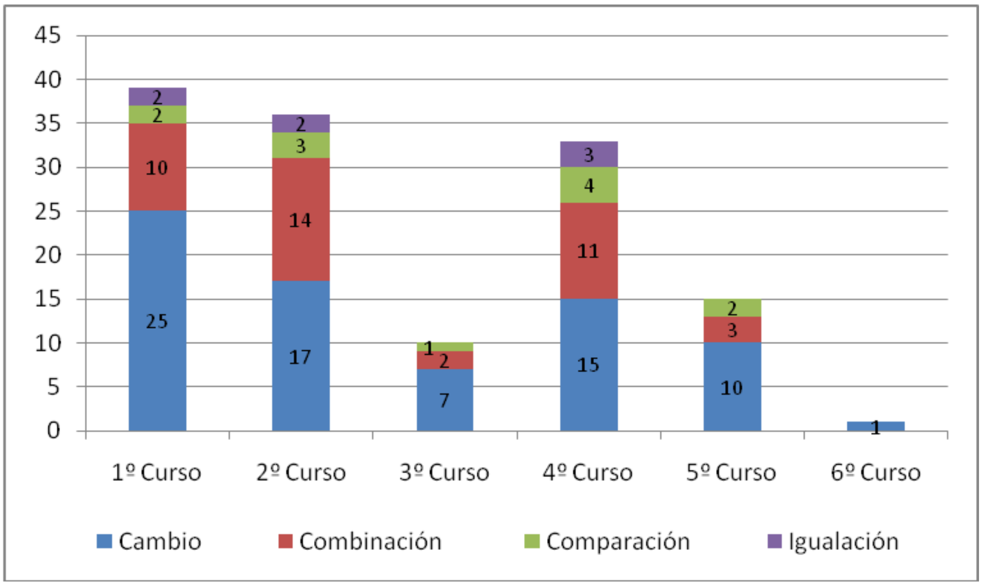


Figura VII.38. Categorías semánticas de los problemas aditivos. Frecuencias absolutas por curso.

La observación de la distribución por cursos según las categorías semánticas de las producciones de los alumnos (Figura VII.39) se aprecia que en todos los cursos el tipo que más se ha dado es el de cambio, seguido del de combinación. Más del 78% de los problemas propuestos, en cada curso, corresponden a estos tipos. Los problemas de igualación solo los inventan alumnos de primero, segundo y cuarto curso.

En el curso de primero, el mayor porcentaje es para las invenciones cuya estructura semántica es de cambio. En el segundo curso también el mayor porcentaje es para los problemas de cambio pero aparecen con fuerza lo problemas de combinación, el resto de las categorías están poco representadas y se presentan en porcentajes similares respecto al total de su categoría.

Baja el porcentaje de los problemas de combinación en tercer curso y vuelve a subir en cuarto curso hasta casi alcanzar el porcentaje de los de segundo curso.

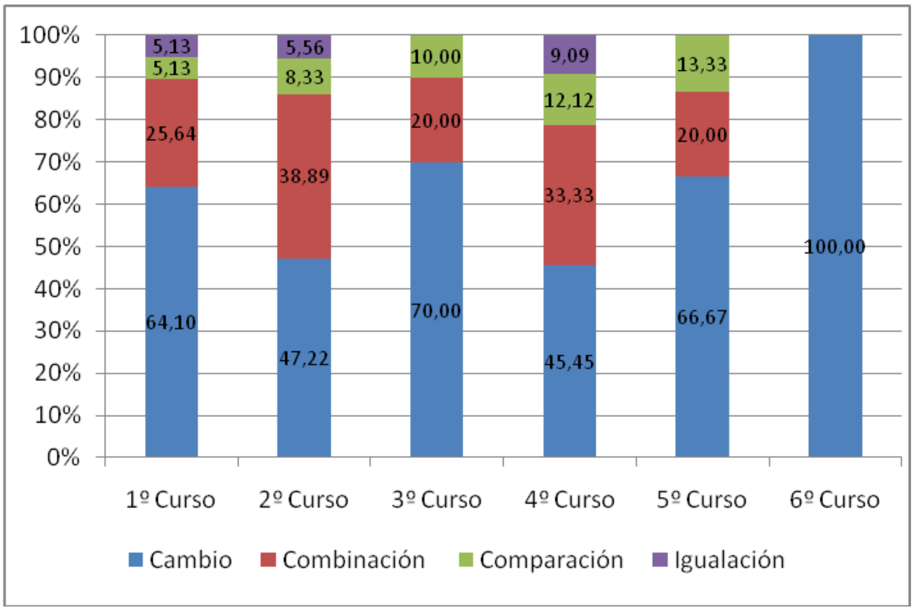


Figura VII.39. Categorías semánticas de los problemas aditivos. Porcentajes por curso.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

Análisis por ciclos

Centrándonos en el tipo de problemas de comparación, la gran mayoría de estos problemas fueron planteados por alumnos de primer y segundo ciclo. Los problemas de los restantes tipos proceden, en su mayoría (porcentaje superior al 55%), de primer ciclo y en menor medida de tercer ciclo (Tabla VII. 25, formada a partir de los datos de la Tabla C.38 del Anexo C).

		Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Total
Ciclo 1	Respuestas	42	24	5	4	75
	% dentro de la categoría	56,00	60,00	41,67	57,14	55,97
Ciclo 2	Respuestas	22	13	5	3	43
	% dentro de la categoría	29,33	32,50	41,67	42,86	32,09
Ciclo 3	Respuestas	11	3	2	0	16
	% dentro de la categoría	14,67	7,50	16,67	0,00	11,94
Total	Respuestas	75	40	12	7	134
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 25. Categorías semánticas de los problemas aditivos. Por ciclo.

En la Figura VII.40 se aprecia la similitud de porcentajes del uso de los distintos tipos de problemas de estructura semántica aditiva en los ciclos de primero y segundo. En tercer ciclo, se da en mayor proporción que en los ciclos anteriores la semántica de cambio.

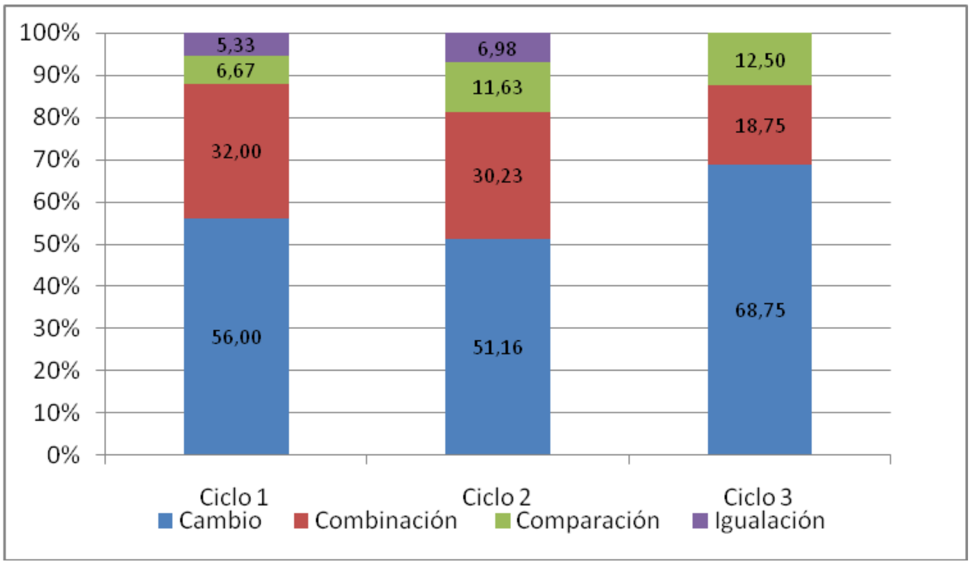


Figura VII.40. Categorías semánticas de los problemas aditivos. Porcentajes por ciclo.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

VII.2.6.1.1. Estructura semántica y número de pasos de los problemas aditivos

A continuación procedemos al análisis, primero por cursos y después por ciclos, de las categorías semánticas de los problemas aditivos teniendo en cuenta si se resuelven realizando una operación o más de una.

A. Estructura semántica de los problemas aditivos simples

Casi la mitad de los alumnos que inventan problemas aditivos simples lo hacen según la categoría de cambio, los problemas aditivos de comparación e igualación aparecen de forma muy escasa (Tabla VII.26).

Análisis por cursos

A continuación hacemos un análisis, como en epígrafes anteriores, a partir de la clasificación semántica de los problemas aditivos simples, estableciendo una comparación entre los cursos que componen la etapa de educación primaria. Los datos, procedentes del estudio estadístico que se ha realizado, los recogemos de la Tabla C.39 del Anexo C.

De todos los problemas obtenidos del tipo aditivos simples, la Tabla VII.26 muestra la distribución de los resultados por curso, según la clase semántica aditiva así como las frecuencias absolutas. Se aprecia que el porcentaje de respuestas procedentes del primer curso va disminuyendo conforme se avanza en la escala elegida para escribir los tipos de problemas (cambio, combinación, comparación e igualación). Los problemas de cambio proceden en su mayoría de primer curso. Los problemas de combinación proceden en su mayoría de segundo y primer curso, produciendo ambos cursos conjuntamente un 80% de las respuestas. Sexto curso es el que menos problemas aporta en las categorías de cambio, combinación, comparación e igualación, con 1 o ningún problema, aunque en la categoría de igualación también destacan tercer y quinto curso por la ausencia de problemas de igualación.

		Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Total
1º Curso	Respuestas	22	8	2	2	34
	% dentro de la categoría	47,83	32,00	22,22	28,57	39,08
2º Curso	Respuestas	10	12	2	2	26
	% dentro de la categoría	21,74	48,00	22,22	28,57	29,89
3º Curso	Respuestas	4	1	1	0	6
	% dentro de la categoría	8,70	4,00	11,11	0,00	6,90
4º Curso	Respuestas	3	3	3	3	12
	% dentro de la categoría	6,52	12,00	33,33	42,86	13,79
5º Curso	Respuestas	6	1	1	0	8
	% dentro de la categoría	13,04	4,00	11,11	0,00	9,20
6º Curso	Respuestas	1	0	0	0	1
	% dentro de la categoría	2,17	0,00	0,00	0,00	1,15
Total	Respuestas	46	25	9	7	87
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 26. Categorías semánticas de los problemas aditivos simples. Por curso.

Las frecuencias absolutas de la Tabla VII.26 las visualizamos en la Figura VII.41 donde queda patente que dentro de los problemas simples aditivos los alumnos de sexto curso únicamente inventan un problema del tipo de cambio. En los cursos de primero, segundo y cuarto aparecen enunciados correspondientes a las cuatro categorías semánticas y en tercero y quinto los estudiantes no inventan problemas de igualación.

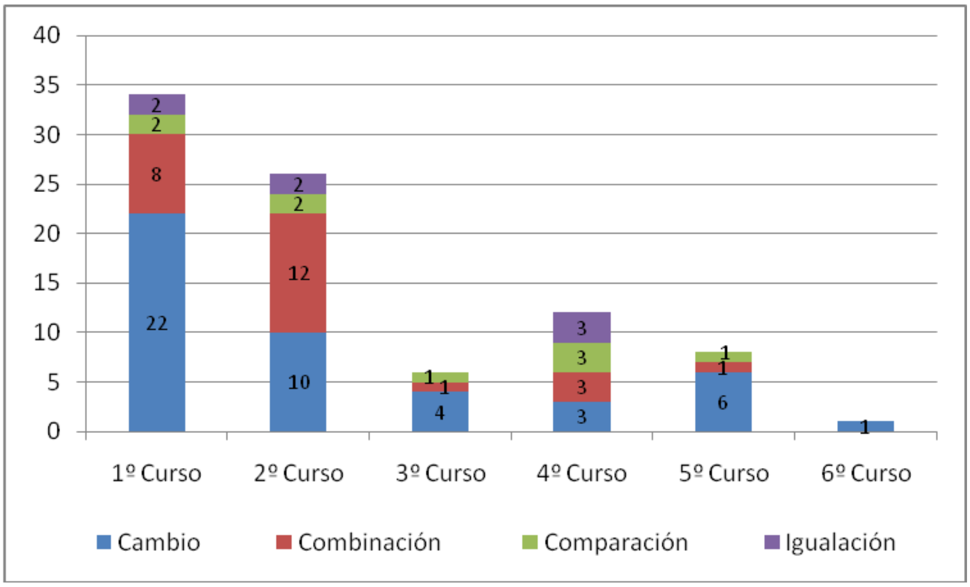


Figura VII.41. Categorías semánticas de los problemas aditivos simples. Frecuencias absolutas por curso.

En la Figura VII.42 se observa que el porcentaje de problemas de cambio disminuye para segundo y cuarto curso, y el de combinación se da con mayor frecuencia entre los alumnos de segundo curso. En primero y segundo curso, se observa que los porcentajes de problemas de comparación e igualación son similares y que se invierte el sentido con los problemas de cambio y combinación. Es decir, el tipo de cambio es más frecuente en primer curso que el de combinación y en segundo curso, los problemas de combinación han sido más frecuentes que los de cambio. Muy pocos alumnos de tercero, cuarto, quinto y sexto realizaron problemas aditivos simples por lo que los porcentajes observados en las graficas deben ser interpretados con precaución ya que representan a una minoría de estudiantes, aunque cabe mencionar que los escolares de cuarto curso usaron en igual porcentaje cada uno de los tipos según semántica, en los problemas aditivos simples.

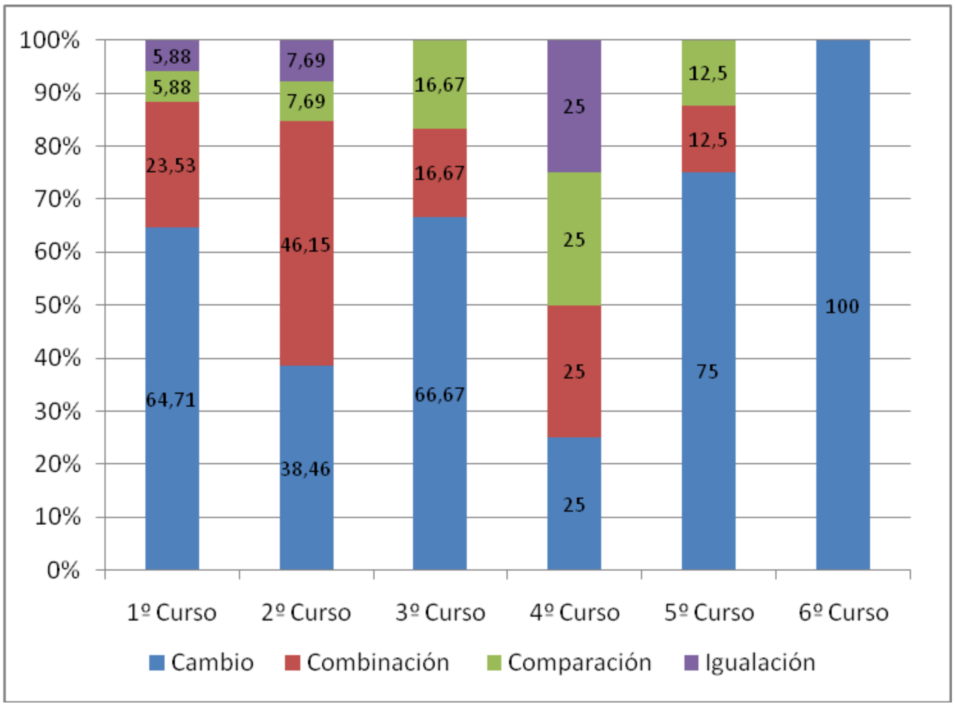


Figura VII.42. Categorías semánticas de los problemas aditivos simples. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Al observar la distribución de los resultados por ciclos, se percibe que la mayor parte de los problemas de combinación y de cambio proceden de escolares de primer ciclo. En los ciclos segundo y tercero no aparecen datos que consideremos relevantes solo señalar que la categoría de igualación no se da en tercer ciclo (Tabla VII.27 derivada de la Tabla C.40 del Anexo C).

		Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Total
Ciclo 1	Respuestas	32	20	4	4	60
	% dentro de la categoría	69,57	80,00	44,44	57,14	68,97
Ciclo 2	Respuestas	7	4	4	3	18
	% dentro de la categoría	15,22	16,00	44,44	42,86	20,69
Ciclo 3	Respuestas	7	1	1	0	9
	% dentro de la categoría	15,22	4,00	11,11	0,00	10,34
Total	Respuestas	46	25	9	7	87
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 27. Categorías semánticas de los problemas aditivos simples. Por ciclo.

En la Figura VII.43 se observa el porcentaje de aparición de los diferentes tipos de problemas de estructura aditiva según su semántica, en relación al ciclo al que pertenecía el alumno. Se aprecia que en segundo ciclo, el uso de los distintos tipos es similar y cuando se compara segundo ciclo con respecto a primero se observa un aumento en el porcentaje de problemas de comparación e igualación. Solo 9 problemas de tercer ciclo se clasificaron como aditivos simples, por lo que los porcentajes observados representan una minoría de alumnos de dicho ciclo.

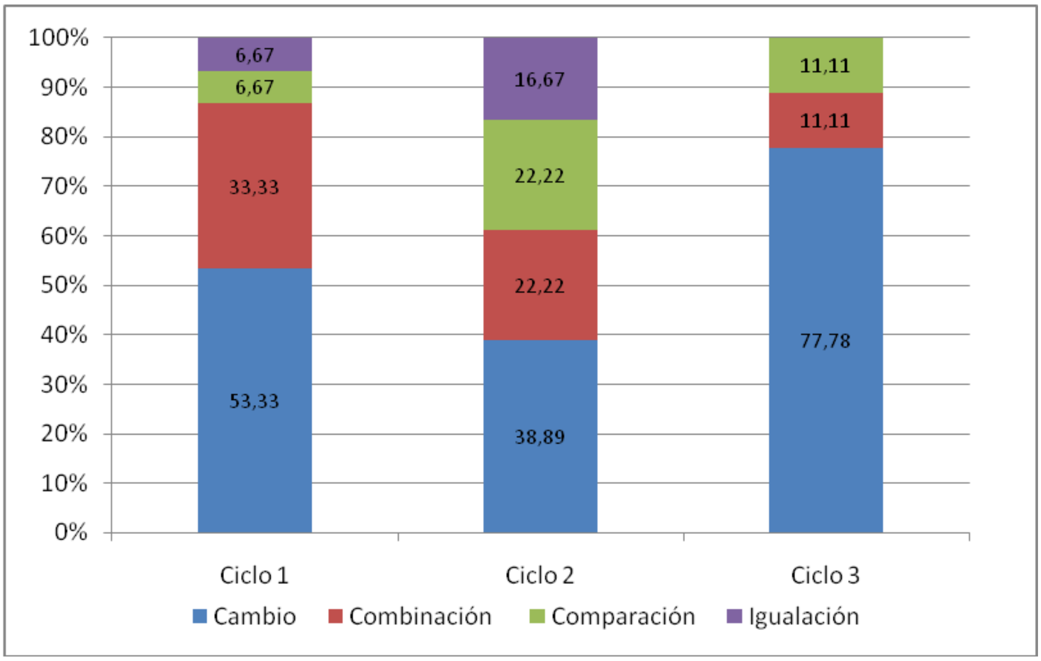


Figura VII.43. Categorías semánticas de los problemas aditivos simples. Porcentajes por ciclo.

B. Estructura semántica de los problemas aditivos compuestos

En cuanto a los problemas aditivos compuestos, presentamos a continuación el análisis de su estructura semántica por cursos y ciclos.

Análisis por cursos

La Tabla VII.28 muestra la distribución de los resultados de las construcciones aditivas compuestas, para cada una de los tipos de problemas según su semántica. Esta tabla se construye con los resultados obtenidos tras el estudio estadístico sobre las variables consideradas en este epígrafe (ver Tabla C.41 en Anexo C). Se observa que para el tipo de comparación, solo existen tres casos y para el de igualación ningún caso. Un mayor porcentaje de problemas aditivos compuestos de tipo cambio y de tipo combinación proceden de cuarto curso, y ningún problema procede de sexto curso.

		Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Total
1º Curso	Respuestas	3	2	0	0	5
	% dentro de la categoría	10,34	13,33	0,00	0,00	10,64
2º Curso	Respuestas	7	2	1	0	10
	% dentro de la categoría	24,14	13,33	33,33	0,00	21,28
3º Curso	Respuestas	3	1	0	0	4
	% dentro de la categoría	10,34	6,67	0,00	0,00	8,51
4º Curso	Respuestas	12	8	1	0	21
	% dentro de la categoría	41,38	53,33	33,33	0,00	44,68
5º Curso	Respuestas	4	2	1	0	7
	% dentro de la categoría	13,79	13,33	33,33	0,00	14,89
6º Curso	Respuestas	0	0	0	0	0
	% dentro de la categoría	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	Respuestas	29	15	3	0	47
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	0,00	100,00

Tabla VII. 28. Categorías semánticas de los problemas aditivos compuestos. Por curso.

En la Figura VII.44 reflejamos las frecuencias absolutas contempladas en la tabla anterior. La figura indica que en sexto curso no existen invenciones aditivas compuestas de ninguna de las cuatro categorías. Tanto en primero como en tercer curso solo han aparecido invenciones aditivas de cambio y combinación. En segundo cuarto y quinto curso aparecen enunciados de los tipos de cambio, comparación y combinación. En ninguno de los cursos los estudiantes inventan problemas compuestos del tipo de igualación.

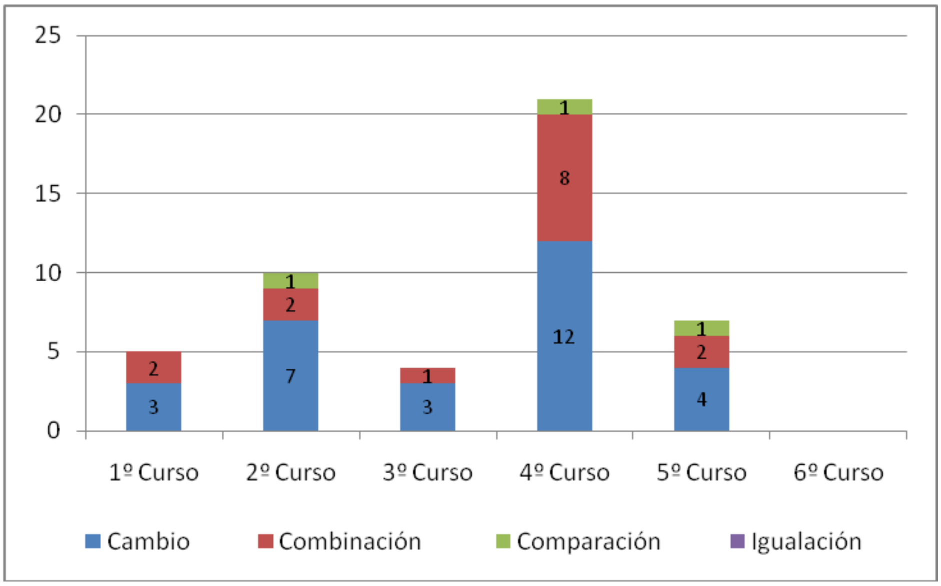


Figura VII.44. Categorías semánticas de los problemas aditivos compuestos. Frecuencias absolutas por curso.

La Figura VII.45 muestra los porcentajes de aparición de cada uno de los distintos tipos de semánticas, por curso. Se observa que en los cursos de cuarto y quinto hacen, aproximadamente, el mismo uso de la semántica de cambio y que este porcentaje es inferior al que tienen en los cursos tercero, segundo y primero. No hay presencia de problemas de comparación en primer y tercer curso, siendo ésta la categoría semántica menos frecuente en todos los cursos, con la salvedad de los problemas de igualación que no se presenta en ninguno de los cursos.

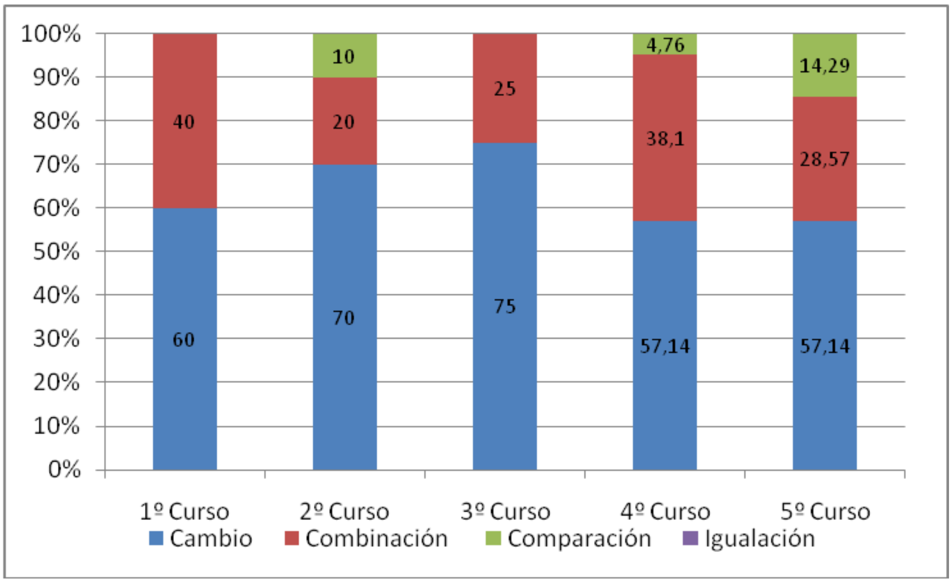


Figura VII.45. Categorías semánticas de los problemas aditivos compuestos. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

La Tabla VII.29 (procede de la Tabla C.42 del Anexo C) muestra que es en el segundo ciclo donde hay mayor presencia de las categorías de cambio y combinación, seguido de primer ciclo, los tres problemas de comparación que se proponen en toda la etapa proceden uno de cada ciclo. Se observa similitud en el porcentaje de problemas de los tipos cambio y combinación, en el tercer ciclo.

		Cambio	**Combinación**	**Comparación**	**Igualación**	**Total**
Ciclo 1	Respuestas	10	4	1	0	15
	% dentro de la categoría	34,48	26,67	33,33	0,00	31,91
Ciclo 2	Respuestas	15	9	1	0	25
	% dentro de la categoría	51,72	60,00	33,33	0,00	53,19
Ciclo 3	Respuestas	4	2	1	0	7
	% dentro de la categoría	13,79	13,33	33,33	0,00	14,89
Total	Respuestas	29	15	3	0	47
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	0,00	100,00

Tabla VII. 29. Categorías semánticas de los problemas aditivos compuestos. Por ciclos.

Cuando se observan los resultados, por ciclos, de los tipos de problemas aditivos compuestos en cuanto a su semántica, el porcentaje de problemas de cambio aparecidos es similar en los tres ciclos. En cuanto a los problemas de comparación son un 10% mayor en tercer ciclo que en segundo (Figura VII.46).

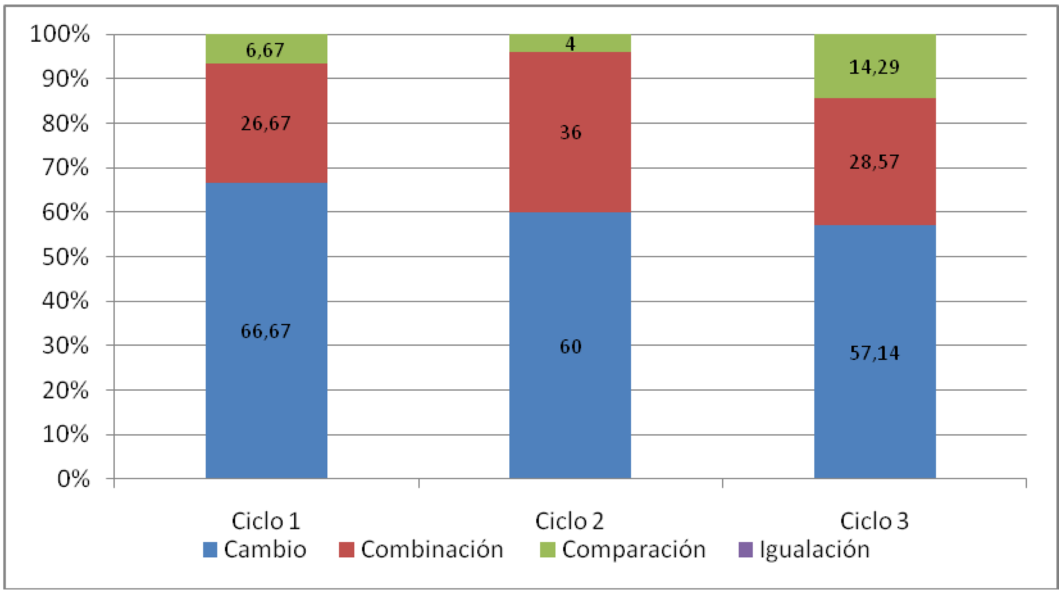


Figura VII.46. Categorías semánticas de los problemas aditivos compuestos. Porcentajes por ciclo.

C. Resumiendo

Una vez considerados los problemas de tipo aditivo se estudia la distribución de los resultados según el número de etapas del problema y la estructura semántica de los enunciados aditivos inventados, independientemente del curso que los produjo. El análisis se realiza teniendo en cuenta los datos obtenidos del estudio estadístico que generó la Tabla de contingencia C.43 que aparece en el Anexo C. De dicha tabla elaboramos la Tabla VII.30 que presenta las frecuencias absolutas y los porcentajes alcanzados por cada una de las categorías semánticas.

Del total de 134 resultados según la estructura semántica en los problemas aditivos, aproximadamente un 40% de los problemas de los tipos de cambio y de combinación son compuestos. En contraposición, solo un 25% en la categoría de comparación y ninguno de igualación. Es significativo que de las 30 producciones aditivas compuestas (Tabla VII.22), 29 corresponden a problemas en los que en alguna parte de su estructura semántica aparece la categoría de cambio. En todas las estructuras semánticas más del 60% de los problemas inventados son simples, siendo de este tipo todos los problemas de igualación (Tabla VII.30).

Número de etapas del problema		**Semántica de los Aditivos**				
		Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Total
Compuesto	Respuestas	29	15	3	0	47
	% dentro de la categoría	38,67	37,50	25,00	0,00	35,07
Simple	Respuestas	46	25	9	7	87
	% dentro de la categoría	61,33	62,50	75,00	100,00	64,93
Total	Respuestas	75	40	12	7	134
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 30. Problemas aditivos simples y compuestos según su categoría semántica.

Los problemas aditivos simples inventados por los estudiantes contienen enunciados correspondientes a las cuatro categorías semánticas y en los compuestos únicamente se encuentran problemas de cambio, combinación y comparación. Estos datos aparecen ilustrados en la Figura VII.47 correspondiente a las frecuencias absolutas de la Tabla VI.30.

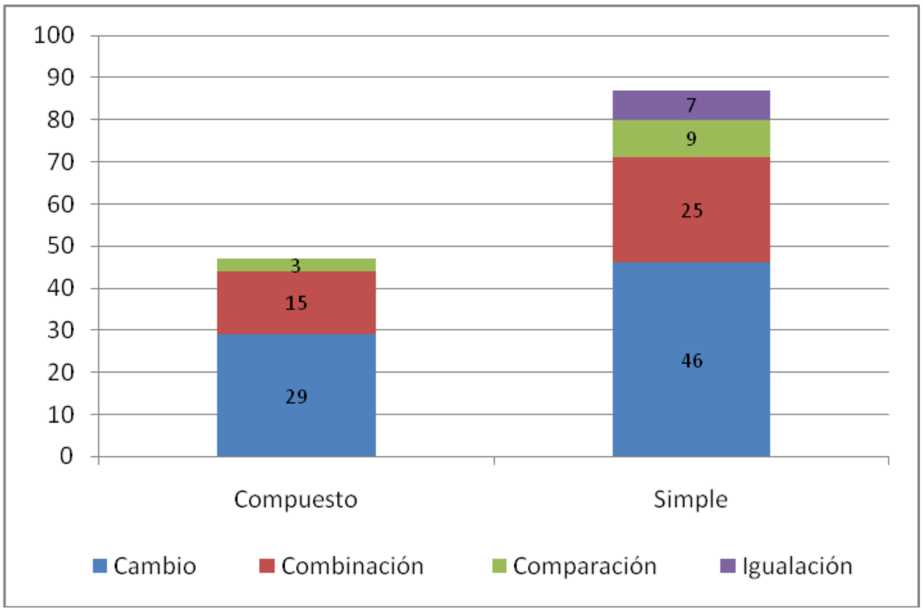


Figura VII.47. Problemas aditivos simples y compuestos según su categoría semántica. Frecuencias absolutas.

En la Figura VII.48 se observa los porcentajes correspondientes a cada una de las categorías semánticas de los problemas aditivos. De modo que si un problema es compuesto, es más probable que el tipo de semántica usada haya sido la de cambio y combinación que en los tipos de problemas simples. Por otro lado se observa que en los tipos de problemas simples hay mayor variabilidad de categorías semánticas, como por ejemplo un 8% de estos eran de igualación, mientras que en los tipos compuestos no ha aparecido ninguna invención con términos aditivos de igualación.

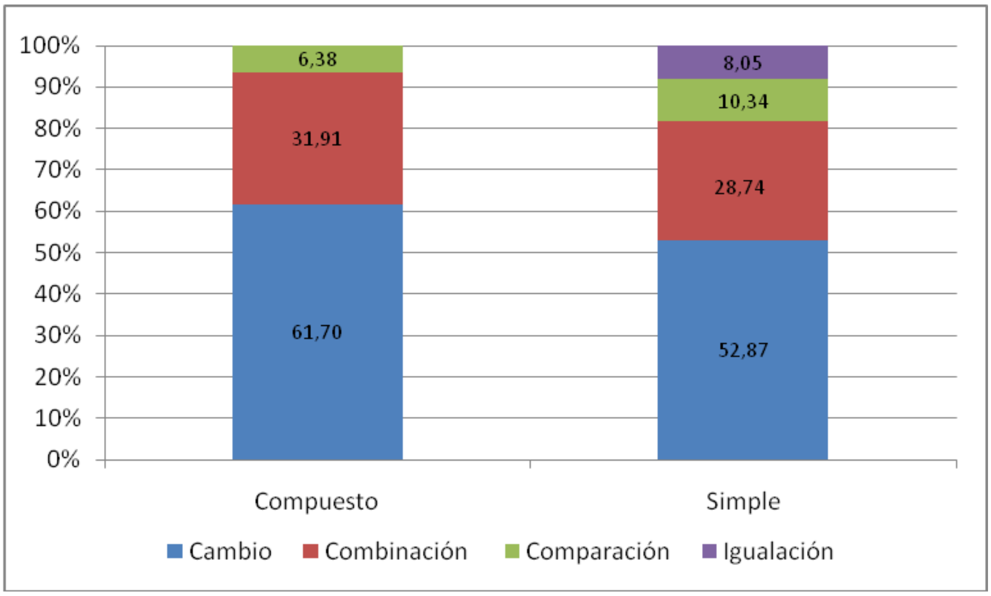


Figura VII.48. Porcentajes por categorías semánticas de los problemas aditivos simples y compuestos.

VII.2.6.2. Estructura semántica de los problemas multiplicativos

Consideramos siete categorías para la clasificación semántica de los problemas multiplicativos: Grupos Iguales (que dividimos en problemas de Cuotición y Partición), Tasas, Comparación, Combinación y Producto de medidas[15].

Los problemas multiplicativos de tasas y grupos iguales de partición fueron los que más frecuentemente han aparecido en las invenciones de los estudiantes, 35 y 32 respectivamente. En menor cantidad, 13, han sido los problemas de producto de medidas. Con escasa representación, 3 y 2 aparecen los problemas de grupos iguales cuotitivos y de comparación. Los problemas de combinación no están presentes en las producciones de los estudiantes.

Análisis por cursos

En la siguiente tabla indicamos el número de problemas multiplicativos correspondientes a cada curso y su clasificación semántica. Al igual que en los problemas aditivos estos datos se recogen sin hacer distinción sobre si se trata de un problema compuesto o simple. En el Anexo C se puede ver la Tabla C.44 sobre la que

[15] Estos tipos de problemas están descritos en el capítulo II, apartado II.3.4.

se sustenta la Tabla VII.31 que muestra las frecuencias absolutas y los porcentajes correspondientes a cada una de las categorías consideradas en este apartado por curso.

Observamos que la estructura multiplicativa aparece, con mayor frecuencia, en los problemas inventados por estudiantes de quinto, sexto y segundo curso.

En cuanto a los tipos, las tipologías de tasas y grupos iguales de tipo partición, los problemas procedentes de estudiantes de segundo y quinto ciclo representan más de la mitad de los enunciados inventados. Para los problemas planteados del tipo de semántica de cuotición se observa que un mayor porcentaje proceden de escolares de quinto curso en comparación con el resto de tipos semánticos, si bien hay que tener presente que estamos hablando de un total de tres problemas. La tipología de producto de medidas únicamente está presente en problemas inventados por escolares de quinto y sexto curso, produciendo los alumnos de sexto curso 2/3 de los problemas clasificados de este modo[16]. Los problemas de comparación son escasos: aparece uno proporcionado por un estudiante de tercero y otro por un estudiante de cuarto curso (Tabla VII.31).

		G. I. Cuotición	G. I. Partición	Tasas	Comparación	Combinación	Producto Medida	Total
1º Curso	Respuestas	0	0	1	0	0	0	1
	% dentro de la categoría	0,00	0,00	2,86	0,00	0,00	0,00	1,18
2º Curso	Respuestas	0	8	10	0	0	0	18
	% dentro de la categoría	0,00	25,00	28,57	0,00	0,00	0,00	21,18
3º Curso	Respuestas	0	5	7	1	0	0	13
	% dentro de la categoría	0,00	15,63	20,00	50,00	0,00	0,00	15,29
4º Curso	Respuestas	1	4	5	1	0	0	11
	% dentro de la categoría	33,33	12,50	14,29	50,00	0,00	0,00	12,94
5º Curso	Respuestas	2	9	10	0	0	4	25
	% dentro de la categoría	66,67	28,13	28,57	0,00	0,00	30,77	29,41
6º Curso	Respuestas	0	6	2	0	0	9	17
	% dentro de la categoría	0,00	18,75	5,71	0,00	0,00	69,23	20,00
Total	Respuestas	3	32	35	2	0	13	85
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100	100,00	0,00	100,00	100,00

Tabla VII. 31. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos. Por cursos

[16] Hacemos constar que en el momento en el que se pasó la prueba, los estudiantes de 6º curso estaban estudiando un tema de geometría, lo que pudo influir en estos resultados.

Visualizamos las frecuencias absolutas de la Tabla VII.31, en la Figura VII.49, donde encontramos que en primer curso los estudiantes no generan problemas multiplicativos de las categorías grupos iguales de cuotición y partición, comparación, combinación y producto de medidas. En segundo curso, no han aparecido invenciones correspondientes al tipo de grupos iguales de cuotición, comparación, combinación y producto medida. En tercer curso los estudiantes tampoco proponen problemas de grupos iguales de cuotición, combinación y producto de medidas. De cuarto curso, no se recogen problemas de combinación ni de producto de medidas. En quinto curso, los estudiantes no utilizan en sus producciones multiplicativas el significado de comparación ni de combinación. En sexto curso, no se presentan en los problemas inventados, las categorías semánticas de grupos iguales de cuotición, comparación y combinación.

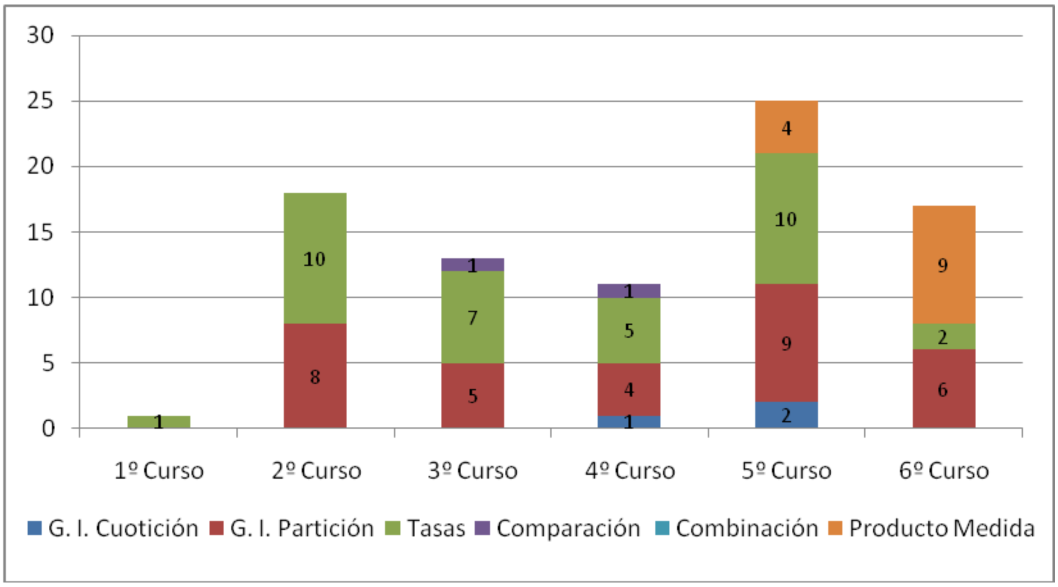


Figura VII.49. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos. Frecuencias por curso.

En la Figura VII.50 se muestra la distribución según la estructura semántica de los problemas multiplicativos inventados, por curso. Se observa que a superior curso mayor es la variabilidad de las opciones semánticas utilizadas. Los problemas de tasas están presentes en las producciones de todos los cursos educativos, siendo exclusivos en los del primer curso. En segundo curso, también aparece un número importante de problemas de partición. Los problemas de cuotición los proporcionan estudiantes de cuarto y quinto curso. Los de comparación los proporcionan estudiantes de tercer y cuarto curso. Los de producto de medidas surgen en los dos últimos cursos con una alta presencia en sexto.

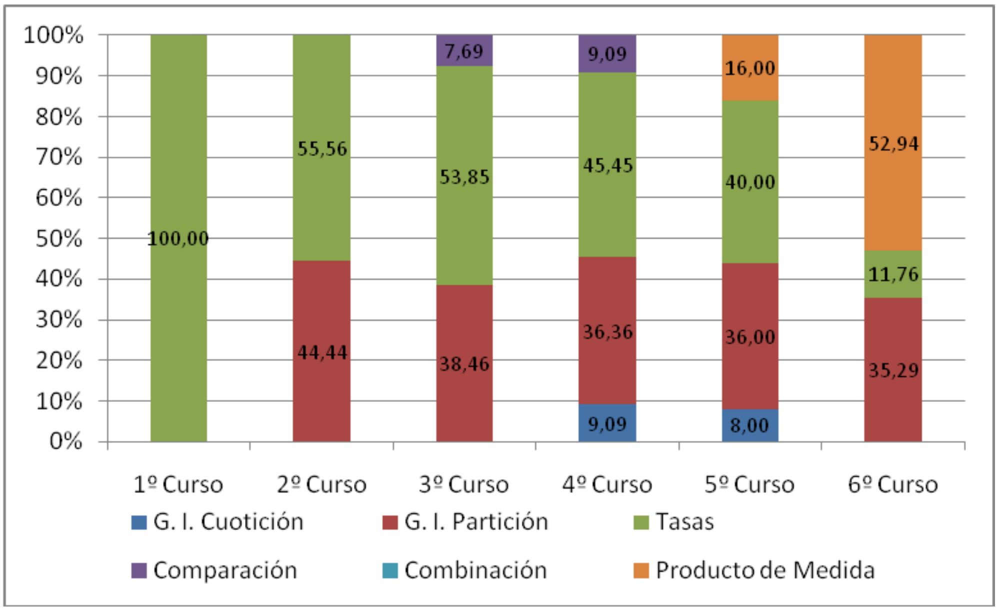


Figura VII.50. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos. Porcentajes por curso.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

Análisis por ciclos

Los problemas de tasas aparecen casi equitativamente en los tres ciclos educativos. Los problemas con estructura semántica de cuotición y partición se plantearon en mayor porcentaje por alumnos de segundo y tercer ciclo, en comparación con el resto de las estructuras semánticas que apenas estuvo presente en planteamiento alguno (Tabla VII.32 obtenida a partir de la Tabla C.45 del Anexo C).

		G. I. Cuotición	**G. I. Partición**	**Tasas**	**Comparación**	**Combinación**	**Producto Medida**	**Total**
Ciclo 1	Respuestas	0	8	11	0	0	0	19
	% dentro de la categoría	0,00	25,00	31,43	0,00	0,00	0,00	22,35
Ciclo 2	Respuestas	1	9	12	2	0	0	24
	% dentro de la categoría	33,33	28,13	34,29	100,00	0,00	0,00	28,24
Ciclo 3	Respuestas	2,00	15,00	12,00	,00	,00	13,00	42,00
	% dentro de la categoría	66,67	46,88	34,29	0,00	0,00	100,00	49,41
Total	Respuestas	3	32	35	2	0	13	85
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	0,00	100,00	100,00

Tabla VII. 32. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos. Por ciclo.

Los problemas de tasas los proporcionan, casi equitativamente, estudiantes de los tres ciclos educativos. Los problemas con estructura semántica de cuotición y partición se plantearon en mayor porcentaje por alumnos de segundo y tercer ciclo, el resto de las estructuras semánticas apenas aparecen en los planteamiento de los estudiantes (Tabla VII.32 obtenida a partir de la Tabla C.45 del Anexo C).

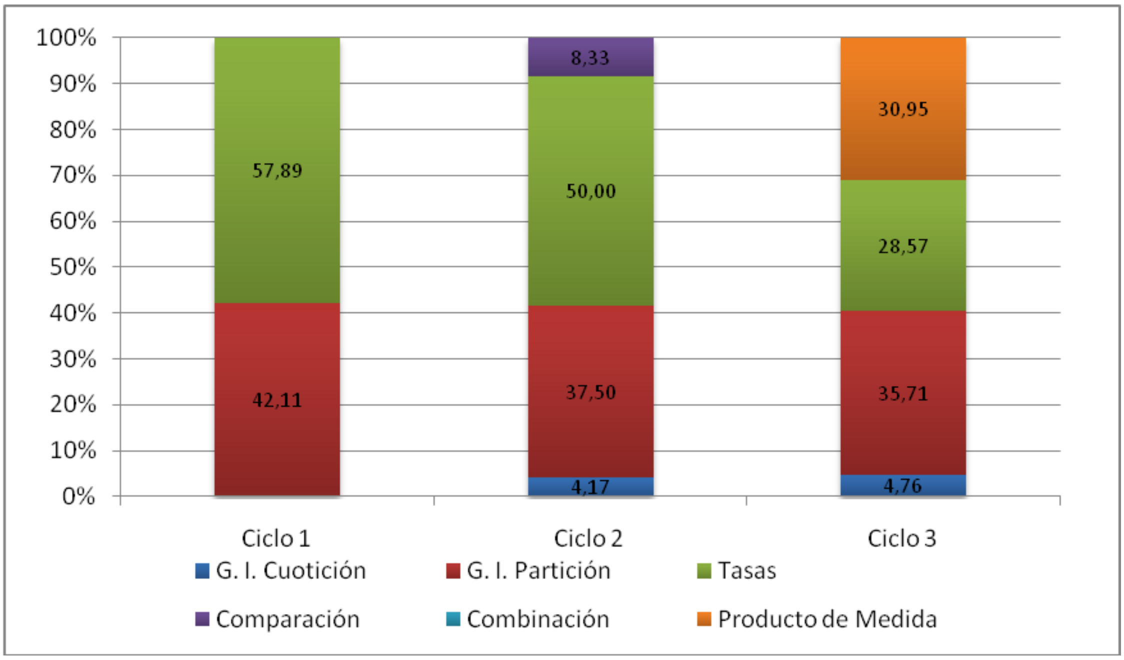


Figura VII.51. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos. Porcentajes por ciclo.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

VII.2.6.2.1. Estructura semántica y número de pasos de los problemas multiplicativos

De forma análoga a como se hizo en el apartado IV.2.6.1.1, estudiamos los tipos de problemas multiplicativos que han inventado los estudiantes atendiendo al número de pasos y las categorías semánticas que tienen los enunciados. Lo hacemos en primer lugar por cursos y, posteriormente, por ciclos.

A. Estructura semántica de los problemas multiplicativos simples

En el Anexo C, la Tabla C.46 contiene los resultados alcanzados una vez se realizó el análisis estadístico de los datos sobre las categorías semánticas de los problemas multiplicativos simples. Estos resultados nos permitieron elaborar la Tabla VII.33 que muestra los datos obtenidos de cada uno de los cursos. En ella aparecen frecuencias absolutas por cursos y porcentajes dentro de cada una de las categorías consideradas.

Aproximadamente, la mitad de los problemas inventados por los alumnos son de estructura multiplicativa y simples, pertenecen a las categorías de tasas; le siguen los problemas de grupos iguales, tipo partición. Los problemas multiplicativos de grupos iguales de tipos cuotición y comparación aparecen escasamente y los problemas de combinación no tienen ninguna representación (Tabla VII.33).

Análisis por cursos

La distribución de los distintos tipos de problemas respecto a la semántica usada por los estudiantes en problemas multiplicativos simples muestra que los mismos se concentran en los tipos de tasas y partición. Sobre los problemas de tasas, se observa un mayor porcentaje procedente de estudiantes de cuarto curso frente a los de partición, los problemas del tipo partición tiene mayor representatividad en las producciones que proceden de estudiantes de quinto curso que los de tasas (Tabla VII. 33).

		G. I. Cuotición	**G. I. Partición**	**Tasas**	**Comparación**	**Combinación**	**Producto Medida**	**Total**
1º Curso	Respuestas	0	0	1	0	0	0	1
	% dentro de la categoría	0,00	0,00	3,70	0,00	0,00	0,00	1,52
2º Curso	Respuestas	0	8	9	0	0	0	17
	% dentro de la categoría	0,00	34,78	33,33	0,00	0,00	0,00	25,76
3º Curso	Respuestas	0	4	5	1	0	0	10
	% dentro de la categoría	0,00	17,39	18,52	50,00	0,00	0,00	15,15
4º Curso	Respuestas	1	2	4	1	0	0	8
	% dentro de la categoría	33,33	8,70	14,81	50,00	0,00	0,00	12,12
5º Curso	Respuestas	2	7	7	0	0	4	20
	% dentro de la categoría	66,67	30,43	25,93	0,00	0,00	36,36	30,30
6º Curso	Respuestas	0	2	1	0	0	7	10
	% dentro de la categoría	0,00	8,70	3,70	0,00	0,00	63,64	15,15
Total	Respuestas	3	23	27	2	0	11	66
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	0,00	100,00	100,00

Tabla VII. 33. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos simples. Por curso.

Las frecuencias absolutas referidas a la estructura semántica de los problemas multiplicativos simples, por cursos, se ilustran en la Figura VII.52. En ella se ve que los estudiantes no inventan problemas que presenten las siguientes categorías semánticas: grupos iguales de cuotición, grupos iguales de partición, comparación, combinación y producto medida en primer curso; grupos iguales de cuotición, comparación, combinación y producto medida en segundo curso; grupos iguales de cuotición, combinación y producto medida en tercero; combinación y producto medida en cuarto; comparación y combinación en quinto; y grupos iguales de cuotición, comparación y combinación en sexto.

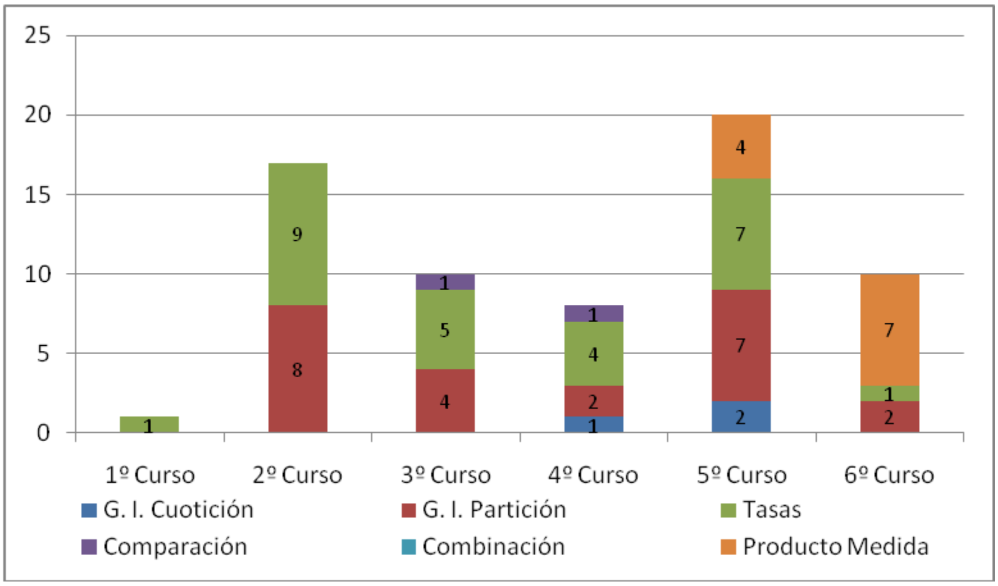


Figura VII.52. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos simples. Frecuencias absolutas por curso.

La Figura VII.53 permite comparar los porcentajes de cada tipo de problemas debido a su estructura semántica dentro de cada curso. Se puede observar que en cuarto y quinto curso se utiliza una mayor variedad de tipos de problemas. También se observa como el producto de medidas es el más usado en alumnos de sexto curso, que los alumnos de curso inferior a quinto no proporcionan ningún enunciado considerado de este tipo y que los problemas de combinación, solo aparecen en cuarto y quinto curso.

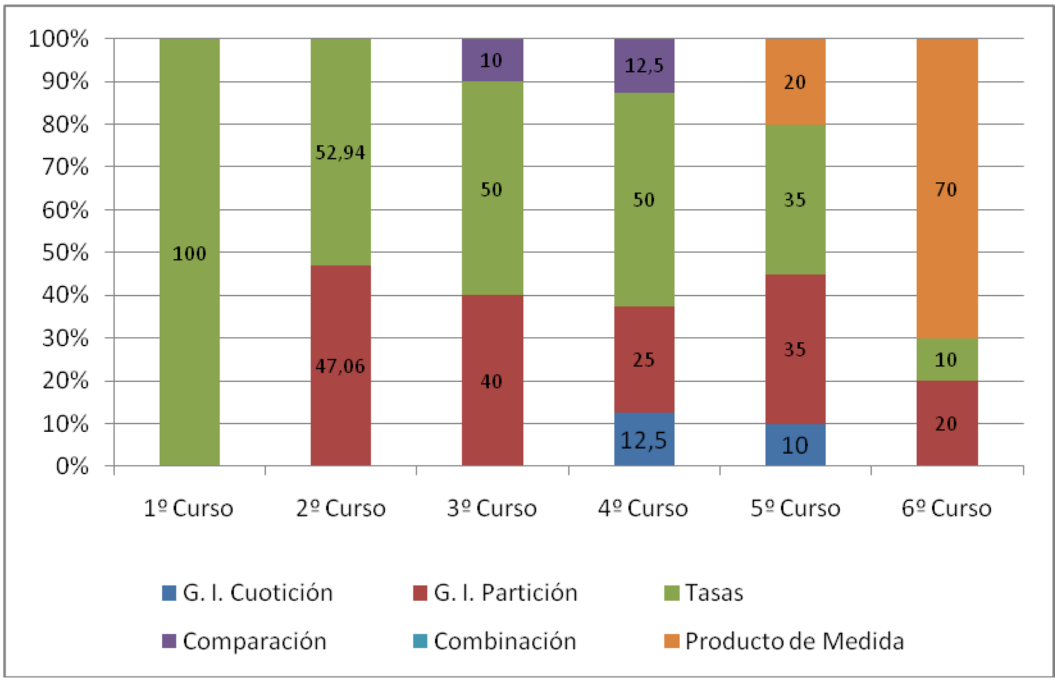


Figura VII.53. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos simples. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Las tres estructuras semánticas con más representación, dentro de los tres ciclos, son partición, tasas y producto de medidas (Tabla VII.34 consecuencia de la Tabla C.47 del Anexo C), el resto aparece de forma testimonial y el tipo comparación no aparece. El producto de medidas solo fue utilizado por alumnos de tercer ciclo. Los problemas de cuotición no aparecen en primer ciclo.

		G. I. Cuotición	G. I. Partición	Tasas	Comparación	Combinación	Producto Medida	Total
Ciclo 1	Respuestas	0	8	10	0	0	0	18
	% dentro de la categoría	0,00	34,78	37,04	0,00	0,00	0,00	27,27
Ciclo 2	Respuestas	1	6	9	2	0	0	18
	% dentro de la categoría	33,33	26,09	33,33	100,00	0,00	0,00	27,27
Ciclo 3	Respuestas	2,00	9,00	8,00	,00	,00	11,00	30,00
	% dentro de la categoría	66,67	39,13	29,63	0,00	0,00	100,00	45,45
Total	Respuestas	3	23	27	2	0	11	66
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,0 0	100,00	0,00	100,00	100,00

Tabla VII. 34. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos simples. Por ciclos.

Se observa que en segundo y tercer ciclo existe mayor variación en el uso de los distintos tipos semánticos, en comparación con primer ciclo donde prácticamente la mitad de los problemas son de tipo partición y la otra mitad de tipo tasas (Figura VII.54). Aproximadamente, el mismo porcentaje de problemas, procedentes de estudiantes de segundo y tercer ciclo, son de cuotición y de partición.

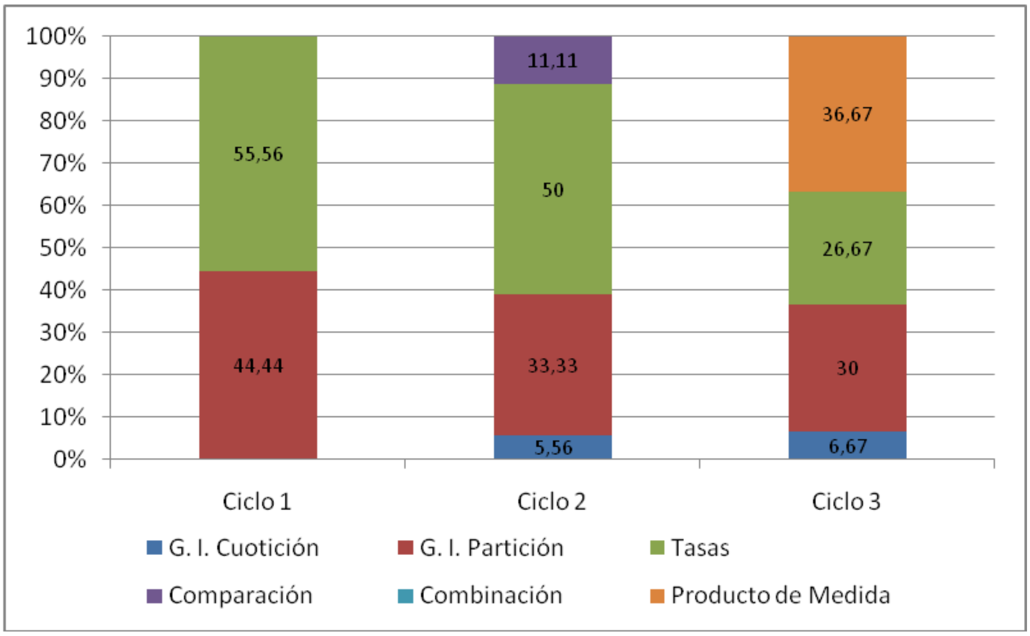


Figura VII.54. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos simples. Porcentajes por ciclo.

B. Estructura semántica de los problemas multiplicativos compuestos

La Tabla VII.35 recoge las frecuencias absolutas y los porcentajes de las categorías semánticas de los problemas multiplicativos compuestos. Estos datos fueron generados al realizar el estudio estadístico sobre las categorías consideradas en este epígrafe y se presentan en la Tabla C.48 correspondiente al Anexo C.

En cuanto a los problemas multiplicativos compuestos, la mitad corresponde a la categoría de grupos iguales, tipos partición y tasas. Los problemas multiplicativos de producto de medidas aparecen en dos casos y las categorías de grupos iguales de tipos cuotición, combinación y comparación no tienen ninguna representación (Tabla VII.35).

Análisis por cursos

Solo han aparecido 19 casos de problemas de estructura multiplicativa compuestos. La estructura semántica más utilizada, de nuevo, fue la de partición y tasas, solo en 2 ocasiones el problema proporcionado es del tipo producto de medidas. (Tabla VII. 35).

		G. I. Cuotición	G. I. Partición	Tasas	Comparación	Combinación	Producto Medida	Total
1º Curso	Respuestas	0	0	0	0	0	0	0
	% dentro de la categoría	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2º Curso	Respuestas	0	0	1	0	0	0	1
	% dentro de la categoría	0,00	0,00	12,50	0,00	0,00	0,00	5,26
3º Curso	Respuestas	0	1	2	0	0	0	3
	% dentro de la categoría	0,00	11,11	25,00	0,00	0,00	0,00	15,79
4º Curso	Respuestas	0	2	1	0	0	0	3
	% dentro de la categoría	0,00	22,22	12,50	0,00	0,00	0,00	15,79
5º Curso	Respuestas	0	2	3	0	0	0	5
	% dentro de la categoría	0,00	22,22	37,50	0,00	0,00	0,00	26,32
6º Curso	Respuestas	0	4	1	0	0	2	7
	% dentro de la categoría	0,00	44,44	12,50	0,00	0,00	100,00	36,84
Total	Respuestas	0	9	8	0	0	2	19
	% dentro de la categoría	0,00	100,00	100,00	0,00	0,00	100,00	100,00

Tabla VII. 35. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos compuestos. Por cursos

Como en epígrafes anteriores visualizamos las frecuencias absolutas de la Tabla VII.35 mediante la Figura VII.55. Observamos que en primer curso los estudiantes no inventaron problemas multiplicativos compuestos. En segundo curso, solo se presentan problemas multiplicativos de tasas. En tercero, cuarto y quinto curso las invenciones de los alumnos son de los tipos tasas y grupos iguales de partición. En sexto curso aparecen problemas de los tipos de tasas, grupos iguales de partición y de producto de medida.

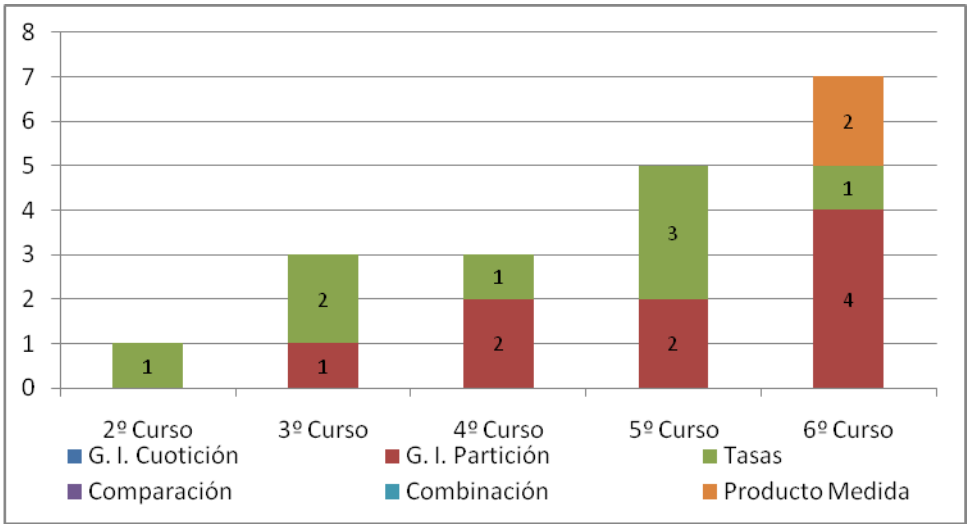


Figura VII.55. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos compuestos Frecuencias absolutas por curso.

En primer curso no encontramos problemas multiplicativos compuestos, por este motivo no aparece en la Figura VII.56 que recoge los porcentajes de las categorías semánticas multiplicativas de los problemas compuestos por curso. El único curso del cual aparecieren problemas de cada una de las tres estructuras semánticas mencionadas fue sexto, donde poco más del 50% de los alumnos utilizaron partición, y en segundo curso solo se inventaron problemas de tasas (Figura VII.56). El porcentaje de problemas de los tipos tasas y partición, es similar en tercer y quinto curso, con predominio de los problemas de tasas. Esta relación se invierte en cuarto curso.

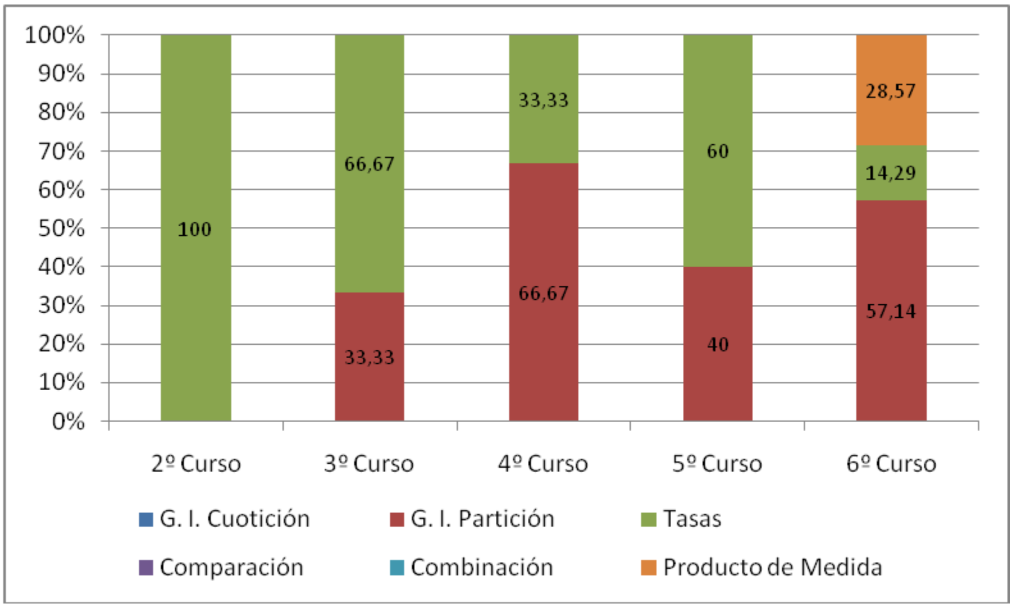


Figura VII.56. Distribución por curso de las categorías semánticas de los problemas multiplicativos compuestos.

Análisis por ciclos

El mayor número de problemas de estructura multiplicativa compuestos, fue inventado por alumnos de tercer ciclo. Solo un alumno de primer ciclo propuso un problema multiplicativo compuesto (Tabla VII.36 obtenida a partir de la Tabla C.49 del Anexo C). La mitad de los alumnos de segundo ciclo proponen problemas del tipo tasas y la otra mitad del tipo partición. En tercer ciclo, dos alumnos propusieron un problema cada uno del tipo producto de medida (Figura VII. 57).

		G. I. Cuotición	G. I. Partición	Tasas	Comparación	Combinación	Producto Medida	Total
Ciclo 1	Respuestas	0	0	1	0	0	0	1
	% dentro de la categoría	0,00	0,00	12,50	0,00	0,00	0,00	5,26
Ciclo 2	Respuestas	0	3	3	0	0	0	6
	% dentro de la categoría	0,00	33,33	37,50	0,00	0,00	0,00	31,58
Ciclo 3	Respuestas	0	6	4	0	0	2	12
	% dentro de la categoría	0,00	66,67	50,00	0,00	0,00	100,00	63,16
Total	Respuestas	0	9	8	0	0	2	19
	% dentro de la categoría	0,00	100,00	100,00	0,00	0,00	100,00	100,00

Tabla VII. 36. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos compuestos. Por ciclo.

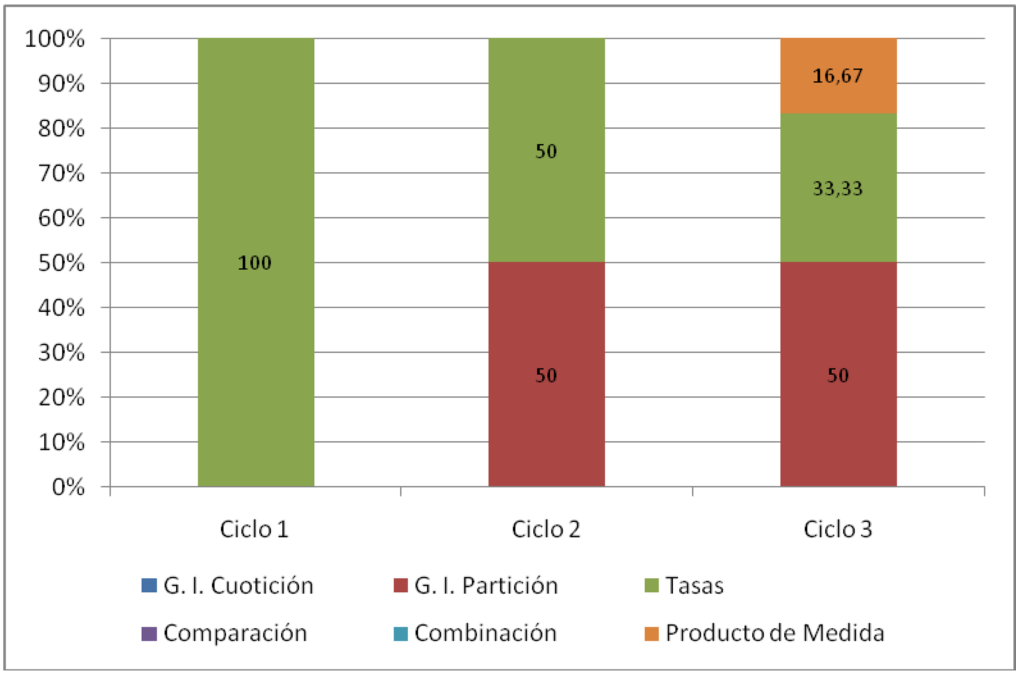


Figura VII.57. Categorías semánticas de los problemas multiplicativos compuestos. Porcentajes por ciclo.

C. Resumiendo

En la Tabla VII.37 se recogen las relaciones entre las categorías semánticas multiplicativas y el número de pasos de los problemas, independientemente del curso en el que se produjeron. Los datos de dicha tabla los genera la Tabla de contingencia C.50, recogida en el Anexo C. En la Tabla VII.37 se observa que aparece un mayor porcentaje de problemas compuestos con estructuras semánticas de partición (37,65%) y tasas (41,18%) y menor porcentaje cuando se trata de producto de medidas (15,30%). Más del 70% de los problemas clasificados en estas categorías son simples, observándose una distribución homogénea en las categorías de este tipo de problemas. En ningún caso se inventaron problemas compuestos de comparación, combinación y cuotición.

Tipo de problema		**Semántica multiplicativa**						
		G. I. Cuotición	G. I. Partición	Tasas	Comparación	Combinación	Producto de Medida	Total
Compuesto	Respuestas	0	9	8	0	0	2	19
	% dentro de la categoría	0,00	28,13	22,86	0,00	0,00	15,38	22,35
Simple	Respuestas	3	23	27	2	0	11	66
	% dentro de la categoría	100,00	71,88	77,14	100,00	0,00	84,62	77,65
Total	Respuestas	3	32	35	2	0	13	85
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	0,00	100,00	100,00

Tabla VII. 37. Problemas multiplicativos simples y compuestos según su categoría semántica.

La siguiente figura refleja las frecuencias absolutas correspondientes a las relaciones entre las categorías semánticas multiplicativas y el número de pasos de los problemas, sin tener en cuenta el curso en el que se inventaron. Se observa que los problemas simples presentan más categorías semánticas que los compuestos aunque en ambos tipos no están recogidas todas las categorías posibles. En los problemas simples, ningún enunciado es del tipo combinación y entre los compuestos solo aparecen los tipos de problemas grupos iguales de partición, tasas y producto de medidas (Figura VII.58).

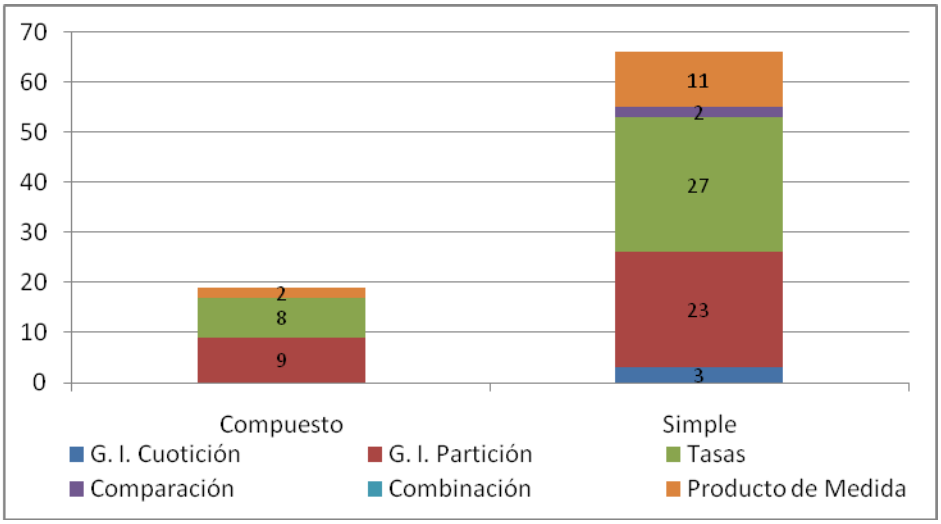


Figura VII.58. Problemas multiplicativos simples y compuestos según su categoría semántica. Frecuencias absolutas.

La Figura VII.59 muestra la distribución de los distintos tipos de problemas multiplicativos según el número de pasos y la categoría semántica utilizada. Al igual que para los aditivos, en los multiplicativos se observa mayor variación de las respuestas en cuanto a los tipos de semánticas cuando el problema es simple. Se observa que un pequeño porcentaje de problemas simples son de comparación y de cuotición (aproximadamente un 4%). Estas categorías semánticas no aparecen cuando los problemas propuestos son compuestos.

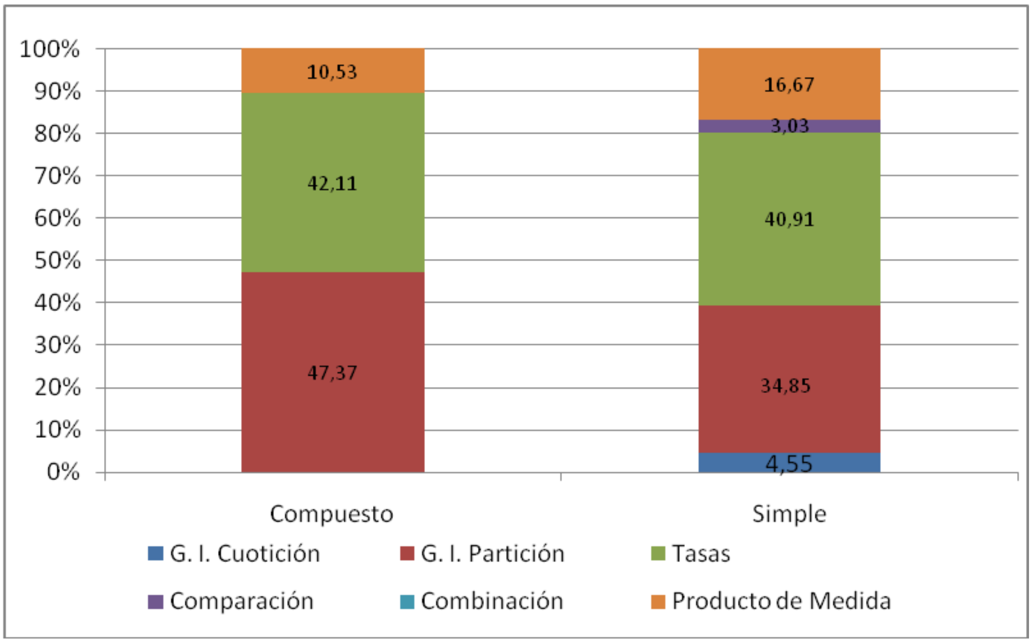


Figura VII.59. Porcentajes de las categorías semánticas de los problemas multiplicativos simples y compuestos.

VII.2.6.3. Estructura semántica de los problemas aditivo-multiplicativos

Considerando los problemas clasificados en aditivos y multiplicativos, analizamos la distribución de estos problemas categorizados por la estructura semántica que presentan, por curso y por ciclo. Hacemos el análisis por cursos y ciclos como en epígrafes anteriores, a partir de los datos sobre las variables semánticas consideradas. Estos datos que se recogen en la Tabla C.51 dentro del Anexo C, generan la Tabla VII.38 que presenta la distribución de las frecuencias absolutas por cursos y de los porcentajes dentro de cada una de las categorías.

Análisis por cursos

Es a partir de segundo curso cuando los alumnos inventan problemas donde se conjugan las dos estructuras operatorias, la aditiva y la multiplicativa. Ésta es la razón por la que ni en la Tabla VII.38 ni en las Figuras VII.60 y VII.61 aparecen datos del primer curso.

Más de la mitad de las producciones en las que aparecen las estructuras aditiva y multiplicativa corresponden a estudiantes de quinto curso, seguidos por los de cuarto y sexto curso. En la parte aditiva la categoría de combinación es la que predomina y en la parte multiplicativa, en porcentajes casi idénticos, las de grupos iguales de partición y tasas.

Para la parte aditiva los tipos cambio y combinación están presentes en todos los cursos si bien en quinto curso predomina la categoría de cambio y en sexto la de combinación. La categoría de comparación aparece en dos problemas, proporcionados por un estudiante de tercero y otro de quinto. Respecto a la parte multiplicativa, las categorías de grupos iguales de partición y de tasas se presentan en todos los cursos predominando las dos en quinto curso. En ningún curso se utiliza el significado de combinación para la estructura multiplicativa. Dos alumnos inventan problemas de tantos por cientos, uno de tercero y otro de quinto curso.

		Cambio	**Combinación**	**Comparación**	**Igualación**	**G.I. Cuotición**	**G. I. Partición**	**Tasas**	**Compara-ción**	**Combina-ción**	**Producto Medidas**	**Porcen-tajes**	**Total**
2º Curso	Respuestas	5	6	0	0	0	5	5	1	0	0	0	22
	% dentro de la categoría	15,63	14,29	0,00	0,00	0,00	14,71	15,15	16,67	0,00	0,00	0,00	13,50
3º Curso	Respuestas	2	5	1	0	0	2	6	1	0	0	1	18
	% dentro de la categoría	6,25	11,90	50,00	0,00	0,00	5,88	18,18	16,67	0,00	0,00	50,00	11,04
4º Curso	Respuestas	9	9	0	0	0	9	8	0	0	0	0	35
	% dentro de la categoría	28,13	21,43	0,00	0,00	0,00	26,47	24,24	0,00	0,00	0,00	0,00	21,47
5º Curso	Respuestas	13	9	1	2	1	12	13	3	0	0	1	55
	% dentro de la categoría	40,63	21,43	50,00	100	100	35,29	39,39	50,00	0,00	0,00	50,00	33,74
6º Curso	Respuestas	3	13	0	0	0	6	1	1	0	9	0	33
	% dentro de la categoría	9,38	30,95	0,00	0,00	0,00	17,65	3,03	16,67	0,00	100,00	0,00	20,25
Total	Respuestas	32	42	2	2	1	34	33	6	0	9	2	163
	% dentro de la categoría	100	100	100	100	100	100	100	100	0,00	100	100	100

Tabla VII. 38. Categorías semánticas de los problemas aditivo- multiplicativos. Por cursos.

A partir de las frecuencias absolutas de esta tabla presentamos la Figura VII.60 que nos permite visualizar estos datos. Respecto a la parte aditiva de los problemas inventados, se aprecia que en segundo, cuarto y sexto curso solo aparecen los tipos cambio y combinación y en los cursos de tercero y quinto se añade a éstos el tipo comparación. En cuanto a la parte multiplicativa, en cuarto curso los estudiantes inventan problemas de los tipos grupos iguales de partición y de tasas. En segundo a estos tipos se añade el tipo comparación. En sexto a estas categorías se añade la de producto de medidas; en tercero no aparecen las categorías de grupos iguales de cuotición, ni de combinación ni de producto de medidas y en quinto curso están todas las categorías semánticas menos las de combinación y producto de medidas. (ver Figura VII.60).

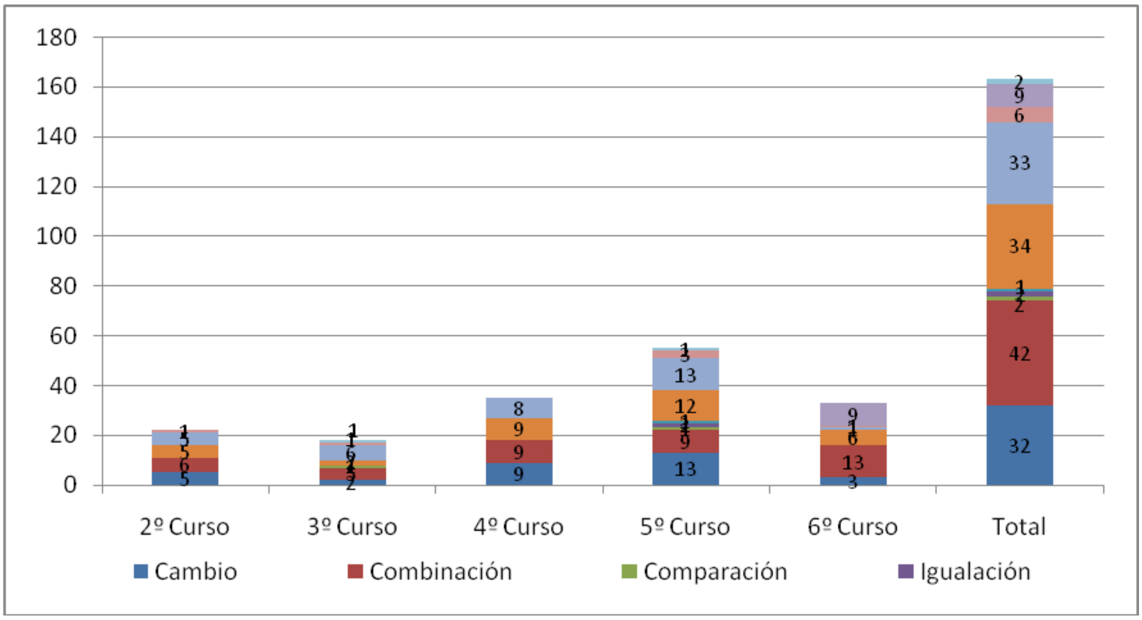


Figura VII.60. Categorías semánticas de los problemas aditivo- multiplicativos. Frecuencias por curso.

En la Figura VII.61 se observan las categorías semánticas de los problemas aditivo-multiplicativos inventados por los estudiantes de todos los cursos. En dicha figura se aprecia que en quinto curso aparece más variedad de tipos de dichos problemas.

En esta figura se observa además que los estudiantes de segundo curso, al combinar las dos estructuras operatorias, utilizan en sus producciones las categorías de cambio y combinación para la parte aditiva y de partición, tasas y comparación para la multiplicativa, casi en el mismo porcentaje. En segundo y cuarto curso aparecen en la misma proporción las estructuras semánticas cambio, combinación, tasas y partición, siendo estos cursos donde la variabilidad de estructuras semánticas es inferior. En quinto curso es donde únicamente se recogen problemas de igualación para la estructura aditiva y de cuotición para la multiplicativa. Los problemas aditivo-multiplicativos donde está presente el uso de producto de medidas se producen sólo por estudiantes de sexto curso.

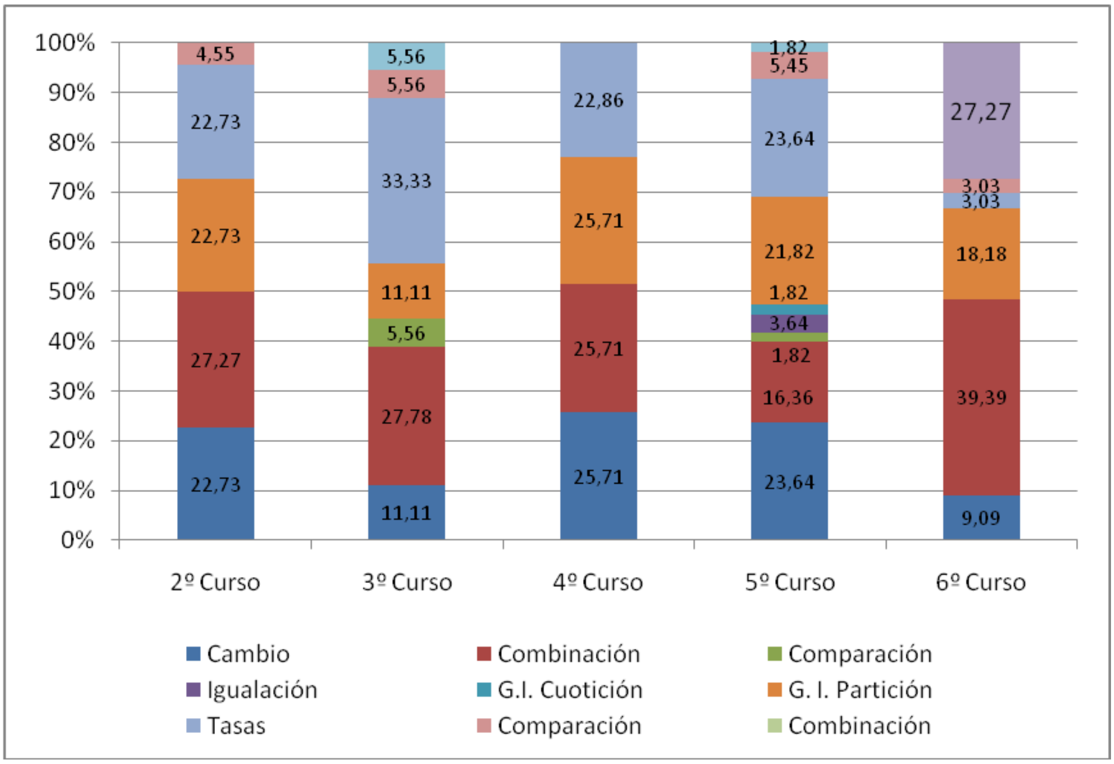


Figura VII.61. Categorías semánticas de los problemas aditivo- multiplicativos. Porcentajes por curso.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

Análisis por ciclos

En la Tabla VII.39 (procedente de la Tabla C.52 del Anexo C) están agrupados estos mismos datos por ciclos. En dicha tabla se observa que a medida que se avanza de ciclo aumenta el número de problemas aditivo-multiplicativos propuestos, correspondiendo más de la mitad a los enunciados por estudiantes de tercer ciclo. También se observa aumento en el porcentaje de problemas de cada ciclo dentro de las categorías aditivas de cambio y combinación y la categoría multiplicativa de partición. Los problemas del tipo igualación proceden de estudiantes de tercer ciclo y los dos de comparación, uno de segundo y otro de primer ciclo. La categoría tasa es menos frecuente en primer ciclo, con igual porcentaje en segundo y tercer ciclo, mientras que la de comparación es más frecuente en el último ciclo aportando casi un 70% de los problemas de esta estructura semántica.

		Cambio	**Combinación**	**Comparación**	**Igualación**	**G.I. Cuotición**	**G. I. Partición**	**Tasas**	**Comparación**	**Combinación**	**Producto Medidas**	**Porcentaje**	**Total**
1 ciclo	Respuestas	5	6	0	0	0	5	5	1	0	0	0	22
	% dentro de la categoría	15,63	14,29	0,00	0,00	0,00	14,71	15,15	16,67	0,00	0,00	0,00	13,50
2 ciclo	Respuestas	11	14	1	0	0	11	14	1	0	0	1	53
	% dentro de la categoría	34,38	33,33	50,00	0,00	0,00	32,35	42,42	16,67	0,00	0,00	50,00	32,52
3 ciclo	Respuestas	16	22	1	2	1	18	14	4	0	9	1	88
	% dentro de la categoría	50,00	52,38	50,00	100,00	100,00	52,94	42,42	66,67	0,00	100,00	50,00	53,99
Total	Respuestas	32	42	2	2	1	34	33	6	0	9	2	163
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	0,00	100,00	100,00	100

Tabla VII. 39. Categorías semánticas de los problemas aditivo- multiplicativos. Por ciclos

En la parte correspondiente a la estructura aditiva, los estudiantes de tercer ciclo son los que mayoritariamente proporcionan las cuatro categorías semánticas. Las categorías de cambio y combinación aparecen en problemas propuestos por estudiantes de los tres ciclos, la categoría de comparación, en los dos últimos ciclos y la de igualación solo en tercer ciclo.

Respecto a la parte multiplicativa, vuelven a ser los alumnos del último ciclo, de forma mayoritaria, quienes presentan en sus producciones todas las categorías semánticas excepto la de combinación que no se utiliza en toda la etapa educativa.

Como se observa en la Figura VII.62, a medida que se avanza de ciclo aumenta el número de categorías semánticas para los problemas en los que se combinan las dos estructuras operatorias.

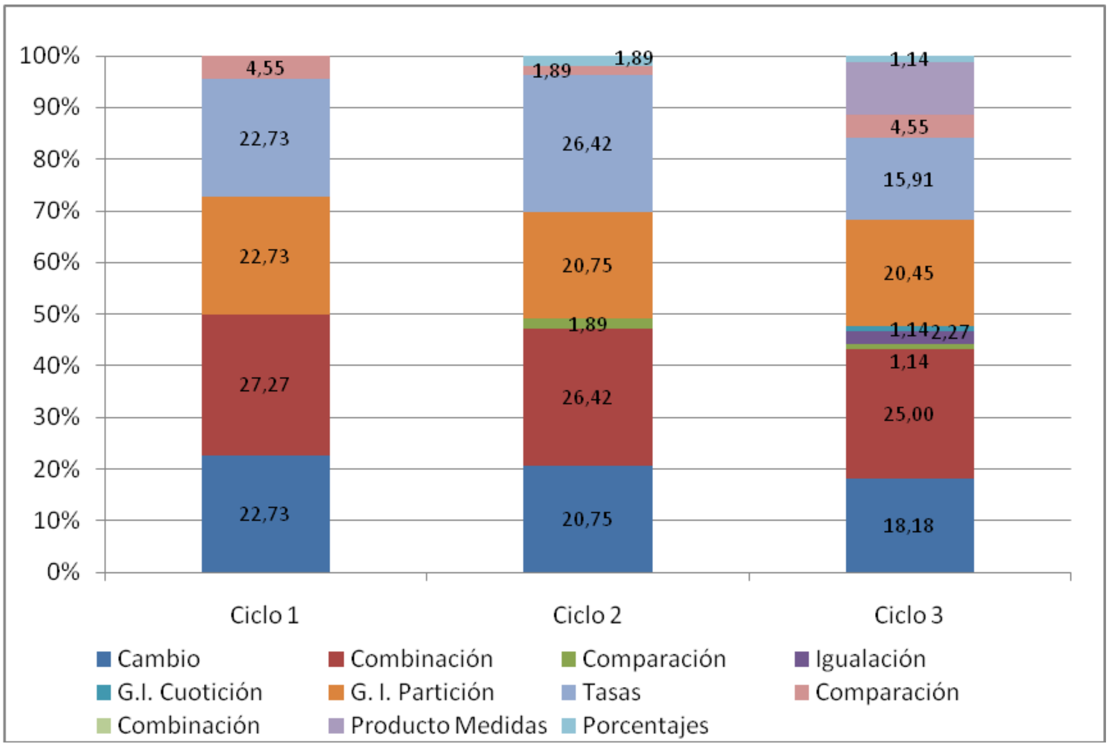


Figura VII.62. Categorías semánticas de los problemas aditivo- multiplicativos. Porcentajes por ciclo.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

VII.2.7. NÚMERO DE CIFRAS

A continuación presentamos el estudio hecho tomando como variables la magnitud de las cifras que utilizan los estudiantes en sus producciones. Hemos considerado tres categorías: a) aquellos producciones cuyos enunciados aparecen números de una sola cifra, b) los que utilizan cantidades donde el número de cifras más alto es dos y c) aquellos en los que aparecen números de más de dos cifras.

A partir de los datos recogidos en la Tabla C.53 que se encuentra en el Anexo C. se ha elaborado la Tabla VII.40 en la que aparecen las frecuencias absolutas por cursos y los porcentajes dentro de cada categoría.

Análisis por cursos

Los problemas en los que aparecen números de una sola cifra han sido poco frecuentes y aparecen en las producciones de todos los cursos con pequeñas diferencias en el porcentaje, si bien destaca algo la frecuencia del curso de segundo. Los problemas planteados en los que aparecen números de dos cifras son los más frecuentes, también en este caso es superior la aportación de datos procedentes del curso segundo. Los problemas planteados en los que intervienen números con más de dos cifras, también presentan un porcentaje alto, y corresponde mayoritariamente a alumnos de cuarto y quinto curso (Tabla VII.40).

		Cantidad de cifras usadas			**Total**
		1 cifra	**2 cifras**	**Más de 2 cifras**	
1º Curso	Recuento	7	23	8	38
	% dentro de la categoría	17,07	19,49	7,21	14,07
2º Curso	Recuento	10	30	22	62
	% dentro de la categoría	24,39	25,42	19,82	22,96
3º Curso	Recuento	4	9	16	29
	% dentro de la categoría	9,76	7,63	14,41	10,74
4º Curso	Recuento	6	17	28	51
	% dentro de la categoría	14,63	14,41	25,23	18,89
5º Curso	Recuento	7	22	30	59
	% dentro de la categoría	17,07	18,64	27,03	21,85
6º Curso	Recuento	7	17	7	31
	% dentro de la categoría	17,07	14,41	6,31	11,48
Total	Recuento	41	118	111	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 40. Magnitud de los datos de los enunciados. Por cursos

En todos los cursos se inventan enunciados que contienen números de una sola cifra, de dos cifras y de más de dos cifras, si bien la frecuencia en la que se presentan las tres categorías es variable. Esto se puede observar en la Figura VII.63 que visualiza la cantidad de cifras de cada tipo presentes en la Tabla VII.40.

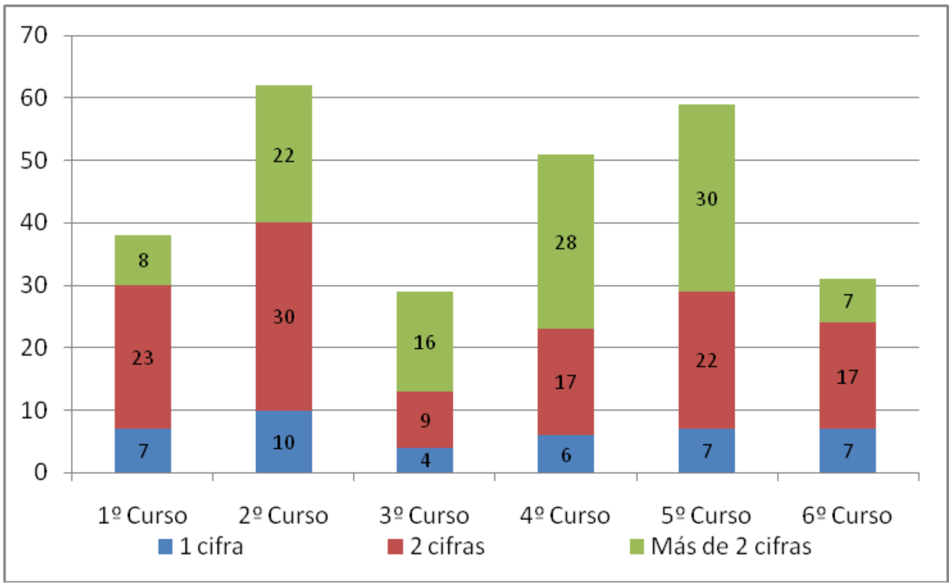


Figura VII.63. Magnitud de los datos de los enunciados. Frecuencias absolutas por curso.

En la Figura VII.64 se visualizan los porcentajes, por curso, de los diferentes tipos de problemas clasificados por número de cifras que presentan sus números. Se aprecia que los problemas planteados en los que aparecen números de más de dos cifras fueron más frecuentes en los cursos de tercero, cuarto y quinto con más del 50% de problemas planteados. En los cursos de primero, segundo y sexto, el uso de números de más de dos cifras fue inferior al 40%. Estas diferencias, entre cursos, respecto a la cantidad de cifras de los números de los problemas planteados fueron significativas, resultando la prueba estadística de la Chi-cuadrado igual a 20.70, con 10 grados de libertad y un p-valor igual a 0.023 (ver Tabla C.54 del Anexo C).

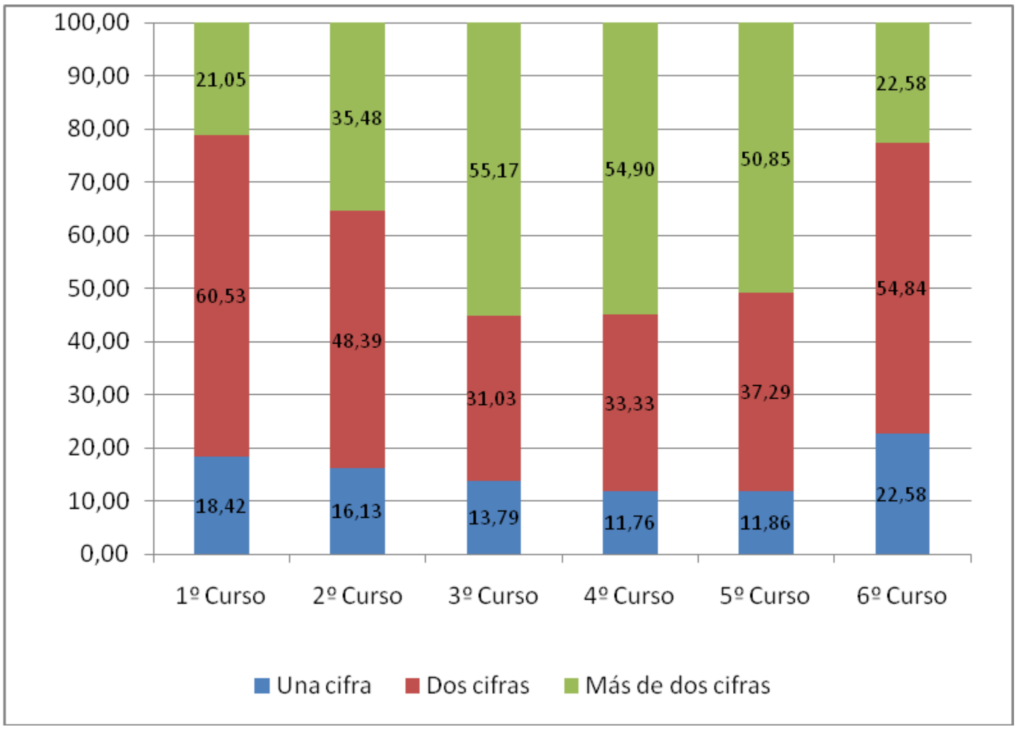


Figura VII.64. Magnitud de los datos de los enunciados. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

La Tabla VII.41 (procedente de la Tabla de contingencia C.55 del Anexo C) muestra la distribución, por ciclos, de los problemas proporcionados por los estudiantes, según la clasificación del número de cifras observadas. De los problemas planteados con una y con dos cifras, casi la mitad se plantean en primer ciclo y solo un 27% de problemas planteados en este ciclo tienen más de dos cifras. La distribución de problemas, según el número de cifras de sus números, fue similar en tercer ciclo.

		Cantidad de cifras usadas			Total
		1 cifra	**2 cifras**	**Más de 2 cifras**	
Ciclo 1	Recuento	17	53	30	100
	% dentro de la categoría	41,46	44,92	27,03	37,04
Ciclo 2	Recuento	10	26	44	80
	% dentro de la categoría	24,39	22,03	39,64	29,63
Ciclo 3	Recuento	14	39	37	90
	% dentro de la categoría	34,15	33,05	33,33	33,33
Total	Recuento	41	118	111	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 41. Magnitud de los datos de los enunciados. Por ciclos.

La Figura VII.65 muestra la distribución de problemas planteados clasificados en función de la cantidad de cifras usadas y el ciclo al que pertenecía el alumno que planteó el problema. Se observa que en segundo ciclo los alumnos tienden a plantear problemas con números de más de dos cifras a diferencia de lo que ocurre en primer y tercer ciclo. Diferencias que se encontraron significativas cuando se realizó la prueba de la Chi-cuadrado para comparar la distribución de frecuencias entre las categorías de número de cifras según el ciclo donde se plantea el problema (Chi-cuadrado=11.64, Gl=4, p-valor=0.020, ver Tabla C.56 del Anexo C).

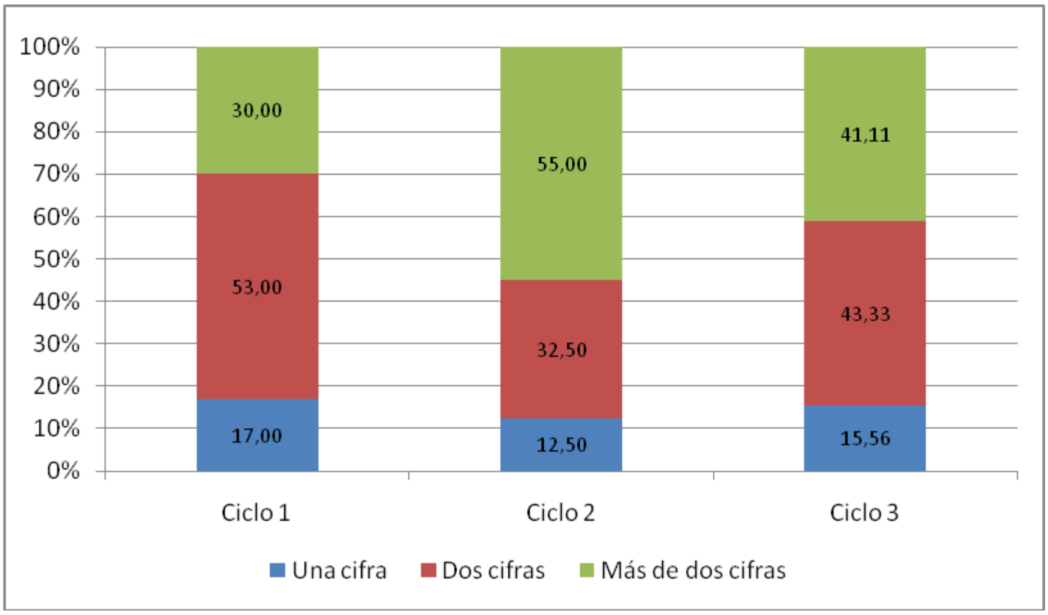


Figura VII.65. Distribución por ciclo de la magnitud de los datos de los enunciados.

VII.2.7.1 Análisis por el número de cifras según el número de pasos

Seguidamente analizamos los datos a partir de las producciones hechas por los estudiantes, independientemente del curso o ciclo. Los resultados de la Tabla de contingencia C.57 que se puede encontrar en el Anexo C. proporcionan los que se recogen en la Tabla VII.42 que contiene las frecuencias absolutas y los porcentajes dentro de cada una de las categorías consideradas.

Entre los problemas planteados simples un 63% de los presenta números de una cifra y un 47% son problemas simples con números de más de dos cifras. En la Tabla VII.42 se observa que, más de la mitad de los problemas con más de dos cifras son compuestos frente a un 36% de compuestos con dos cifras o una.

		Cantidad de cifras			**Total**
Tipo de problema		**Una cifra**	**Dos cifras**	**Más de dos cifras**	
Simple	Recuento	26	75	52	153
	% dentro de la categoría	63,41	63,56	46,85	56,67
Compuesto	Recuento	15	43	59	117
	% dentro de la categoría	36,59	36,44	53,15	43,33
Total	Recuento	41	118	111	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 42. Problemas simples y compuestas según el número de cifras

A partir de las frecuencias absolutas de la Tabla VII.42 obtenemos la Figura VII.66 la cual muestra que tanto en los problemas simples como en los compuestos se presentan la variable una cifra, dos cifras y más de dos cifras, aunque lo hacen con diferente de frecuencia.

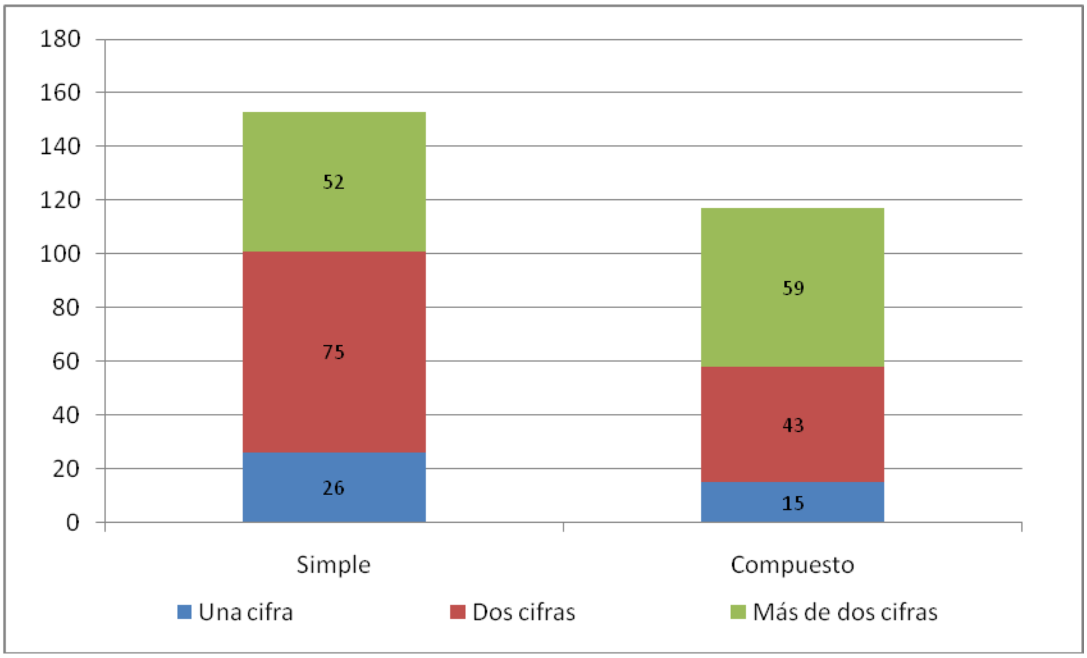


Figura VII.66. Problemas simples y compuestas según el número de cifras Frecuencias absolutas.

La Figura VII.67 muestra los porcentajes de problemas con una, dos y más de dos cifras según si son simples o compuestos. Se detectan diferencias significativas entre el número de cifras usadas según el tipo de problema según su número de pasos (compuesto o simple), así pues si el problema es compuesto hay mayor porcentaje con más de dos cifras que cuando el problema es simple (Chi-cuadrado=7.402, Gl=2, p-valor=0.025, ver Tabla C.58 del Anexo C).

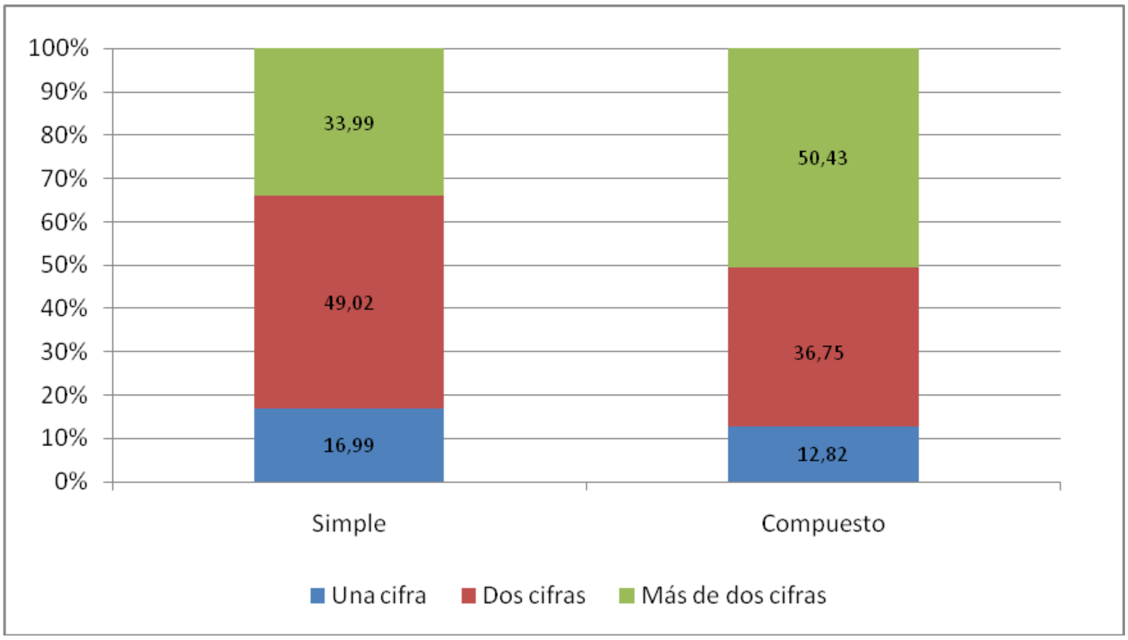


Figura VII.67. Porcentajes del número de cifras de los problemas simples y compuestos.

VII.2.8. CONJUNTO NUMÉRICO UTILIZADO EN LOS ENUNCIADOS

Un total de 224 de los 270 enunciados corresponden a problemas que contienen únicamente números naturales (82.96%), y un total de 46 enunciados presentan números racionales (17.03%: 6.3% fracciones y 10.74% decimales). De los racionales, un 36.95% de estos son fracciones y un 63.04% decimales. En las siguientes secciones se estudian el tipo de número usado en los enunciados por curso y ciclo. Este análisis es la consecuencia de la Tabla de contingencia C.59 (ver Anexo C).

Análisis por cursos

Del conjunto de enunciados en los que aparecen números naturales, un 20% lo han proporcionado estudiantes de cuarto curso y un 27% estudiantes de segundo curso, siendo éstas las aportaciones más altas y la de sexto curso (5,8%) la más baja. En primer y segundo curso no se plantean problemas en cuyo enunciado aparezcan números diferentes a los naturales. De los cursos quinto y sexto proceden los mayores porcentajes de enunciados de problemas en los que intervienen números decimales o fraccionarios, alcanzando, en estos cursos, una representación mínima los problemas donde el conjunto numérico utilizado es el de los números naturales (Tabla VII.43).

		Conjunto Numérico			
		Naturales	**Fracciones**	**Decimales**	**Total**
1º Curso	Respuestas	38	0	0	38
	% dentro de la categoría	16,96	0,00	0,00	14,07
2º Curso	Respuestas	61	0	0	61
	% dentro de la categoría	27,23	0,00	0,00	22,59
3º Curso	Respuestas	27	2	0	29
	% dentro de la categoría	12,05	11,76	0,00	10,74
4º Curso	Respuestas	45	1	6	52
	% dentro de la categoría	20,09	5,88	20,69	19,26
5º Curso	Respuestas	40	6	13	59
	% dentro de la categoría	17,86	35,29	44,83	21,85
6º Curso	Respuestas	13	8	10	31
	% dentro de la categoría	5,80	47,06	34,48	11,48
Total	Respuestas	224	17	29	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 43. Conjunto numérico utilizado. Por cursos

En la Figura VII.68 se visualizan las frecuencias absolutas recogidas en la tabla anterior. En ella vemos que en los cursos de primero y segundo, solo aparece la categoría *conjunto de números naturales*. En las invenciones de tercer curso encontramos números naturales y fraccionarios, y en el resto de los cursos se presentan las tres categorías repartidas con frecuencias variables. Se evidencia que el conjunto de los números naturales es el que predomina en todos los cursos.

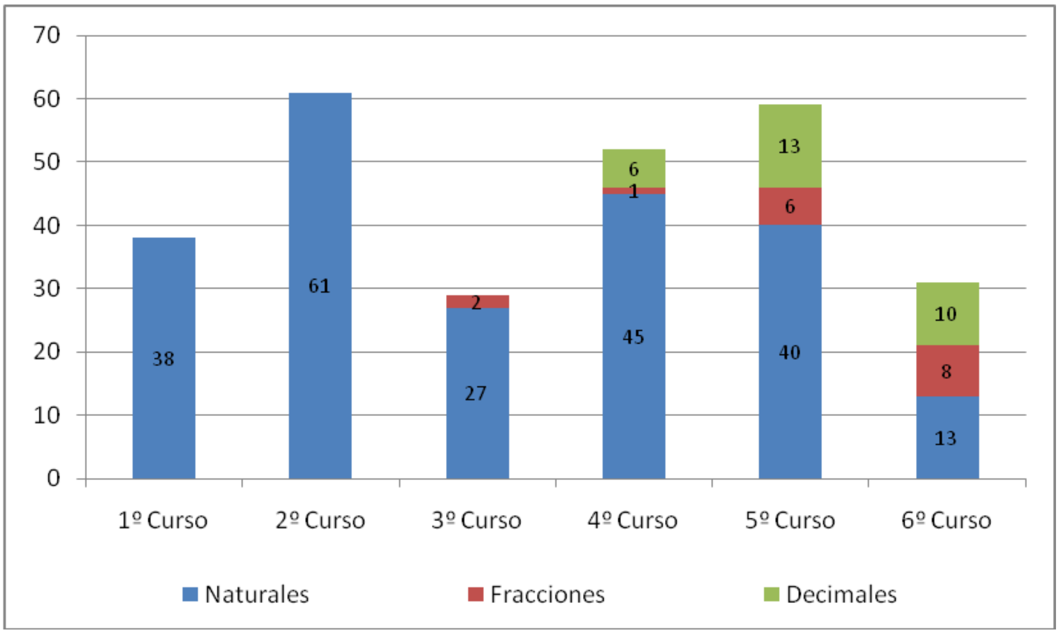


Figura VII.68. Conjunto numérico utilizado. Frecuencias absolutas por curso

La Figura VII.69 muestra los porcentajes de enunciados con números naturales, fraccionarios y decimales dentro de cada uno de los cursos analizados. Se observa cómo a partir del tercer curso el porcentaje de número racionales aumenta conforme incrementa el nivel del curso, llegando a ser más de la mitad de los problemas, en sexto curso.

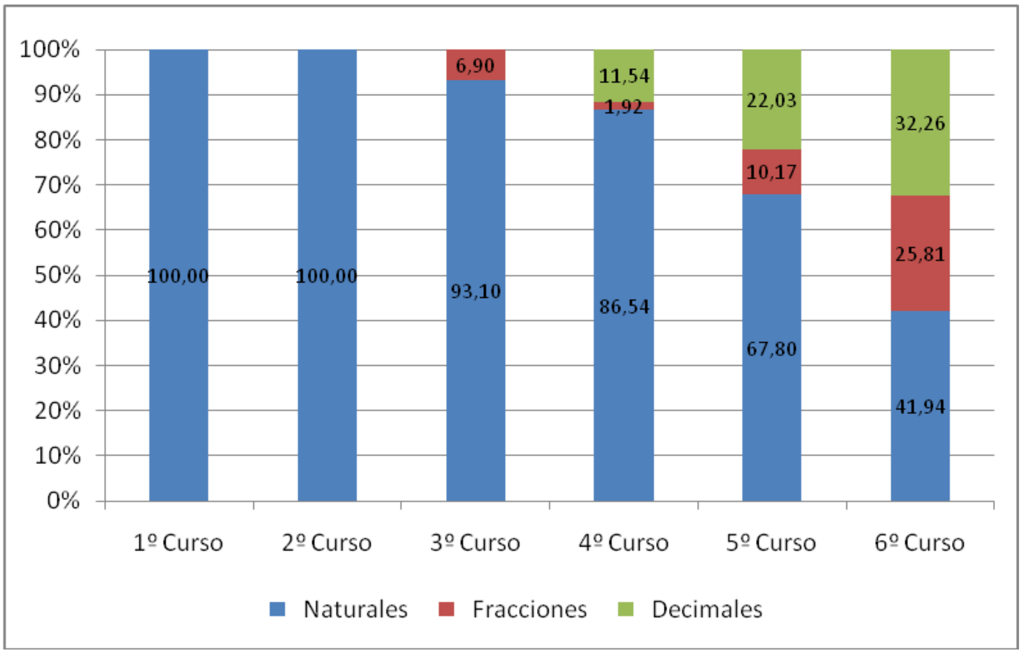


Figura VII.69. Conjunto numérico utilizado. Porcentajes por curso.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

Análisis por ciclos

Cuando se analiza el tipo de número empleado según el ciclo se observa la misma tendencia que por cursos: a mayor ciclo, mayor uso de enunciados numéricos racionales y menor uso de números naturales.

		Conjunto Numérico			
		Naturales	**Fracciones**	**Decimales**	**Total**
Ciclo 1	Respuestas	99	0	0	99
	% dentro de la categoría	44,20	0,00	0,00	36,67
Ciclo 2	Respuestas	72	3	6	81
	% dentro de la categoría	32,14	17,65	20,69	30,00
Ciclo 3	Respuestas	53	14	23	90
	% dentro de la categoría	23,66	82,35	79,31	33,33
Total	Respuestas	224	17	29	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 44. Conjunto numérico utilizado. Por ciclos

La Figura VII.70 muestra la tendencia por ciclo y se aprecia esa disminución del uso de números naturales en los enunciados conforme el ciclo es superior, de manera significativa (Chi-cuadrado 114.72, Gl=6, p-valor<0.0001, ver Tabla C.61 del Anexo C). En segundo y tercer ciclo también se observa un mayor uso de los decimales que de las fracciones dentro de los números racionales.

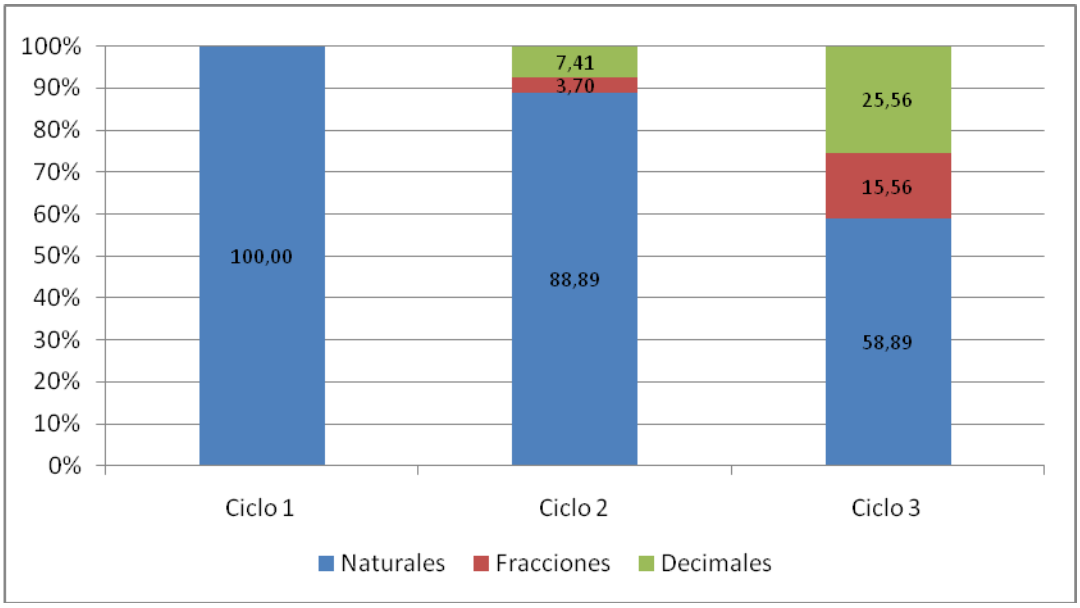


Figura VII.70. Conjunto numérico utilizado. Porcentajes por ciclo.

VII.2.8.1. Conjunto numérico y el número de pasos

En este apartado se estudian los datos obtenidos teniendo en cuenta los conjuntos numéricos a los que pertenecen los números que aparecen en el enunciado del problema y el número de pasos que se requieren para la resolución del mismo, independientemente del curso al que pertenecen los escolares que proporcionan los problemas. Los datos a partir de los que se genera la Tabla VII.45 están recogidos en la Tabla C.62 del Anexo C.

Clasificados los problemas según las variables señaladas se encuentra que un 58% de aquellos que presentan números naturales, son simples. Cuando en los problemas aparecen números decimales el porcentaje de enunciados simples casi duplica al de compuestos y cuando aparecen números fraccionarios se invierten los datos, aparecen más del doble de problemas compuestos que simples.

Del grupo de problemas en los que aparecen fracciones, más del 70% son compuestos, aproximadamente un 30% más que aquellos que siendo compuestos aparecen números naturales o decimales (Tabla VII.45).

		Conjunto numérico			
Tipo de problema		**Naturales**	**Fracciones**	**Decimales**	**Total**
Simple	Respuestas	130	5	18	153
	% dentro de la categoría	58,04	29,41	62,07	56,67
Compuesto	Respuestas	94	12	11	117
	% dentro de la categoría	41,96	70,59	37,93	43,33
Total	Respuestas	224	17	29	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 45Conjunto numérico de los problemas simples y compuestos

En la siguiente figura se visualizan las frecuencias absolutas anteriormente comentadas. Observamos que tanto en los problemas simples como en los compuestos se recogen enunciados que contienen los tres conjuntos numéricos, ahora bien, aunque no coincide la distribución de frecuencias absolutas, mayoritariamente se utiliza el conjunto de los números naturales. (ver Figura VII.71).

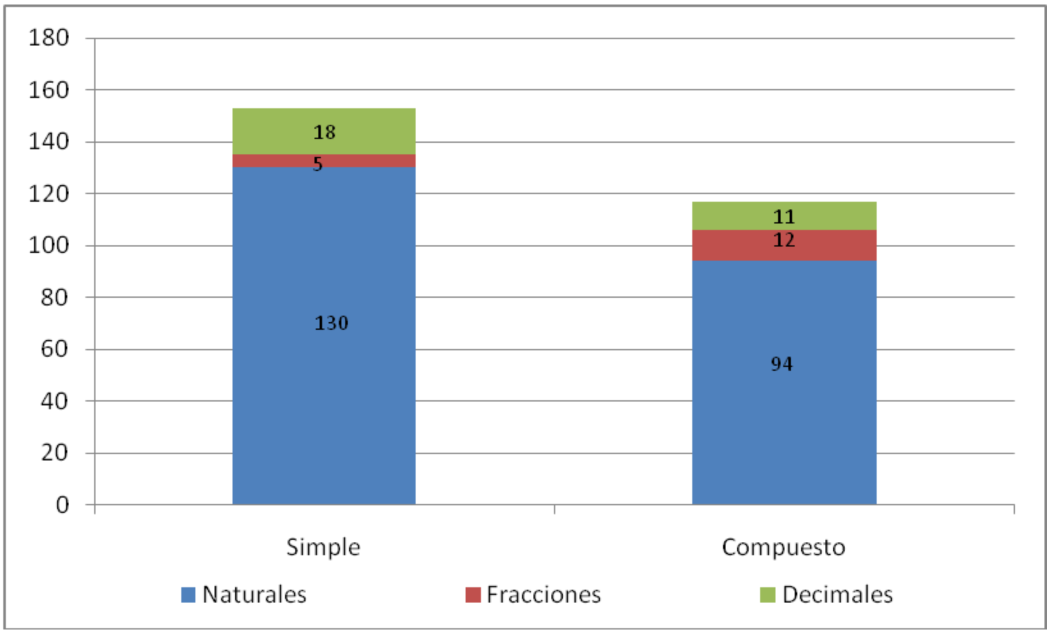


Figura VII.71. Conjunto numérico de los problemas simples y compuestos. Frecuencias absolutas.

En la Figura VII.72 se presentan los porcentajes de los problemas clasificados por el tipo de conjunto numérico según si el problema es compuesto o simple. Apenas se observan diferencias en el porcentaje de problemas con números naturales entre ambos casos. Sí parece existir una mayor diferencia entre los problemas compuestos y simples con respecto a si contienen fracciones. Es menos frecuente la aparición de fracciones en problemas simples que en compuestos. Sin embargo estas diferencias resultan ser no significativas estadísticamente ya que los resultados de la prueba estadística fueron los siguientes: Chi-cuadrado=7.105, Gl=3, p-valor=0.069 (ver Tabla C.63 del Anexo C). Estos resultados muestran no significación, por lo que las diferencias no son relevantes pero sí que al ser el p-valor tan próximo al límite de significación se podría hablar de tendencia a ser significativamente diferentes.

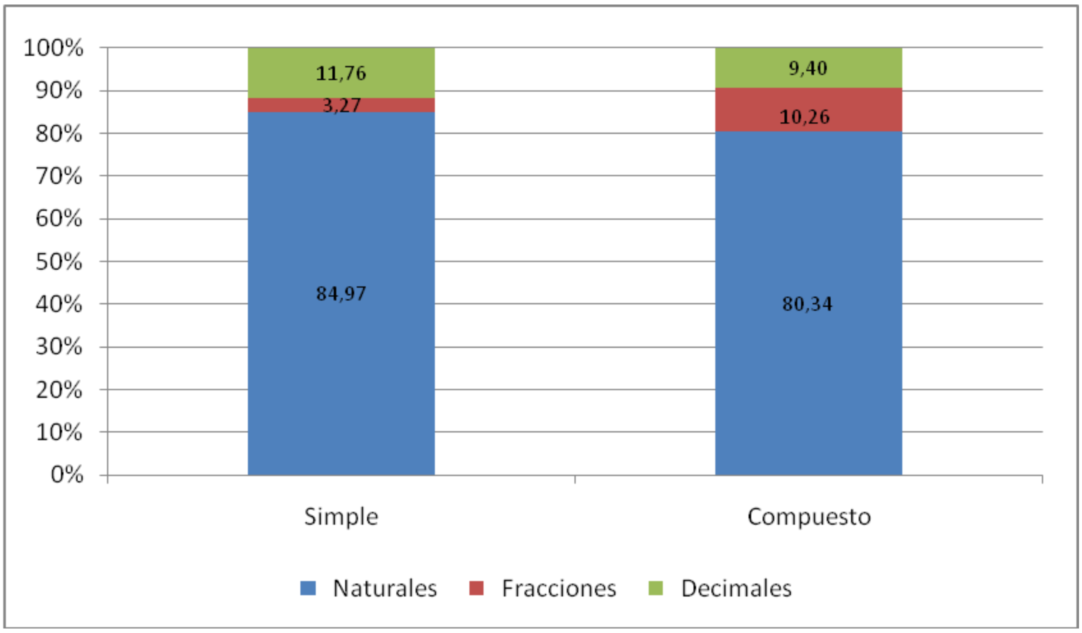


Figura VII.72. Porcentajes de los problemas simples y compuestos según el conjunto numérico.

VII.2.9. NÚMERO DE PREGUNTAS FORMULADAS

En este apartado estudiamos los enunciados inventados por los estudiantes, tomando como variable el número de preguntas que se formulan en ellos. Hacemos dos distinciones, los que contienen una sola pregunta y los que presentan más de una. Seguidamente analizamos los datos obtenidos por cursos y por ciclos. La Tabla C.64, recogida en el Anexo C, permitió elaborar posteriormente la Tabla VII.46 donde mostramos las frecuencias absolutas, por cursos, y los porcentajes correspondientes a cada una de las variables que se estudian a continuación.

Análisis por cursos

En la Tabla VII.46 se muestran los porcentajes de enunciados, por curso, según el número de preguntas realizadas en el enunciado. De las 270 invenciones realizadas, 249 presentan solo una pregunta en el enunciado. En todos los cursos, excepto en primero donde únicamente hay problemas en los que se formula una pregunta, son minoritarios los enunciados que contienen más de una cuestión. Es en estudiantes de quinto curso donde aparecen más enunciados en los que se han realizado al menos dos preguntas.

		Número de preguntas realizadas		Total
		Una	Más de una	
1º Curso	Recuento	38	0	38
	% dentro de la categoría	15,26	0,00	14,07
2º Curso	Recuento	58	4	62
	% dentro de la categoría	23,29	19,05	22,96
3º Curso	Recuento	27	2	29
	% dentro de la categoría	10,84	9,52	10,74
4º Curso	Recuento	47	4	51
	% dentro de la categoría	18,88	19,05	18,89
5º Curso	Recuento	50	9	59
	% dentro de la categoría	20,08	42,86	21,85
6º Curso	Recuento	29	2	31
	% dentro de la categoría	11,65	9,52	11,48
Total	Recuento	249	21	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 46. Número de preguntas formuladas. Por curso.

La Figura VII.73, muestra la frecuencia de enunciados que presentan una o más preguntas. En dicha figura se percibe que en primer curso los estudiantes no formulan enunciados que contengan más de una pregunta. Desde segundo curso aparecen enunciados donde se formulan más de una pregunta. En todos los cursos prevalecen los problemas que contienen una única pregunta.

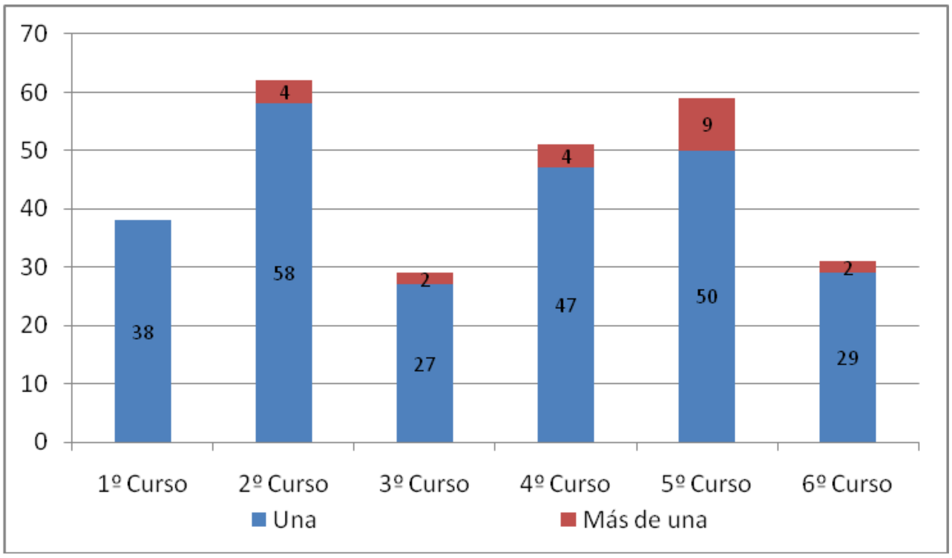


Figura VII.73. Número de preguntas formuladas. Frecuencias absolutas por curso.

La Figura VII.74 muestra los porcentajes de enunciados con una pregunta, o más, según el curso donde se planteó el problema. Se observa una tendencia a aumentar el número de preguntas conforme aumenta el grado del curso. Sin embargo, la tendencia es leve y los porcentajes de enunciados con más de una pregunta son similares entre los cursos.

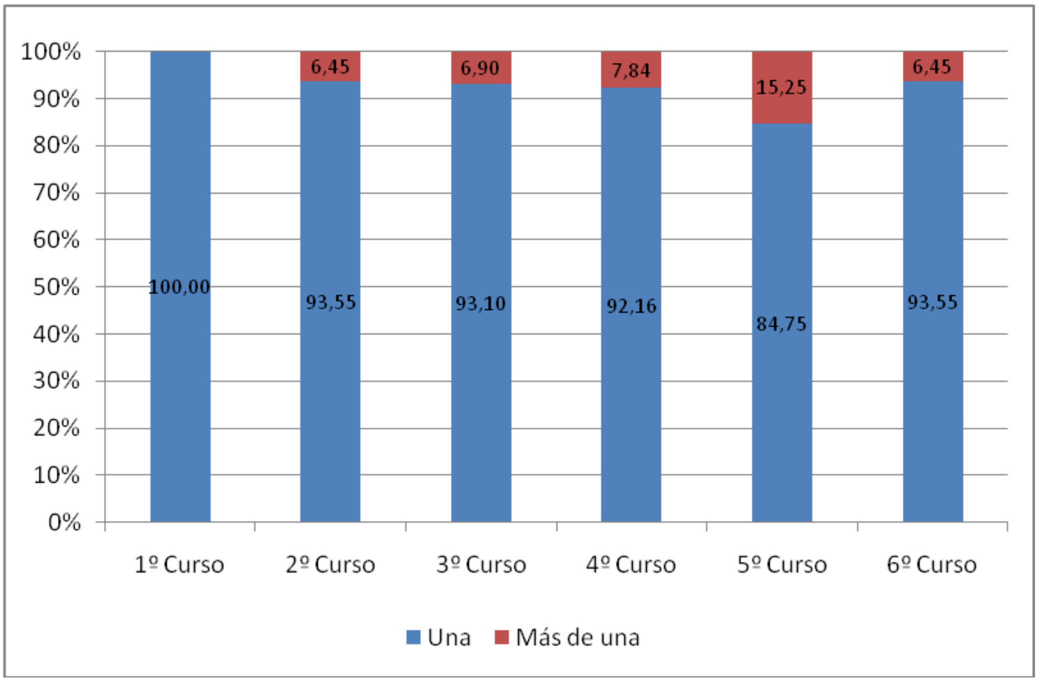


Figura VII.74. Número de preguntas formuladas. Porcentajes por curso.

No se pudo aplicar la prueba estadística de la chi-cuadrado por falta de observaciones en algunas de las categorías de cruces.

Análisis por ciclos

Organizados los datos por ciclos, se aprecia en la Tabla VII.47 (obtenida de la Tabla C.65 del Anexo C) que los enunciados que tienen una pregunta proceden de los tres ciclos, en casi los mismos porcentajes, con un ligero predominio en primer ciclo de ocho puntos más. Respecto a los problemas en los que se formula más de una pregunta, hay un ascenso lineal a medida que se aumenta el ciclo educativo, suponiendo más de la mitad las procedentes de 3º ciclo.

		Número de preguntas realizadas		Total
		Una	Más de una	
Ciclo 1	Recuento	96	4	100
	% dentro de la categoría	38,55	19,05	37,04
Ciclo 2	Recuento	74	6	80
	% dentro de la categoría	29,72	28,57	29,63
Ciclo 3	Recuento	79	11	90
	% dentro de la categoría	31,73	52,38	33,33
Total	Recuento	249	21	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 47. Número de preguntas formuladas. Por ciclos

De nuevo, cuando se analizan los enunciados con respecto al número de preguntas planteadas por ciclo, se observa (Figura VII.75) la tendencia a aumentar el número de preguntas cuando el grado del ciclo es mayor, sin embargo dichas diferencias no fueron significativas a un nivel de significación del 5% (Chi-cuadrado=4.477, Gl=2, p-valor=0.107, ver Tabla C.66 del Anexo C).

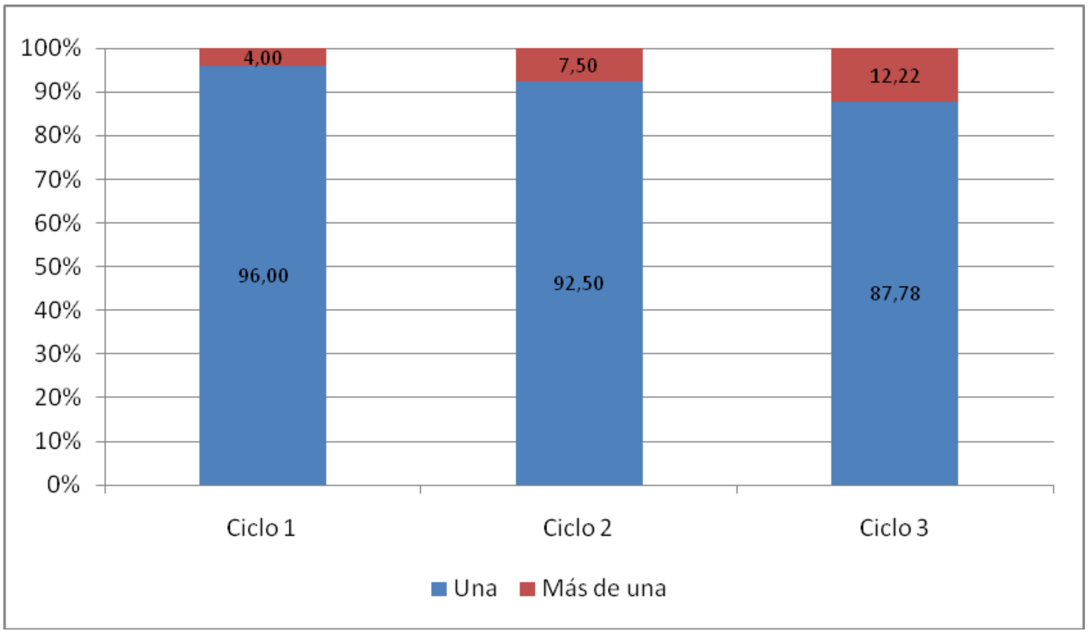


Figura VII.75. Número de preguntas formuladas. Porcentajes por ciclo.

VII.2.9.1. Número de preguntas formuladas según el número de pasos

La Tabla VII.48 presenta las frecuencias absolutas y porcentajes de las categorías *número de preguntas* realizadas dentro del tipo de problema simple o compuesto. Los datos se obtuvieron a partir de la Tabla C.67 (ver Anexo C) que originó el estudio estadístico realizado. De todos los problemas proporcionados por los estudiantes de aquellos que presentan solo una pregunta en el enunciado, un 58% son simples y un

38% de los problemas con más de una pregunta también son simples. El porcentaje de problemas compuestos en el grupo de problemas con más de una pregunta fue mayor que en el del grupo de una sola pregunta (Tabla VII.48).

		Número de preguntas		Total
Tipo de problema		**Una**	**Más de una**	
Simple	Recuento	145	8	153
	% dentro de la categoría	58,23	38,10	56,67
Compuesto	Recuento	104	13	117
	% dentro de la categoría	41,77	61,90	43,33
Total	Recuento	249	21	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 48. Número de preguntas de los problemas simples y compuestos

En la Figura VII.76 se visualizan la frecuencias absolutas procedentes de la tabla anterior donde se muestra el número de preguntas formuladas en el enunciado de los problemas simples y compuestos. Tanto en los problemas simples como en los compuestos aparecen con frecuencias variables los dos tipos de categorías, siendo minoritario en ambos tipos de problemas, la categoría más de una pregunta.

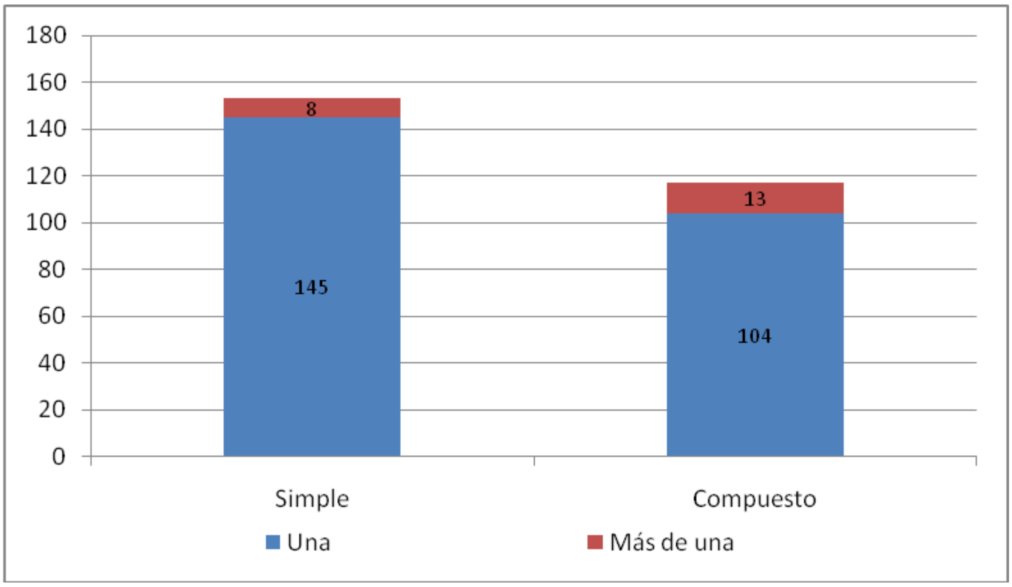


Figura VII.76. Número de preguntas de los problemas simples y compuestos. Frecuencias absolutas.

La Figura VII.77 muestra el porcentaje de problemas por número de preguntas en el enunciado según si eran simples o compuestos. Se observa que cuando el problema es compuesto el porcentaje de enunciados con más de una pregunta es mayor que cuando el problema es simple. Estas diferencias encontradas en los porcentajes no son estadísticamente significativas aunque existe una tendencia a serlo (Chi-cuadrado=3.189, Gl=1, p-valor=0.074, ver Tabla C.68 del Anexo C).

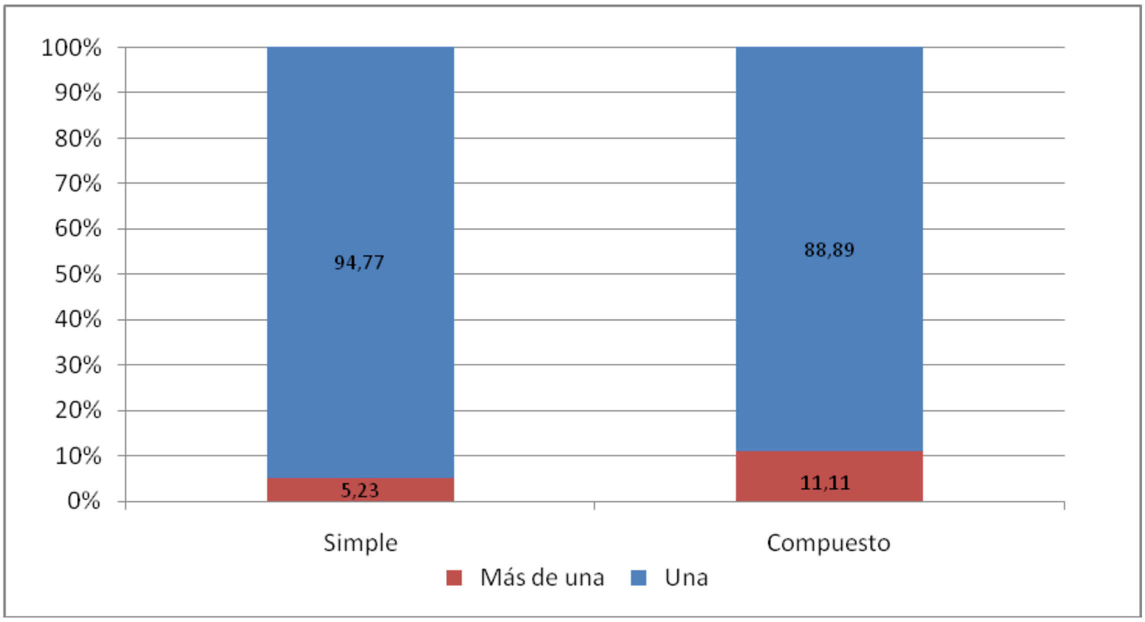


Figura VII.77. Porcentajes de los problemas simples y compuestos según el número de preguntas.

VII.2.9.2. Problemas simples según el número de preguntas

Estudiamos los problemas simples diferenciándolos por su estructura operatoria (aditivos o multiplicativos) relacionándolos con el número de preguntas que aparecen formuladas en sus enunciados. El análisis se realiza sobre los resultados de la Tabla de contingencia C.69 (ver Anexo C). A partir de ésta se construyó la Tabla VII.49 en la que se muestran las frecuencias absolutas y los porcentajes dentro de las categorías consideradas.

Los problemas con una sola pregunta (inventados) son más frecuentes entre los problemas simples aditivos que entre los multiplicativos con una diferencia de 13 puntos. La tendencia se mantiene en el caso de los problemas con más de una pregunta pero en este caso la representatividad de los problemas simples aditivos es un 6% mayor. El porcentaje de problemas aditivos simples cuyos enunciados presentan una única pregunta es aproximadamente un 6% menor que las invenciones aditivas simples que formulan más de una pregunta. Esta misma circunstancia se repite en los problemas multiplicativos simples (Tabla VII.49).

		Número de preguntas		Total
Estructura operatoria simple		**Una**	**Más de 1**	
Simples Aditivos	Recuento	82	5	87
	% dentro de la categoría	56,55	62,50	56,86
Simples Multiplicativos	Recuento	63	3	66
	% dentro de la categoría	43,45	37,50	43,14
Total	Recuento	145	8	153
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 49. Número de preguntas de los problemas simples aditivos y multiplicativos

A partir de las frecuencias absolutas mostradas en esta tabla obtenemos la Figura VII.78, que presenta dentro de los problemas simples y según su estructura operatoria el número de preguntas que se formulan en los enunciados. Tanto en los problemas simples aditivos como en los multiplicativos aparecen enunciados con una pregunta y con más de una, aunque en cantidades diferentes. Se observa en ambos tipos de problemas una presencia masiva de enunciados donde se ha formulado una sola pregunta.

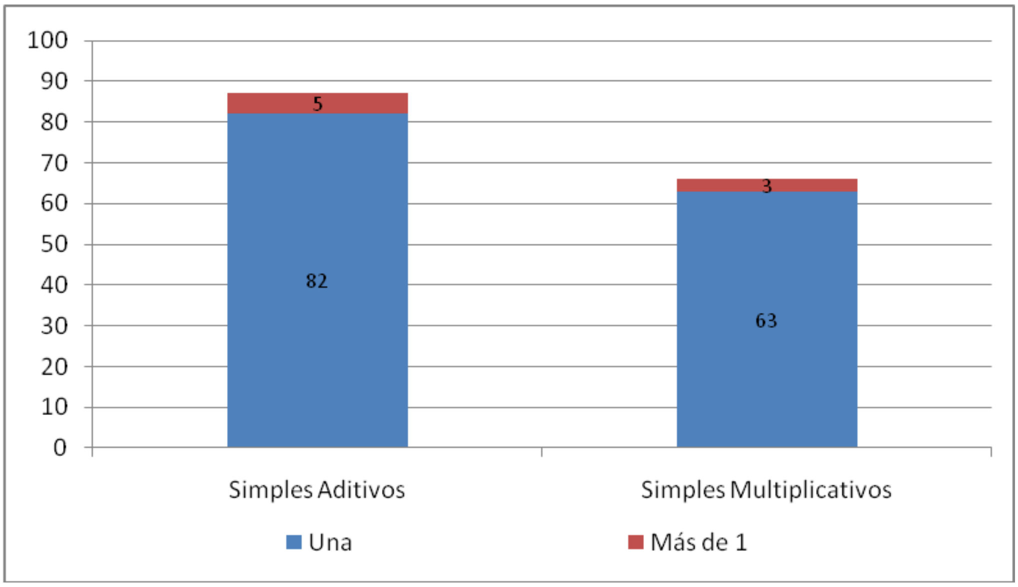


Figura VII.78. Número de preguntas de los problemas simples aditivos y multiplicativos. Frecuencias absolutas.

En la Figura VII.79 se detalla los porcentajes de problemas que presentan una o más preguntas en el enunciado, en cada uno de los grupos de problemas simples (aditivos o multiplicativos). La gran mayoría de los problemas contienen en el enunciado una sola pregunta. La diferencia entre los porcentajes apenas supera el 1%, siendo esta diferencia no significativa a un nivel del 5% (p-valor bilateral de la prueba exacta de Fisher=1, notar que en este caso al tener una tabla de 2x2 y el no cumplirse los requisitos necesarios para poder aplicar la prueba de la chi-cuadrado se optó por aportar el test de Fisher exacto, ver Tabla C.70 del Anexo C).

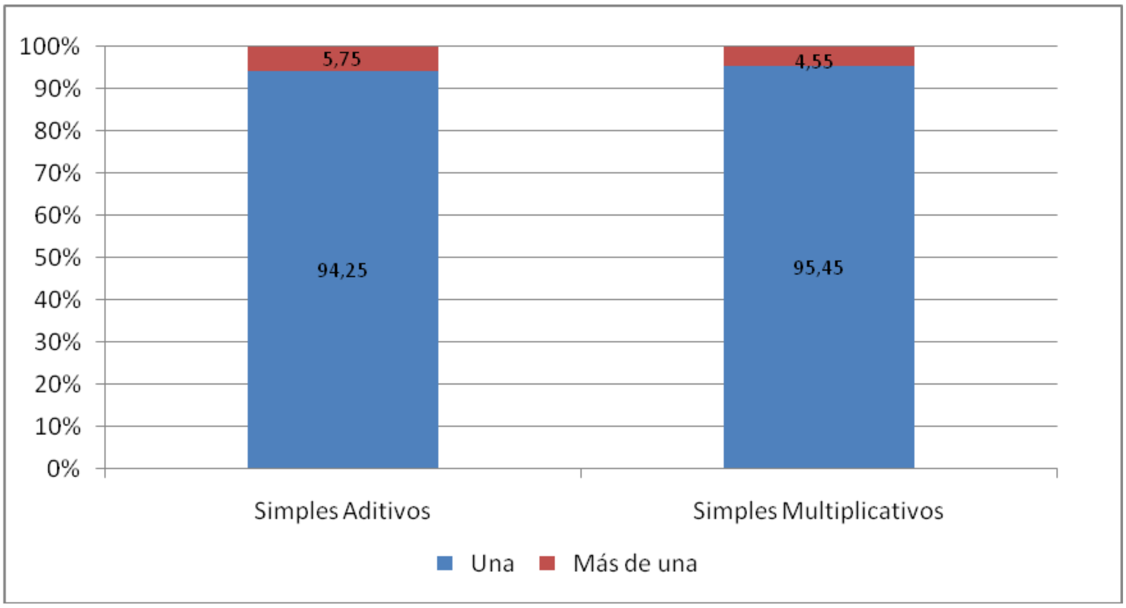


Figura VII.79. Porcentajes de los problemas simples aditivos y multiplicativos según el número de preguntas.

VII.2.9.3. Problemas compuestos según el número de preguntas

La Tabla VII.50 presenta las frecuencias absolutas de los tres tipos de problemas compuestos según el número de preguntas formuladas en ellos. Esta tabla se alcanza con los datos recogidos en la Tabla C.71 (ver Anexo C).

La mayoría de los enunciados solo tienen una pregunta. Se observa que aquellos enunciados con más de una pregunta mayoritariamente son de tipo aditivo-multiplicativo (Tabla VII.50).

		Número de preguntas		Total
Operatoria compuesta		Una	Más de una	
Compuesto Aditivo	Recuento	28	2	30
	% dentro de la categoría	26,92	15,38	25,64
Compuesto Multiplicativo	Recuento	11	1	12
	% dentro de la categoría	10,58	7,69	10,26
Aditivo multiplicativo	Recuento	65	10	75
	% dentro de la categoría	62,50	76,92	64,10
Total	Recuento	104	13	117
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 50. Número de preguntas de los problemas compuestos aditivos y multiplicativos

La Figura VII.80 muestra las frecuencias del número de preguntas, según que el problema compuesto sea aditivo, multiplicativo o aditivo-multiplicativo. En los tres tipos de problemas compuestos se presentan enunciados con una pregunta o más de una. Un elemento común en los problemas compuestos inventados es que se realiza una sola pregunta.

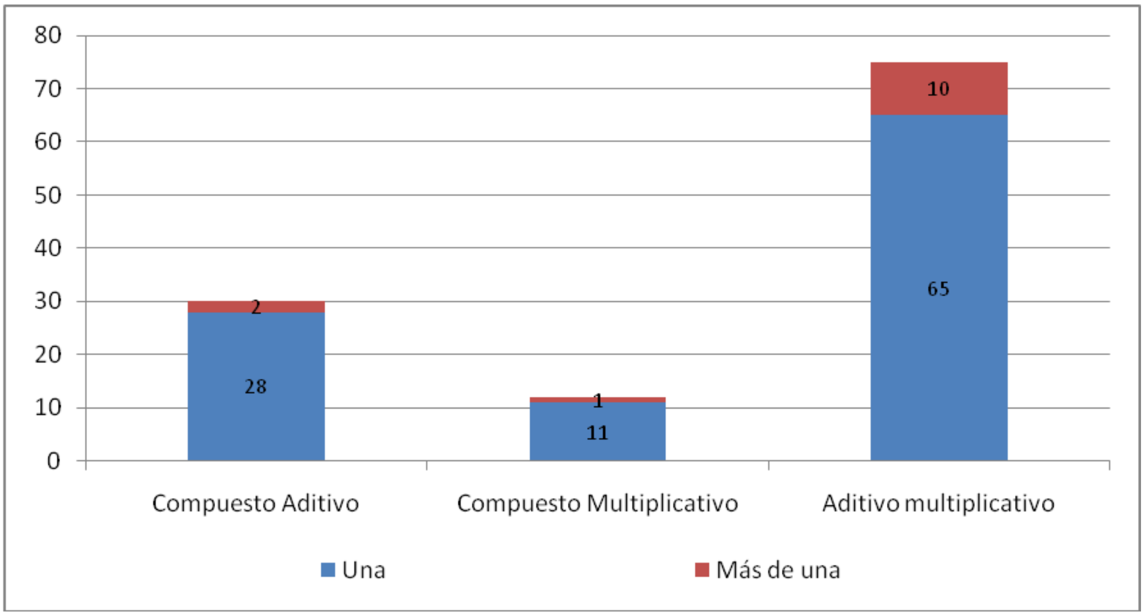


Figura VII.80. Número de preguntas de los problemas compuestos aditivos y multiplicativos. Frecuencias absolutas.

La Figura VII.81 muestra las frecuencias del número de preguntas, según que el problema compuesto sea aditivo, multiplicativo o aditivo-multiplicativo. En los tres tipos de problemas compuestos se presentan enunciados con una pregunta o más de una. Un elemento común en los problemas compuestos inventados es que se realiza una sola pregunta.

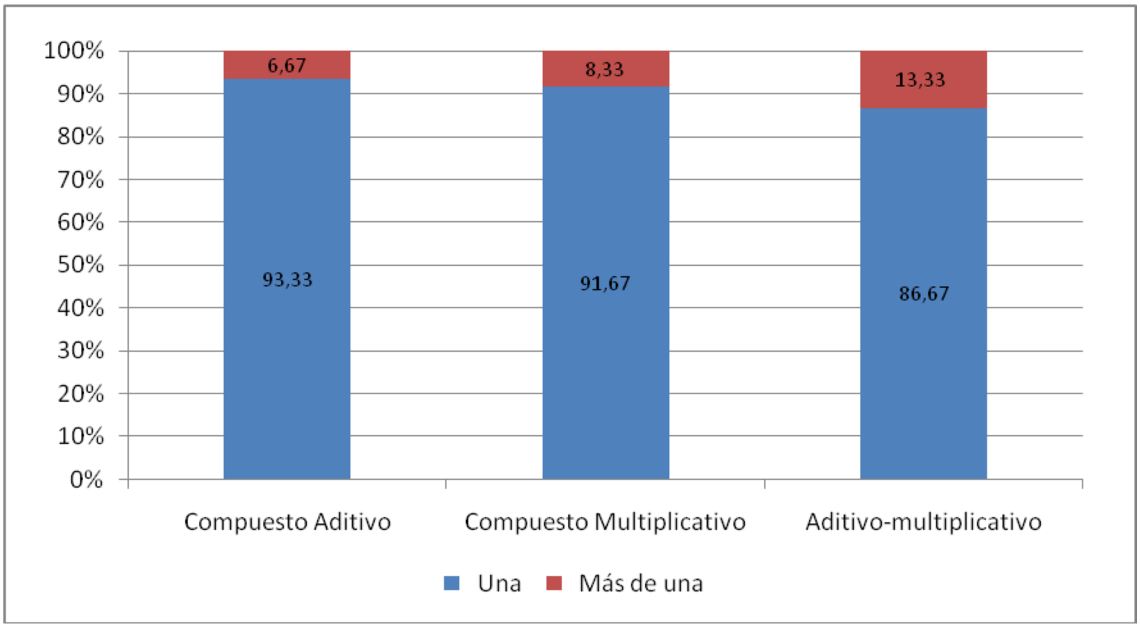


Figura VII.81. Porcentajes de los problemas compuestos aditivos y multiplicativos según el número de preguntas.

VII.2.9.4. Estructura semántica aditiva según el número de preguntas

A partir de la Tabla de contingencia C.72, que aparece en el Anexo C, se elaboró la Tabla VII.51 donde se recogen los porcentajes dentro de cada una de las categorías semánticas utilizadas de los problemas aditivos según el número de preguntas realizadas, así como las frecuencias absolutas.

Se observa en la Tabla VII.51 una similitud entre los porcentajes correspondientes a problemas con una sola pregunta dentro del grupo de cambio, combinación, comparación, siendo éste superior al 80%.

		Categorías semánticas aditivas usadas				
Número de preguntas		**Cambio**	**Combinación**	**Comparación**	**Igualación**	**Total**
Una	Respuestas	71	36	10	7	124
	% dentro de la categoría	94,67	90	83,33	100	92,54
Más de una	Respuestas	4	4	2	0	10
	% dentro de la categoría	2,99	2,99	1,49	0	7,46
Total	Respuestas	75	40	12	7	134
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 51. Categorías semánticas de problemas aditivos según el número de preguntas.

En la Figura VII.82, visualizamos las frecuencias absolutas de esta tabla y observamos que los problemas de igualación solo se presentan enunciados con una única pregunta. En el resto de las categorías aparecen problemas donde se formula una pregunta o más de una, si bien la frecuencia para cada una de esas categorías es muy baja.

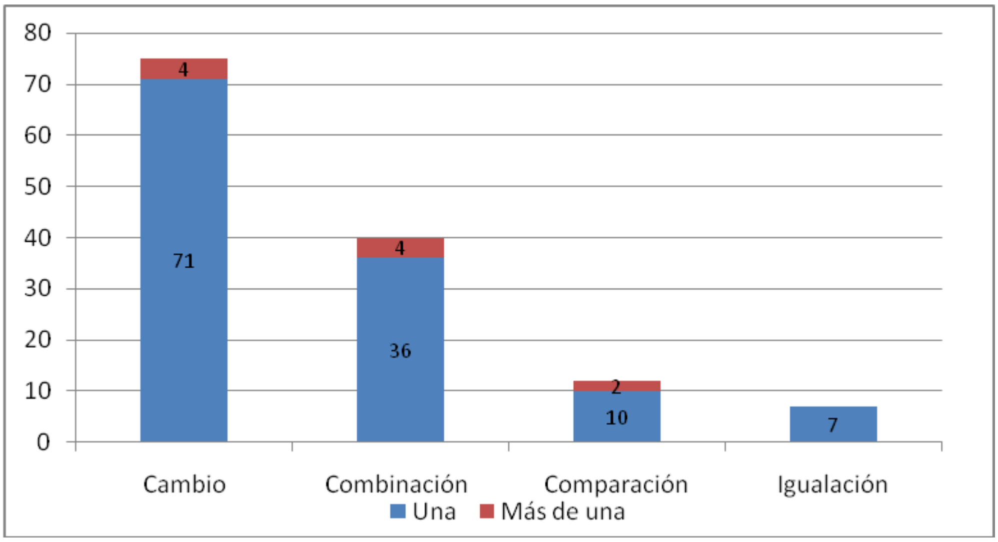


Figura VII.82. Categorías semánticas de problemas aditivos según el número de preguntas. Frecuencias absolutas.

La Figura VII.83 muestra que en los enunciados con más de una pregunta, el tipo de estructura aditiva es principalmente de cambio y de combinación en un 80%, porcentaje similar al del grupo de enunciados de una sola pregunta. En todos los problemas del tipo igualación, se plantea solo una pregunta en el enunciado.

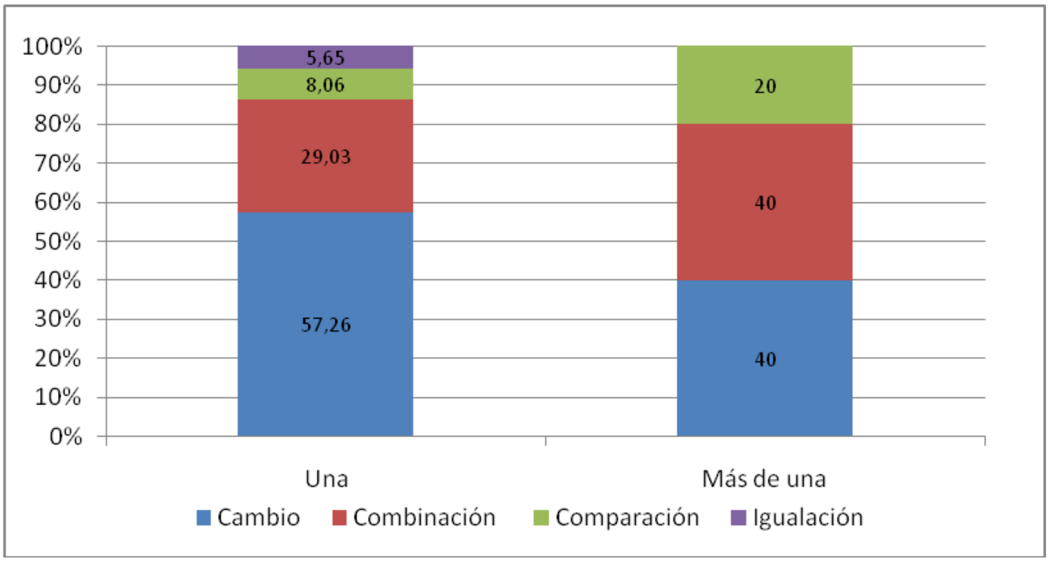


Figura VII.83. Porcentajes del número de preguntas según las categorías semánticas de problemas .aditivos.

VII.2.9.5. Estructura semántica multiplicativa según el número de preguntas

El estudio estadístico realizado sobre las distintas categorías semánticas de los problemas multiplicativos según el número de preguntas formuladas en el enunciado, dio lugar a la Tabla C.73 que presentamos en el Anexo C, la cual permitió elaborar la Tabla VII.52, donde se recogen las frecuencias absolutas y los porcentajes de cada una de las categorías consideradas.

El porcentaje de problemas con una sola pregunta en el enunciado es similar en las distintas clases semánticas multiplicativas (solo en tres de ellos está en la categoría cuotición). Notar que la combinación, como se describió en tablas anteriores no se encontraba en ninguno de los problemas multiplicativos (Tabla VII.52).

		Estructura semántica multiplicativa						
Número de preguntas		**G.I. Cuotición**	**G.i. Partición**	**Tasas**	**Comparación**	**Combinación**	**Producto de medidas**	**Total**
Una	Respuestas	3	30	32	2	0	13	80
	% dentro de la categoría	100	93,75	91,43	100	0	100	94,12
Más de una	Respuestas	0	2	3	0	0	0	5
	% dentro de la categoría	0	6,25	8,57	0	0	0	5,88
Total	Respuestas	3	32	35	2	0	13	85
	% dentro de la categoría	100	100	100	100	0	100	100

Tabla VII. 52. Categorías semánticas de problemas multiplicativos según el número de preguntas

A partir de las frecuencias absolutas de la tabla presentada anteriormente obtenemos la Figura VII.84, que muestra las frecuencias de los problemas multiplicativos distribuidos por categorías semánticas, según el número de preguntas formuladas. De ella observamos que si los problemas tienen más de una pregunta, solo aparecen enunciados de grupos iguales de partición y de tasas, y si los problemas inventados presentan una sola pregunta, aparecen todas las categorías semánticas excepto la de combinación.

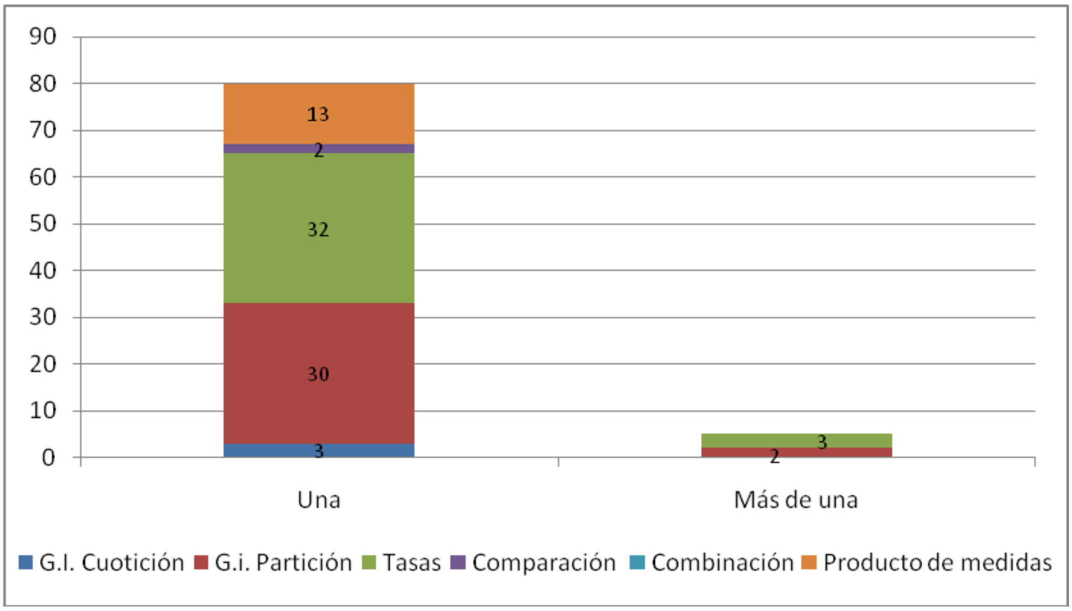


Figura VII.84. Categorías semánticas de problemas multiplicativos según el número de preguntas

Frecuencias absolutas.

La Figura VII.85 muestra los porcentajes de problemas según el número de preguntas en el enunciado. Se observa un mayor porcentaje de problemas con estructura semántica de tasas en aquellos enunciados con más de dos preguntas que en los enunciados con una sola pregunta (un 20% más). La mayor variabilidad de la estructura semántica en los problemas con una sola pregunta es explicable por el mayor número de problemas de una pregunta que fueron propuestos.

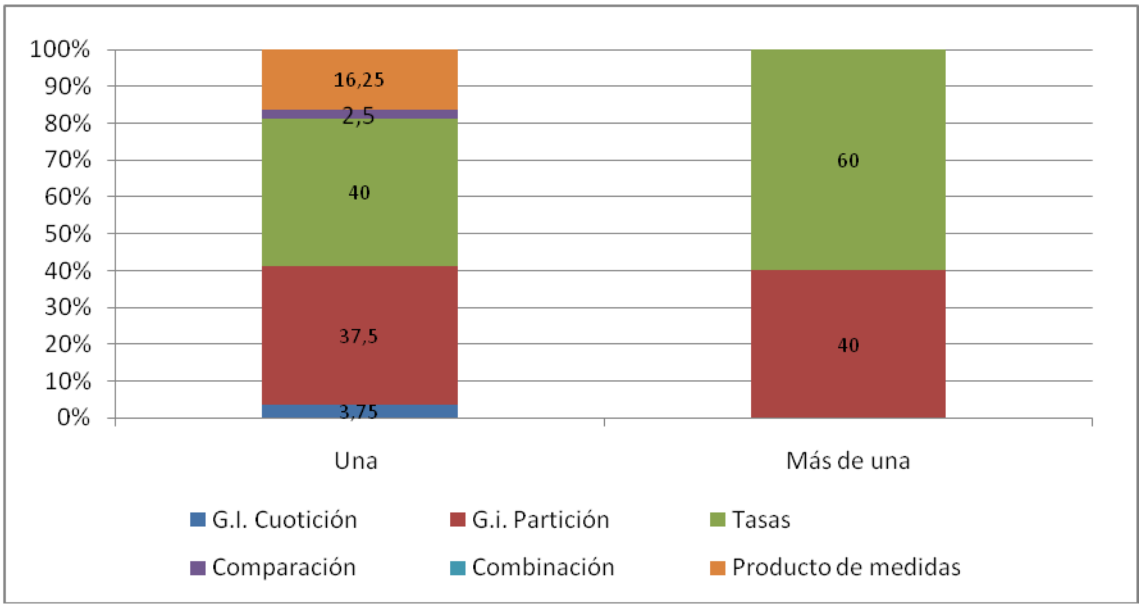


Figura VII.85. Porcentajes del número de preguntas según las categorías semánticas de problemas multiplicativos.

VII.2.9.6. Estructura semántica aditiva-multiplicativa según el número de preguntas

La Tabla C.74 recogida en el Anexo C, proporcionó los resultados tras el estudio estadístico que se dieron pie a la Tabla VII.53, que seguidamente mostramos.

Un total de 163 problemas son analizados tomando en cuenta las variables *estructura semántica de los problemas aditivos-multiplicativos* y *número de preguntas planteadas en el enunciado*. Al observar las frecuencias y porcentajes de la Tabla VII.53 se percibe que los enunciados con una pregunta se dan en mayor frecuencia en problemas aditivo-multiplicativos cuya categoría semántica es de partición (88.24%) y de tasas (78.79%). Los tipos de problemas de comparación, igualación (en aditivo), producto de medidas y porcentajes, presentan escasa frecuencia. Se observa también que el porcentaje de enunciados de problemas con más de una pregunta y con semántica de tasas es el más frecuente (21.21%) seguido del tipo partición.

Número de preguntas		**Cambio**	**Combinación**	**Comparación**	**Igualación**	**G.I. Cuotición**	**G.i. Partición**	**Tasas**	**Comparación**	**Combinación**	**Producto de medidas**	**Porcentajes**	**Total**
Una	Respuestas	27	36	2	2	0	30	26	5	0	9	2	139
	% dentro de la categoría	84,38	85,71	100	100	0	88,24	78,79	83,33	0	100	100	85,28
Más de una	Respuestas	5	6	0	0	1	4	7	1	0	0	0	10
	% dentro de la categoría	15,63	14,29	0	0	100	11,76	21,21	16,67	0	0	0	14,72
Total	Respuestas	32	42	2	2	1	34	33	6	0	9	2	163
	% dentro de la categoría	100	100	100	100	100	100	100	100	0	100	100	100

Tabla VII. 53. Categorías semánticas de problemas aditivo-multiplicativos según el número de preguntas.

En la Figura VII.86, ilustramos las frecuencias absolutas de esta tabla recogiendo el número de problemas aditivo-multiplicativos clasificados por su categoría semántica y por el número de preguntas formuladas en sus enunciados. En aquellos problemas en los que solo hay una pregunta, aparecen las cuatro categorías semánticas correspondientes a la parte aditiva. En la parte multiplicativa no aparece ningún enunciado de la categoría grupos iguales de cuotición ni de combinación. En los problemas en los que se formulan más de una pregunta encontramos, en la parte aditiva, problemas de las categorías de cambio y combinación y en la parte multiplicativa, aparecen las categorías grupos iguales de partición, de cuotición, de tasas y de comparación.

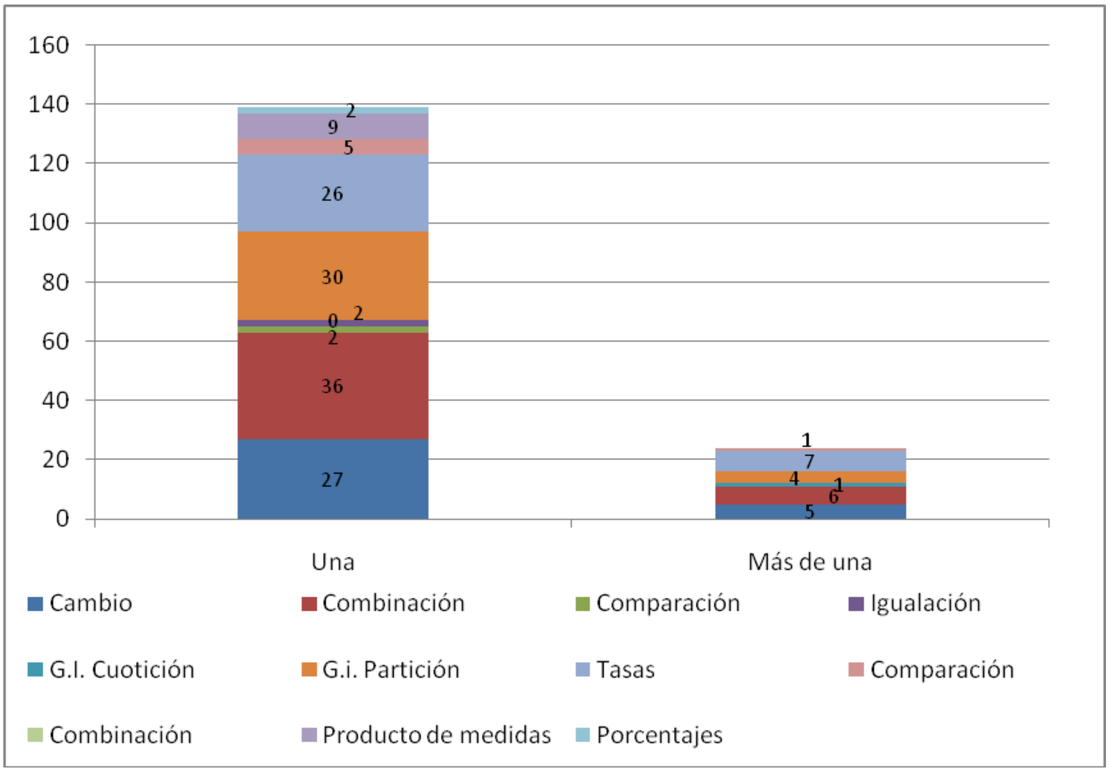


Figura VII.86**.** Categorías semánticas de problemas aditivo-multiplicativos según el número de preguntas. Frecuencias absolutas.

La Figura VII.87 muestra los porcentajes del tipo de estructura semántica presente en los problemas según el número de preguntas. Se percibe una mayor variedad de uso de presencia de categorías semánticas cuando se plantea una sola pregunta que cuando los problemas presentan más de una pregunta. Aproximadamente en un 30% de los problemas con más de una pregunta interviene la categoría tasas, mientras que en los problemas que presentan solo una pregunta aparecen en un 19%. Sí aparece, de manera similar, la categoría combinación tanto en problemas de una sola pregunta como en problemas de dos o más, siendo en ambos casos alrededor del 25%. Aunque en pequeña proporción, en problemas de una sola pregunta, aparecen las categorías de comparación, igualación, producto medidas y porcentajes. No se hace uso de este tipo de semántica en problemas de más de una pregunta. Solo aparece la categoría cuotición en problemas de más de una pregunta.

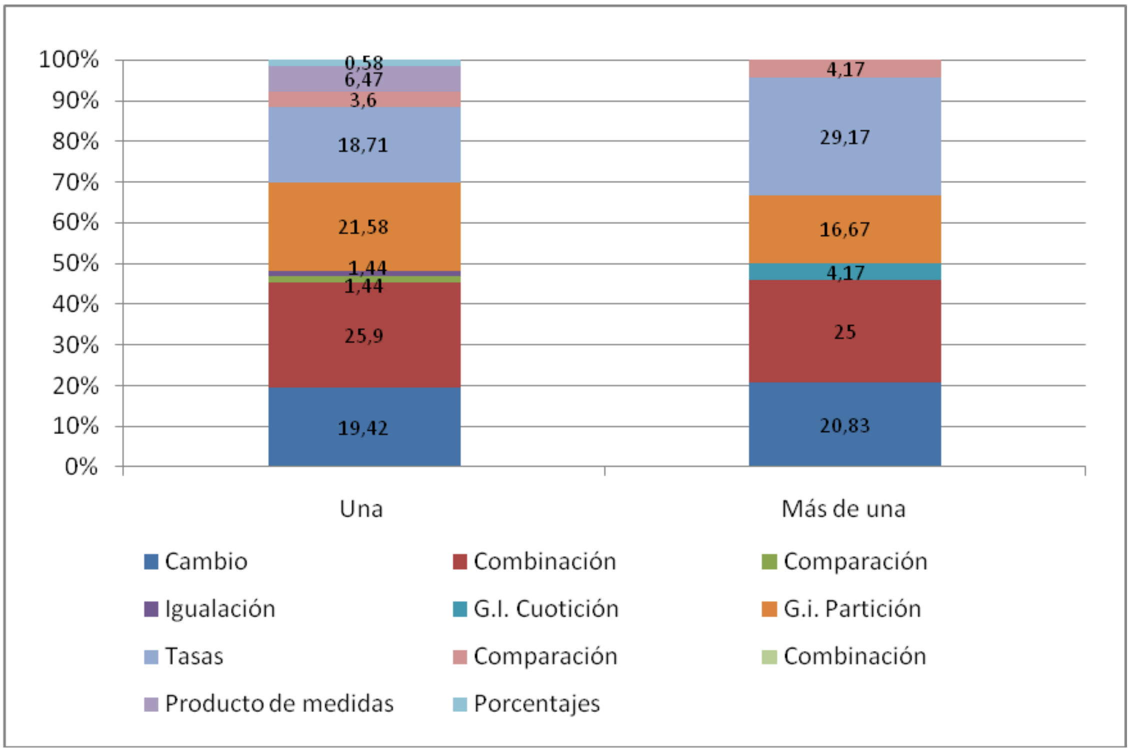


Figura VII.87. Porcentajes del número de preguntas según las categorías semánticas de problemas aditivo-multiplicativos.

VII.2.9.7. Número de cifras según el número de preguntas

La Tabla VII.54 muestra la distribución de los problemas planteados con una o más de una pregunta en el enunciado considerando si el número de cifras usadas es una, dos o más de dos. Estos datos provienen de los resultados obtenidos tras el análisis estadístico realizado que permitió elaborar la Tabla C.75 (Anexo C). Se observa que los porcentajes de problemas con una pregunta en el enunciado son similares en todos los grupos de categorías número de cifras usadas en el problema.

		Número de cifras usadas			Total
Número de preguntas		**Una cifra**	**Dos cifras**	**Más de dos cifras**	
Una	Recuento	38	110	101	249
	% dentro de la categoría	92,68	93,22	90,99	92,22
Más de una	Recuento	3	8	10	21
	% dentro de la categoría	7,32	6,78	9,01	7,78
Total	Recuento	41	118	111	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 54. Problemas por el número de cifras según el número de preguntas

Con las frecuencias absolutas de la Tabla VII.54 elaboramos la Figura VII.88, que permite observar la cantidad de enunciados inventados considerando la variable relativa a los datos numéricos en el enunciado y el número de preguntas planteadas. Tanto en los problemas donde se formula una pregunta como en los que presentan más de una, aparecen números de una cifra, de dos cifras, y de más de dos cifras aunque si bien con frecuencias diferentes.

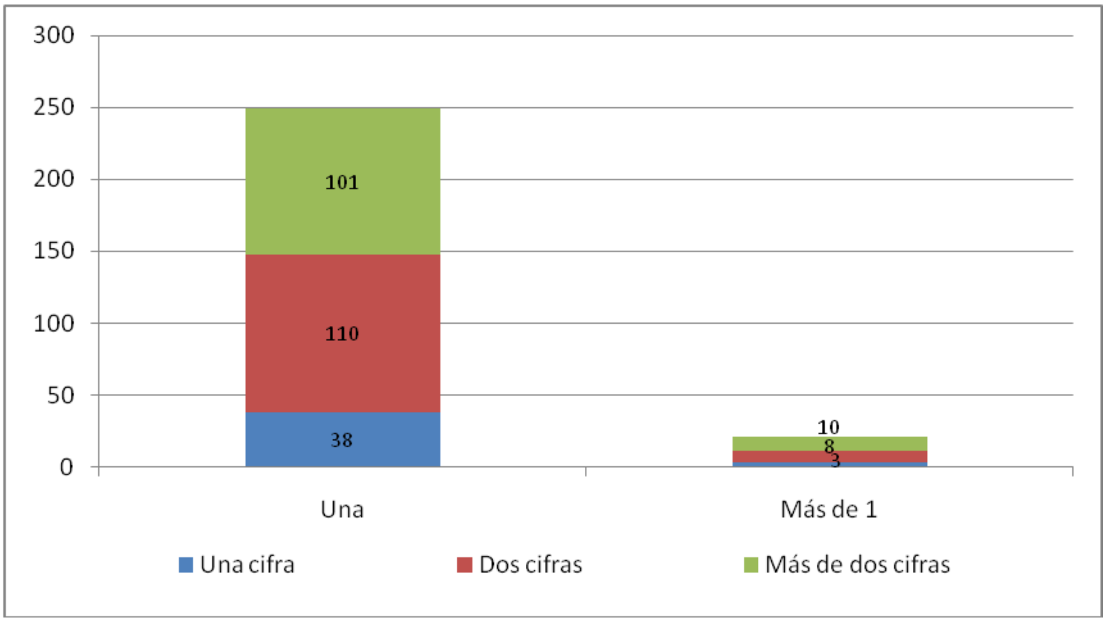


Figura VII.88. Problemas por el número de cifras según el número de preguntas. Frecuencias absolutas.

La Figura VII.89 muestra los porcentajes de problemas aparecidos teniendo en cuenta las variables número de cifras y número de preguntas presentes en el enunciado. La mayoría de los problemas, independientemente de que el enunciado tenga una o más preguntas, contiene cantidades con dos o más de dos cifras. No se encuentran diferencias significativas entre porcentajes de problemas que presentan distintas cantidades de cifras en relación a si hay una o más preguntas en su enunciado (Chi-cuadrado= 0.411, Gl=2, p-valor=0.814, ver Tabla C.76 del Anexo C).

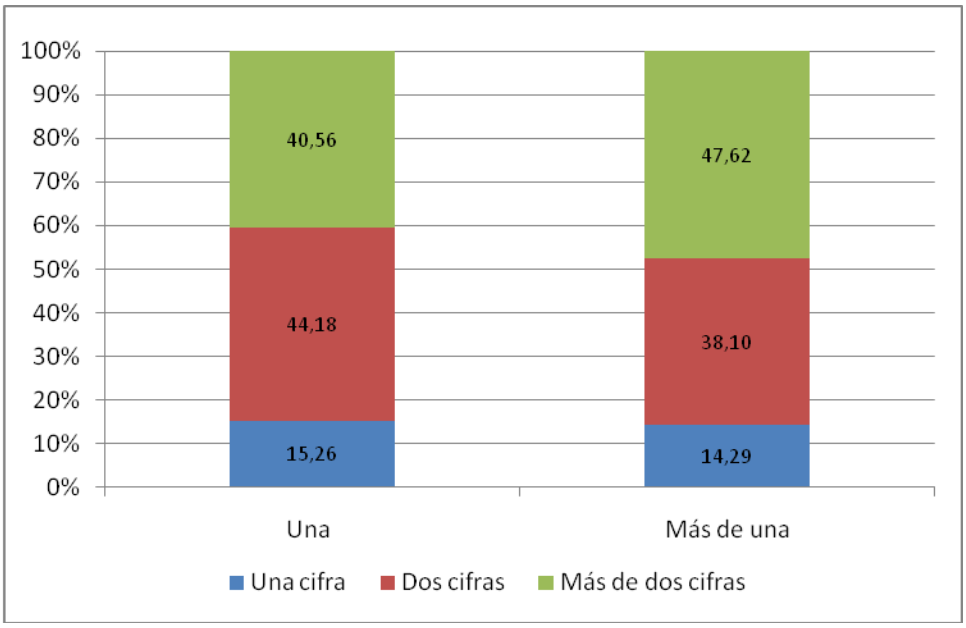


Figura VII.89. Porcentajes del número de preguntas según el número de cifras.

VII.2.9.8. Conjunto numérico según el número de preguntas

En el Anexo C se muestra la Tabla C.77 procedente del estudio estadístico realizado sobre las variables *tipo de conjunto numérico utilizado en el enunciado según el número de preguntas realizadas*. Estos resultados permitieron elaborar la Tabla VII.55 en la que se recogen las frecuencias absolutas y los porcentajes dentro de cada una de las categorías consideradas en este apartado.

En la Tabla VII.55 se observa que el porcentaje correspondiente a los problemas con una pregunta es similar en los casos en los que el problema presenta números naturales o decimales, siendo un 20% inferior cuando en el problema intervienen fracciones.

		Conjunto numérico			
Número de preguntas		Naturales	Fracciones	Decimales	Total
Una	Respuestas	208	13	28	249
	% dentro de la categoría	92,86	76,47	96,55	92,22
Más de una	Respuestas	16	4	1	21
	% dentro de la categoría	7,14	23,53	3,45	7,78
Total	Respuestas	224	17	29	270
	% dentro de la categoría	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabla VII. 55. Problemas por el conjunto numérico según el número de preguntas

En la Figura VII.90 visualizamos las frecuencias de los problemas inventados considerando el conjunto numérico utilizado y del número de preguntas formuladas en el enunciado. Observamos que los tres conjuntos numéricos están presentes tanto en los enunciados donde se formula una pregunta como más de una. Advertimos que las frecuencias varían en cada uno de los tipos de problemas.

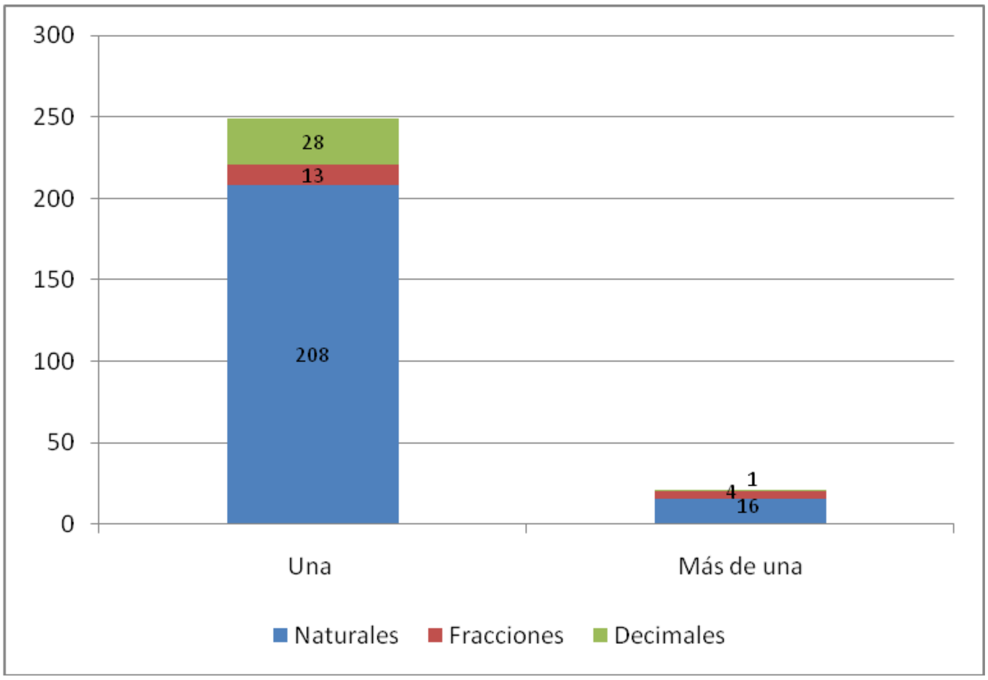


Figura VII.90. Problemas por el conjunto numérico según el número de preguntas. Frecuencias absolutas.

La Figura VII.91 muestra los porcentajes de las producciones de los estudiantes tomando como variables los conjuntos numéricos a los que pertenecen los datos que aparecen en los problemas el número de preguntas que presenta el problema. Se observa que los problemas que contienen fracciones son un 15% más en el tipo de problemas con más de una pregunta que en el tipo de problemas con solo una pregunta. Por su parte, los porcentajes de problemas en los que aparece una sola pregunta y números decimales y naturales es mayor que en el caso de que aparezca más de una pregunta en el enunciado, aunque hay que notar que el número de casos para los de más de una pregunta en el enunciado es muy bajo y en el caso de decimales, solo hay un problema con esas características.

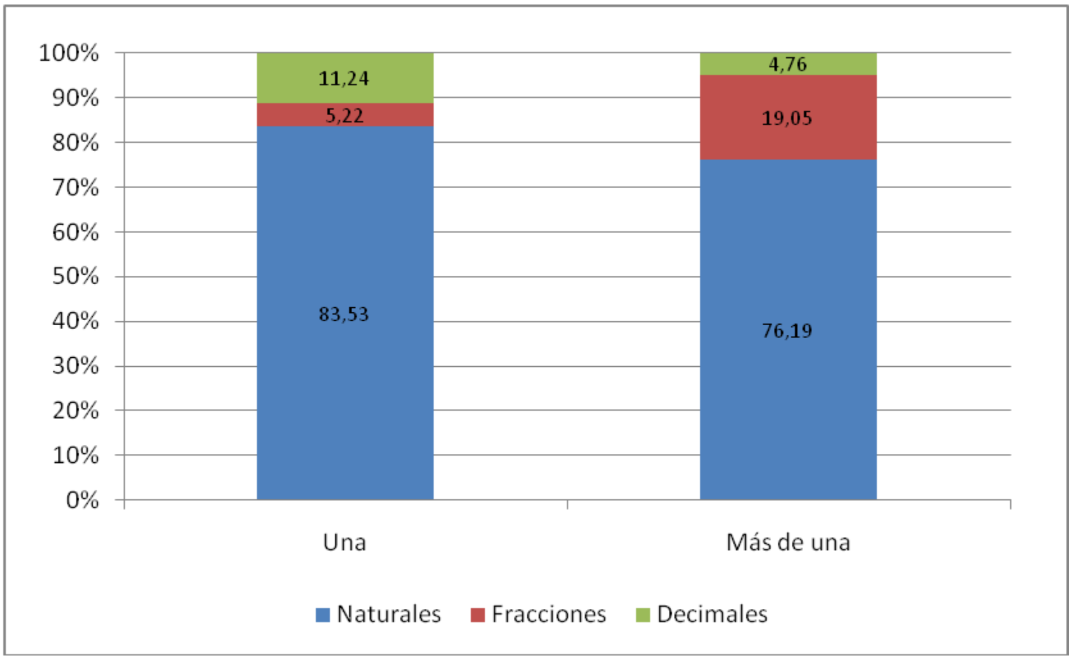


Figura VII.91**.** Porcentajes del número de preguntas según el conjunto numérico.

VII.3. PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PLANTEADOS

En este apartado reflejamos la indagación realizada sobre cómo resuelven este grupo de escolares sus propias invenciones, estudiamos cuántos de ellos llegan a la solución correcta y cuántos no. Dentro de éstos últimos estudiamos las incorrecciones que se perciben en la resolución de dichos problemas. Constatamos, así mismo, si el alumno se ha ayudado de alguna representación gráfica para resolver el problema que ha planteado.

VII.3.1. SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS INVENTADOS

Examinamos las producciones coherentes que han elaborado los escolares y de ellas las que han sido resueltas de forma adecuada o no y las que no se han resuelto. Este estudio lo realizamos primero organizando la información por cursos y posteriormente por ciclos. Los resultados presentados son fruto del análisis estadístico que se llevó a cabo tras el que resultó la Tabla C.78 ubicada en el Anexo C. Con dicha tabla se construyó la Tabla VII.56 que presenta los porcentajes dentro de las categorías que estudiamos en el subapartado siguiente y sus frecuencias absolutas. En el 79.63% la resolución de los problemas coherentes es correcta, en un 18.15% incorrecta y en un 2.22% no se resuelven.

Análisis por cursos

Las resoluciones correctas proceden, en mayor medida, de los cursos segundo, cuarto y quinto, aportando cada uno de dichos cursos, en total, más del 20% de resoluciones correctas. Las resoluciones incorrectas proceden de segundo curso con un 32,65% y de primero y sexto curso. Los estudiantes de cuarto proporcionan un mayor porcentaje de soluciones correctas que incorrectas. En quinto y sexto curso el porcentaje de soluciones correctas e incorrectas aportado es prácticamente el mismo (Tabla VII.56). Se observa que han sido muy pocos los problemas que han dejado sin resolver y estos lo hacen estudiantes de primero y segundo curso y solo uno correspondiente a un estudiante de sexto curso.

		Tipo de Solución			
		Solución Correcta	**Solución Incorrecta**	**No Resuelve**	**Total**
1º Curso	Respuestas	30	5	3	38
	% dentro de la categoría	13,95	10,2	50	14,07
2º Curso	Respuestas	44	16	2	62
	% dentro de la categoría	20,47	32,65	33,33	22,96
3º Curso	Respuestas	24	5	0	29
	% dentro de la categoría	11,16	10,2	0,00	10,74
4º Curso	Respuestas	44	7	0	51
	% dentro de la categoría	20,47	14,29	0,00	18,89
5º Curso	Respuestas	48	11	0	59
	% dentro de la categoría	22,33	22,45	0,00	21,85
6º Curso	Respuestas	25	5	1	31
	% dentro de la categoría	11,63	10,2	16,67	11,48
Total	Respuestas	215	49	6	270
	% dentro de la categoría	100	100	100	100

Tabla VII. 56. Solución proporcionada al problema. Por cursos.

De esta tabla obtenemos los datos que aparecen en la Figura VII.92 sobre frecuencias absolutas. Se ve que en primero, segundo y sexto curso hay alumnos que no han resuelto su invención y entre los que la resuelven, unos lo hacen correctamente y otros incorrectamente. Todos los estudiantes de los cursos tercero, cuarto y quinto, resuelven sus producciones. En todos los cursos predominan el número de problemas resueltos correctamente. (Ver Figura VII.93).

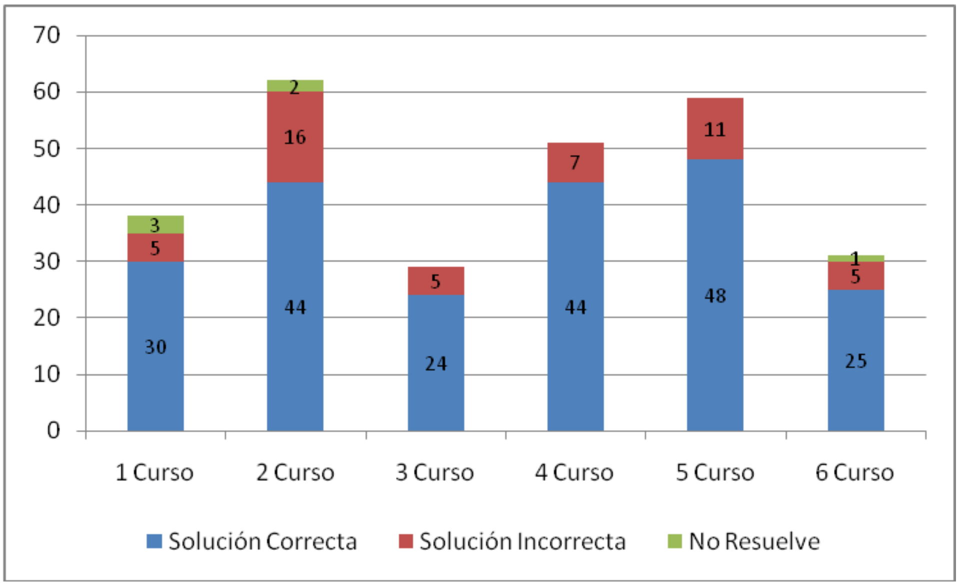


Figura VII.92. Solución proporcionada al problema. Frecuencias absolutas por curso.

En la Figura VII.93 se muestra el porcentaje de los datos comentados El mayor porcentaje del tipo no resueltos fue en primer curso (un 8% aproximadamente), seguido de segundo y sexto curso. En los cursos de tercero, cuarto y quinto el porcentaje de soluciones correctas es mayor que en el resto de los cursos, aunque en todos los cursos se supera el 70%.

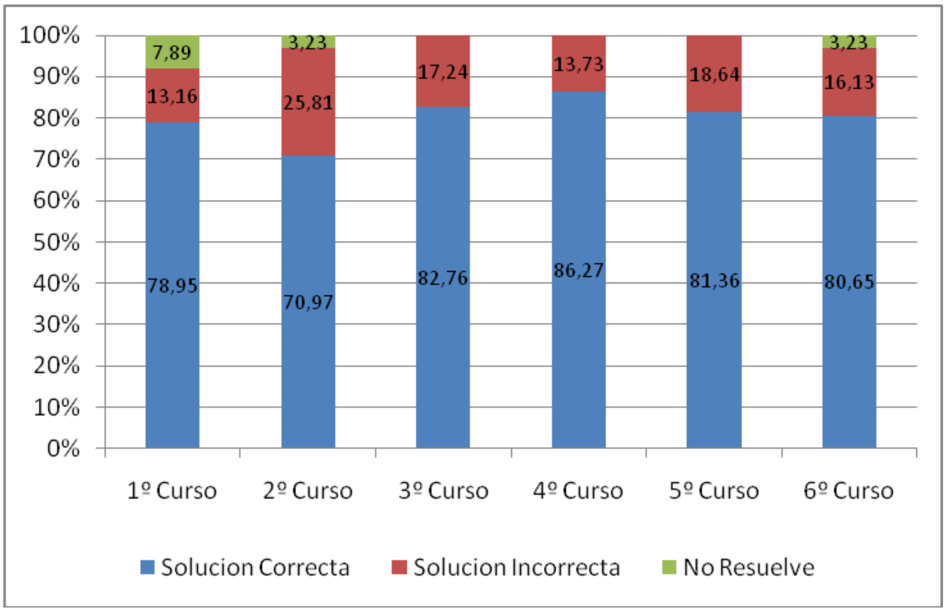


Figura VII.93. Solución proporcionada al problema. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Cuando se analiza el tipo de resolución según el ciclo donde se inventa el problema, se observa que en todos los ciclos se resuelve correctamente el problema propuesto en porcentajes similares. En la Tabla VII.57, obtenida a partir del de la Tabla C.79 (Anexo C), se observa la distribución de problemas por ciclo según la solución obtenida. Los problemas no resueltos corresponden a alumnos del primer ciclo, solo un alumno de tercer ciclo no resuelve el problema. Los problemas resueltos incorrectamente proceden mayoritariamente de primer ciclo.

		Tipo de Solución			
		Solución Correcta	**Solución Incorrecta**	**No Resuelve**	**Total**
Ciclo 1	Respuestas	74	21	5	100
	% dentro de la categoría	34,42	42,86	83,33	37,04
Ciclo 2	Respuestas	68	12	0	80
	% dentro de la categoría	31,63	24,49	0,00	29,63
Ciclo 3	Respuestas	73	16	1	90
	% dentro de la categoría	33,95	32,65	16,67	33,33
Total	Respuestas	215	49	6	270
	% dentro de la categoría	100	100	100	100

Tabla VII. 57. Solución proporcionada al problema. Por ciclos.

La Figura VII.94 refleja la distribución de tipo de solución para cada ciclo, todos los ciclos superan el 70% de problemas resueltos de manera correcta. El mayor porcentaje de soluciones incorrectas corresponde a primer ciclo, baja en segundo ciclo y vuelve a subir ligeramente en tercer ciclo.

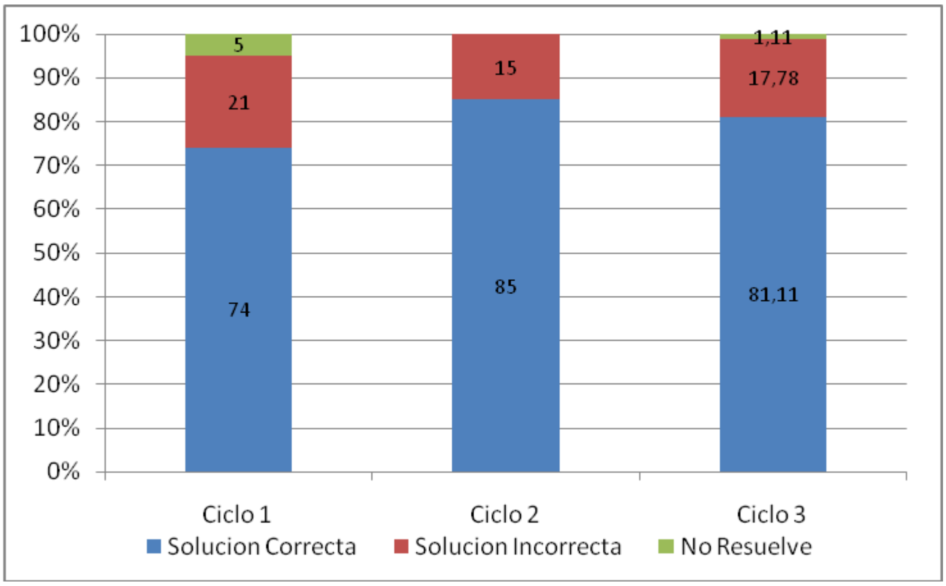


Figura VII.94. Solución proporcionada al problema. Porcentajes por ciclo.

VII.3.2. RESOLUCIONES INCORRECTAS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA MOSTRADAS EN LOS PROTOCOLOS

Estudiamos las causas que han dado lugar a que los problemas no hayan sido resueltos correctamente. Agrupamos dichas causas en dos bloques:

I. Errores de cálculo, debidos únicamente a fallos cometidos al efectuar las operaciones

II. Errores de uso de operaciones, que engloban aquellas situaciones donde se realizan solo parte de las operaciones que resuelven el problema, se toman datos erróneos, se realizan operaciones innecesarias, se identifican las operaciones pero no se realizan, se utilizan operaciones que no resuelven el problema y/o se produce confusión entre dividendo y divisor en una división.

Seguidamente analizamos los datos obtenidos por cursos y por ciclos.

Análisis por cursos

Como venimos diciendo a lo largo del capítulo, los datos que seguidamente presentamos, se consiguen una vez finaliza el estudio estadístico sobre las causas que provocaron que los estudiantes resolvieran incorrectamente sus producciones. Los resultados se pueden consultar en la Tabla C.80 perteneciente al Anexo C, a partir de dicha tabla se procedió a la elaboración de la Tabla VII.58 en la que mostramos las frecuencias absolutas por cursos y los porcentajes correspondientes a las dos categorías que estudiamos a continuación.

Han aparecido 49 problemas resueltos de manera incorrecta, 43 de ellos debido a errores en el uso de operaciones (87.75%). Los errores de todos los alumnos de cuarto y quinto curso que no solucionan de manera correcta el problema, se deben a errores en el uso de operaciones y solo un alumno de sexto presenta errores de cálculo. Los errores de los estudiantes de primer y tercer curso son debidos al cálculo. (Tabla VII.58).

		Error de Cálculo	**Error uso operaciones**	**Total**
1º Curso	Respuestas	2	3	5
	% dentro de la categoría	33,33	6,98	10,2
2º Curso	Respuestas	1	15	16
	% dentro de la categoría	16,67	34,88	32,65
3º Curso	Respuestas	2	3	5
	% dentro de la categoría	33,33	6,98	10,2
4º Curso	Respuestas	0	7	7
	% dentro de la categoría	0	16,28	14,29
5º Curso	Respuestas	0	11	11
	% dentro de la categoría	0	25,58	22,45
6º Curso	Respuestas	1	4	5
	% dentro de la categoría	16,67	9,3	10,2
Total	Respuestas	6	43	49
	% dentro de la categoría	100	100	100

Tabla VII. 58. Razones por las que la solución del problema es incorrecta. Por cursos

A partir de las frecuencias absolutas presentadas en la Tabla VII.58 elaboramos la Figura VII.95 donde se visualizan los tipos de errores cometidos por los alumnos según el curso. Observamos que en cuarto y quinto curso solo se producen errores debido al uso de operaciones, y en el resto de los cursos aparecen los dos tipos de errores con frecuencias variables.

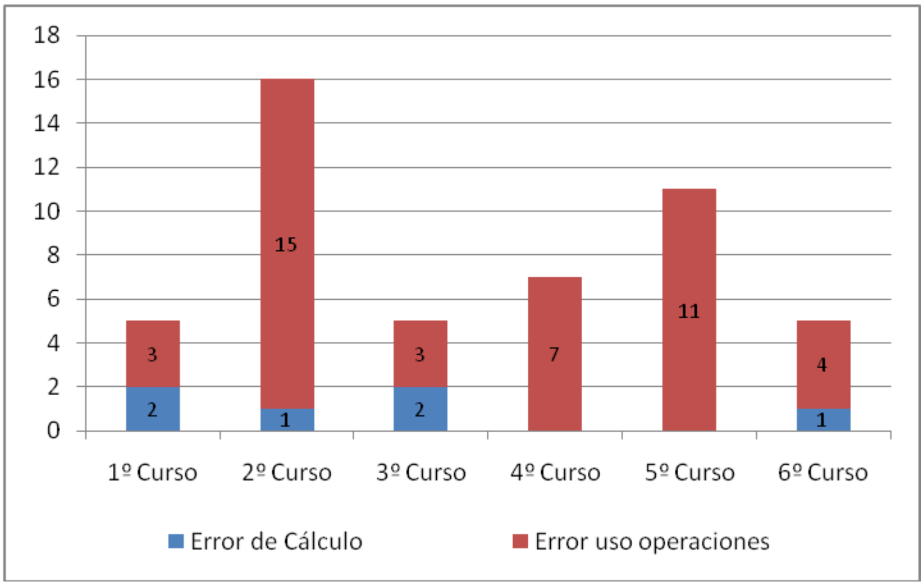


Figura VII.95**.** Razones por las que la solución del problema es incorrecta. Frecuencias absolutas por curso.

En la Figura VII.96 se observa los porcentajes de problemas resueltos de manera incorrecta clasificados por los errores cometidos según el curso donde se planteó. En primer y tercer curso un 40% de los alumnos comete errores de cálculo. Un 6% y un 20% en los cursos de segundo y sexto, en los cuales más del 80% de los alumnos comete errores en el uso de operaciones. Estos porcentajes han de ser interpretados con cierta cautela pues el número de alumnos a los que refieren es bastante bajo (ver Tabla VII.58).

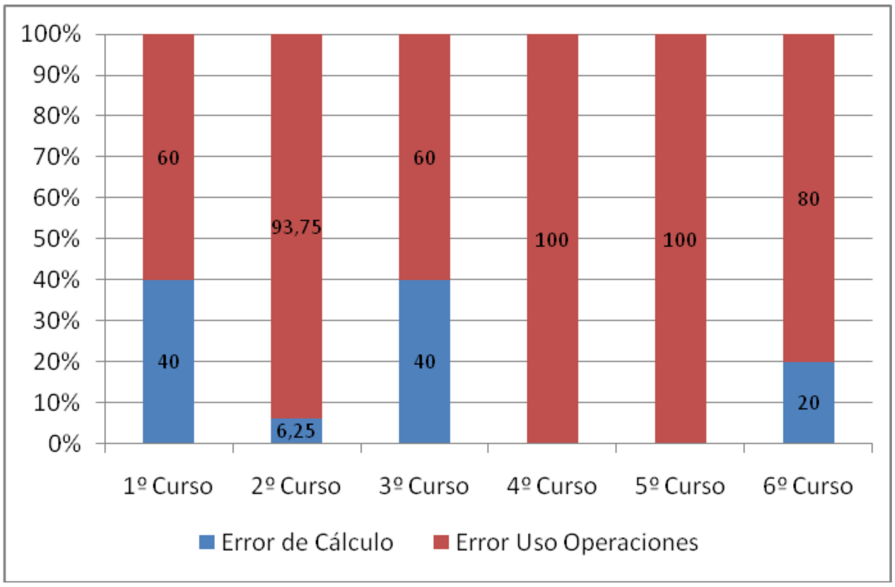


Figura VII.96**.** Razones por las que la solución del problema es incorrecta. Porcentajes por curso.

Análisis por ciclos

Con respecto al ciclo, se observa que un mayor porcentaje de los alumnos que cometen errores de cálculo pertenecen a segundo ciclo. El porcentaje de aquellos, en dicho ciclo, que deben su error al uso de las operaciones es menor que para el caso anterior (Tabla VII.59, procedente de la Tabla C.81 del Anexo C). Por el contrario, el porcentaje de alumnos de tercer ciclo que cometen errores de cálculo es menor que los que cometen errores en el uso de las operaciones.

		Error de Cálculo	Error Uso Operaciones	Total
Ciclo 1	Respuestas	3	18	21
	% dentro de la categoría	50	41,86	42,86
Ciclo 2	Respuestas	2	10	12
	% dentro de la categoría	33,33	23,26	24,49
Ciclo 3	Respuestas	1	15	16
	% dentro de la categoría	16,67	34,88	32,65
Total	Respuestas	6	43	49
	% dentro de la categoría	100	100	100

Tabla VII. 59. Razones por las que la solución del problema es incorrecta. Por ciclos

La Figura VII.97 muestra los porcentajes de errores para cada uno de los ciclos. Más del 80% de los errores cometidos en cada ciclo se deben a fallos en el uso de las operaciones. Aproximadamente un 15% de los alumnos de primer y segundo ciclo no llega a la solución correcta del problema por cometer errores al hacer el cálculo en contraste con el 6% de los que cometieron error de cálculo en tercer ciclo.

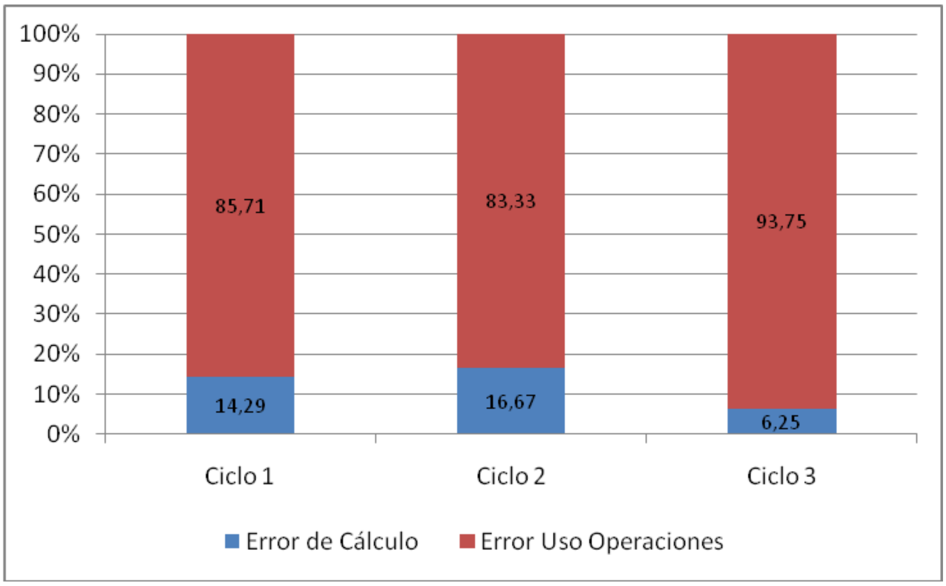


Figura VII.97. Razones por las que la solución del problema es incorrecta. Porcentajes por ciclo.

VII.3.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA UTILIZADA

En el 95.2% de los casos, las producciones de los estudiantes no presentan representación gráfica. solo un 4.8% de los 270 problemas coherentes presentan representación gráfica, correspondiendo todas ellas a una representación de figuras geométricas (véase Figura VII.98), es decir 13 de ellos. Los problemas con representación gráficas geométricas proceden de estudiantes de sexto curso, es decir tercer ciclo. Esos 13 alumnos corresponden a un 41.9% de los alumnos de sexto curso. Es decir, poco menos de la mitad. Si hablamos en términos porcentuales de ciclo, solo un 14.4% de los alumnos de tercer ciclo realizan representaciones graficas y ninguno en los otros dos ciclos.

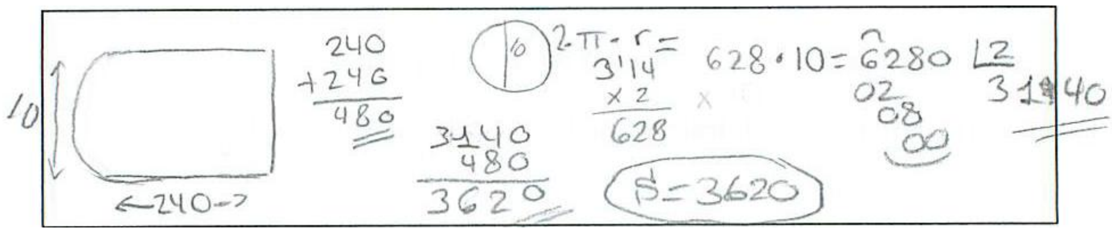


Figura VII.98. Ejemplo representación gráfica geométrica de un alumno de sexto curso

VII.4. RELACIÓN ENTRE LOS PROBLEMAS QUE CONSIDERAN FÁCILES Y SU SOLUCIÓN

Este apartado está dedicado a presentar el análisis de las respuestas de los escolares recogidas de la última parte del cuestionario. En dicha parte, se les presentan unos problemas (3 en primer curso, 4 en el resto de los cursos) y para cada uno de ellos han de indicar si lo consideran fácil o difícil. Posteriormente se les solicita que resuelvan solo aquellos problemas que hayan señalado como fáciles. Estudiamos la relación entre las manifestaciones de los estudiantes respecto a lo que consideran fácil y la resolución que hacen de los problemas.

Como se mencionó en el capítulo IV, donde se recoge el marco metodológico, esta parte de la prueba presentaba variaciones en diferentes cursos. Se elaboraron cuatro cuestionarios diferentes, uno para primer curso, otro para segundo, un tercer cuestionario para segundo ciclo y otro para tercer ciclo. Las diferencias se encontraban en los problemas que se les proponían, que variaban en su estructura semántica, en la cantidad de cifras involucradas en los números que aparecen en el problema, así como en el número de operaciones necesarias para obtener la solución.

Resultados de la prueba de primer curso

Recordamos que a los alumnos de primer curso se les presentaron los tres enunciados siguientes:

1. Daniel tiene 4 cromos y su hermana le da otros 6 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Daniel?

2. Luis tiene 3 canicas en la mano y unas cuantas canicas en su bolsillo. Al ponerlas juntas en la mesa Luís ve que tiene 11canicas. ¿Cuántas canicas tenía Luis en el bolsillo?

3. Paula tiene 178 Euros y sus abuelos le han regalado 389 Euros ¿Cuántos Euros tiene Paula?

En los tres casos se trata de problemas de estructura aditiva cuya sentencia de resolución responde a la expresión a+b=c.

Los problemas 1 y 3 tienen la misma estructura semántica, cambio tipo 1, lo que significa que la incógnita está en el elemento c de la sentencia o resultado de la suma. La diferencia entre ellos reside en que en el problema 1 intervienen números de una cifra y en el 3 los números son de tres cifras.

El problema 2 presenta una estructura semántica de combinación, tipo 2, lo que significa que la incógnita se presenta en uno de los sumando de la sentencia, los números involucrados son de una y de dos cifras, si bien el número de dos cifras está al inicio de la primera decena.

El análisis de las respuestas de los estudiantes, de primer curso, a las cuestiones planteadas proporciona la Figura VII.99. Como se aprecia, un porcentaje muy alto de estudiantes de dicho curso (95.5%) responden que el problema 1 es fácil, pero cuando se trata del problema 2, menos de la mitad responde que es fácil. Debido a que la única variable que cambia es la cantidad de cifras de los números presentes en dichos problemas, nos atrevemos a decir que ha sido el aumento del número de cifras la razón que lleva a casi la mitad de los estudiantes de primero a cambiar la calificación de fácil a difícil del problema 1 al problema 3.

En cuanto al problema 2, algo más de la mitad de los estudiantes afirma que es fácil y algo menos de la mitad que es difícil. En este caso no hay otro problema de su misma estructura semántica con el que comparar. Establecemos comparación con el problema 1, de nuevo. Las diferencias entre los problemas 1 y 2 son la variación de la estructura semántica y la posición de la incógnita. Las cifras de los números son similares en los dos casos. Los estudios realizados sobre niveles de dificultad de los problemas aditivos asociados a la estructura semántica y a la posición de la incógnita, sitúan a este problema en rango de mayor dificultad que el 1 (Puig y Cerdán 1988), este hecho unido al porcentaje de estudiantes que lo consideran fácil, algo más alto que para el problema 3, nos hace afianzar más la idea que para estos escolares la aparición de números de tres cifras es un indicador de dificultad para un problema.

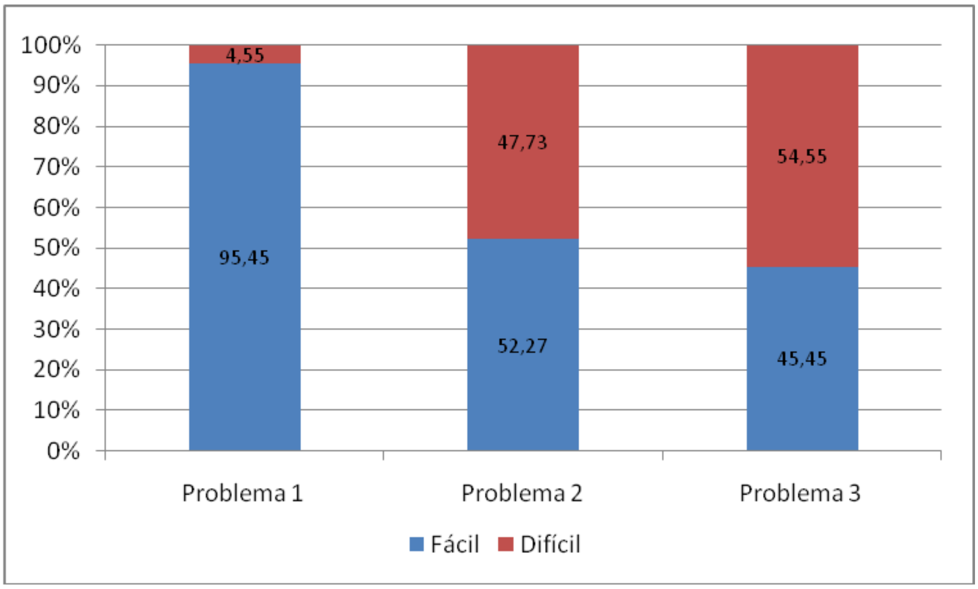


Figura VII.99. Dificultad de los problemas presentados en primer curso.

El comportamiento de los estudiantes de primer curso al resolver los problemas fáciles ha sido como sigue: Resuelven adecuadamente el problema 1 un porcentaje muy alto de alumnos (más del 80%) y no resuelven adecuadamente un porcentaje bajo (cercano al 5%) y hay un porcentaje bajo pero no desdeñable (casi 12%) que no resuelve el problema. Comparando con el problema 3, disminuye el porcentaje de los que resuelven correctamente (respecto al primer problema), aumenta el porcentaje de los que no lo resuelven y se mantiene lo resuelto no adecuadamente. Estos datos nos llevan a creer que no solo los alumnos de primer curso ven más difícil el problema 3 que el problema 1, sino que además obtienen peores resultados en su resolución o sea les resulta más difícil. Estos estudiantes manejan números de una cifra y muy poco de dos cifras.

Respecto al problema 2, si bien las indicaciones de los estudiantes sobre su facilidad eran similares (algo superior) a las del problema 3, sin embargo, cuando resuelven, no llega al 40% los que lo hacen de forma correcta. Lo cual nos permite concluir que la apariencia del problema ha producido en los estudiantes de primero una percepción falsa de facilidad (suponemos que el hecho de tener números pequeños favorece dicha percepción), encontrando la dificultad al enfrentarse a la resolución del problema. Más de la cuarta parte de los estudiantes no resuelve y casi un tercio de los estudiantes hace una resolución incorrecta del mismo.

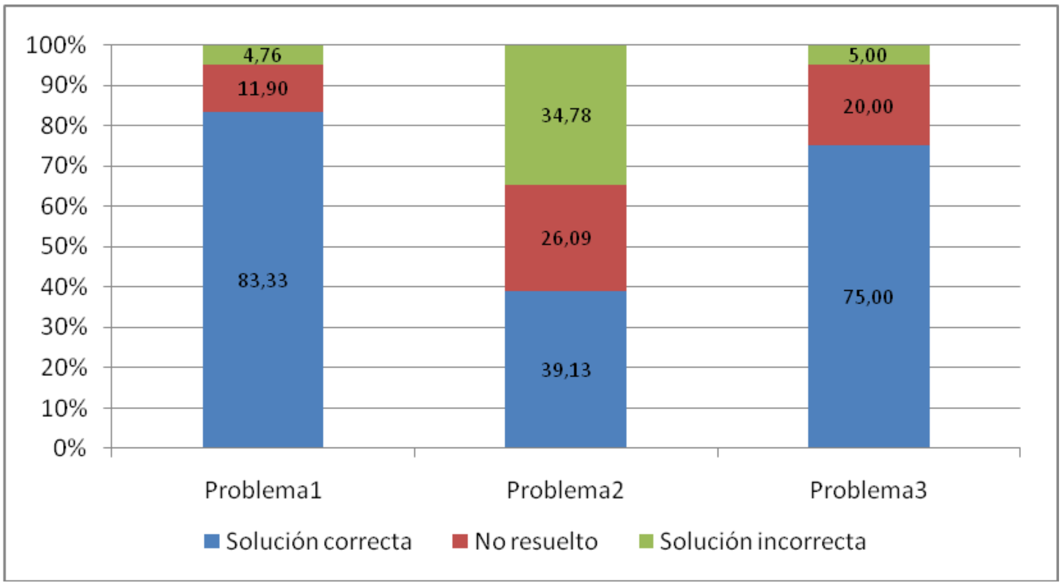


Figura VII.100. Tipo de solución hallada a los problemas fáciles en primer curso.

Resultados de la prueba de segundo curso

A los estudiantes de segundo curso se les propusieron los cuatro problemas que se recogen a continuación:

1. Luis tiene 3 canicas en la mano y unas cuantas canicas en su bolsillo. Al ponerlas juntas en la mesa Luís ve que tiene 11 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Luis en el bolsillo?
2. Lorena tiene una colección de 38 lápices de colores y los quiere meter en cajas. En cada caja caben 6 lápices. ¿Cuántas cajas necesita?
3. Un comerciante ha comprado 3.758 kilos de naranjas y también ha comprado limones. Comprueba que el peso de su compra es de 6.245 kilos ¿Cuántos kilos de limones ha comprado?
4. En una tienda las ventas de un día han sido así: se venden 95 discos, después 23, más tarde 999 y por último 393 ¿Cuántos discos se han vendido ese día?

El problema 1 es el mismo problema 2 de la prueba de primero. Por tanto son problemas aditivos con sentencia asociada a+b=c. De nuevo el problema 1 y el 3 tienen la misma estructura semántica y cambia la cantidad de cifras de los números que aparecen en el enunciado del problema. Puede suceder que el problema 3 resulte, tanto en contexto como en vocabulario, menos familiar para los escolares que el 1. Para los otros dos problemas introducidos, el 2 presenta una estructura multiplicativa del tipo grupos iguales y sus números no superan las dos cifras. El problema 4 presenta una estructura aditiva de cambio con varios pasos y números de más de dos cifras.

Los datos aportados por los estudiantes de segundo curso a las dos cuestiones planteadas (organizados en la Figura VII.101) muestran que casi tres cuartas partes de los estudiantes dice que el problema 1 es fácil. Al comparar con los resultados de primer curso sobre el mismo problema, se aprecia que ha aumentado casi en quince puntos la consideración de problema fácil sobre el mismo, de primero a segundo curso. Respecto al problema 3, dicen que es fácil menos de una cuarta parte de los estudiantes de segundo curso. Comparando con los resultados del problema 1 (cuyo enunciado hemos indicado que posiblemente resulte menos familiar a los estudiantes tanto en su contexto como en su vocabulario), pensamos que también en la gran diferencia en la respuesta ha podido influir la cantidad de cifras de los números involucrados en el problema.

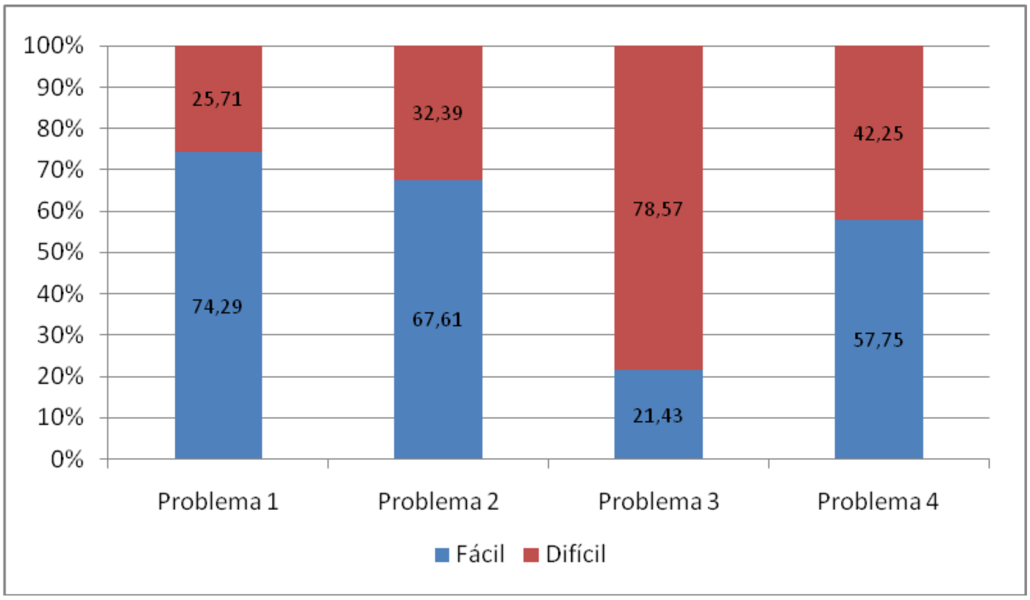


Figura VII.101. Dificultad de los problemas presentados en segundo curso.

El problema 2, es un problema de grupos iguales en la categoría de partición, lo identifican como fácil un porcentaje elevado de estudiantes y para el problema 4 (de la clase de combinación con varios pasos) algo más de la mitad de los estudiantes lo consideran fácil. En el caso del problema 4 la dificultad percibida puede deberse tanto a los números que presentan, de dos y de tres cifras, como al hecho de que aparecen "muchas" cantidades lo cual exige la realización de más de una operación.

Analizando las resoluciones de los problemas (recordamos solo los indicados como fáciles), se observa (Figura VII.102) que la percepción de fácil mostrada hacia el problema 1 se ve corroborada con la resolución adecuada del mismo por un alto porcentaje de estudiantes, también el problema 3 tiene un número de resoluciones correctas por encima de la mitad de los que lo consideran fácil. No ocurre igual con el problema 2 que lo reconocen fácil un gran porcentaje de estudiantes y sin embargo resuelven bien un porcentaje muy bajo de los mismos. Se produce con este problema percepción falsa de facilidad, tal vez el presentar solamente dos números y que estos tengan dos cifras como máximo sea el motivo de la misma. El problema 4 prácticamente lo resuelve bien la totalidad de los escolares que indican que es fácil.

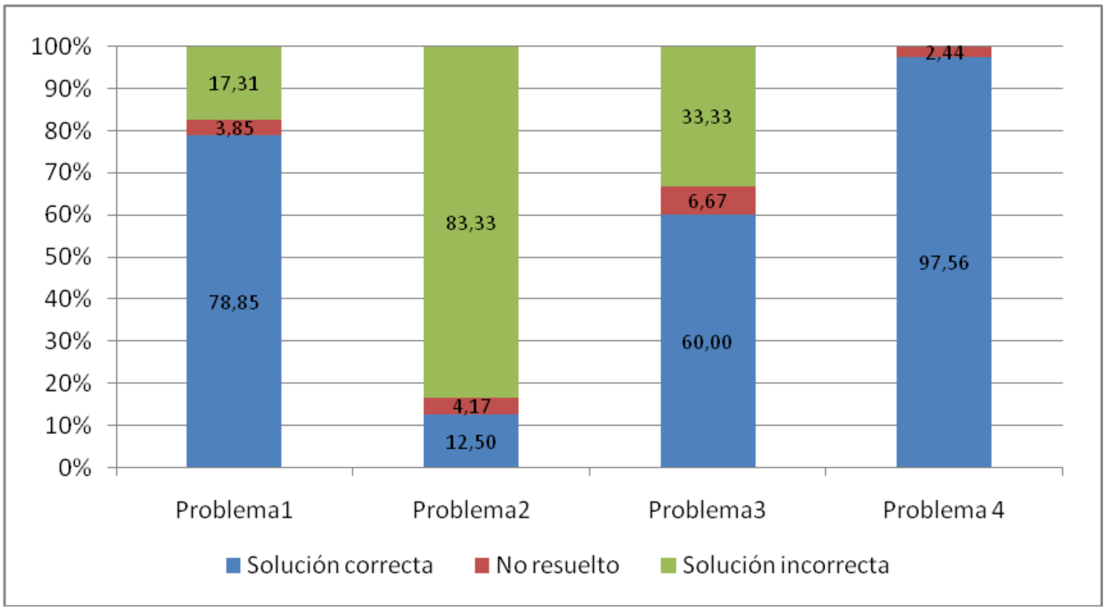


Figura VII.102. Tipo de solución hallada a los problemas fáciles en segundo curso.

Resultados de la prueba de tercer y cuarto curso

A los escolares de segundo ciclo (tercero y cuarto curso) se les propusieron los cuatro problemas que a continuación se recogen:

1. Con sus ahorros Victoria se ha comprado un coche que le ha costado 18.357 Euros y le han quedado 4.987 Euros ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Victoria?
2. Juan ha comprado 3 bloques de helado, uno de fresa, otro de chocolate y otro de limón, quiere hacer helados de dos sabores ¿Cuántos helados diferentes puede hacer Juan?
3. De los libros de una biblioteca los lectores han retirado 45 y han quedado 89 ¿Cuántos libros había en la biblioteca?
4. Un agricultor recoge 16 kilos de fresas. La cuarta parte de las fresas las ha puesto en cajas de 2 kilos y el resto en cajas de 3 kilos. ¿Cuántas cajas ha llenado de fresas? ¿Le ha sobrado?

Los problemas 1 y 3 presentan una estructura aditiva del tipo cambio 6, esto significa que en la sentencia a-b=c la incógnita está en el minuendo a (la diferencia entre estos dos problemas vuelve a ser la cantidad de cifras de los números). El problema 2, es un problema que se puede considerar propio de combinatoria (hay que combinar tres objetos de dos en dos) presenta números muy pequeños, lo que hace posible una resolución intuitiva sin necesidad de hacer uso de la herramienta conceptual de la combinatoria. Por último, el problema 4 presenta una estructura aditiva-multiplicativa, compuesta, además en el enunciado se incluyen dos fracciones en expresión no simbólica.

Analizamos las respuestas de los escolares en los dos cursos del ciclo. En tercer curso (Figura VII.103) los escolares indican que los dos problemas 1 y 3 son fáciles, para los dos casos aparece el mismo porcentaje, aunque uno de ellos contiene números de cinco cifras. Ello nos lleva a afirmar que en este curso los escolares no perciben el aumento de la cantidad de cifras de los números como aumento en la dificultad del problema.

Tanto el problema 2 como el cuatro solo lo señalan como fácil alrededor de la cuarta parte de los escolares del curso.

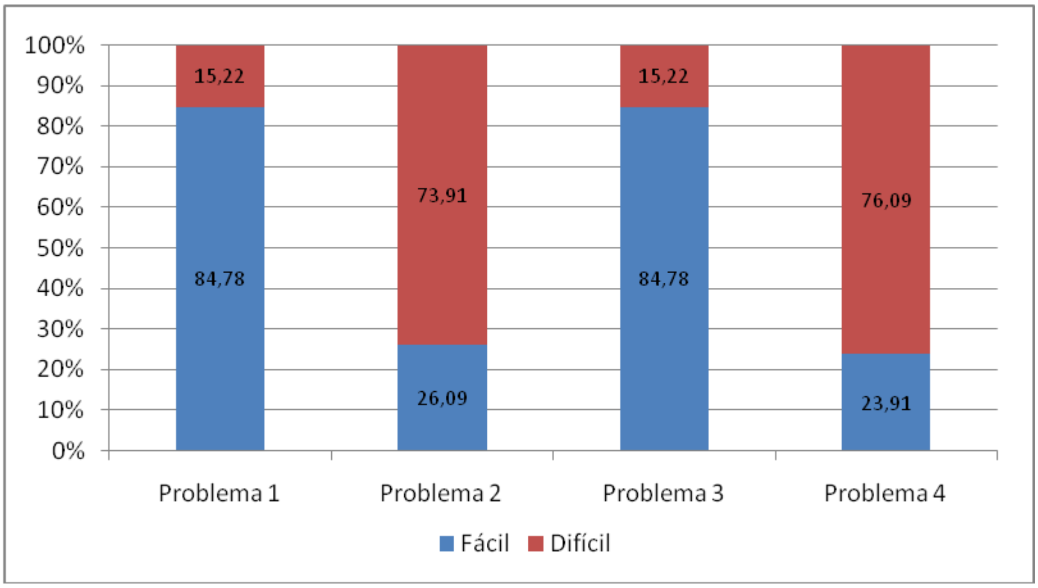


Figura VII.103. Dificultad de los problemas presentados en tercer curso.

En cuanto a la resolución (Figura VII.104). La gran mayoría de los que consideran que los problemas 1 y 3 son fáciles los resuelven correctamente. Puede sorprender que un número menor de estudiantes (si bien la diferencia es pequeña) resuelve correctamente el problema 3, en comparación con lo que ocurre con el problema 1, pero puede deberse a algún error de ejecución no achacable al problema. Algo más de la cuarta parte de los estudiantes que consideran fácil el problema 2 lo resuelven correctamente. Ninguno de los que anota que el problema 4 es fácil lo resuelve de forma correcta. Se crea una percepción falsa de facilidad para este problema, pensamos que debido a la presencia en el mismo de datos numéricos sencillos.

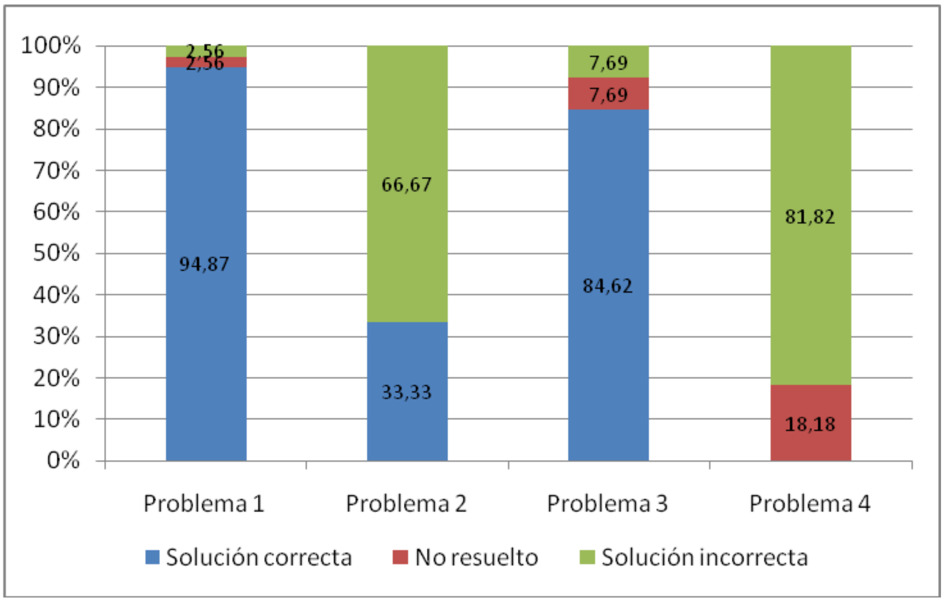


Figura VII.104. Tipo de solución hallada a los problemas fáciles en tercer curso.

En lo que respecta a cuarto curso (Figura VII.105), aumenta algo el porcentaje de los escolares que indican que los problemas 1 y 3 son fáciles, respecto al curso tercero y se mantienen también en este curso los valores igualados, a los de tercero, para los dos problemas.

En cuanto al problema 2 (combinatoria) casi un 69% dice que es fácil y sobre el problema 4, algo menos de 24%, dice que es fácil. Para estos dos problemas cambia la percepción que manifiestan los estudiantes del curso cuarto respecto de los de tercero, en los dos casos aumentan las respuestas en cuanto a fácil y lo hace en mayor proporción en el problema 2 que en el 4 del que se sigue diciendo que es fácil por un porcentaje muy bajo de estudiantes.

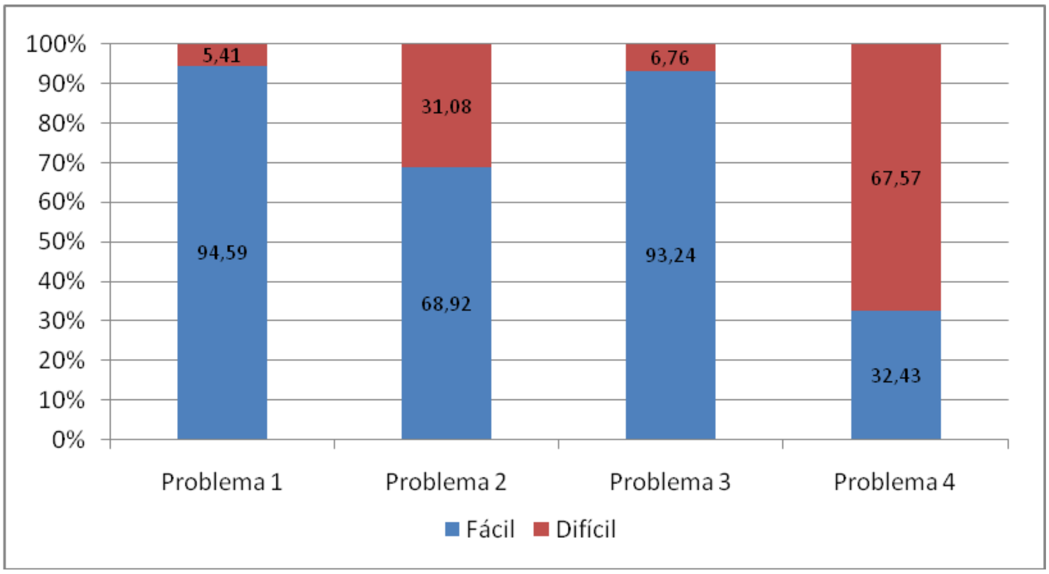


Figura VII.105**.** Dificultad de los problemas presentados en cuarto curso.

Para las resoluciones de los problemas considerados fáciles se tiene que en cuarto curso (Figura VII.106) los problemas 1 y 3 son resueltos correctamente casi en su totalidad. El problema 2 lo resuelven correctamente casi dos tercios de los estudiantes que lo consideran fácil y el problema 4 una tercera parte. La comparación entre los resultados de tercero y cuarto muestra un aumento considerable en cuanto a la resolución correcta de estos dos problemas.

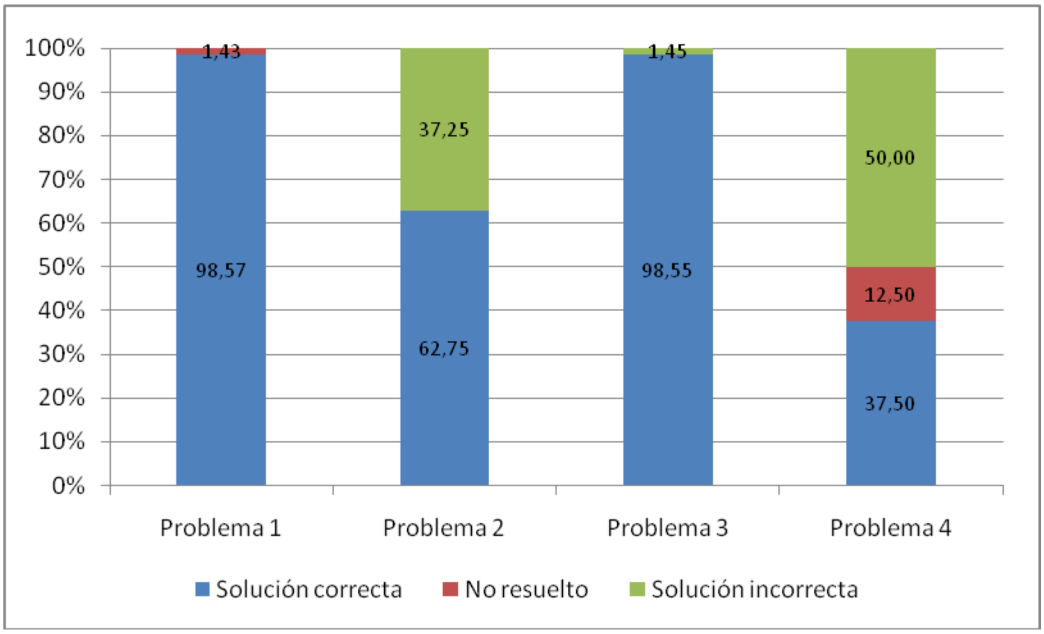


Figura VII.106. Tipo de solución hallada a los problemas fáciles en cuarto curso.

Resultados de la prueba de quinto y sexto curso

En la prueba de tercer ciclo se propusieron cuatro problemas, la prueba es igual para los dos cursos. Los problemas son los siguientes:

1. Marian y Raquel tienen una colección de sellos cada una. Marian tiene 7.236 sellos, 450 más que Raquel ¿Cuántos sellos tiene Raquel?
2. Juan ha comprado 4 bloques de helado, uno de fresa, otro de chocolate, otro de vainilla y otro de limón, quiere hacer helados de dos sabores ¿Cuántos helados diferentes puede hacer Juan?
3. Daniel mide 170 cm. Daniel mide 23 cm. más que Paola ¿Cuántos centímetros mide Paola?
4. Un agricultor recoge 136 kilos de fresas. La cuarta parte de las fresas las ha puesto en cajas de 2 kilos y el resto en cajas de 3 kilos. ¿Cuántas cajas ha llenado de fresas? ¿Le ha sobrado?

Los problemas 1 y 3 presentan estructura aditiva de comparación, tipo 3, lo que significa que la incógnita es el referente del problema (la diferencia entre los problemas 1 y 3 está en la magnitud de los números). El problema 2 es de combinatoria como el que aparece en la prueba de segundo ciclo, pero se ha aumentado un número a la cantidad de objetos a combinar (combinar cuatro objetos de dos en dos). El problema 4, es el mismo problema 4 de la prueba de segundo ciclo.

Para este caso exponemos los resultados de los dos cursos del ciclo. La Figura VII.107 muestra que no hay prácticamente diferencias en los porcentajes de las respuestas de los estudiantes en cuanto a que estos problemas son fáciles, prácticamente todos los consideran fáciles. A los estudiantes de quinto curso no les influye la cantidad de cifras de los números que aparecen en el problema para considerarlo fácil. El problema 2 (de combinatoria) una amplia mayoría dice que es fácil. El problema 4 lo señalan difícil más de las tres cuartas partes de estos estudiantes. Comparando el resultado para el problema 2 con lo que ocurre con su similar en cuarto curso, se aprecia que el porcentaje de respuestas que indican que es fácil es, en este caso, ligeramente inferior que cuarto curso. Comparando los resultados para el problema 4 también ocurre que es inferior. Puede suceder que los estudiantes de cuarto hayan sufrido en este problema percepción falsa de facilidad, cosa que no ocurre con quinto curso.

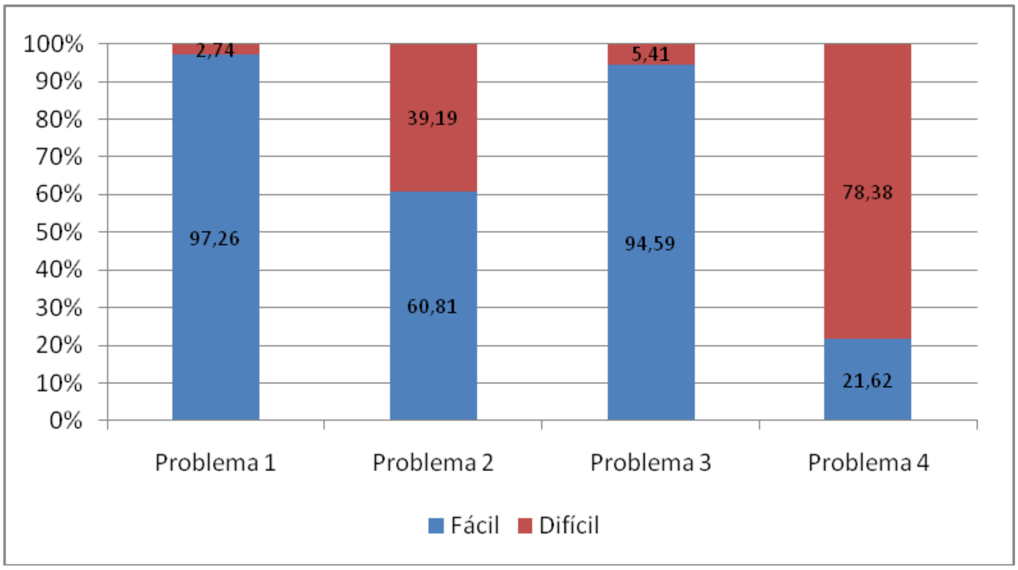


Figura VII.107. Creencias sobre la dificultad de los problemas presentados en quinto curso.

Al analizar las resoluciones hechas (Figura VII.108), se obtiene que no todos los escolares de quinto curso que indican que los problemas 1 y 3 son fáciles, realizan una resolución correcta de los mismos. Ha aparecido un porcentaje equivalente a algo más de la cuarta parte que no han resuelto correctamente el problema 1 (sus números tienen mayor cantidad de cifras que el problema 3), el porcentaje de resoluciones incorrectas es menor en el caso del problema 3, también aquí apreciamos percepción falsa de facilidad. Pensamos que aunque la diferencia de magnitud en los números no influye en estos estudiantes cuando ha de indicar si un problema lo consideran fácil, probablemente sí influya dicha magnitud de los números cuando han de resolver el problema.

Del problema 2, hacen una resolución correcta, alrededor de un tercio de los que indican que es fácil y del problema 4 más de la mitad de los que dicen que es fácil. Considerando los datos relativos a los cuatro problemas, entendemos que, en este curso, es muy alto el porcentaje de problemas que no resuelven correctamente los estudiantes de entre los que han dicho que son fáciles.

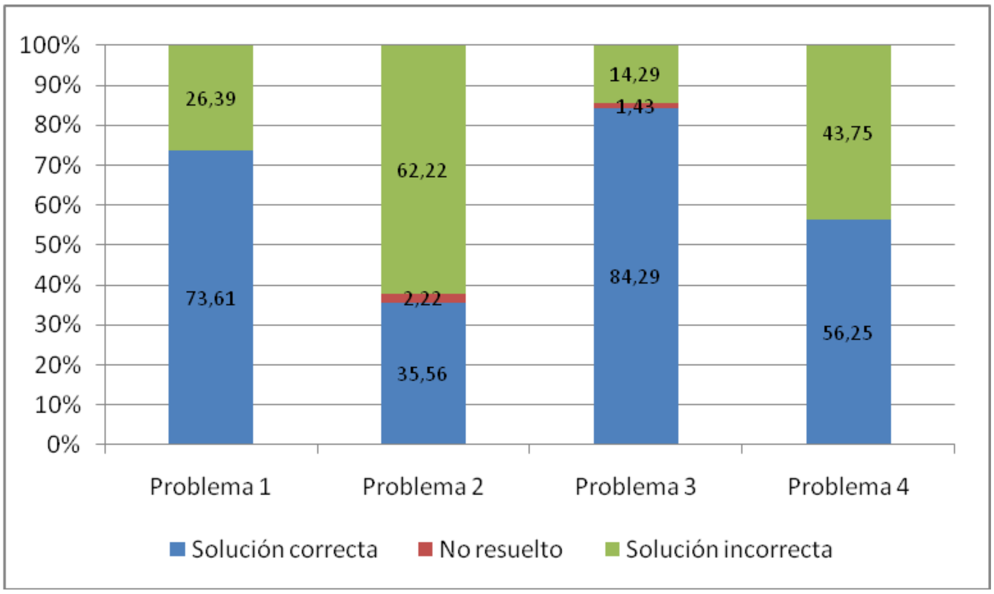


Figura VII.108. Tipo de solución hallada a los problemas fáciles en quinto curso.

En el curso de sexto, se señala por casi todos los estudiantes que los problemas 1 y 3 son fáciles. El problema 2 lo señalan fácil un porcentaje muy alto, casi 87%. Del problema 4 dicen que es fácil algo más de la mitad de los escolares de sexto curso, lo que significa que poco menos de la mitad lo siguen considerando difícil. Comparando con los resultados de quinto curso, se percibe un aumento importante en cuanto a la consideración de los problemas 2 y 4 que son percibidos fáciles, en porcentajes muy superiores a lo que se obtiene en quinto curso.

En general, un 84% de los alumnos de sexto consideraron los problemas planteados fáciles (Figura VII.109).

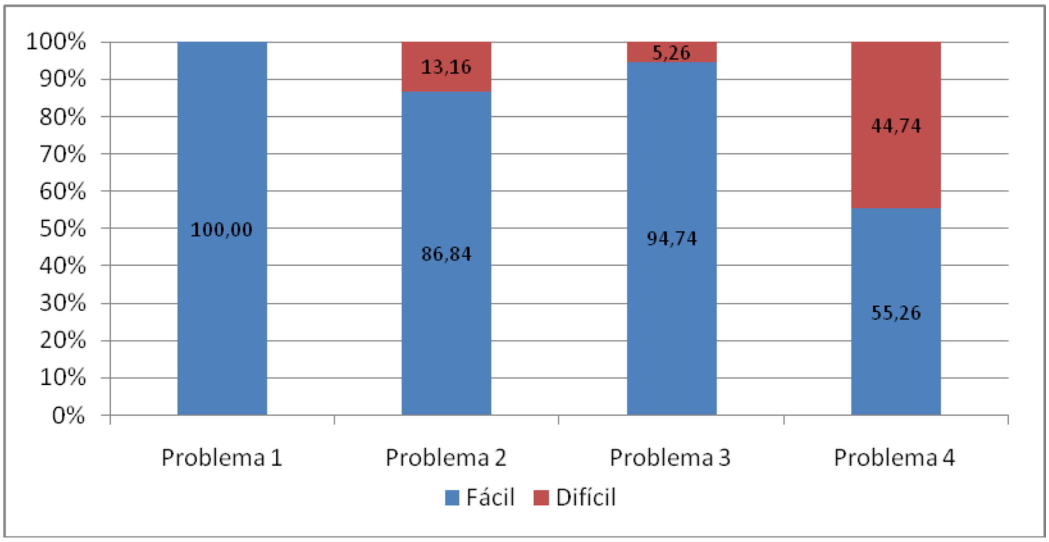


Figura VII.109. Creencias sobre la dificultad de los problemas presentados en sexto curso.

Respecto a la resolución, se comprueba (Figura VII.110) que para este curso los problemas 1 y 3 no ofrecen dificultad en su resolución. En cuanto a la percepción de que el problema 2 es fácil se trata de una percepción falsa de facilidad ya que se contradice con la cantidad de resoluciones no correctas que realizan. Ocurre así mismo en el problema 4 para el que ha habido una cuarta parte de los estudiantes que indicando que el problema es fácil, o no lo resuelven o, si lo hacen, la resolución no es correcta.

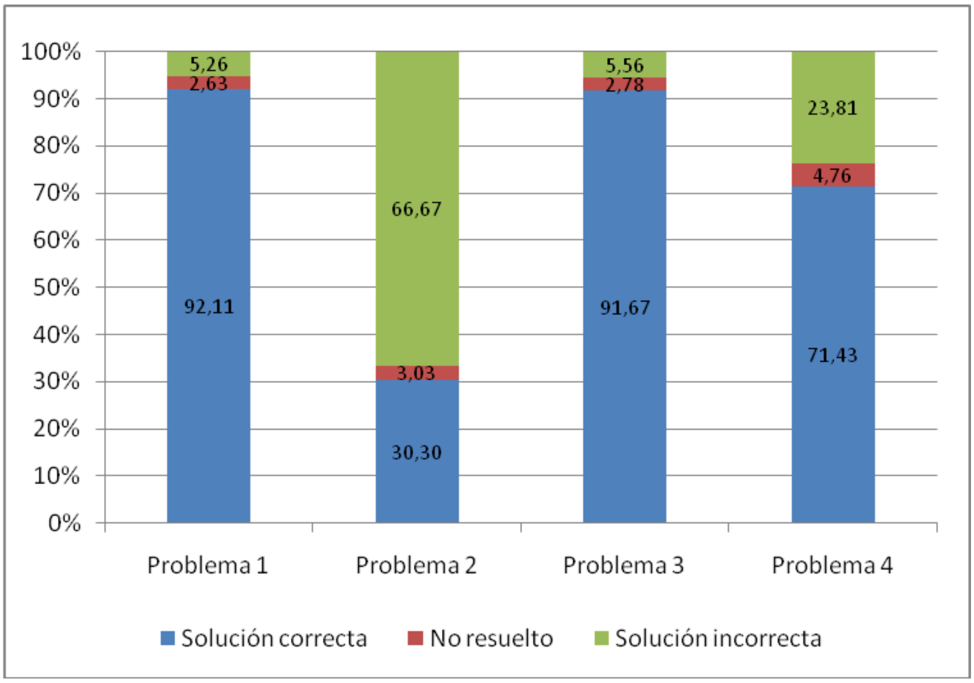


Figura VII.110. Tipo de solución hallada a los problemas fáciles en sexto curso.

VII.5. RESUMEN

Recogemos en este apartado, de forma global y resumida, las respuestas de los estudiantes y damos alguna explicación posible de por qué se producen dichas respuestas.

Casi todos los estudiantes que han participado en la segunda parte del estudio, independientemente del curso al que pertenecen, señalan que saber resolver problemas es importante y así mismo casi todos justifican su afirmación, lo que nos hace indicar que la respuesta dada sobre por qué es importante saber resolver problemas proviene del convencimiento y no es una mera respuesta que persiga "quedar bien". Ello nos da pie para decir que, desde que inician la escolaridad y durante toda la etapa escolar, los estudiantes perciben el aprendizaje sobre resolución de problemas como algo positivo, que va a tener ventajas de algún tipo para aquellas personas que logren dicho aprendizaje.

Respecto a las razones que han dado los estudiantes para justificar sus respuestas, la razón basada en un argumento genérico (en la misma están recogidas aquellas respuestas que hacen alusión al aprendizaje en general, sin aludir al aprendizaje de las matemáticas) está más presente en el curso primero que en el resto de los cursos, va disminuyendo al avanzar en el curso, a excepción de quinto curso donde se rompe la tendencia. Una explicación a este hecho puede ser que en los primeros cursos los estudiantes ven su formación de manera amplia y no parcelada en materias. El aprendizaje de la resolución de problemas es un elemento más del todo que constituye su aprendizaje. Respecto a la razón escolar (que hace referencia a que resolver problemas ayuda a aumentar y mejorar los aprendizajes matemáticos y supone beneficios escolares) se presenta con fuerza en los tres primeros cursos, baja en los dos cursos siguientes, aunque se mantiene alta, y cae a un nivel bajo en sexto curso. Entendemos como explicación a este hecho que en estos cursos no hay aún percepción de la conexión entre los aprendizajes escolares y el desarrollo de la vida, percepción que se va adquiriendo a partir de cuarto curso. Afirmamos esto porque es a partir de cuarto curso cuando el factor social adquiere relevancia notable que se mantiene en quinto curso y experimenta un fuerte aumento en sexto curso. El factor social en el que se incluyen las respuestas que se basan en que saber resolver problemas ayuda a las personas a desenvolverse en su vida diaria, es más propio de las respuestas en los tres últimos cursos de primaria, sobre todo en sexto curso. Creemos que se van desprendiendo de las situaciones de aprendizaje ya sea a nivel general o particular de las matemáticas para percibir su utilidad en el desenvolvimiento de la vida diaria. El factor profesional ha estado presente de forma testimonial en los estudiantes de primaria. Ni los estudiantes de los últimos cursos perciben que el conocimiento sobre resolución de problemas puede tener influencia en la vida profesional de las personas.

Tiene mucha relación este hecho con las respuestas a la pregunta sobre dónde resuelven problemas. Las respuestas a estas dos cuestiones se refuerzan entre sí. En los tres primeros cursos se indica que los problemas los resuelven en casa y en el colegio, se están considerando en todo momento los problemas que aparecen en el libro de texto y aluden a situaciones puramente escolares. Considerar que se resuelven problemas en un medio no escolar e independientemente de los propuestos en el libro de texto, se manifiesta en los tres cursos superiores y especialmente en sexto curso.

Hay que hacer notar el alto porcentaje de problemas inventados que son coherentes. Nos llama la atención lo ocurrido en los cursos tercero y cuarto donde se da el mayor porcentaje de problemas no coherentes, para lo cual no encontramos una explicación. En cuanto a las razones que han dado lugar a que los problemas inventados no sean coherentes, encontramos que:

- en ninguno de estos enunciados, independientemente del curso, se establece relación entre datos y pregunta;
- la presencia de datos numéricos se mantiene con porcentajes similares en todos los cursos, si bien disminuye en tercero curso;
- la falta de interrogante es muy frecuente en primero y tercer curso, siendo cuarto y sexto los cursos que formulan más preguntas en sus enunciados, éste último más de la mitad de ellos;
- excepto en primer y tercer curso, la mayoría de los enunciados presentan una historia inverosímil, perteneciendo a sexto el porcentaje más alto de todos. No encontramos lógica a esta última circunstancia.

Sobre los elementos que los estudiantes consideran que hace difícil un problema que han inventado apreciamos que en todos los cursos la unión de las razones debidas al enunciado del problema y a los conceptos involucrados en el mismo, constituyen la gran mayoría de las respuestas, estando la razón basada en los conceptos involucrados por delante de la de enunciado del problema, excepto en tercero y cuarto curso que está detrás. La explicación que encontramos a este hecho es que los problemas se perciben unidos a contenidos concretos de estudio, por lo que si no se conoce un contenido el problema ligado al mismo no se sabe resolver. La forma en que está enunciado el problema la apuntan una gran cantidad de escolares (véase Figura VII.111).

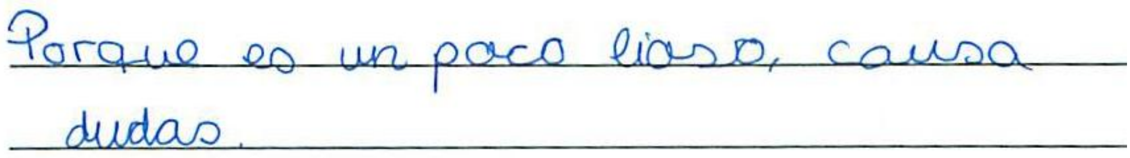

Porque es un poco liaso, causa dudas.

Figura VII.111. Ejemplo del problema de un alumno es difícil debido al tipo de enunciado

Los datos que aparecen en el problema lo señalan como razón de la dificultad sobre todo estudiantes de primero. Para estos estudiantes que están aprendiendo los primeros conceptos numéricos se entiende que consideren una fuente de dificultad la presencia de números grandes(véase Figura VII.112).

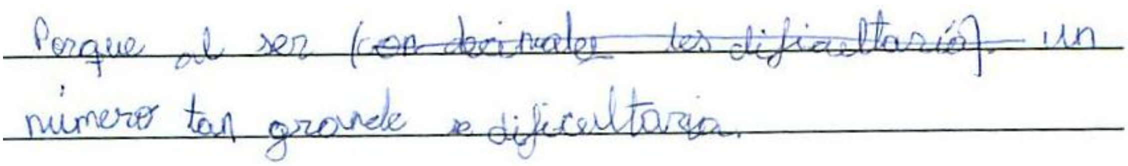

Porque al ser ~~(con decimales les dificultaría)~~ un número tan grande es dificultaria.

Figura VII.112. Ejemplo de que el problema de un alumno es difícil por la magnitud de los números

Se observa que conforme aumenta el curso, hasta cuarto, han considerado el tener más de una operación como razón de dificultad del problema. Para los alumnos de quinto y sexto curso esta causa disminuye. Entendemos que en los primeros cursos la resolución se trabaja con problemas de una etapa y se va ampliando conforme se avanza de curso, pero en quinto y sexto se supone que el que un problema requiera varias operaciones no debe aumentar la complicación de los mismos.

En relación con esta idea está la distinción entre problemas inventados simples o compuestos. En primer curso aparecen muy pocos problemas compuestos aumentando su número a medida que se avanza en el curso, siendo el ascenso más acusado en cuarto curso, respecto a tercero, que en el resto de los cursos. Comparando las dos Figuras VII.24 y VII.27 se aprecia que, si bien los estudiantes enuncian muchos problemas compuestos (Figura VII.27), no es esa la razón que mayormente consideran que hace que el problema sea difícil, sino que a su vez hay otras razones para aumentar la dificultad del problema. En cuarto curso sí se aprecia coincidencia en este sentido, hay un mayor porcentaje de estudiantes que consideran que su problema es difícil porque tiene más de una etapa y a su vez hay muchos estudiantes que inventan problemas con más de una etapa.

En cuanto a las estructuras operatorias presentes en los problemas inventados, la Tabla VII.17, muestra que si bien en primer curso la estructura aditiva es casi la única que aparece, baja casi a la mitad en segundo apareciendo la estructura multiplicativa con fuerza, tanto aislada como en combinación con la aditiva en problemas compuestos. Observamos dos hechos a comentar, uno en relación con los problemas que presentan las dos estructuras y otro aquellos que presentan una sola estructura. En el primer caso que comentamos, conforme aumenta el curso van aumentando de forma gradual los problemas en los que aparecen las dos estructuras, este resultado está dentro de lo que se podría esperar ya que dichos problemas exigen más madurez cognitiva por parte de los estudiantes. En el caso de aparecer una sola estructura se percibe que decrece la presencia de la estructura aditiva y aumenta la multiplicativa, pero dicha tendencia no es "lineal", se produce un ruptura de la tendencia en los cursos tercero y cuarto. Por una parte, en el curso de tercero se da una caída muy acusada del uso de la estructura aditiva y se aumenta el uso de la multiplicativa. En cuarto curso hay un aumento de la estructura aditiva y descenso de la multiplicativa. Consideramos que la excepción en la tendencia se da en los dos cursos, aunque lo ocurrido en cuarto curso es más llamativo al compararlo con lo sucedido en tercero. Entendemos que en tercer curso los estudiantes pueden estar muy influidos por el estudio de la multiplicación y la división, operaciones que en dichos cursos se les dedica mucho tiempo, cosa que en cuarto curso no se hace ya que se suponen conocimientos ya superados.

En los problemas simples, se percibe una situación similar a la comentada. En cuanto a los problemas compuestos, percibimos que es muy escasa la presencia de problemas compuestos en lo que aparezca solo la estructura multiplicativa, si exceptuamos el primero curso, donde no se ha estudiado aún el producto, en el resto de los cursos en la mayor parte de los problemas compuestos intervienen las dos estructuras. De nuevo los cursos tercero y cuarto tiene un comportamiento irregular en la tendencia que se da al aumentar de curso en el sentido de bajar el uso de la estructura aditiva y aumentar el uso de la dos estructuras aditiva-multiplicativa. Nuestra reflexión es que la estructura aditiva no se abandona prácticamente en los problemas compuestos, ya que aparece sola, o bien combinada con la multiplicativa. Para los problemas simples, la Figura VII.34 referida a los ciclos muestra que los problemas simples corresponden a las dos estructuras operatorias, aditiva y multiplicativa, y que las producciones se intercambian entre el primer y tercer ciclo y se reparten equitativamente en el segundo ciclo. Sin embargo, para los compuestos, la estructura aditiva se usa casi siempre ya sea sola o a la vez que la estructura multiplicativa. La explicación que encontramos es que la estructura aditiva impregna de manera potente el currículo escolar quedando su desarrollo fuertemente arraigado en los estudiantes.

Por lo que se refiere a la estructura semántica de los problemas aditivos inventados por los estudiantes, se ha obtenido que en todos los cursos hay presencia de problemas de cambio, si bien esta afirmación puede llevar a engaño cuando nos fijamos en sexto curso ya que se ha presentado un solo problema aditivo de un solo paso. En el resto de los cursos y en lo que se refiere a los problemas aditivos el mayor porcentaje es para la categoría de cambio, seguida de la categoría de combinación, las categorías comparación e igualación aparecen en un porcentaje muy bajo y en algunos cursos no aparecen. En los problemas aditivos simples, mayoritariamente prevalece el tipo de cambio en primer, tercer y quinto curso, en segundo impera el tipo de combinación y en cuarto se reparten las cuatro categorías de forma equitativa. En cuanto a los problemas aditivos compuestos se sigue manteniendo presencia mayoritaria de la categoría de cambio, seguida de la categoría de combinación, con muy escasa representación (en algunos cursos nula) de la categoría de comparación y nula representación en todos los cursos de la categoría de igualación. Entendemos que la explicación a este hecho es doble, por una parte en los libros de texto los problemas más abundantes son los de cambio y combinación como señalan los trabajos de Cantero, Hidalgo, Merayo, Primo Riesco, Sanz, y Vega, (2003b) y Orrantia, González y Vicente (2005). Estos últimos autores señalan:

> *Por lo que se refiere a los tipos de problemas que aparecen en los libros, quizás el aspecto más relevante sea la relación que existe entre los problemas más frecuentes y el grado de dificultad de los mismos según lo planteado desde las distintas investigaciones sobre el tema. Así, los problemas más numerosos corresponden con los más sencillos de resolver, como es el caso de los problemas*

> *de combinación 1 o los de cambio 1 y 2. (…) Algo similar podemos decir de otro de los tipos de problemas que más aparecen en los libros, como los problemas de combinación 2.* (p. 443)

Todo ello proporciona un dato sobre los problemas que más se trabajan en las aulas de educación primaria. Por otra parte, estas categorías se han mostrado con niveles de dificultad menores (Puig y Cerdán, 1988) y si bien a los estudiantes se les indican que inventen un problema difícil para sus compañeros, no consideran aquellas categorías que no les son familiares.

En los problemas inventados correspondientes a la estructura multiplicativa de una etapa, respecto a la estructura semántica ocurre lo siguiente: la categoría que hemos denominado de tasas (para resolver este problema es necesario hacer el producto de dos factores) es la que ha aparecido con más frecuencia, siendo los cursos segundo y quinto los que más problemas han aportado de esta categoría, seguido de tercer curso. Las categorías de comparación y combinación (que también requieren de un producto) apenas si tienen presencia. Respecto a la categoría producto de medidas, relacionado con el cálculo de superficies partiendo de medidas lineales, tiene cierta presencia, aparece en quinto curso y su mayor frecuencia se produce en sexto curso. Entendemos según los datos aportados en la Tabla VII.31y en la Figura VII.33 que de los problemas que se denominan de producto, los estudiantes presentan con más frecuencia los de tasas, y muy poco el resto, excepción merecen los estudiantes de sexto cuyas producciones en la categoría de producto de medidas se deben a que en esa época del curso trabajaban el cálculo de superficies de figuras planas. Respecto a la categoría de grupos iguales (problemas que se pueden resolver mediante una división) que se subdivide en partición y cuotición, se obtiene que raramente aparece la cuotición y sí aparece la partición, con una frecuencia similar a la de la categoría de tasas. Estas dos categorías, tasas y partición, son las que más se prodigan en los libros de texto (Cantero, Hidalgo, Merayo, Primo Riesco, Sanz y Vega, 2003a) y las que más facilidad tienen los estudiantes para resolver (Puig y Cerdán, 1988). El análisis de los problemas multiplicativos compuestos no varía lo dicho para los simples.

Una mirada a los problemas compuestos en los que se combinan las dos estructuras nos lleva a la misma situación que encontramos en los problemas simples de cada una de las estructuras.

Los números que aparecen en los problemas inventados por los estudiantes de la muestra, son en la mayoría de los casos de dos o más cifras, siendo bajo, en todos los cursos el porcentaje que corresponde a números de una sola cifra. Llama la atención el caso de sexto curso que presenta un porcentaje alto de problemas con números de una cifra, dicho porcentaje coincide con el de problemas de más de dos cifras. Así mismo, nos llama la atención los resultados de los estudiantes de primer curso que utilizan la mayoría de ellos números de dos cifras y un porcentaje no desdeñable, números de más de dos cifras. Pudiera ser que los estudiantes de primero al intentar que el problema sea difícil elijan números de más de una cifra, si bien no lo manifiestan tan ampliamente al dar su explicación sobre por qué el problema que han inventado es difícil (Figura VII.12). Por otra parte, se puede pensar que para los estudiantes de sexto, el elemento de dificultad considerado no tiene relación con la cantidad de cifras que contengan los números del problema.

Los números naturales han aparecido en la gran mayoría de los problemas inventados por los estudiantes, consideramos que es lógico que así sea en los tres primeros cursos, si bien en tercero aparecen algunos problemas en cuyos enunciados hay fracciones, en estudiantes de cuarto aparece el uso de los números decimales y es en sexto donde se produce un mayor uso de fracciones y decimales. No obstante, el uso de los números naturales es muy frecuente. Nuestra explicación a este hecho es la ventaja que da el haber dedicado mucho tiempo de estudio a lo largo de la educación primaria a los números naturales y por otra parte las situaciones que se pueden modelizar utilizando números naturales suelen ser más cercanas a los estudiantes que aquellas en las que intervienen números racionales.

La inmensa mayoría de los problemas presentan una sola pregunta o interrogante, si bien se aprecia un aumento del porcentaje de problemas con más de un interrogante a medida que se aumenta en el curso, con una excepción en el curso de sexto. Nos atrevemos a pensar que podría ser que la mayoría de los problemas escolares que trabajan los estudiantes de educación primaria solo presentan un interrogante, si bien este es un punto no estudiado, según nuestra información.

En cuanto a la resolución de los problemas que los estudiantes inventan se aprecia que una amplia mayoría resuelve el problema, lo que nos permite decir que estos estudiantes cuando enuncian un problema, por lo general saben resolverlo. Existe una minoría (6 casos) que enunciando un problema coherente, no lo resuelven o lo resuelven incorrectamente, estando en ocasiones la incorrección en cometer errores de cálculo.

Mirando y comparando a posteriori los resultados obtenidos sobre si existe relación entre problema fácil y lo que saben resolver bien se encuentra que:

Los estudiantes de primer curso consideran fácil un problema aditivo de cambio cuya sentencia asociada es a+b=? (tipo 1), que presenta números de una cifra y lo resuelven correctamente y consideran difícil un problema similar que presenta números de tres cifras. En este mismo curso un problema de combinación cuya sentencia asociada es a+?=c , con números de una y dos cifras es apreciado como fácil por poco más de la mitad de los estudiantes y de los alumnos que consideran fácil dicho problema 2, lo resuelven correctamente solo una tercera parte.

Esta clase de problema de combinación es de los que aparecen con más frecuencia en los libros de texto, siguiendo a los de cambio (Cantero et al, 2003b), si bien el tener la incógnita en uno de los sumandos obligaría a transformar dicha suma en resta para aplicar directamente un algoritmo o a utilizar otra estrategia. La estructura semántica de estos problemas y el lugar que ocupa la incógnita hace que el nivel de dificultad de este tipo de problemas sea mayor que el del problema 1 (Puig y Cerdán, 1988) lo que puede explicar la diferencia en dificultad mostrada por los estudiantes en comparación con el problema 1.

En segundo curso el problema 1 (que coincide con el 2 que se propone a primer curso) es considerado fácil por casi las tres cuartas partes de los estudiantes, lo cual supone un aumento respecto de los estudiantes de primer curso de alrededor de 25 puntos. Entre los que lo consideran fácil, lo resuelven correctamente casi un 80%. Estos mismos estudiantes consideran difícil ese mismo tipo de problema con números de cuatro cifras. De casi la cuarta parte que lo considera fácil, solo el 60% lo resuelve de forma correcta. Esta observación nos lleva a pensar que en este problema la cantidad de cifras de los números ha podido influir en la dificultad del problema. El problema 2 (problema que se resuelve directamente haciendo una división entre los números que aparecen en el problema) lo han considerado fácil 48 estudiantes pero de ellos han resuelto de forma incorrecta 40 de ellos, produciéndose lo que hemos considerado como percepción engañosa (o falsa) de la facilidad del problema. Ha podido suceder que los números de una y dos cifras sea un factor que haya influido en dicha percepción, aunque no descartamos la intervención de otros factores como la familiaridad de la situación que describe el problema. Para el problema 4 (que se puede resolver mediante una suma de cuatro sumandos o tres sumas encadenadas), si bien un número elevado de estudiantes lo considera difícil, casi la totalidad de los que los han considerado fácil lo resuelve correctamente. Este resultado nos hace pensar que a partir de segundo curso al menos la mitad de los estudiantes da muestras de poder resolver problemas de combinación 1 de varios pasos.

En tercer curso, no afecta la cantidad de cifras que tienen los números que forman parte del enunciado del problema para considerarlo fácil o difícil. El mismo tipo de problema de cambio tipo 6 lo consideran fácil y lo resuelven correctamente tanto si presenta números de cuatro cifras como de dos cifras. Consideran difícil el problema 2, este es un problema que se puede considerar no rutinario. El problema 4 resulta ser difícil para la mayoría de los estudiantes, si bien en tercer curso menos de una cuarta parte de los estudiantes lo consideran fácil y ninguno lo resuelve correctamente. Se produce en estos estudiantes también percepción falsa de la facilidad del problema

En cuanto al curso de cuarto se manifiesta en la actuación de los escolares que se sigue manteniendo el hecho de que no afecta la cantidad de cifras de los números de los problemas para considerarlos fáciles. Las variaciones que encontramos entre tercero y cuarto curso están en la consideración de fácil o difícil para los problema 2 y 4. Se produce un gran aumento de los escolares que consideran fácil el problema 2 (problema no rutinario) y un aumento menor en la consideración del problema 4 como fácil, aumentando también el número de estudiantes que resuelven los dos problemas correctamente.

En quinto curso el problema de estructura aditiva de comparación y referente desconocido no lo consideran difícil y lo resuelven la mayoría correctamente tanto con números de tres o de cuatro cifras. El problema 2, no rutinario, lo consideran fácil un número de estudiantes que si bien es alto, se queda muy por debajo de las tres cuartas partes y de ellos poco más de la tercera parte lo resuelven correctamente. Por tanto, también en este caso se produce percepción falsa de facilidad con este problema. Por lo que respecta al problema 4 hay más porcentaje de alumnos que en cuarto que lo consideran difícil.

En sexto curso se sigue manteniendo el hecho de que no afecta la cantidad de cifras de los números de los problemas para considerarlos fácil o difícil. Las variaciones que encontramos entre quinto y sexto curso están en la consideración de fácil o difícil para los problemas 2 y 4. Se produce un aumento considerable en el número de estudiantes que los consideran fáciles. Ahora bien, las resoluciones de los mismos muestran que para el problema 2 se ha producido también percepción falsa de la facilidad del problema.

Por ciclos resumimos las ideas más relevantes:

En primer ciclo, los estudiantes consideran fácil un problema aditivo de cambio, tipo 1, que presenta números de una cifra y lo resuelven correctamente. Consideran difícil un problema aditivo de cambio, tipo 1, que presenta números de tres cifras. En el primer año del ciclo no resuelven correctamente un problema de combinación, tipo 2, con números de una y dos cifras, mejorando este hecho en el segundo año del ciclo. Consideran difícil un problema de combinación, tipo 2 con números de tres cifras, la mitad considera fácil y resuelve correctamente un problema de cambio de varios pasos y números de tres cifras. Se considera fácil si bien no se resuelve un problema de multiplicativo tipo grupos iguales. Se produce percepción falsa de facilidad en un par de problemas.

En segundo ciclo, no influyen en los estudiantes los números de tres cifras para considerar la dificultad de un problema. Resuelven problemas de cambio, tipo 6. Consideran difícil un problema no rutinario (combinatoria). Se produce percepción falsa de facilidad en más de un problema.

En tercer ciclo, resuelven problemas de comparación con referente desconocido, no influye la cantidad de cifras de los números sobre la percepción de facilidad. Consideran difícil un problema no rutinario (combinatoria). Se produce percepción falsa de facilidad en más de un problema.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

La investigación que recoge este trabajo de tesis doctoral consiste en un estudio, realizado en el campo de la educación matemática, centrado en explorar la capacidad de alumnos de educación primaria para inventar problemas e indagar en algunas de las características de los problemas que plantean, en concreto, los tipos de números que emplean y el número de cifras de los mismos, las estructuras semánticas y operatorias presentes en sus producciones, el número de preguntas realizadas en los problemas inventados, la adecuación de las operaciones que utilizan para la resolución de los enunciados, las estrategias de resolución, así como, conocer cuándo consideran que un problema es difícil.

Con este capítulo concluimos el trabajo de tesis doctoral. Nuestras conclusiones se basan en el análisis de datos realizado en los tres capítulos anteriores. Tratamos de explicitar la confirmación o refutación de las conclusiones a las que llegamos en la prueba exploratoria a partir del análisis de los datos recogidos en la prueba confirmatoria. Las conclusiones que se presentan están directamente relacionadas con las preguntas y objetivos que nos formulábamos en el capítulo I, por lo que vamos a ir recogiéndolos y dándoles respuesta a lo largo de los párrafos siguientes.

Al final del capítulo mostramos las principales aportaciones de este trabajo y las perspectivas futuras de investigación que se han identificado.

VIII.1.RESPUESTAS A LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Como se ha comentado en el capítulo I, el objetivo general se concreta en objetivos específicos con el fin de dar respuesta tangible a las preguntas que llevan implícitos dichos objetivos. A continuación detallamos el modo y el grado en el que se ha dado cumplimiento a los objetivos parciales a partir de acciones concretas. Estos son:

VIII.1.1 OBJETIVO O1

Recordamos en primer lugar la formulación del objetivo 1: *Identificar las creencias de los alumnos de educación primaria sobre los problemas de matemáticas y su utilidad.*

Sobre este objetivo se formuló el siguiente objetivo parcial:

(O1, A). Analizar las respuestas de los escolares a interrogantes que versan sobre qué es un problema; qué utilidad tienen los problemas; cuándo y dónde se resuelven problemas; la necesidad de los números en los problemas y la posibilidad de que existan distintas formas de resolver un problema.

La investigación nos ha proporcionado las evidencias siguientes que presentamos organizadas según si se refieren a la noción de problema, a la utilidad de resolver problemas, a los lugares en los que se resuelven problemas o a las creencias de los estudiantes sobre la presencia de los números en los problemas.

Noción de problema

Todos los alumnos de la primera recogida de datos, responden y dan alguna explicación sobre lo que piensan que es un problema, si bien algunos alumnos confiesan que saben lo que se les pregunta pero no saben explicar bien la respuesta. En la mayoría de las respuestas aparece la palabra resolver (esto ocurre en todos los ciclos), tanto cuando se refieren a una situación generalizada que han de resolver o a algo que ayuda a reforzar la memoria, como cuando hacen referencia a responder una pregunta mediante cuentas, realizar una operación aritmética, o cuando proponen un ejemplo sin descripción. La actuación de los estudiantes al inventar y resolver sus producciones pone de manifiesto que, desde primer ciclo, consideran que un problema requiere de una pregunta a la que se le ha de dar una respuesta. Esto ocurre incluso en los problemas que se calificaron como no coherentes, entre ellos los enunciados que se asemejan a una adivinanza como: *¿Cuántas camisetas hay en el mercado?* o *¿Qué le falta a la fuente?*

En diversas ocasiones los estudiantes manifestaron que existían problemas que no tenían números "*Cuando es un problema que tiene una persona lo mismo, que tienes que intentar arreglarlo con él*…". Por tanto, distinguen entre problema matemático y no matemático. Aunque en la mayoría de los casos los alumnos se refieren a problema matemático cuando se les plantea la pregunta.

En la toma confirmatoria no se formuló esta cuestión como tal pero de sus invenciones se intuye que se ratifica la idea de que para los escolares un problema es resolver una cuestión mediante operaciones matemáticas, ya que casi todos ellos en sus producciones formulan una pregunta, lo que indica que esperan que se le dé una respuesta. Así mismo ningún estudiante propone un problema no matemático, incluso los escolares que inventan problemas sin datos numéricos. Todos los enunciados se refieren a contenidos matemáticos.

Utilidad de resolver problemas

En la primera toma de datos, los alumnos de primer ciclo generalmente dan respuestas de tipo genérico (para aprender) a la pregunta sobre la utilidad de resolución de problemas. Los de segundo ciclo aportan mayoritariamente razones escolares y sociales (para pasar de curso, ser buen estudiante o poder desenvolverse con soltura en situaciones de compra-venta) y los del tercer ciclo aportan principalmente razones sociales. Las respuestas dadas por los estudiantes en la segunda recogida de datos coinciden con la primera, con la única salvedad de que en primer ciclo se le da cabida en porcentajes iguales a las razones genéricas y escolares. Este cambio puede ser debido a la mayor participación de estudiantes en la prueba confirmatoria. Por tanto, podemos concluir que hay una evolución en las creencias de los alumnos de primaria a medida que avanzamos de ciclo educativo sobre la importancia de saber resolver problemas. En primer ciclo aparecen firmes las razones genérica y escolar, en segundo ciclo las razones genéricas dejan paso a las sociales y permanecen en la misma medida que las escolares, para llegar en tercer ciclo a una percepción social y profesional. Luego, en las primeras edades los niños se centran en justificaciones básicamente de aprendizaje, tanto globales como escolares, dando cabida a la importancia social de las matemáticas a medida que avanzan de curso. Se encuentran diferencias significativas entre esta variable y el ciclo, por lo que se evidencia una relación de dependencia entre dichas variables.

Lugares donde resuelven problemas

A la cuestión ¿dónde resuelven problemas?, casi todos los alumnos de la primera recogida de datos coinciden al afirmar que los resuelven cuando realizan tareas escolares tanto en el aula como en su casa; la mitad de los participantes reconocen resolver problemas también cuando van a realizar la compra.

Los resultados obtenidos en la prueba confirmatoria indican que en los dos primeros ciclos más del 90% de los alumnos dicen resolver problemas en casa o en el colegio. En el tercer ciclo disminuye este porcentaje para aumentar a un 20% los que también reconocen que en tareas de compra-venta se resuelven problemas. Dado que en la prueba exploratoria el entrevistador instó a los alumnos a que pensaran lugares distintos a los que habitualmente realizaban tareas escolares donde también se pueden resolver problemas e incluso les cuestionó directamente por situaciones de compraventa, pensamos que esta es la causa por la que en la primera recogida de datos encontramos, en todos los ciclos, alumnos que identifican la resolución de problemas con situaciones de compra-venta. En la prueba confirmatoria no se interfiere en ningún momento en lo que los participantes escriben, esto produce que no haya un esfuerzo añadido en los niños para pensar en lugares alternativos a la casa o el colegio para resolver problemas. Con esto nos atrevemos a afirmar que cuando se les pregunta a los estudiantes de primaria dónde resuelven problemas identifican casi exclusivamente los lugares donde realizan sus tareas escolares: la casa y el colegio.

Creencias de los estudiantes sobre si un problema ha de tener necesariamente números

En la prueba exploratoria se preguntó, en la primera parte de la entrevista, sobre la conveniencia o no de que un problema tuviera números en su enunciado. Se obtuvieron respuestas afirmativas con distintas justificaciones para ellas. Algunas de dichas justificaciones están basadas en que son necesarios para poder realizar las operaciones aritméticas básicas, otras se sustentan en que favorecen la comprensión y resolución del problema, y algunas condicionan su necesidad al tipo de problema, es decir, que sea matemático o no. Con esto entendemos que para estos alumnos los números han de estar presentes en los problemas matemáticos y que éstos tienen un papel facilitador en la resolución de problemas.

En el análisis de la prueba confirmatoria se observa que de 351 enunciados inventados por los estudiantes solo 4 no presentan datos numéricos, lo que evidencia que para estos alumnos un problema matemático necesita presentar números en su enunciado. Por tanto, concluimos que los alumnos de primaria vinculan la idea de problema a que éste contenga datos numéricos.

VIII.1.2 OBJETIVO O2

El segundo objetivo planteado es el siguiente: *Establecer la capacidad de los estudiantes de educación primaria para inventar problemas*.

Hemos atendido a este objetivo a través de dos objetivos parciales:

(O2, A). Describir las reacciones de los estudiantes ante la tarea propuesta de invención de problemas.

Los participantes de este estudio, tanto en las entrevistas como en la prueba escrita, en todo momento mantuvieron una buena disposición ante las tareas y preguntas que se les iban formulando, en un ambiente de trabajo relajado y de cierto contento.

(O2, B). Estudiar las producciones que proporcionan los escolares como respuesta a dicha tarea de inventar problemas en base a su coherencia y originalidad; su estructura semántica y operatoria; el número de preguntas formuladas y el número de operaciones involucradas en la resolución de los problemas inventados.

Presentamos la información relativa a este objetivo organizada en seis subapartados, según refiera a la coherencia de los enunciados, la originalidad de los mismos, su estructura operatoria, su estructura semántica, el número de preguntas formuladas o el número de operaciones involucradas en la resolución de los enunciados propuestos.

Coherencia de los enunciados

En la recogida de datos efectuada en el año 2001, no todos los enunciados inventados por los alumnos incluían los elementos necesarios para poderlos identificar como un problema (solo el 22,22% de las producciones no cumplían los requisitos), siendo la causa más frecuente la falta de una historia verosímil. Dos de los enunciados propuestos correspondían a la realización de operaciones aritméticas (uno de ellos aparecía entre interrogantes), en otros dos no aparecían datos numéricos, y otros no relacionaban la pregunta formulada con los datos aportados. En este primer estudio, regido por las entrevistas, ningún alumno de primer curso formuló problemas coherentes, pero en tres de las invenciones de primaria se formula una pregunta[17]. Este hecho nos lleva a pensar que, para estos niños, el hecho de tener que contestar a una pregunta implica tener que buscar o alcanzar una meta, por lo que tales situaciones las consideran un problema (aunque no cumplan los requisitos que nosotros imponemos para ser considerados como tales).

En la segunda recogida de datos (año 2010) los estudiantes formularon problemas coherentes desde primer curso, con un porcentaje superior al 85% en primer y tercer ciclo, mientras que en segundo ciclo fue de un 67%. La no coherencia de los problemas etiquetados como no coherentes se debe a que no contienen datos numéricos (la mitad de ellos) o no incluyen una pregunta en sus enunciados (entre un 75 y un 80%), y en aquellos que sí presentaban datos numéricos y pregunta, ninguno estableció relación entre la pregunta y los datos aportados. Existen diferencias significativas por curso y ciclo, por lo que se evidencia una relación de dependencia entre dichas variables.

Al comparar los datos obtenidos en las dos recogidas de datos obtenemos que los porcentajes de coherencia de los enunciados coinciden (77,78% en el año 2001 y 78,7% en el año 2010) y que se amplía el curso a partir del cual los alumnos inventan enunciados coherentes: de segundo curso en el año 2001 a primer curso en el año 2010. Estos resultados nos permiten afirmar que desde primer curso de educación primaria los alumnos inventan problemas coherentes, si bien algunos de los alumnos de primero están en los inicios de esta capacidad y, en algunos casos, tanto ellos como estudiantes de cursos superiores pueden cometer errores en la expresión escrita de los mismos que conducen a la perdida de parte de su coherencia.

Originalidad de las producciones

Para poder hacer una comparación entre los problemas inventados y los que aparecen en los libros de texto tendríamos que haber hecho un estudio minucioso de las características que presentan los problemas incluidos en los libros de texto. Por la extensión que supone este estudio hemos pospuesto este análisis para más adelante. No obstante, se observa en los enunciados inventados que la gran mayoría se podrían encontrar en los libros de texto de los escolares.

[17] Incluso uno de los dos alumnos que inventan operaciones aditivas las presenta entre interrogantes (¿39-20?).

La única diferencia que hemos advertido corresponde a la producción de una alumna, la cual da por conocidos unos datos que no aparecen en el enunciado y que efectivamente su compañero interpreta como datos implícitos resolviendo sin dificultad el problema propuesto. Esta situación no es habitual en los problemas escolares de los libros de texto.

Estructura operatoria

En los problemas inventados por los alumnos en las entrevistas ha predominado ligeramente la estructura multiplicativa. La estructura aditiva tiene una representación del 36,36% de los problemas coherentes, la multiplicativa un 40,91% y, cuando se han conjugado las dos estructuras, hemos obtenido un 22,73%. Los alumnos de primero inventan solo problemas aditivos, en segundo inventan también problemas multiplicativos, en tercer curso utilizan la estructura aditiva más que la multiplicativa, a partir de cuarto curso utilizan solo la estructura multiplicativa y desde quinto en la mitad de los enunciados se combinan la estructura aditiva con la multiplicativa.

En la segunda recogida de datos las invenciones de los estudiantes corresponden mayoritariamente a problemas aditivos con un 43,33%, le siguen los problemas multiplicativos con un 28,89% y los aditivo-multiplicativos con un 27,78%. En esta ocasión recogemos que todas las invenciones de primer curso utilizan la estructura aditiva excepto un problema que corresponde a la estructura multiplicativa. Estos resultados confirman los del año 2001 ya que no es relevante que haya solo una producción multiplicativa. En segundo curso hay un número importante de problemas multiplicativos y también aditivo-multiplicativos alcanzando estos dos tipos de problemas casi el 50% de las producciones de este curso, por tanto, se modifican los resultados obtenidos de la primera toma de datos ampliándose el tipo de invenciones al incluir también problemas compuestos aditivo-multiplicativos. En tercero priman los problemas multiplicativos, y el porcentaje de problemas aditivos y aditivo-multiplicativos es similar, lo que lleva a refutar los resultados de la primera prueba. En cuarto, a diferencia de la primera toma de datos, los alumnos aportan más problemas de estructura aditiva, y en quinto y sexto sí coinciden con los resultados del 2001 en que la mitad de las producciones son aditivas-multiplicativas. Siendo estas diferencias, significativas por curso y ciclo tanto en problemas simples como en compuestos.

Esto hace que no se puedan ratificar los datos de la prueba exploratoria en cuanto a la estructura operatoria predominante en los problemas inventados. Globalmente, en la prueba confirmatoria (año 2010) abundan más los problemas aditivos mientras que en la exploratoria son los multiplicativos (año 2001) y tampoco coinciden los resultados obtenidos en las dos tomas de datos de los cursos segundo, tercero y cuarto. Podemos afirmar que la estructura multiplicativa está presente desde segundo curso en las dos recogidas de datos, que los problemas aditivo-multiplicativos se generan desde segundo curso, y que desde tercer ciclo la mitad de las producciones contienen las dos estructuras operatorias. Por tanto, se confirma que los problemas aditivos están presentes a lo largo de toda la etapa, aunque preferentemente en los dos primeros ciclos, que los problemas multiplicativos aparecen desde segundo curso y que a medida que avanzamos de curso va aumentando gradualmente la invención de problemas donde se combinan las dos estructuras operatorias. Consideramos que este resultado está dentro de la normalidad ya que dichos problemas demandan cognitivamente mayor madurez por parte de los escolares.

Estructura semántica

Los alumnos que participaron en la primera recogida de datos, cuando inventaron problemas aditivos, lo hicieron principalmente de la categoría semántica de cambio, independientemente del número de etapas de los mismos. La estructura semántica de comparación únicamente aparece una vez en un problema simple y la de combinación otra vez en uno compuesto. No inventan ningún problema aditivo de igualación. Respecto a los problemas multiplicativos encontramos solo las dos categorías semánticas de grupos iguales de partición y el de tasas, en cantidades muy próximas, tanto en problemas simples como en compuestos.

La segunda recogida de datos proporciona enunciados simples aditivos en todos los cursos, en ellos están presentes las cuatro clases semánticas, excepto en tercer curso que no aparecen problemas de igualación y en sexto que solo se inventan problemas de cambio y combinación. La estructura de cambio es la que predomina en esta prueba confirmatoria, seguida de la de combinación, comparación y en último lugar la de igualación. Los enunciados compuestos aditivos son solo de cambio, de cambio y combinación, o de cambio y comparación. . Estos resultados nos llevan a confirmar que el tipo de problemas de cambio está muy asentado en los alumnos de toda la etapa educativa así como los de combinación y, aunque han aparecido problemas de los tipos comparación e igualación, estos tienen escasa presencia.

Los problemas simples multiplicativos de tasas son los que aparecen en todos los cursos con el porcentaje más alto, muy cerca se encuentran los de grupos iguales de partición; éstos los inventan alumnos de cinco cursos. Le siguen los de producto de medidas, comparación y los de grupos iguales del tipo cuotición con solo una producción. No aparece en ningún enunciado la estructura semántica de combinación. Respecto a los problemas compuestos multiplicativos casi todos los alumnos que producen este tipo de enunciados utilizan el significado de tasas, desde segundo curso. En segundo curso, no lo combinan con ninguna otra categoría, en tercero, cuarto y sexto lo utilizan junto con el significado de grupos iguales de partición y en quinto curso solo inventan problemas multiplicativos de más de una etapa del tipo de partición. Estos resultados no coinciden con los obtenidos en la prueba exploratoria, hay una mayor variedad de significados semánticos de los problemas multiplicativos, en la segunda recogida de datos, que en la primera. También aparece con fuerza en tercer ciclo la categoría de producto de medidas en la prueba confirmatoria que no tiene presencia en la exploratoria. Sí se mantiene en las dos pruebas que prevalecen principalmente dos categorías en los problemas multiplicativos, independientemente del número de pasos, que son la de tasas y la de grupos iguales de partición.

Por tanto, los datos confirmatorios refutan algunos de los exploratorios, los alumnos de educación primaria inventan principalmente problemas aditivos de cambio pero también utilizan el resto de las categorías semánticas en sus invenciones. Sí se confirma que en los problemas multiplicativos predominan las categorías de tasas y de grupos iguales de partición, independientemente del número de etapas del problema. Esto puede ser debido a que son las estructuras que más ejercitan en los años de escolaridad, pues son las categorías que mayoritariamente abundan en los libros de texto (Cantero, Hidalgo, Merayo, Primo, Sanz, y Vega, 2003a) y también son las situaciones que con mayor frecuencia se identifican en la vida real. El número de enunciados inventados en el año 2010 evidencia que el uso de todas las estructuras semánticas, tanto de los problemas simples aditivos como de los multiplicativos, están presentes en las invenciones de los alumnos, con la salvedad de problemas de combinación de estructura multiplicativa. Cuando inventan problemas de más de una etapa se corrobora que en los problemas aditivos se mezclan la estructura de cambio con la de combinación o comparación y en los multiplicativos o bien son solo de grupos iguales de partición o solo de tasas o combinan estas dos estructuras semánticas a la vez.

Número de preguntas formuladas

En la primera recogida de datos la mayor parte de los problemas planteados presentan una sola pregunta, salvo en dos casos que se plantean dos interrogantes y en otros dos que se formulan tres interrogantes. El número de preguntas no presenta relación con el número de etapas pues hay problemas de más de una etapa en los que solo se formula una pregunta y uno que tiene dos preguntas aunque es de una etapa. Es relevante que las producciones que plantean más de una pregunta corresponden únicamente a estudiantes de cuarto curso.

Los datos recogidos en 2010 ponen de manifiesto que los alumnos formulan mayoritariamente problemas con una pregunta, aunque aparecen enunciados con más de una cuestión desde las producciones de segundo curso, con un porcentaje similar en los sucesivos cursos próximo al 7%, excepto en quinto curso que supera el 15%. Así, salvo en sexto curso, a medida que se avanza en el curso, se aprecia un aumento de porcentaje de problemas con más de un interrogante. Estos datos tampoco son confirmatorios de los anteriores pero evidencian que desde los primeros cursos algunos estudiantes tienen capacidad para inventar problemas con más de una pregunta.

Número de operaciones involucradas en la resolución de las invenciones

En el análisis de los datos procedentes de las entrevistas percibimos que los problemas que inventan los estudiantes coinciden con las operaciones que están trabajando en esos cursos. Este hecho se percibe principalmente en los primeros cursos y, aunque sigue ocurriendo en cursos superiores, se aprecia que hay una evolución en la sofisticación de las producciones ya que se resuelven con varios pasos. El número de alumnos que inventan problemas en los que hay que utilizar más de una operación aritmética es próximo al de los que proponen enunciados que sólo requieren una operación: El 54,55% de los problemas inventados eran de una etapa y el 45,45% corresponden a problemas de más de una etapa. Estos últimos aparecen en todos los cursos de educación primaria a partir de segundo. No se percibe aumento en la presencia de invenciones compuestas conforme se avanza de curso.

Los datos tomados en el año 2010 confirman los obtenidos en la primera recogida de datos aunque hay una pequeña variación en los porcentajes respecto al número de producciones. Casi el 60% de los estudiantes inventan problemas de una etapa y poco más del 40% proponen problemas donde se utilizan como mínimo dos operaciones para solucionarlos. En esta ocasión los problemas compuestos aparecen desde primer curso, esto se entiende como consecuencia de que en la segunda recogida de datos participaron 47 niños de primero y en la primera recogida solo 5. En la prueba confirmatoria sí encontramos cierta tendencia a medida que se avanza en el curso, pues crece el número de invenciones compuestas, siendo este crecimiento mayor en cuarto curso, respecto a tercero, que en el resto de los cursos. Existen diferencias significativas por curso y ciclo.

En este ítem valoramos la necesidad de realizar dos o más operaciones subordinadas para encontrar la respuesta, en estos casos, la solución final depende de un dato intermedio que se obtiene realizando una o varias operaciones. Los estudiantes, cuyos problemas originales requieren dos o más operaciones para su resolución, han inventado problemas en los cuales proporcionan los datos y plantean una o más preguntas (104 y 13 respectivamente). En 5 enunciados de los que se formula más de una pregunta las cuestiones están subordinadas unas a otras y en el resto, las preguntas se contestan de forma independiente.

Con ello se puede afirmar: primero, que el esfuerzo de los estudiantes a la hora de generar sus producciones es importante y altamente valorable, a la vez que resulta indicativo del dominio y comprensión que tienen del significado y usos de las operaciones aritméticas; segundo, que desde muy temprana edad algunos estudiantes están capacitados para inventar problemas de más de una etapa.

(O2, C). Estudiar las dificultades que encuentran en su realización

Todos los alumnos de ambas recogidas de datos, excepto uno, inventaron enunciados y ninguno de ellos manifestó dificultades para realizar la tarea. Dado que los estudiantes de la prueba exploratoria participaron en una tarea previa donde inventaban problemas, puede ser que sintieran de antemano cierta seguridad y no tuvieran dificultades a la hora de desarrollar la tarea encomendada. Sin embargo, aunque en la prueba confirmatoria no se les instruyó previamente a los escolares, éstos tampoco mostraron dificultad para llevar a cabo la tarea pedida, incluso los resultados obtenidos en el número de producciones coherentes fueron similares a los primeros donde los alumnos ya tenían conocimiento sobre la invención de problemas.

(O2, D) Valorar la capacidad de invención de problemas de los estudiantes de educación primaria.

Tanto en la prueba exploratoria como en la confirmatoria, casi todas las invenciones de los estudiantes corresponden a enunciados que no se reducen a meros ejercicios aritméticos, por lo que los estudiantes han relacionado conceptos para enunciar los problemas que han propuesto. Este hecho, según algunos autores mencionados en los capítulos II y III (epígrafes II.5.1 y III.1.2 respectivamente) incrementa su habilidad para aplicar los conceptos matemáticos, ejercita una variedad de estrategias para llegar a la solución de los problemas y pone de manifiesto la capacidad que tienen los estudiantes de educación primaria para inventar sus propios problemas aritméticos, incluso cuando es una actividad nueva para ellos.

VIII.1.3 OBJETIVO O3

Recordamos en primer lugar la formulación del tercer objetivo de esta investigación: *Establecer la relación entre la capacidad de inventar y resolver los problemas inventados de los estudiantes de educación primaria.*

Damos respuesta al mismo mediante dos objetivos parciales:

(O3, A). Analizar la resolución de los problemas inventados.

En las entrevistas semiestructuradas realizadas en el año 2001, donde los estudiantes han de resolver el problema que inventa su compañero, se observa que mayoritariamente (82%) resuelven correctamente los problemas propuestos y que cuando algún estudiante tiene duda su pareja le indica cómo lo ha de resolver. Por tanto, son pocos los estudiantes que resuelven incorrectamente los problemas; de éstos un 17% se deben a pequeños errores de cálculo y un 83% a errores en el uso de operaciones.

A los estudiantes que participaron en la recogida de datos que se llevó a cabo en el año 2010 se les pidió que resolvieran su propia invención. De los enunciados coherentes una amplia mayoría (casi el 80%) resuelven adecuadamente sus invenciones. Las causas por las que aproximadamente el 20% resuelven incorrectamente su producción son principalmente errores en el uso de operaciones: en cuarto y quinto curso en su totalidad, en segundo llega al 94% y en el resto de los cursos el porcentaje se encuentra entre el 60 y el 80%. Como se explicitó en el capítulo VII, estos errores englobaban situaciones donde no se realizaron todas las operaciones que resuelven el problema, se tomaron datos erróneos, se realizaron operaciones innecesarias, se identificaron las operaciones pero no se realizaron y/o se utilizaron operaciones que no resolvían el problema.

Estos datos nos permiten concluir que generalmente los estudiantes de primaria que formulan correctamente un problema aritmético también lo resuelven adecuadamente. En cuanto a las causas que producen los fallos en los problemas que no se resuelven correctamente, los resultados de la segunda prueba confirman los de la primera, debiéndose, por tanto, a errores producidos en el uso de las operaciones.

(O3, B). Analizar dificultades de los estudiantes para resolver los problemas inventados por ellos.

En la primera recogida de datos se presentaron algunos obstáculos en la resolución de las invenciones, algunos de ellos eran debidos a que no entendían bien el problema formulado por su compañero y otros a que el enunciado contenía cantidades muy elevadas. En el segundo análisis de datos no hay evidencia de que los alumnos tuvieran dificultades de resolver sus propias invenciones, todos proceden a resolverlas aunque algunos de ellos no lo hicieran correctamente.

Luego, en general, para los estudiantes de educación primaria la resolución de problemas inventados por ellos no presenta ninguna dificultad y, en todo caso, las escasas dificultades encontradas en el proceso de resolución surgen cuando los problemas no son invenciones propias.

VIII.1.4. OBJETIVO O4

El cuarto objetivo de este trabajo de investigación es el siguiente: *Identificar los conocimientos numéricos y aritméticos que los estudiantes de educación primaria involucran en los problemas que inventan.*

Este objetivo se desglosa en dos objetivos parciales.

(O4, A). Indagar sobre los tipos de números involucrados en los problemas inventados, así como la cantidad de cifras de los mismos.

Presentamos las conclusiones relativas a este objetivo organizadas según refieren al conjunto numérico o al número de cifras empleadas por los estudiantes en sus invenciones.

Conjunto numérico

En la primera recogida de datos hasta quinto curso los alumnos utilizan exclusivamente el conjunto numérico de los números naturales. En el último ciclo aparecen números decimales y fracciones. En estos cursos se trabaja el conjunto de los racionales como contenido escolar. En las invenciones del año 2010 se constatan los datos anteriores en cuanto a que en todos los cursos se utilizan los números naturales, pero varían los datos referentes a otros conjuntos numéricos: aparecen desde tercer curso las fracciones en algunos enunciados y desde cuarto también los números decimales. Se encontraron diferencias significativas del conjunto numérico utilizado en los enunciados por ciclos.

Como venimos comentando a lo largo de este capítulo, pensamos que el tamaño de la muestra influye considerablemente en algunos de los resultados obtenidos en las dos partes del estudio. Nos atrevemos a decir, a partir de los resultados del segundo estudio, que aunque mayoritariamente los alumnos de primaria eligen el conjunto de los números naturales para formular sus producciones, a partir de segundo ciclo va aumentando la presencia de números no naturales, concretamente racionales en expresión fraccionaria o decimal, en sus enunciados.

Número de cifras

Respecto a la cantidad de cifras que tienen los números que intervienen en los problemas vemos que en las invenciones del año 2001 hay variación, desde una a ocho, siendo mayoritarios los enunciados con números de dos cifras y cuando el número de cifras supera a cuatro, aparecen ceros para las cifras que ocupan los primeros órdenes de unidades. En primer curso utilizan números de hasta dos cifras y a partir de segundo curso hay alumnos que incluyen en sus enunciados números de hasta cuatro cifras.

Las producciones del año 2010 evidencian datos similares a los aportados en la primera recogida de datos, y amplían la edad en que los niños utilizan números de más de dos cifras en sus enunciados ya que aparecen desde primer curso. Encontramos diferencias significativas del número de cifras utilizado por los alumnos según el curso.

(O4, B). Evaluar el dominio de los conocimientos algorítmicos de los estudiantes de educación primaria puesto de manifiesto en la tarea de invención y resolución de problemas.

Veinticuatro alumnos de los que participaron en la recogida de datos de 2001 utilizaron procedimientos algorítmicos que les permitieron resolver las producciones de sus compañeros. Todos ellos excepto uno, realizaron correctamente el algoritmo elegido para resolver el problema que se inventó el compañero con quien realizaron la tarea propuesta. Recordamos que el alumno que no resolvió el problema argumentó que no procedía a solucionarlo con motivo del tamaño de los números indicando el modo en que los operaría para dar respuesta al problema. Entendemos que para él la dificultad no era realizar el algoritmo sino la magnitud de los números y el largo proceso resolutivo que ello conllevaría. Esto nos permite concluir que estos estudiantes de educación primaria tienen dominio de los algoritmos matemáticos.

Los resultados aportados en el año 2010 corroboran los anteriores, ya que excepto algunos alumnos de primer curso que al resolver sus producciones mezclaban en una misma operación el algoritmo de la suma y de la resta, y otros pocos estudiantes que cometieron pequeños errores de cálculo, el resto demostraron poseer conocimiento de los algoritmos aritméticos estándares. Por tanto, podemos afirmar que mayoritariamente, exceptuando en primer curso, donde no es tan generalizado, los estudiantes de educación primaria conocen y saben utilizar los algoritmos aritméticos estándares, en la resolución de problemas que ellos proponen.

VIII.1.5. OBJETIVO O5

El quinto y último objetivo de este trabajo de investigación es *Determinar la consideración que tienen los alumnos de educación primaria de lo que es un problema difícil.*

Este objetivo se desglosa en tres objetivos parciales:

(O5, A). Estudiar las características que presentan los problemas que los escolares califican de difíciles.

En la primera recogida de datos se les presentó a los estudiantes gran variedad de problemas, todos ellos de estructuras aditiva y multiplicativa, para que opinaran sobre si era fácil o difícil cada uno de ellos. En la segunda recogida de datos, al tratarse de una prueba no fue posible mostrar tal cantidad de problemas y optamos por presentarles problemas de estructura aditiva y multiplicativa que consideramos adecuados al curso o ciclo, cambiando la cantidad de cifras de los números, y otros tipos de problemas: un problemas compuesto que involucra fracciones representadas de forma verbal y otro problema considerado no rutinario que si bien corresponde a un ejercicio de combinatoria se puede resolver con cierto ingenio sin recurrir a dicha técnica.

El análisis de los datos de la primera fase referidos a los problemas que los estudiantes consideran difíciles muestra que los estudiantes de primer ciclo indican que es difícil un problema aditivo de tipo cambio 6, otro de cambio 5, otro de cambio 1, de combinación 2 y de comparación 3. Todos tenían dos cifras, el mismo número de cifras que los que consideraron fáciles, por lo que entendemos que es la estructura semántica y dentro de ésta el lugar que ocupa la incógnita, lo que condiciona la dificultad del mismo. Los estudiantes de segundo curso califican de difícil los problemas de tasas y grupos iguales de partición. En el segundo ciclo, indican que son difíciles los problemas de porcentajes, de tasas compuestos y de producto de medidas. En el tercer ciclo, los problemas de porcentajes presentan dificultad a algunos de los estudiantes de sexto, y también consideran difícil un problema compuesto de tasas.

En la prueba confirmatoria quizá lo más destacable sea que en los dos primeros cursos un mismo tipo de problema aditivo (cambio tipo 1 y combinación tipo 2) se considera fácil o difícil dependiendo de la cantidad de cifras que presentan los números del enunciado. En segundo y tercer ciclo, la magnitud de las cifras no influye en los estudiantes para considerar la dificultad de un problema y sí consideran difícil un problema no rutinario (combinatoria) con números de una solo cifra. Sin embargo se aprecia una falsa percepción de facilidad en más de un problema debido a que en el proceso de resolución de los mismos encuentran dificultades.

(O5, B). Recopilar y clasificar las componentes de los problemas que los estudiantes consideran que hacen que un problema sea difícil.

Las respuestas, en la primera recogida de datos, sobre cuándo consideran que un problema es difícil, son variadas. Se relacionan con: 1) conceptos no estudiados e involucrados en el problema (problemas de división, en primer ciclo, de porcentajes, en segundo y tercer ciclo, y con cambio de moneda en tercer ciclo); 2) los datos del problema (los estudiantes de primer y segundo ciclo se refieren a la magnitud de los números, y los de segundo ciclo a la cantidad de datos presentes en el enunciado); 3) etapas de resolución (esta razón la consideran los niños de segundo y tercer ciclo) y 4) el enunciado del problema (aquí se recogen respuestas de los tres ciclos que hacen referencia a la dificultad de entender el enunciado).

Así, consideran que un problema difícil es aquel que tiene números "altos", muchas preguntas o etapas de resolución, muchos datos en el enunciado, conceptos no estudiados y aquellos enunciados que les obligan a pensar. Entendemos que no consideran que la operación involucrada en el problema sea un elemento que condicione la dificultad del mismo ya que cuando mencionan alguna operación como factor que dificulta un problema lo hacen refiriéndose a su falta de dominio o desconocimiento.

Las aportaciones que hicieron los estudiantes en el año 2001 en la última parte de la entrevista, donde se les pedía que catalogaran una serie de problemas en base a su dificultad, evidenciaron que los estudiantes también condicionan la dificultad de un problema al hecho de saber resolverlo o no. Los alumnos al leer los problemas intentaban resolverlos, si creían que habían alcanzado la solución correcta decían que éstos eran fáciles, si se les cuestionaba cómo habían procedido a resolverlos, en ocasiones dudaban de lo que habían hecho y esto les hacía cambiar de opinión decidiendo finalmente que eran problemas difíciles. Si directamente no sabían cómo resolverlos, no dudaban y sentenciaban que eran difíciles. Esta circunstancia nos llevó a plantear en la segunda recogida de datos una tarea que nos permitiera recoger datos que pudieran aportar si existe algún tipo de relación entre lo que saben resolver y los problemas que consideran fáciles. Los resultados hallados en el último ítem del cuestionario corroboraron nuestras intuiciones, los alumnos consideran que un problema es fácil cuando saben resolverlo, pues en general cuando dicen que un problema es fácil lo resuelven bien.

Las respuestas a la pregunta sobre las razones que hacían que su invención fuese difícil en la segunda recogida de datos pusieron de manifiesto que en los tres ciclos se hace referencia a la categoría conceptos involucrados en el problema aunque en mayor intensidad en primer y tercer ciclo; las respuestas que se refieren a los datos del enunciados aparecen escasamente en los tres ciclos con un porcentaje algo mayor en primero; las que se recogen en la categoría etapas de resolución son muy escasas en primer ciclo y en los otros cursos algo menos; y en la categoría enunciado del problema el porcentaje mayor aparece en segundo ciclo. Estos datos confirman los obtenidos en la prueba exploratoria. El estudio estadístico evidenció que existen diferencias significativas por ciclos.

Las dos recogidas de datos nos permiten afirmar que los estudiantes califican de difíciles aquellos problemas que presentan las cuatro categorías anteriormente mencionadas: 1) conceptos no estudiados e involucrados en el problema, 2) datos del problema; 3) etapas de resolución y 4) el enunciado del problema. Hacen especial hincapié cuando los problemas contienen conceptos desconocidos u olvidados en el enunciado del problema. Esto puede ser debido a que los estudiantes están habituados a resolver problemas cuyos contenidos son objeto de su estudio escolar. La magnitud de los números o el tamaño de los mismos preocupa más en primer ciclo que en el resto (este hecho está de acuerdo con el apartado anterior) y el número de pasos en los últimos ciclos. Estos resultados son consecuencia del desarrollo cognitivo de los estudiantes en relación a los conceptos numéricos. Entendemos que el hecho de que el número de pasos de un problema apenas aparezca en los primeros cursos como motivo de dificultad es debido al desconocimiento de estos escolares sobre problemas de más de una etapa ya que trabajan principalmente problemas de una etapa.

(O5, C). Establecer la relación entre la resolución y la dificultad de problemas.

El 86% de las ocasiones en las que los alumnos de la primera recogida de datos consideraron que los problemas propuestos eran fáciles los resolvieron correctamente. Las restantes no los resuelven o lo hacen mal, siendo más frecuente dicha situación en primer curso. En la prueba confirmatoria, los problemas catalogados como fáciles son en su mayoría resueltos correctamente, aunque encontramos situaciones análogas a la anteriormente descrita donde se produce una falsa percepción de facilidad más de una vez debido a que a pesar de etiquetar el problema como fácil no saben resolverlo. Por tanto, los resultados quedan confirmados.

VIII.2. OTROS HALLAZGOS

Partiendo de los datos procedentes de las entrevistas semiestructuradas y de las preguntas que se les iban formulando a los estudiantes en la prueba exploratoria, hacemos una reflexión sobre los siguientes ítems pudiendo cotejar los dos primeros con las aportaciones recogidas en el cuestionario de la prueba confirmatoria:

1. Nivel de dificultad de los problemas inventados

La totalidad de los problemas generados por los estudiantes correspondían a problemas que se trabajan en la etapa de educación primaria. Los enunciados inventados tienen una dificultad aritmética y semántica básica, es decir, corresponden a los que se trabajan principalmente en los dos primeros ciclos de educación primaria.

2. Descripción de las estrategias de resolución empleadas por los alumnos

De los resultados obtenidos en el año 2001 vemos que todos los alumnos, excepto uno que usa el cálculo mental, utilizan el cálculo escrito para resolver el problema que se inventa el compañero con el que realizan la tarea propuesta. En los primeros cursos se ponen de manifiesto principalmente capacidades aritméticas como el conteo y el empleo sin dificultad de números de gran magnitud. Esta última capacidad también está presente en buena parte de las acciones que se realizan en el último bloque de la entrevista semiestructurada donde los alumnos deciden si los problemas que se les presentan son fáciles o difíciles: se apoyan en las operaciones que realizan mentalmente para decidir su afirmación según si resuelven o no el problema propuesto. En la segunda recogida de datos, dado que se les pasa un cuestionario a rellenar para inventar y resolver sus producciones, solo tenemos evidencias de estrategias resolutivas escritas. Estas evidencias no nos permiten concluir que los estudiantes de educación primaria utilicen casi exclusivamente el cálculo escrito en sus resoluciones pues no podemos distinguir aquellos casos en los que los estudiantes realizaran operaciones mentalmente que posteriormente hayan escrito.

3. Usos de distintas estrategias en la resolución de problemas

Cuando se les pregunta en la prueba exploratoria si conocen un proceso alternativo para resolver sus invenciones, la mitad de los estudiantes consideran que es posible, advirtiendo la mitad de éstos que se trata de algo que aún tienen que aprender y la otra mitad proponen sustituir el producto por una suma reiterada o aplicar las propiedades estructurales de las operaciones, como la conmutativa. Por tanto, entendemos que estas manifestaciones sobre las posibles formas de resolver un problema se deben a que se trata de un contenido matemático que no han trabajado en clase, incluso algunos de los estudiantes indican que aún no han sido instruidos en ello.

4. Justificación sobre si es resoluble el enunciado inventado

En la prueba exploratoria se pidió a los estudiantes que justificaran si su invención era resoluble o no. Todos los estudiantes menos uno aseguran que sus invenciones son resolubles, por lo que consideran que el enunciado inventado es correcto, aunque pocos argumentan su afirmación. Sus justificaciones se basan unas en la identificación de la operación que resuelve su invención y otras en la invención y descripción de un nuevo problema. Por tanto, los estudiantes tienen dificultad para explicar las razones por las que aseguran que sus producciones son resolubles, pero no dudan en que lo son. Los alumnos creen que lo que inventan se puede resolver ya que comprenden bien el planteamiento inventado e identifican la operación con la que se resuelve.

5. Comparación entre las producciones generadas por los estudiantes de la primera recogida de datos en la sesión conjunta y en las entrevistas semiestructuradas

En el primer ciclo de educación primaria, los estudiantes de primero presentan una evolución importante en las invenciones realizadas en las entrevistas semiestructuradas respecto a las plasmadas en la sesión conjunta que previamente realizaron (ver capítulo IV, epígrafe IV.2.5) , ya que aunque sus enunciados aún no corresponden a problemas aritméticos, se empiezan a acercar a ellos. Son conscientes de que en un problema ha de haber una pregunta a la que se le ha de dar una respuesta. Algunos en esa pregunta proponen una operación aritmética, otros formulan una pregunta sin datos numéricos y uno plantea una situación con pregunta aunque no relaciona bien los datos. Los de segundo curso inventan enunciados más complejos en la segunda sesión (ver Anexo E), al generar en la primera ocasión (Anexo D) enunciados que no son problemas o problemas aditivos de una etapa e inventar posteriormente problemas donde se combinan las dos estructuras operatorias, se aumenta el número de datos de los problemas y el número de pasos de los mismos.

En segundo y tercer ciclo no se aprecia que haya una evolución en las producciones de los alumnos pues algunos incluso inventan problemas menos complejos en las entrevistas semiestructuradas y otros redactan enunciados similares en las dos actividades. Solo hay un alumno del segundo ciclo y tres del tercero que formulan problemas más complicados en las entrevistas.

Por tanto, en el primer ciclo es donde se ve una mayor evolución en las producciones de los alumnos una vez que han practicado la tarea de inventar problemas.

VIII.3. SÍNTESIS

Del análisis de las aportaciones de los escolares con el que hemos trabajado se desprende que:

Los estudiantes entienden que un problema ha de tener necesariamente una cuestión a la cuál dar respuesta y distinguen entre problema y problema matemático, asegurando que en ambos casos hay que resolver un planteamiento y advirtiendo que en los matemáticos tiene que haber datos numéricos que facilitarán su resolución.

Desde primero de educación primaria algunos niños están capacitados para inventar problemas coherentes, aunque algunos se encuentran iniciando esta capacidad y tanto ellos como otros estudiantes de cursos superiores encuentran dificultades en la redacción de sus invenciones.

En general, los estudiantes no tienen dificultades para inventar problemas y muestran seguridad en cuanto a la resolubilidad de sus producciones. Las dificultades en el proceso de resolución de problemas aparecen fundamentalmente cuando los niños se enfrentan a problemas no generados por ellos. Admiten que un problema se puede resolver de más de una forma y lo entienden como un contenido de su aprendizaje escolar.

Producen casi igualmente enunciados de las dos estructuras operatorias y de una o más etapas y algunos muestran esta capacidad desde muy temprana edad, 7 años, para inventar problemas multiplicativos así como para generar problemas compuestos, ya sean de la misma estructura operatoria o incluso combinando las estructuras aditiva y multiplicativa. Sin embargo, la mayoría utilizan la estructura semántica de cambio para problemas aditivos-y de tasas o de grupos iguales de partición para los multiplicativos. Estos mismos tipos aparecen aún, cuando los problemas son compuestos. También, por lo general, plantean una única pregunta en sus enunciados, incluso aunque éstos sean de más de una etapa, y consideran la incógnita del problema en la cantidad final (resultado de la operación) en la sentencia que resuelve el problema. Los estudiantes inventan problemas asociados a lo trabajado en clase, es decir, utilizan las operaciones aritméticas que están aprendiendo y los números con órdenes de unidades acorde con lo que están trabajando en el curso.

Los estudiantes son capaces de emplear números de gran magnitud en sus enunciados, incluso de ocho cifras. Fundamentalmente utilizan números naturales, aunque desde segundo ciclo algunos incluyen fracciones y números decimales en sus producciones.

Los estudiantes creen que los elementos que dificultan un problema son: el tamaño de los números, el número de preguntas planteadas, la cantidad de operaciones que se necesitan para resolver el problema y si en el enunciado aparece algún concepto no estudiado u olvidado. Sin embargo, no se fijan demasiado en estos elementos cuando se les piden catalogar en fáciles o difíciles problemas no inventados por ellos sino que condicionan su decisión en base a saber resolver o no el enunciado propuesto. Independientemente de los factores anteriores, califican como difíciles aquellos problemas que no saben resolver.

Resumimos a continuación otros de los resultados obtenidos en este trabajo:

- La invención de problemas no es una práctica habitual en los centros educativos. De hecho, esta actividad resultó completamente novedosa para los alumnos ya que ninguno de ellos manifestó haber realizado tal tarea alguna vez.

- Los estudiantes se mostraron muy interesados en la tarea de inventar problemas. Con esta actividad se ha obtenido información acerca de los conceptos numéricos y las capacidades que sobre la aritmética y el sentido numérico poseen los alumnos de educación primaria.

- Ningún estudiante necesitó ayuda para construir un problema difícil, y tampoco hubo que repetir las instrucciones para que pudieran realizar la tarea encomendada.

- Casi todos los estudiantes inventaron problemas y los resolvieron.
- Los estudiantes de todos los ciclos de educación primaria presentan un gran potencial para formular problemas aritméticos de enunciado verbal, tanto aditivos como multiplicativos, de una o más etapas. Predomina la estructura aditiva, y la multiplicativa y la aditiva-multiplicativa aparecen en porcentajes iguales.
- Se ha podido comprobar lo que Riley y otros (1983) advierten, que en los problemas aditivos, la estructura semántica menos complicada para los alumnos es la de cambio. En la estructura multiplicativa prima el significado de tasas y grupos iguales de partición.
- Los problemas presentan mayor facilidad cuando la incógnita es la cantidad final, y los más difíciles son los que la presentan en la cantidad inicial. Como manifiestan Castro, Batanero, Rico y Castro (1991), la posición de la incógnita repercute significativamente en el nivel de dificultad de un problema.
- El tamaño de los números también influye sobre la elección de la operación adecuada, ya que los ítems con números pequeños, les resultan más fáciles de reconocer a los alumnos que los números grandes (Hart, 1981). Nuestros resultados corroboran que para los estudiantes de educación primaria los problemas de estructura aditiva con números pequeños son más fáciles que los que tienen números grandes.
- Los alumnos consideran que un problema es fácil o difícil dependiendo de si saben resolverlo.
- Prácticamente todos los alumnos plantearon una sola pregunta en sus enunciados.
- Todos los enunciados inventados que contienen las componentes necesarios para considerarlos problemas aritméticos, formulan la/s pregunta/s al final del enunciado.
- Casi todos los estudiantes inventan enunciados con datos suficientes.
- Nuestro estudio coincide con lo manifestado por Puig y Cérdan (1988): “los enunciados que construyen los niños solo reproducen las formas de expresiones aritméticas aprendidas en la escuela”.

- Los resultados alcanzados en nuestra investigación evidencian que a medida que avanzan de curso aumenta la sensibilidad de los estudiantes hacia la importancia social de las matemáticas. En escasas ocasiones consideran que saber resolver problemas les beneficiará en su vida personal adulta y destacan motivos escolares y de aprendizaje sobre la importancia de resolver problemas, especialmente en los primeros cursos.

VIII.4. NUEVAS PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

A partir de la reflexión realizada durante el desarrollo de la presente investigación surgen distintas cuestiones que planteamos como hipótesis para posteriores investigaciones.

Hipótesis 1. Una formación sistemática de los escolares sobre resolución de problemas hace posible que la invención de problemas, por los mismos, produzca mayor variabilidad de tipos de problemas.

Hipótesis 2. La instrucción a los escolares sobre invención de problemas favorece en ellos la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en dicha invención.

Hipótesis 3. La formación de profesores en contenido matemático-didáctico sobre la invención de problemas, tiene repercusión en su desempeño profesional.

Por otra parte, consideramos de interés ampliar el estudio sobre la relación entre la creencia de los estudiantes sobre la dificultad de los problemas con su capacidad para resolverlos, lo que permitiría avanzar en la idea de "percepción falsa de la facilidad de un problema", idea que ha aparecido en este trabajo de investigación y en la cual no hemos profundizado.

BIBLIOGRAFÍA

Abramovich, S. y Cho, E. (2008). On mathematical problem posing by elementary pre-teachers: the case of spreadsheets. *Spreadsheets in Education, 3*(1), 1-19. Consultado el 25 de Marzo de 2009 en http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol3/iss1.

Abrantes, P. (2002). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. En F. López (Ed.), *La resolución de problemas en matemáticas* (pp. 95-109). Barcelona: Graó.

Abu-Elwan, R. (1999). The development of mathematical problem posing skills for prospective middle school teachers. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference of the 21st Century Project: Societal Challenges, Issues and Approaches* (Vol. 2, pp. 1-8). El Cairo, Egipto: the 21st Century Project. Consultado el 8 de Julio de 2010 en http://dipmat.math.unipa.it/~grim/EAbu-elwan8.PDF.

Agre, G. P. (1982). The Concept of Problem. *Educational Studies in Mathematics*, *13*(2), 121-142.

Aiken, L. R. (1971). Verbal factors and mathematics learning: A review of research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*, 304-313.

Akay, H. y Boz, N. (2009). Prospective teachers' views about problem-posing activities. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 1192-1198.

Akay, H. y Boz, N. (2010). The effect of problem posing oriented analyses-II course on the attitudes toward mathematics and mathematics self-efficacy of elementary prospective mathematics teachers. *Australian Journal of Teacher Education, 35*(1), 59-65.

Alexander, C. y Ambrose, R. C. (2010). Digesting student-authored story problems. *Mathematics Teaching in the Middle* School, *16*(1), 27-33.

Alias, R., Ghazali, M. y Ayub, A. (2009, Noviembre). *Student's problem posing strategies: implications to student's mathematical problem solving*. Presentado en la 5th Asian Mathematical Conference, Kuala Lumpur, Malasia.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 367-385.

Ayllón, M. F. (2005). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación***.** Trabajo de investigación tutelada, Universidad de Granada, España.

Barnett, J. (1980). The study of syntax variables. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 23-68). Filadelfia, PA.: The Franklin Institute Press.

Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Chicago, IL: Visor Distribuciones.

Bartolache, J. I. (1990). *Lecciones matemáticas*. Guanajuato, México: Gobierno del estado de Guanajuato.

Bell, A., Creer, B., Grimison, L. y Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in mathematics Education, 20*(5*)*, 434-449.

Bell, A., Fischbein, E. y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129-147.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva*, 2(6), 159-174.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada, 51*(3-4), 533-552.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987a). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. *Enseñanza de las Ciencias, 5*(1), 332-333.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40*, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, M. R. (1990). La operación de sumar. En V. Bermejo (Ed.), *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas* (pp. 107-150). Barcelona: Paidós.

Best, J. W. (1982). *Cómo investigar en educación.* Madrid: Morata.

Birch, M. y Beal, C. R. (2008, Mayo). *Problem posing in AnimalWatch: An interactive system for student-authored content.* Presentado en el 21st International The Florida Artificial Intelligence Research Society (FLAIRS) conference, Coconut Grove, Florida. Consultado el 14 de Enero de 2009 en http://learn.cs.arizona.edu/pages/viewpageattachments.action?pageId=1016823.

Blanco, L. (1993). *Consideraciones elementales sobre resolución de problemas.* Badajoz: Universitas Editorial.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects–state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125-141.

Bouvier, A. y George, M. (1979). *Diccionario de matemáticas***.** Madrid: Akal.

Bransford, J. D. y Stein, B. S. (1984). *The IDEAL problem solver: A guide for improving thinking, learning, and creativity.* New York, NY: W. H. Freeman.

Brekke, G. (1991). *Multiplicative structures ata ges seven to eleven*. Tesis Doctoral, Universidad de Nottigham, Inglaterra.

Briars, B. y Larkin, J. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.

Brightman, H. J. (1980). *Problem solving: a logical and creative approach*. Atlanta, GA: Georgia State University.

Brown, M. (1978). Cognitive development and the learning of mathematics. En A. Floyd (Ed.), *Cognitive development in the school years* (pp. 351-373). Londres, Reino Unido: Croom Helm.

Brown, M. (1981). Number operations. En K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* 11-16 (pp. 23-47). Londres, Reino Unido: John Murray.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing* (2ª ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1993). *Problem posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Buendía, L. (1992). Técnicas e instrumentos de recogida de datos. En M. P. Colás y L. Buendía (Eds.), *Investigación educativa* (pp. 200-246). Sevilla: Alfar.

Burçin, B. (2005). *The effect of instruction with problem posing on tenth grade students' probability achievement and attitudes toward probability*. Tesis doctoral, Universidad de Ankara, Turquía.

Butts, T. (1980). Posing problems properly. En S. Krulik y R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 23-33). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.

Cai, J. (1998). An investigation of U.S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(1), 37-50.

Cai, J. y Huang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401-421.

Cantero, A., Hidalgo, A., Merayo, B., Primo, F., Sanz, A. y Vega, A. (2003a). *Resolución de problemas aritméticos en educación primaria*. Ponferrada: EOEP (Equipo de orientación educativa y psicopedagógica de Ponferrada). Consultado el 26 de septiembre de 2011 en http://centros6.pntic.mec.es/equipo.general.ponferrada/

Cantero, A., Hidalgo, A., Merayo, B., Primo, F., Sanz, A. y Vega, A. **(**2003b). *Análisis de libro de texto y material complementario*. Ponferrada: EOEP (Equipo de orientación educativa y psicopedagógica de Ponferrada). Consultado el 26 de septiembre de 2011 en: http://centros6.pntic.mec.es/equipo.general.ponferrada/

Cañadas, M. C., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Peñas, M., Villarraga, M. y Villegas, J. L. (2002). Materiales didácticos en la resolución de problemas. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 101-112). Granada: Universidad de Granada y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Carlson, M. y Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(1), 45-75.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual Knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reyes, R. E. y Wilson, J. W. (1976). Notes from national assessment: Word problems. *Arithmetic Teacher*, *23*(5), 389-393.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reyes, R. E. (1980). Solving verbal problems: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher, 8*, 8-12.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. (1999). *Children´s Mathematics: cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children’s indicial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*, 27-39.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 55-72.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Ed.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 7- 44). Orlando, FL: Academia Press.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179-202.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones.* Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, España.

Casajús, A. (2005). *La resolución de problemas aritmético-verbales por alumnos con Déficit de Atención con Hiperactividad* (TDAH). Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, España.

Castro, E. (1991). *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa.* Memoria de tercer ciclo, Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa***.** Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Castro, E. (2000). *Investigación sobre resolución de problemas.* Documento no publicado, Granada.

Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en educación primaria* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R., Luengo, B., Gómez, M., Camacho y L., Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática* XII (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Castro, E., Batanero, C., Rico, L. y Castro, E. (1991). Dificultad en problemas de comparación multiplicativa. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the fifteenth PME Conference* (Vol. 1, pp. 192-198). Assisi, Italia: PME.

Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares y Mª V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 119-141). Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Estructura multiplicativa. *Perspectiva Escolar, 211*, 27-36.

Castro, E., Castro, E., Rico. L., Valenzuela, J., García, A., Pérez, A., et al. (1995). *Resolución de problemas en el Tercer Ciclo de E.G.B.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2007) *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano*. Granada: Editorial universitaria de Granada.

Castro E., Rico L., Castro E. y Gutiérrez J. (1994). Two-Step addition arithmetic problems. En N., Malara y L., Rico (Eds.), *Proceedings of the First Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 139-146). Módena, Italia: Universidad de Módena.

Castro, E, Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias*, *10*(3), 243-253.

Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria un estudio evolutivo.* Memoria de tercer ciclo, Universidad de Granada, España.

Cázares, J., Castro, E. y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula, 10,* 19-39.

Cerdán, F. (2008). *Estudio sobre la familia de problemas Aritméticos–Algebraicos.* Valencia: Server de Publicacions de la Universitat de València.

Chapman, O. (2011). Prospective teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 209-216). Ankara, Turquía: PME.

Chen, L., Dooren, W. V., Chen, Q. y Verschafeel L. (2010). An investigation on Chinese teachers´ realistic problem posing and problem solving ability and beliefs. *International Journal of science and Mathematics Education, 9*(4), 919-948.

Christou, C., Mousoulides, N. Pittalis, M. y Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Montana Mathematics Enthusiast, 2*(2), 125-143.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM (Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik), 37*(3), 149-158.

Christou, C. y Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve onestep word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 436-442.

Chua, P. y Yeap, B. (2008, Julio). Problem posing performance of grade 9 students in Singapore on an open-ended stimulus. *Presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education*, México. Consultado el 4 de abril de 2010 en http://www.freeskripsi.com/PROBLEM-POSING-PERFORMANCE-OF-GRADE-9-STUDENTS-IN-SINGAPORE.

Cifarelli, V. y Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open ended problem solving situations. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 302-324

Cifarelli, V. y Sheets, C. (2009). Problem posing and problem solving: a dynamic connection. *School Science and Mathematics, 109*(5), 241-306.

Cobo, F., Fernández, G. y Rico, L. (1986). Las situaciones reales de los problemas aritméticos. En Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática Thales (Eds), *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas* (pp. 249-257). Almería: Editor.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. *Estudios de educación*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Colás, P. y Buendía, L. (1992). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar.

Consejería de Educación y Ciencia (2007). Decreto 230/2007, de 30 de agosto, por el que se desarrolla el currículum correspondiente a educación primaria. *BOJA*, *171,* 4-23.

Contreras, L. C. (1998). *Resolución de problemas: un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España.

Cook, T. D. y Reichardt, C. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Madrid: Morata.

Córcoles, A. C. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKÉ, 14*(25), 7-28.

Craig, A. (1995). Creative use of worksheets: lessons my daughter taught me. *Teaching children Mathematics*, *2*(2), 96-99.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 243-270.

Creswell, J.W. (2005). Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Cruz, M. (2006). A mathematical problem–formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 7 de Diciembre. Consultado el 24 de Abril de 2009 en http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramirez.pdf.

Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K. y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, *20*(4), 405-438.

Davidson, D. y Pearce, D (1988). Using writing activities to reinforce mathematics instruction. *Arithmetic Teacher, 35*(18), 42-45.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. y Morrison, G. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology, 83*(1), 61- 68.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985a).Working with simple word problems in early mathematics instruction. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 304-309). Utrecht, Holanda: Research Group of Mathematics Education and Educational Computer Center.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985b). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*(1), 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987a). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 363-381.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987b). Using retelling data to study young children's word problem solving. En J. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive Processes in Mathematics* (pp. 42-59). Oxford, NY: University Press.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1989). Teaching word problems in the Primary School: What Research has to say to the teacher. En B. Greer y G. Mulhern (Eds.), *New directions in mathematics education* (pp. 63-89). Londres, Reino Unido: Routledge.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6*(3), 219 - 242.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representation and solutions. *Journal of Educational Psychology*, *77*(4), 460-470.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology, 82,* 359-365.

De Corte, E. Verschaffel, L. y Van Coillie. V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication Word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7*(3), 197-216.

De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Ed. Labor.

Dewey, J. (1910). *How we think.* Lexington, MA: D.C. Heath.

Díaz, J. y Bermejo, V. (2007). Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *Revistas Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(3*)*, 335- 364.

Dickerson, V. M. (1999). *The impact of problem-posing instruction on the mathematical problem solving achievement of seventh-graders*. Tesis doctoral, Universidad de Emory, Atlanta.

Dopico, C. (2001). *Adquisición y desarrollo del concepto de división en la educación Primaria: sentencias numéricas y problemas verbales*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.

Dorsch, F. (1985). *Diccionario de Psicología***.** Barcelona: Editorial Herder.

Dugard, P., Todman, J. y Staines, H. (2010). *Approaching multivariate analysis: a practical introduction*. Nueva York, NY: Routledge.

Durell, F. (1928). Solving problems in arithmetic. *School Science and Mathematics, 28*(9), 925-935.

Ellertoh, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261-27l.

English, L. (1997a). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 183-217.

English, L. (1997b). Promoting a problem-posing classroom. *Teaching Children Mathematics, 4*(3), 172-179.

English, L. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 83-106.

English, L. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. En F. Lester y C. Randall (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 187-198). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Espinosa, M. E. (2004). *Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Ferrater, J. (1981). *Diccionario de Filosofía* (3ª ed.). Madrid: Alianza editorial.

Field, A. P. (2009). *Discovering statistics using SPSS: and sex and drugs and rock 'n' roll* (3ª ed.). Londres, Reino Unido: Sage.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, *54*(3), 363-407.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Noruega: Reidel.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). NY: MacMillan.

Fuson, K. C. y Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and overview. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49-107). New York, NY: Academic Press.

Gagné, R. (1965). *The conditions of learning*. New York, NY: Holt, Rinehart & Winston.

García, A., Sevilla, F. y Valenzuela, J. (1986). Invención y enunciado de preguntas que originan problemas matemáticos. En Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Ed.), *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas* (pp. 278-287). Almería: Editor.

García, J. A. (2001). *Didáctica de la matemática: Una visión general.* Consultado el 4 de Mayo de 2010 en http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/didmat.htm.

García, J. M. (1994). *Bases pedagógicas de la evaluación. Guía práctica para educadores*. Madrid: Síntesis.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 36-45.

Getzels, J. W. (1979). Problem-finding and research in educational administration. En G. L. Immegart y W. L. Boyd (Eds.), *Problem-finding in educational administration* (pp. 5-22). Lexington, MA: Lexington.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Goldin, G. A. y McClintock, C. E. (Eds.) (1980). *Task Variables in mathematical problem solving*. Filadelfia, PA: The Franklin Institute Press.

Gonzales, N. (1996). Problem formulation: Insights from student generated questions. *School Science and Mathematics, 96*(3), 152-157.

Gonzales, N. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics, 98*(8), 448-456.

González, E., Gutiérrez, J., Rico, L. y Tortosa, A. (1986). Relación verbo-operación en los problemas de aritmética del Tercer Ciclo de la E.G.B. En Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Ed.), *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas* (pp. 258-267). Almería: Editor.

Greeno, J. C. (1978). A study of problem solving. En R. Glacerm (Ed.), *Advance in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 35-71). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Grouws, G. A. (1972). Open sentences: some instructional considerations from research. *The Arithmetic Teacher, 19,* 595-599.

Gutiérrez, J. (2010). Pluralismo metodológico y sostenibilidad: metanálisis contemporáneo de la investigación socioambiental. *Sustentabilidad(es), 1(3*), 1-17. Consultado el 1 de Junio de 2011 en http://sustentabilidades.siderpco.org/revista/index.php?view=article&catid=39%3Apu... 18/10/2010.

Gutiérrez J., Rico L., Morcillo N., Castro E., Castro E., Fernández F., et al. (1993). Problemas Aditivos de dos Etapas, con igual operación y estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5º de Primaria. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *Actas del congreso VI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 341-349). Badajoz: Editor.

Harskamp, E. y Suhre, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Computers and Education*, *49*(3), 822-839.

Hart, K. (Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres, Reino Unido: John Murria.

Hashimoto, Y. (1987). Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. En J. Becker y T. Miwa (Eds.), *Proceedings of the U.S.-Japan seminar on mathematical problem solving* (pp. 94-119). Carbondale, IL: Southern Illinois University.

Hashimoto, Y. (1997). The methods of fostering creativity through mathematical problem solving. ZDM (Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik), *29*(3), 86-87.

Hashimoto, Y. y Sawada, T. (1984). Research on the mathematics teaching by developmental treatment of mathematical problems. En T. Kawaguchi (Ed.), *Proceedings of the ICMI-JSME regional Conference on mathematical education* (pp. 309-313). Tokio, Japon: Japan Society of Mathematical Education.

Hayes, J. R. (1981). *The complete problem solver*. Filadelfia, PA: Franklin Institute Press.

Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1979). Information processing analices of mathematical problem solving. En R. Lesh, D. Mierkiewicz, y M. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving* (pp. 181-207). Columbia, OH: ERIC/SMEAC.

Hendrickson, A. D. (1986). Verbal multiplication and division problems: Some difficulties and some solutions. *Arithmetic Teacher*, *33*(8), 26-33.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2008). *Metodología de investigación*. México DC, México: McGraw Hill.

Hiebert, H. (1982). The position of the unknown set and children's solutions of verbal problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 341-349.

Hsu, S., Wuc, S., Wongb, W., Yanga, H. y Hsud, W. (2005, Septiembre). *The design of a diagnosis system for problem posing.* Comunicación presentada en el Fifth IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies, Washington DC.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90.

Huinker, D. M. (1989). Multiplication and division word problems: Improving student's understanding. *Arithmetic Teacher*, *37*(2), 8-12.

Jacobs, V. R. y Ambrose, R. C. (2008). Making the most of story problems. *Teaching Children Mathematics*, *15*(5), 260-266.

Jerman, M. (1973). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 5*, 109-123.

Jerman, M. y Mirman, S. (1974). Linguistic and computational variables in problem solving in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *5*, 317-362.

Jerman, M. y Rees, R. (1972). Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, *4,* 306-323.

Jiménez, L. (2008). *La activación del conocimiento real en la resolución de problemas: un estudio evolutivo sobre los problemas no-rutinarios de adición*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.

Johnson, R. B., y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher, 33*(7), 14-26.

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J. y Lisa A. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of Mixed Methods*, *1*(2), 112-133.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. En S. Krulik y R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 195-203). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kar, T., Özdemir, E., İpek, A. y Albayrak, M. (2010). The relation between the problem posing and problem solving skills of prospective elementary mathematics teachers. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 1577-1583.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop* (pp. 7-70). Columbia, OH: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-127). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associate.

Kilpatrick, J. (1995). Seminario de investigación. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación e Historia* (pp. 55-57). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.

Klassen, R. (2004). A cross-cultural investigation of the efficacy beliefs of south asian immigrant and Anglo Canadian nonimmigrant early adolescents. *Journal of Educational Psychology, 96*(4), 731-742.

Kochen, M., Badre, A. y Badre, B. (1976). On recognizing and formulating mathematical problems. *Instructional Science*, *5*, 115-131.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies form equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147-158.

Kouba, V. L. y Franklin, K. (1993). Multiplication and division. En R. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 103-126). Nueva York, NY: Macmillan.

Krulik, S. y Rudnick, K. (1980). *Problem solving in school mathematics. YearBook* (pp. 51-60). Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

Krutetskii, V. A. (1969). An investigation of mathematical abilities in schoolchildren. En J. Kilpatricky I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. 2, pp. 5-57). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lago, M. O., Rodríguez, P. y Caballero, S. (1999, Septiembre). *La resolución de problemas verbales de multiplicación y división en niños de educación infantil.* Comunicación presentada en el III Congreso Internacional de Psicología y Educación, Santiago de Compostela. Consultado el 12 de Marzo de 2009 en http://www.waece.org/cdlogicomatematicas/comunicaciones/purificacionmarco_com .htm.

Lago, M. O., Rodríguez, P., Enesco, I., Jiménez L. y Dopico, C. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellos. Un estudio sobre los problemas de división con resto en alumnos de 1º de ESO. *Anales de psicología, 24*(2), 201-212.

Larios, V. (2000). *Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Tesis doctoral, Universidad de México, México.

Lavy I. y Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "What if not?" strategy in solid geometry: A case study. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 369-387.

Lavy, I. y Shriki A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp, 129-136). Seúl, Korea: PME.

Lester, F. (1994). Mussing about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660-675.

Leung, S. (1996). Problem posing as assessment: Reflections and reconstructions. *The Mathematics Educator, 1*(2), 159-171.

Leung, S. y Silver, E. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24.

Levain, J. P. (1992). La resolutions de problem multiplicities a la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 139-161.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 363-371.

Lin, P. J. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Lindvall, C. M. e Ibarra, C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education*, *11*(1), 50-62.

Linville, W. J. (1976). Syntax, vocabulary, and the verbal arithmetic problem. *School Science and Mathematics*, *76*(2), 152-158.

López de los Mozos, A. (2001). *Desarrollo de las operaciones de sumar y restar: comprensión de los problemas verbales*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.

Lowrie, T. (1999). Free problem posing: Year 3/4 students constructing problems for friends to solve. En J. Truran y K. Truran (Eds.), *Making a difference, Proceedings of the 22nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 328-335). Adelaida, Sidney: MERGA.

Lowrie, T. (2002). Young children posing problems: the influence of teacher intervention on the type of problems children pose. *Mathematics Education Research Journal, 14*(2), 87-98.

Luke, C. (1988). The repeated addition model of multiplication and children's performance on mathematical word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7*(3), 217-226.

Luque, A. (2004). *La invención de problemas en los que intervienen fracciones por estudiantes de tercer curso de secundaria.* Memoria de tercer ciclo, Universidad de Granada, España.

Martínez, M. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problems solving*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Labor.

Mayer, R. E. (1986a). Capacidad matemática. En R. J. Sternberg (Ed.), *Las capacidades humanas* (pp. 165-194). Barcelona: Labor.

Mayer, R. E. (1986b). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Merrifield, P. (1962). *The role of intellectual factors in problem solving*. Washington, WA: American Psychological Association.

Mestre J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *23*(1), 9-50.

Microsoft. (2004). *Enciclopedia Microsoft Encarta (CD-ROM)*. Seattle, WA: Microsoft Corporation.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *BOE, 293,* 43053-43102.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). *PISA 2006. Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE. Informe español*. Madrid: MEC.

Moliner, M. (1986). *Diccionario de uso del Español*. Madrid: Editorial Gredos.

Monroe, W. S. y Engelhart, M. D. (1933). The effectiveness of systematic instruction in reading verbal problems in arithmetic. *The Elementary School Journal*, *33*(5), 377-

381.

Morales, R. V., Shute, V. J. y Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction, 2*(1), 41-57.

Moses, B., Bjork, E. y Goldenberg, E. P. (1990). Beyond problem solving: problem posing. En Cooney, T. J. y Hirsch, C. R. (Ed), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 83-91). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes. En B. Creer y G. Mulhern (Eds.), *New directions in mathematics education* (pp. 29-62). Londres, Reino Unido: Routledge.

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Nakano A., Hirashima T. y Takeuchi A. (2002). An evaluation of intelligent learning environment for problem posing. *Intelligent Tutoring Systems, 2,* 861-872.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *Problem solving in school mathematics. 1980 Yearbook*. Reston, VA: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES: Granada

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics,* 7, 369-388.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problem. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 41-48.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction Word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Rombert (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 25-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1987). Toward an instructional theory: the role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics,* 7(3), 33-39.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum y National Council of Teachers of Mathematics.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189- 219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13*(4), 373-394.

Nesher, P. y Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 8,* 251-269.

Nicolaou, A. y Pilippou, G. (2007). *Eficacy belief, problem posing, and mathematics achievement*. En D. Pitta-Pantazi, y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 308-317). Larnaca, Chipre: Department of Education, University of Cyprus.

Nixon-Ponder, S. (1995). *Teacher to teacher: using problem-posing dialogue in adult literacy education.* Columbia, Ohio: National Institute for Literacy. Consultado el 29 de junio de 2010 en http://literacy.kent.edu/Oasis/Pubs/0300-8.htm

Noda, A. (2000). *Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación.* Tesis doctoral, Universidad de la Laguna, España.

Noda, A. (2001). La resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. *Números, 47,* 3-18.

Nohda, N. (1986). A study of "open-approach" method in school mathematics. *Tsukuba Journal Educational Study in Mathematics, 5*, 119-131.

Noruis, M. J. (2011). *IBM SPSS Statistics 19 Statistical Procedure Companion*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Orrantia, J., González, L. B. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje, 28*, 420-451.

Osborn, A. F. (1963). *Applied imagination: Principles and procedures of creative problem solving* (3ª ed.). Nueva York, NY: Charles Scribner's Sons.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 37-58.

Parra, B. M. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas matemáticos. *Educación Matemática*, *2*(3) 22-31.

Pehkonen, E. (1991). Developments in the understanding of problem solving. *ZDM (Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik), 91*(2), 46-49.

Pelczer, I., Voica, C. y Gamboa, F. (2008, Julio). Problem posing strategies of first year mathemátics students. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the joint meeting of PME32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, pp. 97-105). México DC, México: Departamento de Didáctica de la Matemática, Cinvestav.

Peled, I. y Nesher, P. (1988). What children tell us about multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*(3), 239-262.

Penalva, M. C., Posadas, J. A. y Roig, A. I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, *2*(3), 23-54.

Peterson, N. y Jungck, J. (1988). Problem-posing, problem-solving and persuasion in biology education. *Academic Computing, 2*(6), 14-17 y 48-50.

Poincaré, H. (1908). *Ciencia y método* (3ª ed.). Madrid: Espasa Calpé.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*. Nueva York, NY: John Wiley and Sons.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México DC, México: Trillas.

Pozo, J. (1994). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.

Puig, L. (1993). *Elementos para la instrucción en resolución de problemas de* *matemáticas.* Tesis doctoral, Universitat de Valencia, España.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (1998). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 106-118). Granada: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática-Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Puig, L. y Cerdan, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Reed, H. B. (1949). *Psicología de las materias de enseñanza primaria*. México DF, México: Uthea.

Reitman, W. R. (1965). *Cognition and thought: An information processing approach.* Nueva York, NY: Wiley y Sons.

Rico, L. (1993). *Investigación sobre errores de aprendizaje en educación matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. Lección inaugural del Curso Académico 1995-1996. Granada: Universidad de Granada.

Riley, M. S. y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, *5*(1), 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 319-350). Londres, Reino Unido: Academia Press.

Rodríguez, C., Pozo, T. y Gutiérrez, J. (2006). La triangulación analítica como recurso para la validación de estudios de encuesta recurrentes e investigaciones de réplica en Educación Superior. RELIEVE, *12*(2), 289-305.

Romberg, T. A. y Collis, K. A. (1980). Cognitive level and performance on addition and subtraction problems. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 322-325). Berkeley, CA: PME.

Rossman, J. (1931). *The psychology of the inventor.* Washington DC, WA: Inventor's Publishing.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México DF, México: Iberoamérica.

Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos. Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de Investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Santos, M. C. (2001). Problem posing and problematization in learning and teaching mathematics. *Adult Education and Development, 57*, 107-121.

Schoenfeld, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 345-395). Nueva York, NY: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987*). What's All the Fuss about Metacognition?* En A. Schoenfeld, (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematical teaching and learning*. *A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334-370). Nueva York, NY: Macmillan.

Schroeder, T. L. y Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton y A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston, VA: The Council.

Schwartz, J. L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication and division word problems. Final report to NIE (Grant NIE- G- 80- 0144).* Cambridge, MA: MIT.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum y National Council of

Teachers of Mathematics.

Searle, B., Lorton, P. y Suppes, P. (1974). Structural variables affecting CAI performance on arithmetic Word problems of disadvantaged and deaf students. *Educational Studies in Mathematics, 5,* 371-384.

Seco, M., Andrés, O. y Ramos, G. (1999). *Diccionario del español actual*. Madrid: Aguilar.

Sheikhzade, M. (2008, Julio). *Promoting skills of problem-posing and problem- solving in making a creative social studies classroom*. Presentado en la 4th Global Conference, Oxford. Consultado el 9 de Octubre de 2010 en http://www.inter-disciplinary.net/ati/education/cp/ce4/Sheikhzade%20paper.pdf.

Sheikhzade, M. (2010). A creative social studies classroom. En B. McKenzie y P. Fitzsimmons (Eds.), *Exploring interdisciplinary trends in creativity y engagement*. (pp. 77-86). Oxford, Reino Unido: Inter-Disciplinary Press.

Shimada, S. (Ed.) (1977). *On lessons using open-ended problems in mathematics teaching*. Tokyo, Japon: Mizuumishobo.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1) 19-28.

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM (Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik)*, *95*(2), 67-72.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM (Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik), *29*(3), 75-80.

Silver, E. A. y Cai, J. (1996): An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 521-539.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S. y Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 293-309.

Simon, H. A. (1973). The structure of ill structured problems. *Artificial Intelligence, 4*, 181-201.

Solórzano, D. (1989). Teaching and social change: Reflection on a Freire an approach in a college classroom. *Teaching Sociology, 17*(2), 218-225.

Song, S., Yim, J., Shin, E. y Lee, H. (2007). Posing problems with use the 'what if not?' strategy in NIM game. En J. H. Woo, H. C. Lee, K. S. Park, y D. Y. Seo, (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193-200). Seúl, Corea del Sur: PME.

Stanic, G. M. A. y Kilpatrick. J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associate.

Stoyanova, E. (1998). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing: a study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young australians*. Tesis doctoral, Universidad de Edith Cowan, Australia.

Suppes, P., Lotus, E. y Jerman, M. (1969). Problem-solving on a computer-based teletype. *Educational Studies in Mathematics, 2,* 1-15.

Swenson, E. J. (1994). How much real problem solving? *Arithmetic Teacher*, *41*(7), 400-403.

Tchoshanov, M. (2008). *Impact of instructional setting, problem posing, and language on elementary school students' performance in solving mathematical word problems.* Consultado el 14 de diciembre de 2009 en http://www.allacademic.com//meta/p_mla_apa_research_citation/1/1/4/7/0/pages114702/p114702-1.php.

Teddlie, C. y Tashakkori, A. (2003). Mayor issues and controversies in the use of mixed methods in the social and behavioral sciences. En A. Tashakkori y C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social & behavioral research* (pp. 3-50). Thousand Oaks, CA: Sage.

Tirosh, D. y Graeber, A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics, 20*(1), 79-96.

Tuckman, B. W. (1972). *Conducting Educational Research*. New York, NY: Holt, Rinehart y Winston.

Valentin J. y Chap S. L. (2004). Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils' ability to identify the correct operation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* 4 de Mayo. Consultado el 21 de Junio 2010 en http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Londres, Reino Unido: Academy Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México DF, México: Trillas.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. En Nasser, L. (Ed.), *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro* (pp. 1-26). Río de Janeiro, Brasil: UFRJ Projeto Fundão, Instituto de Matemática.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albania, NY: State University of NY Press.

Vergnaud, G. (1997). *Le moniteur de mathématiques. Résolution de problémes.* París: Nathan.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(2), 167-181.

Vergnaud, G. y Duran, C. (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. En C. Coll (Eds.), *Psicología genética y aprendizajes escolares* (pp. 91-104). Madrid: Siglo XXI.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 99-137). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*(1), 85-94.

Vinacke, W. E. (1952). *The psychology of thinking.* Nueva York, NY: McGraw Hill.

Voss, J. F., Tyler, S. W. y Yengo, L. A. (1983). Individual differences in the solving of social science problems. En R. F. Dillon y R. R. Schmeck (Eds.), *Individual differences in cognition* (pp. 205-232). Nueva York, NY: Academic Press.

Wallas, G. (1926). *The art of thought.* New York, NY: Harcourt-Bace.

Walter, M. y Brown, S. (1977). Problem posing and problem solving: an illustration of their interdependence. *Mathematics Teacher*, *70*(1), 5-13.

Weaver, J. F. (1971). Some factors associated with pupil's performance levels on simple addition and subtraction sentences. *The Arithmetic Teacher, 18,* 513-519.

Weaver, J. F. (1972). The ability of first-, second-, and third- grade pupils to identify open addition and subtraction sentences for which no solution exists within the set of whole numbers. *School Science and Mathematics*, *72,* 679-691.

Weaver, J. F. (1973). The symmetric property of the equality relation and young children's ability to solve open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*(1), 45-56.

Webb, N. L. (1979). Content and context variables in problem tasks. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 69-102). Philadelphia, PA: The Franklin Institute Press.

Whitin, D. J. (2006). Problem posing in the elementary classroom. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 14-18.

Whitin, P. (2004). Promoting problem-posing explorations. *Teaching Children*

Mathematics, 11(4), 180-186.

Wilson, J. M., Fernández, M. L. y Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. En P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the* classroom: *high school mathematics* (pp. 57-78). New York, NY: Macmillan.

Wright, J. y Stevens, N. (1980). Improving verbal problem solving performance. *Arithmetic Teacher, 31*(2), 40-42.

Yerushalmy, M. Chazan, D. y Gordon M. (1990). Mathematical problem posing for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional science, 19,* 219-245.

Zweng, M. J. (1964). Division problems and the concept of rate. *Arithmetic Teacher, 11*, 547-556.