



*ugr*

Universidad  
de **Granada**

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

**TESIS DOCTORAL**

**EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ARITMÉTICO**

**UN ESTUDIO COMPARATIVO**

ÁNGEL DÍEZ LOZANO

GRANADA, 2011



ugr

Universidad  
de Granada

## **EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ARITMÉTICO.**

### **UN ESTUDIO COMPARATIVO**

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los Doctores D. Luis Rico Romero y Dña. Encarnación Castro Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Ángel Díez Lozano para optar al grado de Doctor en la especialidad de Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Ángel Díez Lozano

Vº Bº del Codirector

Vº Bº de la Codirectora

Fdo.: Luis Rico Romero

Fdo.: Encarnación Castro Martínez

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar el más sincero agradecimiento a todas las personas que me han ayudado, animado en los momentos de desánimo y confiado en mí para la realización de este trabajo de investigación.

En especial mi reconocimiento a los Doctores D. Luis Rico Romero y D.<sup>a</sup> Encarnación Castro Martínez por su dirección, ayuda inestimable y sus sabios consejos. Sin ellos esta investigación no se habría efectuado.

A los equipos directivos, profesores y alumnos de los centros educativos:

- Colegio Público de Educación Infantil, Primaria y Secundaria José Ortega y Gasset de Ceuta.
- Colegio Concertado de Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato Compañía de María de Granada.
- Colegio Público de Educación Infantil y Primaria Princesa Sofía de Huéscar (Granada).
- Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) La Sagra de Huéscar (Granada).
- Colegio Concertado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria Juan XXIII de Granada.
- Colegio Concertado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria San José de Cartuja de Granada.
- Colegio Público de Educación Infantil, Primaria y Secundaria Sierra Nevada de Granada.
- Colegio Público de Educación Infantil y Primaria Sánchez Velayos de Ugíjar de Granada.
- Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) Ulyseas de Ugíjar (Granada).

Los cuales desinteresadamente realizaron las pruebas por su cariñosa acogida, sinceridad en la resolución de las pruebas y su buen comportamiento en aceptar las normas de cada una de ellas.

A los profesores D.<sup>a</sup> María Consuelo Cañadas Santiago y D. Miguel García Pardillo por su colaboración y eficaz trabajo de campo.

A D.<sup>a</sup> Elisa Caballero Ruiz por su eficaz trabajo estadístico.

A la ayuda y los sabios consejos de los Doctores D. Enrique Castro Martínez, D. Isidoro Segovia Alex, D. Ramón Gutiérrez Jaímez, D. Andrés González Carmona Y D.<sup>a</sup> Nuria Rico Castro.

A D.<sup>a</sup> Elba Gutiérrez Santiuste por su eficacia y buen hacer en el trabajo de edición.

A mis compañeros del Grupo de Investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico por sus críticas constructivas, necesarias para una investigación.

# ÍNDICE

Índice de Figuras.....	XVII
Índice de Tablas.....	XIX
Introducción.....	1
<b>Capítulo 1.</b>	
<b>El Trabajo de Investigación.....</b>	<b>5</b>
1. Marco General de Investigación.....	5
2. Racionalidad del Estudio.....	10
2.1. Nivel Social.....	10
2.2. Nivel Curricular.....	11
2.3. En Relación con los Contenidos.....	12
2.4. Como Objeto de Investigación.....	13
3. Primera Aproximación al Trabajo de Investigación.....	15
4. Antecedentes.....	17
4.1. Investigaciones Curriculares.....	17
4.2. Investigaciones sobre Evaluación.....	21
4.3. Investiaciones sobre Aritmética Escolar.....	25
5. Caracterización General del Trabajo de Investigación.....	26
6. Objetivos Parciales.....	28
7. Interés del Estudio.....	29
<b>Capítulo 2.</b>	
<b>Marco Teórico.....</b>	<b>33</b>
1. Introducción.....	33
2. Innovación y Cambio Curricular.....	34
2.1. Documentos Básicos sobre el Currículo de Matemáticas.....	35
2.2. Historia del Currículo de Matemáticas.....	39

2.3. Estudios Internacionales .....	42
3. Cambios Curriculares en España .....	50
3.1. Ley de Educación Primaria de 1945.....	51
3.2. Ley General de Educación de 1970 .....	52
3.3. Ley Orgánica General del Sistema Educativo .....	53
3.4. Nuestro Concepto de Currículo .....	56
4. Formación Aritmética.....	59
4.1. Aprendizaje Aritmético Escolar y Currículo .....	59
4.2. Destrezas Aritméticas.....	62
4.3. Formación Aritmética en un Marco Curricular .....	64
4.4. Rendimiento Aritmético .....	65
5. Evaluación .....	66
5.1. Sobre el Concepto General de Evaluación .....	67
5.2. Investigación sobre Evaluación en Educación Matemática.....	70
5.3. Evaluación en Educación Matemática.....	72
5.4. Fines de la Evaluación .....	75
5.5. La Evaluación de los Alumnos .....	76
5.6. Evaluación de Programas .....	79
6. La Evaluación en el Currículo LOGSE .....	82
6.1. Evaluación en el Diseño Curricular Base .....	83
6.2. Participación en Estudios de la IEA.....	84
6.3. Diagnóstico del Sistema Educativo Español de 1997 .....	84
6.4. Evaluación de la Enseñanza Secundaria Obligatoria 2000.....	88
7. Conclusiones.....	89
<b>Capítulo 3.</b>	
<b>Marco Metodológico.....</b>	<b>93</b>
1. Introducción .....	93
2. El Test de Habilidad de Cálculo Ballard .....	97
2.1. Requisitos Establecidos para el Test de Habilidad de Cálculo.....	98
2.2. Adaptaciones del Test de Habilidad de Cálculo de Ballard.....	101

3. Encuadre de la Investigación en los Paradigmas Convencionales.....	102
3.1. Modalidad de Investigación.....	103
3.2. Tipo de Diseño .....	104
3.3. Otras Características.....	104
3.4. Diseño de la Investigación .....	105
4. Etapas y Pasos que Articulan la Investigación.....	107
4.1. Primera Etapa: Instrumento de Recogida de Información .....	107
4.2. Segunda Etapa: Aplicación del Instrumento y Recogida de Datos Primarios.....	114
4.3. Tercera Etapa: Organización de los Datos .....	121
4.4. Cuarta Etapa: Tratamiento Estadístico de los Datos .....	124
4.5. Quinta Etapa: Análisis Descriptivo .....	130
4.6. Sexta Etapa: Estructura Curricular del Programa Escolar y Aprendizajes Esperados .....	136
4.7. Séptima Etapa: Evaluación del Currículo LOGSE .....	147
4.8. Octava Etapa: Evaluación de los Currículos de la LEEP de 1945 y la LGE de 1970.....	148
4.9. Novena Etapa: Comparación entre Currículos por su eficacia	149
5. Formulación de las Hipótesis de Investigación .....	150
<b>Capítulo 4.</b>	
<b>Estudio Comparativo de los Currículos de Matemáticas para la Educación Obligatoria en el Periodo 1945–2005 .....</b>	
1. Introducción.....	151
2. Periodos, Documentos y Sistemática del Estudio.....	152
3. Componentes Relevantes del Sistema Educativo .....	155
3.1. Fines de la Educación.....	155
3.2. Periodo de Enseñanza Obligatoria.....	157
3.3. Profesorado.....	159
4. Los Currículos de Matemáticas.....	162
4.1. Conocimiento Matemático.....	162

4.2. Objetivos.....	164
4.3. Contenidos .....	167
4.4. Metodología.....	169
4.5. Evaluación .....	171
4.6. Balance de la Comparación Curricular.....	173
5. Programas para la Formación Aritmética Escolar .....	173
5.1. Contenidos Matemáticos para la EGB .....	171
5.2. Contenidos Matemáticos según la LOGSE .....	175
5.3. Comparación de los Contenidos por Edades en los Tres Programas .....	176
6. Clasificación de los Contenidos de Arimética y Magnitudes .....	177
6.1. Estándares de Contenido .....	177
6.2. Comparación de los Contenidos de la Aritmética de Naturales .....	178
6.3. Conclusiones de la Comparación de Contenidos sobre Naturales .....	193
6.4. Comparación de los Contenidos de Aritmética de los Racionales.....	195
6.5. Conclusiones de la Comparación de Contenidos sobre Racionales.....	204
6.6. Comparación de los Contenidos del Bloque de Magnitudes y Medida.....	205
6.7. Conclusiones de la Comparación en el Bloque de Magnitudes y Medida .....	215
7. Nivel Curricular de los Ítems del Test Ballard en cada Programa .....	216
7.1. Niveles Teóricos de los Ítems según Programas .....	217
7.2. Distribución Global Comparativa de los Ítems del Test.....	219
8. Conclusiones .....	221
<b>Capítulo 5.</b>	
<b>Evaluación del Currículo LOGSE de Matemáticas mediante Aplicación del Test de Ballard .....</b>	<b>223</b>

1. Introducción.....	223
2. Idoneidad de Ítems y Eficacia de un Currículo.....	224
2.1. Rendimiento de los Ítems y Evaluación de Programas.....	224
2.2. Categorías Empíricas de Idoneidad.....	225
2.3. Eficacia de un Programa.....	226
2.4. Nivel Curricular Teórico.....	227
3. Evaluación del Currículo LOGSE mediante el Test de Ballard.....	228
3.1. Bloques Temáticos y Objetivos Específicos.....	228
3.2. Procedimiento.....	230
4. Estudio por Bloques del Nivel Empírico de los Ítems.....	230
4.1. Nivel Empírico de los Ítems de Números Naturales.....	230
4.2. Balance de los Ítems de Números Natarales.....	235
4.3. Nivel Empírico de los Ítems del Sistema Monetario.....	237
4.4. Balance de los Ítems del Sistema Monetario.....	239
4.5. Nivel Empírico de los Ítems de Medida del Tiempo.....	241
4.6. Balance de los Ítems de Medida del Tiempo.....	242
4.7. Nivel Empírico de los Ítems del Sistema Métrico Decimal.....	243
4.8. Balance de los Ítems del Sistema Métrico Decimal.....	244
4.9. Nivel Empírico de los Ítems del Bloque de Números Racionales.....	245
4.10. Balane de los Ítems del Bloque de Números Racionales.....	250
4.11. Nivel Empírico de los Ítems de Números Decimales.....	252
4.12. Balance de los Ítems del Bloque de Números Decimales.....	256
4.13. Nivel Empírico de los Ítems de Raíces Cuadradas.....	257
4.14. Balance de los Ítems del Bloque de Raíz Cuadrada.....	258
4.15. Nivel Empírico de los Ítems de Porcentajes.....	259
4.16. Balance de los Ítems del Bloque de Porcentajes.....	259
4.17. Nivel Empírico de los Ítems de Proporcionalidad.....	260
4.18. Balance de los Ítems de Proporcionalidad.....	261
4.19. Nivel Empírico de los Ítems del Bloque de Divisibilidad.....	261

4.20. Balance de los Ítems del Bloque de Divisibilidad .....	262
4.21. Nivel Empírico de los Ítems de Media Aritmética .....	263
4.22. Balance de los Ítems del Bloque de Media Aritmética .....	264
4.23. Nivel Empírico de los Ítems de Medidas Geométricas .....	264
4.24. Balance de los Ítems del Bloque de Medidas Geométricas ..	266
5. Análisis Conjunto de los Resultados .....	267
5.1. Datos Globales .....	267
6. Rendimiento Aritmético de los Escolares .....	269
6.1. Logros por Niveles .....	270
6.2. Logros en la Categoría de Idoneidad .....	275
7. Estudio sobre Eficacia del Currículo .....	278
<b>Capítulo 6.</b>	
<b>Estudio Comparativo .....</b>	<b>283</b>
1. Introducción .....	283
2. Evaluación del Cambio Curricular .....	285
3. Rendimiento y Eficacia del Currículo de la LGE mediante el Test de Ballard .....	286
3.1. Resultados Finales de la Prueba en el Programa de la LGE ..	286
3.2. Rendimiento Aritmético para el Currículo de la LGE .....	289
3.3. Estudio sobre la Eficacia del Currículo de la LGE .....	291
4. Comparación del Rendimiento y la Eficacia entre los Programas LGE y LOGSE .....	293
4.1. Comparación del Rendimiento .....	294
4.2. Comparación de la Eficacia .....	296
4.3. Puntos Fuertes y Débiles del Currículo LOGSE Resultantes de la Comparación .....	297
5. Rendimiento y Eficacia del Currículo de la LEP mediante el Test de Ballard .....	297
5.1. Datos Globales de la Muestra del Currículo de la LEP .....	298
5.2. Nivel de Efectividad .....	299
5.3. Estudio de los Currículos según sus Niveles de Efectividad ...	299

5.4. Comparación de los Currículos según sus Niveles de Efectividad.....	302
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Conclusiones y Perspectivas.....</b>	<b>305</b>
1. Introducción.....	305
2. Balance General.....	305
3. Aportaciones .....	308
4. Logros .....	309
4.1. Logros de los Objetivos de la Investigación .....	309
4.2. Discusión de las Hipótesis .....	311
4.3. Estudios Realizados.....	314
5. Hallazgos.....	315
6. Perspectivas de Futuro y Conclusiones .....	316
6.1. Cuestiones Pendientes .....	316
6.2. Cuestiones Abiertas .....	317
<b>Anexos .....</b>	<b>319</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>347</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS

## Capítulo 1

Figura 1. Ubicación del estudio según campos teóricos .....	17
---	----

## Capítulo 3

Figura 1. Ítems en distintos programas agrupados por nivel curricular .....	106
---	-----

## Capítulo 4

Figura 1. Ítems en distintos programas agrupados por nivel curricular .....	220
Figura 2. Número de ítems según nivel curricular agrupados por programas.....	220

## Capítulo 5

Figura 1. Distribución de ítems por bloques según categorías.....	269
Figura 2. Distribución de ítems por categorías según bloques.....	278
Figura 3. Comparación por cursos de ítems idóneos teóricos y empíricos .....	280
Figura 4. Comparación de las secuencias de ítems idóneos por niveles.....	281

## Capítulo 6

Figura 1. Distribución de ítems por bloques según categorías en el currículo de la LGE .....	288
Figura 2. Distribución de ítems por categorías de idoneidad según bloques de contenido.....	291
Figura 3. Comparación por cursos de ítems idóneos teóricos y empíricos .....	292

Figura 4. Comparación de las secuencias de ítems idóneos por niveles.....	293
Figura 5. Comparación de rendimientos globales alcanzados en los programas LOGSE y LGE .....	294
Figura 6. Comparación de rendimientos según bloques entre los programas LGE y LOGSE .....	295
Figura 7. Comparación de los porcentajes de eficacia de los currículos LOGSE y LGE.....	296
Figura 8. Comparación de los tres programas según indicadores de efectividad.....	301

# ÍNDICE DE TABLAS

## Capítulo 2

Tabla 1. Comparación de modelos curriculares.....	49
Tabla 2. Porcentajes medios de aciertos en subáreas de matemáticas .....	86
Tabla 3. Alumnos por niveles de rendimiento .....	86

## Capítulo 3

Tabla 1. Objetivos parciales que desglosan el Objetivo 1.....	94
Tabla 2. Objetivos parciales que desglosan el Objetivo 2.....	95
Tabla 3. Distribución de la muestra.....	118
Tabla 4. Resultados generales por niveles de la aplicación de Test ampliado de Ballard.....	123
Tabla 5. Coeficiente alpha de Cronbach por bloques .....	125
Tabla 6. Fiabilidad de los ítems.....	126
Tabla 7. Estadísticos descriptivos .....	130
Tabla 8. ANOVA de la variable dependiente: Puntuación media. Prueba de efectos inter-sujetos.....	132
Tabla 9. ANOVA de la variable dependiente: Raíz. Prueba de los efectos inter-sujetos .....	133
Tabla 10. Grupos de centros homogéneos .....	134
Tabla 11. Relación de grupos de cursos homogéneos .....	135
Tabla 12. Nivel curricular LOGSE de los ítems del test .....	144

## Capítulo 4

Tabla 1. Descriptores de los documentos legales y curriculares consultados .....	153
--	-----

Tabla 2. Tipos de fines para la educación propuestos en las diferentes leyes .....	156
Tabla 3. Estructura y organización de la enseñanza en los diferentes currículos .....	158
Tabla 4. Formación en España del profesorado de enseñanza obligatoria .....	159
Tabla 5. Matemáticas escolares .....	162
Tabla 6. Objetivos de matemáticas para el periodo de la educación obligatoria .....	165
Tabla 7. Objetivos de matemáticas sobre habilidad de cálculo aritmético .....	166
Tabla 8. Organización de los contenidos en los programas de educación obligatoria.....	167
Tabla 9. Resumen de los contenidos de los programas de educación obligatoria.....	168
Tabla 10. Metodología en los programas de educación obligatoria ...	170
Tabla 11. Normativa legal sobre evaluación .....	171
Tabla 12. Resumen de los criterios de evaluación del programa LOGSE .....	172
Tabla 13. Edades y niveles de educación obligatoria .....	176
Tabla 14. Capacidades a desarrollar en los escolares según estándares de contenido (NCTM, 2006) .....	177
Tabla 15. Números naturales. Contenidos para los 6-7 años de edad.....	178
Tabla 16. Números naturales. Contenido para los 7-8 años de edad .	180
Tabla 17. Números naturales. Contenidos para los 8-9 años de edad.....	182
Tabla 18. Números naturales. Contenidos para los 9-10 años de edad.....	185
Tabla 19. Números naturales. Contenidos para los 10-11 años de	

edad .....	187
Tabla 20. Números naturales. Contenidos para los 11–12 años de edad .....	189
Tabla 21. Números naturales. Contenidos para los 12–13 años de edad .....	190
Tabla 22. Números naturales. Contenidos para los 13–14 años de edad .....	192
Tabla 23. Números racionales. Contenidos para los 7–8 años de edad .....	195
Tabla 24. Números racionales. Contenidos para los 8–9 años de edad .....	196
Tabla 25. Números racionales. Contenidos para los 9–10 años de edad .....	196
Tabla 26. Números racionales. Contenidos paa los 10–11 años de edad .....	198
Tabla 27. Números racionales. Contenidos para los 11–12 años de edad .....	199
Tabla 28. Números racionales. Contenidos para los 12–13 años de edad .....	201
Tabla 29. Números racionales. Contenidos para los 13–14 años de edad .....	203
Tabla 30. Magnitudes. Contenidos para los 6–7 años de edad .....	205
Tabla 31. Magnitudes. Contenidos para los 7–8 años de edad .....	206
Tabla 32. Magnitudes. Contenidos para los 8–9 años de edad .....	207
Tabla 33. Magnitudes. Contenidos para los 9–10 años de edad .....	208
Tabla 34. Magnitudes. Contenidos para los 10–11 años de edad .....	210
Tabla 35. Magnitudes. Contenidos para los 11–12 años de edad .....	211
Tabla 36. Magnitudes. Contenidos para los 12–13 años de edad .....	212
Tabla 37. Magnitudes. Contenidos para los 13–14 años de edad .....	214

Tabla 38. Nivel curricular en el programa LEP de los ítems del test de Ballard .....	217
Tabla 39. Nivel curricular en el programa LGE de los ítems del test de Ballard .....	218
Tabla 40. Nivel curricular en el programa LOGSE de los ítems del Test de Ballard .....	218

## Capítulo 5

Tabla 1. Nivel de Instrucción LOGSE de los Ítems del Test Ampliado de Ballard .....	227
Tabla 2. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.1 .....	231
Tabla 3. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.2 .....	231
Tabla 4. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.3 .....	232
Tabla 5. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.4 .....	232
Tabla 6. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.5 .....	233
Tabla 7. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 1.6 .....	233
Tabla 8. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.7 .....	234
Tabla 9. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.8 .....	234
Tabla 10. Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 1 .....	235
Tabla 11. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 2.1 .....	236
Tabla 12. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 2.2 .....	237
Tabla 13. Rendimiento por curso del ítem del Apartado 2.3 .....	238
Tabla 14. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 2.4 .....	238
Tabla 15. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 2.5 .....	239
Tabla 16. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 2.6 .....	239
Tabla 17. Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 2 .....	240
Tabla 18. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 3.1 .....	241
Tabla 19. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 3.2 .....	241

Tabla 20. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 3.3 .....	242
Tabla 21. Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 3 .....	242
Tabla 22 Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.1 .....	243
Tabla 23. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 4.2.....	243
Tabla 24. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.3 .....	244
Tabla 25. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 4.4.....	244
Tabla 26. Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 4 .....	245
Tabla 27. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 5.1 .....	246
Tabla 28. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.2.....	246
Tabla 29. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 5.3 .....	246
Tabla 30. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.4.....	247
Tabla 31. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.5.....	247
Tabla 32. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.6.....	248
Tabla 33. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 5.7 .....	248
Tabla 34. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.8.....	249
Tabla 35. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.9.....	249
Tabla 36. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.10.....	249
Tabla 37. Balance de los Niveles Teórico y Empírico de los Ítems del Bloque 5 .....	250
Tabla 38. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 6.1 .....	252
Tabla 39. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.3 .....	252
Tabla 40. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.3.....	253
Tabla 41. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 6.4 .....	253
Tabla 42. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.5.....	254
Tabla 43. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.6.....	254

Tabla 44. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 6.7 .....	255
Tabla 45. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.3 .....	255
Tabla 46. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.9.....	255
Tabla 47. Balance entre Niveles Teórico y Empírico de los Ítems sobre Decimales .....	256
Tabla 48. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 7.1 .....	257
Tabla 49. Rendimiento por curso del ítem del Apartado 7.2 .....	258
Tabla 50. Balance entre Niveles Teórico y Empírico de los Ítems sobre Raíz Cuadrada .....	258
Tabla 51. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 8.1 .....	259
Tabla 52. Balance entre Niveles Teórico y Empírico de los Ítems sobre Porcentaje .....	260
Tabla 53. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 9.1 .....	260
Tabla 54. Balance entre Niveles Teórico y Empírico de Proporcionalidad.....	261
Tabla 55. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 10.1 .....	262
Tabla 56. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 10.2.....	262
Tabla 57. Balance entre Curso Teórico y Empírico de Divisibilidad ...	263
Tabla 58. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 11.1 .....	263
Tabla 59. Balance entre Niveles Teórico y Empírico de la Media Aritmética.....	264
Tabla 60. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 12.1 .....	265
Tabla 61. Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 12.2.....	265
Tabla 62. Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 12.3 .....	265
Tabla 63. Balance entre Niveles Teórico y Empírico de Medidas Geométricas .....	266
Tabla 64. Rendimientos Finales en Cada Uno de los Dominios según Categorías de Idoneidad .....	267

Tabla 65. Ítems que Alcanzan su Nivel de Idoneidad según Resultados de la Evaluación .....	275
Tabla 66. Distribución por Curso de Ítems según Categorías Inferiores .....	275
Tabla 67. Ítems Desconocidos en el Periodo Evaluado.....	277
Tabla 68. Porcentaje de Acierto por Curso en las Previsiones de Ítems Idóneos.....	279

## Capítulo 6

Tabla 1. Rendimientos finales en cada dominio según categorías de idoneidad.....	287
Tabla 2. Ítems idóneos según nivel en el currículo de la LGE .....	289
Tabla 3. Distribución por curso de ítems según categorías inferiores	290
Tabla 4. Indicadores de eficacia por curso en las previsiones de ítems idóneos .....	291
Tabla 5. Porcentajes de ítems idóneos de Números y Operaciones en los dos programas.....	296
Tabla 6. Resultados globales de la aplicación de 1948. ....	298
Tabla 7. Número de ítems por nivel curricular teórico según programas .....	230
Tabla 8. Rendimiento empírico medio por nivel y programa.....	230
Tabla 9. Efectividad para cada nivel educativo por programas.....	231



## INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación que presentamos es un estudio de evaluación curricular, centrado en la Aritmética Escolar y llevado a cabo con escolares españoles de edades comprendidas entre los 8 y 14 años, es decir, niños y niñas que estudian la Educación Obligatoria en uno de los cuatro últimos cursos de Educación Primaria o en uno de los dos primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria.

Este estudio se realiza en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 *Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico*, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, que tiene entre sus objetivos:

*resolver los problemas de la práctica escolar, considerando el carácter sistémico de cualquier plan de formación en matemáticas dentro del sistema educativo..., valorar el currículo como un plan operativo con diferentes niveles de reflexión e implementación... y atender los problemas que aparecen al considerar la evaluación escolar en matemáticas (Rico y otros, 1997).*

El trabajo de campo se lleva a cabo durante el primer trimestre del curso académico 2000-2001, con estudiantes cuya formación se ha realizado en el marco normativo establecido por la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Su proceso de formación ha seguido las directrices señaladas por el Ministerio de Educación y Ciencia en los Reales Decretos 1006/91 y 1007/1991, de 14 de junio, que fijan las enseñanzas mínimas correspondientes para Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria, respectivamente (BOE 220/1991, de 13 de septiembre). El marco legal en que transcurre el proceso de formación de estos estudiantes lo llamamos en este trabajo *el currículo de la LOGSE*.

El rendimiento en Aritmética Escolar ha sido objeto de interés por parte de agentes políticos y sociales, educadores y gestores educativos, padres y profesores, investigadores e innovadores del currículo escolar. Esto es así porque los estudios sobre rendimiento aritmético proporcionan indicadores educativos relevantes para expresar el desarrollo de una sociedad. Los indicadores contribuyen a mostrar la calidad del sistema educativo por medio de las habilidades y logros que alcanzan los escolares en una serie de disciplinas básicas, entre las que se encuentra la Aritmética, que se considera núcleo de la alfabetización matemática y científica, y cuyo logro forma parte de la *alfabetización de los escolares*. Los indicadores, que caracterizan la preparación que los sistemas educativos proporcionan, permiten apreciar la contribución a la formación de los ciudadanos durante el periodo de escolaridad (Rico, 2005).

Recoger datos mediante una diversidad de instrumentos y analizarlos por medio de distintas técnicas son estrategias de trabajo utilizadas en los estudios curriculares para llevar a cabo sus fines. De este modo se establecen magnitudes que permiten comparar los programas, promover su estudio, encontrar diferencias, establecer previsiones y encauzar el desarrollo del currículo hacia niveles de calidad contrastados.

Este estudio se lleva a cabo mediante la evaluación del rendimiento de los escolares en Aritmética Escolar, es decir, del conocimiento de los estudiantes sobre hechos, conceptos básicos y estructuras aritméticas, del dominio sobre reglas, rutinas, algoritmos y otras destrezas de cálculo, de su precisión en cálculo mental, habilidad en estimación, aplicación de estrategias y resolución de problemas aritméticos (Castro, Rico y Castro, 1987).

La diversidad de opciones existentes para la evaluación curricular de la Aritmética Escolar procede de los diferentes campos en los que se puede realizar esta evaluación (habilidad de cálculo aritmético, cálculo mental, resolución de problemas, etc.). En este trabajo nos centramos en la habilidad de cálculo aritmético. Para ello describiremos la situación actual del rendimiento de los escolares en la habilidad de cálculo aritmético y posteriormente lo compararemos con el rendimiento de escolares españoles —con las mismas edades— de currículos anteriores.

Avanzamos que el objeto de este estudio consiste en evaluar el rendimiento escolar en Aritmética del currículo de la LOGSE mediante la evaluación de alumnos que se han formado en dicho plan. Igualmente es objeto de este estudio llevar a cabo una comparación de dicho rendimiento con el alcanzado por el currículo de la Ley General de Educación (LGE) de 1970, evaluado mediante estudiantes de las mismas edades, que siguieron el cambio establecido por las Orientaciones Pedagógicas de 1971 (Castro, 1975) y, así mismo, con el currículo de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria de 17 de julio de 1945 (LEEP), antes de la publicación de los nuevos cuestionarios para la Enseñanza Primaria Nacional de 6 de febrero de 1953 (Fernández Huerta, 1950; Andrés, 1952). Es decir, compararemos el rendimiento escolar en Aritmética en tres periodos de cambio curricular en España, sobre los cuales disponemos de resultados contrastados de los estudiantes que siguieron esos planes de estudios obtenidos con el mismo instrumento (Díez, 2001).

La evaluación que realizamos se propone mostrar el dominio básico que los escolares tienen sobre conceptos y procedimientos de la Aritmética Escolar y pretende obtener indicadores de dicho dominio en términos del currículo escolar, en cuanto éste establece conocimientos y destrezas para cada uno de los cursos y niveles escolares. El rendimiento aritmético muestra, en función de unos objetivos y mediante unos instrumentos, el dominio que tiene un individuo o un grupo escolar en Aritmética; dicho rendimiento se expresa por los resultados alcanzados en unas pruebas que se expresan en una escala. El rendimiento de un grupo se establece por medio de los valores que los sujetos que lo componen obtienen con unos instrumentos.

La información de que disponemos procede de los resultados obtenidos en dos pruebas estandarizadas de papel y lápiz, que proporcionan estudiantes de las edades mencionadas. Las pruebas son comunes, siguen procedimientos de aplicación comunes y se llevan a cabo por evaluadores externos a los propios centros en donde se aplican. Una de las pruebas es resultado de un proceso de adaptación realizado por nosotros del Test de Ballard y la segunda prueba es de elaboración propia (Díez, 2001).

En lo que sigue desarrollamos esta memoria en siete capítulos. El primer capítulo está dedicado a presentar el marco general de la investigación, la racionalidad del estudio, los antecedentes, instrumentos e interés de la investigación. En el segundo capítulo desarrollamos el marco teórico en el que realizamos la investigación. En el tercer capítulo presentamos el marco metodológico utilizado para efectuar la investigación. El capítulo cuarto lo ocupa un estudio teórico de los tres currículos evaluados. El quinto capítulo corresponde al análisis descriptivo de los resultados de la prueba de campo. El capítulo sexto lo destinamos a presentar un estudio comparativo de la eficacia de los tres programas de aritmética escolar que se estudian, según su evaluación por medio del Test de Ballard. En el séptimo y último capítulo hacemos un balance general de los resultados, logro de objetivos y discusión de hipótesis, junto con una valoración estratégica y un planteamiento de expectativas de futuro.



# CAPÍTULO PRIMERO

## EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

### 1. Marco General de la Investigación

Como se ha dicho en la introducción, esta investigación estudia la eficacia del currículo de matemáticas de la LOGSE, en relación con el rendimiento escolar en Aritmética de alumnos que se han formado en dicho plan durante el curso 2000–2001. Igualmente, compara ese rendimiento escolar con el rendimiento de otros dos momentos anteriores de cambio curricular en España, 1950 y 1975, sobre los que se dispone de resultados contrastados obtenidos con el mismo instrumento y relativos a alumnos de niveles equivalentes; de este modo se estudia la evolución del rendimiento en Aritmética Escolar.

El marco general de este trabajo se fundamenta en las líneas del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Este grupo está reconocido y apoyado por el Plan Andaluz de Investigación desde 1988; su código de identificación es FQM0193 y la denominación oficial: "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico"; los miembros del equipo que lleva a cabo esta investigación pertenecen a este grupo.

El campo general en que se desenvuelve la investigación del Grupo de Investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos, algebraicos y analíticos en el sistema educativo y en el medio social. El pensamiento numérico y algebraico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas, algebraicas y del análisis (Rico, 1996; Castro, 1994; Rico, Castro y Coriat, 1997).

Entre los temas permanentes de investigación, y en continua revisión, por parte del Grupo de investigación, se encuentran los estudios realizados sobre evaluación en matemáticas.

Las investigaciones realizadas sobre evaluación por este Grupo se han desarrollado fundamentalmente en cuatro direcciones:

Primera dirección. Estudios generales sobre el rendimiento matemático escolar. Se pueden considerar en esta dirección las investigaciones: *El cálculo aritmético en la EGB* (Castro, 1975); *la Investigación Granada-Mats: Un análisis del programa escolar para el área de matemáticas* (Rico y otros, 1985); *Estimación y cálculo aproximado en la EGB* (Segovia, 1987); y *Rendimiento escolar en matemáticas. Estudio de un instrumento* (Díez, 2001).

El desarrollo de estas investigaciones ha coincidido con épocas de cambio curricular en nuestro país. Su objetivo primordial ha consistido en evaluar un cambio curricular detectando cambios significativos del rendimiento matemático escolar tras la implantación de los nuevos currícula, con nuevos contenidos y planteamientos metodológicos diferentes. La crítica y clasificación de los diferentes contenidos establecidos en el currículo según su viabilidad, en base a los resultados obtenidos en estos trabajos, se han considerado datos relevantes en cada caso.

Características generales de los trabajos realizados sobre rendimiento matemático escolar son:

- La aplicación de pruebas objetivas o tests de instrucción matemática que han sido elaborados por los propios investigadores del grupo o por otros investigadores, en cuyo caso se efectúa un estudio previo de la prueba a aplicar.
- Los instrumentos de medida utilizados abarcan un amplio campo de contenidos del currículo en uso y están enfocados hacia diferentes competencias con las que se quiera medir el rendimiento matemático (habilidad de cálculo aritmético, cálculo mental, razonamiento matemático, habilidad espacial, entre otros).

Los estudios de estas valoraciones han sido utilizados primordialmente para:

- Establecer niveles generales de rendimiento escolar para determinar la consecución de los objetivos del currículo.
- Realizar un balance crítico, entre los logros conseguidos y los pretendidos por el proyecto curricular en curso.
- Realizar estudios longitudinales en los que se comparen los logros alcanzados en determinadas destrezas y habilidades matemáticas considerando los diferentes niveles escolares y, también, distintos currículos y sistemas metodológicos implantados con anterioridad en nuestro país.

Segunda dirección. Otra dirección que han seguido las investigaciones del Grupo sobre evaluación en matemáticas se ha orientado hacia el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos por los escolares, errores de aprendizaje y dificultades de los diferentes tópicos matemáticos del currículo. Las tesis doctorales: *Exploración de Patrones Numéricos mediante*

*Configuraciones Puntuales* (Castro, 1994); *Niveles de Comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa* (Castro, 1994); *Estimación de cantidades discretas, estudios de variables y procesos* (Segovia, 1995); *El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos* (González, 1995); *La Introducción del Número Real en Educación Secundaria* (Romero, 1995); y *Dos conflictos al representar números reales en la recta* (Scaglia, 2000); son estudios realizados por diferentes investigadores del Grupo, total o parcialmente dentro de esta línea.

Suelen hacerse estos estudios en épocas de mayor estabilidad curricular. En ocasiones se centran en la innovación curricular y hacen uso de una estrategia de investigación-acción. Su finalidad es detectar los obstáculos y resistencias que se encuentran en la enseñanza de nuevos contenidos, así como desplegar potencialidades metodológicas del currículo en curso.

Características generales de estas investigaciones son:

- La elección cuidadosa de nuevos tópicos matemáticos, o nuevas formas de abordarlos, sobre los que realizar el estudio.
- La elaboración meditada de los instrumentos (pruebas, encuestas, cuestionarios o tareas abiertas) y la selección de técnicas para la recogida de información, dependiendo de la diversidad de fines que se contemplen.
- Los instrumentos de recogida de información adoptados abarcan un espectro reducido de contenidos del currículo y se orientan a profundizar en los diferentes problemas de aprendizaje que plantean los tópicos matemáticos elegidos.

Los resultados de estas valoraciones se utilizan para:

- Caracterizar los modos de comprensión de los escolares sobre los tópicos matemáticos considerados.
- Diagnosticar, detectar y corregir errores en el aprendizaje de los alumnos y analizar las dificultades de enseñanza.
- Proponer nuevos diseños curriculares, elaborar unidades didácticas junto con nuevos materiales y poner a prueba estrategias metodológicas con las que superar las dificultades y evitar errores.

Tercera dirección. Una tercera línea de investigación, recientemente emprendida, tiene que ver con la formación del profesorado y, en particular, con las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación, así como con la vinculación entre las creencias declaradas y las actuaciones llevadas a cabo por los profesores en el campo de la evaluación en matemáticas. Ejemplos de investigaciones en esta línea realizadas dentro del Grupo Didáctica de la Matemática-Pensamiento Numérico, son las tesis doctorales: *Evaluación de competencias en Álgebra Elemental a través de Problemas Verbales* (Fernández, 1997); *Sistemas de representación de*

*Números Racionales Positivos. Un estudio con maestros en formación* (Gairín, 1999); *Marco Conceptual y creencias de los Profesores sobre la Evaluación en Matemáticas* (Gil, 1999); *La Tabla-100; representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con Profesores de Primaria en formación* (Ruiz, 2000); y *Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial* (Espinosa, 2005).

Por lo que se refiere a la evaluación, el principal interés de estas investigaciones en las que se considera el conocimiento del profesor, ha estado centrado sobre:

- La delimitación de campos con los que caracterizar las concepciones de los profesores sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas.
- La detección de criterios para establecer diferencias entre los distintos modos de entender y poner en práctica la evaluación en matemáticas.
- La elaboración de cuestionarios y el diseño de encuestas mediante los que determinar las creencias declaradas y practicadas sobre evaluación, por los profesores de matemáticas, individualmente o en grupo.
- La clasificación de métodos, tipos y técnicas de evaluación del conocimiento y de las competencias en matemáticas y su uso por parte del profesorado.
- Utilización del análisis didáctico para la elaboración de pruebas y tareas de evaluación.

El tema central de estos trabajos es la formación de profesores de matemáticas y el papel que desempeña la evaluación en tales procesos. Un hilo conductor de estos estudios consiste en mostrar que los criterios y métodos de evaluación dependen de las actitudes de los profesores hacia el sistema educativo y de sus conocimientos sobre distintas dimensiones del currículo de matemáticas. Igualmente, estas investigaciones destacan por su ejemplificación de algunos métodos con los que llevar cabo la evaluación de los escolares mediante distintas tareas, según los modos de entender el aprendizaje y las funciones atribuidas al conocimiento matemático por parte de los profesores.

Los resultados alcanzados por estos trabajos se centran en:

- Una serie de cuestionarios validados que permiten detectar las creencias y establecer las concepciones de los profesores sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación en matemáticas.
- Una serie de tareas matemáticas que admiten distintos niveles y estrategias correctas de resolución, sobre cuya aplicación se pide a los profesores que establezcan y justifiquen criterios de valoración.

Cuarta dirección. Investigaciones sobre evaluación de programas. Estas investigaciones se han orientado, principalmente, hacia los procesos de formación inicial de profesores de matemáticas; su componente metodológica se ha centrado sobre la evaluación de programas de formación. Entre los trabajos ya realizados en esta dirección se encuentran las tesis doctorales: *Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Gráficas* (Bedoya, 2002) y *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Evaluación de un Programa de Formación* (Ortiz, 2002). Estos estudios tienen continuidad en el proyecto de investigación *Indicadores de Calidad para la Formación Inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria*, dentro del Programa Sectorial de Promoción General del Conocimiento (2002). Con orientación diferente, la tesis *Análisis Científico, Conceptual y Metodológico de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática (1976–1998)* (Torralbo, 2001) realiza un estudio sobre la producción de tesis doctorales en educación matemática, que permite — igualmente— evaluar la calidad de dichas investigaciones y, de ahí, la eficacia del programa de investigación iniciado en España sobre educación matemática hace algo más de tres décadas.

Las principales aportaciones de las investigaciones realizadas en esta dirección, desde el punto de vista de nuestro trabajo, tienen una significación metodológica, principalmente, y consisten en:

- Caracterizar un plan de formación, o currículo, mediante un programa en el que se especifican sus funciones y finalidades; caracterizar los planes de formación inicial de profesores de matemáticas y las expectativas sobre su aprendizaje.
- Establecer un modelo de evaluación del programa centrado en el análisis de su contexto y de las finalidades socialmente establecidas.
- Enumerar criterios para reconocer las debilidades y fortalezas de un plan de formación, sus logros, el ajuste a condiciones formales, resultados basados en evidencias y consecución de los objetivos planteados.
- Establecer una metodología de evaluación de programas de formación de profesores de matemáticas, basada en indicadores de relevancia, eficacia y eficiencia.
- Emitir juicios y recomendaciones para la toma de decisiones respecto a un plan de formación, útiles para su mejora mediante el aprovechamiento de oportunidades y el control de amenazas.

Los principales resultados alcanzados en las investigaciones mencionadas se han concretado en:

- Diseño de módulos de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, basados en competencias profesionales, sostenido en el conocimiento didáctico y en los organizadores del currículo.

- Caracterización de la evolución del conocimiento y las competencias didácticas de los profesores en formación mediante criterios basados en evidencias.
- Evaluación de la eficacia del plan de formación en base a las unidades y propuestas didácticas elaboradas por los estudiantes para profesor.

El trabajo de investigación que se presenta en esta memoria se encuadra en la primera y cuarta de las direcciones expuestas, ya que se trata de una evaluación del currículo de matemáticas mediante el estudio del rendimiento en Aritmética Escolar de los estudiantes de 6 a 14 años que se han formado en el plan de estudios de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

## **2. Racionalidad del Estudio**

El propósito general de este estudio es describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de los estudiantes que siguen el currículo promovido por la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), (RD 1006/91 y RD 1007/91), que ha estado implantado entre 1991 y 2007 y comparar sus resultados con los de otros currículos aplicados anteriormente en nuestro país. Es una contribución a la evaluación del programa de formación establecido en España a partir de la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. Este currículo deja de estar vigente en el curso 2008–2009 según las disposiciones transitorias primera, segunda y tercera de la Orden EC1/221/2007, de 12 de julio (BOE núm. 173 pp. 31491–31492) en el curso 2009–2010 deberá estar implantado el currículo derivado de la Ley Orgánica 2/2006 de Educación.

Entre las razones de tipo general que avalan la racionalidad del estudio enunciamos las siguientes:

### **2.1. A Nivel Social**

En una sociedad democrática la implantación de un nuevo currículo provoca un debate social, fundamentalmente entre promotores y detractores del cambio educativo propuesto.

El dominio de las matemáticas y, en particular, el conocimiento numérico y las destrezas aritméticas de cada generación escolar, conocido también como rendimiento aritmético escolar, es un indicador del nivel educativo de una sociedad, cuyo deterioro produce preocupación e intranquilidad sobre el funcionamiento adecuado del sistema educativo y plantea serias dudas sobre la adecuación del currículo.

La consideración de indicador social se fundamenta en que uno de los fines generalmente aceptados para la enseñanza obligatoria de las matemáticas

en el sistema educativo consiste en que la formación que proporcionen sea útil para la sociedad. Dicha utilidad se establece por su atención a los usos y necesidades de la vida cotidiana, hacia el ejercicio de los distintos campos de actividad profesional y hacia el desarrollo de la ciencia y de la técnica, es decir, por la preparación que ofrece para la actividad futura de los ciudadanos.

Aunque la valoración de “la utilidad social de las matemáticas” es variable según recogen distintas apreciaciones en el Informe Cockcroft (1982), es un principio asumido que la disminución del rendimiento matemático escolar en una sociedad determinada señala una preparación más deficiente de los niños y jóvenes, muestra un déficit en los planes de formación de los ciudadanos e indica un uso social futuro de las matemáticas menos eficiente.

La evaluación del rendimiento aritmético de los escolares al término de la educación obligatoria se considera un procedimiento coherente para estimar el dominio numérico de cada promoción escolar, necesario para conocer el mantenimiento social de la competencia matemática y, en su caso, para tomar las medidas correctoras oportunas. La administración educativa se esfuerza por obtener indicadores útiles del rendimiento aritmético escolar. Para ello diseña y aplica diversos instrumentos, analizando los datos obtenidos e interpretando y valorando la información que de ellos se deriva. Los resultados de las pruebas debidamente contrastados se manejan como indicadores del nivel científico de una sociedad y ayudan a orientar la política educativa de un país.

Es, por tanto, pertinente desde una expectativa social describir y caracterizar la situación de la habilidad de cálculo aritmético de los estudiantes que siguen el currículo LOGSE.

## **2.2. A Nivel Curricular**

La necesidad de inspeccionar y evaluar cualquier trabajo en estado de desarrollo es inherente a cada innovación. Cualquier innovación educativa, emprendida con entusiasmo y seriedad, sirve para mejorar ciertas partes de la educación para ciertos alumnos y bajo ciertos puntos de vista. Igualmente se puede afirmar que toda innovación puede ser criticada, eligiendo con cuidado los motivos para ello (Howson, 1979).

En el punto de partida de la presentación de este trabajo de investigación hemos afirmado que se trata de un estudio de evaluación curricular basado en la Aritmética Escolar.

Uno de los componentes centrales que determinan un currículo es considerar mecanismos para su control y valoración (Rico, 1997 y 1998); este trabajo realiza una evaluación curricular de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que han seguido el plan de formación de la LOGSE.

Para Howson, Keitel y Kilpatrick (1981) la evaluación curricular surge en la segunda mitad del siglo XX cuando los expertos comienzan a interrogarse por el valor de un determinado proyecto a partir de su consideración global como un producto social. La responsabilidad de un programa recae sobre los responsables de su diseño y ejecución y no en sus usuarios. Evaluar un currículo no consiste en examinar a los estudiantes sino, alternativamente, obtener información de los estudiantes y de otras fuentes para valorar el plan de formación.

Consideran que es una evaluación difícil por dos razones. La primera por la naturaleza conceptual de la noción de currículo, que consideran una abstracción que solo puede entreeverse a través de sus fines, contenidos impartidos y los logros alcanzados en el aprendizaje por los alumnos. La segunda razón contemplada es la dificultad de aislar un currículo del contexto sociopolítico en que se toman las decisiones educativas.

Hacen una revisión detallada de los distintos procedimientos de evaluación seguidos con proyectos curriculares de matemáticas ya implementados.

Dentro de este encuadre, nuestro propósito se centra en llevar a cabo una evaluación del currículo de la LOGSE considerando sus objetivos, contenidos aritméticos impartidos y resultados del aprendizaje de los escolares sobre Aritmética, expresados por su rendimiento en una prueba estandarizada.

### **2.3. En Relación con los Contenidos**

Es propósito de este análisis describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético escolar en estudiantes de 6 a 14 años que han seguido el currículo LOGSE. También vamos a comparar esos resultados del análisis con los obtenidos mediante la misma prueba en dos currículos anteriores, los promovidos por la Ley de Educación de Enseñanza Primaria (1945) y por la Ley General de Educación (1970).

Siguiendo a Webb (1992), especificar el contenido de la evaluación es un proceso complejo que depende del propósito de la evaluación. También depende de la concepción operativa de las matemáticas implicadas, y de las consideraciones prácticas sobre el tiempo, la puntuación y los criterios de promoción. A su vez, el modo en que el contenido se especifica afecta tanto a la evaluación como a sus resultados.

La especificación del contenido muestra un propósito para la evaluación, una concepción de las matemáticas y una concepción sobre las prioridades y procesos del aprendizaje. El propósito de la evaluación puede extenderse desde la observación del estudiante en orden a la determinación de sus concepciones sobre el papel de los principios hasta, como es nuestro caso, la evaluación de la efectividad en los programas de matemáticas.

Nos ceñiremos por tanto a los contenidos de cálculo aritmético especificados en estos currículos para las edades en las que se desarrolla nuestra investigación que, resumidamente, contempla relaciones y operaciones en tres sistemas numéricos y con cantidades de diversas magnitudes, es decir:

- Sistema de números naturales.
- Sistema de números racionales (fracciones).
- Sistema de números decimales.
- Magnitud tiempo.
- Magnitudes del Sistema Métrico Decimal.
- Sistema monetario español.
- Medidas de superficies en figuras planas, y de áreas y volúmenes en cuerpos geométricos.

Estos contenidos forman parte del currículo de las matemáticas escolares obligatorias en España, salvo tecnicismos, desde hace más de 200 años (Sierra, Rico y Gómez, 1997). El dominio de las destrezas y conceptos básicos implicados en el listado anterior se ha considerado, tradicionalmente, como el nivel básico de alfabetización matemática escolar. Diversos estudios realizados por el National Council of Teachers of Mathematics (Reeve, 1941 y Worth, 1988) así lo corroboran desde mediados del siglo XX.

Si bien es posible, y recomendable, ampliar el campo de contenidos a evaluar con la inclusión de otras facetas de dominio numérico, no cabe duda que los contenidos antes enumerados constituyen el núcleo básico del conocimiento aritmético escolar.

## **2.4. Como Objeto de Investigación**

En la última mitad del pasado siglo, se produce una eclosión de estudios sobre evaluación curricular, bien en intentos de estudios globales o bien con diversos enfoques sobre los diferentes elementos que conforman el currículo, siendo necesario efectuar una clasificación de ellos.

Seguimos la clasificación de investigaciones curriculares dada por Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia (1997), quienes establecen seis categorías para la clasificación de estos estudios:

1. Estudios comparativos y longitudinales.
2. Estudios sobre movimientos y programas.
3. Investigaciones sobre enseñanza de las matemáticas.
4. Investigaciones sobre evaluación de las matemáticas.

5. Estudios sobre la formación del profesor.

6. Estudios sobre materias curriculares.

Este trabajo, con las expectativas formuladas, se enmarcaría en las categorías 2 y 1 de esta clasificación, respectivamente, consideradas por orden de importancia.

Un programa es “un documento intencional y técnicamente elaborado consistente en un plan de actuación al servicio de metas pedagógicas valiosas” (Pérez Juste, 1995). En este sentido, al proponernos evaluar un determinado currículo de matemáticas —el de la ley de 1990— estamos inmersos en un estudio relacionado con un programa, en particular, estamos interesados en evaluar dicho programa desde alguna perspectiva específica.

La evaluación de programas es “un proceso sistemático de recogida, análisis e interpretación de información relevante y fiable para describir un programa educativo o una faceta significativa del mismo, y formular un juicio sobre su adecuación a un cierto criterio o patrón” (De la Orden, 2000). Las matemáticas constituyen parte significativa del currículo de la Educación Obligatoria en los países con tradición educativa y la Aritmética Escolar constituye el núcleo de esa formación desde hace más de 200 años, como ya hemos justificado con anterioridad. Nuestro objeto de investigación consiste en proporcionar dicha información sobre el currículo de matemáticas de la LOGSE y sobre su eficacia en términos de la consecución de objetivos según lo establecido en los programas y de la adecuación de logros de aprendizaje por niveles escolares.

Este estudio también se considera dentro de la categoría de estudios longitudinales ya que se propone comparar los logros actuales con los resultados alcanzados por estudiantes que han seguido programas de formación previos al currículo actual, los programas correspondientes a las leyes de 1945 y 1970.

Los instrumentos elegidos para llevar a cabo este estudio son los cuestionarios que establecen el currículo de matemáticas para los estudiantes de 6 a 14 años en los distintos programas mencionados, el Test Ballard de habilidad aritmética, test del que se conocen resultados de su aplicación en tres momentos distanciados entre sí 25 años, que corresponde a los tres planes de formación mencionados y un segundo test elaborado por nosotros (Díez, 2001), que amplía y complementa los contenidos evaluados por el Test de Ballard.

La habilidad de cálculo aritmético escolar ha sido objeto de investigación durante las diferentes etapas de la evaluación educativa y, en algunos casos, se dispone de datos obtenidos para planes de estudios diferentes; esto es lo que nos permite desarrollar nuestro objeto de estudio desde la perspectiva indicada y con los instrumentos mencionados.

Estas consideraciones muestran que la racionalidad de nuestra investigación queda delimitada por los fines de la educación matemática, la innovación curricular, la Aritmética Escolar y los estudios sobre evaluación de programas.

### **3. Primera Aproximación al Trabajo de Investigación**

La implantación de un nuevo currículo en un país procede de un debate social previo, relativo a la conveniencia de superar ciertas deficiencias y abordar determinados cambios. A su vez, provoca una reflexión permanente entre los profesionales de la educación sobre los defectos y aciertos del nuevo currículo, que obliga a una evaluación y análisis recurrentes. No resulta extraño, pues, que la implantación del currículo LOGSE haya provocado por tanto este tipo de debates en España durante los últimos años. Uno de los argumentos utilizados por los críticos del plan subraya la disminución de los conocimientos y destrezas matemáticas de los escolares que se han formado en dicho plan, lo cual se pone de manifiesto en distintas evaluaciones y se expresa en una disminución del rendimiento matemático de los estudiantes en el periodo de su educación obligatoria.

En este estudio pretendemos responder a dos preguntas:

1º ¿Cuál es la situación de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares entre seis y catorce años que se han formado con este currículo?

2º ¿Ha variado de forma significativa esta habilidad de cálculo aritmético en relación con los escolares educados con currículos anteriores?

Por tanto el interés principal de este estudio es analizar la situación en que se encuentra la habilidad de cálculo aritmético en los niveles educativos comprendidos entre tercer curso de Primaria (8 años) y segundo curso de ESO (14 años), ambos inclusive, de los escolares instruidos con el actual currículo LOGSE, totalmente implantado y actualmente en revisión. La elección de los cursos viene condicionada por las edades que se consideran adecuadas para evaluar la habilidad de cálculo de estos estudiantes. Años anteriores constituyen una etapa de formación inicial, años posteriores conforman una etapa en la que difícilmente se integran nuevos conocimientos. También esta elección viene condicionada por la opción ya hecha para los planes anteriores.

La información sobre los logros matemáticos de los estudiantes es importante, se utilizan para emitir diferentes tipos de juicios de calificación, de selección y de clasificación de los estudiantes; constituyen información valiosa para la investigación y la evaluación de programas y esa información puede influir para tomar decisiones educativas (Romberg, 1989).

Esta investigación plantea dos objetivos generales:

Objetivo 1: Describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que durante el curso 2000–2001 siguen el plan de estudios establecido por los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, de acuerdo con la Ley 1/1990.

Objetivo 2: Comparar la habilidad de cálculo anterior con la de los escolares españoles que se instruyeron con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria de 1945, y de la Ley General de Educación de 1970, respectivamente.

Para dar cumplimiento al primero de los objetivos planteados se utiliza como estrategia la medida del rendimiento aritmético escolar de alumnos educados con el currículo LOGSE para conocer su habilidad de cálculo. Cuando se pretende realizar evaluaciones del sistema educativo, es decir, estudios globales y estructurales hay que trabajar con grandes poblaciones, estandarizar los instrumentos y acotar la información disponible. En muchos casos interesa establecer puntuaciones medias y modos de actuación compartidos con los que caracterizar las tendencias de una población en su desempeño ante unas tareas. Para valorar el rendimiento aritmético escolar es usual el empleo regular y sistemático de tests. Mediante estas herramientas se establece el dominio básico que grandes poblaciones escolares tienen sobre unos conceptos y destrezas determinados.

Mediante los tests, los investigadores tienen a su disposición un método potente para la recolección de datos. También hay disponible un fondo impresionante de tests que permiten recoger datos verbales o numéricos. La consideración de los tests como herramientas productivas en investigación mantiene actualidad dentro de los métodos de evaluación educativa (Cohen, Manion y Morrison, 2000).

Señalamos que nuestro primer objetivo no consiste en la valoración de unos sujetos o grupos de sujetos en su habilidad de cálculo aritmético, pues somos conscientes que esa labor exigiría pasar diferentes pruebas a los escolares. Nos proponemos, por el contrario, estudiar la concordancia entre las pautas establecidas por el currículo escolar para el aprendizaje de habilidades aritméticas y el desempeño que muestran distintos grupos escolares mediante sus respuestas a un test estandarizado.

Nuestro segundo objetivo, a su vez, propone caracterizar el cambio, si es que existe, en la habilidad de cálculo de tres generaciones de escolares diferentes, educadas con distintos currícula. Para este trabajo un test no es sólo una herramienta de información adecuada y razonable, sino que, también, es un instrumento efectivo ya que se dispone de información contrastada previa, que permite abordar el estudio.

Efectuada una primera aproximación al trabajo de investigación situamos teóricamente el trabajo a realizar, el cual consideramos que se encuentra ubicado en la intersección de tres campos teóricos: currículo e innovación,

evaluación de programas y Aritmética Escolar, que visualizamos mediante el siguiente diagrama:

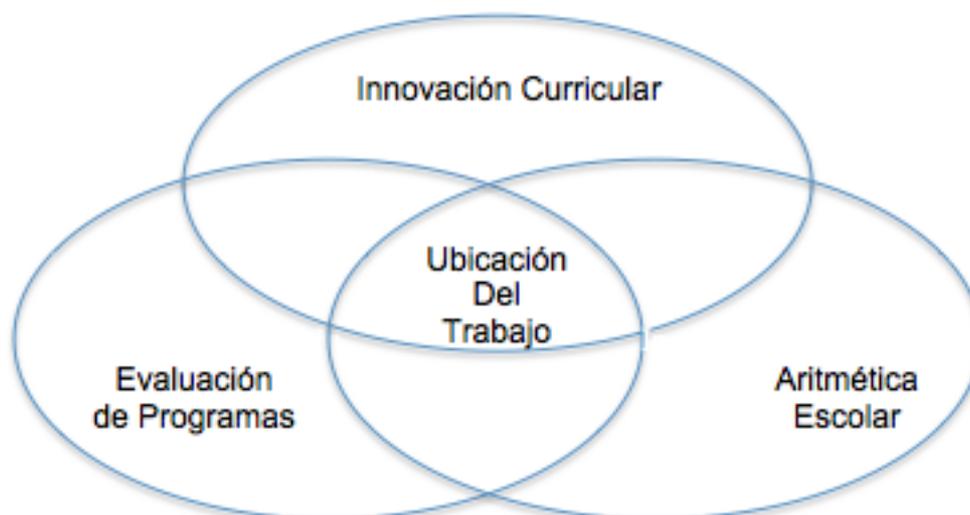


Figura 1. Ubicación del estudio según campos teóricos

#### 4. Antecedentes

Consideramos los antecedentes de este trabajo tomando en cuenta los tres campos teóricos mencionados, que fundamentan la investigación.

##### 4.1. Investigaciones Curriculares

Siguiendo a Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia (1997) apreciamos que la amplitud del concepto de currículo, con sus dos facetas teórica y práctica, hace difícil encontrar investigaciones no vinculadas, de un modo u otro, con intereses curriculares. Gran parte de las investigaciones realizadas en educación matemática tienen que ver con planes de formación en matemáticas de niños, jóvenes o adultos, es decir, con el currículo de matemáticas, como puede verse en el trabajo de Kilpatrick, Rico y Sierra (1994) sobre historia de la investigación en educación matemática.

Detectamos que hay cierta dificultad para delimitar las investigaciones sobre currículo debido, entre otras, a tres causas:

- La versatilidad y generalidad de los conceptos de currículo e innovación curricular, que los hace aparecer, de un modo u otro, en la mayoría de las investigaciones.

- La inexistencia de un grupo internacional, organizado y estable, de investigadores interesados prioritariamente por el tema y con interés por acotar el campo de estudio.
- La discontinuidad en el tratamiento dado al tema del currículo en estudios, reuniones y encuentros internacionales.

Los autores consultados, tras la revisión de dos clasificaciones de investigaciones curriculares: la clasificación de variables críticas de la investigación en educación matemática de Begle (1979) y la clasificación general de Keitel (1982) presentan una nueva clasificación atendiendo a dos criterios.

En primer lugar establecen un nivel que denominan de planificación y desarrollo curricular, su lugar está en la administración educativa o en el centro innovador (planificación) y en el aula (desarrollo). Los elementos que caracterizan y determinan este nivel son objetivos, contenidos, metodología y evaluación, respectivamente tanto para el diseño como para su implementación. Las cuatro componentes de la planificación administrativa son el profesor, el alumno, la materia o disciplina y las metas educativas. De esta primera reflexión surgen cuatro grandes áreas de investigación:

- Estudios sobre enseñanza de las matemáticas.
- Estudios sobre diagnóstico valoración y evaluación del aprendizaje de las matemáticas.
- Estudios sobre las funciones del profesor de matemáticas y su papel como educador.
- El campo de la preparación de materiales curriculares y la selección de medios, modelos y recursos para el aula.

La segunda reflexión se presenta cuando introducimos la dimensión temporal para considerar el cambio curricular, a lo largo del tiempo, es decir, cuando consideramos los cambios en el currículo de las matemáticas escolares, las modificaciones considerables que experimentan en su diseño, desarrollo y aplicación. Análogamente, introduciendo una variable institucional para hacer estudios comparativos isocrónicos, encontramos que los currículos de matemáticas presentan diferencias entre unos países y otros e, incluso, dentro de un mismo país. Llegamos así a otros dos campos de investigación:

- Estudios longitudinales.
- Identificación, tipificación y comparación de diferentes movimientos que sirven de fundamentación a distintos currículos o programas, pensados para la enseñanza de las matemáticas y que se han desarrollado en distintas épocas dentro de un mismo país o grupo de países.

Establecen, por tanto, seis grandes áreas de investigación sobre currículo y presentan, a su vez, una revisión de investigaciones en cada una de las áreas consideradas. Realizamos una síntesis de aquellas investigaciones relacionadas

con la innovación curricular y que, de algún modo, han tenido incidencia en el desarrollo de este trabajo.

En Estados Unidos uno de los estudios pioneros sobre el currículo fue el *National Longitudinal Study of Mathematical Abilities* (NLSMA), realizado por el School Mathematics Study Group (MSG) (1962) del cual procede la *Taxonomía de objetivos de aprendizaje de las matemáticas*. (Tourneur, 1972), adaptada de la taxonomía de Bloom (1972). El documento *A review of research in Mathematical Education. Part C. Curriculum Development and Curriculum research*. (Howson, 1983), lleva a cabo una revisión de investigaciones curriculares centrado en las décadas de los años 60 y los 70 del siglo XX.

Romberg y Carpenter realizan una revisión de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas hechas a finales de los setenta y comienzo de los ochenta en el estudio: *Research on Teaching and Learning Mathematics. Two Disciplines of Scientific Enquiry* (1986). Destacan igualmente los documentos *Everybody Counts. A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education* (1989) y *Reshaping School Mathematics. A Philosophy and Framework for Curriculum* (1990), ambos editados por el Mathematical Sciences Education Board, que abordan problemas del currículo de matemáticas en USA y analizan innovaciones y propuestas realizadas para su resolución.

En el Reino Unido destacamos: la investigación *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS), de la cual poseemos un magnífico informe en el libro *Children understanding of Mathematics* (Hart, 1981). El conocido informe Cockcroft (1981). Los estudios *Assessment of Performance Unit* (APU) que evalúan los rendimientos de los escolares ingleses al finalizar los estudios de Primaria y Secundaria, del que se han publicado varios informes. El estudio de Hoyles (1988) presenta una revisión completa e interesante de temas de investigación curricular.

En España destacan los trabajos de innovación curricular realizados por el Seminario CIEM (Currículo e Innovación en Educación Matemática) entre 1984 y 1998, cuyos componentes están vinculados al Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada (Rico et al., 1987; Tortosa et al., 1995; González et al., 1995).

En Puig y Calderón (1996) se encuentra un listado de 55 proyectos de investigación en didáctica de la matemática, financiados por el Centro de Investigación y Documentación Educativa durante el periodo 1981-1994, en el marco del Plan Nacional de Investigación Educativa, que tienen como foco de atención la innovación curricular en España.

Recientemente han continuado las aportaciones y estudios sobre innovación curricular, que han sido recogidos en la revisión realizada en Rico, et al. (1997). Igualmente señalamos los trabajos: Del Río, Hernández y Rodríguez, (1992); Ortega (1999); Goñi, et al., (2000); Maz, Torralbo y Abraira, (2002).

Por su cercanía a los problemas de innovación curricular en España, también destacan los trabajos de investigación desarrollados en Portugal y Brasil durante los últimos años; entre ellos señalamos los de: Guimarães, Canavarro y Silva, (1993); Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, (1998); Carolino, (2000); Santos, Canavarro y Bocardo (2005).

El debate curricular se ha fortalecido en los últimos años, dando lugar a controversias y debates muy vigorosos en algunos países sobre las necesidades de innovación y los modos de abordarlas y darles respuesta. Esto ha producido una revitalización de las investigaciones sobre innovación curricular, que se han visto incrementadas significativamente en la última década. Este debate no ha estado exento de tensiones, que aún continúan; la comunidad educativa española no ha quedado al margen de estas preocupaciones y ha visto incrementados los trabajos y reflexiones relacionados con los cambios e innovaciones curriculares.

Concluimos mencionando algunas de las aportaciones internacionales recientes más relevantes desde la perspectiva de la investigación e innovación curricular en la última década.

Se caracterizan por una proliferación de investigaciones en innovaciones curriculares: estudios llevados a cabo por instituciones parlamentarias o gubernamentales, comités internacionales, sociedades de profesores, equipos de investigadores y grupos de expertos de las que destacamos las siguientes:

- *International Handbook of Mathematics Education. Part One and Part Two.* (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde, 1996). Es una recopilación de investigaciones realizada por expertos.
- *Mathematics for Tomorrow's Young Children. International Perspectives on Curriculum* (Mansfield, Pateman y Bednarz, 1996) una publicación del ICME 7 que presentan artículos sobre conceptos de desarrollo y cambio curricular, influencia social y cultural, los roles del lenguaje y del simbolismo, interacciones entre el currículo y el sentir de profesores, etc.. Actualmente este grupo está efectuando un recopilación bibliográfica y de revistas de investigación.
- *Adding it up. Helping Children Learn Mathematics.* (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001) es un estudio crítico de la enseñanza en Estados Unidos desde preescolar al octavo grado y recomiendan experiencias didácticas para la enseñanza y ayuda al aprendizaje durante esos cursos.
- *Second International Handbook of Mathematics Education. Part One and Part Two.* (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Leung, 2003). Es una recopilación de investigaciones realizada por expertos.

También en España se ha incrementado en los últimos años el debate curricular relativo a la educación obligatoria, con el manejo de diversos argumentos que han llegado, incluso, a los medios de comunicación. Las

reformas propuestas por distintas fuerzas políticas intentan, desde posiciones a veces contrapuestas, crear condiciones que favorezcan la búsqueda de la excelencia por parte de los estudiantes, recuperar al elevado número de adolescentes que abandonan y son excluidos por el sistema, ofrecer más oportunidades de educación y formación, adecuadas a las expectativas, motivaciones e intereses de los jóvenes. A ese debate no son ajenas las consideraciones sobre los fines de la educación matemática, sobre la orientación e innovación del currículo, y se polarizan en este momento al enfatizar, alternativamente, las características instrumentales o funcionales del conocimiento matemático (Rico, 2005). La preocupación por la innovación y el cambio curricular forman parte de los temas de interés para la opinión pública actualmente y, en cierto modo, incentivan los esfuerzos de profesores, gestores educativos e investigadores. Las aportaciones procedentes desde el ámbito de la investigación en educación matemática mantienen su presencia y potencialidad para la innovación curricular.

Uno de los argumentos que este debate plantea se focaliza en la revisión de las funciones de la evaluación y sostiene que la cultura del esfuerzo y la calidad en el aprendizaje están vinculadas a la exigencia de procesos objetivos de evaluación. Para saber qué se ha aprendido, hacen falta pruebas, evaluación, criterios que permitan distinguir lo que se sabe de lo que no se sabe. Para evaluar la eficacia de un plan de formación y proponer innovaciones adecuadas a un currículo son necesarios procesos bien establecidos de evaluación del programa.

## **4.2. Investigaciones sobre Evaluación**

Los antecedentes del campo teórico de la evaluación están encuadrados en los antecedentes históricos de la evaluación educativa y, dentro de éstos, en la evaluación educativa en matemáticas.

Siguiendo a Romberg (1989) la evaluación en educación ha evolucionado desde una preocupación inicial y simple sobre la medición de los logros o proezas para hacer un juicio sobre los estudiantes hasta el interés común y creciente por obtener información para crear líneas de conducta y elaborar programas de decisión. Para hacer estos dictámenes más recientes se usa la información del rendimiento matemático escolar de los estudiantes.

La evaluación de los estudiantes se ha realizado en las escuelas a lo largo de la historia, pero los modelos contemporáneos, tanto para la obtención de datos sobre rendimiento como el uso de la información para la administración y para los programas, así como para la toma de decisiones, se han desarrollado en el último cuarto de siglo.

Romberg distingue cuatro periodos generales en el desarrollo histórico de la evaluación, cuya caracterización establece:

El primer periodo, lo enmarca desde el comienzo de los documentos históricos hasta el siglo XIX, periodo que se caracteriza por “un tipo de evaluación bastante primitiva y porque no existen evidencias de que a las personas se les aplicaran las mismas pruebas, ni que las decisiones tomadas por los encargados de realizarlas fueran tomadas de un modo similar.”

El segundo periodo incluye aproximadamente el siglo XIX, y su comienzo lo sitúa con la aparición de los primeros exámenes escritos en 1845. Considera como precursores a Mann, Fisher y Rice. Como característica principal de este periodo señala la identificación de la medición en educación con ideas y técnicas científicas y estadísticas, que ponen las bases fundamentales del uso de los tests modernos. Imparcialidad, objetividad, equidad, comparabilidad, disponibilidad de la información obtenida, rango en la dificultad de las preguntas, etc.

El tercer periodo comprende desde los alrededores de 1900 hasta 1960 y se denomina periodo psicométrico. Comienza con el desarrollo de los tests mentales: tests de inteligencia y aptitud, y continúa con el desarrollo de los tests de rendimiento. Los precursores de esta etapa son para los tests de inteligencia individuales, Binet y Simon en Francia y de los tests de inteligencia de grupos el test Army Alfa. Para los tests de rendimiento son precursores Thorndike y Stone, como constructor del primer test aritmético. Se caracteriza esta etapa por la expansión en la realización y aplicación de tests psicométricos que son utilizados para medir los logros de los alumnos o grupos de alumnos, diagnósticos sobre las deficiencias en la consecución de estos logros, tratamientos correctivos, fracaso escolar, etc.

El cuarto periodo, que comienza en 1960 y llega hasta la década de los 90, lo denomina periodo de programas políticos. Considera a los precursores de las reformas asociadas en Estados Unidos con la Great Society, siguiendo las nociones de Ralph Tyler. Caracteriza esta etapa por el uso de la información sobre los logros de los estudiantes para crear líneas de conducta con las que asesorar las tomas de decisiones sobre los programas educativos. Señala que se intentan aplicar principios científicos usando nociones de la ciencia experimental en la evaluación de los diferentes currículos. La información de los estudiantes proviene de los tests psicométricos.

Periódicamente se realiza un estudio nacional en los Estados Unidos sobre evaluación en distintas áreas por el *National Assessment of Educational Progress*. (NAEP), cuyos resultados se editan por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Conectados con estos estudios se realizó en 1988 un estudio internacional de Evaluación de las Matemáticas y las Ciencias en el que participaron cinco países entre ellos España; este estudio, conocido como *International Assessment of Educational Progress* (IAEP), está traducido y publicado en castellano bajo el título *Un mundo de diferencias* (Lapointe, 1989).

En Estados Unidos se realizan multitud de estudios centrados en la evaluación del currículo de matemáticas, entre los cuales se encuentran los

estudios sobre rendimiento aritmético escolar. Entre los más relevantes para nuestra investigación señalamos: Stenmark (1991); Web (1992); Lesh y Lamon (1992); Romberg (1995); Lambdin, Kehle, Preston (1996).

En el Reino Unido destacan los estudios *Assessment of Performance Unit* (APU), que evalúan los rendimientos de los escolares ingleses al finalizar los estudios de Primaria y Secundaria, del que se han publicado varios informes.

Dentro de los estudios internacionales encontramos los trabajos ICMI Study dedicado a la evaluación, editado en dos volúmenes por Niss (1993), la publicación de McLean (1992), los estudios del TIMSS, editados por Beaton (1996) y los estudios realizados sobre el Proyecto PISA y editados por la OCDE (2003 y 2004), a los que volveremos más adelante.

Las nuevas tendencias sobre los programas de evaluación y la política de perfiles llevan a rechazar y poner en cuestión los procedimientos convencionales de evaluación, defender estrategias de evaluación convergentes y su desarrollo por fases. La política de perfiles utiliza test de perfiles para recoger información sobre una variedad de tópicos matemáticos de manera que los políticos puedan comparar individuos y grupos en función de esos tópicos.

La historia de la evaluación en nuestro país muestra que los dos últimos periodos no se encuentran separados con tanta precisión temporal, sino que encontramos estudios de ambas tendencias que se van realizando en el mismo espacio temporal. Es decir, existe un periodo largo de transición donde, a la vez, se han efectuado estudios de rendimiento aritmético enfocados hacia la consecución de logros, hacia el estudio de los errores de aprendizaje, estudios para la corrección de errores, estudios sobre fracaso escolar, junto con otros estudios situados en el último periodo, donde los fines se han dirigido hacia la situación general de los escolares con respecto a los objetivos propuestos por el currículo en uso, críticas y líneas de actuación para mejorar las diferentes situaciones curriculares. Una revisión de tendencias y actualización bibliográfica la encontramos en el estudio *Bibliografía de Investigación sobre Evaluación en Matemáticas. Base de datos BIEM*. (Rico, et al, 1993)

La medición del rendimiento aritmético en ambos periodos se ha efectuado a través de tests psicométricos, tests de diagnósticos, pruebas objetivas, es decir, en ambos periodos los instrumentos de medida han sido similares, lo que ha tenido mayor variación ha sido su finalidad. Las aplicaciones de tests psicométricos como la batería de tests Ballard-García Hoz-Fernández Huertas, el test de Alexandre Galli, son algunos ejemplos de aplicaciones de los instrumentos de medida utilizados en nuestro país. Información complementaria puede conseguirse en *los Vademécum de pruebas psicopedagógicas* publicados por el MEC, como el de Asensi y Lázaro (1979).

Ciñéndonos fundamentalmente a las ideas de rendimiento escolar y, en particular, del rendimiento aritmético escolar, revisamos las concepciones que sobre estas ideas tenían investigadores que han intervenido en la elaboración o

aplicaciones anteriores del test o, en su defecto, de investigadores cuya influencia ha sido destacable en dichas aplicaciones (García Hoz, 1946; Andrés, 1952; Brueckner y Bond, 1965; Torregrosa, 1975; Rodríguez Espinar, 1985 y De la Orden, 1986). Más recientemente encontramos los trabajos de Ortiz, (1992) y Arrieta (1996).

Como ejemplos del tercer periodo podemos considerar los trabajos de investigación: Fernández, (1950); Andrés, (1952); Luján y otros, (1981); Árnal, (1989); Nortes, (1993) y Fernández (1996). Otros trabajos consultados son: Rius y Rocabet (1989) y Grupo Cero (1984).

Podemos considerar como ejemplos del cuarto periodo los trabajos de investigación publicados: *El cálculo aritmético en la EGB* (Castro, 1975), *Investigación Granada-Mats: Un análisis del programa escolar para el área de matemáticas* (Rico, et al., 1985), *La estimación y cálculo aproximado en la E.G.B.* (Segovia, 1987), *La evaluación criterial en la educación en la educación primaria* (Rivas y Alcantud, 1989), *Elementos para un diagnóstico del Sistema Educativo Español Informe Global, los resultados escolares* (De la Orden y otros, 1998) promovidos por el Ministerio de Educación y Cultura. También son de interés los trabajos de Giménez (1997) e Izquierdo y Fortuny (1996).

El Instituto Nacional para Evaluación de la Calidad del Sistema Educativo (INECSE), antiguo Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE), tiene encomendada la realización de estudios e informes para evaluar el sistema educativo español y representar al Ministerio de Educación en los estudios y evaluaciones internacionales. Las siguientes publicaciones son resultado del trabajo del INCE y del INECSE, cuyo interés para nuestro estudio es evidente: De Gil (1999); Gil, Fernández, Rubio y López (2000) y Martín (2003).

En otra dimensión de la evaluación aparecen estudios internacionales de investigación comparando los logros del progreso matemático entre los currículos de diferentes países: *International studies of achievement in mathematics* (Robitaille y Travers, 1992), las investigaciones internacionales periódicas promovidas por la International Association for the Evaluation of Education Achievement (en adelante, IEA): *First International Mathematics Study* (1964); *Second International Mathematics Study* (1982); en estos dos primeros estudios no interviene nuestro país. *Third International Mathematics and Science Study*, (1997), en este tercer estudio internacional se incorpora nuestro país, como resultado de esta incorporación aparecen las siguientes publicaciones: *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003* (Mullis, Martin, Smith, Garden, Gregory, González, Chrostowski y O'Connor, 2002). *Resultados de matemáticas. Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias* (López y Moreno, 1997).

El proyecto *Program for Indicators of Students Achievement* (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) es un proyecto comparativo de evaluación. Su principal objetivo es el de indagar sobre el grado de información o preparación de los alumnos de quince años de edad

en tres grandes áreas de conocimiento y competencias: lectura, matemáticas y ciencias. No intenta averiguar el grado de aprovechamiento escolar en esas materias, tal y como están definidas en los currículos de los diferentes países, sino que busca evaluar hasta qué punto los jóvenes pueden utilizar las habilidades y conocimientos adquiridos para enfrentarse a la vida adulta. (Pajares, 2000).

Señala como características generales de este proyecto:

- Es un proyecto comparativo internacional.
- Es un proyecto focalizado y cíclico.
- Es un estudio de evaluación no curricular.
- Es un estudio orientado a la inserción en la vida adulta.
- Es un estudio relevante para la toma de decisiones.

Hay diversos documentos elaborados por el INECSE que presentan las pruebas y los resultados del proyecto PISA en España, en las dos aplicaciones realizadas en los años 2000 y 2005. Entre ellas destacan las publicaciones: Pajares, Sanz y Rico (2000); Gil (2001); Belmonte y Pajares (2004); Belmonte (2004) y Rico (2005).

### 4.3. Investigaciones sobre Aritmética Escolar

El Seminario CIEM (Currículo e Innovación en Educación Matemática), al que ya hemos hecho mención en el Apartado 4.1, dedicó gran parte de su actividad a trabajar sobre la formación escolar en Aritmética. Entre los informes de investigación elaborados entre 1984 y 1998, vinculados con la Aritmética Escolar y consultados para este estudio destacamos:

- *Didáctica activa para la Resolución de Problemas. Sexto Nivel de la E.G.B.* (Rico, et al., 1987). *Resolución de problemas en el Tercer Ciclo de E.G.B.* (Castro, et al., 1995).
- *Problemas aritméticos aditivos de dos etapas* (Castro, et al., 1996).

También constituyen documentos importantes para la fundamentación de este estudio los trabajos de Castro, Rico y Castro (1987) y Segovia, Castro, Rico y Castro (1989).

Otras investigaciones relacionadas con la Aritmética Escolar son la de Arnal (1988).

Como antecedentes inmediatos de esta investigación destacamos:

- El trabajo del profesor Fernández Huertas (1948): *Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritméticas.*

- El trabajo de la profesora Castro Martínez (1975), publicado bajo el título *El cálculo aritmético en la E.G.B.*, Tesina de licenciatura en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, cuyos datos nos servirán para hacer el estudio comparativo con otros currículos.
- El trabajo del profesor Díez Lozano (2001) *Evaluación del rendimiento aritmético. Estudio y actualización de un instrumento*. Memoria del tercer ciclo presentada por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

## 5. Caracterización General del Trabajo de Investigación

En la introducción de esta memoria señalamos que el objeto de este estudio consiste en evaluar el rendimiento escolar en Aritmética del currículo de la LOGSE mediante la evaluación de alumnos que se han formado en dicho plan. Igualmente es objeto de este estudio llevar a cabo una comparación de dicho rendimiento con el alcanzado por el currículo de la Ley General de Educación (LGE) de 1970, evaluado mediante estudiantes de las mismas edades, que siguieron el cambio establecido por las Orientaciones Pedagógicas de 1971 (Castro, 1975) y, así mismo, con el currículo de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria de 17 de junio de 1945 (LEEP), antes de la publicación de los nuevos cuestionarios para la Enseñanza Primaria Nacional de 6 de febrero de 1953 (Fernández Huertas, 1950; Andrés, 1952).

Estas dos ideas se concretan en los dos objetivos generales que hemos enunciado en el apartado 3 de este trabajo de investigación.

El primer objetivo se propone describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de los escolares, que siguen un programa de formación, el establecido por los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, que responden a una innovación curricular, establecida por la Ley Orgánica 1/1990 de Organización General del Sistema Educativo.

Este objetivo integra en su enunciado las tres áreas de investigación que venimos analizando y establece como prioridad describir y caracterizar el valor instrumental del currículo de matemáticas de la LOGSE, centrándolo en el rendimiento escolar en Aritmética. Es decir, se trata de conocer la adecuación entre los objetivos establecidos por el currículo y la formación alcanzada en Aritmética por los alumnos que lo siguen, según expresan los resultados obtenidos en una prueba *ad hoc* que realizan esos escolares.

El modelo en que se sustenta evalúa la consecución de los objetivos del programa a partir de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba; con este instrumento se establece la eficacia del programa. Los objetivos se convierten en los criterios sobre los cuales se fundamenta la evaluación. El rendimiento de los estudiantes se toma como fuente primaria de información,

que condiciona y singulariza la lectura sobre los éxitos o fracasos de un programa.

El segundo objetivo realiza una aproximación complementaria al primero ya que se propone comparar la habilidad de cálculo descrita con la alcanzada por los escolares españoles que se instruyeron con dos currículos anteriores, los de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria de 1945, y de la Ley General de Educación de 1970, respectivamente. De este modo es viable caracterizar los cambios, si es que existen, en la habilidad de cálculo aritmético de tres generaciones de escolares diferentes, educadas con distintos currículos. Pero, principalmente, se propone interpretar dichos cambios en términos de eficacia de cada currículo respecto a la formación en Aritmética Escolar que proporciona a los estudiantes y, así, valorar de nuevo la eficacia del currículo LOGSE. Para ello se dispone de los rendimientos de alumnos formados en dichos planes sobre versiones anteriores de la misma prueba, lo cual permite hacer comparaciones de los rendimientos globales, por niveles escolares y por bloques de contenidos. También es viable estudiar la eficacia en la formación aritmética escolar de los currículos de 1945 y 1970 lo cual complementa la evaluación de la eficacia del currículo LOGSE.

Los planteamientos de estos dos objetivos son diferentes y complementarios, lo que determina que la caracterización general del estudio contemple diversas opciones. En ambos casos se trata de un estudio descriptivo.

La primera parte del estudio está dedicado a la descripción y caracterización de la habilidad de cálculo aritmético de los estudiantes del currículo LOGSE es una investigación descriptiva de tipo transversal.

El estudio comparativo con otros currículos es un estudio de tipo longitudinal de tendencias si nos basamos en la clasificación de los estudios de investigación dada por Cohen y Manion (1990) o una investigación de cohortes si utilizamos la clasificación establecida por Bisquerra (2000) de trabajos de investigación.

El modelo de evaluación seguido es el de Tyler (1986) orientado a metas, cuya finalidad es evaluar la eficacia de un programa; la metodología es cuasi-experimental, como se explicará, y con un sistema de control construido mediante estadísticos. Se sigue un enfoque positivista basado en la evaluación de resultados; secundariamente se enfoca a la toma de decisiones, ya que el estudio contribuye a revisar y tomar decisiones sobre un programa de formación. El investigador es un técnico experto en la toma de decisiones, que recoge datos fiables para conocer el desarrollo del programa y tomar decisiones sobre su mejora. Se trata de una evaluación externa, de tipo sumativo y *ex post facto* por el momento de su realización.

Como resumen establecemos que esta investigación se propone **Evaluar la eficacia en la formación Aritmética Escolar del currículo de la LOGSE o**

con mayor amplitud, **Evaluar la eficacia en la formación Aritmética Escolar y su evolución durante el periodo 1945–2000 en España.**

## **6. Objetivos Parciales**

De acuerdo con los objetivos generales y la caracterización de la investigación que hemos realizado en los Apartados 3 y 5, pasamos a enunciar los objetivos parciales que estructuran esta investigación.

El enunciado del objetivo 1 dice:

Describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de los escolares, que durante el curso 2000–2001 siguen el plan de estudio establecido por los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91 de acuerdo con la Ley 1/1990.

Este objetivo se desglosa en los siguientes objetivos parciales:

Objetivo 1.1: Caracterizar por niveles y ciclos la formación aritmética escolar que prescriben los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, que desarrollan la LOGSE, en términos de objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación.

Objetivo 1.2: Estructurar por niveles y ciclos el tratamiento establecido para los ítems del test de Ballard ampliado, de acuerdo con el currículo de los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91.

Objetivo 1.3: Establecer los ítems con expectativas de consecución de un nivel de idoneidad para cada grado o nivel escolar en relación con el currículo de la LOGSE.

Objetivo 1.4: Aplicar el test de Ballard ampliado a una muestra de estudiantes de los grados 3º a 8º de Educación Primaria y de 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria durante el curso 2000–2001.

Objetivo 1.5: Llevar a cabo un análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del test de Ballard ampliado a los estudiantes de la promoción 2000–2001.

Objetivo 1.6: Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 2000–2001.

Objetivo 1.7: Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo LOGSE según los datos aportados por los estudiantes de la promoción 2000–2001.

Objetivo 1.8: Establecer los puntos fuertes y débiles en aritmética escolar del currículo LOGSE según los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91 para la promoción 2000–2001.

El enunciado de objetivo 2 de la investigación dice:

Comparar la habilidad de cálculo anterior con la de los escolares españoles que se instruyeron con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria, de 1945, y de la Ley General de Educación de 1970, respectivamente.

Este objetivo se desglosa en los siguientes objetivos parciales:

Objetivo 2.1: Caracterizar por niveles y por ciclos la formación aritmética escolar que prescriben los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria, de 1945 y de la Ley General de Educación de 1970, en términos de objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación.

Objetivo 2.2: Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 1948–1949 y los de la promoción 1974–1975 evaluados con el test de Ballard.

Objetivo 2.3: Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria, de 1945 según expectativas de los programas y su comparación con los datos aportados por los estudiantes de la promoción 1948–1949.

Objetivo 2.4: Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la Ley General de Educación de 1970 según expectativas de los programas y su comparación con los datos aportados por los estudiantes de la promoción 1974–1975.

Objetivo 2.5: Comparar los rendimientos obtenidos por los estudiantes de la promoción del 2000–2001 en la aplicación del test de Ballard con los estudiantes de las promociones del 1948–1949 y del 1974–1975.

Objetivo 2.6: Comparar por niveles y ciclos la eficacia del currículo LOGSE con la eficacia detectada en los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria y de la Ley General de Educación, según los datos obtenidos de las promociones evaluadas.

Objetivo 2.7: Establecer los puntos fuertes y débiles en Aritmética Escolar del currículo LOGSE según su comparación con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria y de la Ley General de Educación.

## **7. Interés del Estudio**

Como para cualquier otro índice de desarrollo económico, no sólo resulta indispensable disponer de datos actuales del rendimiento escolar y del rendimiento aritmético, en particular, sino que es especialmente relevante que estos puedan ser comparados con datos anteriores y se pueda apreciar la evolución de estos índices en función de las componentes que lo configuran.

Las ventajas que aportan estos estudios radica en que proporcionan una base de datos frente a la cual contrastar los cambios producidos en el rendimiento escolar como consecuencia de los cambios curriculares, legales u organizativos. También porque depuran instrumentos mediante los cuales llevar el control del rendimiento.

Los estudios comparativos constituyen una de las líneas de reflexión consideradas. La participación de España en los proyectos de la IEA y de la OCDE y los estudios de evaluación recientemente realizados por el Ministerio de Educación y Cultura han vuelto a dar actualidad a estos trabajos. Pero la práctica totalidad de los estudios comparativos son de tipo transversal y tratan de hacer comparaciones entre los rendimientos en matemáticas de los diferentes países o comunidades participantes. Es muy escasa, por no decir nula, la información que procede de investigaciones longitudinales, en las que se trata de estudiar el rendimiento escolar de una población o la calidad de un sistema educativo a lo largo de un periodo prolongado. La incorporación de España a las evaluaciones en matemáticas llevadas a cabo por la IEA, estudios TIMSS, solo en su tercera aplicación no permite disponer de información fiable sobre la evolución de determinados parámetros, con los que caracterizar el rendimiento matemático y sus respectivos cambios.

No disponemos por tanto de información suficiente que permita precisar cuáles han sido los cambios en el dominio de conceptos y destrezas aritméticas que se han producido en España como resultado de los cambios curriculares producidos. Es así que no resulta fácil dar significado preciso a expresiones tales como "los alumnos calculan peor desde el último cambio normativo del sistema educativo", "se han abandonado y olvidado totalmente las destrezas aritméticas", u otras similares, que no se sostienen sobre ninguna información fiable y contrastada.

La participación de España en estudios internacionales muestra que nuestros niveles de rendimiento en matemáticas son bajos, inferiores a los de muchos países de características sociales y culturales similares a las nuestras. en estos casos también ocurre que no hay datos internos con los cuales comparar y dar una auténtica dimensión a las referencias externas.

Por otra parte hay una escasa tradición por este tipo de estudios en nuestro país, estudios que se han visto infravalorados, cuando no combatidos, tratando de contraponerlos y hacerlos incompatibles con las investigaciones sobre comprensión. Tampoco hay instituciones que realicen un seguimiento regular de determinados indicadores educativos, como sí se hace con otros indicadores económicos, durante largos periodos de tiempo. No disponemos de series cronológicas sobre rendimiento aritmético. Cuando se lleva a cabo un estudio sobre rendimiento es por interés coyuntural y temporal, no por necesidad de comprobar la estabilidad de un proceso, la rentabilidad de un cambio o la necesidad de una corrección con suficiente perspectiva.

Es pertinente por lo tanto realizar nuevos estudios, entre ellos, investigaciones sobre el rendimiento matemático escolar que comparen diferentes situaciones curriculares y proporcionen información sobre las limitaciones del currículo en curso.

Parece, pues, de interés continuar la serie de aplicaciones del test de Ballard. Entre las principales están:

- La continuación del periodo de aplicación cada 25 años.
- La existencia de un nuevo y contestado currículo de matemáticas para Primaria y Secundaria.
- La preocupación social por el deterioro del rendimiento en matemáticas.
- La necesidad de redefinir el concepto de rendimiento aritmético.
- La conveniencia de disponer de un instrumento con los que contrastar las evaluaciones internacionales.
- La necesidad de revisar y actualizar instrumentos de evaluación ya utilizados.
- La conveniencia de proponer nuevos instrumentos.
- La necesidad de analizar cambios de rendimiento cuando existan, a lo largo de grandes periodos.

Como se ha dicho en la introducción, esta investigación estudia la eficacia del currículo de matemáticas de la LOGSE, en relación con el rendimiento escolar en Aritmética de alumnos que se han formado en dicho plan durante el curso 2000–2001. Igualmente, compara ese rendimiento escolar con el rendimiento de otros dos momentos anteriores de cambio curricular en España, 1950 y 1975, sobre los que se dispone de resultados contrastados obtenidos con el mismo instrumento y relativos a alumnos de niveles equivalentes; de este modo se estudia la evolución del rendimiento en Aritmética Escolar.



## CAPÍTULO SEGUNDO

### MARCO TEÓRICO

#### 1. Introducción

En el proceso de resolución de un problema de investigación los expertos establecen una serie de etapas diferentes que distinguen con denominaciones como las siguientes:

- Planteamiento del problema de investigación: Objetivos de la investigación.
- Encuadre del problema de investigación dentro de un marco teórico.
- Revisión sistemática de la literatura sobre el tema.
- Formulación de las hipótesis de la investigación.
- Recogida y sistematización de los datos.
- Análisis e interpretación de los datos.
- Conclusiones de la investigación.

En relación con nuestra investigación, una vez que hemos cubierto la primera de esas etapas pasamos a desarrollar la segunda en este capítulo, es decir, a encuadrar la investigación en su correspondiente marco teórico.

Como adelantábamos en el capítulo anterior con esta investigación pretendemos responder a dos cuestiones:

- Describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de un grupo de alumnos en edades comprendidas entre ocho y catorce años que han sido instruidos con el currículo LOGSE y reflejar, si es que existen, las diferencias entre los objetivos teóricos de la propuesta curricular y los objetivos reales alcanzados.
- Comparar los resultados sobre habilidad de cálculo aritmético de los alumnos instruidos con este currículo con alumnos españoles de las mismas edades instruidos con dos currícula implementados anteriormente en nuestro país.

Como también hemos justificado, este trabajo se encuentra comprendido en la intersección de tres campos teóricos: innovación curricular, formación aritmética y evaluación. De cada uno de estos campos teóricos estudiaremos

aspectos concretos relacionados con las preguntas fundamentales de esta investigación.

## 2. Innovación y Cambio Curricular

La noción de currículo es un concepto central para analizar y estudiar de manera sistemática los planes y programas educativos así como la actividad regular con la que éstos se renuevan y se ponen en práctica. Brevemente, un currículo es un plan de formación, caracterizado en términos de unas componentes (Rico, 1997; pp. 28–31). Constituye un concepto clave para las ciencias de la educación. Con carácter general, esta noción sirve como fundamento de diversas aproximaciones y marcos teóricos, útiles para estudiar los diferentes planes de formación que tienen encomendados los sistemas educativos (Gimeno y Pérez, 1983; Sarramona, 1987; Coll, 1987).

Una noción teórica de currículo resulta imprescindible para entender hoy día la elaboración y desarrollo de un plan educativo, para abordar su estudio e interpretarlo.

En educación matemática también son importantes las nociones curriculares. La estructura a la que se ajustan los planes para la formación matemática de los estudiantes, la dinámica de su puesta en práctica y sus procesos de desarrollo, cambio e innovación se abordan desde un marco teórico curricular y constituyen un foco de interés prioritario para la educación matemática. La formación aritmética de los escolares es parte del plan de formación matemática, del currículo de matemáticas.

La noción de currículo es reciente. Tiene su origen en los Estados Unidos de Norteamérica a comienzos del pasado siglo XX. En sus comienzos no se vinculó con la educación obligatoria; sus principales aportaciones para la educación son posteriores a la segunda guerra mundial (Tyler, 1949; Taba, 1962). En Europa, la teorización sobre el currículo es posterior y relativamente reciente, como indica Stenhouse (1984).

La consideración de una perspectiva curricular para la educación matemática surge a mediados de la década de los 60 del pasado siglo, a raíz de las primeras evaluaciones dirigidas a estudiar los logros en matemáticas de grandes poblaciones escolares. Hay dos referencias prioritarias que se suelen citar como iniciales: el estudio llevado a cabo en Estados Unidos en 1962, el *National Longitudinal Study of Mathematics Abilities* (NLSMA), y el primer estudio internacional sobre rendimiento matemático escolar, llevado a cabo por la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) en 1964. Los investigadores vieron con claridad que las variables de población y las variables de tarea eran insuficientes para dar cuenta e interpretar la diversidad de los resultados de ambos estudios. Estas y otras investigaciones pusieron de manifiesto la necesidad de contar con un marco interpretativo más amplio, basado en una propuesta teórica de currículo, que permitiese integrar

otras variables curriculares. Las nociones de currículo y de desarrollo e innovación curricular se muestran necesarias para encontrar explicaciones plausibles en el análisis de unos datos, que sólo pueden interpretarse con un enfoque más amplio, en el marco de un plan de formación. Como parte relevante del currículo de matemáticas es usual hablar del plan para la formación Aritmética de los escolares, del currículo de Aritmética.

A mediados de la década de los 70 se lleva a cabo un importante debate sobre los fundamentos del currículo en educación matemática. A comienzos de la década de los 80 se elaboran una serie de documentos básicos que organizan y difunden esta aproximación teórica. Hemos elegido situar esta investigación en el campo teórico de la innovación curricular. Los fundamentos teóricos de este estudio se sitúan en esta época del último cuarto del siglo XX, donde se elaboran las bases y fundamentos principales del enfoque curricular en el que nos sustentamos.

Vamos a describir en este apartado aquellas ideas y conceptos sobre innovación curricular en los que, de un modo u otro, se fundamenta nuestro estudio. Estructuramos nuestra presentación en cuatro apartados. En primer lugar, una breve descripción de los documentos básicos que hemos consultado, donde se teorizan las principales nociones utilizadas. En segundo lugar, una síntesis de la historia de la educación matemática en términos curriculares que ayuda a entender los momentos y las circunstancias en los que surgen estas nociones. En tercer lugar, una selección y ejemplificación de estudios e investigaciones, internacionales o con repercusión internacional, que tienen como foco el currículo de matemáticas. En cuarto lugar, una reflexión sobre el currículo español de matemáticas desde mediados del siglo XX, con especial énfasis para el tratamiento de la Aritmética durante el periodo de educación obligatoria.

## **2.1. Documentos Básicos sobre el Currículo de Matemáticas**

Tres son los documentos que hemos utilizado como principales referentes teóricos sobre el concepto de currículo e innovación curricular en educación matemática.

Estos documentos son:

- Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática. Volumen IV (Steiner y Christiansen, 1979).
- Comparative Studies of Mathematics Curricula. Change and Stability 1960–1980 (Steiner, 1980).
- Curriculum Development in Mathematics (Howson, Keitel y Kilpatrick, 1981).

El primer documento es editado por la Unesco en diversos idiomas, entre ellos el castellano. Se elabora en base a los trabajos preparatorios para el Tercer Congreso Internacional sobre Educación Matemática (ICME) y a las actas que recogen sus conclusiones. El Congreso tiene lugar en Karlsruhe en 1976, y reunió 2000 educadores matemáticos de 76 países.

Objetivo principal de este estudio era:

Presentar una detallada, completa y equilibrada imagen de la educación matemática en todo el mundo —qué se está haciendo, qué dificultades están apareciendo y qué se necesita hacer— escrita fundamentalmente para todos aquellos que están interesados por lo que sucede, respecto a la educación matemática en el mundo y particularmente para aquellos interesados y/o capaces de promover innovación en este campo.

El tema central del documento es el currículo de matemáticas y plantea una revisión exhaustiva de los diferentes planes de formación en matemáticas que se dan en el sistema educativo de muy diversos países y las diversas componentes que intervienen en tales planes, teniendo en cuenta una perspectiva comparativa.

El carácter internacional e intercultural del encuentro puso de manifiesto:

La educación matemática es un campo complejo y multifacético, cuyos temas y subtemas están íntimamente interrelacionados. Además, el proceso de la educación está entrelazado con el desarrollo de la sociedad y, por tanto, depende de aspectos socioculturales y sociopolíticos. La percepción del tema de estudio no solamente depende del punto de vista personal de cada uno, sino que de manera inherente al mismo hay sistemas y juicios de valores.

En este documento de Actas del ICMI-III destaca el capítulo *Análisis Crítico del Desarrollo Curricular en Educación Matemática* (Howson, 1979) donde encontramos un esfuerzo por precisar la noción de currículo y por establecer algunos conceptos importantes sobre el currículo de matemáticas.

*Comparative Studies of Mathematics Curricula. Change and Stability 1960–1980*, recoge las Actas de un seminario celebrado en Osnabrück en 1980. Este seminario se lleva a cabo para establecer las bases y cerrar el diseño del *Second International of Mathematics and Science Study* (SIMSS) promovido por la IEA. Se pretende así evitar las dificultades encontradas en la realización del *First International of Mathematics and Science Study* (FIMSS) debido a la carencia de un marco teórico apropiado en educación matemática sobre la noción de currículo.

En este encuentro se establecen pautas acerca de la noción central: Las cuatro dimensiones del concepto de currículo son: los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación.

A partir de estas cuatro dimensiones, los expertos acuerdan un esquema para establecer comparaciones entre distintos currículos, que incluye el sistema

de control, los materiales y documentos, la implementación en el aula y los resultados de los alumnos. Este marco se muestra operativo y, durante la década de los ochenta, contribuye a que la reflexión sobre el currículo de matemáticas se mantenga en vigor, y sustente estudios realizados por instituciones estatales, comités internacionales o grupos de especialistas.

Otro de los acuerdos adoptados en Osnabrück consistió en encomendar la redacción de un libro de referencia sobre el currículo de matemáticas a un grupo de expertos cualificados, que organizase las ideas, conocimientos, experiencias y resultados conocidos, para su difusión y uso por la comunidad. Dicho documento, tercero de los que nos sirven de referencia y fundamento, es la obra *Curriculum Development in Mathematics*, que constituye un hito en los estudios curriculares sobre educación matemática a nivel internacional.

Howson, Keitel y Kilpatrick presentan en este trabajo la noción de currículo y su carácter dinámico, destacando los condicionamientos sociales que acompañan a los cambios curriculares y la evolución histórica de estos cambios.

Fundamentan su noción de currículo en cuatro componentes:

- Contenidos.
- Objetivos.
- Metodología.
- Evaluación.

Subrayan, reiteradamente, el papel predominante del profesor individual en la puesta en práctica de un currículo y en la consecución de resultados positivos.

La innovación curricular es concebida como un sistema dinámico, de fuerzas y tensiones encontradas entre las presiones y barreras que actúan a favor y en contra de los cambios curriculares.

Consideran cuatro tipos de presiones que actúan a favor de los cambios curriculares, cuya procedencia se puede localizar en:

- Motivaciones de tipo social y político.
- El desarrollo de las propias disciplinas matemáticas.
- El campo de la educación y de los propios deseos de innovación.

Igualmente, clasifican la variedad de argumentos que se oponen al cambio curricular según que se basen en razones de:

- Valoración, debidas a principios que responden a diferentes ideologías e intereses.
- Poder, motivos de cambio en las jerarquía y estatus por pérdida de control en las fuentes de decisión.
- Pragmáticas, por desconocimiento de nuevos contenidos y procedimientos.

- Inseguridad, por falta de materiales, de experiencia, de dominio.

Recopilando multitud de experiencias, señalan tres niveles generales de trabajo posible para la puesta en funcionamiento de un cambio curricular: grandes proyectos, proyectos locales y proyectos individuales. Analizan, a su vez, posibles estrategias para implicar al profesorado en la implantación de modificaciones curriculares, cuya tipología establecen en tres variantes: de poder coercitivo, racional-empírica y racional-educativa.

La realización de los cambios curriculares la estructuran en seis fases diferentes:

- Identificación.
- Formulación.
- Negociación.
- Difusión.
- Ejecución.
- Evaluación.

Ponen de manifiesto las bases teóricas que han sustentado los principales proyectos de innovación curricular realizados con anterioridad a la redacción del libro y efectúan una revisión de antecedentes. Se realiza además una caracterización detallada de cinco métodos de innovación curricular y una descripción de dos estrategias de innovación:

- El método conductista, según Gagné (1965).
- El método de la matemática moderna, según el Grupo Bourbaki.
- La aproximación estructuralista, según Brunner y Dienes (1960-1963).
- La aproximación formativa, según Coltman (1971).
- La aproximación de la enseñanza integrada.
- El modelo R-D-D (investigación/desarrollo/difusión).
- El modelo de desarrollo curricular orientado por la personalidad.

Destacan la evaluación de los programas de formación como uno de los objetivos principales de los estudios curriculares. Sobre la evaluación curricular afirman que un currículo es un objeto particularmente difícil de evaluar. Un currículo es una abstracción que sólo puede captarse parcialmente, por medio del análisis de la exposición de sus fines, la observación de su contenido en el momento de impartirse, o bien la evaluación del aprendizaje de los alumnos.

En un corto periodo de dos años se sintetizan en los tres documentos mencionados una serie de ideas que van a dar soporte a los trabajos de reforma e innovación curricular, a las evaluaciones y estudios comparativos, a las investigaciones sobre diseño, implementación y evaluación del currículo de matemáticas.

## 2.2. Historia del Currículo de Matemáticas

La historia del currículo de matemáticas para la educación obligatoria, desde finales del siglo XIX y a lo largo del siglo XX, ayuda a entender los retos a los que se tuvo que enfrentar la educación matemática a lo largo de más de un siglo, hasta llegar a reconocer la alfabetización matemática como un derecho y un deber de los ciudadanos de las sociedades avanzadas. Por ello hacemos un breve resumen de algunos de los hitos principales de la historia del currículo de matemáticas en este periodo, con el fin de ubicar los tres programas curriculares para formación aritmética de los escolares, a cuyo estudio y comparación se dedica este trabajo.

El comienzo del siglo XX vio la aparición de cambios en la enseñanza de las matemáticas en diferentes países, por lo que surgió la necesidad de intercambiar información y experiencias entre ellos. En 1905 Smith expuso en la revista *L'Enseignement Mathématique* la necesidad de formar una comisión internacional que se preocupara de estos cambios. Esa comisión fue aprobada en 1908 en el Congreso Internacional de matemáticas bajo el nombre de *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) y tuvo a Félix Klein como primer presidente. El principal trabajo de esta Comisión fue la preparación de un vasto informe internacional que estudiase la enseñanza práctica en cada uno de los países miembros y permitiese hacer comparaciones entre ellos. Este trabajo se interrumpió con la Primera Guerra Mundial (Howson, Keitel y Kilpatrick, 1981).

Howson, Keitel y Kilpatrick (1992) resumen la historia del currículo de matemáticas de la cual tomamos las siguientes ideas. Los estudios curriculares tienen su inicio a comienzo del siglo XX en Estados Unidos, surgen en la sociedad americana como respuesta a la demanda creciente de servicios educativos y a la necesidad intelectual de los educadores norteamericanos por construir un cuerpo de pensamiento propio sobre educación, autónomo respecto a Europa. En el campo de la educación matemática surgieron dos tendencias opuestas: una, originada en la práctica social, en el aprendizaje en contexto y, otra, que considera la utilidad social y la eficiencia como el objetivo de sus intenciones renovadoras.

La figura más significativa de la primera tendencia fue Dewey, quien elaboró su concepción del aprendizaje a partir de sus observaciones sobre cómo cada uno aprende en su entorno a través de la acción y la experiencia. Rechazó la división del contenido en materias separadas por considerarlo extraño tanto en los niños como para la realidad.

La segunda tendencia estuvo ligada a la corriente conductista. El punto de partida fue el análisis de Taylor, quien proporcionó una base teórica para la introducción de líneas de montaje y evaluación del trabajo. Las ideas sobre eficiencia productiva de Taylor fueron generalizadas por Bobbit en *The curriculum* (1918, cit. por Kilpatrick, 1981) y *How to make a curriculum* (1924, cit.

por Kilpatrick, 1981) esta teoría fue extendida y ejemplificada por Thorndike para un plan escolar de formación en Aritmética, en su *Psychology of Arithmetic* (1922) basada en la psicología conductista.

Tras el paréntesis impuesto por la Segunda Guerra Mundial, Tyler rechaza en 1949 la tesis de que las necesidades individuales o sociales debieran determinar en exclusiva el currículo y sostuvo que igual importancia tienen otras consideraciones, como la cultura y las demandas de la ciencia.

Taba (1962) contribuyó a ampliar el papel de la ciencia en el currículo, destacando que tanto el contenido como el método científico deben tener un sitio en la educación escolar. Su interés principal estuvo en demostrar cómo las necesidades de los niños deben determinar las decisiones curriculares. Postuló que las decisiones meditadas sobre fines, contenidos, organización y evaluación pueden tomarse solamente sobre la base de teorías integradas en la sociedad y el conocimiento y sobre una antropología comprensiva. Aceptó que la especulación teórica no era suficiente e intentó superar las abstracción de las reflexiones teóricas diseñando módulos curriculares.

Goodlad (1976) enriqueció la concepción curricular con categorías sobre el cambio curricular, investigó las formas en que se toman decisiones relativas a valores, metas educativas, objetos educativos, oportunidades de aprendizaje con autoridades individuales, institucionales y sociales diferentes. Becher (1978) desarrolló la idea de que los métodos recientes de desarrollo curricular pueden dividirse en tres estilos: los métodos instrumentales, los interactivos y los individualizados. La imposibilidad de encuadrar los proyectos reales en los grupos propuestos condujo a elaborar listas de cuestiones que pueden hacerse sobre un proyecto de desarrollo curricular, de modo que las respuestas permitan categorizar el proyecto sobre una variedad de dimensiones.

En Europa, las consideraciones sobre qué son las matemáticas han tenido influencia en las variaciones de los currícula escolares de Secundaria ocurridos en el siglo XX. Wojciechowska (1989) señala como más relevantes los que tienen lugar en la primera década del siglo y en la década de los sesenta. Describimos brevemente lo que significaron estos cambios.

La formación matemática de lo que hoy llamamos educación secundaria se ajustaba a finales del siglo XIX a unas normas tradicionales, que incluían a la aritmética y álgebra elemental, geometría euclídea y trigonometría. Aunque dentro de estas disciplinas se habían realizado algunas modificaciones parciales en cuanto a contenidos, a principios del siglo XX comienza a sentirse, en algunos países europeos, una preocupación por emprender una reforma global del plan de estudios en relación con las matemáticas.

Uno de los más grandes matemáticos de la época, Klein, defendió y apoyó el cambio de los planes de estudio. En 1904 se formó una comisión en Alemania, que dio lugar, a lo que, posteriormente, se conoce como el *Programa Meran*. Apoyándose en las ideas de Klein, y en su creencia de que el principal objetivo de las Matemáticas era desarrollar la imaginación geométrica de los

alumnos y el pensamiento funcional, los autores del Programa Meran se centran en estos objetivos, poniendo el énfasis en una aproximación científica a las materias enseñadas en las escuelas de secundaria. La influencia del Programa Meran se extendió a través de Europa, pero el proceso de reforma se detuvo con la Primera Guerra Mundial.

En el periodo inmediatamente posterior a la Segunda Guerra Mundial se produce un fuerte movimiento de rearme ético y moral que busca en la educación un instrumento clave para la instauración de un nuevo orden social (Rico y Sierra, 1997).

Una de las condiciones de la regeneración era la necesidad de democratizar la educación mediante su extensión a toda la población y, como consecuencia de ello, surge la necesidad de extender la educación matemática. El nuevo marco ideológico plantea nuevas necesidades. De aquí surge una de las ideas claves de los movimientos de reforma de la enseñanza de la matemáticas: la necesidad de democratizarla. Otra idea clave, complementaria de la anterior, es la necesidad del progreso técnico siendo las matemáticas una de las claves de dicho progreso.

Hay dos hechos fundamentales para comprender el sentido y alcance de las reformas emprendidas con posterioridad a la Segunda Guerra Mundial, que son la creación de la *Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) y la realización de un encuentro internacional dedicado a revisar los planes y programas para la enseñanza de las matemáticas, organizado por la OCDE en 1959, conocido como *Coloquio de Royaumont*.

En 1950 se crea la CIEAEM a instancias de Caleb Gattegno, presidida por Choquet y Piaget. La Comisión publicó dos libros *L'enseignement des mathématiques* (1955) y *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* (1958). La primera obra contiene artículos de matemáticos como Choquet, Dieudonné y Lichnerowicz, de psicólogos como Piaget, del lógico Beth y de educadores matemáticos como Gattegno. Estas publicaciones muestran el interés de la Comisión por aunar voluntades para interpretar y abordar la complejidad de la enseñanza de las matemáticas desde distintas disciplinas (cit. por Rico y Sierra, 1997).

El segundo hecho clave fue el Coloquio de Royaumont. El lanzamiento del Sputnik por la Unión Soviética en el año 1957 planteó un debate en profundidad en la sociedad occidental sobre la revisión e intensificación de las materias científicas en el currículo escolar. Este debate fue especialmente intenso en el caso de las matemáticas, y dio como resultado el diseño y puesta en práctica de un nuevo currículo: el currículo de las *Matemáticas Modernas*.

En la década de los cincuenta, vuelve a manifestarse una preocupación por los contenidos y por los métodos anticuados utilizados en las escuelas, señalándose una inadecuación con las nuevas necesidades que la sociedad

demandaba. En esta ocasión también el cambio en el currículo se apoyó en destacados matemáticos (Grupo de matemáticos franceses agrupados bajo el seudónimo Nicolás Bourbaki), su visión de las matemáticas, en la que se concedía una importancia primordial al papel que en ellas jugaba la noción de estructura y el desarrollo de la teoría de conjuntos pasó a ser la base de las nuevas matemáticas.

La reforma de principios de siglo (promovida por Klein) y la que se implementó cincuenta años después tuvieron una característica común, aunque con distintas visiones de las matemáticas, ambas se preocuparon casi exclusivamente de los aspectos del contenido del currículo, minimizando la importancia de los métodos y del contexto de la enseñanza.

Estas dos reformas, en sus épocas respectivas, no fueron unánimemente aceptadas, sino que levantaron polémicas en la comunidad matemática. En relación a la segunda de ellas, matemáticos como Kline y, sobre todo, Freudenthal plantearon serias dudas sobre el programa bourbakista.

Se ha podido sostener que las reformas fracasaron por los planteamientos matemáticos que las sustentaron. Sin embargo, el problema es mucho más complejo, ya que afecta a todo el colectivo educativo (alumnos, profesores, padres, instituciones), y está fuertemente condicionado por la filosofía que subyace en la visión de las matemáticas que se adopte. La influencia de esta filosofía trasciende a la propia comunidad matemática. El paso de considerar las matemáticas como un cuerpo infalible de verdades absolutas, a considerarlas cambiantes y producto de la actividad humana, tiene una significación que sobrepasa a las propias matemáticas, y una influencia relevante en los procesos educativos (Ernest, 1991).

### **2.3. Estudios Internacionales**

Describimos en este apartado una serie de documentos basados en estudios o investigaciones internacionales que han tenido y, en algunos casos, siguen teniendo influencia apreciable sobre el currículo español de matemáticas para el periodo de la educación obligatoria. Por este motivo incluimos cuatro informes en esta revisión sobre antecedentes y fundamentos de la innovación curricular para nuestro trabajo.

#### **Informes de la IEA**

Hemos señalado que los resultados del *First International of Mathematics and Science Study* (FIMSS), llevado a cabo por la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) en 1964, con participación de doce países, provocaron la alarma de los diferentes sectores sociales implicados en la educación matemática de estos países. Se suceden encuentros para estudiar la complejidad del currículo de matemáticas. Se elaboran documentos

que presentan diversos marcos teóricos, como son los trabajos de Husén (1967), Begle (1968), Tourneur (1972), y Freudenthal (1975).

En el congreso de Karlsruhe se presentó el proyecto del *Second International of Mathematics and Science Study* (SIMSS) de la IEA. Para la puesta a punto de este segundo estudio se celebró durante el año 1980 un seminario internacional en Osnabrück (Alemania) donde, como ya hemos mencionado, se trató de fundamentar este segundo estudio comparativo sobre las variables del currículo antes que sobre rendimientos de los alumnos en ítemes específicos.

Entre 1981 y 1982 se llevó a cabo el segundo estudio internacional del rendimiento en matemáticas con la participación de veinte países. Los resultados y análisis correspondientes aparecen en dos publicaciones editadas por Robitaille (1989) y Travers (1989).

La continuidad y mejora de los estudios de la IEA fue posible gracias al nivel alcanzado en su fundamentación teórica y metodológica. A su vez, los sucesivos estudios contribuyeron a mejorar este marco teórico. La IEA continuó en 1994–95, con el *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) considerado como el más amplio y ambicioso estudio internacional sobre el logro de los estudiantes en matemáticas. Los resultados de este tercer estudio aparecen en la publicación editada por Beaton y colaboradores (1996). España se incorpora en esta tercera aplicación al conjunto de los países que participan en los estudios sobre evaluación del rendimiento en matemáticas de los escolares, y ha continuado participando en las sucesivas aplicaciones del *Trends in International Mathematics and Science Study*, de nuevo TIMSS, en 1999, 2003 y 2007.

Debido a que nuestro trabajo se centra en el periodo comprendido entre 1945 y 2000, no incidimos en el impacto de las evaluaciones de la IEA sobre matemáticas en España, ya que su influencia sobre nuestro trabajo es indirecta.

Los documentos e informes de la IEA mantienen su interés e importancia, sobre la cual volveremos más adelante. Proporcionan buenos ejemplos de informes elaborados por una institución internacional independiente, que coordina el trabajo de instituciones nacionales de investigación y de agencias de investigación gubernamentales. España, al participar de los estudios de la IEA desde la década de los 90 contribuye a y es beneficiaria de estos informes.

## **Informe Cockroft**

Otro tipo de documentos usuales en los periodos de cambio e innovación curricular son los informes gubernamentales encargados por un gobierno o por mandato de un parlamento. Dentro del periodo que nos ocupa, hay un documento de estas características, especialmente dedicado al currículo de matemáticas y que tuvo un importante impacto en los debates sobre la

innovación curricular en la década de los 80. Se trata del informe *Mathematics Counts* (1982), popularmente conocido en España como *Informe Cockcroft*, traducido al español bajo el título *las Matemáticas sí cuentan* (1985).

Este informe fue elaborado por una comisión creada por el gobierno británico a instancias del parlamento inglés para:

Examinar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas primarias y secundarias de Inglaterra y Gales teniendo en cuenta, en particular, las matemáticas exigidas en la enseñanza superior y postsecundaria, en el trabajo y vida adulta en general, y hacer recomendaciones.

La Comisión realiza una evaluación del currículo de matemáticas en curso con el fin de elaborar propuestas para su mejora. El documento está dividido en tres partes que se estructuran en diecisiete capítulos, a los que hay que añadir dos apéndices. Viene organizado en 810 puntos, junto con otros 64 puntos de los apéndices. Cada punto desarrolla una idea diferente, plantea un cuestión, ofrece una información o establece una recomendación.

La comisión encargada del trabajo trata de dar respuestas a dos cuestiones generales:

- ¿Qué matemáticas deben aprender los alumnos durante la Educación Obligatoria?
- ¿Cómo han de enseñarse?

El informe hace una revisión de las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en el sistema educativo y las compara con las necesidades y demandas sociales de formación matemática, agrupándolas en tres apartados: las necesidades matemáticas para la vida adulta, para el ciudadano común. Las necesidades derivadas del mundo del trabajo y de las distintas profesiones y, finalmente, las necesidades derivadas de la enseñanza superior y postsecundaria.

Estudia las características del aprendizaje de las matemáticas en estas edades y la influencia de los exámenes nacionales sobre la enseñanza de las matemáticas en los centros de enseñanza primaria, secundaria obligatoria y secundaria postobligatoria.

Estudia también las condiciones de formación y perfeccionamiento del profesorado de matemáticas.

El informe hace propuestas relativas a una nueva estructura curricular, que contemple la posibilidad de diversos currículos para alumnos diferentes, tanto en los programas seguidos como en los métodos de enseñanza. Se proponen una amplia variedad de estilos y métodos. Se señalan bloques de contenidos y prioridades para los mismos. Se presentan medidas relativas a la organización adecuada de la enseñanza de las matemáticas; igualmente se establecen criterios para aumentar la oferta de profesores de matemáticas, la mejora de su cualificación y ofertas de perfeccionamiento para los profesores en ejercicio.

Sobre la enseñanza secundaria considera que deben tenerse en cuenta tres factores para establecer un currículo: nivel de rendimiento, velocidad de aprendizaje y necesidad de adquirir una comprensión de ciertos temas antes de pasar a otros. En la planificación del currículo hay que tener en cuenta las grandes diferencias que existen entre los alumnos, para que todos tengan oportunidad de progresar según su capacidad. Señala también la diferencia entre programa y currículo: Programa es una lista de temas que se han de estudiar, Currículo es toda la experiencia matemática de los alumnos, es decir, lo que se enseña y cómo se enseña.

En relación con los contenidos de los cursos de secundaria considera que se exige a los alumnos que estudien programas de matemáticas demasiado extensos y que no corresponden a su nivel de rendimiento, este planteamiento se considera erróneo.

Proponen una lista de temas y de tópicos, sobre cada uno de los tópicos desglosa varias competencias diferentes y se proporcionan criterios sobre cómo completar los contenidos de la lista.

## **Estudios de la International Commission on Mathematical Instruction**

La *International Mathematical Union* (IMU) es una organización internacional no gubernamental y sin ánimo de lucro, que promueve y coordina la cooperación en matemáticas. IMU está organizada en comisiones y una de esas comisiones es la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), cuya constitución en 1908 y refundación en 1952 ya hemos considerado.

Una de las funciones de ICMI consiste en promover la realización de informes sobre temas de actualidad, relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Uno de los primeros estudios llevados a cabo por el ICMI en su segunda etapa fue el titulado *School Mathematics in the 1990's*, elaborado por Howson y Kahane. El documento final es resultado del simposio celebrado en Kuwait en 1986, donde se discutieron las principales características del currículo de matemáticas en los niveles obligatorios de la enseñanza, primaria y secundaria.

Tres son las ideas principales que articulan la reflexión del documento. La primera idea se refiere a las necesidades y finalidades de la educación matemática; la segunda idea se refiere al papel de los contenidos en el currículo de las matemáticas escolares. Finalmente, la tercera analiza el papel del profesor, la investigación curricular y los procesos de cambio.

El primer bloque de reflexión comienza destacando la principal modificación social ocurrida en los últimos años, que afecta a la enseñanza de

las matemáticas: la progresiva extensión de la tecnología en todos los ámbitos de la sociedad moderna.

Para ejemplificar la discusión sobre esta y otras cuestiones, los autores presentan en cada caso dos respuestas distintas y las correspondientes consecuencias. En relación con el análisis de finalidades, la primera alternativa sostiene que las matemáticas son neutrales y se enseñan mejor aisladas de asuntos sociales conflictivos; la segunda alternativa establece que la enseñanza de las matemáticas debe estar relacionada, deliberadamente, tanto con la tecnología en sus múltiples formas, como con la política que determina cómo se usa.

El documento plantea como reto una cuestión clave y se interroga sobre la inexorabilidad de las matemáticas como parte del currículo:

¿Deben permanecer las matemáticas como una de las partes centrales del currículo escolar para todos?

Se ofrecen cuatro respuesta alternativas a la cuestión:

- No; Las verdaderas matemáticas no se pueden enseñar a todo el mundo.
- Si; hay que planificar las matemáticas de manera que puedan enseñarse efectivamente a todos.
- Si; pero aceptando que aunque se enseñen a todos, no todos las entenderán.
- Si; pero enseñando a los alumnos distintos tipos de matemáticas, o el mismo tipo a distintos niveles, según su capacidad o grado de avance.

El apartado de contenidos reconoce que hay una fuerte coincidencia entre los currículos nacionales en relación con los temas de aritmética, álgebra y medida; hay acuerdo muy escaso en cómo enfatizar la enseñanza de la geometría, y se aprecia un interés creciente por los temas de estadística.

Virtudes de este documento son:

- Su aparente simplicidad, lejos de consideraciones excesivamente técnicas, filosóficas o políticas de otros documentos;
- La ineludible necesidad de contemplar alternativas a las posiciones de los países occidentales.

El hecho de que en estos encuentros haya suficientes representantes de países en vías de desarrollo pone en cuestión de manera natural las posiciones de los especialistas occidentales sobre las finalidades de la enseñanza de las matemáticas (Rico, 1997).

Características relevantes de este documento son:

- Su carácter abierto, intencionalmente crítico y rupturista, cuestionando los lugares comunes y los supuestos implícitos sobre la enseñanza de las matemáticas.

- Su propósito de elaborar un esquema general de cuestiones donde aparezcan como opciones alternativas las distintas versiones de los programas de formación realmente existentes en los distintos países.
- Su propósito explícito de poner el currículo de matemáticas al servicio de las necesidades de los distintos tipos de estudiantes, en cuanto futuros ciudadanos.
- El documento tuvo una influencia importante en España, dando lugar a un simposio nacional, realizado en 1987, que tuvo como resultado la publicación de un nuevo documento: Aportaciones al debate sobre las Matemáticas de los 90. Simposio de Valencia (Alonso y otros, 1987). El debate llevado a cabo en España tuvo repercusiones importante en el diseño y la elaboración del currículo de la matemáticas derivado de la Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

## Estudios del National Council of Teachers of Mathematics

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) es una federación de sociedades de profesores de matemáticas de los Estados Unidos de Norteamérica, con gran proyección e influencia tanto en su país como a nivel internacional. Proclama como misión propia *actuar como portavoz de la educación matemática, proporcionar visión, liderazgo y desarrollo profesional para sostener a los profesores en su tarea de garantizar un aprendizaje equitativo de las matemáticas de alta calidad para todos los estudiantes.*

El cuarto documento elegido como referencia es un informe monográfico, que el NCTM edita anualmente, correspondiente al año 1985, y cuyo título es: *The Secondary School Mathematics Curriculum.*

Este documento presenta un modelo de trabajo para apoyar una innovación curricular, elaborado en el seno de esta sociedad de profesores de matemáticas. Este documento no representa la posición oficial de la NCTM en todos sus puntos, ya que las ideas que se exponen son de los correspondientes autores.

La sociedad norteamericana de profesores de matemáticas NCTM, publica en 1980 el documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's* en el que enunciaban ocho recomendaciones encaminadas a reestructurar el currículo de matemáticas de la educación obligatoria:

- La resolución de problemas debe ser el foco de las matemáticas escolares en los ochenta.
- El concepto de destreza básica debe abarcar algo más que la facilidad para los cálculos.

- Los programas de matemáticas deben obtener ventajas de las calculadoras y los ordenadores.
- Deben aplicarse estándares rigurosos de eficacia y rendimiento en la enseñanza de las matemáticas.
- El éxito de los programas de matemáticas y el aprendizaje de los alumnos deben evaluarse mediante una variedad de instrumentos mayor que las pruebas convencionales.
- Debe conseguirse que todos los estudiantes estudien más matemáticas y, para ello, debe diseñarse un currículo flexible, con una gran variedad de opciones para acomodarse a las diversas necesidades de la población de estudiantes.
- Los profesores de matemáticas deben pedirse a sí mismos y a sus colegas un alto nivel de profesionalidad.
- La ayuda pública para la enseñanza de las matemáticas debe alcanzar un nivel conmensurable con la importancia de la comprensión matemática para los individuos y la sociedad.

La finalidad es atender mejor las necesidades matemáticas de una población de estudiantes muy diversa, en una sociedad como la estadounidense, dominada cada vez más por la tecnología.

Uno de los objetivos es superar la disparidad entre los currículos de secundaria en vigor en distintos Estados e instituciones de la Unión; en la época existen una cantidad considerable de centros que aún mantienen con convencimiento un programa esencialmente estructuralista basado en las matemáticas modernas pero, por otra parte, se ha producido una reacción a esos programas denominada Vuelta a lo Básico (Back to Basic), que afecta a otra gran cantidad de centros. Las diferencias entre estos centros se hacen tan acusadas y las opciones curriculares se radicalizan hasta un punto en que comienzan a constituir un gran problema.

En este contexto, el NCTM, con la *Agenda* establece un programa de trabajo para la revisión del currículo de matemáticas. Los objetivos planteados por la *Agenda* dan lugar a tópicos sobre los que reflexionar durante los años siguientes, y tienen expresión en diversos documentos a lo largo de toda la década. Uno de ellos es el ya mencionado anuario de 1985, *The Secondary School Mathematics Curriculum*, dedicado al currículo de secundaria, donde se plantea la necesidad de una nueva renovación curricular que permita evitar errores anteriores. Este trabajo hace una revisión histórica de los antecedentes de estos movimientos, de sus logros y de sus fracasos, y propone una serie de recomendaciones para superar el estancamiento del momento.

Cuatro son los criterios que defiende para poner en marcha un nuevo currículo:

- Se debe especificar el contenido de cualquier nuevo currículo con tanto detalle como tiene el currículo en curso.
- El contenido de cualquier nuevo currículo debe explicitarse en relación con el nivel del grado a que se orienta.
- Los materiales necesarios para poner en práctica las recomendaciones deben estar disponibles.
- Los estudiantes deben ser evaluados en relación con los nuevos contenidos.

Presenta, caracteriza y compara cuatro modelos de currículos influyentes en los Estados Unidos, cuyo resumen se presenta en el siguiente cuadro:

Tabla 1

*Comparación de Modelos Curriculares*

Características curriculares	Modelos curriculares			
	Matemática Pura	Matemática Aplicada	Matemática Conceptual	Destrezas Básicas
Valores Implícitos	Matemáticas por su propio Interés	Transferencia a la ciencia, ingeniería. Éxito en estos campos	Generalización de conceptos. Utilidad para el pensamiento futuro	Utilidad para el trabajo Necesidades del ciudadano
Orden de Prioridades	Análisis Comprensión Aplicación Cálculo	Aplicación Cálculo Comprensión Análisis	Comprensión. Aplicación. Cálculo. Análisis	Cálculo. Comprensión Aplicación Análisis
Organización Curricular	Axiomático	Centrado en los problemas. Dependiente del campo de aplicación	Espiral	Estructurado Secuencial Jerárquico
Objetivos de Instrucción Prioritarios	Producción de soluciones por los estudiantes independientes Precisión	Facilidad para resolver problemas del mundo real	Comprensión de conceptos y relaciones	Maestría sobre las destrezas

Tabla 1

*Comparación de Modelos Curriculares*

	Lógica			
Papel y Preparación del profesor	Autoridad y Función de Modelo Conocimiento intensivo del contenido	Fuente de ejemplos de problemas y modelos de resolución Conocimiento extensivo del contenido	Comunicador de conceptos. Conocimiento suficiente del contenido para generar ejemplos variados	Diagnosticar y prescribir Conocimiento del contenido requerido mínimo
Responsabilidad De los logros	Estudiante	Estudiante después el Instructor	Instructor después el Estudiante.	Instructor
Población diana	Tope del 10% de la población de estudiantes	Tope del 25% de la población de estudiantes	Tope del 75% de la población de estudiantes	Total de la población de estudiantes

Los cuatro tipos de documentos curriculares considerados en este Apartado 3 son una muestra de reflexión sobre el currículo desde perspectivas diferentes. Comparten época y unas mismas preocupaciones. Todos ellos comienzan por plantearse las finalidades de la educación matemática, las finalidades del currículo de matemáticas tratando de ajustarse a las necesidades del ciudadano y a la sociedad.

Estos cuatro documentos comparten otras características, por un lado, consideran necesaria una fundamentación teórica para el currículo basadas en investigaciones sistemáticas y conectadas con la práctica; por otro lado, tratan de superar un estilo de trabajo fundado en declaraciones genéricas y se proponen acompañar las propuestas de innovación curricular con materiales desarrollados lo más extensamente posibles. Además de la preocupación creciente por los contenidos del currículo de matemáticas, hay también una insistencia sobre la responsabilidad del profesor en el desarrollo del currículo de matemáticas y una preocupación creciente por la formación profesional del profesor de matemáticas.

### 3. Cambios Curriculares en España

Siguiendo a Kilpatrick, Rico y Sierra (1994) revisamos la situación específica del currículo de matemáticas en España para las etapas de educación

obligatoria, desde comienzo de la década de los 40 hasta la década de los 90 del siglo XX.

Como marco de referencia destacamos tres momentos de cambios de las leyes reguladoras de la educación obligatoria. La ley de Educación Primaria de 1945, La Ley General de Educación de 1970 y la Ley General de Ordenación del Sistema Educativo de 1990 son los tres hitos normativos que encuadran los cambios curriculares ocurridos en España en la segunda mitad del siglo XX.

### 3.1. Ley de Educación Primaria de 1945

El 18 de julio de 1945 se publica la Ley de Educación Primaria, que regula el currículo para estos niveles educativos durante 25 años. Esta Ley reduce la escolaridad obligatoria a seis años, de modo que los niños deben acudir a la escuela entre los seis y los doce años.

La Ley de Educación Primaria clasifica las materias a cursar en tres grupos: materias Instrumentales, materias formativas y materias complementarias. Entre las instrumentales, que se definen como nociones y hábitos indispensables para el estudio, figura el Cálculo aritmético. Entre las materias formativas, definidas como los conocimientos que constituyen la base para la educación moral e intelectual, se incluían las matemáticas. A nuestro juicio, esta distinción incipiente entre destrezas/procedimientos, por un lado, y conceptos, por el otro, tuvo como consecuencia práctica interpretar la precisión y la rapidez en la ejecución de las operaciones aritméticas como meta fundamental del aprendizaje escolar en la Educación Primaria, quedando como aspecto complementario el desarrollo y dominio conceptual.

Consecuencia de la Guerra Civil fue el retroceso en la duración de la educación obligatoria, que rompió con una tradición anterior. La posibilidad de iniciar el bachillerato a los diez años limita en muchos casos a cuatro cursos la educación primaria común. De este modo se establecen dos tipos de alumnos, los que podían acceder al bachillerato y los que permanecían en la escuela primaria.

En 1953 se introducen cambios curriculares mediante la aprobación de nuevos planes de estudio para la enseñanza primaria y la enseñanza secundaria. Los planes de primaria son los primeros programas en la historia de la enseñanza primaria en España que incluyen cuestionarios oficiales para las distintas asignaturas, lo que supuso una novedad en la legislación educativa y en los esquemas de diseño curricular.

En febrero de 1953 (OM de 6 de febrero de 1953) se aprueban los cuestionarios “*que regirán las actividades didácticas de las Escuelas Primarias*”, que se publican en el Boletín del Ministerio de Educación Nacional el 1 de diciembre del mismo año. La enseñanza se distribuye en tres periodos: cuatro años de Enseñanza Elemental (seis a diez años) dos cursos de

Perfeccionamiento (diez a doce años) y tres cursos de Iniciación Profesional (doce a quince años).

Los principios educativos y las orientaciones metodológicas son sintetizadas por López del Castillo (1982), en lo que se refiere al área de Matemáticas las normas didácticas establecidas en los cuestionarios son esencialmente:

- Dar primacía a las Matemáticas y aumentar los contenidos, debido a la prolongación del periodo escolar y por la orientación hacia la iniciación profesional.
- Defender varios métodos didácticos: la repetición, ejercicios constantes para la mecanización de los cálculos, aprendizaje escalonado, adecuación del trabajo a las diferencias individuales.
- Establecer normas sobre enunciados de problemas y su resolución.

Las modificaciones del currículo de secundaria entre los años 40 y los 60 se realizan mediante renovación de los planes de estudios. Así en el BOE de 2 de julio de 1953 aparece publicado el Decreto de 12 de junio, que establece un nuevo Plan de Estudios para Enseñanza Media. La nueva organización del bachillerato se estructura en seis cursos: los cuatro primeros cursos tienen carácter común y constituyen el Bachillerato Elemental; los dos últimos están divididos en dos especialidades Letras y Ciencias, y constituyen el Bachillerato Superior. Se establece un curso puente con los estudios superiores denominado Preuniversitario, cuya organización y evaluación es compartida por la Universidad. La asignatura de Matemáticas es obligatoria en el Bachillerato Elemental y en la especialidad de Ciencias del Bachillerato Superior.

Las finalidades declaradas en la presentación del nuevo plan fueron: descongestionar las enseñanzas teóricas, evitar la excesiva reiteración del método cíclico y garantizar el cultivo de las asignaturas más importantes y formativas. Pero quizás la innovación más destacable consistió en la publicación de cuestionarios detallados para cada disciplina acompañados de orientaciones metodológicas extensas, en las que se marcan algunas líneas de desarrollo para el tema, posibles errores conceptuales y se indican límites para algunos contenidos.

### **3.2. Ley General de Educación de 1970**

La Ley General de Educación de 1970 desarrolla en España el currículo de la Matemática Moderna, que había sido implantado en otros países educativamente más avanzados, recientemente (Kilpatrick, Rico y Sierra, 1994 y Rico, 1997).

Los estudios para la redacción de una nueva Ley de Educación se inician con la publicación en febrero de 1969 del informe: *La Educación en España*:

*Bases para una política educativa*, conocido popularmente como el “*Libro Blanco de la Reforma Educativa*”.

Finalmente el 4 de agosto de 1970, se aprueba la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (LGE).

Los objetivos que se proponen quedan recogidos en su preámbulo:

- Hacer partícipe de la educación a toda la sociedad española.
- Completar la educación general con una preparación profesional.
- Ofrecer a todos los ciudadanos igualdad de oportunidades educativas.
- Establecer un sistema educativo flexible, posibilitando la formación permanente.

La Ley General de Educación estructura el sistema educativo por niveles y modalidades. En la primera modalidad se presentan los niveles educativos de régimen común. Consideraba los siguientes niveles:

- Educación Preescolar (de dos a cinco años).
- Educación General Básica (de seis a 14 años)
- Bachillerato (de 14 a 17 años).
- Estudios universitarios, precedidos de un curso de orientación universitaria (COU).

La segunda modalidad abarca la formación profesional y la educación permanente de adultos, consideradas ambas en conexión inmediata con la actividad laboral.

La tercera modalidad se refiere a aquellos estudios que revisten alguna peculiaridad por la materia, por el método o por el tipo de alumnos (conservatorios de música, escuelas de idiomas, etc.).

El mayor logro social, conseguido por primera vez en la historia de España durante el desarrollo de esta Ley, fue la escolarización total de niños entre los seis y los catorce años.

Con la promulgación de la ley se aprobaron dos documentos: *Nueva Orientación Pedagógica para la E.G.B.* (MEC, 1970 y 1971) y *Nuevas Orientaciones Pedagógicas para la segunda etapa de la E.G.B.* (MEC, 1971). Documentos donde se dan las orientaciones sobre objetivos, metodología, contenidos, niveles, evaluación, organización y temporalización del trabajo escolar.

### **3.3. Ley Orgánica General del Sistema Educativo**

En julio de 1983, el Ministerio de Educación y Ciencias publica el documento *Hacia la Reforma* revisado en 1985 y que se extiende hasta 1987.

Los primeros proyectos de reforma de la administración socialista no se conciben como prescriptivos y organizados jerárquicamente; se presentan como hipótesis de trabajo, elaboradas por grupos de estudio, que deben ser experimentadas antes de difundirse en todo el sistema educativo. Esta primera etapa de la reforma se extiende hasta 1987 y es por sus intenciones, humanista, pero tecnicista y formalista tanto por sus objetivos como por su propuesta de acción y validación; se ajusta a un paradigma de proceso—producto, (Rico, 1997).

La segunda etapa se inicia con una declaración programática del ministro Maravall en junio de 1987: *Proyecto para la reforma de la enseñanza*. Una serie de especialistas definen un marco curricular básico; este marco se implanta para su progresivo desarrollo en toda la enseñanza no universitaria y de acuerdo con un calendario. Cesar Coll es el principal animador de esta etapa. Los hitos que marcan esta nueva etapa son los siguientes:

- Discusión del proyecto.
- Redacción del Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo.
- Diseño del currículo básico para las diferentes áreas y ciclos del sistema educativo: infantil, primaria y secundaria.
- Aprobación de los instrumentos legales que dan forma a la nueva organización del sistema y a la estructura correspondiente en niveles y ciclos.
- Aprobación de los correspondientes decretos de enseñanzas mínimas.
- Proceso de formación y actualización del profesorado.
- Implantación de la nueva estructura educativa a partir de los primeros años.

En 1989 se publican el *Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo* y los *Diseños Curriculares Básicos* para cada una de las nuevas etapas del nuevo Sistema Educativo: Infantil, Primaria y Secundaria Obligatoria.

El Libro Blanco comienza por realizar una evaluación del rendimiento de la estructura curricular derivada de la Ley General de Educación de 1970 y un análisis de su inadecuación a la situación política derivada de la Constitución de 1978. La segunda parte del Libro Blanco está dedicada a presentar la nueva estructura del sistema educativo. En cada uno de los niveles del nuevo sistema que se va presentando se consideran: los fines y objetivos de la etapa, los ciclos y áreas en las que se estructura, el tratamiento educativo a la diversidad, la promoción de alumnos y las alternativas complementarias y la organización de la etapa.

Finalmente el 3 de octubre de 1990 se aprueba la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). El área de matemáticas:

La materia de matemáticas en el marco de la reforma de la LOGSE desempeña un papel fundamental en el periodo de la formación obligatoria y se mantiene dentro de los conocimientos básicos que forman parte del currículo en dicho periodo. Tanto en el documento *Diseño Curricular Base, Educación Primaria* (1989) como en el documento *Diseño Curricular Base, Educación Secundaria Obligatoria* (1989), las matemáticas aparecen entre las disciplinas generales, cuyo desarrollo comprende realizar en todos los cursos. Estos documentos desglosan los principios generales de la reforma y entran en el detalle del desarrollo curricular de las diversas materias.

Ambos documentos dedican un capítulo al currículo de matemáticas en el periodo correspondiente, cuya estructura es muy similar y se articula del siguiente modo:

1. Consideraciones generales sobre las matemáticas escolares
2. Matemáticas en Primaria/Secundaria:
  - Consideraciones generales.
  - Objetivos generales.
  - Bloques de contenidos con su desarrollo.
  - Orientaciones didácticas y para a evaluación.

En el primer Apartado, Consideraciones Generales de las Matemáticas Escolares, se desarrollan las ideas claves sobre las funciones y finalidades de las matemáticas escolares. La filosofía del documento se va explicitando en los siguientes puntos:

Las matemáticas evolucionan continuamente y están relacionadas con otros conocimientos. Esto implica que no convenga presentarlas como un producto cerrado y que los problemas de otras áreas proporcionen terreno para nuevos conocimientos matemáticos. Las matemáticas modelizan la realidad y validan los modelos.

En la construcción de las matemáticas se emplea el razonamiento empírico-deductivo. La deducción formal aparece en una fase posterior.

De acuerdo con el Informe Cockroft (1982), establece que las matemáticas son un poderoso instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades. Analiza el papel de las notaciones simbólicas y sostiene que la formalización es sólo el producto final de un largo proceso.

Plantea claramente la distinción entre cómo se presentan las matemáticas y cómo se transmiten y adquieren. Se afirma que la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad sobre los objetos.

Enfatiza el carácter constructivo del conocimiento matemático: *“el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas en y*

*a partir de la actividad entre los objetos*". Por ello, hay que tener en cuenta el nivel de los alumnos.

Considera que las matemáticas tienen una estructura interna, que relaciona y organiza sus diferentes partes. Realiza un análisis más cuidadoso distinguiendo una componente vertical, que fundamenta unos conceptos en otros, lo que impone una determinada secuencia temporal en el aprendizaje. Al destacar la relación entre las partes señala procedimientos generales de uso variado y que se pueden emplear en diferentes campos. Finalmente, recuerda la dualidad con la que permite contemplar la realidad, exponiendo diversos ejemplos de esta dicotomía.

Establece la finalidad formativa del conocimiento matemático; habla de competencias cognitivas para planificar el aprendizaje e insiste en que el desarrollo de las capacidades cognitivas que proporcionan las matemáticas, también se pueden transferir a otros dominios. Concluye destacando la bondad general del aprendizaje de las matemáticas por la aplicación a otros dominios.

Desarrollan las finalidades utilitarias del conocimiento matemático, destacando el que se puedan emplear como herramientas para el trabajo en otras áreas, que satisfagan las necesidades del sistema escolar, que sirvan para cubrir las necesidades de la vida adulta y que permitan atender las necesidades derivadas de las nuevas tecnologías; en cada caso se dan ejemplos del interés de la enseñanza de las matemáticas para atender a las diversas finalidades utilitarias.

Hay una reflexión interesante sobre la complementariedad entre las finalidades formativas y las utilitarias en el desarrollo del currículo de matemáticas; se pretende que en el periodo de enseñanza obligatoria no haya supeditación de unas a otras, sino que, al contrario, unas apoyen o complementen a las otras.

Finalmente, se insiste en que los nuevos programas habrán de dar un peso considerable a la enseñanza y aprendizaje de conceptos y procedimientos de tipo general, aplicables a una gran variedad de situaciones.

### **3.4. Nuestro Concepto de Currículo**

Como complemento al Apartado anterior realizamos una caracterización de la noción de currículo de matemáticas en que sustenta esta investigación, basada en los trabajos de Rico (1990, 1997).

Ya hemos subrayado que, en su concepción educativa, el concepto de currículo se ha convertido en un término genérico, cuya denominación abarca toda actividad de planificar una formación (Stenhouse, 1984).

Para Rico (1990) el concepto de currículo como plan de formación debe contemplar cinco elementos, que podremos reconocer en todo documento o reflexión curricular:

- El colectivo de personas a formar.
- El tipo de formación que se quiere proporcionar.
- La institución social en la que se lleva a cabo la formación.
- Las finalidades que se quieren alcanzar.
- Los mecanismos de control y valoración.

Este concepto de currículo tiene un carácter sistémico y sus elementos no están aislados sino que mantienen entre sí múltiples relaciones.

El colectivo de personas a formar viene caracterizado por dos variables importantes: la edad y la formación previa. En la educación obligatoria la variable más importante es la edad, ya que la formación va a ser proporcionada por el propio sistema educativo. En el momento de realización de este estudio en nuestro país la educación obligatoria abarca tres periodos: Educación Infantil de 4 a 6 años, Educación Primaria de 6 a 12 años y la Educación Secundaria Obligatoria de 12 a 16 años; nuestro trabajo se centra en las edades de 8 a 14 años que ocupan parte de la Educación Primaria y el Primer Ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Las instituciones sociales a través de la cual se va a llevar a cabo la formación es un elemento imprescindible en cualquier currículo. En España son las Escuelas o Colegios y los Institutos de Enseñanza Secundaria.

Finalmente todo currículo incorpora unos mecanismos de control y unas previsiones sobre sus funciones y modo de puesta en práctica. Estos mecanismos de control deben, por un lado, valorar el grado de eficiencia de los agentes en la ejecución del plan de formación previsto y por otro, el funcionamiento global del sistema diseñado para la realización del plan. Consideramos por tanto dos tipos de evaluación: la evaluación de agentes: profesores y alumnos y la evaluación del sistema.

Rico (1997) establece cuatro niveles de análisis sobre la noción de currículo para las cuatro dimensiones planteadas:

El primer nivel de análisis es el relativo a las finalidades del currículo, la lista de finalidades para el currículo de matemáticas escolares es muy extensa y diversificada. Pero bajo esa amplitud es posible encontrar invariantes si organizamos las finalidades atendiendo a las cuatro dimensiones anteriores.

El conocimiento matemático que se debe transmitir ha de considerarse como parte integrante de la cultura, socialmente construido y determinado, en el que han de intervenir las diversas necesidades formativas de las matemáticas y han de tenerse en cuenta las connotaciones políticas y morales, generales y específicas conectadas con la formación matemática de los escolares. Un segundo nivel de reflexión lo encontramos si abordamos el currículo desde una perspectiva teórica, considerando las disciplinas académicas en las que se fundamenta. Destacan en este nivel cuatro disciplinas:

- Epistemología e Historia de las Matemáticas y las propias disciplinas matemáticas (Lógica matemática, Álgebra, Geometría, Análisis, Estadística, etc.).
- Psicología evolutiva, teoría del aprendizaje y cognición matemática
- Pedagogía y Filosofía de la Educación, Teoría e Historia de la Educación, Didáctica General y Tecnología Educativa.
- Sociología de la Ciencia y construcción social del conocimiento, Sociología de la Educación.

Un tercer nivel de reflexión se corresponde con las etapas de planificación del currículo. En el diseño de un plan concreto de formación es necesario considerar su ubicación y conexión con los diferentes agentes e instituciones del sistema educativo así como las relaciones entre ellos.

En este caso, el currículo se presenta como un plan que se organiza y estructura al especificar las competencias profesionales de los profesores y las funciones de los alumnos, cuando se caracterizan como conocimiento cada una de las disciplinas escolares y cuando se especifica la organización y estructura de la escuela o centros de formación.

El currículo es también en este nivel de reflexión un sistema con cuatro componentes:

- El conocimiento o disciplina que se transmite.
- El profesorado.
- Los alumnos.
- Los centros de formación (aulas, escuelas, institutos, etc.).

La dimensión social se ubica en el centro o escuela; la dimensión cultural está centrada en el conocimiento o disciplina; la dimensión cognitiva tiene como protagonista principal el alumno o aprendiz y finalmente la dimensión ética y formativa la protagoniza el profesor o enseñante. Estas cuatro componentes y sus relaciones caracterizan el currículo como plan de formación.

El cuarto nivel de reflexión se establece como herramienta específica para llevar a cabo un plan de formación para escolares. En este nivel el agente encargado de llevar a cabo el plan de formación es el profesor y el ámbito de actuación es el aula.

Las cuatro componentes se concreta en los siguientes aspectos:

- Unos objetivos.
- Unos contenidos.
- Una metodología.
- Unos criterios y medios de evaluación.

Estas componentes no están aisladas sino que, se relacionan mutuamente e interactúan entre sí. Cada una de las componentes consideradas se ubican en una de las dimensiones establecidas para el currículo: los objetivos se ubican en la dimensión cognitiva, los contenidos en la dimensión cultural, la metodología en la dimensión formativa y la evaluación en la dimensión social.

Los diferentes niveles de reflexión que hemos presentado no son constructos independientes sino que están relacionados entre sí. Así cuando hemos establecido como distintos los niveles de planificación para el aula y para el sistema educativo, también es cierto que entre ambos niveles hay una fuerte dependencia derivada de la multitud de conexiones que existen entre ambos, no sólo entre las componentes de una misma dimensión sino entre todas ellas.

La funcionalidad del concepto de currículo se ha desarrollado mediante la búsqueda sistemática de niveles de reflexión, estableciendo componentes por cada nivel y relaciones entre las componentes de diferentes niveles.

#### **4. Formación Aritmética**

La educación es entendida aquí como un proceso sistemático destinado a lograr cambios duraderos y positivos en las conductas de los sujetos sometidos a su influencia, en base a objetivos definidos de modo concreto y preciso, social e individualmente aceptables, dignos de ser alcanzados por los individuos en crecimiento y promovidos por los responsables de su formación (Lafourcade, 1979).

Las matemáticas se aprenden en la Institución escolar como resultado de tres procesos culturales de mediación simbólica: transmisión, aprendizaje y recompartición entre los aprendices.

Estos tres procesos se dan, de manera no unívoca, entre tres agentes (profesor, alumno y grupo-clase), cuyo “encuentro” (comunicativo o no) institucionalmente recibe el nombre de interacción educativa (Coriat, 1997).

Siguiendo a Castro, Rico y Castro (1987) sostenemos que la aritmética escolar es un conocimiento necesario para la vida cotidiana, importante para el desempeño económico, social y cultural de los ciudadanos y, por ello para la enseñanza. Dada la amplitud de sus aplicaciones y su carácter de herramienta conceptual básica es por lo que la formación aritmética de los escolares expresada por su rendimiento no se considera nunca todo lo satisfactoria que cabría desear.

##### **4.1. Aprendizaje Aritmético Escolar y Currículo**

Nociones y conocimientos de la aritmética escolar forman parte de la alfabetización, de las competencias básicas a transmitir mediante la educación obligatoria (Euridyce, 2002, pp. 15 y 16). Como ocurre con todo conocimiento

escolar, los conceptos y procedimientos aritméticos se adquieren y desarrollan mediante una propuesta intencional para su aprendizaje. Por ello, toda propuesta curricular que organice la transmisión de esos conocimientos matemáticos se ha venido elaborando sobre la base de una teoría de aprendizaje.

Desde comienzo del siglo XX, psicólogos y educadores han trabajado activamente sobre la adquisición y formación de conocimientos, destrezas y actitudes en distintos campos del saber académico escolar, y en las técnicas para el logro de los correspondientes aprendizajes. A mediados de ese siglo se realizan aportaciones significativas para educadores y profesores de matemáticas interesados en la adquisición de conceptos y dominio de técnicas matemáticas.

Los marcos teóricos sobre aprendizaje de la aritmética empleados en el diseño del currículo de matemáticas, cuya mayor influencia reconocen los expertos en Didáctica de la Matemática son cuatro: La escuela estructuralista, representada por Piaget y Brunner; la escuela conductista, cuyos principales expertos han sido Thorndike, Skinner y Gagné; la escuela constructivista, con Piaget y Ausubel como principales representantes y la teoría del procesamiento de la información, representada por Simon, Mayer y Stenberg.

Un marco sobre aprendizaje escolar permite enunciar expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes. A mediados de la década de los ochenta una aproximación desde la teoría del procesamiento de la información, proporciona una organización cognitiva del conocimiento matemático y sustenta diversas propuestas curriculares. Así lo vemos en el documento *Mathematics from 5 to 16* (HMSO, 1985).

Este documento describe brevemente la organización cognitiva del conocimiento matemático, los elementos en la enseñanza de las matemáticas y su concreción en objetivos para la enseñanza.

El conocimiento matemático lo estructura en dos grandes campos: conceptual y procedimental, fuertemente relacionados entre sí, Cada uno de estos campos lo organiza en tres niveles, en tres categorías inclusivas y de complejidad creciente. En el campo conceptual estas categorías son: hechos, conceptos y estructuras conceptuales; en el campo procedimental las categorías son: técnicas y destrezas, razonamientos y estrategias. Finalmente y con carácter complementario incluye las actitudes, como partes de los conocimientos considerados.

A partir de esta caracterización cognitiva de los conocimientos matemáticos, los autores del documento antes mencionado (HMSO, 1985), llevan a cabo la siguiente enumeración detallada de los objetivos del aprendizaje de la aritmética:

- Términos a recordar.
- Notación a recordar.

- Convenios a recordar.
- Resultados a recordar.
- Rendimiento en las operaciones básicas.
- Uso discreto de la calculadora.
- Entrenamiento en destrezas prácticas sencillas.
- Fomento de la habilidad para comunicar matemáticas.
- Uso de microordenadores en actividades aritméticas.
- Comprensión de conceptos básicos.
- Relaciones entre conceptos.
- Selección de datos apropiados.
- Empleo de la Aritmética en un contexto.
- Interpretación de resultados.
- Habilidad para estimar.
- Habilidad para aproximar.
- Empleo de métodos de ensayo y error.
- Simplificación de tareas difíciles.
- Búsqueda de patrones y modelos.
- Razonamiento.
- Conjetura y comprobación de hipótesis.
- Demostración y refutación.
- Logro de buenos hábitos de trabajo.
- Logro de buena actitud hacia las Matemáticas.

Utilizando las categorías iniciales podemos ver que las expectativas sobre el aprendizaje que expresan los objetivos establecidos por el HMSO se refieren a:

- Hechos, en los objetivos 1, 2, 3 y 4.
- Destrezas, en los objetivos 5, 6 y 7.
- Conceptos, en los objetivos 10, 11, 12, 13 y 14.
- Razonamientos, en los objetivos 8, 9 y 20.
- Estructuras conceptuales, en los objetivos 18, 19 y 21.
- Estrategias, en los objetivos 15, 16, 17 y 22.
- Actitudes, en los objetivos 23 y 24.

Este ejemplo muestra la importancia que tiene un marco teórico sobre el aprendizaje aritmético escolar para estructurar los contenidos y los objetivos en una propuesta curricular coherente. El dominio de hechos y destrezas está en la base del conocimiento matemático y, por tanto, constituyen parte imprescindible de la aritmética escolar. Cualquier desarrollo del conocimiento matemático necesita de unos instrumentos básicos y las nociones numéricas y las destrezas, es decir, la formación aritmética está en ese núcleo.

## 4.2. Destrezas Aritméticas

Dentro de la formación aritmética uno de los objetivos más frecuentemente señalado en educación matemática está relacionado con el desarrollo y dominio de las destrezas (Suydam y Dessert, 1980). Las destrezas son relativamente fáciles de describir o especificar, de enseñar y evaluar. Una destreza aritmética es la capacidad de un alumno para hacer una operación o un cálculo con números de manera confiable. En términos de procesamiento de la información, las destrezas consisten en el procesamiento de hechos y nociones básicas. Las destrezas surgen de los conceptos y los principios, y proporcionan fundamento para el desarrollo de otros conceptos y principios. El pensamiento conceptual se deriva, en parte, de lograr comprensión sobre las destrezas.

También es evidente que el dominio en las destrezas se percibe como útil y por ello la sociedad las valora y la institución escolar promueve su aprendizaje.

El dominio en las destrezas se caracteriza generalmente por dos enfoques:

- En términos de habilidad y precisión.
- En términos de eficiencia y velocidad.

Nuestra investigación se enmarca en el primer enfoque.

El debate sobre la identificación de las destrezas aritméticas con el dominio memorístico de rutinas ha estado abierto permanentemente.

La práctica es obviamente un componente en el aprendizaje de una destreza y ayuda a su dominio facilitando la adquisición de rutinas. Una incorrecta interpretación puede sostener que las destrezas deben ser enseñadas por procedimientos mecánicos enfatizando los ejercicios repetitivos. Por el contrario, sostenemos con Brownell (1935) que la comprensión es lo que hace útil el conocimiento y dominio de los procedimientos aritméticos (incluyendo la aplicación de conceptos y principios) como concomitante necesario para el aprendizaje de las destrezas. Esto es así porque el aprendizaje por comprensión tiene en cuenta la complejidad del conocimiento aritmético, adapta el ritmo de la instrucción a la dificultad de los procesos, y destaca las relaciones entre números (pp. 18–28).

Alcanzar habilidad en una destreza es parte de un proceso con dos componentes, siempre hay una parte del proceso que se relaciona con una forma de comprensión.

Con esta misma orientación, Suydam y Dessert (1980), presentan la propuesta de Gibbs dada en la Conferencia del Instituto Nacional de Educación (NIE) sobre una interpretación amplia, basada en la comprensión de las destrezas matemáticas básicas, que enumeran del siguiente modo:

1. Comprensión de conceptos matemáticos y técnicas de computación.
2. Destrezas en el uso de estas comprensiones en computación.
3. Destrezas en resolución de problemas.
4. Destreza en el pensamiento creativo.

Para con trarrestar el movimiento *Back to Basic*, que defendía un aprendizaje memorístico y rutinario de la Aritmética Escolar, el National Council of Supervisors of Mathematics (USA) recibe el encargo de llevar a cabo un estudio de competencias básicas. En este estudio del NCSM (1976) se establece que una destreza básica supone un comportamiento del alumno en el uso de hechos, conceptos, algoritmos o solución de problemas. En ese mismo documento, Rising resume los diferentes puntos de vista, sobre destrezas matemáticas básicas: *Las destrezas matemáticas básicas son esas habilidades matemáticas que deben ser logradas para funcionar como ciudadanos.*

En este documento se efectúa, una revisión de trabajos de investigación sobre destrezas matemáticas realizadas en Estados Unidos, que presentan según las siguientes categorías:

- Destrezas de contar y valor posicional.
- Hechos básicos.
- Aprendizaje de destrezas con algoritmos para números naturales.
- Aprendizaje de destrezas con algoritmos para las fracciones.
- Aprendizaje de destrezas con algoritmos para los decimales.
- Aprendizaje de destrezas con otros contenidos matemáticos.
- Aprendizaje de destrezas con otros tópicos matemáticos.

Como resumen de su revisión presentan el siguiente balance:

- Se presta, más atención a los conceptos relacionados con el contar que a las destrezas.
- Se presta, poca atención a las destrezas de valor posicional.
- Los hechos básicos han recibido atención continua durante años, con un foco de atención puesto en el nivel de dificultad.

- También se presta, atención continuada a los algoritmos para números naturales y fracciones.
- Destaca que se presta, muy poca atención a los algoritmos para los decimales y otros tópicos matemáticos.
- Afirma que los resultados de las investigaciones sobre análisis de los errores a lo largo de los años pueden resumirse fácilmente. Discute brevemente los medios para evaluar las destrezas, y resume las evidencias.
- En adición las lagunas en la investigación aparecen fácilmente; reafirma la necesidad de estudios coordinados.

### **4.3. Formación Aritmética en un Marco Curricular**

Después de la revisión sobre destrezas básicas realizada, presentamos un breve esquema sobre el marco en que se lleva a cabo la formación aritmética de los escolares, los proceso de enseñanza y aprendizaje de los escolares. A partir de ese marco enunciamos nuestra idea sobre rendimiento aritmético. Nos centramos en un plan de formación cuyo foco de atención está en el aprendizaje de los conocimientos y destrezas aritméticos. Consideramos en este marco las fases de planificación, implementación y evaluación.

Partimos de los conocimientos aritméticos cuyo currículo viene establecido por:

1. Un currículo vigente, en uso, cuya planificación comprende:

- Una planificación de contenidos aritméticos a enseñar, que se enumeran de manera secuenciada y estructurada por cursos y niveles.
- Unos métodos de enseñanza a utilizar; que se concretan en unas tareas y unas actividades, organizadas según líneas didácticas.
- Unas expectativas sobre el aprendizaje aritmético de los escolares, enunciadas en forma de objetivos parciales y finales, a conseguir con la enseñanza de los contenidos aritméticos seleccionados.
- Criterios de evaluación sobre el conocimiento individual de los escolares e instrumentos para su realización.

2. Una intervención o puesta en práctica del diseño teórico, centrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos aritméticos. De estos procesos destacamos la intervención de los siguientes agentes:

- Profesionales de la enseñanza, sus funciones consisten en seleccionar las tareas para el logro de los objetivos fundamentales vinculados a los contenidos aritméticos prioritarios; secuenciar y temporalizar las tareas para conseguir con la mayor efectividad el aprendizaje por los escolares de estos contenidos.

- Libros de texto y materiales escolares utilizados que muestran en su estructura una propuesta para la enseñanza, selección y secuenciación de los contenidos, mediante la propuesta de tareas, según distintos grados de complejidad y dificultad.
- Los alumnos, que como último eslabón de la cadena, llevan a cabo su formación aritmética mediante un proceso de aprendizaje de los contenidos y el logro de los objetivos propuestos en el currículo.

3. Una evaluación del proceso de aprendizaje aritmético realizado y de sus resultados globales, cuya realización implica:

- Unos focos o bloques de contenidos aritméticos prioritarios, que centran la evaluación.
- Unas tareas de evaluación sobre dominio de los conocimientos aritméticos presentadas en un determinado formato.
- Unas técnicas de valoración de la eficacia del sistema sobre la base de las actuaciones de los alumnos y otras actuaciones.
- Unos indicadores de logros y de niveles de desarrollo alcanzados para la formación aritmética escolar.
- Una valoración global del rendimiento alcanzado en los aprendizajes aritméticos.

#### **4.4. Rendimiento Aritmético**

Nuestro interés se centra en el nivel de los aprendizajes alcanzados por grupos de alumnos y por el conjunto del sistema en relación con las expectativas establecidas; también en las comparaciones entre grupos. El tipo de investigación en que nos situamos no estudia el aprendizaje individual de alumnos concretos. Desde nuestra perspectiva, los alumnos, cuando muestran sus conocimientos y sus errores en determinadas pruebas, informan sobre la eficacia del currículo en un centro específico y en unas determinadas circunstancias, contribuyen a la evaluación del sistema, pero no se consideran sujetos de la evaluación.

La valoración global del rendimiento alcanzado en el aprendizaje de los conocimientos y destrezas aritméticos alcanza su sentido dentro de un marco curricular, que contempla en cada caso las fases de planificación, implementación y evaluación, junto con los descriptores considerados para cada una de ellas. Los resultados de los alumnos contribuyen conjuntamente a determinar el rendimiento de un programa, de un sistema que viene delimitado mediante las componentes antes enumeradas.

Por rendimiento aritmético entendemos el resultado final de la evaluación práctica del conocimiento aritmético alcanzado por grupos de escolares, llevado

a cabo con unos instrumentos que deben reflejar los objetivos de aprendizaje propuestos. Los estudios sobre rendimiento tienen como finalidad establecer la eficacia de la institución escolar, corregir los defectos detectados en el proceso de enseñanza aprendizaje; también permitir la comparación entre grupos por su dominio del conocimiento aritmético.

Rendimiento aritmético es, en definitiva, un valor que expresa la eficacia en el logro de la formación aritmética esperada para los escolares en una institución educativa.

Un modo convencional de establecer el logro de los objetivos sobre conocimiento aritmético comienza por determinar criterios e instrumentos mediante los que obtener diversa medidas para cuantificar el dominio de los escolares en aritmética. La determinación del rendimiento, en términos generales, se hace mediante los valores que grupos de escolares obtienen como resultado de las respuestas que dan a esos instrumentos, que suelen ser tests y pruebas estandarizadas.

El rendimiento aritmético se establece como una cuantificación del dominio escolar sobre los diferentes conocimientos que se transmiten y desarrollan con esta disciplina: hechos, conceptos y estructuras aritméticas, dominios de algoritmos, destrezas y habilidad de cálculo, cálculo mental, estimación, resolución de problemas aritméticos, estrategias y otros.

El rendimiento aritmético muestra, en función de unos instrumentos, el dominio que tiene un grupo escolar en aritmética; se determina por medio de los resultados alcanzados en unas pruebas que se expresan en una escala. El rendimiento de un grupo se expresa por la distribución de las medidas que los sujetos que lo componen obtienen con unos instrumentos.

El investigador establece el rendimiento de un grupo al mostrar el conocimiento de los escolares que lo integran mediante unos instrumentos.

El interés en comparar el rendimiento entre grandes poblaciones, o las variaciones en una misma población en contextos y momentos distintos, lleva a la estandarización de las pruebas.

La preocupación social por mantener un alto nivel en el dominio de los ciudadanos sobre los conocimientos lleva a mantener un control permanente del rendimiento aritmético escolar en las sociedades modernas y a una subsiguiente adopción de medidas correctoras. También es necesaria una revisión crítica de los instrumentos.

## **5. Evaluación**

La evaluación en educación ha evolucionado desde una preocupación inicial y simple sobre la medición de logros o proezas para hacer un juicio sobre los estudiantes hasta el interés común y creciente por obtener información para crear líneas de conducta y elaborar programas de decisión.

La evaluación de los estudiantes se ha realizado en las escuelas a lo largo de la historia, pero los modelos contemporáneos, tanto para la obtención de datos sobre rendimiento como el uso de la información para la administración y para los programas, así como para la toma de decisiones, se ha desarrollado en el último cuarto de siglo XX (Romberg 1989).

## 5.1. Sobre el Concepto General de Evaluación

Si atendemos a la raíz etimológica del término evaluación, podemos comprobar que este proviene del latín *valere* que significa la acción de tasar, valorar, justipreciar.

El Diccionario de la Real Academia Española (1992) recoge los términos:

- *Evaluación*, acción y efecto de evaluar.
- *Evaluar*, señalar el valor de una cosa. Estimar, apreciar y calcular el valor de una cosa. Estimar los conocimientos, aptitudes y rendimiento de los alumnos.

En la cultura anglosajona aparecen dos vocablos diferentes para referirse a dos aspectos de la noción general de evaluación: *Assessment* y *Evaluation*. El término *evaluation* sirve para referirse a la emisión de un juicio sobre el valor de algo. El término *assessment*, expresa la consideración de todos los datos relativos a una persona o situación para emitir un juicio o una opinión sobre la totalidad. Entendemos por tanto que el término *evaluation* es utilizado en el sentido de *la evaluación sumativa* orientada a la clasificación y la promoción, y el término *assessment* en el sentido de *la evaluación formativa* basada en el asesoramiento y la orientación.

Hoy día, la evaluación es un campo de estudio e investigación que se plantea cuestiones mucho más amplias que las que se derivan de la pregunta: ¿Cómo calificar a los alumnos? La evaluación en el periodo de la educación obligatoria no debe utilizarse exclusivamente para la promoción de los alumnos sino que debe servir para detectar situaciones anómalas en los aprendizajes proyectados (diagnóstico), para proceder a un tratamiento específico que permita superar esas limitaciones (remedio). Hacer sinónimos los términos evaluación y exámenes es una simplificación, producto de una identificación confusa, que lleva a un rechazo acrítico de todo enjuiciamiento y a una valoración estrecha de los procesos de enseñanza y aprendizaje escolar.

Los evaluadores contemporáneos han desarrollado diversas aproximaciones a la evaluación en función de los diversos fines, objetos, contextos, posiciones filosóficas, epistemológicas, metodológicas y otras consideraciones, lo cual ha llevado a diversas clasificaciones para las distintas definiciones de evaluación utilizadas.

Lukas y Santiago (2004), presentan en su libro *Evaluación Educativa* una de estas clasificaciones desde la Psicología de la Educación. Para ello agrupan las diversas definiciones de evaluación en las cinco categorías siguientes:

*Categoría 1: Definiciones que contienen especificaciones sobre los logros de los alumnos después de un proceso de instrucción.* Se basan en objetivos preestablecidos y sólo tienen en cuenta los resultados de los alumnos, entre ellas destacan las definiciones dadas por:

Tyler (1950, 1970): “Proceso para determinar en qué medida los objetos educativos han sido alcanzados”.

Provus (1971): “Comparación de las ejecuciones o comportamientos de los alumnos con ciertas normas para determinar si se debe llevar a cabo, se continúa o se concluye el proceso de enseñanza”.

Bloom, et al. (1975): “Reunión sistemática de evidencias a fin de determinar si en realidad se producen ciertos cambios en los alumnos y establecer el cambio en cada estudiante”.

Mager (1975): “Acto de comparar una medida con un estándar y emitir un juicio basado en la comparación”.

Lafourcade (1977): “Etapa del proceso educacional que tiene por fin controlar de modo sistemático en qué medida se han logrado los resultados previstos en los objetivos que se hubieran especificado con antelación”.

Gronlund (1985): “Proceso sistemático de recopilar, analizar, e interpretar información para determinar el grado en que los alumnos han logrado los objetivos instructivos”.

*Categoría 2: Definiciones que hacen referencia a la determinación del mérito o valor.* Implican la emisión de un juicio valorativo sobre la capacidad de un programa o de un equipo de personas para lograr lo que pretende y responder a las necesidades planteadas. Algunas de las definiciones señaladas son:

- Suchman (1967): “Procesos para emitir juicios de valor”.
- Scriven (1967): “Proceso por el que se determina el mérito o valor de alguna cosa”.
- Stufflebeam y Shinkfield (1987): “Proceso sistemático planificado, dirigido y realizado con el fin de ayudar a un grupo de clientes a juzgar y /o perfeccionar el valor y/o mérito de algo”.
- La definición del Joint Committee (1988 y 1998): “Investigación sistemática del valor o mérito de algún objeto”.

*Categoría 3: Definiciones de evaluación que se basan en la toma de decisiones.* Esta conceptualización se produce a partir de las ideas de Cronbach (1963) trasladando ideas empresariales y comerciales para las mejoras de productos, a la evaluación educativa. Algunas de las definiciones señaladas son:

- Cronbach (1963): “Proceso de recopilación y utilización de la información para la toma de decisiones”.
- Tenbrink (1984): “Proceso de obtener información y usarla para formar juicios que a su vez se utilizarán para la toma de decisiones”.
- Stufflebeam y Shinkfield (1987): “Proceso de identificar, obtener y proporcionar información útil y descriptiva acerca del valor y el mérito de las metas, la planificación y el impacto de un objeto determinado, con el fin de servir de guía para la toma de decisiones, solucionar los problemas de responsabilidad y promover la comprensión de los fenómenos implicados”.
- De Miguel (2000): “Proceso sistemático de búsqueda de evidencias para formular juicios de valor que orienten a la toma de decisiones”.

Categoría 4: *Definiciones que subrayan la importancia de la metodología.*

Entre ellas destacan:

- Berk (1981): “Es la aplicación del método científico para recoger la información fiable y válida necesaria para tomar decisiones sobre un programa educativo”.
- Ruttman (1984): “Es la utilización del método científico con la intención de tomar decisiones sobre la implementación de un programa y medir sus resultados”.
- García Llamas (1995): “Proceso de identificación, recolección y tratamiento de datos para obtener una información que justifique una determinada decisión”.

Categoría 5: *Definiciones que intentan sintetizar y aglutinar los aspectos anteriores.* En esta categoría destacamos:

- Pérez Juste (1986): “Acto de valorar una realidad, formando parte de un proceso cuyos momentos previos son los de fijación de las características de la realidad a valorar, y de recogida de información sobre las mismas y cuyas etapas posteriores son la información y la toma de decisiones en función del juicio de valor emitido”.
- Casanova (1995): “Recogida de información rigurosa y sistemática para obtener datos validos y fiables acerca de una situación con objeto de formar y emitir un juicio de valor con respecto a ella. Estas valoraciones permitirán tomar las decisiones consecuentes en orden a corregir o mejorar la situación evaluada”.
- Jiménez (1999): “Proceso ordenado continuo y sistemático de recogida de información cuantitativa y cualitativa, que responde a ciertas exigencias (válida, creíble, dependiente, fiable, útil,...) Obtenida a través de ciertas técnicas e instrumentos, que tras ser cotejada o comparada con criterios establecidos nos permite emitir juicios de valor fundamentados que facilitan la toma de decisiones que afectan al objeto evaluado”.

- Bordas (1999): “Detectar cómo es una realidad educativa (alumno, grupo clase, centro educativo o formativo, planificación curricular, sistema educativo, etc.) sea desde una perspectiva cualitativa, cuantitativa o mixta, con el fin de tomar decisiones”.

## 5.2. Investigación sobre Evaluación en Educación Matemática

Desde la educación matemática Rico, et al. (1993) efectúan una revisión y clasificación de la extensa documentación e información disponible sobre investigación en evaluación en matemáticas, con el fin de disponer de una bibliografía organizada y actualizada, que recogiese las principales aportaciones realizadas en nuestro país. Los resultados de esa búsqueda dan lugar a la confección de la *Base de datos de Bibliografía de Investigación sobre Evaluación en Matemáticas* que comprende 313 documentos (Base de datos BIEM).

Tortosa y otros (1995) nos presentan los resultados de la investigación desarrollada en el Seminario de Currículo e Investigación en Educación Matemática (CIEM) por profesionales de la enseñanza preocupados por la Educación Matemática dentro del área de Didáctica de la Matemática fundamentalmente en los niveles escolares de la Educación Obligatoria. Este documento presenta los resultados de una revisión bibliográfica sobre los diferentes conceptos de evaluación y de su clasificación por categorías; para ello se elaboran mapas conceptuales de las principales definiciones de evaluación. También se presentan y analizan los trabajos preparatorios para el diseño de una encuesta sobre creencias de los profesores de matemáticas relativas al concepto de evaluación.

Gil (1999) señala cuatro dicotomías que destacan en los documentos revisados en la base de datos BIEM:

- Dicotomía entre documentos teóricos y prácticos.
- Dicotomía entre documentos centrados en análisis sistémico de la evaluación y aquellos dedicados a la consideración instrumental.
- Dicotomía entre evaluación como juicio y la evaluación como valoración y análisis comprensivo.
- Dicotomía entre la multiplicidad de fuentes de información y los estándares de calidad establecidos para instrumentos de evaluación (fiabilidad y validez).

En base a estas cuatro dicotomías se establecen seis categorías relativas a los contenidos de los documentos e informes de investigación sobre evaluación. Su denominación se hace por medio de seis descriptores o términos clave: *teoría, curricular, métodos-criterios, instrumentos, validez y valoración*.

En la categoría de *Teoría* se agrupan aquellos documentos que presentan de manera sistemática reflexiones o ideas con las que se organiza el concepto

de evaluación y nociones conexas tales como fines y funciones de la evaluación, modos y criterios de evaluación, logros y creencias relativas a la evaluación y las que estudian las relaciones entre estos conceptos.

En la categoría *Curricular* se agrupan los documentos que se refieren a las relaciones entre la evaluación y el currículo de matemáticas. Se incluyen en esta categoría trabajos referidos a algún elemento dentro del sistema educativo, en el que se analizan, proponen y comparan innovaciones curriculares; trabajos que tratan de logros de alumnos, dificultades de aprendizaje; trabajos sobre competencias del profesor, inclusión de temas, diferentes tratamientos de temas, desarrollo y clasificación de ítems según una taxonomía; trabajos sobre la evaluación como parte del currículo; estudios comparativos; trabajos sobre la evaluación de un currículo como programa de formación; actividades complementarias al trabajo en el aula y otros similares.

En la categoría de *Métodos-Criterios* se incluyen aquellos trabajos en los que se aportan pautas teóricas o prácticas para la construcción de una prueba de evaluación y para realizar valoraciones relativas a las actuaciones de los alumnos ante tareas concretas.

En la categoría de *Instrumentos* se incluyen los trabajos que aportan algún tipo de técnica o prueba para recoger información: describen una prueba, test, problemas u otros instrumentos usuales para evaluar en matemáticas; describen como se construye un instrumento o reflexionan sobre su utilidad, etc.

En la categoría de *Validez* se incluyen los documentos que aportan alguna reflexión sobre la validez de un instrumento, de la validez de la corrección realizada por profesores, de la validez del proceso de evaluación y otros.

Y en la categoría de *Valoración* se incluyen los trabajos en los que se realizan juicios relativos a los logros o deficiencias de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, sobre las competencias de los alumnos y sobre sus actitudes hacia las matemáticas; los que hacen juicios sobre instrumentos, sobre los resultados de un estudio, sobre la formación o información recibidas y como se pone de manifiesto al aplicar un instrumento, los juicios derivados por diferencias de carácter social y trabajos donde se considera la actuación de un individuo o grupo en una variedad de contextos.

Con posterioridad al estudio de Rico y colaboradores y también desde la investigación e innovación sobre evaluación en Educación Matemática, el National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) publicó en 1996 una recopilación de artículos sobre evaluación (assessment) que habían aparecido en sus publicaciones periódicas que agrupa en cuatro secciones: fundamentos para los cambios en las prácticas de evaluación, mirando exámenes y calificaciones, mirando alternativas de evaluación y mirándonos a nosotros mismos —evaluando nuestra propia eficacia.

En la primera categoría aparecen documentos que proporcionan fundamentación, estructura o puntos de vista sobre los numerosos cambios en

evaluación. En la segunda categoría agrupa documentos que aportan ideas en torno a los aspectos comunes de la evaluación. En la tercera categoría agrupa documentos que ofrecen sugerencias para comenzar y documentos sobre formas alternativas de evaluación y en la última categoría agrupa documentos para reflexionar sobre el estado actual del movimiento de evaluación y juzgar su progreso en respuesta a las demandas de cambio.

Al final de la publicación aparecen un listado de los 107 artículos clasificados por sus términos clave. En estas publicaciones se recoge una fuerte preocupación por introducir las nuevas prácticas para la evaluación que propugna el NCTM con documentos como *Assessment Standards for School Mathematics* (1985), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989) y *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991).

Howson, Keitel y Kilpatrick (1981) reconocen la dificultad para la evaluación del currículo debido a la imposibilidad de aislar éste del contexto político en que se toman las decisiones educativas. Estos autores llevan a cabo una clasificación sobre las diversas aproximaciones detectadas en los estudios sobre evaluación del currículo de matemáticas, basada en metáforas.

En un esfuerzo de síntesis reducen las metáforas utilizadas para la evaluación de un currículo a tres:

Metáfora técnica. La evaluación es un *proceso de ingeniería*: ya que la escuela es una fábrica y la educación es un proceso de producción. El currículo es visto como un instrumento para convertir materia prima en producto acabado. El proceso de evaluación viene dado por unos indicadores sobre la calidad del instrumento.

Metáfora clínica. La evaluación es un *proceso clínico*, el currículo se concibe como un tratamiento de mejora y desarrollo para unos pacientes especiales, los alumnos. La evaluación mide la eficacia del proceso completo del diagnóstico, tratamiento y curación mediante la tasa de salud conseguida.

Metáfora comunicativa. La evaluación es un *proceso periodístico* mediante el uso de diversos métodos de observación procedentes de la Sociología y de la Etnografía se estructura, sintetiza y resume información sobre el currículo para diferentes grupos sociales.

### 5.3. Evaluación en Educación Matemática

En un análisis histórico Kilpatrick (1991) nos presenta diferentes visiones del desarrollo evaluador de las matemáticas donde se refleja quién era el sujeto que recibía la instrucción y qué tipo de instrucción se recibía en varios periodos, que esquematiza en los siguientes:

1. Una visión centrada en *el desarrollo de las destrezas cognitivas* según *grados de excelencia*, asociada a una idea de las matemáticas como tópico organizado en forma jerárquica y regulador de la educación.

2. Evaluación como *regulación de las habilidades mentales*, influida por los estudios de tipo psicológicos de inicios del siglo XX, donde los tests se convierten en barómetros de la instrucción (Wolf, 1973, citado por Kilpatrick, 1991).
3. Centrado en pedagogía por *objetivos*, con las *jerarquías de conducta educacional* que promueven las famosas taxonomías de objetivos (Bloom, 1956).
4. La evaluación como modo de control social que se ejerce desde muy antiguo para mostrar un *grado de madurez comparativo* que permite a algunos disputar y competir por un puesto educativo.
5. Una etapa marcada por el positivismo y las influencias de la psicometría pretendiendo un sistema de evaluación eficiente, que *diagnostique y sitúe la habilidad de los estudiantes*.

El foco de atención para la evaluación se centra en el aprendizaje y viene vinculado con algún marco teórico. Según las opciones, se evalúan: destrezas cognitivas, habilidades mentales, objetivos de aprendizaje, madurez o habilidad. Según el caso tratan de establecer: grado de desarrollo, regulación, jerarquía de conducta, grado comparativo, o diagnóstico y situación de una habilidad.

Desde una teorización alternativa centrada en el conocimiento matemático, Webb (1992) estudia la necesidad de una teoría propia de la valoración en matemáticas para favorecer el desarrollo de la Educación Matemática. Para llevar a cabo su propuesta Webb plantea que un marco teórico de este campo debe satisfacer los siguientes objetivos:

- Servir para describir, explicar y predecir aspectos y conceptos propios del área de matemáticas.
- Clarificar los términos propios de la evaluación en matemáticas.
- Incluir modelos que aporten una estructura concreta para la aplicación de las distintas evaluaciones así como su interacción con los resultados.
- Destacar la importancia del conocimiento de dominio específico, que no puede ser reemplazado por destrezas cognitivas generales.

Esta teoría se propone dar respuesta a cuatro cuestiones generales:

- ¿Cómo se relaciona lo específico del contenido matemático, que se valora, en relación con las respuestas obtenidas?
- ¿Cómo se aplican las nociones de validez y fiabilidad cuando las pruebas de evaluación no son tests sino otro tipo de pruebas?
- ¿Cómo se agrega la información procedente de la aplicación de diversos instrumentos de evaluación?
- ¿Cuál es la relación entre la evaluación del conocimiento matemático y la evaluación de las destrezas cognitivas generales?

Webb organiza su teoría sobre la evaluación matemática en dos principios:

- Especificar el contenido de la evaluación.
- Formular la evaluación.

La especificación del contenido muestra un propósito para la evaluación, una concepción de las matemáticas y una teoría del aprendizaje, estos parámetros pueden ser variables pero es fundamental que el método de evaluación refleje una concepción subyacente de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje, por tanto, influirá en los resultados del aprendizaje.

Para la formulación de la evaluación considera las cuatro componentes siguientes:

- Situación de evaluación.
- Respuesta a esta situación.
- Análisis de la respuesta.
- Interpretaciones de los resultados.

La interdependencia de estas cuatro componentes implica que la especificación de una afecta a las otras tres. Las relaciones de estas cuatro componentes, determinarán la validez y consistencia de los resultados.

El marco teórico que propone Webb es amplio y detallado, establece una dialéctica entre diversos polos en tensión: entre la especificidad del conocimiento matemático y el carácter general de la instrucción, entre el dominio de contenidos específicos y las destrezas cognitivas generales, entre la utilidad de las valoraciones para mejorar y profundizar en el conocimiento de los sujetos y su inevitable utilización como filtro social.

Estos dos trabajos muestran dos tradiciones complementarias en educación matemática: la tradición cognitiva, basada en unas expectativas de aprendizaje que se expresan en términos conductuales o cognitivos (desarrollo de destrezas, habilidades, madurez, logros de objetivos, etc.) y la tradición conceptual centrada en los contenidos matemáticos. La clasificación de los conocimientos matemáticos presentada en el Apartado 5.1 muestra un avance que permite contemplar la riqueza y complejidad cognitiva de los aprendizajes que se evalúan, conjuntamente con la estructura de los conocimientos evaluados. En el momento actual el binomio capacidades–contenidos es indisoluble en educación matemática. Por ello, desde nuestra perspectiva, es factible evaluar las destrezas aritméticas, o bien —en otro extremo— evaluar las competencias aritméticas de los escolares. Carece de sentido en este marco afirmar que se evalúan sólo destrezas o bien que se evalúa sólo aritmética. Nuestra posición es que la evaluación se refiere a expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, que se expresan en términos de capacidades o de competencias y que están vinculadas con conocimientos matemáticos específicos.

Veremos como, recientemente, el marco teórico de la evaluación basado en un enfoque funcional de las matemáticas escolares se sustenta sobre tres componentes: competencias básicas, conocimientos y tareas o problemas contextualizados, como ocurre en el estudio PISA (Rico, 2006). La consideración de las tareas sobre las que se centra esta investigación y el papel de los tests lo tratamos en el Apartado 6.5 y volveremos sobre el mismo en el capítulo dedicado a describir el instrumento de evaluación utilizado.

#### **5.4. Fines de la Evaluación**

Tortosa y otros (1995) sostienen que la clave principal de un concepto de evaluación sólidamente fundamentado y construido, está sustentada en el fin para el que se lleva a cabo esa valoración, en la finalidad a la que sirven los juicios que promueve y en la forma que estos juicios se utilizan con posterioridad para tomar decisiones de cambio, mejora o innovación sobre la realidad.

Las finalidades de la evaluación constituyen el conjunto de principios o intenciones de orden explícito o tácito que orientan una tarea, controlan su desarrollo y permiten llevar a cabo acciones organizadas de carácter correctivo o informativo en torno de su actuación. Una evaluación que no tenga clara sus intenciones será una evaluación confusa sobre la que difícilmente se podrán aportar informaciones valiosas o mostrar la dirección de los cambios. Ni siquiera servirá para elaborar una valoración adecuada de sus consecuencias. Prescindir de la utilidad de una evaluación es como renunciar a su propia esencia: cuando evaluamos siempre tenemos razones para hacerlo (Gil, 1999).

Desde una visión centrada en el desarrollo de destrezas y la evaluación de la consecución o no de las destrezas por los alumnos, Scriven (1967) introdujo una distinción importante entre evaluación sumativa y evaluación formativa. La evaluación formativa actúa de forma continua y su papel consiste en diagnosticar e informar para permitir la recuperación de aquellos aspectos en los que se comprueben deficiencias; también sirve para que el profesorado modifique su orientación e incorpore elementos nuevos en el proceso de enseñanza. La evaluación sumativa expresa la agregación de los logros conseguidos por los alumnos en diversos aspectos de un concepto y suele dar lugar a una calificación. También la evaluación tiene una importante componente orientativa, que ayuda al alumno a explorar sus características cognitivas y al profesor a explicitar las estrategias más idóneas en su trabajo con los alumnos, lo que se denomina estilo de enseñanza (Rico, 1997b). Esta distinción da lugar a dos fines diferentes del concepto de evaluación. En nuestra investigación nos situamos en una perspectiva formativa para la evaluación, ya hemos reiterado que nuestro objeto de evaluación no son los escolares sino el currículo, por ello nuestra aproximación es formativa y no sumativa.

Siguiendo a Webb (1992) este autor también sostiene que los fines de la evaluación no se agotan en el conocimiento individual de los estudiantes.

Considera que hay múltiples finalidades en la evaluación en matemáticas y las tipifica en cuatro grupos:

Grupo 1: Una primera finalidad consiste en utilizar la evaluación como herramienta para obtener evidencias y retroalimentación sobre lo que los estudiantes conocen y son capaces de hacer en matemáticas.

Grupo 2: Una segunda finalidad consiste en expresar lo que se valora en relación con lo que los estudiantes deben conocer, hacer o creer.

Grupo 3: Una tercera finalidad de la evaluación es proporcionar información a los gestores que deben tomar decisiones, incluyendo los que están dentro del sistema educativo, los especialistas gubernamentales y otros.

Grupo 4: Una cuarta finalidad de la evaluación es proporcionar información sobre la efectividad del sistema educativo como un todo, es decir el rendimiento escolar.

Desde esta perspectiva nuestro estudio se ubica en los grupos tercero y cuarto. A su vez Niss (1993) considera tres propósitos para la evaluación:

1. Proveer información para:
  - El alumno sobre su rendimiento.
  - El profesor, sobre el desarrollo de los alumnos y del grupo.
  - El sistema sobre rendimiento de los alumnos y para la evaluación de los profesores.
2. Tomar decisiones y acciones sobre la promoción de alumnos y profesores.
3. Mostrar la realidad social y controlar el desarrollo del sistema.

Vemos así que, al diversificar los fines, los expertos amplían los objetos de posible evaluación, e incluyen cualquier componente del sistema educativo: alumnado, profesorado, centros, programas educativos, diseños curriculares y proyectos educativos, materiales y otros. La evaluación de programas, que trataremos posteriormente, considera el currículo como objeto de evaluación. Entre los fines de evaluación de programas destacan el estudio de su eficacia y su comparación longitudinal, consigo mismo a lo largo del tiempo, y transversal, con otros programas alternativos en un espacio temporal dado.

## **5.5. La Evaluación de los Alumnos**

La evaluación de los alumnos es parte de la historia de la educación. Evaluar ha consistido y consiste, en algún modo de hacer explícito el aprendizaje alcanzado por los alumnos en un determinado campo del conocimiento. Durante mucho años el conocimiento alcanzado por los alumnos, su dominio sobre unos determinados conceptos y procedimientos ha sido el principal objeto de la evaluación educativa y ha figurado como foco de atención al considerar los fines y la actividad evaluadora del sistema educativo. Actualmente, como ya hemos

indicado, todas las componentes del sistema educativo son objetos de evaluación, sin que esto signifique que la evaluación del alumnado deje de ser importante.

Por otra parte, las concepciones sobre la evaluación de los alumnos, sobre los conocimientos y sobre los procedimientos que se evalúan y, también, sobre la forma de llevar a cabo la evaluación han variado a lo largo del tiempo. Presentamos dos estrategias innovadoras de evaluación:

La de Webb (1992), que considera la evaluación de los alumnos como parte integral de la instrucción y señala algunas opciones:

- El profesor debe comprender la estructura del contenido y utilizarla para definir expectativas de aprendizaje.
- El profesor debe ser sensible a los procesos que los estudiantes utilizan para aprender, a las etapas del desarrollo y a los procesos disponibles para facilitar ese aprendizaje.
- La evaluación tiene que ser, en primer lugar, un proceso de recogida de información sobre el conocimiento del estudiante y, en segundo lugar, debe dotar de significado a esta información.
- La evaluación ha de emplearse para tomar decisiones documentadas durante la instrucción sobre la base de la información disponible acerca de lo que el estudiante conoce y lo que se está esforzando por conocer.

En su teoría sobre la evaluación del conocimiento matemático de los estudiantes, Webb considera que para determinar el funcionamiento de un individuo o grupo en matemáticas o en su aplicación, se requiere considerar su actuación matemática en una variedad de contextos, incluyendo conocimiento de las matemáticas y disposición hacia las matemáticas. En esta revisión, Webb establece que son necesarios tanto los métodos cuantitativos como los cualitativos para lograr la consideración comprensiva de ese funcionamiento, de modo que las conclusiones se hagan sobre la base de la información obtenida combinando diversas fuentes.

Reconociendo la tradición evaluadora norteamericana, Webb establece que los tests son instrumentos de valoración cuantitativa importantes, si bien señala que ellos solos no agotan las posibilidades de valoración. En esta tradición, *un test es un procedimiento sistemático para observar, descubrir y describir el comportamiento, con ayuda de escalas numéricas o categorías prefijadas; es un instrumento muy potente para la valoración en matemáticas*. No se puede reducir la noción de test a las técnicas usuales de papel y lápiz, sino que esta noción es más amplia e incluye cuestionarios para obtener informes sobre actitudes, procedimientos para observar la conducta y otros, que han resultado de la evolución de estos instrumentos en las últimas décadas. Una característica que mantienen estos instrumentos es que usualmente,

proporcionan sus resultados mediante una puntuación singular, o un perfil de puntuaciones.

Webb critica el uso exclusivo de tests para la valoración del conocimiento matemático de los escolares. Relacionada con los tests está la medición. En educación, el concepto de medición procede de los tests psicológicos y de la tradición conductista. La medición en educación se restringe a la descripción cuantitativa de la conducta de los estudiantes. Es difícil, empleando únicamente puntuaciones, describir cómo un estudiante establece relaciones entre diferentes conceptos matemáticos. Una visión actual de la valoración en matemáticas ha de incluir métodos cualitativos, entrevistas y observaciones, así como la opinión del profesor, de modo que se mejore la capacidad para describir estos importantes aspectos del conocimiento matemático. La consideración de los tests como instrumentos adecuados para establecer en su integridad el conocimiento individual de los estudiantes está, hoy día, superada.

El punto de vista actual de la evaluación de los alumnos se centra según Rico (1997b) en que *para evaluar hay que comprender*, esto supone que se ha hecho un juicio razonado de algún aspecto de un trabajo desarrollado por los alumnos ante una tarea; se trata de una visión distinta de la convencional, en la que no se trata de comprender ningún proceso de aprendizaje, sino de establecer un éxito o un fracaso. Considera la legitimidad del error, como parte constitutiva de los procesos de aprendizaje y de la elaboración del conocimiento objetivo, se sustenta en una posición epistemológica que trata de fomentar el análisis y la consideración crítica del conocimiento eludiendo la tendencia a culpabilizar a los escolares de la comprensión deficiente, ayudándoles a detectar tales deficiencias y buscar vías para su superación.

Para este autor un nuevo enfoque para la evaluación debe discutir y poner en claro varias cuestiones relativas a la legitimidad, objetos y funciones de la evaluación, cuestiones que se plantean del siguiente modo:

- ¿Por qué valorar el trabajo de los alumnos?
- ¿Qué hay que valorar?
- ¿Cómo hay que valorar?
- ¿Qué decisiones deben afectar a la evaluación?

A la primera pregunta responde considerando tres destinatarios:

- Para los alumnos: informarles como ha realizado determinada tarea, determinar el grado de asimilación de un concepto, el dominio de una destreza, la habilidad en la elección de un procedimiento y el uso y manejo de estrategias.
- Para el profesor: satisfacer el interés de conocer lo que la clase puede hacer y lo que no puede hacer, determinar los niveles generales en los que se encuentran sus alumnos y la diferencias entre ellos, localizar los errores

usuales aún no superados y valorar el rendimiento logrado por el grupo respecto de un determinado tópico.

- Los padres como los administradores educativos, las autoridades locales y las asociaciones de profesores tienen intereses en una evaluación lo más completa posible del aprendizaje realizado por los alumnos.

A la segunda pregunta ofrece dos respuestas:

- En el sentido de qué actividades matemáticas deben considerarse prioritarias para establecer un juicio sobre los alumnos opina que se pueden dar multitud de respuestas válidas: precisión, resultados, claridad de pensamiento, dominio en la ejecución de técnicas y destrezas, método de trabajo, tiempo en el desempeño de las tareas, esfuerzo personal, etc.
- En el sentido que parte de la actividad de un alumno es la adecuada para emitir un juicio sobre su competencia matemática, la consideración se debe centrar en procurar que la evaluación no se haga atendiendo a un único tipo de criterios y actividades.

A la tercera pregunta, responde:

Las pruebas de papel y lápiz (tests, pruebas para el desarrollo más extenso de cuestiones, etc.) pueden poner de manifiesto fácilmente el conocimiento de hechos, el dominio en la ejecución de destrezas, comprobar el conocimiento de enunciados, definiciones y propiedades, junto con algunas secuencias de razonamiento pero no es posible comprobar la comprensión real de los conceptos, el dominio de las estructuras conceptuales, la capacidad personal de razonamiento y la habilidad en la elección y desarrollo de estrategias. Todos estos aspectos son tan importantes o más que los primeros, quizás el mayor inconveniente para su control está en que no disponemos de instrumentos suficientemente contrastados para su realización. Sin embargo, es posible hacer una valoración bastante aproximada de las competencias señaladas mediante un seguimiento del trabajo individual y colectivo que se realiza en el aula.

Respecto a la cuarta pregunta, ¿qué decisiones deben afectar a la evaluación?, señala las funciones del profesor de la enseñanza obligatoria y reivindica que las matemáticas deben abandonar el papel de filtro y selección que, tradicionalmente, han desempeñado en el sistema escolar.

## 5.6. Evaluación de Programas

Siguiendo a Romberg (1989), la tendencia de evaluación de programas surgió en 1970 cuando especialistas de disciplina distintas a la Psicología experimental fueron invitados a participar en evaluaciones educativas Michel Young especialista de información en 1975, Michel Apple especialista en antropología en 1979, entre otros. Estos acercamientos de especialistas de

diversas materias aportan a la evaluación, los métodos de recogida de información y análisis de las diferentes disciplinas. Estos métodos se diferencian entre sí en muchas dimensiones.

Considera que son cuatro las principales de estas dimensiones que destacan:

- El papel del evaluador.
- El papel del cliente.
- El diseño del conjunto.
- El enfoque.

Una consecuencia para el enfoque del proceso fue la especificación de cuatro etapas de evaluación:

1. Etapa del diseño del programa, lo cual implica desarrollar unas necesidades de valoración.
2. Etapa de creación del programa, reflejado en la recogida de datos formativos para mejorar el programa
3. Etapa de implementación del programa, que consiste en demostrar las diferencias entre los programas pretendido y realizado, así como asegurarse de que los servicios de apoyo necesario están disponibles.
4. Etapa iluminativa, lo que supone una inspección profunda de como el producto se usa hoy en día.

Otra consecuencia fue el uso de una estrategia convergente como por ejemplo, usar diferentes modelos de evaluación con el mismo programa.

Una tercera consecuencia es que los expertos en evaluación, comienzan a pedir instrumentos mejores y diferentes para recoger información del rendimiento de los estudiantes.

Desde un plano general y sintetizando diferentes definiciones dadas por diversos autores de evaluación de programas, Lukas y Santiago (2004) citando a Pérez Juste (2000 y 2002) y De Miguel (2000) nos dicen que en estas definiciones se distinguen tres elementos o componentes básicos que caracterizan la evaluación de programas y la hacen peculiar con respecto a otros tipos de estudio:

- La recogida de información sobre el programa en cuestión.
- La valoración a partir de criterios y referencias especificadas de antemano.
- La toma de decisiones para promover las mejoras necesarias (utilización de resultados).

De esta manera, la evaluación del programa contribuye a señalar los aspectos débiles y fuertes del programa. Como podemos ver estas caracterizaciones son coincidentes con las etapas señaladas por Romberg.

Estos autores presentan una clasificación de los diversos enfoques desde los que se puede realizar la evaluación de programas:

1. Desde la finalidad de la evaluación:
  - Los basados en la evaluación de resultados.
  - Los orientados a las audiencias implicadas.
  - Los enfocados a las decisiones.
  - Los basados en costos–resultados.
2. Desde los criterios de valoración:
  - Los centrados sobre la eficacia, cuyos criterios programa se fundamentan en la cantidad y calidad de los objetivos logrados.
  - Los fundamentados sobre la eficiencia, cuyo criterio de valoración es la relación de beneficios (resultados) obtenidos en función de los recursos.
  - Los fundamentados en los participantes, cuyo criterio de valoración es la respuesta que ofrece a las necesidades, intereses y expectativas de los que participan en el mismo (efectividad).
  - Los profesionales, cuyos criterios los establecen los propios evaluadores.
  - Los orientados a la calidad.
3. Desde el “rol” de los evaluadores:
  - Los modelos de evaluación ex ante/ex post. El momento antes o después de comenzar el programa.
  - Los modelos de evaluación interna o externa
  - Los orientados hacia la evaluación sumativa o formativa.

Kilpatrick (1979) indica que el proceso de evaluación, en esencia, es bastante sencillo. Evaluar es formar un juicio sobre el valor, o la importancia de alguna cosa. Dado un objeto para ser evaluado, se elige una dimensión de valor, se busca información acerca del comportamiento del objeto con respecto a esa dimensión, y se aplica una escala de valores a la información obtenida. En teoría es simple, pero en la práctica educativa nunca lo es, y ello por dos razones:

La primera razón es que el objeto no es homogéneo ni estático. La habilidad de un alumno, la capacidad de un profesor para cierta cosa, la conveniencia de un currículo, todo ello son fenómenos complejos, variables con el tiempo y con la situación.

La segunda razón del porqué la evaluación educativa es tan complicada es que la evaluación educativa, como la evaluación en sí es un proceso socio–político. Las evaluaciones se realizan porque alguien debe tomar una decisión.

Al analizar las tendencias y cuestiones de evaluación con respecto a la educación matemática, hay que procurar clarificar los propósitos de la evaluación, y, en base a ellos, ver las decisiones y las acciones que deben tomarse. Hay que prestar especial atención al equilibrio entre los derechos del estudiante a desarrollarse como persona y la necesidad de la sociedad de contar con ciudadanos competentes en matemáticas.

El currículo de matemáticas, considerado como un objeto, es altamente dependiente de situaciones específicas, por lo que desecha la idea de evaluar un currículo globalmente. Si pueden evaluarse las actividades y productos del proyecto curricular (evaluación de la enseñanza, evaluación de los materiales para la enseñanza, evaluación del aprendizaje de las matemáticas, etc.).

Howson, Keitel y Kilpatrick (1981) subrayan que en educación, todo maestro evalúa su enseñanza de un modo u otro, ya que sólo esto le ayuda a decidir qué hacer en el futuro. Los propios maestros son evaluados por sus empleadores y también por sus estudiantes. La respuesta a la pregunta ¿qué es evaluar? para estos autores es una idea básica y simple: evaluar es el proceso de juzgar el valor o el mérito de algo. Para evaluar, se necesita un objeto, una escala de valores y algunos medios de reunir información acerca del objeto tal que la escala de valores pueda ser aplicada a la información. La evaluación curricular es especialmente difícil por dos razones:

La primera razón es que un currículo es una abstracción que sólo puede entreverse a través de medios tales como el análisis de la exposición de sus fines, la observación de su contenido impartido en el momento y la evaluación del aprendizaje del alumno.

La segunda razón es que la evaluación curricular es difícil de aislar del contexto socio-político en que se forman las decisiones educativas.

Consideran que se pueden evaluar los proyectos curriculares en función de sus fines, objetivos, contenidos, y la evaluación del aprendizaje de los alumnos. Presentan la evaluación efectuada a diferentes proyectos curriculares.

Rico (1997) considera que todo programa debe llevar asociados mecanismos de control. Estos mecanismos de control deben, por un lado, valorar el grado de eficiencia de los agentes en la ejecución del plan de formación previsto y por otro, el funcionamiento global del sistema diseñado para la realización del plan. Considera por tanto dos tipos de evaluación: la evaluación de agentes: profesores y alumnos y la evaluación del sistema.

## **6. Evaluación durante el periodo de desarrollo del Currículo LOGSE**

Recogemos en este apartado el significado que se otorga a la evaluación en el Diseño Curricular Base así como algunas evaluaciones llevadas a cabo en el marco de la LOGSE.

## 6.1. Evaluación en el Diseño Curricular Base

Como ya hemos mencionado, los principios generales del currículo derivado de la Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) se elaboran a partir de los Diseños Curriculares Base de Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria (1989). En estos documentos se establecen, con detalle y para las diversas disciplinas, los fundamentos y las directrices generales que sustentan el currículo de Educación Primaria y Secundaria. En particular se detallan los objetivos y contenidos del currículo de matemáticas y las orientaciones para la evaluación en matemáticas.

Estos principios se basan en las ideas constructivistas que lo inspiran, estos principios propician las siguientes implicaciones para la evaluación de los estudiantes (Gil 1999):

- La evaluación permite recoger información, realizar juicios de valor, orientar y tomar decisiones en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- La evaluación tiene por objeto valorar capacidades.
- Las capacidades se expresan en los objetivos de etapa y área.
- Las capacidades no se evalúan directamente, pero sí indirectamente, a través de los indicadores necesarios.
- La evaluación no tiene por objeto ni las conductas ni los rendimientos.
- La evaluación debe ser continua e individualizada, debe tener carácter formativo y orientación criterial.
- La evaluación tiene como finalidad orientar al alumno y guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- También se contempla la necesidad de realizar evaluaciones de etapa o ciclo.
- No distingue entre evaluación y valoración.

*Estas implicaciones tienen carácter principalmente programático y no responden a la realidad de lo que ocurre en la mayor parte de las aulas; conforme se avanza en los niveles del Sistema Escolar la realidad de la evaluación es muy distinta de lo que presenta el DCB.*

*En lo que se refiere al área de matemáticas, la práctica real de la evaluación en el aula considera preferentemente las conductas que expresan un alto dominio de hechos, definiciones y conceptos así como un buen rendimiento en las destrezas de cálculo, razonamiento y representación, que constituyen la práctica total de la evaluación.*

*Por ello, la disparidad entre las previsiones ministeriales —teóricas— y las realidades escolares —prácticas—, se hacen especialmente acusadas en los cursos finales que van a configurar la Educación Secundaria, donde la tradición de identificar evaluación con exámenes, valoración con calificación y orientación con promoción está fuertemente arraigada, y difícilmente da entrada a otras alternativas. Rico (1993).*

## 6.2. Participación en Estudios de la IEA

España se incorpora al tercer estudio *International Assessment of Mathematical Achievement* (TIMSS) de la IEA con la participación de cuarenta y cinco países y cuyas pruebas se efectúan en los años 1994 y 1995, las poblaciones a estudiar fueron tres, los dos cursos con mayor población de 9 años, los dos cursos con mayor población de 13 años y el último curso de la Enseñanza Secundaria. Los primeros informes internacionales de estas evaluaciones empiezan a conocerse a partir del año 1996: Beaton, Martin, Mullis, González, Smith y Kelly (1996); López y Moreno (1996) y Mullis, Martin, Smith, Garden, Gregory, Chrostowski, González y O'Connor (2003).

## 6.3. Diagnóstico del Sistema Educativo Español de 1997

De acuerdo con lo establecido en el artículo 62 de la Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) (hoy denominado Instituto de Evaluación (IE) según el artículo 162 de la Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo, de Educación), es el órgano de la Administración General del Estado dependiente del Ministerio de Educación y Ciencia responsable de la evaluación general del Sistema Educativo. El Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) elabora en 1998 un estudio con el título *Elementos para un diagnóstico del Sistema Educativo Español. Informe Global* (García y otros, 1998).

Los autores de este informe, presentan en el primer capítulo los precedentes en las tareas de diagnóstico y evaluación del Sistema Educativo Español.

Dentro del grupo de Diagnóstico de la Educación en España promovidos por las autoridades políticas (1968–1996) citan:

- El libro blanco de 1969 que precedió a la Ley General de Educación de 1970 al cual consideran como el primer informe crítico que se produce en España sobre el Sistema Educativo en su conjunto.
- El informe de Evaluación de 1976 se trata de un informe solicitado en 1976 por el Ministro Robles Piquer a una comisión presidida por Fernando Suárez que no fue publicado, aunque sí tuvo una circulación restringida (Informe que eleva la Comisión Evaluadora de la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa en cumplimiento del Decreto 186 /76 del 6 de febrero).
- El documento Las enseñanzas medias en España de 1981, que contiene junto a una propuesta de reforma, una evaluación del Bachillerato y de la Formación Profesional.
- El Informe de la OCDE de 1986 sobre la política educativa española (Examen de la política educativa española OCDE, 1996).

- El Libro Blanco de 1989 que fue el prólogo de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

A continuación enumeran diferentes informes sobre resultados:

- Sobre la calidad de la enseñanza (1994).
- La evaluación del Sistema Educativo español, en los informes anuales del Consejo General del Estado.
- El rendimiento de los alumnos (1991–1992).
- Planes de Estudio y Métodos de Enseñanza.
- Administración del Estado y funcionamiento de los centros educativos.
- El Profesorado y su formación.
- Relaciones entre familia y Educación.
- Evaluaciones de los centros y programas educativos realizados por la Inspección de Educación.
- Resultados escolares.

En *Elementos para un diagnóstico del Sistema Educativo Español Informe Global* (García, et al., 1997) se presentan los resultados de esta evaluación en la que intervienen 46.535 alumnos, de los que 20.642 de 14 años pertenecen a 761 centros educativos, mientras que 25893 tienen 16 años y pertenecen a 913 centros educativos; no participaron las comunidades de Andalucía y Canarias; la comunidad del País Vasco por motivos técnicos sólo participó en el Estudio de 14 años.

El Comité Científico del Instituto argumentó, una vez analizadas las capacidades y destrezas que se reflejan en las escalas de rendimiento de cada materia, los valores medios que serían deseables, en un sistema educativo desarrollado, como es el caso del sistema educativo español. Para considerar los resultados del rendimiento de los alumnos satisfactorio, los alumnos de 14 años tendrían que situarse en el nivel 250 y los alumnos de 16 años en el nivel 300.

Los resultados del rendimiento escolar en la Enseñanza Secundaria Obligatoria en matemáticas se diseñaron teniendo en cuenta cinco subáreas:

- Números y Operaciones
- Medida
- Geometría
- Análisis de Datos, Estadística y Probabilidad
- Álgebra y funciones

Como resumen de los resultados de esta evaluación incluimos los porcentajes medios de aciertos por subáreas de matemáticas que recogemos en la siguiente tabla:

Tabla 2

*Porcentajes Medios de Aciertos en Subáreas de Matemáticas*

Subáreas	14 años	16 años
Números y operaciones	46%	54%
Medida	40%	30%
Geometría	44%	44%
Análisis de datos, Estadística y Probabilidad	44%	47%
Álgebra y funciones	40%	60%
Total	44%	49%

Nos presentan una tabla de situación de alumnos por nivel de rendimiento:

Tabla 3

*Alumnos por Nivel de Rendimiento*

Nivel	Situados en cada nivel: 14 años	Situados en cada nivel: 16 años	Superan el nivel: 14 años	Superan el nivel: 16 años
400	—	—	—	—
350	—	3%	—	3%
300	4%	20%	4%	23%
250	24%	39%	28%	62%
200	44%	28%	72%	90%
150	27%	10%	99%	100%
100	1%	—	100%	—

Resumimos finalmente las conclusiones de la investigación:

**A los 14 años**, el resultado global muestra que el 72% de los alumnos supera el nivel 200, lo que implica que son capaces de resolver problemas sencillos de la vida cotidiana con operaciones algebraicas sencillas, estimaciones y redondeos, conceptos intuitivos de estadísticas, interpretar gráficas sencillas, expresar y reconocer fáciles con lenguaje algebraico. Sin embargo un 27% sólo sabe manejar las operaciones algebraicas básicas con números fraccionarios sencillos y un 1% no alcanza las habilidades básicas específicas en los niveles de rendimiento.

Un 28% de los alumnos alcanzan el nivel 250, es decir, pueden resolver problemas sencillos de la vida cotidiana que incluyen relaciones de proporcionalidad numérica y porcentajes, conocen los cuerpos planos, tienen nociones de probabilidad, nociones de la geometría del triángulo y de la semejanza de figuras, resuelven ecuaciones lineales sencillas, estiman la probabilidad en situaciones simples (Ley de Laplace), construyen gráficas sencillas e interpretan tablas de frecuencias; esto significa que el 72% de los alumnos de 14 años no alcanza este nivel.

Un 4% de los alumnos supera el punto de corte 300 por lo que son capaces de, además de lo expuesto anteriormente, utilizar el lenguaje algebraico para resolver problemas prácticos, operar con números fraccionarios en problemas de la vida cotidiana, manejar con soltura el concepto de proporcionalidad numérica y aplicarlo en situaciones prácticas, conocer las longitudes y superficies de espacios y objetos, utilizar la aproximación por exceso o por defecto y tener nociones sobre redondeo.

**A los 16 años**, un 10% de los alumnos sólo es capaz, además de lo anterior, de manejar las operaciones algebraicas básicas con números sencillos; solamente un 28%, es capaz además de lo anterior, de resolver correctamente las cuestiones descritas anteriormente para el nivel 200. Este resultado es obviamente insatisfactorio pues un tercio de la muestra de estudiantes de 16 años solamente muestra dominio de las cuatro capacidades básicas definidas en los niveles de rendimiento.

Si nos situamos en el nivel 300, apenas un 23% de los alumnos de 16 años muestra dominio para resolver las cuestiones en él incluidas. Pocos son los alumnos (3%) que alcanzan el nivel 350 y, en consecuencia, los aspectos que le definen.

En conjunto, los resultados en matemáticas no pueden considerarse satisfactorios. Los niveles de rendimiento alcanzados tanto a los 14 como a los 16 años en ningún caso se aproximan a los que serían deseables, y de otra parte, aunque se produce un avance entre las dos edades de 37 puntos, parece tratarse de un avance insuficiente.

## 6.4. Evaluación de la Enseñanza Secundaria Obligatoria 2000

El objetivo principal de este proyecto consistió en conocer y valorar los resultados educativos alcanzados por los alumnos en el curso 1999–2000 finalizaron la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Este estudio también se conecta con el realizado en el año 1997 y recoge información para establecer la evolución del sistema educativo. Los resultados del estudio se han puesto en relación con los procesos educativos y con factores contextuales, de modo que se han podido obtener conclusiones en cuanto a las relaciones entre unos y otros. Este objetivo general se concreta en tres grandes grupos de finalidades más específicas:

- Conocer y valorar, con arreglo a los estándares previamente establecidos, el nivel de aprendizaje de los contenidos señalados para el curso final de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Conocer y valorar el grado de desarrollo de las capacidades propuestas como objetivos generales de la etapa, según los niveles de progreso del aprendizaje fijados por las enseñanzas mínimas establecidas para la etapa.
- Conocer la situación educativa del alumnado que finaliza esta nueva etapa y compararla con el estudio anterior de manera que pueda analizarse el progreso de los alumnos y los posibles cambios acaecidos en estos años.

La evaluación se centra en los siguientes contenidos para el área de Matemáticas:

- Conocimiento y uso de los diferentes lenguajes matemáticos. Destrezas básicas en la utilización de rutinas y algoritmos particulares.
- Estrategias heurísticas en procedimientos complejos.
- Competencias relativas a la resolución de problemas.

En el diseño de la prueba se tienen en cuenta las dos dimensiones siguientes:

- Niveles de operaciones cognitivas: comprende conocimientos, destrezas básicas, procedimientos complejos y resolución de problemas.
- Bloques de contenidos: abarca números y operaciones, medida y magnitudes, representación y organización del espacio, e información y azar.

Los resultados de esta evaluación muestran un perfil en matemáticas que, de acuerdo con los rendimientos del alumno medio de cuarto curso de educación secundaria obligatoria en el área, se caracteriza por los siguientes dominios de conocimientos, habilidades o competencias:

*– Es capaz de resolver las operaciones con números decimales y las expresiones algebraicas sencillas, así como la interpretación de*

*representaciones gráficas simples asociadas a una información dada. Además, sabe expresar algebraicamente la relación existente entre las dimensiones de una figura geométrica plana sencilla; utilizar conceptos y procedimientos relacionados con la estimación de la medida de objetos y espacios, e identificar expresiones algebraicas asociadas a una función que relaciona diferentes magnitudes. Comienza a tener dificultades cuando tiene que utilizar correctamente la notación científica; expresar en lenguaje algebraico el enunciado de un problema; resolver problemas de números enteros y fraccionarios; calcular áreas de figuras geométricas planas compuestas de triángulos y rectángulos; relacionar correctamente el Teorema de Pitágoras con las longitudes de los lados de un triángulo para saber si es rectángulo; calcular el volumen de un ortoedro y relacionarlo con otro cuyo volumen viene dado utilizando la proporcionalidad numérica; aplicar el concepto de traslación en un plano mediante el uso de coordenadas cartesianas; interpretar relaciones funcionales dadas en forma de expresión algebraica sencilla, y calcular la anti-imagen de un número en una función lineal que viene dado por su ecuación.*

*- Tiene aún más dificultad para: resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana relacionados con el cálculo de porcentajes y proporcionalidad, las operaciones con números fraccionarios y el planteamiento de ecuaciones de primer grado. Tampoco le resulta fácil identificar ecuaciones equivalentes sencillas; comparar y ordenar números fraccionarios; aplicar nociones de medidas de magnitudes para medir áreas o volúmenes de cuerpos o figuras geométricas mediante su transformación en otras más simples; calcular volúmenes de cuerpos y figuras geométricas utilizando la proporcionalidad; identificar la semejanza y el factor de proporcionalidad entre figuras y cuerpos geométricos, y dominar con soltura el concepto de media aritmética y saber aplicarlo en situaciones sencillas.*

*- Por último le resulta muy difícil hacer cálculos con fracciones y potencias de exponente negativo; resolver con soltura problemas complejos de proporcionalidad y porcentajes; dominar la resolución de problemas de medida de superficies planas utilizando números enteros y fraccionarios; aplicar correctamente las propiedades de los polígonos regulares para calcular los ángulos interiores; identificar la expresión algebraica que corresponde a una recta representada gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas, y reconocer la pendiente de una recta a partir de sus puntos de corte con los ejes de coordenadas". (pp. 84-89)*

## 7. Conclusiones

En este capítulo hemos analizado tres grandes campos teóricos que caracterizan este estudio:

- Innovación y cambio curricular, esto está recogido en los apartados 2 y 3 de este capítulo.
- Formación aritmética, está recogido en el apartado 4.
- Evaluación aritmética, recogido en el apartado 5 y 6.

Tras una breve introducción, que recogemos en el apartado 1, en el apartado segundo y tercero hemos descrito aquellas ideas y conceptos sobre

innovación curricular en los que, de un modo u otro, se fundamenta nuestro estudio. Este apartado se estructura en cinco subapartados:

- Breve descripción de los documentos básicos que hemos consultado, donde se teorizan las principales nociones utilizadas.
- Una síntesis de la historia de la educación matemática en términos curriculares que ayuda a entender los momentos y las circunstancias en los que surgen estas nociones.
- Recoge una reflexión sobre el currículo español de matemáticas desde mediados del siglo XX.
- Una selección y ejemplificación de estudios e investigaciones, internacionales o con repercusión internacional, que tienen como foco el currículo de matemáticas.
- Un análisis sobre innovación curricular y nuestro concepto de currículo.

La formación aritmética (recogido el apartado cuarto) también los estructuramos en los siguientes subapartados:

- Relacionamos el aprendizaje escolar con el currículo, resaltamos la importancia de contar con un marco teórico; pues toda propuesta curricular se va elaborando sobre una teoría del aprendizaje, mencionamos los cuatro marcos teóricos de aprendizaje de la aritmética que mayor influencia han tenido según los expertos en Didáctica de la Matemática, efectuamos una síntesis del documento *Mathematics from 5 to 16* (HMSO, 1985) del que enumeramos los objetivos aritméticos para la enseñanza obligatoria.
- Desarrollamos el concepto de destrezas aritméticas básicas y caracterizamos los estudios por dos enfoques: a) en términos de habilidad o precisión y b), en términos de eficacia o velocidad.

Nuestra investigación se enmarca en el primer enfoque.

- Esquemizamos la formación aritmética dentro de un marco curricular.
- Exponemos nuestras ideas sobre rendimiento aritmético.

El marco teórico de la evaluación aritmética lo desarrollamos en el apartado quinto y sexto de este capítulo. Enfocamos el estudio en varios subapartados:

- Desarrollamos el concepto general de evaluación.
- Efectuamos una síntesis de investigaciones sobre evaluación en educación matemática.
- Revisamos la evaluación en educación matemática.
- Exponemos los fines de la evaluación.
- Desarrollamos la evaluación de los alumnos.

- Exponemos la evaluación de programas.

En el apartado seis describimos cómo contempla la evaluación el currículo LOGSE y se recogen algunas investigaciones realizadas en su marco normativo.



# CAPÍTULO TERCERO

## MARCO METODOLÓGICO

### 1. Introducción

Como expresamos en el Apartado 6 del primer capítulo, en esta investigación nos planteamos dos objetivos generales, cada uno de los cuales se desglosa en varios objetivos parciales.

El primer objetivo se propone describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de un grupo de escolares durante el periodo de enseñanza obligatoria. Se trata de un estudio evaluativo y transversal, cuyo contexto viene enmarcado por los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, que establecen y desarrollan los contenidos, objetivos, metodología y criterios de evaluación del currículo de matemáticas para la Educación Primaria y para la Educación Secundaria Obligatoria, según la Ley 1/1990 de Organización General del Sistema Educativo (LOGSE). El estudio se hace en el curso 2001–2002 con una muestra de escolares de edades comprendidas entre los 8 y los 14 años, correspondientes a los niveles 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria y los cursos 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria.

La habilidad de cálculo se evalúa mediante un estudio de rendimiento basado en un test de cálculo aritmético, el Test de Ballard (en adelante THCAB), cuya revisión detallada ya realizamos (Díez, 2001) y, también, mediante un estudio de eficacia basado en el logro de los diversos objetivos propuestos en el currículo oficial.

Para, dar respuesta a los objetivos parciales de este Objetivo 1, es decir, para obtener información que permita evaluar el rendimiento aritmético escolar y establecer la eficacia del currículo escolar de Aritmética, hemos elegido como instrumento la adaptación a las condiciones españolas del THCAB efectuada por García Hoz (1948) y revisada, ampliada y actualizada por nosotros (Díez, 2001). Esta herramienta la describimos en el Apartado 2 de este capítulo.

También son instrumentos de información, necesarios para sostener y desarrollar esta investigación, los documentos normativos, leyes y decretos que

establecen las directrices curriculares y los programas de matemáticas que caracterizan los currículos de los periodos que estudiamos.

La habilidad de cálculo aritmético mostrada por los escolares mediante el test proporcionará indicadores que, junto con los objetivos y expectativas de aprendizaje establecidos mediante el currículo considerado, permitirán establecer la eficacia del programa y mostrarán los puntos débiles y fuertes del programa de formación sobre Aritmética Escolar marcado por la LOGSE. Se trata de un estudio evaluativo y transversal.

El Objetivo 1 se propone, con carácter terminal, evaluar los logros sobre Aritmética escolar que se alcanzan por medio del currículo de matemáticas definido en el marco de la LOGSE, centrándose en la eficacia como indicador más preciso que el rendimiento. Los tres focos que organizan el Objetivo 1 son, pues, el currículo LOGSE, las expectativas sobre el aprendizaje de los ítems y el Test de Ballard.

Las siguientes tablas muestran los enunciados de cada uno de los dos objetivos generales, de sus objetivos parciales correspondientes y de las conexiones y relaciones entre ellos.

Designamos por Objetivo 1: Describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de escolares de 8 a 14 años que, durante el curso 2000–2001, siguen el plan de estudios establecido por los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, según la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo 1/1990

Tabla 1

*Objetivos Parciales que Desglosan el Objetivo 1, organizados por focos*

Currículo LOGSE	Expectativas de los ítems	Test de Ballard
1.1. Caracterizar por niveles y ciclos la formación que prescriben los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91 que desarrollan la LOGSE, para aritmética escolar según objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación.	1.3. Establecer los ítems con expectativas de lograr un nivel de idoneidad para cada grado o nivel escolar en relación con el currículo de la LOGSE.	1.2. Estructurar por niveles y ciclos el tratamiento establecido para los ítems del Test de Ballard revisado y ampliado, de acuerdo con el currículo de los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91.
1.8. Establecer puntos fuertes y débiles para la aritmética escolar en el	1.7. Describir y caracterizar por niveles y ciclos la	1.4. Aplicar el Test de Ballard ampliado a una muestra de estudiantes de

Tabla 1

*Objetivos Parciales que Desglosan el Objetivo 1, organizados por focos*

curso 2000-01 del currículo LOGSE, según Reales Decretos 1006/91 y 1007/91.	eficacia del currículo LOGSE según los datos aportados en el curso 2000-01 por los escolares.	<p>los grados 3º a 6º de Educación Primaria y de 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria en el curso 2000-01.</p> <p>1.5. Llevar a cabo un análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del Test de Ballard ampliado a los estudiantes del curso 2000-01.</p> <p>1.6. Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 2000-01.</p>
---	---	--

Designamos por Objetivo 2: Comparar la habilidad de cálculo aritmético de los escolares del curso 2000-01 con la de aquellos otros que se instruyeron con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria de 1945 y de la Ley General de Educación de 1970, respectivamente.

Tabla 2

*Objetivos Parciales que Desglosan el Objetivo 2*

Currículo oficial según normativa vigente	Eficacia del currículo para aritmética escolar	Rendimiento aritmético escolar
2.1. Caracterizar la formación aritmética escolar que prescriben los currículos de la LEP, de 1945 y de la LGE de 1970, en términos de objetivos, contenidos,	2.3. Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la LEP de 1945 según expectativas de los programas y los	2.2. Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de las promociones 1948-49 y 1974-75, evaluador con el Test de Ballard.

Tabla 2

*Objetivos Parciales que Desglosan el Objetivo 2*

metodología y criterios de evaluación.	datos aportados por estudiantes de la promoción 1948-49.	
2.7. Establecer los puntos fuertes y débiles en aritmética escolar del currículo LOGSE según su comparación con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria y de la Ley General de Educación.	2.4. Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la LGE de 1970 según expectativas de los programas y los datos aportados por estudiantes de la promoción 1974-75.	2.5. Comparar los rendimientos obtenidos por estudiantes de la promoción 200-01 en la aplicación del Test de Ballard ampliado, con los obtenidos por estudiantes de las promociones 1948-49 y 1974-75.
	2.6. Comparar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de aritmética escolar de la LOGSE con la eficacia detectada en los currículos de aritmética de la LEP y de la LGE, según datos obtenidos de las promociones evaluadas.	

Establecida la eficacia de un currículo en términos de idoneidad de los objetivos pretendidos por nivel según diferentes instrumentos de evaluación, el Objetivo 2 se propone comparar la habilidad de cálculo aritmético de tres grupos de estudiantes correspondientes a planes de estudios diferentes y propuestas curriculares muy distintas.

Esta comparación se sostiene en el criterio de eficacia establecido por el objetivo anterior, según el rendimiento alcanzado en los distintos niveles para la habilidad de cálculo aritmético y las expectativas de aprendizaje aritmético escolar marcadas en cada programa. La eficacia para el cálculo aritmético escolar en cada uno de los tres currículos considerados la determinaremos mediante sus valores de idoneidad, según se establecen en la Investigación Granada-Mats (Rico, et al., 1985, pp. 408-417).

El contexto en que se realiza este segundo estudio lo proporcionan los resultados obtenidos por muestras procedentes de tres promociones de alumnos en las mismas edades escolares, correspondientes a planes de estudio distintos, cuya habilidad de cálculo ha sido evaluada con un mismo instrumento, el Test de Ballard. Los resultados obtenidos proporcionan una base para efectuar las comparaciones indicadas. El Objetivo 2 se centra pues en los siguientes focos: Currículo oficial vigente en cada periodo, eficacia del un currículo y rendimiento aritmético escolar.

Para cada plan de estudios y propuesta curricular subsiguiente se determina el rendimiento aritmético escolar a partir de los estudios previos de García Hoz (1950) y Castro (1975) realizados con el THCAB (Objetivo parcial 2.2). Los datos así analizados contribuyen a determinar la eficacia de cada programa, según lo establecido por el Objetivo 1, con lo cual se logran los Objetivos parciales 2.3 y 2.4.

Los rendimientos detectados y la eficacia de cada programa permiten establecer comparaciones entre los currículos de la LEEP, LGE y LOGSE, señalar cambios y peculiaridades de cada programa, según enuncian los Objetivos parciales 2.5, 2.6 y 2.7. Se trata en este caso de un estudio longitudinal de evaluación de programas.

Para determinar la eficacia de cada uno de los currículos y proceder a su comparación es necesario estudiar la estructura de los programas de Aritmética de cada uno de ellos, que muestre las coincidencias y divergencias de las expectativas sobre el aprendizaje aritmético escolar de los tres currículos que comparamos, cuestión que llevamos a cabo en el cuarto capítulo de esta memoria.

En este capítulo presentamos el diseño y la metodología seguidos para esta investigación, describimos el instrumento para evaluar la habilidad de cálculo de los escolares, describimos la aplicación de la prueba en una muestra intencional, la organización y tratamiento de los datos, y un análisis descriptivo de los datos obtenidos. Igualmente, establecemos las nociones de idoneidad de un objetivo y de eficacia de un programa, y caracterizamos el proceso general de la investigación, la cual encuadramos dentro de los paradigmas convencionales.

## **2. El Test de Habilidad de Cálculo de Ballard**

Como ya hemos expuesto, nos proponemos describir la habilidad de cálculo aritmético de los escolares instruidos con el currículo establecido por los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, de acuerdo con la Ley 1/1990 y, también, comparar esa habilidad con la de otras dos generaciones de escolares correspondientes a los cursos 1948-1949 y 1974-1975, educadas con distintos currículos. Proponemos de este modo caracterizar el cambio, si es que existe, de esta habilidad y su relación con otras variables del currículo.

Para llevar a cabo este estudio hemos elegido un test de habilidad de cálculo aritmético, el THCAB, como herramienta de recogida de datos primarios.

Es un test de instrucción aritmética que, en su versión inicial, consta de 100 ítems de respuesta abierta a elaborar por los alumnos y que hemos ampliado a 120 ítems (Díez, 2001). Para la consecución del Objetivo 1 trabajamos con la versión del THCAB ampliada por Díez. Para estudiar la consecución del Objetivo 2 trabajamos con la versión inicial de 100 ítems, ya que las aplicaciones de 1948 y 1975 se llevaron a cabo con esa versión. Se trata de un test de instrucción de base estructurada. Es una prueba de instrucción final, por lo que los estudiantes de los primeros cursos no poseen la instrucción escolar necesaria para responder a todos los ítems de la prueba. De hecho, los estudiantes de un determinado curso pueden no estar preparados para responder más que a aquellas cuestiones que están en los programas de los cursos anteriores.

## **2.1. Requisitos Establecidos para el Test de Habilidad de Cálculo**

Al instrumento que vamos a utilizar en el trabajo de investigación le exigimos que cumpla dos características:

- 1º Que permita la valoración de las destrezas básicas en la habilidad de cálculo aritmético alcanzadas mediante un programa de formación determinado, si no todas sí en un número suficiente.
- 2º Que sea útil para establecer comparaciones relativas a la habilidad de cálculo de poblaciones escolares formadas mediante programas y currículos diferentes.

La elección del THCAB tiene en cuenta unos antecedentes y se lleva a cabo en un contexto y con unas determinadas condiciones. En este caso nuestro grupo de investigación dispone de información cualificada sobre rendimiento aritmético escolar en España basada en el Test de Ballard, a cuya determinación hemos contribuido.

A efectos de satisfacer la primera de las condiciones anteriores queremos destacar que la adaptación a las condiciones españolas efectuada por los profesores García Hoz y Fernández Huertas (1948) del THCAB ofrece como resultado un test de instrucción aritmética que consta de 100 ítems de respuesta abierta a realizar por los alumnos. Como se ha dicho, se trata de un test de base estructurada.

Los expertos consideran varias ventajas a la hora de seleccionar un test ya publicado para llevar a cabo una investigación. Cohen, Manion y Morrison (2000) destacan entre ellas, que los tests:

- Son objetivos.
- Han sido ensayado y refinados.

- Se han estandarizado por medio de una población conocida, que representa una población más amplia.
- Tienen fiabilidad y validez conocidas.
- Suelen ser pruebas paramétricas que permiten cálculos estadísticos sofisticados.
- Se acompañan de instrucciones completas para su administración.
- Son directos y rápidos tanto para su administración como para su corrección.
- La guía para interpretar los datos suele incluirse en el manual.

Los contenidos aritméticos de estos cien ítems, tanto para la versión inicial como para la ampliada, se distribuyen entre doce bloques temáticos: tres campos numéricos (naturales, racionales y decimales), magnitudes, proporcionalidad, etc., —que trataremos en un apartado posterior. Estos contenidos, con algunas importantes diferencias respecto al curso donde se imparten, método de enseñanza, aplicaciones y otros, se mantienen en los tres currículos.

La mayoría de los ítems de este test podemos considerarlos elementales, es decir, de un nivel básico de alfabetización aritmética.

En el análisis que realizamos del test (Diez, 2001) subdividimos algunos de los bloques temáticos en apartados, cuando creímos oportuno. Por ejemplo, el bloque temático de números naturales lo secuenciamos en: suma de números naturales, resta de números naturales combinaciones de sumas y restas de números naturales, producto de números naturales, división de naturales y otros.

Respecto a la estructura del test, la mayoría de bloques temáticos y apartados escalonan la presentación de los ítems de menor a mayor dificultad en su resolución. Sin embargo, algunos apartados, como por ejemplo la resta de números naturales, no presentan sus ítems desordenados en relación con su dificultad de resolución.

Algunos ítems presentan un planteamiento de mayor dificultad relativo al concepto o habilidad considerada, bien por la incorporación de dificultades debidas a los números empleados en sus enunciados, bien por razón de su procedimiento de solución.

Un instrumento, revisado cincuenta años después de su elaboración, refleja carencias y omisiones propias de la revisión y progresión de la disciplina en el tiempo sobre los conceptos y habilidades evaluados.

Somos conscientes de que con una prueba de instrucción de habilidad de cálculo aritmético de los escolares no se puede evaluar la completa instrucción aritmética escolar recibida durante la educación obligatoria, cuestión que entendemos no es posible abarcar con un sólo instrumento.

La ampliación del test fue propuesta para mejorar la información que proporciona el Test de Ballard sobre habilidad de cálculo aritmético.

En relación con la segunda condición requerida contamos con información documentada sobre tres aplicaciones previas de este test de habilidad de cálculo aritmético realizadas en un intervalo de 25 años, lo cual hace que este instrumento sea especialmente valioso para llevar a cabo las comparaciones deseadas.

Las dos primeras aplicaciones del Test de Ballard pueden considerarse complementarias, y se llevan a cabo entre los años 1948 y 1950. La primera aplicación fue efectuada por el profesor Fernández Huertas en 1948. Sus resultados se publicaron en el trabajo *Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritméticas* (1950).

La segunda aplicación fue realizada por la Profesora Andrés Muñoz en el curso 1950–1951. Los resultados fueron publicados en 1952 en el trabajo *Determinación experimental del rendimiento escolar*.

Entre la segunda y la tercera aplicación, que se realiza en el curso 1974–1975, hay una diferencia temporal de 25 años. Esta tercera aplicación fue efectuada por la profesora Castro Martínez, publicada bajo el título *El cálculo aritmético en la E.G.B.*, Tesina de Licenciatura defendida en la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada en 1975.

En el momento de llevar a cabo el trabajo de campo de nuestro estudio, curso 2001–2002, que incluye una cuarta aplicación del mismo test, se cumplen 25 años de la última aplicación documentada y conocida por nosotros. Con esta aplicación se da continuidad a una serie de medidas de la habilidad de cálculo aritmético escolar, realizadas con periodicidad 25 años y obtenidas con un mismo instrumento.

Por otra parte, en las ocasiones anteriores cada aplicación se realiza en el marco de unos cambios legislativos y normativos acaecidos en el sistema educativo, acompañados de los correspondientes cambios curriculares; la aplicación se lleva a cabo, una vez transcurridos unos años de dichos cambios. Así, las dos primeras aplicaciones las realizan escolares que reciben su formación en el marco de la Ley de Educación para Enseñanza Primaria de 1945. La tercera aplicación se hace con alumnos que se forman en los planes y programas establecidos por la Ley General de Educación de 1970.

También nuestra aplicación se lleva a cabo en un contexto similar, con posterioridad a la aprobación de la Ley de Organización General del Sistema Educativo y de la implantación del currículo correspondiente, en un marco de preocupación social por el supuesto deterioro en la habilidad de cálculo aritmético de los escolares, similar a la actual.

Destacamos la singularidad del THCAB, único instrumento conocido por nosotros que cumple las condiciones exigidas para atender lo establecido en los

Objetivos 2.2, 2.3 y 2.4 de este estudio y para realizar las comparaciones señaladas en los Objetivos 2.5, 2.6 y 2.7.

## 2.2. Adaptaciones del Test de Habilidad de Cálculo de Ballard

La primera adaptación del Test de Ballard a las condiciones españolas fue efectuada por los profesores García Hoz y Fernández Huertas en 1948. El Test de Ballard es una batería compuesta por tres pruebas: un test de inteligencia, un test de habilidad de cálculo aritmético y un test de razonamiento aritmético.

Elegimos la adaptación a las condiciones españolas del THCAB efectuada por García Hoz (1948), que se ajusta —como se ha argumentado— a las características exigidas por nuestro estudio.

La herramienta elegida no ha sido elaborada por el Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico. Como se ha dicho, es una prueba redactada, traducida y adaptada hace más de 60 años. Investigadores del Grupo realizaron un estudio, revisión y nueva adaptación de la prueba hace treinta y cinco años (Castro, 1975).

Para llevar a cabo esta investigación ha sido preciso efectuar un nuevo estudio de sus contenidos y adecuar algunos de sus ítems al vocabulario y notaciones actuales, así como a los requerimientos curriculares y de los programas de matemáticas en curso.

Esta última revisión y actualización del THCAB se llevó a cabo en el estudio *Rendimiento escolar en matemáticas, Estudio de un instrumento* (Díez, 2001), que tenía por objetivo general:

*analizar y revisar críticamente el test de habilidad de cálculo aritmético de Ballard, señalar carencias, proponer campos conceptuales complementarios que puedan incorporarse a un nuevo instrumento y elaborar un nuevo instrumento de evaluación de rendimiento aritmético escolar.*

Un resumen de la revisión aparece en el Apartado 4 de este capítulo.

Como resultado del estudio del test apreciamos la conveniencia de efectuar una ampliación de sus contenidos. Dos fueron las razones fundamentales para ello:

a) Completar y mejorar el campo de los contenidos sobre los que trabaja este instrumento, relativos a la habilidad de cálculo y el conocimiento aritmético de los escolares.

b) Aprovechar la nueva aplicación de la prueba para conseguir información de interés, ampliada a los nuevos contenidos, y relevante para el Grupo de Investigación.

La ampliación se concretó en veinte nuevos ítems de respuesta abierta a responder por los alumnos, que se distribuyen de la siguiente forma:

- Seis ítems inherentes al tópico de completar series numéricas.
- Cinco ítems relativos a destrezas aritméticas en expresiones que combinan distintas operaciones y que requieren diferente prioridad lógica de ejecución con números naturales.
- Dos ítems sobre el orden de las fracciones.
- Dos ítems relacionados con la acción de encontrar una fracción que se intercale entre dos fracciones dadas.
- Dos ítems que tratan de la simplificación de operaciones entre fracciones.
- Un ítem relacionados con el orden de los números decimales.
- Dos ítems relativos a encontrar un decimal que se intercale entre dos decimales dados.

Los enunciados de los ítems elaborador para ampliar el Test de Ballard se encuentran en el Anexo 1.

### **3. Encuadre de la Investigación en los Paradigmas Convencionales**

Siguiendo a Kuhn (1982) un paradigma es el modo que, en un determinado momento en el desarrollo de una ciencia, tiene una comunidad científica de enfocar los problemas. Es, por tanto, un conjunto de asunciones interrelacionadas de una comunidad acerca de un mundo o ámbito del conocimiento y proporciona un marco filosófico y conceptual para el estudio organizado de éste.

Entre diferentes autores consultados no existe unanimidad en la delimitación de los diferentes paradigmas que organizan la investigación educativa. Para Cohen y Manion (1989), existen dos tipos de paradigmas diferentes el normativo positivista (positivismo, positivismo lógico, escuela de Viena) y el interpretativo. Bizquerra (1988) distingue cuatro tipos diferentes: el positivista, el interpretativo, el crítico y el emergente. Lukas y Santiago (2004) señalan tres paradigmas diferentes: el positivista, el interpretativo y el crítico.

El enfoque para el estudio del primer objetivo de esta investigación, como se viene poniendo de manifiesto, se enmarca en el paradigma positivista, ya que consiste en una evaluación curricular basada en la valoración de los resultados de la instrucción sobre habilidad de cálculo aritmético de los alumnos instruidos en el currículo LOGSE. Su finalidad es comprobar, por medio de los rendimientos alcanzados mediante la aplicación del THCAB, si se alcanzan las metas y objetivos enunciados en los cursos según lo previsto en cada currículo.

El estudio del segundo objetivo tiene un enfoque complementariamente interpretativo ya que, sobre la base proporcionada por tres estudios de rendimiento, las nociones de idoneidad curricular de un objetivo y de eficacia, se propone inferir similitudes y diferencias, en definitiva, establecer comparaciones entre tres currículos. No obstante, los datos primarios son resultado de la

aplicación del THCAB a escolares españoles de tres promociones diferentes, formados en marcos curriculares distintos, es decir tienen la base positivista de una evaluación.

### 3.1. Modalidad de Investigación

Vamos a caracterizar nuestra investigación dentro de diversas modalidades consideradas por los expertos. Para ello, dentro de distintas clasificaciones revisadas, hemos seguido la presentada por Bizquera (2000) sobre modalidades de investigación.

Consideramos que este trabajo responde a las siguientes características:

Según el proceso formal utilizamos el método inductivo, partiendo de la observación de los datos obtenidos, caracterizamos la situación de la instrucción conseguida por el currículo LOGSE.

Por el grado de abstracción es una investigación aplicada ya que en este trabajo de investigación tratamos de caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de alumnos de 8 a 14 años de edad instruidos por el currículo LOGSE y comparar estos resultados con la habilidad de los alumnos de las mismas edades instruidos con los dos currículos anteriores de la Ley de Educación Primaria (1950) y la Ley General de Educación (1971). Estas comparaciones permiten señalar opciones que ayuden a mejorar la calidad educativa actual.

Según la naturaleza de los datos utilizamos una metodología cuantitativa, concebimos el objeto de estudio como “externo” para conseguir la mayor objetividad; para la recogida de datos aplicamos el Test de Ballard ampliado, que es un test de base estructurada sobre habilidad de cálculo aritmético. Según la concepción del fenómeno educativo consideramos también nuestra investigación como una investigación nomotética o normativa cuyos objetivos contemplan normas generales para describir el logro alcanzado en habilidad de cálculo aritmético por los estudiantes de 8 a 14 años de edad que han sido instruidos con el currículo LOGSE.

Respecto al control de las variables consideramos nuestra investigación en un doble tipo: investigación descriptiva e investigación ex post facto.

La investigación es descriptiva porque describimos y caracterizamos la habilidad de cálculo aritmético en que se encuentran los alumnos de 8 a 14 años de edad instruidos con el currículo LOGSE.

A la vez, en esta investigación presentamos dos tipos de estudios descriptivos. Por un lado, la situación con alumnos evaluados por nosotros es un estudio de tipo transversal. Por otro lado, las comparaciones efectuadas con alumnos de las mismas edades instruidos con los currículos de Educación Primaria (1950) y Enseñanza General Básica (1971) son estudios de tipo

longitudinal según Cohen y Manion (1989). También se trata de un estudio de cohortes según la clasificación de este mismo autor (1988).

A su vez, es una investigación ex post facto porque planteamos la validación de las hipótesis con posterioridad a que los alumnos hayan recibido la instrucción debida. Es decir se producen los hechos y posteriormente se analizan los resultados. Una característica esencial de este tipo de investigación es que no se tiene control sobre las variables independientes.

Presenta este tipo de investigación tres limitaciones claramente definidas:

- Incapacidad de controlar las variables independientes.
- Imposibilidad de realizar asignación aleatoria.
- Riesgo ante las interpretaciones erróneas derivadas de la falta de control.

Por otra parte presentan múltiples ventajas, como la validez ecológica, que la hacen especialmente adecuada a las investigaciones educativas.

### **3.2. Tipo de Diseño**

Como se verá, el diseño de esta investigación no es experimental ya que, según el tipo de muestreo, éste es intencional y no aleatorio. Sí puede considerarse como un diseño cuasi-experimental. Siguiendo a Campbell y Stanley (1973) y Cook y Campbell (1979) estos diseños carecen del control característico de los diseños experimentales y no cumplen el principio de asignación aleatoria de los sujetos a los grupos ya que estudian grupos intactos se consideran especialmente adecuados para la investigación educativa). Por el contrario, satisfacen otras características, que esencialmente son: empleo de escenarios naturales, control parcial de la muestra, posibilidad de utilizarse cuando no sea posible un diseño experimental.

### **3.3. Otras Características**

Según el objetivo, nuestra investigación se encuentra encuadrada en dos tipos de métodos: descriptivo y explicativo.

Responde al método descriptivo porque su primer objetivo está en describir la situación de los alumnos de 8 a 14 años de edad instruidos con el currículo LOGSE, y al método explicativo porque, como se plantea en el segundo objetivo, tratamos de inferir una explicación de los resultados alcanzados en términos de la planificación establecida por los currículos oficiales.

Según lugar consideramos este trabajo como una investigación de campo pues el objetivo trata de describir la situación actual de los alumnos de 8 a 14 años de edad instruidos con el currículo LOGSE.

Según temporalización este trabajo de investigación, debido a los planteamientos de los dos objetivos generales enunciados y comentados, es de un doble tipo: transversal y longitudinal.

### **3.4. Diseño de la Investigación**

Según los objetivos establecidos y el marco teórico considerado en que se ubica esta investigación iniciada con la Memoria de Tercer Ciclo (Díez, 2001), el diseño de este estudio consta de nueve etapas. El siguiente esquema muestra un resumen, que pasamos a desarrollar en el siguiente apartado.

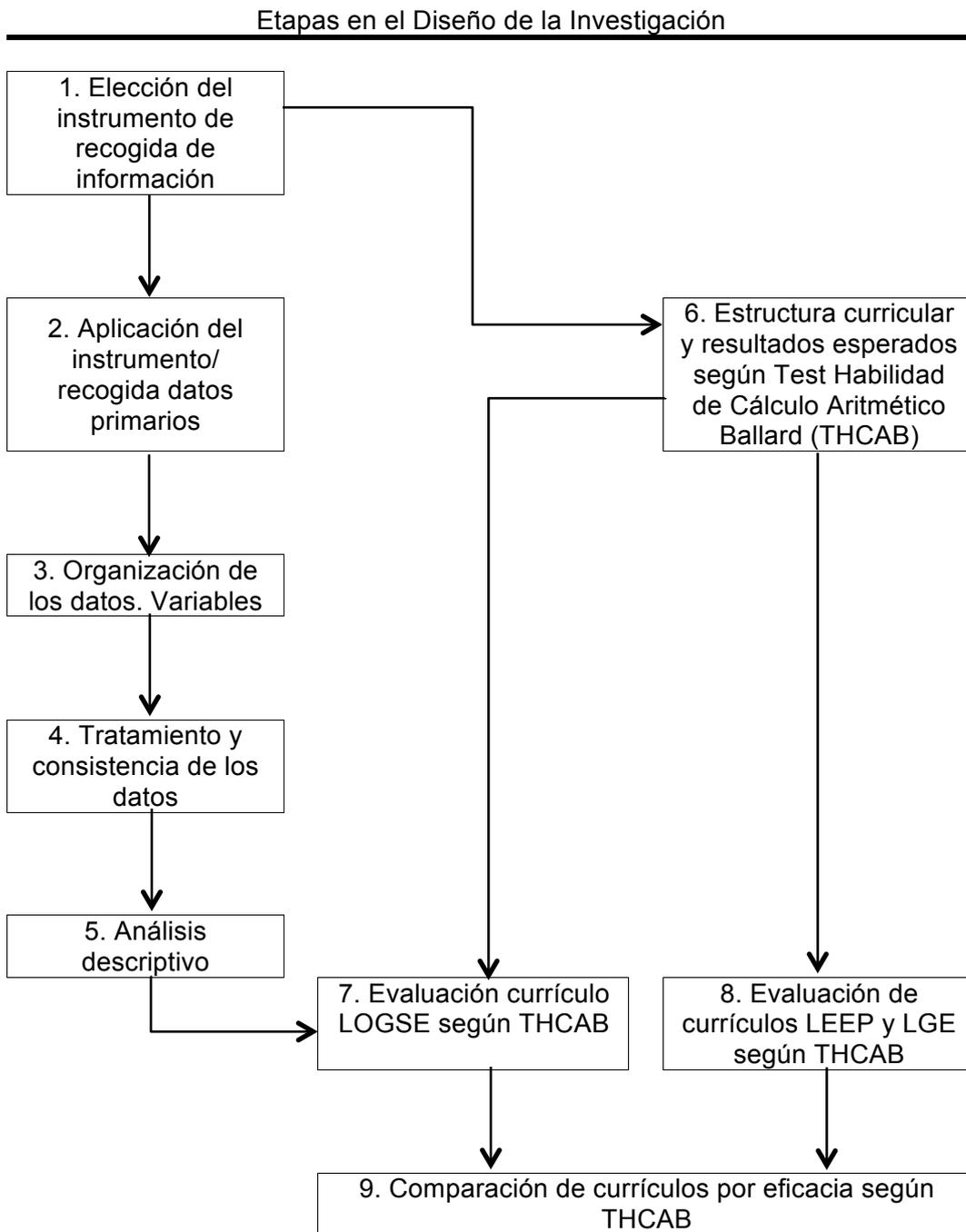


Figura 1. Etapas en el diseño de investigación.

## 4. Etapas y Pasos que Articulan la Investigación

Presentamos en este apartado un desarrollo, no muy extenso, de las distintas etapas establecidas para la ejecución de nuestro estudio y de los diferentes pasos que articulan cada una de las etapas. En cada uno de los pasos hacemos una descripción detallada del trabajo básico realizado, remitimos a referencias anteriores o bien indicamos en qué apartados de esta memoria se completa el trabajo correspondiente.

### 4.1. Primera Etapa: Instrumento de Recogida de Información

La primera etapa consiste en la elección del instrumento mediante el cual se va a evaluar la habilidad de cálculo aritmético de los escolares de 8 a 14 años de tres promociones distintas, cuya formación está organizada según currículos diferentes. Al describir el THCAB en el Apartado 2 de este capítulo, hemos incidido en algunos de los criterios y circunstancias que contribuyeron a la elección de éste como instrumento de recogida de información, por ello no reiteramos las consideraciones ya hechas. No obstante, sí marcaremos los distintos pasos que organizan esta etapa desde una perspectiva metodológica. La etapa se ha organizado en cuatro pasos o momentos diferentes.

#### Primer paso: elección del instrumento para evaluar la habilidad de cálculo aritmético

Como hemos explicado mediante las razones señaladas en el Apartado 3.2, elegimos el test de THCAB. Seleccionado el instrumento de evaluación efectuamos una revisión bibliográfica sobre el test y sobre los resultados de diversas aplicaciones efectuadas en España de las que tuvimos constancia.

#### Segundo paso: estudio del instrumento

Este estudio se lleva a cabo en Díez (2001) y contribuye a determinar criterios para tomar decisiones con las que elegir la versión final que responda a los objetivos planteados.

Entre las diferentes versiones del instrumento encontradas, para efectuar el estudio elegimos tres:

- Primera versión. La utilizada por el Profesor Fernández Huertas (1950) para su trabajo de investigación: *Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritmética* (en adelante, FH).

- Segunda versión. La editada en el libro *Manual de Tests para la escuela* del Profesor García Hoz, 10ª edición (1973, en adelante, GH).
- Tercera versión. La utilizada por la Profesora Castro Martínez en su trabajo de investigación, *El Cálculo Aritmético en la E.G.B.* (1975, en adelante CM).

Resumimos a continuación las técnicas y procedimientos de análisis sistemático de los contenidos del instrumento utilizados, así como algunos datos relevantes obtenidos como resultado de ese análisis, que continúan teniendo validez.

El Test de Ballard consta de 100 ítems de respuesta abierta (a elaborar por los alumnos). Estas preguntas las hemos clasificado para su análisis, atendiendo a los diversos contenidos curriculares aritméticos contemplados en los ítems en doce bloques temáticos diferentes:

1. Operaciones con números naturales.
2. Sistema monetario español.
3. Medidas de tiempo.
4. Sistema Métrico Decimal.
5. Operaciones con números racionales (fracciones).
6. Operaciones con números decimales.
7. Raíz cuadrada.
8. Porcentajes.
9. Proporcionalidad.
10. Divisibilidad.
11. Media aritmética.
12. Cálculo de magnitudes (longitud, superficie y volúmenes) en figuras planas y cuerpos geométricos.

Estos bloques temáticos, cuando ha procedido, se han subdividido en apartados, así por ejemplo el primer bloque temático se ha subdividido en seis apartados:

- 1.1. Suma de números naturales.
- 1.2. Resta de números naturales.
- 1.3. Combinaciones de sumas y restas de números naturales.
- 1.4. Producto de números naturales.
- 1.5. División de números naturales.
- 1.6. Combinaciones de productos y divisiones de números naturales.

El análisis se ha realizado en tres niveles. El primer nivel, que hemos denominado análisis del bloque temático, incluye un segundo nivel, que denominamos análisis de apartados, en que se analiza cada apartado en que se ha subdividido el bloque temático en cuestión. Este segundo nivel incluye a su vez un tercer nivel de análisis, que llamamos análisis de ítem, donde realizamos el análisis de cada ítem del apartado en cuestión.

En el primer nivel, se hace un análisis de cada bloque temático que comprende:

- Descripción general del bloque.
- Número de ítems y su ubicación según versión (FH). Porcentaje sobre el total.
- Apartados que comprende.
- Análisis de segundo nivel de cada uno de los apartados.
- Omisiones del bloque y valoración del bloque.
- En el segundo nivel, se hace un análisis de apartados que comprende:
  - Nombre del apartado. Ítems que le corresponden, porcentaje del total.
  - Enunciado y ubicación de cada ítem del apartado según la versión (FH).
  - Análisis del tercer nivel de cada uno de los ítems que componen el apartado.
- Omisiones y valoración del apartado.

Estos dos últimos puntos cuando el bloque comprende más de un apartado.

El análisis individualizado de cada uno de los ítems del apartado, que se hace en el tercer nivel, comprende:

- Bloque y apartado al que pertenece.
- Presentación de los enunciados de las versiones (GH) y (CM), cuando exista alguna diferencia con el enunciado de la primera versión, y
- Análisis de todos los ítems de cada apartado.

El análisis de cada ítem se efectúa atendiendo a cuatro consideraciones: un análisis descriptivo, un análisis de procedimientos, un análisis conceptual y un análisis curricular. Cada uno de estos análisis comprende:

Análisis descriptivo:

- Características del ítem analizado.
- Comentario si procede a las presentaciones.
- Interpretación de las diferencias entre presentaciones.

Análisis de procedimientos:

Se efectúa basándonos en los procedimientos de enseñanza del tópico más frecuentemente utilizados por los libros de texto consultados, que dan lugar a las estrategias más frecuentes, de solución del ítem.

Análisis conceptual del ítem que comprende:

- Conceptos matemáticos, necesarios para la solución del ítem.
- Recuento de hechos básicos utilizados en las anteriores estrategias; empleamos para ello una notación basada en números de un sólo dígito,  $(0 + 1)$ ,  $(0 - 1)$ ,  $(1 \times 3)$ , etc., utilizando la propiedad conmutativa en el recuento de hechos de suma y producto, pues hemos considerado  $(1 + 3) = (3 + 1)$ , etc.

Análisis curricular:

Nivel básico a partir del cual podría resolverse el ítem en los tres sistemas curriculares.

Las conclusiones de este análisis, se presentaron en cinco apartados:

- Contenidos que se valoran en el test.
- Conceptos que se utilizan.
- Hechos básicos utilizados.
- Niveles curriculares de cada uno de los ítems y principales cambios detectados según los planes de estudio.
- Clasificación de ítems según el nivel curricular al que corresponden.

Estas conclusiones tienen especial significado ya que muestran que, según el currículo que contemplemos el nivel en el cual puede esperarse su dominio es diferente. Un ejemplo claro de estas diferencias se presenta en el ítem 88.

**ÍTEM 88**

BLOQUE TEMÁTICO XI: Media aritmética  
APARTADO 1: Media aritmética

**ENUNCIADOS**

(FH) Media de 5, 17, 17 y 19. Solución: 14.5  
(GH) Media de 5, 17 y 19. Solución: 14.5  
(CM) Media de 5, 7 y 19.

#### ANÁLISIS DESCRIPTIVO

*Características:* Media aritmética de cuatro números naturales de una y dos cifras en la versión (FH) Media aritmética de tres números naturales de una y dos cifras en las otras dos versiones. El resultado es un número decimal en las tres versiones.

*Presentación:* Correcta en las tres versiones.

*Interpretación de las diferencias:* En la versión (GH), parece ser que se olvida repetir el número 17 pues el resultado dado para la valoración coincide con el de la primera versión.

La versión (CM) difiere de la versión (GH) En que el número 17 lo cambia por el número 7.

En ambos casos las diferencias de los enunciados cambia la operación y los números con los que operar.

#### ANÁLISIS DE PROCEDIMIENTOS

*Estrategias más frecuentes para resolverlos:*

Versión (FH)

$$a) 5 + 17 + 17 + 19 = 58; 58 : 4 = 14.5$$

Versión (GH)

$$a) 5 + 17 + 19 = 41; 41 : 3 = 13.666$$

Versión (CM)

$$a) 5 + 7 + 19 = 31 \quad 31 : 3 = 10.333$$

#### ANÁLISIS CONCEPTUAL:

Conocimiento del concepto de media aritmética.

#### ANÁLISIS CURRICULAR

*Currículo LOGSE:* A partir de 2º curso de ESO

*Currículo Ley General de Educación:* A partir de 7º de EGB

*Currículo Ley de Educación Primaria:* A partir de 3º curso de Iniciación Profesional

### Tercer paso: adecuación de ítems

Adeuar los ítems del test a la realidad educacional actual, procurando efectuar el mínimo de variaciones es el siguiente paso en el diseño del instrumento para este estudio. Para la adecuación de los ítems del Test de Ballard a la realidad educacional actual nos apoyamos en los resultados obtenidos tras la realización de la primera prueba piloto efectuada.

Los fines que nos planteamos estudiar con la realización de la primera prueba piloto fueron:

Recoger información, para adecuar a la actualidad, la redacción de algunos ítems del Test de Ballard que estaban redactados en lenguaje de una época anterior.

Contrastar si la redacción de los nuevos ítems sobre los tópicos matemáticos elegidos es adecuada y, si no, reformarla para una mejor comprensión.

Reflejar la situación actual, del estado de aprendizaje de los tópicos matemáticos elegidos, como ampliación de la información que nos proporciona este test.

La muestra elegida para la aplicación piloto de la prueba fueron los alumnos del primer ciclo de Educación Secundaria del Colegio Público Prácticas Mixto de Ceuta (hoy C.P. Maestro D. José Acosta). Los alumnos del primer ciclo de educación secundaria de este centro se encuentran distribuidos en cuatro cursos; dos cursos de 1º de ESO y otros dos cursos de 2º curso de ESO. La prueba se realizó en dos sesiones; por este motivo fueron eliminados aquellos alumnos que no participaron en alguna de las sesiones. La muestra final queda formada por 95 alumnos: 44 alumnos de 1º de ESO y 51 alumno de 2º de ESO.

Las conclusiones de esta prueba sobre los ítems del Test de Ballard para la investigación 1 fueron:

1. Sustituir la redacción coloquial de algunos ítems del test por una redacción en lenguaje escolar actual.
2. Sustituir en el test de las cantidades monetarias en desuso por las expresiones equivalentes de unidades monetarias en uso.
3. Actualizar las tasas en los ítems de tasación.

La modificación de los ítems, tras varias deliberaciones, fueron las siguientes:

- Reemplazar la notación de los números mixtos, en desuso, por la expresión, de número natural más fracción o número decimal, equivalentes.
- Expresar una cantidad de dinero compleja que incluye unidades en desuso por una expresión equivalente con unidades en uso.
- Corregir los posibles errores tipográficos, que aparecen en las diferentes versiones, de forma que se correspondan con las respuestas esperadas.
- Reducir la dificultad de algunos ítems, variando la operación a efectuar.
- Sustituir el lenguaje coloquial utilizado en la expresión de algunos ítems por un lenguaje escolar actual.
- Adecuar los valores de tasación de precios, a valores actuales, procurando las mínimas modificaciones en las operaciones a efectuar.

- Añadir paréntesis en algunas expresiones, con el fin de orientar, la estrategia de resolución.

Realizadas las modificaciones oportunas hicimos tres agrupamientos con los ítems:

- Ítems cuyo enunciado no experimentó ninguna variación en las dos aplicaciones anteriores y que mantienen un enunciado adecuado a la situación actual. Por lo tanto, no necesitan ninguna modificación. Este grupo ha quedado constituido por 46 ítems.
- Ítems cuyo enunciado ha experimentado alguna variación en las aplicaciones anteriores y de los que hemos asumido una de las opciones. De los 100 ítems del test, 36 ítems conforman este grupo.
- Ítems cuyo enunciado ha experimentado variación en las aplicaciones anteriores y hemos tenido, nuevamente, que efectuar alguna modificación para adecuarlos a la actualidad, sólo 18 ítems.

### **Cuarto paso: ampliación del test**

Como hemos mencionado en el apartado anterior la ampliación del test la efectuamos en base a dos razones fundamentales:

- Completar y mejorar la información que proporciona este instrumento sobre la habilidad de cálculo y el conocimiento aritmético de los escolares.
- Aprovechar la nueva aplicación de la prueba para conseguir información de interés para el Grupo de Investigación.

Elegimos en una primera reflexión once tópicos para llevar a cabo la ampliación.

Dos tópicos del sistema de números naturales:

- Completar series numéricas.
- Combinación de operaciones que poseen diferente prioridad lógica de ejecución con números naturales.

Nueve tópicos del sistema de números racionales:

- Dos tópicos sobre números decimales exactos:
  - a) Ordenar números decimales exactos.
  - b) Intercalar entre dos números decimales exactos un número decimal (densidad).
- Siete tópicos sobre números racionales (fracciones):
  - a) Ordenar fracciones.

- b) Intercalar entre dos fracciones dadas una fracción (densidad).
- c) Ordenar combinaciones de números decimales y fracciones.
- d) Algoritmo del producto de fracciones.
- e) Algoritmo de división de fracciones. Dos nomenclaturas (los dos puntos y fracción de fracción).
- f) Reversibilidad en la igualdad del algoritmo de suma de fracciones (simple y combinada con simplificación).
- g) Reversibilidad en la igualdad del algoritmo de producto de fracciones.

Con varios ítems de estos once tópicos elaboramos parte de la primera prueba piloto, que aplicamos y cuyos resultados analizamos.

Vistos los resultados de la primera prueba piloto procedimos a la selección de los ítems de la ampliación eligiendo 19 ítems a los que añadiríamos uno más, posteriormente, quedando la prueba compuesta por 120 ítems, 100 del Test de Ballard y 20 ítems de ampliación.

Los 20 ítems de la ampliación se distribuyen de la siguiente forma:

- Seis ítems del tópico de completar series numéricas.
- Cinco ítems del tópico de combinación de operaciones que poseen diferente prioridad lógica de ejecución con números naturales.
- Dos ítems del tópico de ordenar fracciones.
- Dos ítems del tópico de intercalar entre dos fracciones dadas una fracción (densidad).
- Dos ítems del tópico de operaciones simplificables con fracciones.
- Un ítems del tópico de ordenar números decimales.
- Dos ítems del tópico de intercalar entre dos números decimales dados un número decimal (densidad).

Los enunciados de los ítems del test ampliado se encuentran en el Anexo 1.

## **4.2. Segunda Etapa: Aplicación del Instrumento y Recogida de Datos Primarios**

Una vez elegido el instrumento para evaluar la habilidad de cálculo aritmético de una muestra de escolares de los grados 3º a 6º de Educación Primaria y de 1º y 2º de Educación Secundaria en el curso 2001-2002, según señala el Objetivo parcial 1.4 y, de acuerdo con la primera etapa, se inicia la segunda etapa del diseño de la investigación, que corresponde al trabajo de campo.

El desarrollo de esta etapa, que consiste en la aplicación del test Ballard ampliado a una muestra de estudiantes con las características descritas, se organiza a su vez, en otros tres momentos o pasos que, en este diseño, continúan los pasos descritos en la etapa anterior y que procedemos a presentar.

### **Quinto paso: realización de la segunda prueba piloto y decisiones finales**

Para validar la nueva versión del Test de Ballard ampliado, antes de realizar el trabajo de campo de nuestro estudio, procedemos a realizar una segunda prueba piloto. Esta aplicación y sus resultados fueron presentados en la memoria de tercer ciclo *Evaluación del rendimiento aritmético. Estudio y actualización de un instrumento*. Díez (2001, pp. 262–264).

Los fines a los que se atiende con esta segunda aplicación son los siguientes:

1º Constatar que se satisfacen las condiciones idóneas para efectuar la aplicación del Test de Habilidad de Cálculo Aritmético en las condiciones establecidas por el nuevo currículo de matemáticas derivado de la LOGSE. En particular, nos planteamos dos cuestiones:

El test es una prueba de ciento veinte ítems (aunque la segunda prueba piloto la efectuamos con 119). Las dos aplicaciones anteriores del test, necesitaron, al menos en los cursos superiores, más de una hora y cuarto para que los escolares pudieran responder a todas las cuestiones planteadas.

La organización usual del trabajo escolar en el curso 2000–2001 está hecha en sesiones de cuarenta y cinco minutos. Los escolares están acostumbrados a cambiar de actividad en cada sesión en el centro donde se lleva a cabo la prueba piloto, combinan sesiones de asignaturas de trabajo intelectual, con sesiones de asignaturas de trabajo físico o manual.

2º Comparar dos versiones distintas de hojas de recogida de las soluciones, con la finalidad de elegir la más adecuada para la aplicación definitiva.

Las decisiones relativas a la aplicación definitiva del test después de esta segunda prueba piloto, fueron:

Utilizar como instrumento final para la evaluación de la habilidad de Cálculo Aritmético de los escolares una prueba con 120 ítems de respuesta abierta a responder por los estudiantes (Anexo 3.1). Los cien primeros ítems corresponden con los cien ítems de la adaptación efectuada por García–Hoz del Test de Ballard, una vez adecuados a la situación escolar actual, y los veinte restantes corresponden a la ampliación del test descrita en el paso cuarto de este diseño.

Aplicar la prueba en dos sesiones de 45 minutos cada una, en dos días diferentes; en la primera sesión se deberá responder a 62 ítems de la prueba, los

51 primeros del Test de Ballard y los ítems del 101 al 111 ambos inclusivos de la ampliación del test. En la segunda sesión se responderá a 58 ítems, los 49 últimos ítems del Test de Ballard y los nueve ítems restantes de la ampliación.

Utilizar la versión completa de la prueba con los estudiantes de todos los niveles educativos considerados en el estudio. En cada sesión se repartirá a los estudiantes, las hojas con los ítems a responder (Anexo 2), junto con la hoja de respuesta para las soluciones y un folio en blanco para realizar las operaciones.

El quinto paso cumplió, pues, los objetivos previstos y proporcionó criterios para el trabajo final de campo, que hemos sintetizado en estas tres decisiones.

### **Sexto paso: selección de la muestra**

Para efectuar la aplicación del THCAB revisado y ampliado se seleccionó una muestra de alumnos instruidos con el currículo LOGSE.

El muestreo llevado cabo ha sido opinático o intencional, es decir realizado mediante un esfuerzo deliberado por obtener muestras "representativas" mediante la inclusión en la muestra de grupos supuestamente típicos y considerando razones de disponibilidad. Para ello se ha llevado a cabo una selección directa e intencionada de los grupos participantes en el estudio por parte del grupo de investigación, basada en su experiencia, juicio y conocimiento de la población. Los criterios de representatividad considerados se han centrado en los escolares de la ciudad de Ceuta y de la provincia de Granada, según las condiciones de disponibilidad mencionadas para la realización de este tipo de trabajos.

El diseño de este estudio no es experimental, ya que no se ha llevado a cabo un muestreo aleatorio por métodos probabilísticos. No pretende obtener una descripción válida para la población de escolares españoles del curso 2000-2001 sobre habilidad de cálculo aritmético.

La muestra, su composición y procedencia, se ha seleccionado atendiendo también al criterio de similitud con las muestras utilizadas en los estudios anteriores (García Hoz, 1950; Castro Martínez, 1975), con cuyos resultados se quiere establecer una comparación.

Las condiciones generales para la elección de la muestra fueron:

Tamaño estimado: 1.000 escolares.

Número de centros estimado: ocho centros que impartan Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria.

Estratificación: en condiciones similares a las de la aplicación del curso 1974-1975.

Finalmente, durante el mes de septiembre del año 2001 se solicita autorización escrita para llevar a cabo la prueba en 10 centros escolares, uno de

la ciudad de Ceuta y nueve de la provincia de Granada. Se recibe respuesta afirmativa de nueve de ellos, que son los que constituyen la muestra definitiva.

La muestra seleccionada la componen 974 alumnos, de entre 8 a 14 años de edad, de nueve centros escolares: siete colegios de Educación Primaria, seis de la provincia de Granada y uno de Ceuta, y dos institutos de Enseñanza Secundaria de la provincia de Granada. A efectos de codificación y tratamiento de los datos, sólo se consideran siete centros.

El criterio de estratificación del muestreo procura aproximarse en lo posible a la estratificación planificada en la investigación efectuada en 1975 que considera una diversidad de centros es decir:

- Que aparezcan centros públicos y privados.
- Centros de grande, mediana y pequeña población.
- Ambientes residencial, periférico, rural y de costa.
- Diferentes niveles de exigencia.

Los centros finalmente seleccionados por su disponibilidad, fueron:

Colegio Público de Educación Infantil, Primaria y Secundaria José Ortega y Gasset, centro urbano de la ciudad de Ceuta. Se encuentra situado en un barrio de clase media. Lo denominaremos abreviadamente: Ceuta.

Colegio concertado de Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato Compañía de María (Granada). Se ubica en el centro urbano de la capital granadina, situado en la zona centro de la ciudad, atiende a una población de clase media alta. Lo denominamos abreviadamente: Cia. María.

Colegio Público de Educación Infantil y Primaria Princesa Sofía de Huéscar (Granada) e Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) La Sagra de Huéscar (Granada). Aunque son dos centros independientes la mayoría de los alumnos del primer centro al finalizar los estudios de educación primaria continúan sus estudios en este instituto de educación secundaria. Para esta investigación los dos centros los consideramos como centro único. Huéscar es un pueblo rural de la zona norte de la provincia de Granada. A los dos centros los denominamos abreviadamente: Huéscar.

Colegio concertado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria Juan XXIII, centro urbano de la ciudad de Granada. Situado en un barrio periférico de esta ciudad, atiende a una población de clase media. Lo denominamos abreviadamente: Juan XXIII.

Colegio concertado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria San José de Cartuja es un centro urbano de la ciudad de Granada. Situado en un suburbio (Zona Norte) de esta ciudad, atiende a una población de clase media baja. Lo denominamos: S. José.

Colegio Público de Educación Infantil, Primaria y Secundaria Sierra Nevada es un centro urbano de la ciudad de Granada. Situado en un barrio periférico de esta ciudad, atiende a una población de clase media. Abreviadamente lo denominamos: Sierra Nevada.

Colegio Público de Educación Infantil y Primaria Sánchez Velayos de Ugíjar (Granada) e Instituto de Enseñanza Secundaria (IES ) Ulysea de Ugíjar (Granada). Aunque son dos centros independientes la mayoría de los alumnos del primer centro al finalizar los estudios de educación primaria continúan sus estudios en este instituto de educación secundaria. Igualmente, a nivel de esta investigación, consideraremos los dos centros los como un centro único. Los denominamos abreviadamente: Ugíjar.

La distribución de la muestra de alumnos por curso y centro se detalla en la siguiente tabla:

Tabla 3

*Distribución de la Muestra*

Centros	Cursos						Totales
	3º Pri.	4º Pri.	5º Pri.	6º Pri.	1º ESO	2ºESO	
Ceuta	24	22	25	21	26	18	136
Cia de María	25	25	25	30	25	30	160
Huescar	19	19	15	24	23	23	123
Juan XXIII	28	28	12	30	26	34	151
S. José	16	16	25	24	24	23	128
Sierra Nevada	22	25	37	25	30	21	160
Ugíjar	20	23	17	23	18	15	116
Totales	154	151	156	177	172	164	974

El tamaño de los grupos estuvo entre 15 y 30 alumnos, con un valor medio de 23 alumnos por curso.

Los resultados que se obtengan con esta muestra no son extrapolables a la totalidad de los escolares españoles. No obstante, la muestra, su composición y procedencia, permiten mantener la propuesta y el alcance de los dos objetivos enunciados para este estudio, con las limitaciones subrayadas teniendo en cuenta que satisfacen las condiciones básicas de los diseños cuasi-experimentales, tipo *ex post facto*.

### **Séptimo paso: procedimiento para la aplicación de la prueba**

La aplicación de la prueba se tuvo que efectuar en un plazo de tiempo breve. Un dato determinante para esta elección fue la proximidad de las fechas en que nuestro país efectuaba el cambio de la peseta y el antiguo sistema monetario nacional al euro y nuevo sistema monetario europeo, tras la incorporación de España a la zona euro.

En la revisión del THCAB no variamos las unidades monetarias en aquellos enunciados que las incluían, pues las nuevas unidades monetarias aún no eran de uso legal ni estaban en circulación, razón por la cual a los alumnos no se les había aún instruido sobre ellas y, sobre todo, no tenían conocimiento práctico de las mismas. La conveniencia de utilizar el antiguo sistema monetario y los plazos para su desaparición fueron circunstancias que limitaron el plazo para la aplicación de la prueba a los dos primeros trimestres del curso 2001-2002.

Para llevar a término la aplicación en el plazo de tiempo disponible, en condiciones similares para los diferentes centros seleccionados, se contó con la ayuda, como encuestadores, de los becarios de colaboración D<sup>a</sup> M<sup>a</sup> Consuelo Cañadas Santiago y D. Miguel García Pardillo, quienes llevaron a cabo la aplicación de la prueba en los diferentes centros, según el protocolo establecido y asesorados por el grupo de investigación.

La aplicación del cuestionario se realizó entre los días 02/11/2001 y 30/01/2002, dentro de los plazos y fechas establecidos. Durante la aplicación los encuestadores fueron los únicos adultos presentes en el aula, no habiéndose presentado ninguna incidencia especial ni quedado fuera de la aplicación ningunos de los cursos y centros seleccionados.

Antes de la administración de la prueba en cada centro se efectuó una reunión con el director y con algunos de sus profesores, para solicitarles orientación, contar con su apoyo y explicarles las características del estudio y de la prueba que se iba a realizar. Con posterioridad, se agradeció a los directores de los centros la colaboración prestada.

Para cada curso el test se aplicó en dos sesiones distintas. Las sesiones se realizaron en días consecutivos. Cada sesión tuvo una duración máxima de 45 minutos, si bien los alumnos podían entregar su encuesta antes de la hora de

finalización, por propia decisión si consideraban que habían terminado sus respuestas.

A cada alumno se le facilitaba un cuadernillo con las cuestiones, una hoja de respuestas y un folio en blanco para efectuar operaciones, en cada una de las sesiones para que trabajaran de forma individual.

Las instrucciones para la realización de las pruebas estaban impresas y eran leídas por el encuestador en cada sesión, previamente, al comienzo del trabajo de los alumnos, ver Anexo 2. Las instrucciones impartidas fueron:

Para la primera sesión:

- Lo que vas a hacer no es un examen. Únicamente queremos saber cómo los niños españoles resuelven distintas clases de problemas.
- Esta prueba contiene 62 cuestiones unas fáciles y otras difíciles. Es natural que no sepas contestar a todas. Pero haz lo que puedas.
- Cuando no sepas resolver un problema no te preocupes y pasa a la cuestión siguiente.
- Ten en cuenta que es más importante trabajar bien que deprisa.
- Si tienes que hacer alguna operación, hazla en la hoja en blanco que se te proporciona, escribe la contestación a cada pregunta en el recuadro en blanco que tiene el mismo número. Si no puedes resolver alguno deja el recuadro en blanco y continúa.
- En la hoja con las cuestiones no debes escribir.
- Una vez comenzada la prueba no se puede preguntar nada ni fijarse del compañero.
- No vuelvas la hoja hasta que se te diga.

Para la segunda sesión:

- Lo que vas a hacer no es un examen. Únicamente queremos saber cómo los niños españoles resuelven distintas clases de problemas.
- Esta prueba contiene 58 cuestiones unas fáciles y otras difíciles. Es natural que no sepas contestar a todas. Pero haz lo que puedas.
- Cuando no sepas resolver un problema no te preocupes, y pasa a la cuestión siguiente.
- Ten en cuenta que es más importante trabajar bien que deprisa.
- Si tienes que hacer alguna operación, hazla en la hoja en blanco que se te proporciona, escribe la contestación a cada pregunta en el recuadro en blanco que tiene el mismo número. Si no puedes resolver alguno deja el recuadro en blanco y continúa.
- En la hoja con las cuestiones no debes escribir.

- Una vez comenzada la prueba no se puede preguntar nada ni fijarse del compañero.
- No vuelvas la hoja hasta que se te diga.

Los encuestadores vigilan y atienden el desarrollo de la prueba. Marcan los tiempos y no proporcionan información que facilite la respuesta a los ítems. Comprueban que las hojas con las respuestas incluyen los datos requeridos y anotan el tiempo. Al concluir cada sesión elaboran un estadillo que incluye las incidencias, así como las horas de comienzo y fin de la aplicación. Con la realización de esta segunda etapa se da cumplimiento al Objetivo 1.4 de la investigación.

### **4.3. Tercera Etapa: Organización de los Datos**

Entre la aplicación del test y el tratamiento estadístico de los datos que se desprenden de las respuestas de los estudiantes, hay una tercera etapa que consiste en la obtención, para cada sujeto de la muestra, de los valores de las distintas variables de rendimiento establecidas para el estudio y en la organización de la base de datos. Al identificar el centro, curso, edad y respuesta a cada uno de los ítems por cada uno de los 974 estudiantes tenemos 123 valores que identifican al sujeto, según las variables señaladas. Los valores para cada una de las 974 filas de cada una de estas 123 variables/columnas, permiten organizar en forma de matriz los datos resultantes para las distintas variables. Para el logro del objetivo 1.5 es requisito el trabajo de esta etapa.

### **Octavo paso: variables independientes y datos**

La prueba se aplicó de manera anónima; tampoco se pidió a los estudiantes que identificasen su sexo. Las variables independientes, de identificación por cada uno de los sujetos fueron la edad en años y meses, el curso y el centro, que ocupan las tres primeras posiciones en la matriz de resultados.

Dadas las características del estudio y el proceso de elección de la muestra, no se han podido controlar las variables independientes.

Los 120 datos restantes por sujeto corresponden a valores dicotómicos (1 o 0) por cada uno de los ítems, según que la respuesta fuese, respectivamente, correcta, por un lado, o incorrecta o nula, por el otro.

Para cada uno de los ítems del test se estableció un protocolo de corrección, que determinaba las variantes de respuestas correctas o incorrectas en cada caso. Los becarios de colaboración fueron los encargados de hacer las correcciones de las pruebas según el protocolo y con un sistema de control de corrección doble, que determinó un alto índice de confiabilidad.

Como se ha dicho, los ítems sin respuesta reciben, igualmente, valor 0. Por este motivo la matriz de los datos carece de casillas vacías.

La otra variable independiente, el currículo, toma tres valores según los distintos currículos contemplados.

## **Noveno paso: volcado y elaboración de la base de datos**

Para apoyar el tratamiento y análisis estadístico de los datos se contó con la colaboración de una tercera becaria, D<sup>a</sup> Elisa Caballero. Su trabajo comenzó al elaborar la matriz de datos con el paquete estadístico SPSS versión 11, resultado de la información obtenida de los cuestionarios con las respuestas de los estudiantes.

## **Décimo paso: variables dependientes**

Según ya vimos en Díez (2001, pp. 11–17) el concepto de rendimiento es central para los estudios de evaluación basados en pruebas o test. La noción de rendimiento allí enunciada se operativiza mediante el cálculo de determinados porcentajes y se utiliza para caracterizar diversas variables. En nuestro estudio, como ocurre con los estudios basados en un test, las diversas variables dependientes se establecen en términos de la noción de rendimiento y de su determinación estadística.

Así, los *rendimientos generales de cada uno de los ítems* para esta aplicación son los valores medios singulares de los datos de cada una de las 120 últimas columnas; como los valores que se promedian son 0-s o 1-s, *el rendimiento de cada uno de los ítems viene dado por un porcentaje*, que expresa el tanto por ciento de alumnos que han resuelto cada ítem singularmente. El *rendimiento medio global de la prueba* es la media de los rendimientos de todos los ítems. El estudio de los rendimientos medios globales de cada uno de los ítems está subordinado a los objetivos de la investigación, que se centran, principalmente, en las expectativas de aprendizaje y la eficacia de un currículo, donde la noción de rendimiento es subordinada. En el Apartado 4 del Capítulo 5 se hace un seguimiento detallado del rendimiento de cada uno de los ítems para esta aplicación y en cada uno de los niveles, cuando se caracteriza el nivel empírico de cada uno de ellos.

Los *rendimientos por centros de cada uno de los ítems* resultan de considerar la anterior variable singularmente para cada uno de los siete valores de la variable *centros*, desechando los restantes. También puede hablarse de *rendimiento medio global por cada centro*. Los rendimientos por centros de cada uno de los ítems no tienen interés para esta investigación.

Igualmente puede atenderse a los *rendimientos por niveles de cada uno de los ítems* teniendo en cuenta singularmente cada uno de los seis valores de la

variable niveles. Estos valores dan ocasión a considerar el *rendimiento medio global por cada nivel*. Los rendimientos por niveles de cada uno de los ítems no tienen interés para esta investigación. Los estadísticos descriptivos generales por niveles obtenidos en este estudio se muestran en la Tabla 4:

Tabla 4

*Resultados Generales por Niveles de la Aplicación de Test Ampliado de Ballard*

Curso	N	Media	Mediana	Moda	Desv. Típ
3º Primaria	154	10,9351	10	7	5,3084
4º Primaria	151	16,8212	17	11	6,4354
5º Primaria	156	24,0000	24	26	7,9303
6º Primaria	177	35,5311	33	30	10,7143
1º ESO	172	43,4651	42	39	15,3167
2º ESO	164	59,5976	59	43	21,1163

A su vez, se pueden apreciar *los rendimientos por centro y nivel de cada ítem*, según los 42 valores que resultan de combinar las dos primeras variables, lo cual permite hablar de *rendimiento medio global por cada nivel y centro*. En la Tabla 7 de estadísticos descriptivos, que aparece en el apartado 4.5 de este capítulo, se encuentran los rendimientos correspondientes a la combinación de estas dos variables.

También se puede considerar el *rendimiento de un determinado bloque de contenidos* como el valor medio del rendimiento conjunto de todos los ítems cuyo contenido forma parte de ese bloque.

En todos estos casos estamos atendiendo a los valores medios o porcentajes de datos por columnas, singularmente, o por determinados agrupamientos de ellas.

Si consideramos ahora valores medios por filas, tomando los valores de los 120 datos correspondientes a cada sujeto, tenemos el *rendimiento individual de cada alumno* como la media de los datos o valores considerados en cada fila. Este rendimiento también viene dado como un tanto por ciento, que muestra el porcentaje de cuestiones resueltas correctamente por cada alumno.

De nuevo, si consideramos cada uno de los siete valores de la variable centro, cada uno de los seis valores de la variable nivel o cada una de las 42 combinaciones de las variables centro y nivel tendremos, respectivamente, los *rendimientos singulares y promedio de los escolares de cada uno de los centros*,

*los rendimientos singulares y promedios de los escolares de cada uno de los niveles, o bien los rendimientos singulares y globales de cada uno de los niveles y centros.*

#### **4.4. Cuarta Etapa: Tratamiento Estadístico de los Datos**

Efectuamos un estudio de los datos obtenidos en la aplicación del test, donde analizamos la fiabilidad de la prueba, la consistencia de los bloques temáticos en que los subdividimos teóricamente, así como la fiabilidad de cada uno de los ítems, que se desarrolla con cierta amplitud posteriormente. Para estudiar los índices de discriminación de los ítems (o de homogeneidad, puesto que el criterio es la puntuación total del test) se calculan las correlaciones biseriales puntuales corregidas, eliminando el efecto del ítem, y se calcula el índice Alpha si se elimina el ítem lo cual da el índice de fiabilidad de cada ítem. Finalmente se calculan los estadísticos de posición central y de dispersión de la prueba total, por centros y por cursos para efectuar el estudio de homogeneidad de la muestra.

#### **Undécimo paso: paquetes estadísticos**

Para el estudio de los diversos estadísticos de la prueba utilizamos los paquetes estadísticos SPSS versión 11 y STATGRAPHICS plus versión 5.0. Para su gestión contamos con la colaboración de la becaria D<sup>a</sup> Elisa Caballero experta en estadística y en la utilización de los paquetes estadísticos mencionados, además de los consejos recibidos de los Doctores D. Ramón Gutiérrez Jaímez, D. Andrés González Carmona y D<sup>a</sup> Nuria Rico Castro.

#### **Duodécimo paso: fiabilidad de la prueba**

Con la información obtenida en el test utilizado para evaluar la situación de los conocimientos y destrezas con el currículo actual, vamos a realizar unos análisis cuya finalidad es comprobar el alcance de la información recogida.

Para que la puntuación del test sea útil es necesario que éste sea fiable y válido. La fiabilidad del test indica su confiabilidad mientras que la validez indica si el test mide lo que se quiere medir. Usualmente el coeficiente de fiabilidad se expresa en términos de estabilidad o de consistencia, dependiendo del método utilizado para hallar dicho coeficiente. Su valor varía entre 0 y 1, de manera que el valor 1 indica máxima estabilidad o consistencia de las puntuaciones.

Hay varios procedimientos para su cálculo. Uno de los más empleados, cuando el test se realiza una sola vez, es el coeficiente alpha de Cronbach. Dicho coeficiente se basa en la consistencia interna y su ecuación viene dada por:

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\sum \sigma_j^2}{\sigma_x^2} \right)$$

donde : n es el número de ítems del test.

$\sigma_j^2$  es la varianza de un ítem ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

$\sigma_x^2$  es la varianza del test total.

Cuando los ítems son dicotómicos, como es nuestro caso, dicho coeficiente se particulariza en el coeficiente KR-20 de Kuder-Richardson.

$$KR - 20 = \frac{n}{n - 1} \left( 1 - \frac{\sum p_j q_j}{\sigma_x^2} \right)$$

donde: n es el número de ítems del test.

$p_j$  es la proporción de aciertos en el ítem j ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

$q_j$  es la proporción de fallos en el ítem j ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

$\sigma_x^2$  es la varianza del test total.

Cálculo de la fiabilidad del test y de los bloques temáticos.

El análisis de fiabilidad del test utilizado persigue medir el grado de consistencia interna de los bloques temáticos en los que se ha estructurado el mismo (Díez, 2001, pp. 25–28) según se indica también en el Apartado 4.1. de este Capítulo.

Con este objetivo se ha calculado el coeficiente alpha de Cronbach en cada uno de los bloques. En la Tabla 5 se observan los valores alcanzados por el coeficiente alpha sobre cada bloque temático; el resultado total es el coeficiente de fiabilidad del test.

Tabla 5

***Coefficiente Alpha de Cronbach por Bloques***

Bloques temáticos	Coefficiente alpha
Números naturales	0,9049
Sistema monetario español	0,8961
Medidas de tiempo	0,4587
Sistema métrico decimal	0,8744
Números racionales (fracciones)	0,9170
Números decimales	0,9107
Raíz cuadrada de números naturales	0,8898
Porcentajes	0,8151
Proporcionalidad	0,9272
Divisibilidad	0,8537
Media aritmética	0,7388

Magnitudes geométricas	0,6589
Total	0,9718

Como vemos en la tabla, el coeficiente de fiabilidad del test es 0,9718.

Como hemos indicado los ítems del test fueron subdivididos teóricamente en doce bloques temáticos, los valores del coeficiente alpha que se sitúan por encima de 0,8 avalan la fiabilidad de esta subdivisión. En la Tabla 5 se muestra que 9 de los bloques son fiables, quedando tres por debajo del valor 0,8: los bloques de media aritmética y magnitudes geométricas próximos al valor 0,8 expresado y, más separado, el bloque temático de las medidas de tiempo.

### Decimotercer paso: fiabilidad de cada uno de los ítems

El análisis de fiabilidad de los ítems, o la consistencia interna de estos, se suele efectuar a través de coeficientes de correlación corregida entre el ítem y el total una vez excluido el efecto del ítem y el coeficiente alpha excluido el ítem, que muestra el valor que tomaría el coeficiente alpha si se hubiese eliminado el ítem del test.

En la Tabla 6 se exponen los valores alcanzados para estos coeficientes por cada ítem:

Tabla 6

#### *Fiabilidad de los Ítems*

Ítems	Scale mean if ítem deleted	Scale variance if ítem deleted	Corrected ítem-total correlation	Alpha if ítem deleted
Ítem1	30,9467	426,5120	,0643	,9720
Ítem2	30,9867	425,2480	,1609	,9719
Ítem3	31,0031	424,8256	,1814	,9719
Ítem4	31,1096	422,0382	,2963	,9719
Ítem5	31,3791	422,9700	,1827	,9722
Ítem6	31,2602	419,1445	,3914	,9718
Ítem7	31,1230	420,0423	,4100	,9717
Ítem8	30,9713	424,9243	,2192	,9719
Ítem9	31,1977	419,9250	,3725	,9718
Ítem10	31,1373	422,7134	,2406	,9720
Ítem11	31,2674	417,3674	,4815	,9717
Ítem12	31,2807	418,9221	,3973	,9718
Ítem13	31,2203	419,9976	,3595	,9718
Ítem14	31,3279	415,4944	,5602	,9715
Ítem15	31,2572	419,7010	,3634	,9718
Ítem16	31,1496	418,6012	,4756	,9716
Ítem17	31,1711	417,9574	,4973	,9716

Tabla 6

*Fiabilidad de los Ítems*

Ítems	Scale mean if ítem deleted	Scale variance if ítem deleted	Corrected ítem-total correlation	Alpha if ítem deleted
Ítem18	31,2039	418,6568	,4391	,9717
Ítem19	31,3586	416,8005	,4893	,9716
Ítem20	31,3074	416,1516	,5319	,9716
Ítem21	31,6219	420,0179	,3592	,9718
Ítem22	31,4600	416,9256	,4808	,9717
Ítem23	31,4037	416,5569	,4978	,9716
Ítem24	31,7664	418,9526	,5337	,9716
Ítem25	31,8484	422,1965	,4433	,9717
Ítem26	31,7633	420,6978	,4112	,9717
Ítem27	31,7736	419,1292	,5323	,9716
Ítem28	31,7900	419,6840	,5198	,9716
Ítem29	31,7992	419,3935	,5588	,9715
Ítem30	31,7828	418,9641	,5593	,9715
Ítem31	31,8023	419,5496	,5534	,9715
Ítem32	31,8156	419,5680	,5825	,9715
Ítem33	31,8094	420,1052	,5256	,9716
Ítem34	31,8678	423,4235	,3812	,9718
Ítem35	31,7643	418,0921	,5892	,9715
Ítem36	31,8053	419,0718	,5968	,9715
Ítem37	31,8197	421,4177	,4421	,9717
Ítem39	31,8217	420,1815	,5481	,9716
Ítem40	31,8238	420,1843	,5532	,9716
Ítem41	31,8217	420,3497	,5343	,9716
Ítem42	31,8566	421,8871	,5007	,9716
Ítem43	31,8689	422,5059	,4865	,9717
Ítem44	31,8607	421,8103	,5249	,9716
Ítem45	31,8842	423,8132	,4071	,9718
Ítem46	31,7357	418,3485	,5334	,9716
Ítem47	31,8033	419,2597	,5777	,9715
Ítem48	31,8289	420,3040	,5571	,9716
Ítem49	31,8125	419,4387	,5852	,9715
Ítem50	31,8330	420,4818	,5536	,9716
Ítem51	31,8965	425,0057	,3096	,9718
Ítem52	31,4754	414,9040	,5833	,9715
Ítem53	31,5861	418,0193	,4521	,9717
Ítem54	31,5635	416,3754	,5298	,9716
Ítem55	31,6670	415,1290	,6571	,9714
Ítem56	31,6414	415,5697	,6121	,9714
Ítem57	31,6721	416,6862	,5722	,9715
Ítem58	31,6906	416,7780	,5828	,9715
Ítem59	31,7480	417,6636	,5933	,9715
Ítem60	31,7520	417,9200	,5823	,9715
Ítem61	31,7889	420,0395	,4921	,9716

Tabla 6

*Fiabilidad de los Ítems*

Ítems	Scale mean if ítem deleted	Scale variance if ítem deleted	Corrected ítem-total correlation	Alpha if ítem deleted
Ítem62	31,7408	417,7615	,5773	,9715
Ítem63	31,7387	416,8763	,6315	,9714
Ítem64	31,5789	413,9035	,6651	,9713
Ítem65	31,7316	416,8366	,6243	,9714
Ítem66	31,7244	416,1773	,6564	,9714
Ítem67	31,7439	417,1569	,6206	,9714
Ítem68	31,7900	418,7794	,5860	,9715
Ítem69	31,8955	425,1255	,2843	,9718
Ítem70	31,9037	425,4779	,2808	,9719
Ítem71	31,7797	419,1176	,5430	,9716
Ítem72	31,7900	420,2235	,4803	,9716
Ítem73	31,7695	418,9119	,5411	,9716
Ítem74	31,8125	420,7884	,4782	,9716
Ítem75	31,8268	421,2100	,4749	,9716
Ítem76	31,8566	422,5189	,4373	,9717
Ítem77	31,7664	418,9361	,5348	,9716
Ítem78	31,8023	419,4491	,5610	,9715
Ítem79	31,9078	425,6387	,2891	,9719
Ítem80	31,8023	418,3003	,6489	,9714
Ítem81	31,8658	423,2056	,3976	,9717
Ítem83	31,7766	418,5367	,5788	,9715
Ítem84	31,7510	417,7872	,5896	,9715
Ítem85	31,6855	417,3276	,5460	,9715
Ítem86	31,8012	420,0774	,5111	,9716
Ítem87	31,8135	420,2606	,5222	,9716
Ítem88	31,8340	420,7396	,5340	,9716
Ítem89	31,8904	424,4772	,3514	,9718
Ítem90	31,8730	423,0649	,4421	,9717
Ítem91	31,7992	418,8991	,5962	,9715
Ítem92	31,7982	418,6577	,6122	,9715
Ítem93	31,8023	418,7906	,6113	,9715
Ítem94	31,8227	419,7070	,5901	,9715
Ítem95	31,8945	424,5396	,3687	,9718
Ítem96	31,8975	424,8941	,3348	,9718
Ítem97	31,9078	425,5894	,2999	,9719
Ítem98	31,9139	426,4275	,1648	,9719
Ítem99	31,9119	426,1317	,2218	,9719
Ítem100	31,9180	426,7974	,0891	,9719
Ítem101	31,2008	420,7699	,3250	,9719
Ítem102	31,2336	420,3146	,3382	,9719
Ítem103	31,2725	419,8313	,3526	,9719
Ítem104	31,4703	417,2319	,4665	,9717
Ítem105	31,7777	419,5495	,5092	,9716

Tabla 6

*Fiabilidad de los Ítems*

Ítems	Scale mean if ítem deleted	Scale variance if ítem deleted	Corrected ítem-total correlation	Alpha if ítem deleted
Ítem106	31,8555	422,7965	,4064	,9717
Ítem107	31,8299	423,2264	,3102	,9718
Ítem108	31,8135	422,2606	,3634	,9718
Ítem109	31,8197	423,4033	,2806	,9719
Ítem110	31,8422	423,0725	,3465	,9718
Ítem111	31,3873	418,3134	,4115	,9718
Ítem112	31,3955	415,5357	,5489	,9715
Ítem113	31,7121	417,3150	,5718	,9715
Ítem114	31,4180	413,7492	,6371	,9714
Ítem115	31,8975	425,4151	,2495	,9719
Ítem116	31,4887	412,7383	,6945	,9713
Ítem117	31,6066	414,8358	,6301	,9714
Ítem118	31,7070	417,3828	,5624	,9715
Ítem119	31,6885	415,8311	,6366	,9714
Ítem120	31,6988	415,9748	,6386	,9714

En la tercera columna podemos observar las correlaciones biserial puntuales corregidas, eliminando el efecto del ítem. Es decir, son los índices de discriminación de los ítems (o de homogeneidad, puesto que el criterio es la puntuación total del test). En este caso lo que interesa es encontrar moderadas o altas correlaciones positivas, hecho que se verifica en la mayoría de los casos.

Siguiendo la interpretación de Martínez (1996), 88 de los ítems poseen un coeficiente de correlación biserial puntual corregida superior a 0,9 lo que indica que esos ítems tienen un funcionamiento satisfactorio en cuanto a su discriminación, lo cual supone el 73,3% de los ítems. Los ítems cuyo coeficiente de correlación está comprendido entre 0,29 y 0,39 no requieren apenas revisión, hay 17 ítems en estas condiciones que son el 14,2% del total.

Un total de 105 ítems de los 120 que componen el test se encuentran en los dos primeros grupos lo que supone el 87,5% de los ítems del test.

Los ítems cuyo coeficiente de correlación se encuentra comprendido entre 0,19 y 0,29 necesitan revisión, hay ocho ítems en esta situación lo que equivale al 6,6% de los ítems del test.

El resto de los ítems del test, es decir siete, poseen un coeficiente de correlación inferior o igual a 0,19 lo que nos indica que esos siete ítems deben ser revisados completamente, o eliminados cuando se quiera utilizar la prueba para discriminar entre alumnos.

Los resultados mostrados en la tabla, concretamente los referidos a la última columna muestran que, al eliminar un ítem, el coeficiente alpha prácticamente no varía del valor de alpha sin eliminar ningún ítem. Un aumento notable de dichos coeficientes significaría una reducción de la consistencia interna y el ítem debería ser eliminado pero como éste no es el caso ningún ítem debe ser excluido por este criterio.

#### 4.5. Quinta Etapa: Análisis Descriptivo

La segunda dirección del estudio estadístico propone efectuar el análisis descriptivo de la situación de la habilidad de cálculo aritmético de los alumnos encuestados, que han sido instruidos con el currículo LOGSE. Para ello nos basaremos en un análisis de los ítems del test por medio de los índices de dificultad de cada ítem en cada curso.

#### Decimocuarto paso: estadísticos descriptivos

Recogidos los resultados de la prueba, el primer balance consiste en agrupar los resultados de los éxitos o preguntas resueltas correctamente por los alumnos y calcular algunos de sus estadísticos descriptivos, que presentamos en la tabla siguiente:

Tabla 7

#### *Estadísticos Descriptivos*

Éxitos						
Curso	Centro	N	Media	Mediana	Moda	Des.Tip.
3º Primaria	Ceuta	24	16,1250	15,50	13	4,8751
	Cia de María	25	11,4800	11,00	6*	4,4546
	Huescar	19	7,2105	7,00	7	3,1899
	Juan XXIII	28	13,8929	15,00	16	5,2869
	S. José	16	6,0625	5,00	4*	2,6700
	Sierra Nevada	22	8,5000	8,00	8	3,7129
	Ugijar	20	10,0000	10,00	9*	3,7276
4º Primaria	Ceuta	22	18,5455	19,50	24	6,5518
	Cia de María	25	17,2400	18,00	11*	5,4489
	Huescar	19	14,6316	16,00	9*	8,0775
	Juan XXIII	21	18,3333	18,00	16*	4,4961
	S. José	16	12,0000	11,00	11	5,6804
	Sierra Nevada	25	20,2400	20,00	24	4,8501
	Ugijar	23	14,7826	14,00	10*	6,7484

Tabla 7

*Estadísticos Descriptivos*

5º Primaria	Ceuta	25	27,4400	26,00	22*	5,9096
	Cia de María	25	28,0000	27,00	33	6,1644
	Huescar	15	25,1333	26,00	26	7,7724
	Juan XXIII	12	28,5833	27,50	27*	5,2822
	S. José	25	14,8800	14,00	10	6,3267
	Sierra Nevada	37	25,7297	26,00	26	6,8664
	Ugijar	17	18,4706	20,00	20	5,6471
6º Primaria	Ceuta	21	39,0000	34,00	33	9,0830
	Cia de María	30	37,2667	37,50	41	9,4356
	Huescar	24	33,7083	30,50	30	10,9325
	Juan XXIII	30	35,9333	35,50	31	8,4156
	S. José	24	28,3333	27,50	33	8,3023
	Sierra Nevada	25	31,5600	30,00	24*	12,7543
	Ugijar	23	27,9130	28,00	14*	11,6538
1º de ESO	Ceuta	26	40,7692	45,00	27*	13,1341
	Cia de María	25	52,6400	54,00	59	14,4594
	Huescar	23	54,3043	56,00	36*	15,3754
	Juan XXIII	26	42,4231	40,00	32*	17,9068
	S. José	24	39,2083	39,00	39	8,5566
	Sierra Nevada	30	41,8667	40,50	35	12,7434
	Ugijar	18	30,6111	28,50	22*	12,5236
2º de ESO	Ceuta	18	66,6667	65,00	64*	23,5821
	Cia de María	30	73,1333	73,00	74	15,5513
	Huescar	23	61,6087	64,00	72	22,9262
	Juan XXIII	34	46,2941	44,50	33*	15,1528
	S. José	23	50,9565	49,00	56	12,1036
	Sierra Nevada	21	68,8095	68,00	52*	18,2965
	Ugijar	15	51,4667	43,00	41	26,9361

Nota: Existen varias modas pero se muestra el menor de los valores.

### Decimoquinto paso: homogeneidad de la muestra

Con los datos reflejados en la tabla anterior efectuamos el análisis de homogeneidad de la muestra con el fin de comprobar si los centros o los niveles estudiados se comportan como un bloque homogéneo; para realizar este análisis consideramos para cada nivel y cada centro el número de alumnos de dicho nivel y como estadístico descriptivo la puntuación media por centro o por nivel obtenida por los alumnos en el test.

A simple vista, los datos de la tabla anterior muestran que existen diferencias en la puntuación media total del test por niveles. Además, el centro parece también influir en dicha puntuación. Para analizar si esas diferencias son o no significativas aplicaremos el análisis de la varianza de un diseño en bloques completos aleatorizados.

Las hipótesis nulas que se contrastan son:

- $H_{01}$  No existen diferencias significativas en las puntuaciones medias de los diferentes centros.
- $H_{02}$  No existen diferencias significativas en las puntuaciones medias de los diferentes niveles.
- $H_{03}$  No existe interacción entre los niveles y los centros.

Contra las hipótesis alternativas correspondientes de que sí existen diferencias significativas y de que sí hay interacción entre los niveles y los centros. Los resultados obtenidos son:

Tabla 8

*ANOVA de la Variable Dependiente: Puntuación Media. Prueba de los Efectos Inter-sujetos*

Fuente	Suma de cuadrados tipo III		Media Cuadrática		
		gl		F	Significación
Modelo corregido	12334,312 <sup>a</sup>	11	1121,301	44,694	,000
Intersección	40968,139	1	40968,139	1632,959	,000
Curso	11645,993	5	2329,199	92,840	,000
Centro	688,319	6	114,720	4,573	,002
Error	752,649	30	25,088		
Total	54055,099	42			
Total Corregida	13086,960	41			

<sup>a</sup> R cuadrado = ,942 (R Cuadrado Corregida = ,921)

La Tabla 8 refleja que a un nivel de significación del 5%, las dos hipótesis relativas a la igualdad de puntuaciones medias para los centros  $H_{01}$ , o de igualdad de puntuaciones medias para los niveles  $H_{02}$ , van a ser rechazadas, ya que los p-valores asociados a los estadísticos F correspondientes (significación = 0,002 para los centros y significación = 0,000 para los cursos) son menores que 0,05 y esto quiere decir que las puntuaciones medias del test van a diferir significativamente según el centro considerado y también van a diferir según el nivel considerado.

En el análisis de la varianza se supone que las perturbaciones (residuos) son variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, \sigma)$ . Para comprobar estas hipótesis se recurre a diferentes representaciones gráficas y a distintos

contrastes. Estas representaciones y contrastes nos llevan a realizar una transformación de los datos para conseguir la homogeneidad de varianzas. Concretamente la transformación realizada es la raíz cuadrada, por lo que el análisis de la varianza se llevará a cabo sobre una nueva variable, cuyos valores son iguales a las raíces cuadradas de los valores de la variable puntuación media.

El análisis de la varianza para esta nueva variable lo presentamos a continuación:

Tabla 9

*Tabla ANOVA de la Variable Dependiente: Raíz. Prueba de los Efectos Inter-sujetos*

Suma de cuadrados tipo III			Media Cuadrática		
Fuente		gl		F	Significación
Modelo corregido	101,479 <sup>a</sup>	11	9,225	58,145	,000
Intersección	1206,328	1	1206,328	7603,221	,000
Curso	95,803	5	19,161	120,765	,000
Centro	5,676	6	,946	5,962	,000
Error	4,760	30	,159		
Total	1312,566	42			
Total Corregida	106,238	41			

<sup>a</sup> R cuadrado = ,955 (R Cuadrado Corregida = ,939)

Nuevamente, la Tabla ANOVA 9 refleja que a un nivel de significación del 5%, las dos hipótesis relativas a la igualdad de puntuaciones medias para los centros, o de igualdad de puntuaciones medias para los niveles van a ser rechazadas, ya que los p-valores asociados a los estadísticos F correspondientes (significación = 0,000 para los centros y significación = 0,000 para los cursos) son menores que 0,05; esto quiere decir que las puntuaciones medias del test van a diferir significativamente según el centro considerado y también van a diferir según el nivel considerado.

Tenemos pues que tanto la hipótesis  $H_{01}$  como la hipótesis  $H_{02}$  quedan refutadas: hay diferencias significativas en las puntuaciones medias de los diferentes centros y en las puntuaciones medias de los diferentes niveles.

Una vez confirmado este resultado se sabe que, al menos, existe una diferencia significativa entre algún par de medias entre centros y entre niveles, pero no entre qué par, o pares, se encuentran dichas diferencias. Especialmente

significativa es esta consideración para las diferencias entre centros. Para responder a esta cuestión empleamos diversas técnicas que se engloban bajo la denominación de *contrastes para comparaciones múltiples* y cuyo objetivo es identificar qué cursos o centros son estadísticamente diferentes y cuánto oscila el valor de esas diferencias. Dos de los métodos comúnmente utilizados son los de Tukey y de Scheffé. Con el de Scheffé no es necesario que los tamaños muestrales de cada grupo sean iguales, mientras que con el de Tukey sí. Dado que el número de observaciones por curso y de observaciones por centro es el mismo (7 y 6, respectivamente), el método adecuado es el de Tukey.

En el Anexo 3 se presentan las comparaciones múltiples resultantes entre los distintos Centros que configuran la muestra, de acuerdo con el método de Tukey.

Los valores expuestos en las tablas anteriores muestran que existen diferencias significativas entre las puntuaciones medias de los centros de Ceuta y San José de Cartuja, Ceuta y Ugíjar, Compañía de María y San José de Cartuja, Compañía de María y Ugíjar, Sierra Nevada y San José de Cartuja.

Veamos, pues, en la Tabla 10 la relación de grupos de centros homogéneos:

Tabla 10

*Grupos de Centros Homogéneos*

Centros	Grupos Homogéneos		
	Ceuta	Compañía de María	Sierra Nevada
Ceuta	X		
Compañía de María	X		
Sierra Nevada	X	X	
Juan XXIII	X	X	X
Huescar	X	X	X
Ugíjar		X	X
San José de Cartuja			X

Entendemos que la planificación estratificada de la muestra, que reúne centros de zonas rurales, de costa y urbanos y centros con diferentes circunstancias socioeconómicas y culturales de las familias, da lugar a los diferentes grupos de homogeneidad aparecidos en función de los centros. Como

nuestro interés se centra en tomar un término medio de todos los estratos planificados decidimos que, aunque se aprecien diferentes poblaciones estadísticamente hablando, trataremos la muestra como sujetos pertenecientes a una única población aunque existan problemas en la exportación de resultados.

Esta decisión la tomamos en función de que aparecen tres grupos de homogeneidad, sin embargo, con la relación de homogeneidad, cada centro se encuentra relacionado con el 50% de los centros de la muestra.

Analizamos ahora las comparaciones múltiples resultantes entre los grupos establecidas por la variable CURSO, cuyos datos se presentan en el Anexo 4.

La siguiente tabla resume los resultados de dichas comparaciones múltiples, indicando las relaciones de homogeneidad obtenidas entre cursos.

Tabla 11  
*Relación de Grupos de Cursos Homogéneos*

Cursos	Grupos Homogéneos de Cursos					
	3° P	4° P	5° P	6° P	1° ESO	2° ESO
2° ESO						X
1° ESO					X	
6° de Primaria				X		
5° de Primaria			X			
4° de Primaria		X				
3° de Primaria	X					

Los valores expuestos en el Anexo 4 y resumidos en la tabla anterior muestran que existen diferencias significativas entre las puntuaciones medias de todos los niveles. Queda así rechazada la hipótesis  $H_{02}$  sobre homogeneidad de niveles. Los alumnos de la muestra forman grupos homogéneos por cada nivel.

Esta división en grupos homogéneos de los diferentes niveles es natural pues los alumnos de dos niveles consecutivos poseen un año más de maduración y un curso más de instrucción escolar.

Concluimos aquí las cinco primeras fases del diseño de esta investigación, que se han iniciado con la elección, revisión y ampliación del Test Ballart de Habilidad de Cálculo Aritmético como instrumento para la recogida de información en este estudio, y han concluido con el análisis descriptivo de los resultados.

Según lo previsto en el Apartado 3.4 de este capítulo dedicado al diseño de la investigación quedan aún cuatro etapas por tratar. En lo que sigue vamos a

proporcionar una descripción escueta y general de los pasos que articulan cada una de esas cuatro etapas restantes pero no haremos su presentación en extenso en este capítulo ya que, dada su complejidad, cada una de ellas necesita un planteamiento más detallado y profundo a lo cual dedicaremos los siguientes capítulos.

#### **4.6. Sexta Etapa: Estructura Curricular del Programa Escolar y Aprendizajes Esperados**

Esta etapa aborda en tres pasos la consecución de los Objetivos 2.1, 2.2 y 2.3 de la investigación, para ello:

- delimita en el marco de la LOGSE las expectativas sobre el aprendizaje matemático escolar, en general y, en particular, sobre las habilidades de cálculo aritmético;
- identifica, mediante el análisis curricular, el nivel escolar a partir del cual cada uno de los ítems del Test de Ballard ampliado puede y debe ser resuelto correctamente;
- señala, en términos de porcentajes, los valores de idoneidad para cada uno de los ítems y objetivos al término de las etapas —Primaria y Secundaria— de la educación obligatoria, o bien, en nuestro caso, al término del periodo de formación considerado (segundo curso de ESO).

En esta sexta etapa del diseño de la investigación planteamos algunos conceptos y definiciones necesarios que permiten evaluar la habilidad de cálculo aritmético escolar derivada de un currículo.

#### **Decimosexto paso: Expectativas de aprendizaje sobre habilidad de cálculo aritmético**

El Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria, BOE 26-6-1991 (núm. 152, p. 21191) y el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio por el que se establecen las enseñanzas mínimas que corresponden a Educación Secundaria Obligatoria, BOE 26-6-1991 (núm. 152, p. 25481), concretan para el Sistema Educativo Español las directrices curriculares derivadas de la Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), BOE del 4-10-1990 (núm. 238, pp. 28927-28942).

La LOGSE fue derogada el 26-04-2006, fecha en que se aprueba la nueva Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE). La normativa curricular de la LOGSE tiene vigencia hasta ese momento en que entra en un periodo de transición hasta su sustitución por la nueva normativa derivada de la LOE.

Las directrices mencionadas organizan durante más de 15 años el currículo básico de todas las disciplinas curriculares, en particular el correspondiente al área de matemáticas, en términos de objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación.

En el momento de llevar a cabo nuestro trabajo de campo se encuentran vigentes la Ley 1/1990 (LOGSE) y los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas 1.006/91 y 1.007/91.

Las contenido que estructuran los programas de matemáticas para los escolares de 8 a 14 años de edad, los contenidos sobre Aritmética, los objetivos, expectativas de aprendizaje y habilidades de cálculo esperadas para los alumnos de los niveles 3º, 4º, 5º y 6º de primaria y los cursos 1º y 2º de secundaria, vienen establecidos en los mencionados decretos.

Según el RD 1.006/91, el estudiante de Primaria, entre otros objetivos, deberá:

4. Reconocer situaciones de su medio habitual en las que existan problemas para cuyo tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlos mediante formas sencillas de expresión matemática y resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes.
5. Utilizar instrumentos sencillos de cálculo y medida decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.
6. Elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, cálculo mental y orientación espacial para la resolución de problemas sencillos, modificándolas si fuera necesario.

Tales logros se llevarán a cabo mediante el dominio de los siguientes contenidos:

## 1. NUMEROS Y OPERACIONES

Conceptos.

1. Números naturales, fraccionarios y decimales.
2. Sistema de numeración decimal.
3. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y sus algoritmos.
4. Reglas de uso de la calculadora.

Procedimientos.

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

2. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios.
3. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
4. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
5. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos y a la exigencia de exactitud de los resultados.

#### Actitudes.

1. Curiosidad por indagar y explorar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.
2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.
3. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
4. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

## 2. MEDIDA

#### Conceptos.

1. Necesidad y funciones de la medición.
2. Unidades no convencionales.
3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal (longitud, superficie, capacidad, masa).
4. Unidades de medida de tiempo.

#### Procedimientos.

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.
2. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de manera exacta y aproximada.
3. Toma de decisiones sobre las unidades e instrumentos de medida más adecuados en cada caso, atendiendo al objetivo de la medición.
4. Expresión verbal del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

#### Actitudes.

1. Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana.

2. Gusto por la precisión apropiada en la realización de mediciones.
3. Curiosidad e interés por descubrir la medida de algunos objetos y tiempos familiares.
4. Tendencia a expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

El alcance de tales aprendizajes se pondrá de manifiesto por medio de los siguientes criterios:

1. En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución.

Este criterio está dirigido especialmente a comprobar la capacidad del alumnado en la resolución de problemas, atendiendo al proceso que ha seguido. Se trata de verificar que el alumnado trata de resolver un problema de forma lógica y reflexiva.

2. Resolver problemas sencillos del entorno aplicando las cuatro operaciones con números naturales y utilizando estrategias personales de resolución.

Con este criterio se pretende evaluar que el alumnado sabe seleccionar y aplicar debidamente las operaciones de cálculo en situaciones reales. Se deberá atender a que sean capaces de transferir los aprendizajes sobre los problemas propuestos en el aula a situaciones fuera de ella.

3. Leer, escribir y ordenar números naturales y decimales, interpretando el valor de cada una de sus cifras (hasta las centésimas), y realizar operaciones sencillas con estos números.

Con este criterio se pretende comprobar que el alumnado maneja los números naturales y decimales; igualmente, se trata de ver que sabe operar con estos números y que, en situaciones de la vida cotidiana, interpreta su valor.

4. Realizar cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos (algoritmos, uso de la calculadora, cálculo mental y tanteo), utilizando el conocimiento sobre el sistema de numeración decimal.

Este criterio trata de comprobar que los alumnos y las alumnas conocen las relaciones existentes en el sistema de numeración y que realizan cálculos numéricos eligiendo alguno de los diferentes procedimientos. Igualmente, se pretende detectar que saben usar la calculadora de cuatro operaciones.

5. Realizar estimaciones y mediciones escogiendo entre las unidades e instrumentos de medida más usuales, los que se ajusten mejor al tamaño y naturaleza del objeto a medir.

Con este criterio se trata de que alumnos y alumnas demuestren su conocimiento sobre las unidades más usuales del SMD y sobre los instrumentos

de medida más comunes. También se pretende detectar si saben escoger los más pertinentes en cada caso, y si saben estimar la medida de magnitudes de longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo. En cuanto a las estimaciones, se pretende que hagan previsiones razonables.

6. Expresar con precisión medidas de longitud, superficie, masa, capacidad y tiempo, utilizando los múltiplos y submúltiplos usuales y convirtiendo unas unidades en otras cuando sea necesario.

Con este criterio se pretende detectar que alumnos y alumnas saben utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, que saben convertir unas unidades en otras (de la misma magnitud), y que los resultados de las mediciones que realizan los expresan en las unidades de medida más adecuadas y utilizadas.

Estas expectativas de aprendizaje sobre aritmética escolar se refieren a toda la etapa de Educación Primaria. Por este motivo, al terminar este periodo, es decir, al comienzo de la Educación Secundaria, deben estar logradas.

A su vez, según el RD 1.007/91, el estudiante de Educación Secundaria Obligatoria deberá tener capacidad para:

Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación.

Tales logros se llevarán a cabo mediante el dominio de los siguientes contenidos:

#### 1. NÚMEROS Y OPERACIONES: SIGNIFICADOS, ESTRATEGIAS, SIMBOLIZACIÓN.

Conceptos.

1. Significado, uso y notación de los números naturales, enteros, decimales y fraccionarios.
2. Significado y uso de las operaciones con los diferentes tipos de números.
3. Proporcionalidad de magnitudes. Porcentajes.

Procedimientos.

1. Interpretación y utilización de los números, las operaciones y el lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
2. Transformación y aproximación de números de acuerdo con las necesidades impuestas por su uso.
3. Elaboración y utilización de estrategias personales de estimación de cantidades y cálculo mental.

4. Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con números enteros, decimales y fracciones sencillas.
5. Utilización de diferentes procedimientos para efectuar cálculos de proporcionalidad.
6. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números.

Actitudes.

1. Incorporación del lenguaje numérico, del cálculo y de la estimación a la forma de proceder habitual.
2. Reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de la calculadora y otros instrumentos para la realización de cálculos e investigaciones numéricas.
3. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones.
4. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier conteo, cálculo o problema numérico.
5. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos.

2. MEDIDAS, ESTIMACIÓN Y CÁLCULO DE MAGNITUDES.

Conceptos.

1. Medición de magnitudes. Unidades de medida.
2. Medida de ángulos. Sistema sexagesimal.
3. Fórmulas para el cálculo de longitudes, perímetros, áreas y volúmenes en figuras y cuerpos geométricos.

Procedimientos.

1. Expresión de las medidas de los objetos con la terminología y precisión adecuadas.
2. Medida de longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras utilizando fórmulas y otras técnicas.

Actitudes.

1. Disposición favorable para realizar, estimar y expresar correctamente medidas de objetos, espacios y tiempos cuando la situación lo aconseje.

El alcance de tales aprendizajes se pondrá de manifiesto por medio de los siguientes criterios:

1. Utilizar los números enteros, decimales y fraccionarios y los porcentajes para intercambiar información y resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana.

Se pretende garantizar con este criterio la adquisición de un rango amplio de destrezas en el manejo de los distintos tipos de números de forma que puedan compararlos, operar con ellos y utilizarlos para recibir y producir información.

El criterio se refiere a la utilización de números fraccionarios en situaciones reales y por ello con denominadores no excesivamente grandes, y con no más de dos operaciones encadenadas. Con respecto a los porcentajes, el criterio se refiere a su utilización como relación entre números y como operador en la resolución de problemas.

2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones, las potencias y las raíces cuadradas, con números enteros, decimales y fraccionarios, eligiendo la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.

A través de este criterio puede valorarse si el alumnado es capaz de asignar a las distintas operaciones nuevos significados, e interpretar resultados diferentes a los que se obtienen habitualmente con números naturales. Se pretende, además, que sean capaces de determinar cuál de los métodos de cálculo (escrito, mental o con calculadora) es adecuado en cada situación, y adoptar la actitud que lleva a no tomar el resultado de cálculo por bueno sin contrastarlo con la situación de partida.

Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica en situaciones diversas y utilizarlas para el cálculo de términos proporcionales y razones de semejanza en la resolución de problemas.

Por una parte, el alumnado ha de ser capaz de distinguir cuándo una relación es de proporcionalidad y cuándo no lo es a partir de la información de que se disponga: el propio análisis de la situación, representaciones gráficas, tablas de valores, etc. Por otra realizar cálculos que permitan averiguar cuartos proporcionales y razones de proporcionalidad. El dominio de la relación de proporcionalidad supone la capacidad de establecer y utilizar relaciones significativas entre las diversas formas de estudiarla: numérica, geométrica, gráfica y algebraica.

Estas expectativas también son terminales para la Educación Secundaria, por tanto no se puede exigir su logro completo hasta el término de dicha etapa, al finalizar el 4º curso de ESO. Esta consideración debe tenerse en cuenta a la hora de valorar los logros sobre habilidad de cálculo aritmético esperados en los cursos 1º y 2º de ESO.

Dentro del marco establecido por el currículo de matemáticas para la educación primaria y secundaria derivado de la Ley Orgánica 1/1990 de Organización General del Sistema Educativo, los logros de aprendizaje relativos a

la habilidad de cálculo aritmético por cada uno de los niveles no se establecen en los decretos y normas dictados por las autoridades educativas nacionales o autonómicas. Por el contrario, los logros esperados en cada nivel vienen establecidos por el proyecto educativo de cada centro, la planificación del departamento de matemáticas y la planificación propia de cada profesor.

Desde un punto de vista práctico, son los libros de texto que se utilizan en cada centro los que determinan los objetivos y habilidades específicos en que se concretan las expectativas de aprendizaje para cada materia, curso y centro. En particular, son los libros de texto de matemáticas los que establecen las capacidades y habilidades sobre cálculo aritmético para cada uno de los niveles y cursos considerados en este estudio. A partir del aprendizaje alcanzado en un determinado nivel los contenidos, junto con las conductas y objetivos operativos correspondientes, forman parte del dominio de conocimientos de los escolares en los siguientes niveles. Este estudio lo hicimos mediante el análisis curricular en Díez (2001), singularmente para cada uno de los ítems.

### **Decimoséptimo paso: nivel curricular de los Ítems**

El análisis curricular proporciona información valiosa sobre cada ítem. Por un lado, informa de cual es el nivel curricular teórico o nivel teórico de instrucción de cada ítem según cada programa, es decir, muestra el nivel básico en el cual un programa contempla y establece la enseñanza de los conocimientos necesarios para responder a dicho ítem. El Apartado 7 del Capítulo 4 se dedica a determinar el nivel teórico de instrucción de cada uno de los ítems del Test de Ballard, para cada uno de los tres currículos que se consideran en este estudio. Como se verá, son muchos los ítems cuyo nivel curricular teórico no es coincidente para los tres currículos, lo cual nos lleva a matizar las comparaciones entre ellos a partir de los resultados.

Por otra parte, recordamos que la aplicación del curso 2000–2001 se realizó en el primer trimestre, razón por la cual los contenidos establecidos para cada curso estaban aún en proceso de aprendizaje y, algunos, sin desarrollar. Por ello la habilidad de cálculo de los escolares que se evaluó correspondía, preferentemente, a contenidos y objetivos ya tratados en el curso anterior.

Las expectativas de aprendizaje de un ítem determinan el nivel a partir del cual un ítem del Test de Ballard debiera estar dominado. Si el nivel curricular teórico de un ítem corresponde al nivel  $n$  las expectativas teóricas de su aprendizaje deben cumplirse en el nivel  $n + 1$ .

El Capítulo 5 está dedicado a estudiar la evaluación del currículo LOGSE en lo que respecta a la habilidad de cálculo aritmético, según los resultados obtenidos por una muestra de escolares que han seguido ese programa y que han dado respuesta al test en el curso. Dicha evaluación la haremos mediante las

nociones de nivel curricular de los ítems, expectativas teóricas de aprendizaje que se derivan y resultados que se alcanzan empíricamente.

La Tabla 12 resume los niveles teóricos sobre expectativas de aprendizaje aritmético escolar para los ítems del Test de Ballard según el currículo LOGSE.

Tabla 12

*Nivel Curricular LOGSE de los Ítems del Test*

Edad	Curso	Ítems que se deben lograr por vez primera en cada nivel, según su número en la prueba	Total ítems por nivel que se han de superar
8-9 años	3º Educación primaria	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 101, 102, 103, 104, 107, 108, 109, 110 y 111	30
9-10 años	4º Educación primaria	22, 23 y 37 (además de los anteriores)	33
10-11 años	5º Educación primaria	24, 25, 26, 27, 28, 30, 38, 52, 53, 54, 55 y 56 (junto a los anteriores)	45
11-12 años	6º Educación primaria	29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 96, 105 y 106 (junto a los anteriores)	82
12-13 años	1º de ESO	39, 40, 41, 47, 48, 68, 69, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 116, 117, 118, 119 y 120 (junto con los anteriores)	106
13-14 años	2º de ESO	50, 51, 79, 80, 82, 89, 90, 98, 99, 112, 113, 114, y 115 (junto con los anteriores)	119

El ítem número 100 corresponde a un contenido que debe dominarse a partir de tercer curso, si bien se imparte en segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria.

## **Decimoctavo paso: idoneidad de los ítems y aprendizaje esperado**

En la concepción tradicional, un test como el de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard es un instrumento para evaluar alumnos, grupos o centros escolares. De este modo, cuando los resultados de la aplicación de un test proporcionan información sobre el rendimiento de los escolares, informan sobre su aprendizaje en relación con un programa, dicen cuán adecuado ha sido el trabajo de los estudiantes, o bien el trabajo del profesorado, visto el plan de formación en curso. Los valores que aquí se consideran son los rendimientos de los estudiantes, individualmente, de los grupos y de los centros.

El planteamiento de nuestra investigación invierte la perspectiva. Los objetivos específicos de los programas que consideramos en este estudio enuncian capacidades complejas, que engloban habilidades múltiples y conductas diversas. Cada ítem del Test de Ballard evalúa una conducta singular mediante el rendimiento de un grupo de estudiantes, conducta que se vincula con unos contenidos y objetivos específicos de los programas.

Los estudiantes son los informantes quienes, mediante sus respuestas a una prueba, ponen de manifiesto si en cada ítem se alcanza un logro adecuado para el nivel curricular que, de acuerdo con los programas y libros de texto, le corresponde. De este modo los estudiantes informan respecto a si el conjunto de ítems de un objetivo específico alcanzan o no rendimientos aceptables. Los rendimientos obtenidos por los distintos ítems que responden a una misma capacidad u objetivo específico proporcionan una medida del logro de dicho objetivo.

En la perspectiva de nuestro estudio nos proponemos evaluar distintos programa de formación en términos de su adecuación, en tanto puedan proporcionar determinados aprendizajes sobre habilidad de cálculo aritmético, según señalamos en el Objetivo 2.2.

Los programas establecen unas expectativas; el test evalúa unos conocimientos básicos que, de acuerdo con el análisis curricular basado en el programa, deben alcanzarse a partir de unos niveles determinados. En tanto los rendimientos de los distintos ítems que valoran un mismo objetivo específico sean idóneos podremos afirmar que el programa logró satisfacer o superar las expectativas propuestas; en tanto no alcancen un nivel suficiente, diremos que el programa no cumplió con sus propósitos.

El rendimiento de un grupo en un ítem es una medida parcial de satisfacción de las expectativas consideradas por un programa, y sus valores se encuentran en una escala de 0 a 100. Corresponde en este diseño establecer cuáles son los niveles de rendimiento de los ítems a partir de los cuales se consideran satisfechas las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares según el programa, y establecer distintas categorías de satisfacción a partir de esos niveles.

En la investigación Granada–Mats establecimos cinco categorías de objetivos conductuales a partir de un determinado concepto empírico de idoneidad basado en el rendimiento obtenido en pruebas de evaluación diseñadas de acuerdo con dichos objetivos. El concepto, los intervalos y categorías considerados fueron:

Un objetivo matemático es idóneo a nivel de un curso, si al menos el 75% de los niños lo entienden, lo aplican/recuerdan, y lo aplican.

a) Si supera el 90% de éxitos es codificado como muy fácil.

b) Si se obtiene entre el 80 y el 89% se estima como fácil.

c) Idóneo, del 70 al 79%

d) Del 50 al 69%, difícil.

e) Si se obtiene menos del 50% de respuestas correctas se considera muy difícil. (Rico, et al., 1985, pp. 29–30).

Este criterio resulta muy estricto para aplicarlo a los niveles curriculares establecidos, que no son otra cosa que convenciones decididas por el profesorado o por autores de libros de texto y relativas a un currículo. Por ello, hacemos una revisión de esta clasificación y, puesto que los objetivos son terminales, consideramos una versión actualizada de las categorías anteriores para la totalidad de los ítems, según los resultados alcanzados en el último nivel. Es decir, para esta investigación:

Un objetivo de habilidad de cálculo aritmético es *idóneo* para un currículo o programa de formación (LEEP, LGE, LOGSE o LOE) si los alumnos que siguen ese programa alcanzan un rendimiento estimado del 70% en el último curso con los ítems del Test de Ballard que lo evalúan.

Con mayor precisión:

a) Si supera el 80% de éxitos el objetivo es codificado *como fácil o dominado*.

b) Si obtiene entre el 60 y el 79% el objetivo se codifica como *idóneo*.

c) El objetivo se codifica *en proceso de aprendizaje* si obtiene entre el 40 y el 59%.

d) Del 10 al 39%, se codifica como *de iniciación*.

e) Si obtiene menos del 10% de respuestas correctas se considera *desconocido*.

Por otra parte, interesa también establecer un criterio en relación con el nivel curricular de cada uno de los ítems del test. En la Tabla 12 marcamos los *niveles curriculares teóricos* de cada uno de los ítems para el programa LOGSE; en el Capítulo 4 y en el Capítulo 6 presentamos los niveles curriculares de los programas de la LEEP y de la LGE. En nuestro estudio consideraremos también

*niveles curriculares empíricos*, que fijaremos para cada ítem en aquel nivel escolar a partir del cual obtenga un rendimiento igual o superior al 60%.

De acuerdo con las nociones de idoneidad y nivel curricular de un objetivo, esperamos que los objetivos para el programa LOGSE evaluados por el Test de Ballard sean idóneos, al menos. Igualmente esperamos confirmar empíricamente el carácter predictivo de los niveles curriculares establecidos teóricamente.

#### **4.7. Séptima Etapa: Evaluación del Currículo LOGSE**

Esta etapa constituye uno de los núcleos centrales de nuestra investigación, para cuya realización han sido necesarios la selección y diseño del instrumento, la elección de la muestra, la aplicación de la prueba, la organización y tratamiento de los datos, junto con el análisis descriptivo de los resultados obtenidos.

También ha sido necesario reflexionar sobre la perspectiva que adoptamos respecto a la evaluación de la habilidad de cálculo aritmético por medio de test como el de Ballard, y los conceptos introducidos de nivel curricular de un ítem y categorías de idoneidad de un objetivo específico. Al desarrollo de esta séptima etapa dedicamos la totalidad del Capítulo 5. Este capítulo lleva a cabo la evaluación del currículo LOGSE, dando cumplimiento a los Objetivos 1.3, 1.5, 1.6 y 1.7, sucesivamente. La evaluación se lleva a cabo por medio de los pasos que se detallan a continuación.

#### **Decimonoveno paso: contenidos curriculares del programa LOGSE**

El Capítulo 4 de esta memoria está dedicado al estudio teórico de los tres currículos que se contemplan en la investigación, desde la perspectiva de su evaluación y comparación mediante el Test de Ballard. Para llevar a cabo este estudio hemos identificado los contenidos que se presentan en cada uno de los niveles que organizan el sistema educativo para escolares entre los 8 y los 14 años, según cada uno de los programas contemplados.

Delimitar los contenidos curriculares del programa LOGSE por niveles contribuye a precisar el nivel curricular de los ítems del Test de Ballard para el programa LOGSE. La diversidad de clasificaciones de los contenidos de este programa, su análisis y el balance de reflexiones se detallan ampliamente en el Capítulo 4.

#### **Vigésimo paso: rendimiento de los ítems**

El Capítulo 5 de esta memoria está dedicado a analizar los resultados obtenidos y a clasificar la idoneidad de los ítems por bloques de contenidos en cada uno de los niveles. Para hacer esa clasificación se siguen las cinco

categorías de idoneidad antes establecidas, en cada uno de los niveles. Igualmente, se estudia la discriminación de los ítems por cada uno de los niveles.

### **Vigésimo primer paso: eficacia del currículo LOGSE**

Finalmente, para concluir la evaluación del currículo LOGSE se determinan los niveles curriculares empíricos de cada ítem y se comparan con los niveles teóricamente establecidos. Esta comparación permite establecer el concepto de *eficacia de un currículo*, es decir, el grado en que un currículo satisface el cumplimiento de sus expectativas sobre el aprendizaje de los escolares.

La eficacia siempre es relativa al programa y al instrumento de evaluación. En este caso se establece la eficacia del currículo LOGSE en relación con la habilidad de cálculo aritmético determinada por el Test de Ballard.

El trabajo realizado se encuentra desarrollado detalladamente en el Capítulo 5 de la memoria.

### **4.8. Octava etapa: Evaluación de los Currículos de la LEEP de 1945 y la LGE de 1970**

El proceso de evaluación de los currículos derivados de la Ley de Educación Primaria de 1945 y de la Ley General de Educación de 1970 siguen los mismos pasos ya establecidos para la evaluación del currículo LOGSE en la etapa anterior. Al desarrollo de esta octava etapa dedicamos la totalidad del Capítulo 6. Este capítulo lleva a cabo la evaluación del currículo LGE y, parcialmente, al currículo LEP dando cumplimiento a los Objetivos 2.3 y 2.4. La evaluación se lleva a cabo por medio de los pasos que se detallan a continuación.

### **Vigésimo segundo paso: contenidos curriculares de los programas LEEP y LGE**

Los trabajos realizados para este paso vienen descritos en el Capítulo 4 de esta memoria. El estudio de los contenidos curriculares de los programas LEEP y LGE se realiza conjuntamente con el estudio ya descrito de los contenidos del programa LOGSE, siguiendo las mismas pautas y reflejando los resultados en la misma estructura, para luego permitir su comparación.

### **Vigésimo tercer paso: rendimiento de los ítems según los Currículos LEEP y LGE**

El estudio del rendimiento de cada uno de los ítems del test Ballard para los currículos de la LEEP y de la LGE se obtuvieron por aplicación del test a las poblaciones escolares de los cursos académicos obtenidos por el Profesor Fernández Huertas en su investigación de 1948 publicada bajo el título *Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritméticas* (1950), los datos obtenidos por la profesora Castro Martínez en su investigación realizada en el curso 1974–1975, publicada con el título *El cálculo aritmético en la E.G.B.* (1975). En este caso nos limitamos a aceptar los datos finales de estos dos trabajos.

### **Vigésimo cuarto paso: eficacia de los currículos de la LEEP y la LGE**

Al igual que se ha descrito para el paso vigésimo primero, la eficacia de los currículos de la LEEP y de la LGE viene determinada por el grado en que estos currículos satisfacen el cumplimiento de sus expectativas sobre el aprendizaje de los escolares.

La eficacia, de nuevo, es relativa al programa y al instrumento de evaluación. En este caso se establece la eficacia del currículo de la LEEP y la eficacia del currículo de la LGE, en ambos casos en relación con la habilidad de cálculo aritmético determinada por el Test de Ballard.

## **4.9. Novena Etapa: Comparación entre Currículos por su Eficacia**

Cuando dos muestras de estudiantes siguen un mismo programa se pueden comparar por sus rendimientos globales o parciales según bloques de contenidos y en relación con una misma prueba. Sin embargo, esta comparación directa no es posible cuando las dos muestras siguen planes distintos de formación. Para comparar estas dos muestras necesitamos indicadores más elaborados.

Por ello, una vez delimitado el nivel curricular para cada uno de los ítems — *nivel curricular teórico*— en base a las directrices y desarrollos curriculares conexos, la aplicación del test a una muestra representativa de escolares formados en ese programa proporciona unos rendimientos por ítem en cada uno de los niveles, de cuya comparación se deriva el *nivel curricular empírico* de cada ítem.

De la comparación entre ambos niveles curriculares por bloques de contenidos se deduce el porcentaje de ítems cuyo logro se alcanza en el momento previsto, el de aquellos que se adelantan, y el de aquellos que se atrasan, según lo establecido por el programa.

La eficacia del currículo se basa en estos porcentajes ya que muestran el modo en que el programa previsto pudo cumplirse.

La eficacia de cada programa se puede establecer con una misma prueba o conjunto de pruebas, lo cual permite comparar los diversos resultados obtenidos en cada caso por medio de la noción de eficacia establecida, según lo señalado en los pasos vigésimo primero y vigésimo cuarto.

Dos programas diferentes obtendrán, necesariamente, rendimientos diferentes por bloques y por niveles cuando se aplique una prueba que evalúe contenidos comunes a los dos programas. Esto se hace evidente cuando determinamos el nivel curricular de cada uno de los ítems o cuestiones que forman parte de la prueba. No es probable que coincidan los resultados ya que tanto los contenidos como las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares varían por niveles en los diferentes programas.

Por ello conviene establecer un indicador que exprese cuánto se han cumplido las expectativas sobre el aprendizaje escolar, en cada caso en términos del mismo test o prueba de valoración común. La medida de esta eficacia de los programas permitirá la comparación de los dos o más programas respecto a los contenidos evaluados por la prueba.

En el Capítulo 7 se lleva a cabo la comparación entre los currículos de la LEEP, la LGE y la LOGSE, en base al Test de Ballard, sin considerar los 20 ítems utilizados para la ampliación.

## **5. Formulación de las Hipótesis de Investigación**

Concluida la descripción de las nueve etapas y los 25 pasos que articulan el diseño de esta investigación, procedemos a enunciar las hipótesis de nuestro estudio.

H1.- El nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del Test de Ballard para un determinado currículo es un buen predictor de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que se han formado según ese currículo.

H2.- Los objetivos específicos sobre habilidad de cálculo aritmético establecidos para un currículo de matemáticas alcanzan o superan el nivel de idoneidad cuando se evalúan mediante el Test de Ballard.

H3.- Las diferencias entre los rendimientos obtenidos por escolares que han seguido diferentes currículos en su formación matemática escolar medidos por el Test de Ballard son debidas a las diferencias en los niveles curriculares de cada uno de los ítems según los distintos programas.

Tanto el logro de los objetivos como la verificación de las hipótesis de la investigación se determinarán en el Capítulo 8 de Conclusiones de esta Memoria.

## **CAPÍTULO CUARTO**

# **ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA EN EL PERIODO 1945–2005**

### **1. Introducción**

En este capítulo efectuamos de modo sintético un estudio teórico, descriptivo y comparativo de los tres currículos de matemáticas para el periodo de la educación obligatoria en los que se centra nuestra investigación. Según hemos explicado en el Apartado 4 del Capítulo 2 de esta memoria se trata, en el primer caso, del currículo establecido por los Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria derivados de la Ley de Educación Primaria (LEP) de 1945; el segundo currículo es el de las Nuevas Orientaciones para la Educación General Básica derivado de la Ley General de Educación (LGE) de 1970; y, finalmente, las enseñanzas mínimas para matemáticas en la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria, derivadas de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990.

Este capítulo se centra, en primer lugar, en una comparación estructural de los rasgos básicos de las tres leyes en lo que afectan a nuestro estudio. En segundo lugar, se lleva a cabo una comparación de diversas componentes curriculares: los objetivos de aprendizaje, contenidos, metodología y criterios de evaluación propuestos para las matemáticas escolares por los cuestionarios, orientaciones y enseñanzas mínimas que se establecen en el marco de las leyes consideradas. En tercer lugar se caracteriza por edades la formación sobre aritmética y magnitudes prescrita en los tres programas, siguiendo categorías establecidas por el NCTM. En cuarto lugar, establecemos los niveles curriculares teóricos de cada uno de los ítems del Test de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard (THCAB) para cada uno de los programas, con el fin de comparar su ubicación y distribución, en cada caso, a lo largo de los cursos y fijar así el nivel de conocimiento esperado para los alumnos en cada uno de ellos.

Referencia de partida en el periodo considerado lo constituye la Ley de Instrucción Pública de 17 de julio de 1857, más conocida como Ley Moyano, la cual será fundamento del ordenamiento legislativo y de la estructura del sistema

educativo español durante más de cien años pues, aún con modificaciones, pervivió hasta la Ley General de Educación de 1970. La Ley Moyano fija los niveles del sistema educativo español en Primera Enseñanza, Segunda Enseñanza, Enseñanza Facultativas y Superiores de las Universidades y Enseñanzas Especiales, así como en centros profesionales específicos entre los que se encuentra el Título de Maestro. A partir de la Ley Moyano el sistema educativo español mantuvo en sus líneas básicas una estructura estable, si bien los avatares políticos y los conflictos sociales e ideológicos de la época impulsaron cambios y dieron lugar a distintas regulaciones curriculares.

## 2. Periodos, Documentos y Sistemática del Estudio

Nuestro periodo de estudio comienza después de la Guerra Civil, con la promulgación de la Ley de Educación Primaria de 1945. En el periodo comprendido entre 1857 y 1945 se mantiene la estructura del sistema establecido por la Ley Moyano y la continuidad de programas de las distintas materias, en particular los correspondientes a la primera enseñanza que incluyen los Principios de Aritmética, el Sistema legal de Medidas, Pesas y Monedas, y los Principios de Geometría (Rico y Sierra, 1997, pp. 102–106).

El primer currículo considerado en este trabajo es el establecido para Matemáticas por los Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria (pp. 63–78), publicados por Orden Ministerial de 6 de febrero de 1953 y editados por la Dirección General de Enseñanza Primaria del Ministerio de Educación Nacional en 1955. Los Cuestionarios Nacionales desarrollan lo establecido por la Ley de 18 de julio de 1945, de Educación Primaria (LEP). Llamaremos a este currículo primero *Currículo LEP de 1945*. La Ley de Educación Primaria de 1945 afecta a los niveles educativos de Primaria y extiende la escolarización obligatoria hasta los 12 años. La escolarización se prolonga durante un periodo de iniciación profesional de los 12 a los 15 años. Los Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria recogen los programas de las distintas materias para estos cursos.

A mediados de la década de los sesenta del pasado siglo se emprende una revisión crítica de las limitaciones y carencias del sistema educativo español que dio lugar al documento *La Educación en España. Bases para una política educativa*, conocido como *Libro Blanco para la reforma* (MEC, 1969), informe apoyado por el Banco Mundial. Este documento precede y sirve de orientación a un ambicioso trabajo de revisión y reestructuración de la totalidad del sistema educativo en España, que culmina con la aprobación de la Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (LGE). El segundo currículo que aquí estudiamos deriva de la LGE. Su publicación se hace mediante la Orden de 2 de diciembre de 1970 (pp. 29–33), que establece las orientaciones pedagógicas para la Educación General Básica, y la Orden de 6 de agosto de 1971 (pp. 71–78), por la que se prorrogan y completan las orientaciones pedagógicas para la Educación General Básica, en particular para

el área de matemáticas. Este segundo currículo lo llamamos *Currículo LGE de 1970*.

A partir de la Constitución Española de 1978 surge un nuevo marco sociopolítico y normativo que democratiza el funcionamiento de la sociedad española y regula las instituciones en todas sus facetas. La necesaria adaptación del sistema educativo a los principios constitucionales y la nueva realidad administrativa derivada de las competencias asumidas por las Comunidades Autónomas dan lugar a una nueva ley de educación: la Ley 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Basado en la LOGSE se publica el tercer currículo de nuestro estudio en el Real Decreto 1006/91, de 14 de junio, que establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación primaria, y en el Real Decreto 1007/91, de 14 de junio, por el que se establecen las correspondientes enseñanzas mínimas para la educación secundaria obligatoria (BOE 26.06.1991). En este caso la denominación asignada es *Currículo LOGSE de 1990*.

La Tabla 1 resume algunos descriptores de estos tres currículos:

Tabla 1

***Descriptores de los Documentos Legales y Curriculares Consultados***

Descriptores	Currículos		
	LEP 1945	LGE 1970	LOGSE 1990
Ley en que se fundamenta	Ley de Educación Primaria	Ley 14/1970 General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa	Ley 1/1990 de Ordenamiento General del Sistema Educativo
Fecha de aprobación de la Ley	17 de julio de 1945	4 de agosto de 1970	3 de octubre de 1990
Publicación en BOE	18.07.1945	06.08.1970, BOE 187, pp. 12525-12546	04.10.1990, BOE 238, pp. 28927-28942
Ministro que la promulgó	José Ibáñez Martín	José Luis Villar Palasí	Javier Solana Madariaga
Periodo de vigencia	25 años	20 años	16 años
Programa derivado	Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza	Orientaciones Pedagógicas para la Educación	Enseñanzas mínimas para la educación

Tabla 1

***Descriptores de los Documentos Legales y Curriculares Consultados***

	Primaria	General Básica	primaria. Enseñanzas mínimas para la educación secundaria obligatoria
Publicación del programa	Orden Ministerial, 6 febrero 1953	Orden 2 diciembre de 1970, (pp. 29-33) Orden 6 agosto de 1971, (pp. 71-78)	Real Decreto 1006/91, de 14 de junio (pp. 21191-21193 y Anexos). Real Decreto 1007/91, de 14 de junio (pp. 21193-21195 y Anexos)
Niveles que se regulan en la Ley	Regula la Escuela obligatoria, afecta sólo a los primeros niveles, no incluye educación secundaria	Ley general que regula todos los niveles del Sistema Educativo; afecta a toda la población	Regula el Sistema Educativo no universitario en un marco democrático. Se complementa con otras leyes: LOECE
Objeto del cambio legal/ Orientación de la Ley	Establece el nacional catolicismo educativo. Orienta la educación primaria en una línea tradicional y conservadora	Reforma integral del sistema educativo para impulsar la modernización del país. Orientación racionalista y tecnocrática	Adapta la estructura y funcionamiento del sistema educativo al marco legal constitucional y al europeo. Descentraliza en las CCAA y coordina con Europa

En lo que sigue trabajamos sobre estos tres programas. Para llevar a cabo su estudio utilizamos los documentos indicados con los que realizamos un análisis comparativo, atendiendo a los niveles y dimensiones curriculares que tienen incidencia en esta investigación. Al finalizar esta revisión de los programas enfocamos nuestra atención sobre los contenidos matemáticos –

conceptos y procedimientos- de los bloques de Aritmética y Magnitudes de aquellos cursos cuyos estudiantes tienen edades comprendidas entre los 8 y los 14 años, que son los temas y las edades de los estudiantes con que hemos llevado a cabo el trabajo de campo.

### **3. Componentes Relevantes del Sistema Educativo**

Las leyes educativas que consideramos difieren significativamente por el marco político, social y económico en que se promulgan, por los principios en que se basan, por la organización del sistema educativo que establecen, por la ambición de sus metas, por los fines educativos que sustentan, por la formación del profesorado que establecen, y otras muchas cuestiones relevantes. No es nuestra intención hacer una comparación exhaustiva de leyes tan diferentes. Por el contrario, centramos esta reflexión en el modo en que esas leyes abordan algunos componentes curriculares, con el propósito de contextualizar los currículos de matemáticas, singularmente en lo relativo al cálculo aritmético, en los momentos señalados para su comparación y posterior evaluación.

Consideramos explícitamente para el periodo de educación obligatoria las siguientes componentes curriculares a nivel de sistema educativo: el tratamiento dado por la LEP, la LGE y la LOGSE a los fines de la educación, la estructura y organización de la enseñanza y la formación del profesorado. Estas tres componentes programáticas son relevantes para este estudio por su incidencia en los resultados del aprendizaje escolar.

#### **3.1. Fines de la Educación**

Los fines de la educación establecidos por un currículo enuncian sus prioridades educativas, expresan el modo en que la sociedad concibe la educación de los más jóvenes, determinan y justifican de modo significativo y singular todas las decisiones posteriores para la organización y planificación del sistema. La importancia de los fines es reconocida en las tres leyes que estamos analizando ya que, todas ellas, enumeran sus fines o principios en su primer artículo. Estos fines no son muy extensos en su enunciado ya que tratan de sintetizar las ideas clave, los *por qué* de la educación en la sociedad española, los núcleos de pensamiento que justifican socialmente al sistema educativo (Rico, 1997; Rico y Lupiáñez, 2008).

La Tabla 2 muestra 20 enunciados de finalidades educativas establecidas en las leyes, organizados atendiendo a los cuatro tipos de finalidades del currículo, a sus cuatro dimensiones (Rico, 1997). La comparación muestra algún enunciado invariable a lo largo del tiempo. Por el contrario, hay otros con diferencias acusadas debidas, principalmente, a diferencias políticas e ideológicas. Los valores ético/formativos para los alumnos y la formación para el ejercicio profesional son dos finalidades reconocibles en las tres leyes. Los

condicionantes ideológicos mencionados muestran discrepancias entre los enunciados; también se aprecian saltos y discontinuidades en las prioridades establecidas por el legislador en los distintos momentos considerados.

Podemos sostener que la sociedad española ha mantenido a lo largo de estos 60 años unas prioridades formativas para los niños y jóvenes centradas en las cuatro ideas que expresan los tipos de finalidades: preparación intelectual y cultural; integración de valores éticos y actitudes morales; responsabilidad social, convivencia y preparación para la integración laboral; y, finalmente, desarrollo armónico de la personalidad, disciplina intelectual y hábitos de trabajo.

En lo relativo al currículo de matemáticas podemos afirmar que, por la tipología de sus finalidades, los sistemas educativos son comparables en sus diferencias y semejanzas. Las diferencias detectadas son inteligibles, corresponden a las lógicas producidas por el transcurso del tiempo en una sociedad europea de la segunda mitad del siglo XX. Los cambios experimentados por la sociedad española, cuya transformación social, avance cultural y desarrollo económico han sido considerables, tienen su reflejo en el sistema educativo.

Tabla 2

***Tipos de Fines para la Educación Propuestos en las Diferentes Leyes***

LEP 1945	LGE 1970	LOGSE 1990
<b>Fines conceptuales y culturales</b>		
Proporcionar la cultura general obligatoria. Preparar para ulteriores estudios y actividades de carácter cultural		Adquisición de conocimientos científicos, técnicos, humanísticos, históricos y estéticos. Preparación para participar activamente en la vida social y cultural
<b>Fines éticos y políticos</b>		
Formar la voluntad, la conciencia y el carácter en orden al cumplimiento del deber y a su destino eterno.	Formación en el concepto cristiano de la vida. Incorporar peculiaridades regionales de España. Espíritu de comprensión y cooperación internacional.	Respeto de los derechos y libertades fundamentales. Ejercicio de la tolerancia y libertad dentro de principios democráticos de convivencia. Respeto de la pluralidad lingüística y cultural de España.

Tabla 2

*Tipos de Fines para la Educación Propuestos en las Diferentes Leyes*

Fines sociales		
Infundir en el espíritu del alumno el amor y la idea del servicio a la Patria, de acuerdo con los principios del Movimiento.	Formación en la tradición y cultura patrias, la integración y promoción social y espíritu de convivencia.	Capacitación para el ejercicio de actividades profesionales. Formación para la paz, la cooperación y solidaridad entre los pueblos.
Contribuir a la orientación y formación profesional para la vida del trabajo agrícola, industrial y comercial.	Capacitación para el ejercicio de actividades profesionales; impulsar y acrecentar el desarrollo, social, cultural científico y económico del país.	
Fines cognitivos y de desarrollo		
	Formación humana integral, desarrollo armónico de la personalidad y ejercicio responsable de la libertad. Adquisición de hábitos de estudio y trabajo.	Pleno desarrollo de la personalidad del alumno. Adquisición de hábitos intelectuales y técnicas de trabajo.

### 3.2. Periodo de Enseñanza Obligatoria

El sistema educativo se estructura por etapas y ciclos, cada uno de los cuales se organiza por edades. Las tres leyes establecen la gratuidad y obligatoriedad universal durante unos años, que son conocidos como periodo de enseñanza obligatoria.

Estos tres currículos difieren tanto en su estructura y organización como en las edades para la enseñanza obligatoria, tal y como se pone de manifiesto en la Tabla 3. Una de las características más relevantes de los cambios educativos en España durante estos 60 años ha sido la ampliación progresiva de la enseñanza obligatoria desde la edad de 12 años, luego a 14 y, finalmente, a 16 años.

Tabla 3

***Estructura y Organización de la Enseñanza en los Diferentes Currículos***

LEP 1945	LGE 1970	LOGSE 1990
<b>Preescolar (hasta 5 años)</b>		
Periodo de iniciación Escuela Maternal: menos de 4 años Párvulos: 4 a 6 años.	Educación Preescolar Jardín Infancia: 2 y 3 años Escuela Párvulos: 4 y 5 años.	Educación Infantil 1 <sup>er</sup> Ciclo: hasta 3 años 2 <sup>o</sup> Ciclo: 4 a 5 años.
<b>Enseñanza Obligatoria</b>		
Enseñanza Elemental: hasta 10 años Periodo de perfeccionamiento: 10- 12 años.	Educación General Básica 1 <sup>a</sup> Etapa: 6 a 10 años 2 <sup>a</sup> Etapa: 11 a 14 años.	Educación Primaria: 6 a 11 años Educación Secundaria Obligatoria: 12 a 16 años.
<b>Enseñanza Postobligatoria</b>		
Iniciación Profesional: 12 a 15 años Bachillerato.	Bachillerato Unificado y Polivalente: 14 a 17 años Curso Orientación Universitaria: 17 a 18 años.	Bachillerato: 17 a 18 años.
<b>Periodo obligatorio y gratuito</b>		
De 6 a 12 años.	De 6 a 14 años.	De 6 a 16 años.
<b>Responsables del establecimiento de programas</b>		
Ministerio de Educación Nacional.	Ministerio de Educación y Ciencia.	Ministerio de Educación y Consejerías de Educación de las CCAA.
<b>Documentos curriculares y de apoyo</b>		
	Libro Blanco de la Reforma Educativa (1969).	Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo (1989). Diseño Curricular Base: Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria (1989).

A partir de la década de los 70 del pasado siglo la escolarización de toda la población ha sido universal durante el periodo obligatorio.

La descripción general de objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación para cada una de las etapas del sistema educativo aparece, en su caso, en las leyes.

Los cursos de cada una de las etapas se organizan por áreas, materias o disciplinas escolares. Los programas de las materias son competencia del Ministerio de Educación en cada momento, que ha publicado documentos normativos específicos con los programas, como se señala en la Tabla 1. Como se verá a continuación, en estos documentos complementarios hay un desglose detallado de los contenidos por cursos en cada una de las materias. También se enuncian objetivos específicos, se describen principios metodológicos y criterios para su evaluación. Desde la aprobación de la LOGSE en 1990, el Ministerio de Educación establece una parte de los programas, que se denomina *enseñanzas mínimas*; la otra parte es competencia de las Comunidades Autónomas.

Destacar que las matemáticas constituyen materia obligatoria en todos los cursos que configuran el periodo de enseñanza obligatoria para estos tres currículos.

### 3.3. Profesorado

La formación del profesorado de enseñanza obligatoria, singularmente del profesorado que imparte matemáticas, también ha experimentado cambios.

Tabla 4

Formación en España del Profesorado de Enseñanza Obligatoria

LEP 1945	LGE 1970	LOGSE 1990	
		Primaria	Secundaria
Denominación			
Maestro	Profesor de Educación General Básica	Maestro de Primaria	Licenciado en Matemáticas u otra especialidad
Formación previa / Prueba de acceso			
Primeros ciclos de Enseñanza Media/ Examen de ingreso	Curso de Orientación Universitaria/ prueba de acceso a la Universidad	Curso de Orientación Universitaria/ prueba de acceso a la Universidad	Curso de Orientación Universitaria/ prueba de acceso a la

Tabla 4

## Formación en España del Profesorado de Enseñanza Obligatoria

Centro de formación			Universidad
Escuela de Magisterio	Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de Educación General Básica	Escuela de Magisterio/ Facultad de Ciencias de la Educación	Facultad de Ciencias o de Matemáticas
Duración de la formación			
Tres cursos	Tres cursos	Tres cursos	Cinco cursos y Certificado Aptitud Pedagógica
Periodo de Prácticas			
Concurrente en Escuelas Anejas	Concurrente en Colegios Nacionales	Concurrente en Centros de Enseñanza Primaria	Consecutiva en Centros de Enseñanza Secundaria
Especialización			
Generalista: hasta 12 años	Generalista: hasta 10 años Especialidad en Ciencias: 11 a 13 años	Generalista para alumnos de hasta 11 años	Especialista en matemáticas para alumnos de 12 a 16 años
Grado académico			
Maestro Nacional	Diplomado Universitario	Diplomado Universitario	Licenciado, Ingeniero o Arquitecto
Niveles para los que habilita			
Enseñanza Elemental	Primer y Segundo ciclos de Educación General Básica. Tercer ciclo con especialización del maestro	Educación Primaria; especialidades en Educación Física, Música o Lengua Extranjera	Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

Tabla 4

Formación en España del Profesorado de Enseñanza Obligatoria

Acceso a la profesión			
Oposición para ingreso en el Magisterio Nacional	Oposición al cuerpo de Profesores de Educación General Básica	Oposición al Cuerpo de Maestros	Oposición al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria

Básicamente, los cambios ocurridos en la formación del profesorado se producen por la adaptación progresiva de los requisitos de formación a las sucesivas ampliaciones del periodo de educación obligatoria. Esto destaca en las especialidades de primaria y en la extensión de la obligatoriedad hasta los 16 años, establecidas por el currículo LOGSE de 1990.

En este plan de estudios la especialización se ha requerido tanto en primaria como en secundaria. En primaria, la norma estableció cursar una especialidad para impartir docencia en las materias de Música, Educación Física o Lengua Extranjera, lo cual llevó a especialidades propias dentro del Título de Maestro de Primaria. Esta especialización del maestro se hizo a costa de su menor formación en otras materias, como ocurrió en la preparación sobre matemáticas escolares, lo cual llevó a debilitar esta importante competencia profesional para el maestro de primaria.

La necesaria especialización disciplinar para los cursos de secundaria obligatoria introdujo el nivel del licenciado en la formación de los futuros profesores, junto con un complemento de formación pedagógica aportado por el Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP), certificado que ha estado vigente desde 1970 hasta 2010.

Mayores exigencias académicas en materias disciplinares para la formación del profesorado no implican un mayor dominio de las materias básicas del currículo de la enseñanza obligatoria; en particular, no implican un mayor conocimiento de las matemáticas escolares por parte del futuro profesor de estos niveles.

Los expertos sostienen que el nivel de conocimientos matemáticos y de educación matemática de los profesores incide favorablemente en la enseñanza y, por tanto, en un mejor conocimiento y dominio de las matemáticas escolares por parte de sus estudiantes, lo cual debe tener reflejo en los resultados de las pruebas aplicadas a los alumnos con las que se evalúan tales conocimientos. Pero no hay evidencias sólidas sobre tales implicaciones.

En nuestro caso, puesto que queremos valorar la incidencia de tres currículos de matemáticas y compararlos a partir de los resultados obtenidos en

una prueba de rendimiento, es conveniente mostrar el contexto en que se formaron los profesores que ejercían en esos momentos, con el fin de señalar los condicionantes que estuvieron presentes en cada caso e interpretar mejor los resultados obtenidos.

## 4. Los Currículos de Matemáticas

En la discusión sobre la noción de currículo hemos distinguido diferentes niveles y dimensiones, que utilizamos para este estudio y que hemos detallado en el Capítulo 2 de esta memoria. En el Apartado anterior hemos comparado los tres currículos desde un primer nivel de finalidades generales. También los hemos comparado desde el nivel de planificación de la Administración por medio de dos de sus componentes: estructura del sistema escolar y formación del profesorado; estas comparaciones se han llevado a cabo desde una perspectiva general.

Continuamos con el estudio descriptivo y comparativo de los currículos teniendo en cuenta su especificidad matemática. Comparamos ahora la conceptualización que hace cada programa del conocimiento matemático escolar y el tratamiento de las cuatro componentes del currículo como plan de actuación para el profesor: objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

### 4.1. Conocimiento Matemático

La Tabla 5 resume las descripciones que hacen los distintos currículos sobre las matemáticas escolares por medio de algunas ideas que sustentan.

Tabla 5

#### *Matemáticas Escolares*

---

LEP 1945

---

Materia formativa e instrumental. Proporciona un modelo de razonamiento.

LGE 1970

---

Área de expresión.

Funciones de las matemáticas son: Ordenar conocimientos y crear estructuras formales que los resuman y expresen. La matematización centra la estrategia de la resolución de problemas. Observación, experimentación y reflexión movilizan los canales inductivo y deductivo de las matemáticas. La matemática moderna es sólido fundamento de las estructuras formales.

LOGSE 1990

---

Área de educación.

Conocimientos que han evolucionado a lo largo del tiempo. Conjunto de modelos y procedimientos de análisis, cálculo, medida y estimación. Doble

---

Tabla 5

*Matemáticas Escolares*

---

carácter de ciencia exacta y deductiva, constructiva e inductiva, abstracción y empiricidad. Proporciona destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de ser utilizadas en casos particulares, que potencian las capacidades cognitivas de los alumnos. Instrumentos intelectuales para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir aspectos de la realidad. Valor funcional: conjunto de procedimientos para resolver problemas, subrayar aspectos y relaciones de la realidad no directamente observables, anticipar y predecir hechos, situaciones o resultados. Papel instrumental para formalizar otras disciplinas.

---

En este resumen se aprecia una evolución elaborada y compleja sobre los modos de entender las matemáticas escolares. Cada programa transmite una visión central distinta de las matemáticas escolares: Instrumentos para razonar (LEP), sistema de estructuras formales para “ordenar conocimientos” (LGE), disciplina que proporciona instrumentos intelectuales para “interpretar, representar, analizar, explicar y predecir aspectos de la realidad” (LOGSE).

Los distintos programas destacan el carácter formativo de las matemáticas escolares como hilo conductor de la disciplina, si bien, en cada caso, los énfasis varían. Conforme se avanza en el tiempo cada programa amplía, enriquece y, sustancialmente, modifica la propuesta anterior. El primer programa enfatiza el carácter instrumental del conocimiento matemático, el segundo programa las estructuras formales, mientras que el tercero destaca la riqueza cognitiva de los conceptos y procedimientos, para dar respuesta a cuestiones y problemas. La matematización y resolución de problemas ocupa un puesto importante en el segundo programa, mientras el tercero destaca el valor funcional de las matemáticas escolares. La observación, experimentación e inducción se señalan en el segundo programa; el carácter dual de los conocimientos matemáticos proporciona mayor fuerza a esas consideraciones en el tercer programa. La dimensión histórica de las matemáticas es una importante contribución del tercer programa.

En los tres programas se contemplan los aspectos instrumentales del cálculo y los hechos y destrezas básicos de la aritmética escolar. Por tanto podemos aceptar que los conocimientos requeridos para dar respuesta satisfactoria al Test de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard son compatibles con la consideración de la matemática escolar que sostienen cada uno de estos tres programas.

## 4.2. Objetivos

Como corresponde a sus fundamentos psicológicos estos programas establecen, en términos generales, niveles diferentes de objetivos: Hábitos/habilidades, Capacidades, Estrategias y Actitudes.

El currículo de la LEP se sustenta en una concepción conductista de las matemáticas:

Las repeticiones, el ejercicio constante de cada mecanismo adquirido, son indispensables medios didácticos; junto a ellos, el escalonamiento en los pasos sucesivos del aprendizaje, procurando además, adecuar el tipo de trabajo y ejercicios a las diferencias individuales (Cuestionarios Nacionales, p. 63).

El currículo de la LGE plantea el aprendizaje desde una concepción estructuralista de un alto nivel de abstracción, a veces de difícil comprensión:

...estructuras que el alumno maneja enlazan, cada vez más, las distintas áreas de expresión y de experiencia. Las bases de observación, experimentación y reflexión, dado el doble canal inductivo y deductivo de las matemáticas, están tanto en los hechos y fenómenos de la naturaleza como en los datos, hechos y relaciones estrictamente humanos, pues unos y otros son cuantificables y la expresión resultante del proceso es el símbolo numérico. De aquí la justificación de introducir la matemática moderna, cuyos procedimientos facilitan la creación de estructuras formales que permiten ser utilizadas en gran número de situaciones distintas (Nuevas orientaciones, p. 30).

Las dificultades de su puesta en práctica trataron de paliarse mediante propuestas neoconductistas, de las que tuvo que servirse desde sus comienzos.

En estos dos programas los objetivos enuncian Habilidades y/o Capacidades.

Por el contrario, el currículo LOGSE tuvo un fundamento cognitivo coherente y preciso, basado en una orientación constructivista, con una tipificación de los conocimientos en conceptuales, procedimentales y actitudinales (Coll, 1987).

En el transcurso de la educación secundaria obligatoria, los alumnos prosiguen un proceso de construcción del conocimiento matemático que ha alcanzado ya niveles considerables de desarrollo al término de la educación primaria... El desarrollo de la competencia cognitiva general de los alumnos, en estos años, y, en concreto, la posibilidad de llevar a cabo razonamientos de tipo formal abre nuevas posibilidades para avanzar en el proceso de construcción del conocimiento matemático (RD. 1007/91).

Los objetivos de aprendizaje en este programa son más complejos que el logro de simples capacidades; se enuncian también como logro de estrategias o como actitudes a incentivar en los alumnos.

La Tabla 6 muestra un resumen de los objetivos en los tres currículos para el periodo de educación obligatoria en cada caso.

Tabla 6

***Objetivos de Matemáticas para el Periodo de la Educación Obligatoria***

LEP 1945

Los conocimientos contribuyen a: razonar correcta y escalonadamente; plantear, resolver, discutir y comprobar la solución de problemas; sistematizar los conocimientos adquiridos; rapidez y precisión en el cálculo mental y escrito; lograr rigor y exactitud lógica; desarrollar hábitos de generalizar; desarrollar hábitos de corrección, laboriosidad y orden.

LGE 1970

Objetivos específicos: adquisición y logro de las capacidades de desarrollo de la intuición espacial; representación gráfica y construcción plástica; adquisición del vocabulario matemático básico; logro de mecanismos de cálculo operatorio; automatismos de razonamiento lógico; agilidad cálculo mental; crear estructuras formales; plantear simbólicamente situaciones problemáticas; interpretar funciones y tablas; leer y expresar datos cuantitativos.

LOGSE 1990

*Educación primaria*

Utilizar el conocimiento matemático para interpretar, producir y valorar informaciones; reconocer situaciones y problemas, interpretarlos y resolverlos mediante cálculos elementales; utilizar instrumentos de cálculo y medida; utilizar estrategias de estimación y cálculo mental; identificar formas geométricas en el entorno y actuar mediante ellas; recoger representar y sistematizar datos del entorno; apreciar y valorar las matemáticas en la vida cotidiana; identificar situaciones y problemas en la vida cotidiana que puedan ser resueltos por medios matemáticos.

*Educación secundaria*

Incorporar al lenguaje y a la argumentación formas matemáticas de expresión; utilizar el pensamiento lógico para formular, inferir, deducir y organizar información; cuantificar la realidad para interpretarla mejor; analizar situaciones, identificar y resolver problemas, utilizando recursos y estrategias; recoger datos para obtener información sobre fenómenos; representarlos gráfica y numéricamente; explicar la realidad desde perspectivas complementarias (determinista/aleatoria, finita/infinita, exacta/aproximada, etc.); identificar formas y relaciones espaciales; analizar propiedades; identificar elementos matemáticos en los medios de comunicación; actuar con modos propios de la actividad matemática; conocer y valorar las habilidades matemáticas propias; disfrutar de la creatividad.

Los objetivos generales concretan los fines de la educación para cada disciplina. Los objetivos específicos enuncian las expectativas de aprendizaje escolar sobre cada disciplina y para cada una de las etapas y ciclos del sistema

educativo. Cuando se considera el modo de entender el conocimiento matemático en cada programa se singularizan sus objetivos matemáticos.

Las habilidades de cálculo mental y escrito, dominio de sus mecanismos, uso de instrumentos y estrategias de estimación, tienen presencia continuada entre los objetivos enumerados. Entre las expectativas de aprendizaje permanentes para los escolares en el periodo de educación obligatoria que analizamos se encuentran las capacidades y habilidades para el cálculo aritmético, lo cual legitima comparar los programas mediante los logros alcanzados en este dominio. También es un invariante a lo largo de los tres programas la capacidad para plantear y resolver problemas.

La habilidad de cálculo aritmético destaca en los siguientes objetivos:

Tabla 7

*Objetivos de Matemáticas sobre Habilidad de Cálculo Aritmético*

LEP 1945	LGE 1970	LOGSE 1990
	Cálculo mental	
Rapidez y precisión en el cálculo mental	Agilidad en el cálculo mental	Utilizar estrategias de estimación y cálculo mental
	Cálculo escrito	
Rapidez y precisión en el cálculo escrito. Complementariedad del cálculo mental y escrito	Logro de mecanismos de cálculo operatorio	Utilizar instrumentos de cálculo
	Resolución de problemas	
Plantear, resolver, discutir y comprobar la solución de problemas	Plantear simbólicamente situaciones problemáticas	Primaria: Reconocer situaciones y problemas, interpretarlos y resolverlos mediante cálculos elementales. Secundaria: Analizar situaciones, identificar y resolver problemas, utilizando recursos y estrategias.

A su vez, la capacidad para sistematizar, organizar, interpretar y producir conocimiento e información por medio de las matemáticas aparece a lo largo de los distintos programas, con una riqueza progresiva de matices.

### 4.3. Contenidos

En este apartado conviene detenernos en las coincidencias y en las diferencias que detectamos entre los contenidos de estos tres programas. En particular, interesa establecer cuáles de los conceptos matemáticos básicos manejados en el Test de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard (THCAB) aparecen tratados, con independencia de la aproximación a la matemática que siga cada programa: formal o aplicada, disciplinar o cognitiva, estructural o fenomenológica, instrumental o funcional. Vemos, en primer lugar, cuál es la estructura con la que se organiza la presentación de los contenidos en cada uno de los programas.

Tabla 8

*Organización de los Contenidos en los Programas de Educación Obligatoria*

LEP 1945	LGE 1970	LOGSE 1990
Estructura		
Tres periodos: Elemental, Perfeccionamiento e Iniciación Profesional	Dos etapas: Primera Etapa y Segunda Etapa	Dos etapas: Enseñanza primaria y Enseñanza secundaria
Organización de programas		
Cursos	Niveles	Etapas
Desglose de temas		
Listado detallado de temáticas para desarrollar en cada trimestre,	Listado escueto de temas para desarrollar en cada nivel.	Contenidos agrupados por bloques temáticos para desarrollar en cada etapa. Presentan una organización cognitiva basada en: conceptos, procedimientos y actitudes

A continuación mostramos un resumen general de los enunciados de los temas, según aparecen tratados en los programas. Expresan el modo de entender en cada caso las matemáticas escolares:

Tabla 9

Resumen de los Contenidos de los Programas de Educación Obligatoria

---

LEP 1945

---

Números y operaciones: naturales, decimales, fraccionarios e irracionales; problemas aritméticos, cantidades, medidas, unidades, SMD; superficie y volumen; proporcionalidad de magnitudes; aritmética comercial; divisibilidad; geometría del plano y del espacio; figuras y cuerpos geométricos; semejanza; Pitágoras; escalas, mapas y planos; topografía; progresiones; Iniciación a las gráficas estadísticas; iniciación al álgebra.

LGE 1970

---

Conjuntos, operaciones y relaciones; naturales: SDN, operaciones, problemas; aplicaciones y funciones; geometría del plano y del espacio; ángulos, círculos y polígonos; medidas: longitud y superficie; divisibilidad; movimientos en el plano; igualdad de figuras; números racionales y decimales, estructura; segmentos y ángulos generales; área de figuras planas, volumen; números enteros; funciones de variable entera, gráficas, ecuaciones; proporcionalidad de magnitudes; aritmética comercial; semejanza; polinomios; ecuación de segundo grado; iniciación a la estadística.

LOGSE 1990

---

Bloques temáticos para Primaria:

Números y operaciones; medida; formas geométricas y situación en el espacio; organización de la información.

Bloques temáticos para Secundaria:

Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización; medida: estimación y cálculo de magnitudes; representación y organización en el espacio; interpretación, representación y tratamiento de la información; tratamiento del azar.

---

Subrayamos dos cambios que afectan a los contenidos y que se han producido durante el periodo que venimos considerando. Por un lado, la incorporación del álgebra básica de las funciones de primer y segundo grado, de sus gráficas y ecuaciones, a los contenidos obligatorios de las matemáticas escolares. Por otro, la presencia creciente de la organización y representación de una colección de datos y de sus medidas de posición, centrales y de dispersión.

En lo que se refiere a los contenidos evaluados por el Test de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballart (THCAB), en Díez (2001) hemos analizado y visto, ítem a ítem, que los contenidos que se evalúan en el test se trabajan en los tres programas.

Tales contenidos se pueden organizar en tres bloques comunes, que son:

Bloque I. Aritmética de los números naturales.

- Números naturales, sistema decimal de numeración, orden entre naturales, operaciones aritméticas, algoritmos de las operaciones, operaciones combinadas, problemas aritméticos de una y dos operaciones, cálculo mental.
- Divisibilidad.
- Potenciación y radicación.

#### Bloque II. Aritmética de los números racionales

- Números decimales, representación, lectura y escritura, orden entre decimales, operaciones aritméticas y problemas con números decimales.
- Porcentajes, cálculo de porcentajes. Media aritmética.
- Fracciones, representaciones, comparación y equivalencia de fracciones, operaciones y problemas con fracciones.

#### Bloque III. Magnitudes y aritmética de magnitudes

- Sistema métrico decimal. Unidades y medidas de longitud.
- Unidades y medidas de peso. Unidades y medidas de capacidad. Operaciones con cantidades de longitud, peso y capacidad.
- Medida del tiempo. Unidades temporales. Cambios y operaciones con medidas temporales.
- Sistema monetario. Unidades. Cambio y operaciones con cantidades de dinero.
- Proporcionalidad de magnitudes.
- Medidas en una circunferencia.
- Cálculo de superficies.

### **4.4. Metodología**

Las referencias a la metodología aparecen en los tres planes de estudio. En primer lugar, con carácter general, en uno o más artículos de las correspondientes leyes educativas. En segundo lugar, en los cuestionarios y programas específicos de matemáticas. En la Tabla 10 se presenta una síntesis de las referencias a la metodología de los tres currículos.

Tabla 10  
Metodología en los Programas de Educación Obligatoria

Normativa legal	Especificidad a las matemáticas
LEP 1945	
Reglas generales y obligatorias dictadas por el MEN, con margen para la iniciativa, recursos y procedimientos del maestro (Art. 39).	Respetar la observación espontánea e inteligente. Adecuar el trabajo y los ejercicios a las diferencias individuales. Adaptación al nivel individual del niño. Indicación ordenada de las operaciones. Evitar falsos conceptos y malos hábitos. No imponer propiedades que no estén al alcance del alumno. Apoyo en las representaciones gráficas. Desprenderse del material para alcanzar lo abstracto.
LGE 1970	
Los métodos didácticos fomentarán la originalidad y creatividad, para el desarrollo de aptitudes y hábitos de cooperación en los escolares (Art. 18).	Sugerencias de posibles actividades: Observación y manipulación; reconocimiento y resolución de situaciones problemáticas; intuición espacial; traducción del pensamiento cuantitativo en frases matemáticas; mecanismos y automatismos; vocabulario; relación, análisis, síntesis, abstracción y razonamiento lógico; creatividad.
LOGSE 1990	
Primaria: Se orienta al desarrollo general del alumno e integra sus experiencias y aprendizajes (Art. 14). Secundaria: Atiende a la pluralidad de necesidades, aptitudes e intereses de los alumnos (Art. 21).	Primaria: Partir de la experiencia, desde lo manipulativo, práctico y concreto hasta lo simbólico, abstracto y formal. Lograr el dominio funcional de las estrategias básicas del cálculo mental. Secundaria: La experiencia y la inducción desempeñan un papel predominante en el desarrollo del aprendizaje matemático. Las representaciones lógicas y matemáticas se adquieren a través de operaciones concretas, como contar, comparar, clasificar o relacionar.

Las reflexiones generales sobre metodología no muestran aportaciones singulares o específicas desde esta componente curricular. En los tres casos subrayan algún aspecto complementario de la actividad escolar o bien reiteran orientaciones ya presentadas.

Las consideraciones metodológicas contemplan aspectos relacionados con el cálculo aritmético de modo explícito en todos los casos. Destaca la valoración del mecanismo aritmético para el cálculo en los currículos de LEP y LGE. La propuesta de 40 variedades de actividades para el aula de matemáticas clasificadas en 9 tipos señala una mayor valoración de la metodología en el currículo de la LGE.

## 4.5. Evaluación

También la evaluación merece una consideración propia en cada una de las leyes educativas, las cuales afirman que la evaluación alcanza a alumnos y centros.

La LEP establece que la evaluación se obtiene mediante pruebas objetivas y se expresa con resultados estadísticos. La LGE sostiene que evaluar es la valoración del rendimiento, mientras que la LOGSE afirma que se trata de la valoración de los procesos de aprendizaje. Las características que se detallan en otros artículos de cada una de las leyes ponen de manifiesto la distinta interpretación que sobre el aprendizaje escolar hace cada una de ellas, de sus expectativas y objetivos y, principalmente, de los modos de expresar los resultados finales. También dedican consideraciones detalladas a regular las implicaciones administrativas que, a efectos de promoción del alumnado, tienen los resultados de las evaluaciones al término de los periodos formativos.

Tabla 11  
*Normativa Legal sobre Evaluación*

LEP 1945	LGE 1970	LOGSE 1990
La Inspección examinará cada año los resultados estadísticos de la Escuela y propondrá modificaciones (Art. 39) Todas las actividades están sometidas a comprobación por las Juntas Municipales, mediante pruebas objetivas dictadas por el MEN (Art. 40)	Es la valoración del rendimiento de alumnos y centros. Atenderá a la formación y a la instrucción en cada curso, mediante un sistema de pruebas. Habrá registro escrito de los datos y observaciones relativos a la formación del alumno y su capacidad para el aprendizaje (Art. 11)	Primaria: Valora los procesos de aprendizaje de los alumnos de modo continuo y global (Art. 15). Secundaria: Es continua e integradora (Art. 22)

La LEP y la LGE no contemplan ninguna consideración específica para la evaluación en las distintas áreas curriculares y, por tanto, no aportan reflexión propia para la evaluación en matemáticas. Por el contrario, la LOGSE incluye unos criterios de evaluación específicos para cada una de las materias. Estos criterios aparecen en los Reales Decretos que regulan las enseñanzas mínimas, tanto para la educación primaria como para la educación secundaria.

Los criterios muestran un cambio importante en la organización curricular marcado por esta ley. La organización de contenidos en la LOGSE, a diferencia de las leyes anteriores, no establece contenidos por cursos y niveles sino que

señala bloques de contenidos para el total de la educación primaria o secundaria. Cada centro hará su propia organización de esos bloques a lo largo de los distintos cursos, pudiendo darse un amplio margen de autonomía en las decisiones de los centros. Sin embargo, el currículo sí establece unas expectativas de aprendizaje al término del periodo educativo. La función de estos criterios de evaluación consiste en marcar un listado de conceptos, procedimientos y actitudes básicos, que todos los alumnos deben alcanzar al término del periodo.

En la Tabla 12 se muestra un resumen de los criterios establecidos para el área de matemáticas en el currículo LOGSE, donde destacan aquéllos criterios que se pueden vincular con los ítems del Test de Ballard.

Tabla 12

**Resumen de los Criterios de Evaluación del Programa LOGSE**

Criterios de evaluación para las Enseñanzas Mínimas LOGSE	
<i>Educación Primaria</i>	<i>Educación Secundaria</i>
13 criterios de evaluación:	13 criterios de evaluación:
a) Cinco de ellos centrados en la resolución de problemas:	a) Los tres primeros tratan sobre números y operaciones:
– Anticipar soluciones (1)	– Interpretación y uso de los números en la vida cotidiana (1)
– Resolver problemas con las cuatro operaciones (2)	– Resolución de problemas mediante las cuatro operaciones aritméticas (2)
– Escribir ordenadamente datos y operaciones (12)	– Cálculo con números aproximados y estimación de errores (3)
– Buscar soluciones (13)	b) Dos dedicados al álgebra
– Dedicado a la lectura y escritura de naturales y decimales (3)	c) Dos dedicados a la estadística y probabilidad
b) Tres centrados en cálculo y medida:	d) Uno dedicado a las magnitudes superficie y volumen
– Realizar cálculos numéricos (4)	e) Tres dedicados a la geometría:
– Realizar estimaciones (5)	– Conceptos y relaciones geométricas, movimientos y semejanzas
– Expresar y precisar medidas (6)	– Representaciones en el plano
c) Otros tres dedicados al uso y dominio de nociones geométricas (7, 8 y 9)	– Proporcionalidad numérica y geométrica
d) Dos dedicados a las representaciones gráficas y estimaciones estadísticas (10 y 11)	f) Uno dedicado a las pautas y regularidades numéricas y geométricas.
	g) El último dedicado a las estrategias sobre resolución de problemas

## **4.6. Balance de la Comparación Curricular**

En el Capítulo 2 hicimos una presentación de los cambios ocurridos a nivel internacional durante la segunda mitad del siglo XX en el currículo de las matemáticas escolares, así como de distintos modelos surgidos en esos años. Algunas de esas variantes y alternativas se han hecho evidentes en la revisión llevada a cabo para el currículo de matemáticas en España durante el periodo 1945–2005. Al comparar según niveles y dimensiones curriculares hemos detectado importantes diferencias entre los tres planes de formación estudiados. De este modo, hemos visto la transformación de un plan de estudios con una consideración instrumental de las matemáticas a otro de fundamento estructuralista y, a su vez, a un tercero que destaca por la riqueza cognitiva de los conocimientos y capacidades contemplados.

La conceptualización de las matemáticas escolares es un todo complejo. En ella se relacionan el modo de entender la propia materia con los fines educativos y formativos que le atribuimos junto con las estrategias elaboradas para su planificación y puesta en práctica. Cada programa ha mostrado una opción para la organización cognitiva y disciplinar de sus contenidos, para los modos de articular las expectativas sobre el aprendizaje escolar, para las oportunidades de aprendizaje que regula, para las demandas cognitivas que expresan las tareas y para la evaluación de los aprendizajes alcanzados. Cada uno de los programas muestra una coherencia interna considerable, también ciertas limitaciones y, en todos los casos, sus contradicciones. Los distintos apartados de este punto han sintetizado algunas diferencias y cambios ocurridos.

También hemos encontrado invariantes. En los tres programas se contemplan los aspectos instrumentales del cálculo y los hechos y destrezas básicos de la aritmética escolar, desglosada en destrezas con los naturales, destrezas con los racionales y destrezas con las magnitudes comunes del sistema métrico decimal. Según esto, podemos afirmar que por los conocimientos requeridos, por los objetivos esperados, por las oportunidades de aprendizaje reguladas así como por los instrumentos y criterios de evaluación establecidos, los estudiantes españoles de educación obligatoria que han seguido alguno de los planes y programas oficiales entre 1945 y 2005 han recibido formación matemática suficiente para dar respuesta satisfactoria al Test de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard (THCAB).

## **5. Programas para la Formación Aritmética Escolar**

Hasta el momento hemos trabajado con información procedente de documentos normativos, según indicamos en el Apartado 2. También hemos llevado a cabo en el Apartado 3 comparaciones sobre aspectos estructurales de las tres leyes y destacado en qué afectan a la formación matemática de los

escolares. Igualmente, a lo largo de distintos puntos del Apartado 4, hemos caracterizado, analizado y comparado la formación matemática escolar que prescriben globalmente los currículos de la LEP de 1945, de la LGE de 1970 y de la LOGSE de 1990, singularmente la formación aritmética, en términos de los objetivos, contenidos, metodología y evaluación propuestos para matemáticas por los cuestionarios, orientaciones y enseñanzas mínimas, dando cumplimiento a los Objetivos 1.1 y 2.1 de esta investigación.

Corresponde ahora caracterizar por niveles y ciclos la formación matemática escolar prescrita y esperada para cada uno de los cursos o niveles de la enseñanza obligatoria en cada uno de los tres programas.

El análisis curricular debiera proporcionarnos información suficiente para conocer el curso a partir del cual los alumnos disponen de los conocimientos adecuados para dar respuesta a cada ítem del test de Ballard. Sin embargo, los documentos curriculares no proporcionan tal desglose de contenidos por niveles. Como se indica en la Tabla 8 anterior, el desglose detallado de temas para cada curso solamente se prescribe para el currículo de la LEP de 1945 (pp. 65–82).

### **5.1. Contenidos Matemáticos para la EGB**

La estrategia elegida para disponer de un desglose detallado por niveles y por ciclos de los contenidos escolares de matemáticas para el currículo de la EGB, según la LGE de 1970, consistió en utilizar los resultados de la *Investigación Granada–Mats*.

En el informe final de esa investigación (Rico, et al., 1985) se resume el proceso detallado y exhaustivo que permitió desarrollar los cuestionarios de matemáticas para la EGB. El proceso se llevó a cabo mediante los siguientes pasos:

- Análisis de los cuestionarios por cada uno de los niveles, según bloques de contenidos (pp. 45–53).
- Transformación de los cuestionarios oficiales de cada nivel en temario de lecciones. Se elaboraron lecciones monográficas, de una quincena de duración para el segundo ciclo; para el primer ciclo las lecciones tienen orientación globalizada y son semanales. En todos los casos incluyeron indicaciones y recomendaciones para relacionar sus contenidos con otras lecciones del mismo nivel y bloque así como con lecciones de otros niveles del mismo bloque (pp. 54–85).
- Redacción de manuales escolares de matemáticas para cada uno de los niveles de la EGB. Los 56 temas de las Nuevas Orientaciones elaboradas por el Ministerio de Educación se convirtieron en 178 unidades didácticas que dieron lugar a ocho libros de texto, uno por nivel (Rico, et al., 1976, 1977 y 1978).

- Transformación de los cuestionarios en objetivos de aprendizaje; se redactaron 1774 objetivos operativos de los cuáles se evaluaron 789 (pp. 86–154).

La validez interna del Cuestionario de Matemáticas para la EGB establecido por la Investigación Granada–Mats viene dada por el diseño de la investigación, por su método de estudio y trabajo y por la discusión y evaluación de sus resultados (Sáenz, 1975; Rico, et al., 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979 y 1980).

La validez externa del Cuestionario de Matemáticas para la EGB estuvo determinada por los resultados obtenidos por los grupos escolares que siguieron la investigación mediante las pruebas de evaluación, por la evaluación externa de la propia investigación y por el equipo educativo de la Editorial Anaya que revisó y aprobó los libros de texto resultantes.

Por otra parte los grupos escolares que respondieron al THCAB en la aplicación de 1975 fueron alumnos implicados en la Investigación Granada–Mats, es decir, que estaban siguiendo los programas diseñados para esta investigación y usando los correspondientes libros y materiales.

En el programa de la LGE de 1970, el curso escolar en que se espera el logro del aprendizaje evaluado por cada ítem del THCAB se determina por la ubicación del correspondiente contenido en la investigación Granada–Mats.

## 5.2. Contenidos Matemáticos según la LOGSE

La estrategia elegida para disponer de un desglose detallado por niveles y por ciclos de los contenidos escolares de matemáticas para el currículo de la Educación Primaria y la Educación Secundaria, según la LOGSE de 1990, consistió en seleccionar, analizar y organizar los contenidos que presentaban los libros de texto que estaban utilizando en el curso 2000–2001 los alumnos de los centros que participaron en el trabajo de campo de este estudio. Los libros consultados fueron las ediciones comerciales de la editorial Anaya de los textos de matemáticas de 1º y 2º de Primaria (Ferrero, Jiménez y Martín, 1996) matemáticas de 3º a 6º de Primaria (Ferrero, Gaztelu, Martín y Martínez, 1997), matemáticas de 1º a 3º de Educación Secundaria Obligatoria (Colera, Gaztelu, Guzmán y García, 1996 y 1998). También se consultaron los textos de la editorial Santillana: matemáticas de 1º y matemáticas de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (De la Haza, Marqués y Nortes, 2003) y matemáticas de 3º y matemáticas de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (Santos, García, Vázquez, Nevot, Gil y Nortes, 1995).

Dado que el estudio pretende evaluar el rendimiento aritmético escolar por niveles y ciclos de unos estudiantes de primaria y de secundaria de una muestra determinada, parece coherente utilizar los libros de texto manejados por dichos

alumnos como referencia de las expectativas a satisfacer en cada uno de los niveles.

### 5.3. Comparación de los Contenidos por Edades en los Tres Programas

Una vez que se dispone de unos cuestionarios con los contenidos matemáticos para cada uno de los tres programas procede llevar a cabo su comparación. Para comparar los programas hemos adoptado los siguientes criterios:

1. Realizar la comparación de los contenidos según edad de los escolares. Para comparar los programas de los cursos de educación obligatoria tenemos en cuenta la coincidencia en edad de los escolares que lo cursan, sin atender la denominación del curso en cada caso. Así lo identificamos y resumimos en la Tabla 13.

Tabla 13  
*Edades y Niveles de Educación Obligatoria*

Edades	Leyes		
	LEP	LGE	LOGSE
6-7 años	1º curso Elemental	1º nivel EGB	1º curso Primaria
7-8 años	2º curso Elemental	2º nivel EGB	2º curso Primaria
8-9 años	3º curso Elemental	3º nivel EGB	3º curso Primaria
9-10 años	4º curso Elemental	4º nivel EGB	4º curso Primaria
10-11 años	1º curso Perfeccionamiento	5º nivel EGB	5º curso Primaria
11-12 años	2º curso Perfeccionamiento	6º nivel EGB	6º curso Primaria
12-13 años	1º curso Iniciación Profesional	7º nivel EGB	1º curso Secundaria
13-14 años	2º curso Iniciación Profesional	8º nivel EGB	2º curso Secundaria
14-15 años	3º curso Iniciación Profesional		3º curso Secundaria
15-16 años			4º curso Secundaria

2. Clasificar los contenidos de cada nivel según bloques de contenido disciplinar. Los bloques de contenido disciplinar considerados, que cubren los programas de todos los planes de estudio en los niveles comunes considerados, son: Álgebra, Aritmética, Estadística y Probabilidad, Geometría, y Magnitudes. Ahora bien, dado que el test de Ballard evalúa solamente contenidos de los bloques de Aritmética y Magnitudes, en esta investigación nos limitamos a clasificar estos contenidos según los bloques temáticos: I Aritmética de los

números naturales, II Aritmética de los números racionales y III Magnitudes y aritmética de magnitudes.

## 6. Clasificación de los Contenidos de Aritmética y Magnitudes

Nuestro propósito se centró en agrupar los contenidos de los tres bloques temáticos mencionados de manera que los programas fueran comparables. Tras revisar y valorar distintas posibilidades optamos por elegir los criterios de los estándares curriculares de matemáticas elaborados por el NCTM (2006), dado que están avalados por la comunidad de investigadores y resultan adecuados para los profesores de matemáticas y expertos en currículo.

### 6.1. Estándares de Contenido

Los estándares consideran los bloques de contenidos organizados según las capacidades generales a las que contribuyen, como muestra la Tabla 14 (NCTM, 2006; Rico y Lupiáñez, 2008).

Tabla 14  
*Capacidades a Desarrollar en los Escolares según Estándares de Contenido (NCTM, 2006)*

Estándares	Capacidades
Números y operaciones	<p>Comprender los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos</p> <p>Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras</p> <p>Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables</p> <p>Plantear y resolver problemas aritméticos de una y dos operaciones</p>
Medida	<p>Comprender los atributos mensurables de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medida</p> <p>Aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas</p>

Los estándares proporcionan un medio para la consideración conjunta de los contenidos que han estudiado los alumnos de una misma edad según distintos planes de estudio, muestran sus diferencias y semejanzas. Permiten clasificar los contenidos específicos concretos, en cada nivel y para cada plan, según las expectativas generales de aprendizaje enumeradas.

Dada la importancia y extensión del bloque de números y operaciones dividimos los contenidos de este bloque en dos: aritmética de los números naturales (Apartados 2 y 3) y aritmética de los números racionales, fracciones y decimales (Apartados 4 y 5). Establecemos los contenidos de cada uno de los programas mediante los documentos ya descritos en el Apartado 6.

A continuación presentamos una serie de tablas que comparan los contenidos de los tres programas en cada uno de los cursos evaluados. Primero, desglosamos y comparamos los contenidos del bloque de aritmética de naturales, seguidos por los del bloque de aritmética de racionales, con los estándares para números y operaciones. Seguidamente, mediante los estándares de contenido para medida, comparamos los contenidos de magnitudes y aritmética de magnitudes.

## 6.2. Comparación de los Contenidos de la Aritmética de Naturales

En lo que sigue presentamos una tabla por cada una de las edades escolares objeto del estudio, donde se recogen de manera resumida los contenidos sobre Aritmética de los números naturales en los tres programas para esa edad. Los contenidos se organizan según los estándares para Números y operaciones, que se han presentado en la Tabla 14.

Dada la peculiaridad e importancia del bloque de Aritmética de los números naturales y las diferencias entre los programas, presentamos su desarrollo desde el primer nivel de la educación obligatoria (6-7 años).

Tabla 15  
*Números Naturales. Contenidos para los 6-7 Años de Edad*

Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
LEP	LGE	LOGSE
Ejercicios de formación de grupos y series	Sistemas de numeración	Números del 0 al 100
Ordenación de objetos: el contar. Escritura y lectura de números hasta el 100	Numeración decimal	Relaciones más que, menos que, tantos como, muchos-pocos, Número mayor-menor
Representación gráfica de estos números. Ejercicios de contar y descontar hasta el 100: de uno en uno, de dos en dos y de cinco en cinco	Números hasta la centena	Relación número anterior-número posterior. Números ordinales hasta 10
El número 0. La decena y la docena. Doble y mitad. Contar por decenas, medias decenas, docenas y medias docenas	Lectura escritura y caligrafía	
	Números del 0 al 100	
	Relaciones más que, menos que, tantos como, muchos-pocos, número mayor-menor	
	Los signos "+", "-" e "="	
	Cardinales de conjuntos	
	La relación antes y después entre los números	
	Serie en la primera	

Tabla 15  
*Números Naturales. Contenidos para los 6-7 Años de Edad*

	decena Serie con decenas. Serie de los cien primeros números	
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Composición y descomposición de números dígitos Tratamiento monográfico de cada uno	Composición y descomposición del número en suma de dos sumandos. Composición y descomposición del número de dos cifras en decenas y unidades Adición de números Resta de decenas Sustracción de números de dos cifras	Sumas y restas con números de una cifra en horizontal y vertical Propiedad conmutativa de la suma. La suma llevando, la propiedad conmutativa, suma de tres sumandos, la resta llevando, prueba de la resta
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
Ejercicios de doble y mitad, de triple y tercio Realización de operaciones de sumas indicando el resultado y graduando su dificultad Idea de la resta: datos y resultados cuando las cifras del minuendo son mayores que las del sustraendo. Distintos casos de la suma y la resta Memorización Tablas de multiplicar	Automatización de la resta con números de una cifra. Restas con minuendo el número estudiado con todos los casos desde el sustraendo cero hasta el mismo número Restas con números de dos cifras sin llevarse y llevándose Sumas y restas de números de tres y cuatro cifras con distintas cifras. De la resta se excluyen casos de dos llevadas consecutivas Resolución de problemas	Suma de tres sumandos repetidos Resta de números de dos cifras Ejercicios de sumas y restas de números de tres cifras Sumas y restas llevándose
	Realización de problemas con las operaciones aprendidas	Problemas con las operaciones aprendidas

En este primer curso los tres programas coinciden en presentar los números naturales hasta el 100 y trabajar la secuencia numérica. El concepto que enfatizan en cada caso es distinto: El programa LEP se basa en el conteo y en la representación gráfica, el programa LGE en la noción de cardinal y en la

notación simbólica, mientras que el programa LOGSE subraya el aspecto ordinal. Los tres programas tratan la composición y descomposición de dígitos. Introducen la suma y la resta de números naturales, los signos más, menos e igual. Todos los casos destacan algunas relaciones entre números, si bien marcan líneas diferentes. Así, el programa LEP inicia las relaciones multiplicativas (doble y mitad) y pide expresamente memorizar la tabla de multiplicar; busca el automatismo en las operaciones. El programa LGE destaca la cardinalidad como base de la idea de número y refuerza las relaciones de anterior y posterior. Destacan explícitamente las composiciones y descomposiciones de números de una y dos cifras, cuya comprensión se busca en la cardinalidad. El programa LOGSE estudia el aspecto ordinal de los números y las relaciones mayor que y menor que; destaca las propiedades de las operaciones y hace recomendaciones para automatizar los algoritmos de la suma y de la resta. Los programas de la LGE y LOGSE establecen la realización de problemas con las operaciones estudiadas, si bien la explicación es diferente: en EGB a través de la teoría de conjuntos y en LOGSE por medio de situaciones de la vida real.

Tabla 16

*Números Naturales. Contenidos para los 7-8 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Revisión contenidos curso anterior. Numeración hasta la decena de millar	Números de tres y cuatro cifras, presentación, lectura y escritura	Números de tres cifras. Números anterior y posterior. Mayor que y menor que. Valor e posición de las cifras de un número
Representación de los números correspondientes. Idea de la centena. Contar y descontar por decenas y unidades, por grupos de dos, tres y cinco unidades hasta 200. Contar y descontar por centenas hasta el millar	Cardinal de un conjunto y construcción de conjuntos de un cardinal dado	Los números ordinales del 1º al 10º. Aproximación de números
Repaso de doble y mitad. Idea de triple y tercio. Numeración decimal. Valores absolutos y relativos de las cifras. Representación, lectura y escritura de números hasta la decena de millar	Introducción a los ordinales	Números pares e impares
	Seriación de los números estudiados. Reconocer si un número es par o impar	
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Repaso de las nociones de	Reconocer el nombre	La suma llevando, la

Tabla 16  
*Números Naturales. Contenidos para los 7-8 Años de Edad*

<p>doble y mitad. Idea de triple y tercio. Noción de la suma deducida de casos prácticos y elementales. Signos                  Mediante la suma inducir la noción de multiplicación y la formación de las tablas de multiplicar. Idea de la resta                  Datos y resultados cuando los números del minuendo son mayores que los del sustraendo</p>	<p>que corresponde a cada uno de los términos en una suma o una resta efectuada. Reconocer restas que no se pueden resolver en N.                  Multiplicación como suma de sumandos iguales. Extensión del formalismo para llegar a las potencias. El signo "x"                  Unión de conjuntos de igual cardinal                  Particiones de un conjunto. Iniciación a la división</p>	<p>propiedad conmutativa, suma de tres sumandos, valor y posición, prueba de la resta                  La multiplicación como suma de sumandos iguales creación de tablas                  Inicio de la división como repartos equitativos. Doble y mitad</p>
<p>Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables</p>		
<p>Ejercicios de doble y mitad, de triple y tercio. Realización de operaciones de sumas indicando el resultado y graduando su dificultad                  Idea de la resta, datos y resultados                  Suma y la resta en distintos casos. Memorización tablas de multiplicar. Multiplicación de los dígitos. Multiplicación con una cifra que no excede de 5 en el multiplicador</p>	<p>Sumas y restas de números de tres y cuatro cifras y con distinto números de cifras. Se excluyen casos de dos llevadas consecutivas                  Escribir el producto de dos dígitos. Escribir un número como producto de dos dígitos                  Partición de conjuntos. Inicio experimental de la división, repartir en dos o tres partes iguales números que no excedan de tres cifras</p>	<p>Ejercicios de sumas y restas de números de tres cifras                  Sumas y restas llevándose                  Prueba de la resta. Memorizar tablas de multiplicar, multiplicación en vertical                  División: doble y mitad                  Cálculo mental con sumas restas</p>
<p>Resolución de problemas</p>		
<p>Sencillos problemas de doble y mitad, triple y tercio a base de intuición                  Problemas de sumar sencillos. Pequeños problemas de restar. Problemas de multiplicar</p>	<p>Resolver situaciones prácticas de sumas con resultados menores a 10.000. Resolver situaciones prácticas de resta. Y de una suma y una resta</p>	<p>Problemas de suma y de resta. Problemas de suma y resta llevándose. Problemas de pruebas de restas</p>

En el segundo curso los programas LEP y LGE amplían el estudio hasta números de tres y cuatro cifras mientras que el programa LOGSE se limita a los números de tres cifras. Mantienen sus diferencias en cuanto a fundamento: conteo, cardinal, ordinal, respectivamente. Los programas LGE y LOGSE introducen las relaciones de paridad e imparidad; el programa LEP las relaciones de triple y tercio. Los programas LEP y LOGSE establecen el valor posicional de una cifra. Los tres programas avanzan en el dominio de las técnicas de la suma y la resta con los números estudiados, considerando diferentes casos particulares, como se ve en la Tabla 16. El programa LEP destaca los signos de la suma, el programa LGE destaca sus términos, y el programa LOGSE sus propiedades. El producto se presenta como suma de sumandos iguales en los programas LGE y LOGSE.

El programa LEP continúa su propuesta de trabajar las relaciones multiplicativas, la memorización de la tabla y el inicio en las destrezas de la multiplicación. Los programas LGE y LOGSE inician el estudio de la multiplicación y la división, con fundamento conjuntista en el primer caso. Continúa el progreso en los algoritmos de las operaciones con mayor énfasis en el programa LOGSE.

Los tres programas también proponen la realización de problemas sencillos y prácticos, vinculados con las operaciones y casos estudiados.

Tabla 17  
*Números Naturales. Contenidos para los 8-9 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Numeración hablada y escrita hasta la centena de millar Contar y descontar en grupos de dos, tres, cuatro, cinco y seis Numeración romana. Abreviaciones de la multiplicación. Potencias de exponente natural	Leer y escribir números hasta de cinco cifras Componer y descomponer números conociendo las cifras de los órdenes que los forman. Reconocer el orden de cada una de las cifras que forman un número. Conocer cuantas unidades de un orden se necesitan para formar una unidad de orden superior. Seriar números	La unidad, la decena y la centena. Valor de las cifras de un número. Los números ordinales. Unidad de millar, números de cuatro cifras. La decena de millar, los números de cinco cifras. Relaciones entre números. Aproximación de un número a la decena. Comparación de números Aproximación de números
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Multiplicación de enteros cuando tienen una o va-	Colocar sumandos con distinto número de cifras.	La suma y la resta y sus términos. La suma y la

Tabla 17  
*Números Naturales. Contenidos para los 8–9 Años de Edad*

<p>rias cifras en el multiplicador                      Partiendo de divisiones prácticas iniciar la división por 2, 3 y por 4.                      La división cuando el divisor es un dígito cualquiera</p>	<p>Reconocer el nombre de los términos de la división                      Realizar la prueba de la división</p>	<p>resta con llevadas. El orden de los sumandos.                      Sumas con varios sumandos. La prueba de la resta. Tablas de multiplicar. La multiplicación y sus términos. La división y sus términos. La división exacta. Relación entre el divisor y el resto.                      Prueba de la división</p>
<p>Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables</p>		
<p>Cálculo mental (contar y descontar por grupos, buscar múltiplos y divisores de números dados).                      Prácticas de productos por una o varias cifras.                      Divisiones por una y varias cifras                      Abreviaciones de la multiplicación (potencias)</p>	<p>Multiplicación de números naturales.                      Automatización de esta operación                      Efectuar productos con multiplicador de una o varias cifras. Multiplicar por la unidad seguida de ceros                      Efectuar divisiones con una cifra en el divisor</p>	<p>Sumas con llevadas, sumas con varios sumandos                      Restas con llevadas; prueba de la resta. Tablas de multiplicar. Doble y el triple. Multiplicar por la unidad seguida de ceros; por 20, 30, 200, 300, 2.000 etc. Tablas de multiplicar. Multiplicación y sus términos. División y sus términos. División exacta                      Relación entre el divisor y el resto. Prueba de la división                      Resolver divisiones exactas e inexactas                      Divisiones con dos o tres cifras en el dividendo, con ceros en el cociente.                      Cálculo mental: sumar y restar 11 o 9 o 18 a un número; sumar números de una cifra; sumar completando decenas, centenas; estimar sumas y restas; multiplicar por, 4, 6 ; calcular la mitad.</p>

Tabla 17  
*Números Naturales. Contenidos para los 8–9 Años de Edad*

	Resolución de problemas	
Sencillos problemas de división	Resolver situaciones prácticas mediante una o varias sumas; en las que haya que efectuar una resta; sumas y restas combinadas; un producto; dos productos y a continuación una suma o una resta; una división. Inventar enunciados de problemas que se resuelven con una suma propuesta, o con una resta propuesta, mediante un producto o una división dados	Ir paso a paso (sumar y restar). Buscar errores (problemas de restas). Estudiar casos posibles. Sobran datos (productos) Faltan datos (resta; productos y restas). Ensayar, experimentar, tantea (sumas) Con la ayuda de un dibujo (una suma y después una resta). Pon tú la pregunta (Suma y producto) Inventa un enunciado (Con producto, suma y resta; otro con división). Buscar todas las soluciones: descomposición de un número en sumandos)

En el tercer curso se extiende el sistema de numeración hasta los números de cinco cifras en los tres programas. En el programa LEP se presentan las potencias y el sistema romano de numeración; en el programa de la LGE se presentan los órdenes de las distintas cifras de un número y en el programa LOGSE se aproximan los números a un orden dado. El significado de la división avanza en los tres programas, denominación de los términos y prueba mediante divisiones sencillas. El programa LEP incluye el cálculo mental para este curso.

Los tres programas avanzan en los algoritmos con la suma, resta y producto; se incrementan los requisitos para adquirir fluidez con ejercicios de suma, resta y multiplicación dedicando más intensidad a esta última operación. También se trabajan los algoritmos de la división, si bien con mayor detalle en el programa LOGSE que en los otros dos.

La consideración de distintos tipos de problemas de estructura aditiva se plantea en los programas LGE y LOGSE, incluida la invención de problemas y el uso de recursos gráficos. El programa LGE sistematiza la resolución de problemas de una o dos operaciones según la estructura de operaciones que intervienen; el programa LOGSE sistematiza los problemas según el contexto y tipo de cuestiones que se proponen.

Tabla 18  
*Números Naturales. Contenidos para los 9–10 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Lectura y escritura de toda clase de números Numeración romana	Escribir y leer números naturales de hasta ocho cifras. Formar un número natural conocidas sus cifras según los distintos órdenes. Descomponer un número natural según los órdenes que lo forman	Números de seis cifras. Los millones. El valor de las cifras de un número. Comparación de números. Números ordinales. Números romanos
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Abreviaciones de la división. Casos más sencillos	Reconocer los términos de una división o escribir una división con unos términos propuestos. Realizar correcciones o comprobaciones en una división ya efectuada	Propiedades conmutativa y asociativa de la suma. La multiplicación y sus términos. Tablas de multiplicar. Doble y triple. Propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación Propiedad distributiva. La división y sus términos. La división exacta. División y multiplicación. La división inexacta. Prueba de la división. División como reparto. Divisiones equivalentes
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
Abreviaciones de la división. Casos más sencillos. Ejercicios de divisiones	Colocar y efectuar sumas de números naturales en el caso en que las sumas parciales lleguen a sumar más de 30. Colocar y efectuar diferencias entre números naturales incluyendo casos en que hay que llevarse tres veces consecutivas de cero u otras cifras,	Cálculo mental: estimar cantidades; sumar varios números de dos cifras; Sumar 99, 101;. Resta de números de varias cifras. Multiplicación por decenas, centenas y millares. Cálculo mental: Estimar productos y divisiones;

Tabla 18  
*Números Naturales. Contenidos para los 9–10 Años de Edad*

	indistintamente. Efectuar productos cuyo multiplicador tenga tres cifras. División entera. Automatización. Efectuar divisiones enteras cuyo divisor tenga como máximo tres cifras. Dividir entre la unidad seguida de ceros	multiplicar por 15; por 25. Divisiones de números de varias cifras. Divisor de dos cifras. Ceros intermedios y finales. Divisiones entre 10, 100 o 1.000
	Resolución de problemas	
Problemas mentales y escritos, en los que intervengan dos operaciones.	Resolver situaciones prácticas empleando solamente las operaciones de sumas y restas.	Ir paso a paso (suma y resta). Buscar datos (producto y suma). Faltan datos (resta y producto).
Problemas de división en que intervengan tres operaciones.	Resolver situaciones prácticas según los tipos $(a + b) \times c$ ; $a \cdot (b - c)$ y $(a - b) \times c$ .	Buscar errores (problemas de suma, resta y de multiplicación). Inventar preguntas.
Iniciación en la solución gráfica de problemas, junto a la numérica	Resolver situaciones prácticas según tipos $a \times b + c \times d$ ó $a \times b - c \cdot d$ . Resolver situaciones prácticas mediante una división; mediante un producto y una división consecutivas. Inventar enunciados de problemas en los que intervengan las operaciones estudiadas	Inventar posibles casos de una situación. Seguir un método. Inventar enunciados. Buscar errores (división y suma). Varias soluciones (suma y producto). Ir paso a paso (resta y división)

Los números en este nivel alcanzan el orden del millón; también se trabajan los números romanos. El significado de las operaciones está centrada en la división, si bien en el programa de la LOGSE destacan las propiedades estructurales de las operaciones. Los programas de la LGE y LOGSE establecen el estudio de una serie de casos particulares en las operaciones ya estudiadas y en los algoritmos que se derivan. El programa LOGSE destaca el cálculo mental y las estimación de resultados.

La resolución de problemas se presenta con detalle, si bien son distintos los énfasis en cada programa. Así, el programa de la LEP inicia la sección de resolución de problemas con las operaciones básicas estudiadas en cursos anteriores; se proponen problemas mentales y escritos, en los que intervendrán dos o tres operaciones, ejercicios y problemas de división, problemas en que

intervengan tres operaciones, a base de datos sencillos y relaciones fácilmente perceptible por el niño, iniciación en la solución gráfica de problemas, junto a la numérica.

En el programa de la EGB se señalan algunas estructuras de problemas con dos operaciones, que combinan las operaciones suma, resta, producto y división, para resolver como situaciones prácticas, incluidos problemas sobre la propiedad distributiva. El programa LOGSE marca diferentes contextos para la resolución de problemas con las operaciones suma, resta, producto y división, según distintas estrategias de resolución.

Tabla 19

*Números Naturales. Contenidos para los 10-11 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Ampliación de la numeración romana	Relación de coordinabilidad. Número natural. Construir conjuntos de cardinal dado. Determinar el cardinal de un conjunto. Orden de las cifras de un número. Calcular un cardinal en base 5	Valor de posición. Orden. Aproximación. Numeración egipcia y romana
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
	Operaciones con números naturales. Propiedades asociativa y conmutativa de la suma. Propiedades conmutativa y asociativa del producto. Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ ; Cardinal de $(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{card}(B)$ . Concepto de múltiplo y divisor	Suma y propiedades. Resta. Uso de paréntesis. Calculadora. Multiplicación. Propiedades. Calculadora: el sumando constante. Operaciones combinadas
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
	Operaciones con números naturales. Escribir los siete primeros múltiplos de un	Cálculo mental: Sumar o restar cien. Sumar o restar

Tabla 19  
*Números Naturales. Contenidos para los 10–11 Años de Edad*

número menor que 20. Reconocer cuales números son múltiplos de 2, 5 o 10. Escribir múltiplos comunes a dos números. Calcular el mínimo común múltiplo de dos números. Formar ordenadamente los divisores de números menores que 100. Divisores comunes de dos números. Máximo Común Divisor	números de varias cifras. Multiplicar varios números. Multiplicar un número de una cifra por otro de dos cifras. Multiplicar un número por 11; por 5; por 50; por 25 Dividir un número terminado en ceros entre 10, 100, 1.000. Dividir por la unidad seguida de ceros. Dividir un número par entre 2. Dividir un número entre 4. Dividir un número acabado en cero entre 5. Dividir un número acabado en ceros entre 25
Resolución de problemas	
	Problemas de suma y resta: Ir paso a paso; preguntas intermedias; Resolver por partes. Producto y suma: Sobran datos; Estimar el dato que falta; Tanteo y prueba; Dividir en; Hacer un dibujo. Producto, suma y división: Buscar errores; Preguntas intermedias. Producto, suma y resta: Inventar preguntas y enunciados. Busca posibles soluciones de una situación

Para este nivel se da por concluido el estudio del sistema decimal de numeración en el programa LEP. Los programas LEP y LOGSE amplían o completan el sistema de numeración romana; también revisan la formalización

del Sistema Métrico Decimal: mientras que el programa LGE lo enfoca mediante la cardinalidad con el estudio del sistema de base 5 mediante agrupamientos, el programa LOGSE plantea la noción de orden para insistir en el valor posicional de las cifras de un número y las estrategias de aproximación.

El programa LEP concluye en este nivel el estudio de la aritmética básica de los números naturales. El programa LGE estudia la estructura de las operaciones suma y producto de naturales en base a la cardinalidad e inicia el trabajo con los múltiplos y divisores de un número. El programa LOGSE dedica este curso a perfeccionar los algoritmos de la suma y del producto, destacando algunas estrategias y casos singulares. También dedica atención al cálculo mental y estrategias para la resolución de algunos casos de problemas aritméticos de dos operaciones.

Tabla 20  
*Números Naturales. Contenidos para los 11-12 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Magnitud, cantidad, unidad y número. Clases de números, aplicaciones. Divisibilidad por 2, 5, 10, 4, 3, 9, 25 y 125		
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
La división: datos, signo y resultado. Potenciación. Concepto y propiedades. Cuadrados y cubos de los primeros números naturales. El cuadrado de la suma indicada de dos números. La raíz cuadrada		Dividir descomponiendo el divisor. Potencias. Raíz cuadrada. Calculadora
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
El tercer caso de la división y el tanteo de la cifra del cociente. Ejercicios de potencias y raíces cuadradas		Suma, resta, multiplicación y división. Calculadora. Cálculo mental: Sumar y restar 99; multiplicar números por 11; 101; 21; 31; 41; 9; 99; 19; 29; 39; 5; 50; 15; 25; 250. Estimar productos y

Tabla 20  
*Números Naturales. Contenidos para los 11–12 Años de Edad*

Resolución de problemas	
	cocientes. Dividir un número entre 5; 50 y 25
Problemas con la potenciación	Ir por partes. (Producto, suma y resta). Sobran datos. Producto y suma: Estimar la solución. Resta y división: Buscar errores. Empezar el problema por el final. Productos y restas: Hazlo con datos más sencillos. Hacia la generalización. Series numéricas

El currículo de la LEP introduce en este curso el estudio de la divisibilidad y de las potencias, singularmente de cuadrados y cubos. El currículo de la LGE se centra en este curso en el estudio de las fracciones y decimales; por ello no se presentan de modo explícito nuevos contenidos sobre la aritmética básica de los números naturales; se revisa el sistema decimal de numeración.

El programa de la LOGSE introduce las potencias y raíces, el trabajo con la calculadora, el cálculo mental y la estimación. Este programa detalla y amplía varias estrategias para la resolución de problemas aritméticos de dos operaciones.

Tabla 21  
*Números Naturales. Contenidos para los 12–13 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
La regla de tres simple y compuesta	Construcción del conjunto de los números enteros. El grupo aditivo de los números enteros. El anillo de los números enteros	Sistema de numeración decimal y posicional. Descomposición polinómica de números naturales. Sistema de numeración romano
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Potenciación y radicación. Múltiplos y divisores de un número. Repaso y	Suma y producto de números enteros. Potencias de exponente natural. Base y	Multiplicación: Propiedades División exacta. División entera. Propiedades

Tabla 21

*Números Naturales. Contenidos para los 12-13 Años de Edad*

ampliación de la divisibilidad	exponente. Potencias de base negativa. Signo. Potencias de exponentes negativos. Potencia de base una potencia. Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos. Proporcionalidad de magnitudes	Divisiones equivalentes. Orden o jerarquía de las operaciones. Potencias de exponente natural. Producto y división de potencias de la misma base. Potencia de una potencia. Cuadrados perfectos. Raíz cuadrada exacta y entera. Resto de una raíz cuadrada. Múltiplos y divisores. Propiedades. Criterios de divisibilidad. Números primos y compuestos. Divisores de un número. Descomposición en producto de factores primos. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo
<b>Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables</b>		
Cálculo mental: Contar y descontar de 6 en 6, de 7 en 7, etc. Potenciación y radicación. Ejercicios	Producto y cociente de potencias de la misma base. Potencias con exponentes 1 y 0. Cálculo de raíces cuadradas de números naturales de tres cifras. Cálculo de raíces cuadradas de números naturales de más de tres cifras	Anterior y posterior a un número dado. Completar huecos en sumas y restas. Operar descomponiendo números. Sacar factor común. Operaciones con potencias. Cálculo de la raíz cuadrada
<b>Resolución de problemas</b>		
Resolución de problemas mediante la regla de tres y mediante la reducción a la unidad	Problemas de proporcionalidad de magnitudes, directa e inversa, simple y compuesta	.

Los programas que establecen los distintos currículos para la aritmética escolar en este séptimo curso coinciden en el estudio de la potenciación y la radicación, con distintas orientaciones y niveles de desarrollo, desigualmente detallados y con diferentes expectativas de aprendizaje entre ellos. Los currículos de la LEP y LGE introducen la proporcionalidad de magnitudes, la regla de tres y el cálculo de cantidades dentro de una relación de proporcionalidad. El currículo de la LGE introduce el conjunto de los números enteros, sus propiedades y estructura. No hay un núcleo de aprendizaje que trate la resolución de problemas introduciendo nuevas propuestas. El currículo LOGSE trata con detalle el estudio de la divisibilidad, llegando al cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números.

Tabla 22

*Números Naturales. Contenidos para los 13–14 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Revisión de la numeración de enteros		Números enteros. Comparación. Valor absoluto
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Divisibilidad de los números y números primos. Propiedades. Descomposición factorial. Aplicaciones. Multiplicación y potenciación (revisión y ampliación) División y radicación	Números primos. Divisibilidad. Criterios. Divisiones de un número natural. Factorización. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	Suma, resta multiplicación y división de números enteros. Potencias de exponente natural. Múltiplo y divisor. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
Cálculo mental (contando de 11 en 11, etc.; averiguando el sexto, el octavo, el dieciseisavo) Multiplicación y potenciación (revisión y ampliación) División y radicación		Estimación de sumas y restas por redondeo. Operaciones con potencias. Jerarquía de operaciones con potencias. Potencias de exponente entero. Raíz cuadrada

Tabla 22  
*Números Naturales. Contenidos para los 13–14 Años de Edad*

Resolución de problemas
Problemas de operaciones con números naturales resueltos mentalmente

Finalmente, en el octavo curso los programas de la LEP y de la LGE amplían los conceptos básicos de la divisibilidad, alcanzando en la LGE al estudio del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo. Los programas de la LEP y la LOGSE trabajan sobre estimación y cálculo mental; también sobre potenciación y radicación y la aritmética de los números enteros. El currículo LOGSE refuerza el cálculo mental y las operaciones con potencias.

### **6.3. Conclusiones de la Comparación de Contenidos sobre Naturales**

Los tres programas coinciden en la presentación y estudio escalonado del sistema decimal de numeración, con un incremento de dos ordenes en las cifras de los números que se presentan en cada nivel. Así, con pequeñas variantes, en primer curso se estudian los números de 1 y 2 cifras, en segundo los números de 3 y 4 cifras, en tercero los de 5 y 6 cifras, para llegar a cuarto curso con la presentación de los millones. El currículo LOGSE no avanza con esta misma progresión sino que varía en algunos cursos. Dedicar por tanto más tiempo al dominio de los números con menor número de cifras. Así, en el segundo curso los currículos de la LEP y LGE optan por la enseñanza de los números naturales de tres y cuatro cifras mientras que el currículo LOGSE en ese curso sólo contempla los números de tres cifras. Complementariamente, en el siguiente curso los currículos de la LEP y la LGE prescriben los números de cinco cifras mientras el currículo LOGSE considera los números de cuatro y cinco cifras.

El concepto de natural tiene distinto fundamento en cada programa: basado en el conteo en la LEP, en la cardinalidad en la LGE y en la ordinalidad en la LOGSE. También las relaciones cuyo estudio se destaca son distintas en cada programa: doble y triple en la LEP, composiciones y descomposiciones numéricas en la LGE, mayor que-menor que en la LOGSE.

Hay una progresión en la presentación y estudio de las operaciones aritméticas y en el dominio de sus algoritmos. Las diferencias entre los programas se muestra por el estudio más o menos detallado de casos particulares para las distintas operaciones, estrategias de cálculo mental y estudios de propiedades.

El currículo de la LEP empieza las operaciones de suma, resta y producto en el segundo curso, mientras los currículos de EGB y LOGSE empiezan la suma y la resta desde el primer curso. Por el contrario, el programa LEP inicia la memorización de la tabla de multiplicar en primer curso mientras que los programas de la LGE y la LOGSE no inician su estudio hasta segundo curso.

El currículo de la LEP inicia la resolución de problemas en quinto curso los otros dos programas lo plantean explícitamente desde primer curso, vinculados en cada caso con el aprendizaje de las operaciones.

En quinto curso se presenta cierta formalización del sistema decimal de numeración basado en el estudio de los órdenes de las distintas cifras de un número. La base del sistema en el programa LGE tiene fundamento conjuntista mientras que en el program LOGSE el fundamento es estructural.

El programa que más cursos dedica para la instrucción sobre los algoritmos de las cuatro operaciones básicas y la consideración de casos y reglas singulares, es el currículo LOGSE, seguido por el de la LEP y el que menos el de la LGE.

El estudio y las propiedades de la divisibilidad se inician en quinto curso para la LGE y en sexto para la LEP y LOGSE. Potencias y raíces inician su presentación en sexto curso.

Como corresponde al modo de entender las matemáticas y su aprendizaje en cada uno de los programas hay una mayor preocupación por las destrezas básicas y los algoritmos en el programa LEP incluido el cálculo mental, un énfasis importante por los aspectos formales de los conceptos, operaciones y propiedades en el programa LGE y un gran esfuerzo por la diversificación de estrategias de cálculo en el programa LOGSE.

La aritmética de los números naturales tiene dos parte bien diferenciadas en la educación obligatoria: una primera centrada en el estudio de los números naturales y del sistema decimal de numeración, relaciones, operaciones y propiedades que concluye en quinto curso. Una segunda parte dedicada al estudio de las relaciones de divisibilidad, factorización, múltiplos y divisores, así como al estudio de potencias, raíces, y propiedades, que se lleva a cabo a partir de sexto curso, principalmente. También indican el estudio de los números negativos en estos cursos superiores.

Los programas se diferencian en el ritmo y progresión con que se presentan las operaciones. Más profunda es la diferencia por motivo de la fundamentación elegida y por el trabajo con diversos casos de resolución de problemas de una o de dos operaciones aritméticas y el mayor o menor despliegue de estrategias. Conforme avanzamos en el tiempo, los programas de aritmética básica también progresan en su riqueza de planteamientos y variedad de problemas propuestos para su resolución.

## 6.4. Comparación de los Contenidos de Aritmética de los Racionales

Este apartado se dedica al estudio de los contenidos de los programas en lo que se refiere al bloque de aritmética para números racionales. Al igual que hemos hecho antes, comparamos mediante una tabla los contenidos de cada uno de los cursos escolares recogidos en los programas objeto de estudio. Tenemos así, de manera resumida, esos contenidos clasificados según los estándares de contenido del NCTM (2006), los mismos considerados para los números naturales.

Presentamos el desarrollo del bloque de aritmética para número racionales desde el segundo nivel de la educación obligatoria (7-8 años), curso en que se presentan por vez primera algunos contenidos de ese bloque.

Tabla 23

*Números Racionales. Contenidos para los 7-8 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Mitad y tercio. Inducir la noción de cuarto, octavo y décima. Idea de los números decimales: décima y centésima. Idea general de quebrado		
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Para esta edad no aparecen contenidos en este apartado		
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
Ejercicios de mitad y tercio. Ejercicios sobre décimas y centésimas, utilizando como base las medidas y las monedas		
Resolución de problemas		
Para esta edad no aparecen contenidos en este apartado		

El programa LEP introduce para alumnos de 7–8 años de edad nociones muy sencillas que introducen el concepto de fracción: mitad, tercio, cuarto, octavo y décima. Los demás programas no inician estos contenidos.

Tabla 24

*Números Racionales. Contenidos para los 8–9 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Los números decimales hasta la milésima. Repaso de numeración de decimales. Idea general de quebrado		
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Sumar, restar y multiplicar números decimales. Suma de quebrados. Suma y resta de quebrados		
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
Ejercicios de sumas y restas de enteros y decimales, en sus distintos casos		
Resolución de problemas		
Para esta edad no aparecen contenidos en este apartado		

El programa LEP continúa con el desarrollo de los temas de fracciones (a los que llama quebrados) y números decimales. Presenta una noción general de fracción e inicio de la suma y resta de fracciones y decimales. Los otros dos programas no mencionan estos contenidos.

Tabla 25

*Números Racionales. Contenidos para los 9–10 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Iniciación a la simplificación y equivalencia de quebrados. Reducción a común denominador de	Números decimales	Fracción decimal. Décimas y centésimas. La fracción de una cantidad. Medios tercios y cuartos. La

Tabla 25  
*Números Racionales. Contenidos para los 9–10 Años de Edad*

quebrados comunes. Reducción de fracciones ordinarias a decimales	fracción y sus términos. Lectura y escritura de fracciones. Comparar fracciones con la unidad. Cómo se comparan fracciones con el mismo denominador. Fracción decimal. Décimas y centésimas
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras	
Suma de quebrados. Suma y resta de quebrados	Adición y sustracción de números decimales
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables	
Revisión de operaciones conocidas con decimales. Simplificación y reducción a común denominador de quebrados comunes. Suma y resta de fracciones. Reducción de fracciones ordinarias a decimales	
Resolución de problemas	
Problemas de simplificación y reducción a común denominador de quebrados comunes, de suma y resta de fracciones, de reducción de fracciones ordinarias a decimales	

Los alumnos de 9–10 años de edad del programa LEP trabajarán con la equivalencia y simplificación de fracciones. Operan aditivamente con fracciones, reduciendo a común denominador. También trabajan con la reducción de fracciones a decimales.

En el programa LGE se introducen los números decimales y su suma y resta. Vemos que hay un desnivel de dos años entre el programa LGE y el programa LEP en relación con el tema de los números decimales.

El programa LOGSE introduce a esta edad la noción de fracción de una cantidad, términos de una fracción y comparación de fracciones. Los decimales no se inician aún en esta edad, para la cual hay diferencias notables entre los tres programas.

Tabla 26

*Números Racionales. Contenidos para los 10-11 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Repaso y ampliación de la numeración decimal. Ejercicios de lectura y escritura de cantidades con enteros y decimales con cualquier número de cifras. El número fraccionario: propiedades y clases. Papel de cada término, explicado intuitivamente	Introducción experimental a las fracciones	Fracciones: comparación y ordenación. Décima, centésima y milésima. Orden. Fracciones decimales y números decimales
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Multiplicación de fracciones: casos y aplicaciones. División de fracciones		Operaciones con decimales Suma y resta de fracciones de igual denominador
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
Repaso y ampliación de la suma y resta con enteros y decimales. Casos, signos y prueba. Simplificación, reducción a común denominador, suma y resta de quebrados comunes. Producto y división de fracciones		Los decimales y la calculadora. Multiplicar un número por 0.1; por 0.01 y por 0.5 Operaciones con fracciones
Resolución de problemas		
Problemas de repaso y		Comprobar si la

Tabla 26  
*Números Racionales. Contenidos para los 10–11 Años de Edad*

ampliación de la suma y resta con enteros y decimales	solución es correcta (producto de un número decimal por un número natural, suma de tres números decimales con diferente cantidad de cifras decimales, dividir dos naturales con resultado decimal. Dibujar una suma o resta de decimales
---	--

El programa LEP continúa con el desarrollo sistemático de los contenidos de este bloque y a esta edad. Este curso se centra en la lectura y escritura de los decimales y en las operaciones de suma y resta con estos números. También profundiza en el concepto de fracción e introduce el producto y división de fracciones. Con los decimales se avanza en las operaciones de suma y resta.

El programa LGE dedica este curso a la introducción experimental de la noción de fracción y no avanza ninguna nueva noción en el tema de decimales. Por el contrario, el programa LOGSE dedica este nivel al estudio de los decimales: suma, resta y producto (en este último caso con la calculadora). También revisa la comparación y ordenación entre fracciones.

Tabla 27  
*Números Racionales. Contenidos para los 11–12 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
	Números decimales. Estructura multiplicativa. Fracciones decimales exactas y número decimal. Construcción de los racionales positivos. El grupo multiplicativo de los números racionales positivos. Fracciones escritas como pares ordenados. Reconocer y construir fracciones equivalentes. Expresiones irreducibles. Comparar números	Décimas, centésimas y milésimas. Orden. Aproximación. Fracción como parte de la unidad y como cociente de dos números. Fracción de una cantidad. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones.

Tabla 27  
*Números Racionales. Contenidos para los 11–12 Años de Edad*

racionales		
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Producto de números decimales División de números decimales. Suma y producto de racionales positivos. Suma de fracciones con el mismo y con distinto denominador. Propiedades asociativa y conmutativa para la suma. Producto de un natural por una fracción. Producto de fracciones. Propiedades asociativa y conmutativa para el producto y distributiva del producto respecto a la suma		
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
Conversión de fracciones ordinarias en decimales y viceversa. La división de quebrados comunes	Operaciones de suma de fracciones. Operaciones de producto de fracciones	Suma, resta multiplicación y división de números decimales. Calculadora. Operaciones con decimales. Multiplicar números decimales por 0.1 y 0.01. Multiplicar y dividir un número por 0.5; por 1.5; 0.25 y por 0.75. Fracciones: suma y resta. Producto y división por un entero. Calculadora. Suma y resta de fracciones
Resolución de problemas		
		Sobran datos: resta de números decimales y

Tabla 27  
*Números Racionales. Contenidos para los 11–12 Años de Edad*

	fracciones. Inventa el enunciado: compara cantidades decimales y fracciones. Hazlo con datos más sencillos: dividir por un número decimal
--	---

En este nivel el programa LEP concluye su presentación de los contenidos de este bloque, dedicando solo un apartado para la conversión de fracciones en decimales y viceversa. El currículo LGE dedica este nivel a la presentación detallada del conjunto de los decimales y de su estructura multiplicativa. Pero el centro de este sexto nivel es el conjunto de los números racionales positivos y de sus estructuras aditiva y multiplicativa. Destacan el dominio y algoritmización de las operaciones suma y producto con fracciones. No hay menciones específicas a la resolución de problemas.

Por el contrario, el programa LOGSE propone diversos significados del concepto de fracción e insiste en la comparación de fracciones. También reitera las operaciones con decimales, singularmente el producto y la división, con ayuda de la calculadora.

Tabla 28  
*Números Racionales. Contenidos para los 12–13 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Recapitulación de la numeración decimal. Repaso y ampliación de la teoría de las fracciones Concepto de número irracional. Propiedades		Usos de los números decimales. Fracciones decimales. Comparación de números decimales. Fracciones propias e impropias. Representación de fracciones. Fracciones equivalentes, simplificación y reducción a común denominador
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
Para esta edad no aparecen contenidos en este apartado		

Tabla 28  
*Números Racionales. Contenidos para los 12–13 Años de Edad*

Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables	
Recapitulación de las cuatro operaciones fundamentales con números decimales. Operaciones con fracciones. Calcular mitades, tercios, cuartos y octavos de números dados. Ejercicios variados con fracciones ordinarias y su conversión en decimales y viceversa	Redondeo y estimación de sumas y restas de números decimales. Suma y resta de fracciones. Multiplicación de fracciones. División de fracciones. Fracciones decimales
Resolución de problemas	
Ejercicios y problemas variados con fracciones ordinarias y su conversión en decimales y viceversa	El euro. Uso de los decimales. Redondeo. Porcentajes. Cambio de moneda. Estimaciones. Fracción de una cantidad y comparación de fracciones de una cantidad. Problemas de compras con cantidades fraccionarias

El programa LEP dedica este curso a recapitular los conceptos y operaciones con fracciones y decimales, insistiendo en ejercicios de conversión entre fracciones y decimales y en la resolución de problemas que impliquen el usos de fracciones. Introduce en este curso la noción de número irracional.

El programa LGE no introduce nuevas nociones de este bloque, al que no menciona en los programas. El programa LOGSE continúa con los significados y usos de las fracciones, su simplificación y la reducción a común denominador. Se repasan las operaciones suma, resta, producto y división con fracciones, así como la comparación de fracciones. Las operaciones de suma y resta de decimales se trabajan junto con las estrategias de estimación y redondeo y su aplicación a diversos problemas, entre los que destacan los de compras y cambios de moneda.

Tabla 29  
*Números Racionales. Contenidos para los 13–14 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender los números, representaciones, relaciones y sistemas de numeración		
Revisión de la numeración de decimales	Distinguir fracciones de otras expresiones que no lo son. Reconocer y escribir fracciones equivalentes. Reconocer fracciones irreducibles. Elegir representantes dentro de una clase de fracciones equivalentes	Comparación de números decimales. Expresión decimal de una fracción. Fracción generatriz de un número decimal. Fracciones equivalentes. Simplificar fracciones
Entender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras		
	Suma de números racionales. Propiedades. Resta de racionales. Producto de racionales. Propiedades. División de racionales	Potencias de fracciones.
Operar fluidamente y hacer estimaciones razonables		
	Cálculo mental averiguando un sexto, octavo, o dieciseisavo. Revisión y ejercicios sobre fracciones y decimales. Suma de fracciones con el mismo denominador. Suma de fracciones con diferente denominador. Resultados de las sumas con la fracción irreducible. Resta de números racionales con igual y diferentes denominadores	Suma y resta con decimales. Multiplicación y división con decimales. Estimación. Sumas y restas de fracciones. Multiplicación y división de fracciones.
Resolución de problemas		Problemas de fracción de una cantidad

El programa LEP prescribe para este curso la revisión del sistema de numeración para números decimales y no introduce nuevos contenidos de este bloque.

El programa LGE establece en este curso el estudio del conjunto de los números racionales con su estructura aditiva y multiplicativa. Tienen por tanto especial importancia las propiedades de las operaciones. Las distintas notaciones y representaciones de los racionales reciben una atención especial, donde destacan las fracciones irreducibles y la expresión decimal de una fracción. También se dedica atención al cálculo mental y a los ejercicios de cálculo con distintas representaciones de las fracciones.

El programa LOGSE continúa con la comparación de fracciones; trabaja la expresión decimal de una fracción, la fracción generatriz de un decimal y la simplificación de fracciones. También describe el dominio de destrezas en las cuatro operaciones, tanto para fracciones como para decimales.

## **6.5. Conclusiones de la Comparación de Contenidos sobre Racionales**

Los tres programas difieren considerablemente en su tratamiento para el bloque de números racionales. El programa LEP inicia la presentación de las nociones básicas a los 7 años y concluye la introducción de nuevos conceptos a los 11 años. Por el contrario, los programas LGE y LOGSE inician las nociones básicas de este bloque a los 9 y 10 años, dedicando las edades de 11, 12 y 13 años al desarrollo de los conceptos y estructuras correspondientes. Podemos decir que para el programa LEP el bloque de racionales corresponde a la educación primaria mientras que para los programas LGE y LOGSE corresponde al último curso de primaria y los primeros de secundaria.

Se significa así la orientación instrumental del programa LEP, donde destacan las destrezas con las operaciones y tienen menor importancia los significados de los conceptos. Por ello se introducen pronto las nociones básicas de fracción y de decimal así como las reglas para sus operaciones, a cuyo dominio se dedica la mayor atención.

Los programas LGE y LOGSE difieren también, a su vez. Por un lado, alternan los cursos en que introducen las nociones básicas. El programa LGE presenta los decimales en cuarto curso y las fracciones en quinto, mientras que el programa LOGSE introduce los decimales en quinto y las fracciones en cuarto.

El programa LGE organiza el tratamiento de los contenidos de este bloque a los 11 y 13 años. En el primer año se centra en los racionales positivos mientras que en el segundo trabaja con todo tipo de números racionales. Tienen especial importancia los aspectos estructurales y las propiedades de las operaciones.

A su vez, el programa LOGSE trabaja estos contenidos a las edades de 11, 12 y 13 años, sin discontinuidades entre los cursos. El estudio de las fracciones se centra en aspectos conceptuales y significados del concepto así como en el orden y comparación entre fracciones, mientras que el estudio de los decimales se centra en los aspectos procedimentales, principalmente.

Los tres programas difieren considerablemente en el modo en que abordan y desarrollan los contenidos de este bloque, tanto por su ubicación dentro de los cursos como por la aproximación que siguen. A diferencia de lo que sucedía en el bloque de aritmética de los naturales antes estudiado, no hay un diseño estándar para el programa sobre racionales en la educación obligatoria.

## 6.6. Comparación de los Contenidos del Bloque de Magnitudes y Medida

Con este Apartado concluye el estudio comparativo de los tres programas por lo que se refiere a los contenidos recogidos en el test de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard (THCAB), objeto de este estudio. Para la comparación de los contenidos del bloque de magnitudes presentamos de manera resumida esos contenidos por cursos escolares, clasificados según los estándares del NCTM (2006) y los criterios acordados.

Tabla 30  
*Magnitudes. Contenidos para los 6-7 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
Ejercicios de iniciación a la medida, empleando unidades naturales. Del empleo de las unidades naturales de medida al de las unidades convencionales. Idea general del metro, el litro y el kilogramo. El metro y el decímetro como unidades prácticas de medida		Grande, mediano y pequeño. Largo – corto. Palmo, paso y pie. Ancho–estrecho. Pesa más–pesa menos. Cabe más–cabe menos. Monedas: 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos de euro. Los días de la semana. Los meses del año. El reloj: la hora y la media hora
Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para determinar medidas		
Comparación de formas distanciadas a primera vista. Comprobación de		

Tabla 30  
*Magnitudes. Contenidos para los 6-7 Años de Edad*

---

tales estimaciones.  
 Ejercicios de medición,  
 representando con cifras  
 los números resultantes.  
 Sencillos problemas  
 empleando datos de la  
 vida del mismo niño

---

Los tres programas muestran desde el primer curso su distinta orientación. El programa LEP centra el trabajo en las magnitudes centrales del sistema métrico: longitud, peso y capacidad, y sus unidades de medida, derivando su origen de las unidades naturales.

El programa LGE no introduce estas nociones en este curso.

Por su parte el programa LOGSE presenta las unidades de medida de dos magnitudes cotidianas: tiempo y dinero. Se centra en las monedas y en los meses, días y horas. También destaca las relaciones y comparaciones entre cantidades, en coherencia con las relaciones de orden y comparación estudiadas para los números.

Tabla 31  
*Magnitudes. Contenidos para los 7-8 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
La medida. Medida del tiempo. Día, semana, mes y año. Idea de las monedas. Idea general del Sistema métrico. Noción de Decámetro y de Hectómetro, de decímetro y centímetro. Medida de ángulos	Iniciación a la medida con empleo de medidas naturales (pie, palmo, etc.) Medidas experimentales con el decímetro	La hora en punto, la hora y media, la hora y cuarto y las menas cuarto. Monedas: euro y céntimos de euro. El palmo, el paso y el pie. El metro, el decímetro y el centímetro. El kilo, el medio kilo y el cuarto de kilo. El litro, el medio litro y el cuarto de litro. Repaso de las unidades de longitud, capacidad y peso
Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para		

Tabla 31  
*Magnitudes. Contenidos para los 7-8 Años de Edad*

determinar medidas	
Ejercicios prácticos de medir y pesar a base del metro, el litro y el kilo, y sus mitades respectivas. Inducir la noción de cuarto de litro y cuarto de kilo. Ejercicios prácticos de medición y de representación de los números enteros y mixtos resultantes. Ejercicios de medida de líneas sobre los lados de triángulos. Medida de ángulos. Ejercicios sobre décimas y centésimas, utilizando como base las medidas y las monedas	Ejercicios de medida con el uso del metro

En este caso el programa LEP introduce las magnitudes tiempo y dinero, ampliando con algunas unidades múltiplos y divisores del metro. A su vez, el currículo LGE inicia el estudio de la magnitud longitud a partir de las unidades corporales hasta llegar al metro y decímetro. Por su parte el programa LOGSE introduce las magnitudes longitud, peso y capacidad, ampliando el estudio de la hora y sus partes.

El programa LEP enfatiza la importancia de los ejercicios prácticos con instrumentos de medida convencionales; también destaca el uso de los números decimales para escribir cantidades de longitud o dinero.

Tabla 32  
*Magnitudes. Contenidos para los 8-9 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
Múltiplos y divisores de las medidas de longitud, capacidad y peso. Ejercicios de reducción de unas medidas a otras mentalmente y por escrito, y de representación de los		Medida del tiempo: los meses del año, el calendario. Los días de la semana. Las horas del día. Los minutos. La lectura del reloj. Lectura del reloj digital. La longitud:

Tabla 32  
*Magnitudes. Contenidos para los 8-9 Años de Edad*

números resultantes de medidas y pesadas. Ejercicios sobre reducción de complejos métricos con medidas de longitud capacidad y peso. Idea de las medidas de superficie. El metro cuadrado y el decímetro cuadrado	Unidades corporales. Medir longitudes con otras medidas. El metro. El decímetro, el centímetro y el milímetro. Uso de la regla graduada. El kilómetro. Medidas de capacidad y peso. Comparación. El litro, el medio litro, el cuarto de litro. El kilo, medio kilo, cuarto kilo
---	---

Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para determinar medidas

Áreas del cuadrado y del rectángulo, inducidas por la representación de las medidas de superficie.  
Arcos y su medida.  
Medida de ángulos, suma y resta de los mismos

El programa LEP avanza en el estudio de los múltiplos y divisores de las unidades básicas de longitud, peso y capacidad. Introduce las primeras unidades de superficie: metro y decímetro cuadrados, e inicia la medida de ángulos.

El programa LGE no hace nuevas propuestas sobre magnitudes para este curso.

El programa LOGSE desarrolla las unidades de medida de tiempo, de las distintas unidades de longitud, múltiplos y divisores del metro, junto con algunas unidades fraccionarias de capacidad y peso.

Tabla 33  
*Magnitudes. Contenidos para los 9-10 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
Revisión del Sistema Métrico: equivalencia de medidas sencillas. Repaso y ampliación de las medidas de superficie.	Sistema métrico lineal. El centímetro cuadrado. Ángulo recto.	El año, el calendario. Las horas del día. Los minutos. Los segundos. Lectura del reloj. El metro, el decímetro, el centímetro y

Tabla 33  
*Magnitudes. Contenidos para los 9–10 Años de Edad*

<p>Medida de un volumen inducida de la capacidad. Las medidas de volumen. Medidas de uso local.</p>	<p>el milímetro. Expresar longitudes con dos cantidades. Kilómetro, Decámetro y Hectómetro. Comparación de superficies. Medida de superficies. Peso y capacidad: el kilo, medio kilo, cuarto de kilo. El gramo. La tonelada. El litro, medio litro, cuarto de litro, decilitro y centilitro. El kilo y el litro. Los ángulos, rectas perpendiculares y ángulo recto. Clasificación de ángulos.</p>
<p>Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para determinar medidas</p>	
<p>Ejercicios y problemas sobre medición y peso de los cuerpos y representación de los números enteros, quebrados y mixtos resultantes. Ejercicios y problemas de medidas de volumen. Ejercicios y problemas en base de conversión de medidas de uso local al Sistema Métrico. Ejercicios y problemas de longitud de la circunferencia, área del triángulo y del polígono regular. Volumen del cubo y del prisma cuadrangular. Áreas de figuras planas, incluyendo los polígonos irregulares y el círculo. Ejercicios y problemas sobre áreas y volúmenes del cubo, prisma y pirámides.</p>	<p>Magnitudes discretas, aproximación de una medida.</p> <p>Medida de superficies con diferentes unidades. Medida aproximada de superficies. Rectas perpendiculares y ángulo recto. Clasificación de ángulos. Giros y ángulos. Los polígonos. Clasificación y perímetro.</p>

El programa LEP prescribe la revisión del Sistema Métrico Lineal, ampliación de la medida de superficies e iniciación del estudio de la magnitud volumen, en conexión con las medidas de capacidad. Este programa propone una variedad de técnicas para calcular la longitud de la circunferencia, superficies de figuras planas y volúmenes de poliedros y cuerpos sencillos.

El programa LGE se limita a estudiar el centímetro cuadrado y los ángulos rectos.

El programa LOGSE amplía las medidas de tiempo, profundiza y amplía las unidades de longitud, de capacidad y de peso. También establece el ángulo recto y clasifica los ángulos. Propone técnicas para estimar y medir superficies con distintas unidades.

Tabla 34  
*Magnitudes. Contenidos para los 10–11 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
Repaso y ampliación del Sistema Métrico Lineal. Relaciones entre las medidas de longitud, capacidad, volumen y peso. Recapitulación del Sistema Métrico. Estudio especial de medidas itinerarias, terrestres y marítimas. Recapitulación de las medidas de volumen. Ángulos planos: clases y propiedades. Medida de ángulos.	El metro cuadrado. Unidades de superficie. Introducción experimental a la medida de la superficie de paralelogramos y triángulos.	La hora, el minuto y el segundo. Expresiones complejas e incomplejas. Unidades de medida de superficie: el metro cuadrado, el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado. El grado. Unidades de longitud. Expresiones complejas e incomplejas.
Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para determinar medidas		
Ejercicios de suma resta y conversión de números complejos métricos Ejercicios y problemas de relaciones entre las medidas de longitud, capacidad, volumen y peso. Longitud de la circunferencia. Medición y operaciones con segmentos.	El metro cuadrado. Unidades de superficie. Introducción experimental a la medida de la superficie de paralelogramos y triángulos.	Operaciones con medidas de tiempo. Operaciones con unidades de medida. Ángulos. Clases de ángulos. Longitud de la circunferencia. Croquis. Puntos cardinales. La brújula. Ejes de coordenadas. El grado. Áreas de figuras planas.

Tabla 34  
*Magnitudes. Contenidos para los 10–11 Años de Edad*

---

Construcción de ángulos iguales. Áreas de figuras planas. Área del triángulo, paralelogramo y polígono regular. Área del círculo y figuras circulares. Fórmulas. Medidas agrarias y geográficas. Medidas de volumen aplicadas a buques y a otros usos.

---

El programa LEP hace un balance y recapitulación del Sistema Métrico Lineal y trabaja en la conversión entre medidas complejas e incomplejas de las magnitudes lineales. Introduce medidas marítimas y terrestres. Trabaja con la medida, construcción y operaciones de ángulos. Propone medidas de superficie y volumen en situaciones prácticas y comerciales, así como su cálculo mediante las fórmulas convencionales.

El programa LGE introduce el metro cuadrado y presenta el cálculo de superficies de triángulos y paralelogramos mediante medida de longitudes.

El programa LOGSE aborda la conversión de medidas complejas a incomplejas y viceversa. Estudia las unidades de superficie divisores del metro cuadrado. También estudia el grado como unidad para medir ángulos en la circunferencia.

Tabla 35  
*Magnitudes. Contenidos para los 11–12 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
Magnitud, cantidad, unidad y número. Sistema Métrico, relaciones entre las distintas medidas. Estudio especial de las monedas. Sistema monetario. La Bolsa y los cambios. Estudio especial de las divisiones del tiempo. Ángulo diedro.	Segmentos generales. Operaciones con segmentos. Magnitud longitud. Ángulos en la circunferencia. Medida de ángulos centrales: el radian. Ángulos generales. Operaciones con ángulos. Magnitud amplitud.	Unidades de medida de capacidad y peso. Medidas tradicionales. Unidades de volumen. Volumen y capacidad. Ángulos complementarios y suplementarios. Planos y mapas. La escala. Ángulos y giros.

Tabla 35  
*Magnitudes. Contenidos para los 11–12 Años de Edad*

Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para determinar medidas		
Operaciones con los números complejos métricos. El gnomon y la medida de distancias o alturas a puntos inaccesibles. Área de los polígonos regulares y de los irregulares. Prismas y pirámides: área total y lateral. Áreas de los cuerpos redondos: el cilindro, el cono y la esfera. El teorema de Pitágoras: aplicaciones y ejercicios. Problemas de agrimensura derivados del mismo. Volúmenes de los poliedros y los cuerpos redondos. Representación gráfica de cantidades y aplicaciones a la solución de problemas	Operaciones con segmentos generales y con ángulos generales. Circunferencia y círculo. Igualdad de triángulos. Área de figuras planas	Capacidad y peso: suma y resta. Producto y división por un número entero. Planos y mapas. La escala. Ángulos y giros. Suma y resta de ángulos. Áreas y perímetro de los polígonos. Volumen de prismas rectangulares. Longitud de una circunferencia. Área de un círculo

En este curso también continúan cada uno de los programas con contenidos y técnicas diferentes, pero desde una perspectiva más global y mediante conceptos más generales. Así, el programa LEP introduce formalmente los conceptos de magnitud, cantidad, unidad y número como partes de una estructura más amplia. Presenta el sistema monetario en su conjunto y el sistema de divisores para medidas de tiempo, sobre cuyas unidades mantiene los ejercicios de conversión entre cantidades complejas e incomplejas. Continúa con la aplicaciones al cálculo de superficies y volúmenes en figuras y cuerpos regulares.

El currículo LGE presenta la construcción de dos magnitudes: longitud y amplitud, presentadas como estructuras algebraicas con un espacio de medida.

El programa LOGSE se centra en este curso en las magnitudes capacidad y volumen sobre cuyas unidades y operaciones trabaja extensamente, con

distintos cuerpos y situaciones. También trabaja con los ángulos en la circunferencia, la longitud de la circunferencia y la superficie del círculo.

Tabla 36  
*Magnitudes. Contenidos para los 12–13 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
Repaso del Sistema Métrico. Valor de los ángulos de un cuadrilátero. Ampliación del concepto de unidad. Las unidades corrientes, las grandes y pequeñas unidades: el año–luz, la micra, etc. Las unidades especiales: la bujía, el lumen, etc.	Concepto de volumen. Unidades.	Comparación de ángulos. Ángulos complementarios, suplementarios e iguales. Escalas. Unidades de longitud, de masa, de capacidad y de superficie. Unidades de volumen. Volumen capacidad y masa
Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para determinar medidas		
Ejercicios prácticos en relación con áreas y volúmenes. Ejercicios y problemas variados sobre pesos, volúmenes y densidades. Ejercicios sobre operaciones y medidas de ángulos. Rectificación de la circunferencia: el valor de $\pi$ . Ejercicios y problemas. Las áreas de las figuras planas. Ejercicio y problemas. Tanto por ciento de desnivel	Proporcionalidad de magnitudes. Aplicaciones: interés, repartos proporcionales, etc. Volúmenes de cuerpos estudiados	Aproximación de medidas. Estimaciones. El euro. Cambio de moneda. Estimaciones. Operaciones con ángulos. La esfera terrestre. Coordenadas. Diferencias horarias. Medidas de ángulos y de tiempo. Suma y resta en el sistema sexagesimal. Teorema de Pitágoras. Aplicaciones. Perímetros y áreas de figuras planas. La longitud de la circunferencia y el diámetro. Longitud de los arcos. Áreas de paralelogramos. Área del círculo. Área de un polígono irregular

El programa LEP se centra en repasar el Sistema Métrico Lineal, destacando las unidades de medida para cada magnitud. Distingue entre unidades grandes y pequeñas, mostrando aquellos contextos en que se presentan. También propone una variedad de ejercicios prácticos para cada una de las magnitudes. Igualmente se estudia la proporcionalidad de magnitudes, a partir de sus estructuras algebraicas.

El programa LGE se centra en la presentación de la magnitud volumen, de sus unidades, relación con las unidades de capacidad y cálculo.

El programa LOGSE propone un repaso de todo el Sistema Métrico Lineal; amplía el estudio de las unidades de volumen y del cálculo del volumen de un cuerpo. También enumera contextos de medida para distintas magnitudes, en el desarrollo de estrategias de aproximación y estimación de medidas y en la medida de ángulos y operaciones entre ellas.

Tabla 37  
*Magnitudes. Contenidos para los 13–14 Años de Edad*

LEP	LGE	LOGSE
Entender las cualidades mensurables de los objetos. Las unidades, los sistemas y los procesos de medida		
Revisión y ampliación de las medidas de volumen en sus distintas aplicaciones		Mediciones directas e indirectas. Precisión y estimación de medidas
Aplicar las técnicas apropiadas, las herramientas, y las fórmulas para determinar medidas		
Arcos y grados en la circunferencia. Construcción de escalas numéricas y gráficas. Cuerpos geométricos: volumen de prismas, pirámides y poliedros regulares. Volúmenes cuerpos redondos		Error absoluto y error relativo. Suma y resta en el sistema sexagesimal. Multiplicación y división en el sistema sexagesimal

En este último curso el programa LEP revisa y amplía las magnitudes volumen y amplitud y el cálculo de medidas en cuerpos geométricos sencillos.

El programa LGE no incluye nuevos temas, mientras que el programa LOGSE propone trabajar con medidas directas e indirectas y las nociones de error absoluto y relativo.

## 6.7. Conclusiones de la Comparación en el Bloque de Magnitudes y Medida

En este bloque también tenemos tres programas con desarrollos muy diferentes. Los programas LEP y LOGSE, aunque difieren significativamente en su concepción sobre las matemáticas y su aprendizaje, siguen desarrollos similares, aunque en un caso se centre sobre habilidades y destrezas mientras que el otro destacan las estrategias y resolución de problemas. Por su parte el programa LGE se organiza de otro modo, dando prioridad a las magnitudes longitud, superficie y volumen y basándose en las estructuras de las magnitudes.

El programa LEP tiene a las unidades de medida de las magnitudes longitud, peso y capacidad como eje conductor, a las que va desarrollando y dotando de complejidad entre los cursos primero a quinto. A esta línea argumental principal se van incorporando otros temas en cada uno de los niveles. Así, en segundo curso se incorpora el estudio de las monedas y del almanaque, en tercer curso el metro y el decímetro cuadrado, en cuarto el estudio de las unidades de volumen y su relación con las de capacidad, en quinto el estudio de los ángulos y su medida. Los tres últimos cursos están dedicados a las nociones generales del Sistema Métrico Lineal y al cálculo del área de un polígono –en sexto curso– o del volumen de un cuerpo en octavo. En séptimo curso se hace una aproximación a distintas situaciones en que se emplean determinadas unidades de medida, principalmente de longitud, lo cual lleva a distinguir entre unidades *grandes* y *pequeñas*.

El programa LOGSE tienen a su vez como hilo conductor las unidades de medida de tiempo y dinero, a las que se van añadiendo las de otras magnitudes a lo largo de los cursos. Este programa hace una apuesta clara por el estudio de esta dos magnitudes que habían estado descuidadas en los programas anteriores. El primer curso se inicia con las monedas y el almanaque; el segundo curso sigue con las monedas e incorpora el día y sus partes. En tercero prescribe trabajar con el almanaque y el reloj, en cuarto con el reloj y sus distintas unidades, mientras que en quinto propone estudiar todas las unidades de medida de tiempo así como los distintos tipos de conversiones entre cantidades complejas e incomplejas. Al tópico del tiempo, central en este programa, se incorporan el metro, kilo y litro en segundo curso; los divisores del metro en tercero; el sistema de múltiplos y divisores de las unidades de longitud, peso y capacidad junto con el inicio a las unidades de superficie en cuarto; los divisores de la unidad de superficie, la medida de ángulos en la circunferencia y el cálculo de áreas de figuras en el plano en quinto curso. Los cursos sexto y séptimo se centran en la magnitud volumen, la medida de ángulos y el estudio de las medidas en la circunferencia. Finalmente, el octavo curso se centra en el sistema sexagesimal, la estimación de medidas y los tipos de error.

Aunque estos dos programas son muy diferentes por las prioridades que establecen, por su aproximación a los conceptos básicos y por el desarrollo de procedimientos tienen, sin embargo, desarrollos muy parecidos.

El programa LGE tiene un formato distinto. El tratamiento en los cinco primeros cursos se limita a la iniciación en las unidades de longitud y de superficie; este tratamiento se hace en los cursos segundo, cuarto y quinto, exclusivamente. Las magnitudes longitud y amplitud así como el cálculo de superficies se estudian en sexto curso. La magnitud volumen y sus unidades se estudia en séptimo. Los cuestionarios que establecen estos programas son muy escuetos y el desarrollo de técnicas y destrezas no aparecen sistematizados en ellos.

Cabe esperar que los rendimientos que muestren los alumnos evaluados mediante el THCAB serán muy diferentes en los distintos cursos según los programas que hayan seguido los escolares.

## **7. Nivel Curricular de los Ítems del Test Ballard en cada Programa**

Con los criterios anteriores ha quedado establecido el aprendizaje prescrito para los alumnos en cada curso y sobre cada uno de los bloques de contenidos; también se conoce a qué edad se presentan determinados conceptos o destrezas a los alumnos. Si nos centramos en los contenidos que se evalúan por medio del test de Ballard, el análisis curricular de los programas determina la edad y, por tanto, el curso a partir del cual se inicia a los alumnos en cada uno de esos contenidos, según se vio en Díez (2007, p. 27). A este nivel en que se enseña el conocimiento sobre el contenido de un ítem se le denomina *nivel curricular de instrucción* o nivel curricular teórico del ítem.

*El nivel curricular teórico para cada ítem del test de Ballard es el nivel básico en el cual los programas contemplan los conocimientos necesarios para responder a ese ítem.*

El nivel curricular de instrucción de un ítem en un determinado programa proporciona una referencia básica para valorar su logro por los alumnos que están siguiendo ese programa. Como veremos, este nivel se convierte en un criterio para establecer la eficacia del programa ya que establece una referencia inicial para comparar los resultados alcanzados por los escolares con lo esperado en cada nivel y sobre cada tema. Esos niveles curriculares para cada uno de los ítems según los programas de la LEP y de la LGE ya se establecieron en Díez (2001) y volvemos sobre ellos.

Se logra así dar respuesta al Objetivo 1.2 y, parcialmente, al Objetivo 2.2 de esta investigación. Esto, a su vez, permite establecer en qué nivel debiera alcanzarse un determinado conocimiento y, por tanto, una habilidad de cálculo específica.

## 7.1. Niveles Teóricos de los Ítems según Programas

Las Tablas 38, 39 y 40 muestran los niveles curriculares de cada uno de los ítems del test de Ballard, según los bloques de contenidos de Aritmética y Magnitudes de los programas que consideramos. En cada caso vemos cómo se organizan por cursos los distintos ítems según el nivel en que se imparten los conocimientos necesarios para su respuesta.

La Tabla 38 resume las expectativas que establecen el nivel curricular de los ítems para el programa del currículo LEP de 1945 y marca la edad y curso a partir de los cuales los escolares reciben enseñanza sobre el contenido de los ítems que allí se indican.

Tabla 38  
*Nivel Curricular en el Programa LEP de los Ítems del Test de Ballard*

Número de los ítems	Total ítems
8-9 años. Tercero Educación Primaria	
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 62, 81, 95	31
9-10 años. Cuarto Educación Primaria	
22, 23, 39, 40, 41, 80, 82, 96, 97, 99 Además de los anteriores	41
10-11 años. Primero de Perfeccionamiento	
27, 28, 29, 32, 33, 35, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 91, 92, 93, 94, 100, además de los anteriores	63
11-12 años. Segundo de Perfeccionamiento	
24, 25, 26, 30, 31, 34, 37, 38, 59, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 79, 98, además de los anteriores	88
12-13 años. Primero de Iniciación profesional	
75, 76, 77, 78, además de los anteriores	92
13-14 años. Segundo de Iniciación profesional	
Ninguno	92

Igualmente, la Tabla 39 muestra el nivel curricular teórico de los ítems para el programa del currículo de la LGE de 1970, ya que señala la edad y curso en los cuales los escolares reciben enseñanza sobre los contenidos de los ítems.

Tabla 39  
*Nivel Curricular en el Programa LGE de los Ítems del Test de Ballard*

Número de los ítems	Total ítems
8-9 años. Tercero Educación General Básica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21	21
9-10 años. Cuarto Educación General Básica 22, 23, 24, 25, 27, 28, 33, 35, 36, 52, 53, 54, 55, 56, además de los anteriores	35
10-11 años. Quinto Educación General Básica 26, 29, 30, 31, 32, 34, 37, 38, 81, 83, 84, 85, 86, 87, además de los anteriores	49
11-12 años. Sexto Educación General Básica 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 79, 80, 82, 95, 96, 97, además de los anteriores	75
12-13 años. Séptimo Educación General Básica 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 98, 99, además de los anteriores	99
13-14 años. Octavo Educación General Básica 100, además de los anteriores	100

Finalmente, la Tabla 40 muestra el nivel teórico curricular correspondiente a los ítems del test de Ballard para el programa derivado del currículo de la LOGSE.

Tabla 40  
*Nivel Curricular en el Programa LOGSE de los Ítems del Test de Ballard*

Número de los ítems	Total ítems
8-9 años. Tercero Educación Primaria 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21	21
9-10 años. Cuarto Educación Primaria 22, 23, 37, además de los anteriores	24
10-11 años. Quinto Educación Primaria 24, 25, 26, 27, 28, 30, 38, 52, 53, 54, 55, 56, además de los anteriores	36
11-12 años. Sexto Educación Primaria	

Tabla 40  
*Nivel Curricular en el Programa LOGSE de los Ítems del Test de Ballard*

29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 96, además de los anteriores	71
12-13 años. Primero Educación Secundaria	
39, 40, 41, 47, 48, 68, 69, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 97, además de los anteriores	90
13-14 años. Segundo Educación Secundaria	
50, 51, 79, 80, 82, 89, 90, 98, 99, además de los anteriores	99

Las tres tablas ponen de manifiesto que el nivel curricular de los distintos ítems del test de Ballard pueden variar de unos programas a otros. Esto se aprecia al comparar el número de ítems en cada nivel, lo cual se expresa en los datos de las últimas columnas de las Tablas 38, 39 y 40.

También, en algunos casos, es llamativa la distinta ubicación que muestran los tres programas de los contenidos de algunos de los ítems. Así lo vemos, en primer lugar, con los ítems 24 y 25, cuyo nivel curricular en la LEP está en 2º de perfeccionamiento (11-12 años), mientras que su nivel curricular para la LGE está en 4º de EGB (9-10 años) y para la LOGSE su nivel curricular está en 5º de Educación primaria (10-11 años).

## 7.2. Distribución Global Comparativa de los Ítems del Test

Consecuencia del estudio comparativo es que detecta esas diferencias mediante los niveles curriculares para cada uno de los ítems del test de Ballard según el programa que se considera.

Por este motivo no tiene interés comparar ítem a ítem los rendimientos de los escolares de la misma edad que siguen distintos programas ya que, en cada caso, las expectativas de aprendizaje establecidas para esos alumnos pueden ser, y de hecho son, distintas respecto del contenido evaluado por el ítem ya que tal contenido puede corresponder a cursos diferentes según programas. Tales comparaciones tienen valor solo en el último año de la educación obligatoria.

La Figura 1 muestra el número de ítems que alcanzan su nivel curricular en las distintas edades contempladas en los tres currículos estudiados.

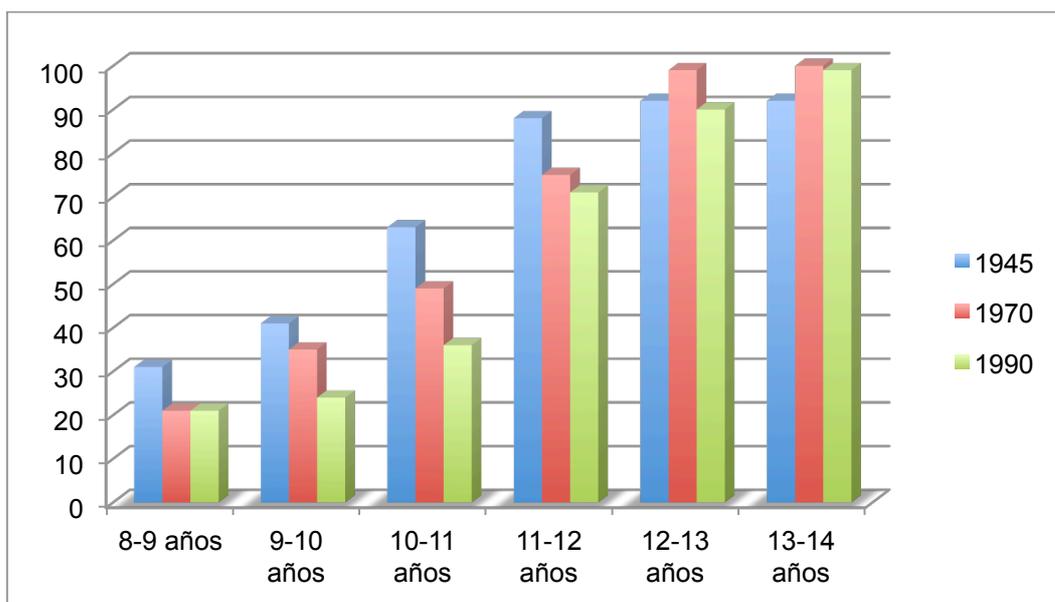


Figura 1. Ítems en Distintos Programas Agrupados por Nivel Curricular.

Esta figura muestra un mayor número de ítems en los niveles más bajos para el currículo de la LEP de 1945, que disminuye en los niveles superiores. Por el contrario, el currículo de la LOGSE, muestra un menor número de ítems para los primeros cursos que se incrementa en los cursos finales. La distribución más regular del nivel teórico curricular de los ítems la muestra el currículo de la LGE.

La Figura 2 resalta mejor estas diferencias entre los currículos por lo que se refiere a la distribución de los ítems según su nivel teórico curricular.

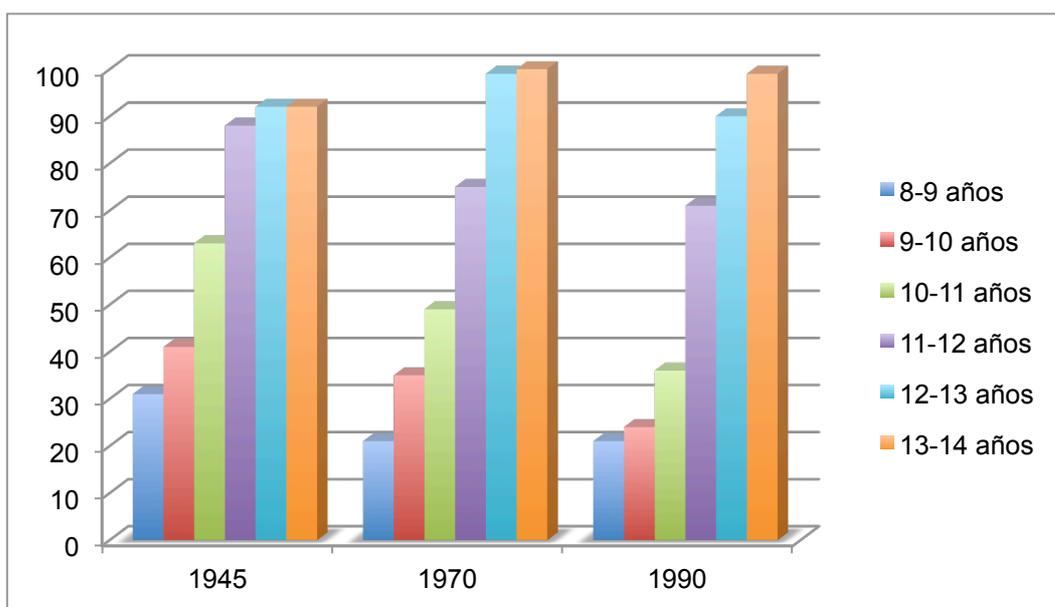


Figura 2. Número de Ítems según Nivel Curricular Agrupados por Programas.

Los niveles curriculares de ítems y de bloques temáticos permitirán valorar la eficacia del programa para el currículo LOGSE sobre aritmética escolar con los datos proporcionados por los alumnos encuestados, según señala el Objetivo 1.7 de esta investigación. Igualmente, contribuirán a comparar esa eficacia con la de los otros dos programas, como se enuncia en el Objetivo 2.6.

## 8. Conclusiones

Damos por concluido el estudio comparativos de tres currículos de matemáticas para la educación obligatoria en el periodo 1945–2005, periodo durante el cual sus respectivos programas han tenido, consecutivamente, vigencia e impacto en la formación matemática de los escolares españoles.

Los tres currículos, como se muestra en la Tabla 1 son, en primer lugar, el establecido por los Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria derivados de la Ley de Educación Primaria (LEP) de 1945; en segundo término el currículo de las Nuevas Orientaciones para la Educación General Básica derivado de la Ley General de Educación (LGE) de 1970; y, finalmente, el que determinan las enseñanzas mínimas para matemáticas en la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria, derivadas de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990.

Este capítulo hemos desarrollado su estudio comparativo con fundamento en la teoría curricular (Rico, 1997). Para ello el Apartado 3 se ha centrado en una comparación estructural de los rasgos básicos de las tres leyes en lo que afectan a este estudio. En segundo lugar, en el Apartado 4 se ha llevado a cabo una comparación de diversas componentes curriculares: los objetivos de aprendizaje, contenidos, metodología y criterios de evaluación propuestos para las matemáticas escolares por los cuestionarios, orientaciones y enseñanzas mínimas establecidos. En tercer lugar, en los Apartados 5 y 6 hemos caracterizado por edades la formación sobre aritmética y magnitudes prescrita en los tres programas, siguiendo categorías establecidas por el NCTM. En cuarto lugar, en el Apartado 7 hemos establecido los niveles curriculares teóricos de cada uno de los ítems del THCAB para cada uno de los programas, con el fin de comparar su ubicación y distribución a lo largo de los cursos y fijar así el nivel de conocimiento esperado para los alumnos, en cada caso.

De este modo, el estudio ha dado satisfacción a varios objetivos de esta investigación.

Así, en el trabajo realizado en los Apartados 4, 5 y 6, se ha atendido a los Objetivos parciales 1.1 y 2.1:

- Objetivo 1.1: Caracterizar por niveles y ciclos la formación aritmética escolar que prescriben los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, que desarrollan la LOGSE, en términos de objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación.

- Objetivo 2.1: Caracterizar por niveles y por ciclos la formación aritmética escolar que prescriben los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria, de 1.945 y de la Ley General de Educación de 1.970, en términos de objetivos, contenidos, metodología.

También, a lo largo de esos apartados y del Apartado 7, se ha dado respuesta a los objetivos parciales 1.2 y 2.2:

- Objetivo 1.2: Estructurar por niveles y ciclos el tratamiento establecido para los ítems del test de Ballard ampliado, de acuerdo con el currículo de los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91.
- Objetivo 2.2: Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 1950–1951 y los de la promoción 1974–1975 evaluados con el test de Ballard.

Concluimos aquí el estudio comparativos de tres currículos de matemáticas para la educación obligatoria en el periodo considerado, que abarca sesenta años de matemática escolar.

# **CAPÍTULO QUINTO**

## **EVALUACIÓN DEL CURRÍCULO LOGSE DE**

### **MATEMÁTICAS MEDIANTE APLICACIÓN DEL**

#### **TEST DE BALLARD**

#### **1. Introducción**

En el Capítulo 3 hemos presentado el diseño de la investigación y se han planteado los objetivos y etapas del estudio. En una descripción detallada de las cinco primeras etapas hemos recorrido los pasos seguidos desde la elección del instrumento hasta el análisis descriptivo de los resultados generales obtenidos mediante la aplicación del test, una vez precisada la estrategia seguida en esa aplicación, la organización de los datos, su tratamiento y el estudio de consistencia de la prueba.

En el Capítulo 4 dimos cumplimiento a la sexta etapa del estudio. Para ello realizamos un estudio teórico comparativo de tres programas de matemáticas para educación obligatoria en el periodo 1945–2006, poniendo de manifiesto sus características formales, su estructura curricular y los contenidos prescritos para cada uno de los correspondientes programas. También consideramos los resultados esperados de aprendizaje por edades y niveles, según bloques de contenidos, en particular atendiendo a los niveles curriculares teóricos por edades y niveles, según bloques de contenidos, de cada uno de los ítems del test de Ballard y para uno de los currículos.

Procedemos en este quinto capítulo a desarrollar la séptima etapa de la investigación, establecida en el Capítulo 3, Apartado 4: llevar a cabo la evaluación del currículo de matemáticas establecido para la LOGSE de 1990 en lo que respecta a la habilidad de cálculo aritmético, según los resultados obtenidos por una muestra de escolares que han seguido ese programa y han dado respuesta en el curso 2000–2001 al test ampliado de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard (Díez, 2001). Para hacer esa evaluación tendremos en cuenta los conocimientos prescritos por curso, las expectativas de aprendizaje

establecidas por el programa y los aprendizajes alcanzados, tal y como muestran los rendimientos obtenidos al aplicar el test.

Con el estudio que aquí se lleva a cabo daremos cumplimiento, sucesivamente, a los Objetivos 1.3, 1.5, 1.6 y 1.7 de esta investigación.

## **2. Idoneidad de Ítems y Eficacia de un Currículo**

El Objetivo 1.3 propone establecer los ítems con expectativas de consecución de un nivel de idoneidad para cada grado o nivel escolar en relación con el currículo de la LOGSE. En la concepción tradicional, un test como el de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard (THCAB) es un instrumento para evaluar alumnos, grupos o centros escolares. De este modo, cuando los resultados de la aplicación de un test proporcionan información sobre el rendimiento de los escolares, informan sobre su aprendizaje en relación con un programa, dicen cuán adecuado ha sido el trabajo de los estudiantes, o bien el trabajo del profesorado, visto el plan de formación en curso. Los valores que aquí se consideran son los rendimientos de los estudiantes, individualmente, de los grupos y de los centros.

### **2.1. Rendimiento de los Ítems y Evaluación de Programas**

El planteamiento de nuestra investigación cambia esta perspectiva. Los objetivos específicos de los programas que consideramos en este estudio enuncian capacidades complejas, que engloban habilidades múltiples y conductas diversas. Cada ítem del test de Ballard evalúa una conducta singular mediante el rendimiento de un grupo de estudiantes, conducta que se vincula con unos contenidos y objetivos específicos de los programas.

Los estudiantes son los informantes quienes, mediante sus respuestas a una prueba, ponen de manifiesto si en cada ítem se alcanza un logro adecuado para el nivel curricular que, de acuerdo con los programas y libros de texto, le corresponde. De este modo los estudiantes informan sobre su conocimiento cuando muestran dominio sobre el conjunto de ítems de un objetivo específico. Los rendimientos obtenidos por los distintos ítems que responden a unos conocimientos y capacidades determinados, a un mismo objetivo específico, proporcionan una medida del logro de dicho objetivo.

En la perspectiva de nuestro estudio nos proponemos evaluar un programa de formación en términos de su adecuación, en tanto pueda proporcionar determinados aprendizajes sobre habilidad de cálculo aritmético, según establecimos en el Objetivo 1.2 y justificamos en el Apartado 7 del Capítulo 4.

Los programas establecen unos conocimientos y unas expectativas sobre ellos. El test evalúa unos conocimientos básicos que, de acuerdo con el análisis curricular basado en el programa, deben alcanzarse a partir de unos niveles determinados. En tanto los rendimientos de los distintos ítems que valoran un

mismo objetivo específico alcancen las expectativas previstas son satisfactorios y podremos afirmar que el programa logró cumplir sus propósitos; en tanto esos rendimientos no alcancen el nivel adecuado, diremos que el programa no cumplió sus objetivos.

El rendimiento de un grupo en un ítem es una medida parcial de satisfacción de las expectativas consideradas por un programa, y sus valores se encuentran en una escala de 0 a 100. Corresponde en el diseño de esta investigación establecer cuáles son los niveles de rendimiento de los ítems a partir de los cuales se consideran empíricamente satisfechas las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares y establecer distintas categorías de adecuación a partir de esos niveles.

## 2.2. Categorías Empíricas de Idoneidad

Ya hemos mencionado que en la investigación Granada–Mats establecimos cinco categorías de objetivos conductuales a partir de un determinado concepto empírico de idoneidad basado en el rendimiento obtenido en pruebas de evaluación diseñadas de acuerdo con dichos objetivos. El concepto, los intervalos y categorías considerados fueron:

Un objetivo matemático es idóneo a nivel de un curso, si al menos el 75% de los niños lo entienden, lo aplican/recuerdan, y lo aplican.

a) Si supera el 90% de éxitos es codificado muy fácil.

b) Si se obtiene entre el 80 y el 89% se estima fácil.

c) Idóneo, del 70 al 79%.

d) Del 50 al 69%, difícil.

e) Si se obtiene menos del 50% de respuestas correctas se considera muy difícil. (Rico, et al., 1985, pp. 29–30)

El criterio establecido por estos antecedentes resulta muy estricto para aplicarlo a los niveles curriculares establecidos, que no son otra cosa que convenciones relativas a un currículo decididas por los investigadores, el profesorado o los autores de libros de texto. Por ello, hacemos una revisión de esta clasificación y, puesto que los objetivos son terminales, consideramos una actualización de las categorías anteriores para la totalidad de los ítems, según los resultados alcanzados en cada último nivel.

Es decir, para esta investigación establecemos que:

Un objetivo de habilidad de cálculo aritmético es **idóneo** para un curso dentro de un currículo o programa de formación (LEEP, LGE, LOGSE o LOE) si los alumnos que siguen ese programa alcanzan un rendimiento estimado del 70% en ese curso con los ítems del Test de Ballard que lo evalúan.

Con mayor precisión:

a) Si superan el 80% de éxitos el objetivo es codificado como **fácil o dominado**.

- b) Si obtienen entre el 60% y el 79% el objetivo se codifica como **idóneo**.
- c) El objetivo se codifica **en proceso de aprendizaje** si obtienen entre el 40% y el 59%.
- d) Del 10% al 39%, se codifica como de **iniciación**.
- e) Si obtiene menos del 10% de respuestas correctas se considera **desconocido**.

El rendimiento de un ítem se ubica en una de estas categorías y sostenemos que, cuando alcanza o supera el nivel de idoneidad, muestra el logro del objetivo evaluado.

La idoneidad de los objetivos se establece a partir de la idoneidad de los ítems que lo evalúan. Un grupo alcanza un objetivo si el ítem correspondiente resulta dominado o idóneo por dicho grupo. Igual que se hizo para la Investigación Granada=Mats *para clasificar y categorizar empíricamente los ítems consideramos el mismo criterio: atender al rendimiento alcanzado por cada uno de ellos en cada nivel*. Así, según veremos en el Apartado 4.1 de este capítulo, podemos afirmar que, empíricamente, el ítem 1 está *dominado* en el tercer nivel de la EGB o que el ítem 9 es *idóneo* para el cuarto nivel. Los ítems que evalúan un objetivo delimitan su categoría empírica de idoneidad.

### 2.3. Eficacia de un Programa

Se establece también un criterio en relación con el nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del test. Los niveles teóricos se determinan teniendo en cuenta los programas de matemáticas para cada uno de los niveles de la educación obligatoria. Si en un curso se estudia un determinado contenido, el logro de su aprendizaje, de los conceptos y habilidades que lo delimitan, corresponde alcanzarlo al finalizar ese mismo nivel. Por tanto, aquel *nivel o curso en que se propone el aprendizaje de un contenido se dice que es su nivel teórico de instrucción*. Un ítem que evalúa un contenido tiene su mismo nivel teórico. La perspectiva curricular permite identificar el nivel curricular de un contenido con el del objetivo que enuncia su aprendizaje y con el de la tarea o ítem mediante el cual se evalúa.

Siguiendo este criterio, en las Tablas 38, 39 y 40 del Capítulo 4, presentamos la clasificación de los ítems por los niveles curriculares para los cuales está establecida su enseñanza, en cada caso según señalan los programas derivados de la LEP de 1945, de la LGE de 1970 y de la LOGSE de 1990. Esa clasificación de los *niveles curriculares teóricos* de cada ítem se establece según los niveles de los contenidos y objetivos correspondientes.

Completamos esta información con los *niveles curriculares teóricos del Test de Ballard ampliado*, que presentamos en el Apartado 3.2 de este capítulo.

Consideraremos, a su vez, *niveles curriculares empíricos*. El rendimiento de un ítem muestra la satisfacción de unas determinadas expectativas de

aprendizaje y lo ubica en una de las categorías antes definidas. Los rendimientos de un ítem en cada nivel por parte de un grupo de estudiantes muestran los niveles empíricos de ese grupo en cada caso. En particular, *el curso en que el rendimiento de un ítem alcance, al menos, el nivel de idoneidad se considera como su nivel empírico de idoneidad*. El nivel empírico de idoneidad, fijado para cada ítem en aquel nivel escolar cuyo rendimiento sea igual o superior al 60%, muestra el curso o los cursos en que un grupo logra un rendimiento adecuado para un objetivo.

Los objetivos de un currículo establecen expectativas sobre el aprendizaje escolar mientras que la eficacia del programa compara tales expectativas con los logros. Para conocer la eficacia de un currículo comparamos los niveles o expectativas teóricas con los logros empíricos de esos mismos objetivos, determinados por los rendimientos de los ítems que lo evalúan. Un ítem debiera alcanzar su nivel empírico de idoneidad de acuerdo con lo previsto por su nivel teórico en el programa. A veces hay coincidencia, a veces se atrasa o adelanta un curso, y en otros casos se atrasa más de un curso. La eficacia valora la adecuación de los resultados a las previsiones.

La eficacia siempre es relativa al programa y al instrumento de evaluación. En este caso se trata de establecer la eficacia del currículo LOGSE en relación con la habilidad de cálculo aritmético determinada por el test de Ballard ampliado.

## 2.4. Nivel Curricular Teórico

Para establecer la eficacia determinada por el test de Ballard ampliado necesitamos comparar el nivel curricular teórico o nivel de instrucción de cada uno de los ítems, apartados y bloques con su nivel de idoneidad empírica y valorar el grado de cumplimiento de las expectativas de aprendizaje teóricamente establecidas. El test ampliado consta de ciento veinte ítems de respuesta abierta (a elaborar por los alumnos). Para su análisis en primer lugar establecimos el nivel de instrucción según la LOGSE de 1990 de cada uno de los ítems de este test ampliado, al igual que se hizo en el Apartado 7 del Capítulo 4 para el test de Ballard y los tres currículos considerados.

En la Tabla 1 se muestra el resumen de estos niveles, que completan los marcados en la Tabla 38 del Capítulo 4:

Tabla 1

*Nivel de Instrucción LOGSE de los Ítems del Test Ampliado de Ballard*

Edad	Curso	Número de los ítems a lograr en cada nivel por vez primera	Total ítems por nivel
8-9 años	3º	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,	30

	Educación primaria	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 101, 102, 103, 104, 107, 108, 109, 110 y 111	
9-10 años	4º Educación primaria	22, 23 y 37 (además de los anteriores)	33
10-11 años	5º Educación primaria	24, 25, 26, 27, 28, 30, 38, 52, 53, 54, 55 y 56 (junto a los anteriores)	45
11-12 años	6º Educación primaria	29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 96, 105 y 106 (junto a los anteriores)	82
12-13 años	1º de ESO	39, 40, 41, 47, 48, 68, 69, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 116, 117, 118, 119 y 120 (junto con los anteriores)	106
13-14 años	2º de ESO	50, 51, 79, 80, 82, 89, 90, 98, 99, 112, 113, 114, y 115 (junto con los anteriores)	119

Con este balance se da cumplimiento al Objetivo 1.3 de la investigación, donde se decía: Establecer los ítems con expectativas de consecución de un nivel de idoneidad para cada grado o nivel escolar en relación con el currículo de la LOGSE.

### 3. Evaluación del Currículo LOGSE mediante el Test de Ballard

Esta etapa constituye uno de los núcleos centrales de nuestra investigación, para cuya realización han sido necesarias las etapas anteriores de selección y diseño del instrumento, elección de la muestra, aplicación de la prueba, organización y tratamiento de los datos, junto con el análisis descriptivo de los resultados obtenidos.

También ha sido necesario reflexionar sobre la perspectiva que adoptamos respecto a la evaluación de la habilidad de cálculo aritmético por medio de un test como el de Ballard, e introducir los conceptos de nivel teórico curricular de un ítem, de nivel empírico de un ítem y las categorías de idoneidad para un objetivo de aprendizaje específico. Iniciamos esta evaluación presentando el procedimiento en que se sustenta.

#### 3.1. Bloques Temáticos y Objetivos Específicos

Atendiendo a los contenidos curriculares tratados, las ciento veinte preguntas del test se organizan en doce bloques temáticos. Los doce bloques tratan de conceptos y operaciones relativos a:

1. Números naturales.
2. Sistema monetario español.
3. Medidas de tiempo.
4. Sistema métrico decimal.
5. Números racionales (fracciones).
6. Números decimales.
7. Raíz cuadrada de números naturales.
8. Porcentajes.
9. Proporcionalidad.
10. Divisibilidad.
11. Media aritmética.
12. Magnitudes geométricas.

Cuando ha procedido, a su vez, los bloques temáticos se subdividen en apartados (Díez, 2001). Así, el bloque temático Números naturales tiene ocho apartados:

- 1.1. Suma de números naturales.
- 1.2. Resta de números naturales.
- 1.3. Combinaciones de sumas y restas de números naturales.
- 1.4. Producto de números naturales.
- 1.5. División de números naturales.
- 1.6. Combinación de productos y divisiones de números naturales.
- 1.7. Completar series numéricas de números naturales.
- 1.8. Combinación de operaciones de números naturales con diferente prioridad lógica de ejecución.

El dominio de los conceptos y procedimientos básicos de cada uno de estos bloques temáticos constituye un objetivo específico del currículo de matemáticas para la educación obligatoria. Así, un ejemplo de objetivo específico es: *conocer la resta de naturales y aplicar las destrezas y estrategias básicas para su cálculo*. Cada bloque temático integra tantos objetivos específicos como apartados lo compongan.

Los objetivos específicos se evalúan mediante una serie de ítems. Cada ítem valora un aspecto operativo del objetivo específico correspondiente. El rendimiento de cada ítem muestra el rendimiento para ese objetivo operativo. Los resultados de los ítems de un mismo apartado valoran, por tanto, dicho objetivo específico. En el ejemplo anterior, los ítems 4, 7, 8, 9, 11 y 12, del

Bloque 1.2, evalúan el objetivo específico enunciado sobre resta de números naturales.

En lo que sigue la evaluación de los logros la hacemos considerando los rendimientos singulares de cada uno de los ítems en cada uno de los niveles escolares en que se ha aplicado la prueba.

### **3.2. Procedimiento**

Clasificados los ítems del test en bloques temáticos y apartados, iniciamos un análisis de resultados, que comprende:

Primero, identificación del bloque temático y de cada uno de sus apartados, identificación de los ítems de cada bloque y apartado. Seguidamente, señalamos su nivel de instrucción o nivel curricular teórico según la LOGSE.

Segundo, presentación de los índices de dificultad de cada uno de los ítems. Mediante estos resultados se establecen los niveles empíricos de cada uno de los ítems. Estos niveles permiten señalar cuándo un ítem logra la idoneidad, o bien identificar aquellos conocimientos que están en proceso de aprendizaje o en iniciación, debido a que los ítems correspondientes no superan los rendimientos establecidos.

Tercero, balance por apartados y bloques de la satisfacción de las expectativas de aprendizaje en cada caso. También destacamos para los ítems de un mismo bloque temático y apartado su situación al término de 2º de ESO. Concluida esta revisión ítem a ítem, hacemos un balance del aprendizaje que muestran los resultados sobre los contenidos de cada uno de los bloques.

## **4. Estudio por Bloques del Nivel Empírico de los Ítems**

Consideramos el rendimiento por cada uno de los ítems de un mismo apartado y bloque y en cada uno de los niveles evaluados.

### **4.1. Nivel Empírico de los Ítems de Números Naturales**

Mostramos los resultados de los ítems organizados por bloques y apartados.

Bloque 1. Números naturales. Este bloque se organiza en ocho apartados.

Apartado 1.1: Suma de números naturales. Ítems que lo evalúan: 1, 2, 3 y 10. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: tercer curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 2

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
1	96,75%	96,69%	96,15%	99,44%	98,26%	97,56%
2	87,66%	93,38%	91,03%	94,92%	98,84%	94,51%
3	86,36%	87,42%	92,31%	93,79%	95,35%	95,12%
10	57,79%	79,47%	79,49%	83,62%	83,72%	84,76%

Ítems dominados en 3º de Primaria: los número 1, 2 y 3. Ítem idóneo en 4º de Primaria: el número 10; retrasa en un curso su nivel curricular teórico. Al término de la Educación primaria este grupo de ítems está dominado.

Apartado 1.2: Resta de números naturales. Los ítems que lo evalúan son los números 4, 7, 8, 9, 11 y 12. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: tercer curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 3

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.2.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
4	64,29%	76,16%	80,77%	85,31%	88,37%	90,24%
7	46,75%	72,19%	80,77%	90,96%	90,70%	93,90%
8	87,66%	92,05%	94,23%	97,18%	99,42%	98,78%
9	40,91%	68,21%	78,21%	80,23%	77,91%	85,98%
11	26,62%	48,34%	60,90%	77,40%	86,05%	87,20%
12	27,92%	59,60%	73,08%	67,23%	76,74%	76,83%

Ítems dominados en 3º de Primaria: número 8. Ítems idóneo en 3º de Primaria: número 4. Ítems idóneos en 4º de Primaria: números 7 y 9; retrasan un curso su nivel curricular teórico. Ítems idóneos en 5º de Primaria: números 11 y 12; retrasan en dos cursos su nivel curricular teórico. Al término de la Educación obligatoria este grupo de ítems está dominado.

Apartado 1.3: Combinaciones de sumas y restas de números naturales. Ítems: 5 y 6. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: tercer curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 4

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.3.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
5	48,70%	55,63%	38,46%	49,15%	56,40%	76,22%
6	37,01%	57,62%	67,95%	70,62%	81,98%	78,0%

Ítems idóneos en 3º de Primaria: ninguno. Ítem idóneo en 5º de Primaria: número 6; retrasa dos cursos su nivel curricular teórico. Ítem idóneo en 2º de ESO: número 5; retrasa cinco cursos su nivel curricular teórico.

Apartado 1.4: Producto de números naturales. Los ítems que lo evalúan son los números 13, 15, 20, 21, 22 y 23. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: tercer curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 5

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.4.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
13	31,82%	64,24%	75,64%	80,79%	81,98%	82,32%
15	25,97%	60,93%	73,72%	75,14%	80,23%	78,66%
20	18,83%	33,11%	57,69%	70,06%	88,37%	93,29%
21	8,44%	22,52%	33,33%	26,55%	38,95%	47,56%
22	2,60%	22,52%	48,08%	57,06%	68,02%	71,95%
23	2,60%	27,15%	57,69%	67,23%	73,26%	75,61%

Ítems idóneos en 3º de Primaria: ninguno. Ítems idóneos en 4º de Primaria: números 13 y 15; retrasan un curso su nivel curricular teórico. Ítems idóneos en 6º de Primaria: números 20 y 23; retrasan tres cursos su nivel teórico. Ítem idóneo en 1º de ESO: número 22; retrasa cuatro cursos su nivel teórico. Al término de la Educación obligatoria estos ítems, excepto el ítem 21, mantienen su nivel de idoneidad.

Apartado 1.5: División de números naturales. Este apartado se evalúa a

través de los ítems 16, 17, 18 y 19. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: tercer curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 6

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.5.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
16	23,38%	68,21%	88,46%	90,96%	93,60%	93,29%
17	18,18%	63,58%	83,33%	90,40%	93,60%	95,12%
18	17,53%	70,86%	80,13%	80,23%	88,37%	89,02%
19	1,95%	39,74%	67,31%	66,67%	78,49%	77,44%

Ítems idóneos en 3º de Primaria: ninguno. Ítems idóneos en 4º de Primaria: números 16, 17 y 18; retrasan un curso su nivel curricular teórico. Ítems idóneos en 5º de Primaria: número 19; retrasa dos cursos su nivel curricular teórico. Al término de la Educación obligatoria estos ítems están dominados.

Apartado 1.6: Combinación de producto y división de números naturales. Ítem 14. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: tercer curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 7

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 1.6.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
14	3,25%	39,07%	66,67%	70,62%	83,44%	86,59%

El ítem no es idóneo en 3º y 4º de Primaria. Ítem idóneo en 5º de Primaria.

Apartado 1.7: Completar series numéricas. Los ítems que evalúan este apartado son 101, 102, 103, 104, 105, 106. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE. Este apartado se evalúa mediante los ítems 101, 102, 103 y 104 en cuarto curso de primaria; los ítems 105 y 106 en sexto curso de primaria. Resultados empíricos:

Tabla 8

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.7.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
101	58,44%	52,32%	67,31%	76,84%	87,21%	86,59%
102	53,25%	50,33%	62,82%	74,01%	84,88%	83,54%
103	47,40%	42,38%	58,97%	74,01%	80,81%	81,10%
104	18,18%	24,50%	39,74%	55,37%	60,47%	67,07%
105	0,0%	1,32%	5,77%	13,56%	25,58%	36,59%
106	0,0%	0,66%	3,21%	3,95%	6,40%	23,78%

Ítems idóneos en 3º y 4º de Primaria: ninguno. Ítems idóneos en 5º de Primaria: números 101 y 102; retrasan un curso su nivel curricular teórico. Ítems idóneos en 6º de Primaria: 103; retrasa dos cursos su nivel curricular teórico. Ítems idóneos en 1º de ESO: 104; retrasa tres cursos su nivel curricular teórico. Los ítems 105 y 106 no se dominan al término de este periodo.

Apartado 1.8: Combinación de operaciones con diferente prioridad lógica de ejecución. Los ítems que evalúan este apartado son 107, 108, 109, 110, 111. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: 3º de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 9

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 1.8.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
107	0,0%	0,0%	8,33%	10,17%	17,44%	15,24%
108	0,65%	0,66%	3,85%	12,43%	23,26%	20,73%
109	0,65%	5,96%	7,69%	10,73%	18,02%	15,85%
110	0,65%	0,0%	3,21%	7,91%	16,86%	16,46%
111	20,13%	33,11%	48,08%	66,10%	73,26%	73,78%

Con excepción del ítem 111 ningún otro parece adecuado para los niveles estudiados; prácticamente el contenido de estos ítems es desconocido para los alumnos de estos niveles y no superan un rendimiento del 20% al término del

periodo.

## 4.2. Balance de los Ítems de Números Naturales

Este primer bloque se evalúa mediante 34 ítems.

Teóricamente, el nivel curricular de 28 de ellos corresponde a 3º de Primaria; otros cuatro a 4º de Primaria y dos a 6º de Primaria.

Empíricamente, sólo cinco ítems se ajustan al nivel previsto de 3º de Primaria; 10 ítems se retrasan en un año; seis ítems se retrasan en dos años; cuatro ítems se retrasan en tres años y un ítem se retrasa en 5 años.

Hay siete ítems que no alcanzan un nivel de idoneidad en ninguno de los cursos evaluados, por ello decimos que su nivel empírico es desconocido.

La Tabla 10 muestra los niveles curriculares teóricos y empíricos de los ítems, según los distintos apartados, y resume los retrasos o desniveles detectados al hacer las comparaciones entre ambos niveles.

Tabla 10

*Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 1*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Suma de naturales	1, 2 y 3	3º Primaria	3º Primaria	0
Suma de naturales	10	3º Primaria	4º Primaria	1
Resta de naturales	4 y 8	3º Primaria	3º Primaria	0
Resta de naturales	7 y 9	3º Primaria	4º Primaria	1
Resta de naturales	11 y 12	3º Primaria	5º Primaria	2
Suma y resta	5	3º Primaria	2º ESO	5
Suma y resta	6	3º Primaria	5º Primaria	2
Producto naturales	13 y 15	3º Primaria	4º Primaria	1
Producto naturales	20 y 23	3º Primaria	6º Primaria	3
Producto naturales	22	3º Primaria	1º ESO	4
Producto naturales	21	3º Primaria	Desconocido	Desconocido
División naturales	16, 17 y 18	3º Primaria	4º Primaria	1
División naturales	19	3º Primaria	5º Primaria	2

Producto y división	14	3º Primaria	5º Primaria	2
Producto y resta	111	3º Primaria	6º Primaria	3
Series aditivas	101 y 102	4º Primaria	5º Primaria	1
Series sustractivas	103	4º Primaria	6º Primaria	2
Series sustractivas	104	4º Primaria	1º ESO	3
Series multiplicativas	105 y 105	6º Primaria	Desconocido	Desconocido
Sumas y productos	107, 108, 109 y 110	3º Primaria	Desconocido	Desconocido

---

Los ítems que se ajustan a su nivel plantean operaciones sencillas de suma y resta. Los ítems que se retrasan un año comprenden:

- operaciones de varios pasos en la suma o de llevarse de 0 más de una vez en la resta;
- productos con un factor de dos o mas cifras y el otro de una sola cifra;
- casos particulares de la división con divisor de una cifra;
- ítems de series aditivas.

Los ítems que se retrasan en dos años comprenden:

- sumas y restas sucesivas, restas sucesivas, llevarse dos veces consecutivas en restas;
- división con dividendo de 4 cifras y producto seguido de división;
- series sustractivas.

Los ítems que se retrasan en tres años comprenden:

- productos sencillos de cinco factores;
- productos de dos factores de tres cifras, inferiores a 5;
- producto seguido de resta; series sustractivas.

Los ítems que se retrasan en cuatro años comprenden:

- cuadrado de un número de dos cifras.

Los ítems que se retrasan en cinco años comprenden:

- sumas y restas consecutivas de dígitos, con más de dos pasos.

Finalmente, no se alcanza un nivel adecuado en:

- producto de mas de dos factores;
- series multiplicativas y partitivas;

- operaciones aditivas y multiplicativas sin paréntesis.

### 4.3. Nivel Empírico de los Ítems del Sistema Monetario

Bloque 2. Sistema monetario. Este bloque se organiza en seis apartados.

Apartado 2.1: Reducción de unidades. Este apartado se evalúa con el ítem 81. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 11

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 2.1*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
81	0%	0%	2,56%	5,08%	8,72%	15,24%

Ítem desconocido; sólo en 2º de ESO su rendimiento supera el 10% y pasa a iniciación.

Apartado 2.2: Suma de cantidades complejas de dinero. Este apartado se evalúa con el ítem 24. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 12

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 2.2*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
24	0%	0,66%	5,77%	16,38%	26,16%	40,24%

En 2º de ESO su rendimiento supera el 40% y su contenido pasa considerarse como en proceso aprendizaje.

Apartado 2.3: Resta de cantidades complejas de dinero. Ítem 25. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: 6º curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 13

*Rendimiento por curso del ítem del Apartado 2.3*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
25	0%	0%	1,92%	6,21%	12,79%	20,73%

A partir de 1º de ESO su rendimiento supera el 10%, sin alcanzar el 40% en ningún nivel. Este resultado sitúa este ítem como de iniciación.

Apartado 2.4: Producto de una cantidad compleja de dinero por un número natural. Ítems 29, 31, 32, 51 y 79. Nivel teórico de instrucción de estos ítems según currículo LOGSE: los ítems 29, 31 y 32 corresponden a 6º curso de Primaria; los ítems 51 y 79 a 2º curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 14

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 2.4*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
29	0,0%	0,0%	3,85%	3,29%	23,26%	36,59%
31	0,0%	0,0%	4,49%	8,47%	18,02%	37,80%
32	0,0%	0,0%	1,28%	6,78%	19,77%	32,93%
51	0,0%	0,0%	1,28%	0,0%	1,16%	11,59%
79	0,0%	0,0%	0,64%	0,0%	0,0%	6,71%

En el nivel 2º de ESO los ítems 29, 31, 32 y 51 están en iniciación; el ítem 79 es desconocido.

Apartado 2.5: División de una cantidad compleja de dinero por un número. Ítem: 30. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: 5º curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 15

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 2.5*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
30	0%	1,32%	5,13%	11,30%	26,16%	35,98%

Grupo de ítems en iniciación: nivel 2º de ESO.

Apartado 2.6: Aplicaciones a la aritmética comercial. Ítems: 75, 76, 77, 78. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: 6º curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 16

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 2.6*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
75	0,0%	1,99%	2,56%	6,78%	13,95%	29,27%
76	0,0%	0,0%	1,92%	5,08%	10,47%	19,51%
77	0,65%	3,97%	4,49%	11,86%	22,67%	46,34%
78	0,0%	1,99%	1,28%	6,78%	16,86%	42,07%

En el nivel de 2º de ESO los ítems 77 y 78 están en proceso de aprendizaje, mientras que los ítems 75 y 76 son de iniciación.

#### 4.4. Balance de los Ítems del Sistema Monetario

Este segundo bloque se evalúa por medio de 13 ítems. Los niveles teóricos de instrucción para 10 de ellos se sitúan en 6º de Primaria; los tres restantes corresponden a 2º de ESO.

La Tabla 17 muestra los niveles curriculares teóricos y empíricos de los 13 ítems que evalúan este bloque, según los distintos apartados, y resume los retrasos detectados al hacer las comparaciones entre ambos niveles.

Tabla 17

*Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 2*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Reducción unidades	81	6º Primaria	Iniciación 2º ESO	> 2
Suma cantidades Complejas	24	6º Primaria	Proceso aprendizaje 2º ESO	> 2
Resta cantidades complejas	25	6º Primaria	Iniciación 2º ESO	> 2
Producto cantidad por natural	29, 31 y 32	6º Primaria	Iniciación 2º ESO	> 2
Fracción por cantidad incompleja	51	2º ESO	Iniciación 2º ESO	> 1
Fracción por cantidad compleja	79	2º ESO	Desconocido	Desconocido
División cantidad compleja entre natural	30	5º Primaria	Iniciación 2º ESO	> 3
Cálculo cantidad conocido valor unidad	75 y 76	6º Primaria	Iniciación 2º ESO	> 2
Cálculo cantidad conocido valor otra cantidad	77 y 78	6º Primaria	Iniciación 2º ESO	> 2

Los rendimientos obtenidos por los 13 ítems de este bloque son llamativamente bajos. A término del periodo los resultados muestran que el logro alcanzado por dos de ellos los sitúa *en proceso de aprendizaje* en 2º de ESO; otros nueve alcanzan la categoría de *iniciación* también en 2º de ESO. Finalmente, hay un ítem cuyo nivel es desconocido.

De todos los ítems podemos afirmar que muestran un retraso de dos o mas cursos respecto de las expectativas de aprendizaje evaluadas, excepto el ítem 79 del cual no tenemos información.

Los ítems que evalúan los contenidos de este bloque muestran una complejidad conceptual considerable. Así, el ítem 81, además de su propia complicación por la reducción de unidades, necesita utilizar un número decimal con milésimas. El ítem 24, además de la complicación de sumar unidades

complejas de magnitud, utiliza números decimales con dos cifras decimales, lo cual retrasa su nivel teórico de instrucción. Igualmente ocurre con el ítem 25, que trata de la resta de unidades complejas de esta magnitud, y con los ítems 29, 31 y 32 que utilizan cantidades con una o dos cifras decimales. El retraso curricular en la enseñanza de las fracciones en el currículo LOGSE hace que los ítems 51 y 79 sean desconocidos en los niveles estudiados.

Por tanto, hay que tener en cuenta que la evaluación del bloque *Sistema monetario* se hace con ítems de alta complejidad, que requieren del dominio de otros contenidos, como son los números decimales, conversión de unidades, operaciones con fracciones, razonamiento proporcional, etc. Estos contenidos se evalúan en un momento en que el sistema monetario español tradicional va a ser sustituido por el sistema monetario europeo y, por tanto, la presión escolar sobre el logro de estos aprendizajes parece haber disminuido.

#### 4.5. Nivel Empírico de los Ítems de Medida del Tiempo

Bloque 3: Medida del tiempo. Este bloque se organiza en 3 apartados.

Apartado 3.1: Reducción de cantidades de tiempo. Ítem 37. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: cuarto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 18

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 3.1*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
37	0%	1,32%	2,56%	6,78%	20,35%	27,44%

El ítem alcanza en 1º de ESO el nivel de iniciación, que mantiene en 2º.

Apartado 3.2: Suma de cantidades complejas de tiempo. Ítem 26. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: 5º curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 19

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 3.2*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
26	0,65%	5,96%	8,33%	16,95%	30,81%	28,66%

El ítem alcanza en 1º de ESO el nivel de iniciación, que mantiene en 2º.

Apartado 3.3: Producto de una cantidad compleja de tiempo por un número. Ítem 34. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: 6º curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 20

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 3.3*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
34	0%	0%	1,92%	3,95%	8,14%	16,46%

El ítem alcanza en 2º de ESO un nivel de iniciación; para los niveles anteriores resulta prácticamente desconocido.

#### 4.6. Balance de los Ítems de Medida del Tiempo

El tercer bloque se ha evaluado por medio de tres ítems; el balance de resultados se presenta en la Tabla 21.

Tabla 21

*Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 3*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en curso
Reducción de unidades de tiempo	37	6º Primaria	Iniciación 1º ESO	> 2
Suma de cantidades complejas de tiempo	26	5º Primaria	Iniciación 1º ESO	> 3
Producto de cantidad compleja por un número	34	6º Primaria	Iniciación 2º ESO	> 2

Aunque la complejidad de las cuestiones planteadas sea alta, los porcentajes de respuestas correctas no concuerdan con el nivel actual de instrucción curricular. Los valores finales alcanzados están a gran distancia del nivel teórico de instrucción de los contenidos de este bloque. Todos los ítems están por debajo del 30% de rendimiento, lo cual muestra escaso conocimiento

sobre la medida del tiempo y sus unidades por parte de los alumnos evaluados.

#### 4.7. Nivel Empírico de los Ítems del Sistema Métrico Decimal

El cuarto bloque se organiza en seis apartados

Apartado 4.1: Reducción de unidades del SMD. Este apartado se evalúa con el ítem 38. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: quinto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 22

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
38	0%	1,99%	7,05%	12,43%	29,07%	42,07%

El rendimiento empírico de este ítem en 2º de ESO está en proceso de aprendizaje, bastante distante de su nivel teórico de instrucción.

Apartado 4.2: Restas de cantidades complejas del SMD. Ítems: 27 y 28. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: quinto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 23

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 4.2.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
27	0%	2,00%	4,49%	16,95%	27,33%	34,15%
28	0%	2,00%	5,77%	10,17%	25,00%	32,93%

Los dos ítems no superan el nivel de iniciación en 6º de Primaria, 1º y 2º de ESO. Los porcentajes de respuestas correctas son excesivamente bajos en los últimos niveles.

Apartado 4.3: Producto de una cantidad compleja del SMD por un número. Ítem 35. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: 6º curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 24

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.3.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
35	0,65%	0,66%	7,69%	7,91%	28,49%	45,73%

El ítem alcanza las categorías de iniciación en 1º y en proceso de aprendizaje en 2º de ESO, si bien bastante por debajo de lo esperado.

Apartado 4.4: División de una cantidad compleja del SMD por un número. Ítems 33 y 36. Nivel de instrucción de los ítems según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 25

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 4.4.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
33	0%	0%	3,85%	7,91%	23,84%	28,66%
36	0%	0%	3,21%	9,04%	20,93%	33,54%

Rendimientos muy bajos. Los resultados muestran que estos ítems no superan la categoría de ítems en iniciación en 1º y 2º de ESO.

#### 4.8. Balance de los Ítems del Sistema Métrico Decimal

El conocimiento del sistema métrico decimal se evalúa mediante seis ítems, todos ellos centrados en el manejo de cantidades complejas de longitud o de peso sobre las cuales hay que llevar a cabo conversión de unidades y, posteriormente, operaciones. El balance de resultados se presenta en la Tabla 26:

Tabla 26

*Balance de los Niveles Teóricos y Empíricos de los Ítems del Bloque 4*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en curso
Reducción de unidades del SMD	38	5º Primaria	En proceso de aprendizaje 2º ESO	> 3
Resta de cantidades complejas del SMD	27 y 28	5º Primaria	Iniciación 6º Primaria	> 3
Producto de cantidad compleja por un número	35	6º Primaria	En proceso de aprendizaje 2º ESO	> 2
División de cantidad compleja por un número	33 y 36	6º Primaria	Iniciación 1º ESO	>2

Resulta preocupante el bajo nivel en el dominio del Sistema Métrico Decimal alcanzado por los estudiantes evaluados. Tratándose de nociones básicas y relevantes del cuestionario y objetivos terminales de la Educación Primaria los resultados, sin embargo, indican que en 6º nivel estos contenidos son prácticamente desconocidos. En el último curso evaluado, 2º de ESO los alumnos no llegan al nivel de idoneidad, oscilando los resultados entre las categorías de iniciación y la de proceso de aprendizaje.

Considerando conjuntamente los bloques 2, 3 y 4 observamos que el rendimiento de los ítems que evalúan el conocimiento de las distintas magnitudes no superan un rendimiento del 45%, en términos generales.

#### **4.9. Nivel Empírico de los Ítems del Bloque de Números Racionales**

El quinto bloque se organiza en 10 apartados.

Apartado 5.1: Simplificación de fracciones. Ítem 80. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 27

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 5.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
80	0%	0%	1,28%	2,26%	12,21%	53,66%

El rendimiento en los niveles previos concuerda con el nivel de instrucción curricular teórico. En 2º de ESO no alcanza el nivel de idoneidad pero el porcentaje muestra un proceso de aprendizaje avanzado.

Apartado 5.2: Suma de números racionales. Ítems: 39 y 41. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 28

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.2.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
39	0%	0%	1,28%	0,56%	7,56%	48,78%
41	0%	0%	1,28%	0,56%	9,30%	46,95%

Los rendimientos muestran que en 2º de ESO este ítem no alcanza el nivel de idoneidad pero muestra un proceso de aprendizaje avanzado.

Apartado 5.3: Resta de números racionales. Ítem: 40. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 29

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 5.3.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
40	0%	0%	0,64%	0,56%	9,88%	45,73%

El rendimiento de este ítem es similar al de los ítems del apartado anterior; su nivel empírico de idoneidad lo sitúa en proceso de aprendizaje.

Apartado 5.4: Combinaciones de sumas y restas de racionales. Ítems: 42, 43, 44 y 45. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 30

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.4.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
42	0%	0%	0,64%	0%	1,74%	35,37%
43	0%	0%	0,64%	0%	1,74%	28,05%
44	0%	0%	0,64%	0%	1,74%	32,93%
45	0%	0%	0,64%	1,13%	0,58%	18,90%

Los ítems de este apartado muestran su mayor dificultad al obtener rendimientos más bajos en 2º curso de ESO, nivel previsto teóricamente para su dominio. Los resultados finales ubican estos contenidos en un nivel de iniciación.

Apartado 5.5: Producto de números racionales. Ítems: 46 y 49. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: 2º curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 31

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.5.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
46	0%	0%	7,05%	19,77%	23,84%	56,71%
49	0%	0%	0,64%	0,56%	6,98%	55,49%

Los ítems 46 y 49 se encuentran en el grupo de ítems en aprendizaje, con rendimientos altos dentro de esa categoría.

Apartado 5.6: División de números racionales. Ítems: 47 y 50. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 32

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.6.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
47	0,0%	0%	1,28%	0,0%	12,79%	54,88%
50	0,0%	0%	0,64%	1,13%	2,91%	46,95%

Los ítems de este apartado también están en la categoría empírica de ítems en aprendizaje. Sus rendimientos son muy similares a los del apartado anterior.

Apartado 5.7: Combinación de productos y divisiones de racionales. Ítem: 48. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 33

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 5,7.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
48	0%	0%	0%	2,82%	6,98%	43,29%

Este ítem se encuentra en el grupo de ítems en procesos de aprendizaje para 2º curso de ESO.

Apartado 5.8: Orden en el conjunto de los números racionales. Este apartado se evalúa con los ítems 112 y 113. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 34

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.8.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
112	2,60%	7,95%	57,69%	78,53%	79,07%	79,88%
113	0,0%	1,99%	7,05%	22,60%	32,56%	56,71%

Ordenar fracciones con el mismo denominador es un objetivo idóneo desde 6º de primaria; ordenar fracciones unitarias es un objetivo en proceso de aprendizaje a comienzos de 2º de ESO.

Apartado 5.9: Densidad en el conjunto de los números racionales. Ítems 114 y 115. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 35

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.9.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
114	1,30%	1,99%	44,23%	77,97%	79,07%	86,59%
115	0%	0%	0,64%	2,82%	1,16%	8,54%

El ítem 114 es idóneo desde 6º de primaria y concluye como ítem dominado en 2º de ESO. Este resultado es coherente con el obtenido para el ítem 112: las fracciones con igual denominador se trabajan como naturales adjetivados, es decir,  $\frac{5}{9}$  se interpreta como “5 novenos”, como cantidades de la unidad “novenos”. Por tanto, ordenar fracciones de igual denominador sigue el mismo procedimiento que ordenar cantidades medidas con naturales.

El ítem 115 presenta una situación distinta ya que se pide encontrar una fracción comprendida entre dos consecutivas con el mismo denominador. Los alumnos encuestados no conocen ninguna de las posibles estrategias que pueden seguirse para encontrar respuesta a la cuestión planteada. Los conocimientos necesarios para el logro de este objetivo son desconocidos para los alumnos de 2º de ESO.

Apartado 5.10: Simplificación de expresiones racionales. Ítems 116 y 117. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: 6º de primaria. Resultados empíricos:

Tabla 36

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 5.10.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
116	0,65%	0,0%	15,38%	61,58%	81,98%	89,02%
117	0,0%	0,66%	10,26%	41,81%	59,30%	68,90%

Los dos ítems evalúan expresiones trabajadas y que debieran estar dominadas en 6º de primaria. En ese nivel alcanzan, respectivamente, rendimientos de ítem idóneo e ítem en proceso de aprendizaje. Al terminar la educación primaria, los resultados son dominado e idóneo, respectivamente; estos resultados se mantienen y mejoran en 2º de ESO.

#### 4.10. Balance de los Ítems del Bloque de Números Racionales

El conocimiento sobre fracciones y números racionales se organiza, según hemos visto, en diez apartados y se evalúa mediante 19 ítems. El balance de resultados se presenta en la Tabla 37.

El bloque lo denominamos Números racionales, en vez de Fracciones ya que en la mayor parte de los ítems se trabaja con fracciones de distinto denominador y es necesario reducirlas a común denominador para operar con ellas. Por ello hablamos de racionales en vez de fracciones ya que es necesario el conocimiento de la equivalencia de fracciones, especialmente en la relación de orden y en las operaciones de suma y resta. Por ello, también señalamos como nivel curricular teórico de estos ítems el 2º curso de ESO, en vez de 6º de primaria. Sólo en los casos singulares en que se trabaja con fracciones de igual denominador señalamos 6º de primaria como nivel de instrucción teórico.

Tabla 37

*Balance de los Niveles Teórico y Empírico de los Ítems del Bloque 5*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Simplificar una fracción	80	2º ESO	2º ESO, en proceso	$\geq 1$
Suma de racionales	39 y 41	2º ESO	2º ESO, en proceso	$\geq 1$
Resta de racionales	40	2º ESO	2º ESO, en proceso	$\geq 1$
Sumas y restas combinadas	42, 43, 44 y 45	2º ESO	2º ESO Iniciación	$\geq 2$
Producto de racionales	46 y 49	2º ESO	2º ESO, en proceso	$\geq 1$
División racionales	47 y 50	2º ESO	2º ESO, en proceso	$\geq 1$

Tabla 37

*Balance de los Niveles Teórico y Empírico de los Ítems del Bloque 5*

Combinación de producto y división	48	2º ESO	2º ESO, en proceso	$\geq 1$
Ordenar fracciones de igual denominador	112	6º Primaria	6º Primaria, Idóneo	
Ordenar fracciones unitarias	113	6º Primaria	2º ESO, en proceso	$\geq 2$
Densidad discretizable entre fracciones	114	6º Primaria	6º Primaria, Idóneo	
Densidad no discretizable entre fracciones	115	2º ESO	2º ESO, desconocido	Desconocido
Simplificación de expresiones racionales	116 y 117	6º Primaria	116: 6º, Idóneo 117: 2º ESO Idóneo	

De los 19 ítems hay 10 cuyo rendimiento en 2º de ESO se encuentra entre un 45% y un 55% de rendimiento. La mayoría tratan de operaciones entre números racionales. Se encuentran pues en proceso de aprendizaje, cuya evolución positiva se aprecia en relación con los rendimientos de los cursos anteriores, pero no llegan a alcanzar el nivel teórico de idoneidad previsto en 2º curso de ESO.

Hay cuatro ítems, correspondientes a sumas y restas combinadas cuyo nivel empírico en 2º de ESO es de iniciación. Estos ítems correspondían a antiguas expresiones de números mixtos, que transformamos en sumas. Los números resultantes tienen expresiones muy complejas, que parecen inducir a cierta confusión.

Hay otros cinco ítems cuyo nivel teórico sitúa su idoneidad en 6º de primaria por tratar de relaciones de orden entre fracciones con el mismo denominador. Son ítems que alcanzan o superan el nivel de idoneidad, en su mayoría. Sólo cuando las fracciones tienen distinto denominador, o bien es necesario trabajar con números racionales, los datos disminuyen (caso del ítem 113) o bien el ítem es desconocido (caso del ítem 115).

#### 4.11. Nivel Empírico de los Ítems de Números Decimales

El sexto bloque se organiza en nueve apartados.

Apartado 6.1: Fracción de un número decimal. Ítem: 82. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 38

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 6.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
82	0%	0%	0,64%	1,13%	0,58%	3,66%

Los resultados muestran este ítem como desconocido en todos los niveles evaluados. Podemos inferir que se encuentra fuera de la instrucción matemática dada en los niveles educativos estudiados.

Apartado 6.2: Suma de números decimales. Ítem: 52. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 39

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.3.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
52	2,60%	2,65%	29,49%	71,19%	70,93%	80,49%

El ítem es idóneo en 6º curso de primaria y está dominado en 2º curso de ESO. Concuerdan los resultados empíricos con los niveles teóricos de instrucción.

Apartado 6.3: Resta de números decimales. Ítems: 54, 55 y 56. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 40

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.3.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
54	0,65%	0,66%	7,69%	7,91%	28,49%	45,73%
55	0,0%	1,32%	5,77%	33,90%	41,86%	63,41%
56	1,95%	0,0%	13,46%	40,11%	46,51%	59,15%

En el primer ítem los números decimales poseen el mismo número de cifras; aunque presenta una doble sustracción, los escolares obtienen mejores resultados en éste que en los otros dos ítems cuyos números decimales tienen diferente número de cifras.

Los resultados concuerdan con el nivel de instrucción curricular. En el nivel 1º de ESO los tres ítems se encuentran en proceso de aprendizaje; en 2º de ESO alcanzan el nivel de idoneidad, si bien con rendimiento no muy alto.

Apartado 6.4: Combinaciones de sumas y restas de números decimales. Ítem: 53. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 41

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 6.4.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
53	3,90%	2,65%	31,41%	46,33%	52,91%	56,71%

En el nivel teórico establecido el ítem alcanza el nivel empírico en proceso de aprendizaje, que se mantiene para los dos cursos posteriores.

Apartado 6.5: Producto de números decimales. Ítems: 57, 58 y 62. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 42

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.5.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
57	1,95%	0,66%	9,62%	27,68%	48,26%	55,49%
58	0,0%	0,0%	5,13%	27,68%	44,77%	54,88%
62	0,0%	0,0%	0,64%	24,86%	31,40%	46,34%

Los porcentajes de respuestas correctas son muy parecidos en los tres ítems, siendo menor el porcentaje en el último ítem que presenta mayor dificultad. Permanecen en la categoría de en proceso de aprendizaje en 2º curso de ESO.

Apartado 6.6: División de números decimales. Ítems: 59, 60 y 63. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 43

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.6.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
59	0,0%	1,32%	1,28%	20,90%	30,81%	45,12%
60	0,0%	0,66%	0,64%	24,29%	23,84%	47,56%
63	0,0%	0,0%	1,28%	21,47%	30,81%	51,22%

Al igual que en el apartado anterior, los ítems de este apartado se ubican en el grupo de ítems en aprendizaje en el 2º curso de ESO

Apartado 6.7: Combinación de producto y división de decimales. Ítem: 61. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 44

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 6.7.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
61	0,65%	0,66%	1,92%	14,69%	24,42%	33,54%

Este ítem tiene rendimientos muy bajos en todos los niveles; concluye en la categoría de ítem en iniciación en 2º de ESO. Igualmente, los porcentajes de respuestas correctas son inferiores a los del producto y división de números decimales por separado.

Apartado 6.8: Orden en el conjunto de los números decimales. Ítem: 118. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 45

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 4.3.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
118	0%	0%	7,05%	33,90%	32,56%	49,39%

La comparación de decimales con distinto número de cifras es un objetivo difícil de alcanzar. Los porcentajes de respuestas correctas de este apartado son inferiores a los esperados según el marco curricular; el ítem se clasifica en proceso de aprendizaje en 2 curso de ESO.

Apartado 6.9: Densidad en el conjunto de los números decimales. Ítems: 119 y 120. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: sexto curso de Primaria. Resultados empíricos:

Tabla 46

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 6.9.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
119	0%	0%	7,05%	32,77%	38,37%	55,49%
120	0%	0%	3,85%	31,07%	37,21%	55,49%

Se trata de ítems en iniciación para 6º de Primaria y en proceso de aprendizaje en 2º de ESO.

#### 4.12. Balance de los Ítems del Bloque de Números Decimales

El bloque de números decimales se estructura en nueve apartados y se evalúa por medio de 16 ítems. Los focos de atención están en la relación de orden entre decimales y en las cuatro operaciones con números decimales. El balance de la comparación entre los niveles teóricos previstos y los obtenidos empíricamente se presentan en la Tabla 47.

Tabla 47

*Balance entre Niveles Teórico y Empírico de los Ítems sobre Decimales*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Fracción de un decimal	82	2º ESO	Desconocido	Desconocido
Suma de decimales	52	6º Primaria	Idóneo	0
Resta de decimales	54, 55 y 56	6º Primaria	En aprendizaje: 6º Idóneo: 2º ESO	2
Combinación suma y resta de decimales	53	6º Primaria	En proceso de aprendizaje: 2º ESO	≥ 2
Producto de decimales	57, 58 y 62	6º Primaria	En proceso: 2º ESO	≥ 2
División de decimales	59, 60 y 63	6º Primaria	En proceso: 2º ESO	≥ 2
Combinación de producto y división	61	6º Primaria	Iniciación: 2º ESO	≥ 2
Orden: comparación de decimales	118	6º Primaria	En proceso: 2º ESO	≥ 2
Orden: Densidad de números decimales	119 y 120	6º Primaria	En proceso: 2º ESO	≥ 2

Todos los ítems del bloque de Números decimales, exceptuando el número

82, corresponden a contenidos de 6º curso de primaria. Los ítems distinguen tres tipos de contenidos: suma y resta de decimales; producto y división de decimales; y, finalmente, orden entre decimales. En los resultados empíricos obtenidos mediante la evaluación de los contenidos de este bloque, vemos que los datos finales de la suma y resta reafirman que son contenidos idóneos para 6º, los datos para producto y división muestran estos contenidos en proceso de aprendizaje para 2º ESO, y también muestran el orden entre decimales en proceso de aprendizaje para ese mismo curso. Como se ha dicho, el ítem 82 es desconocido.

### 4.13. Nivel Empírico de los Ítems de Raíces Cuadradas

El séptimo bloque se organiza en dos apartados.

Apartado 7.1: Raíces cuadradas de números naturales. Ítems: 64, 65, 66 y 67. Nivel teórico de instrucción según currículo LOGSE: primer curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 48

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 7.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
64	0%	0,66%	7,69%	36,72%	69,19%	82,93%
65	0%	0,66%	1,28%	12,53%	34,30%	60,98%
66	0%	0,66%	3,85%	12,53%	33,14%	64,02%
36	0%	0,66%	1,28%	12,53%	30,81%	57,32%

Los resultados muestran el ítem 64 como idóneo en 1º de ESO mientras que los otros tres se encuentran en proceso de aprendizaje. En 2º de ESO el ítem 64 está dominado, mientras que los restantes son idóneos. Las diferencias entre los ítems son debidas al número de cifras del número cuya raíz cuadrada se pide calcular y a la presencia o no del signo de radicación.

Apartado 7.2: Producto de raíces cuadradas de dos números naturales. Ítem: 68. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: primer curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 49

*Rendimiento por curso del ítem del Apartado 7.2.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
68	0%	0%	0,64%	5,08%	30,23%	39,63%

Por los resultados vemos que calcular un producto de raíces cuadradas es un contenido, difícil, que no supera la categoría de iniciación en 2º de ESO.

#### 4.14. Balance de los Ítems del Bloque de Raíz Cuadrada

El bloque de raíz cuadrada se organiza en dos apartados y se evalúa mediante cinco ítems. Se trata de un contenido concreto, que valora el conocimiento de un concepto puntual y la realización de cálculos sencillos. La comparación entre los niveles teóricos previstos y los obtenidos empíricamente se presentan en la Tabla 50.

Tabla 50

*Balance entre Niveles Teórico y Empírico de los Ítems sobre Raíz Cuadrada*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Raíz cuadrada de un número cuadrado de 2 cifras	64	1º ESO	Idóneo en 1º de ESO	0
Raíz cuadrada de un número cuadrado de 3 cifras	65, 66 y 67	1º ESO	Idóneo en 2º de ESO	1
Producto de raíces cuadradas	68	1º ESO	Iniciación en 2º	≥ 2

Todos los números cuyas raíces cuadradas se pide calcular son números cuadrados. Los rendimientos detectan pequeñas diferencias en los enunciados, debidas a su mayor dificultad. Así, el ítem 64 pide calcular la raíz cuadrada de un número de dos cifras, conocido por ser el cuadrado de un dígito, mientras que los demás ítems incluyen números de tres cifras, cuadrados de números de dos cifras, menos conocidos. Los resultados muestran que la habilidad para el cálculo de la raíz cuadrada de números sencillos es adecuada para los niveles establecidos.

#### 4.15. Nivel Empírico de los Ítems de Porcentajes

Este bloque tiene un sólo apartado.

Apartado 8.1: Tantos por ciento. Ítems: 69, 70, 71, 72, 73 y 74. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 51

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 8.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
69	0,0%	0,66%	0,64%	0,0%	4,07%	9,15%
70	0,0%	0,0%	0,64%	0,0%	1,74%	7,32%
71	1,30%	1,32%	3,21%	7,91%	25,58%	42,68%
72	0,65%	1,99%	2,56%	7,34%	27,91%	35,37%
73	0,65%	2,65%	4,49%	10,73%	22,67%	46,95%
74	0,0%	1,99%	3,21%	5,65%	18,02%	34,15%

Distinguimos cuatro contenidos distintos en estos ítems: porcentaje de una cantidad de dinero; porcentaje de 100; cien por cien de un número; doscientos por cien de un número. Se trata de aspectos puntuales, pero distintos del mismo concepto básico, sobre el cual no se plantean otros matices que incluyan operaciones más complejas.

#### 4.16. Balance de los Ítems del Bloque de Porcentajes

El bloque de porcentaje se organiza en un sólo apartado y se evalúa mediante seis ítems. Se trata de un contenido concreto, donde los ítems consideran distintos aspectos de la noción básica de porcentaje. La comparación entre los niveles teóricos previstos y los obtenidos empíricamente se presentan en la Tabla 52.

Tabla 52

*Balance entre Niveles Teórico y Empírico de los Ítems sobre Porcentaje*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Porcentaje de una cantidad de dinero	69 y 70	2º ESO	Desconocido	Desconocido
Porcentaje de un número	71	2º ESO	En proceso para 2º de ESO	≥ 1
Cien por cien de un número	72 y 73	2º ESO	En proceso para 2º de ESO	≥ 1
Doscientos por cien de un número	74	2º ESO	Iniciación para 1º de ESO	≥ 1

Los resultados muestran que se trata de un conocimiento desconocido cuando se piden porcentajes de cantidades de dinero, mientras que son contenidos en proceso de aprendizaje en el resto de los casos. El dominio sobre los conceptos y destrezas básicos de porcentajes que muestran estos alumnos es realmente bajo.

**4.17. Nivel Empírico de los Ítems de Proporcionalidad**

El bloque noveno consta de un sólo apartado.

Apartado 9.1: Proporcionalidad. Ítems: 91, 92, 93, 94. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 53

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 9.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
91	0,0%	0,66%	1,28%	4,52%	14,53%	50,00%
92	0,0%	0,66%	0,64%	3,39%	11,63%	55,49%
93	0,0%	0,0%	0,64%	2,26%	11,05%	55,49%
94	0,0%	0,0%	0,64%	1,69%	11,63%	43,29%

Este apartado se centra en evaluar el cálculo de la cuarta proporcional de tres números, considerando las distintas posibilidades de la incógnita. Los rendimientos obtenidos muestran que este contenido está en proceso de aprendizaje en 2º de ESO.

#### 4.18. Balance de los Ítems de Proporcionalidad

El bloque de proporcionalidad se organiza en un sólo apartado y se evalúa mediante cuatro ítems. Se trata de un contenido concreto, donde los ítems varían según que la cantidad desconocida esté en el primer o segundo término de la ecuación, o bien ocupe la posición de extremo o de medio. Los rendimientos obtenidos, aunque son muy similares, muestran ligeras diferencias. La comparación entre los niveles teóricos previstos y los obtenidos empíricamente se presentan en la Tabla 54.

Tabla 54

*Balance entre Niveles Teórico y Empírico de Proporcionalidad*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Incógnita: 2º término y extremo	91	2º ESO	Proceso 2º ESO	$\geq 1$
Incógnita: término 1º y medio	92	2º ESO	Proceso 2º ESO	$\geq 1$
Incógnita: término 1º y extremo	93	2º ESO	Proceso 2º ESO	$\geq 1$
Incógnita: 2º término y Medio	94	2º ESO	Proceso 2º ESO	$\geq 1$

Las diferencias entre los rendimientos de los ítems muestran una mayor dificultad en unas proporciones que en otras, si bien todos los resultados se mantienen en la misma categoría de proceso de aprendizaje.

#### 4.19. Nivel Empírico de los Ítems del Bloque de Divisibilidad

El décimo bloque se organiza en dos apartados.

Apartado 10.1: Máximo común divisor. Ítems: 83 y 84. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 55

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 10.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
83	0,65%	0,66%	0,64%	10,17%	27,33%	43,90%
84	0,0%	0,0%	0,64%	11,30%	34,88%	51,22%

Los dos ítems proponen calcular el máximo común divisor de dos y de tres números; los resultados los califican en aprendizaje para 2º nivel de ESO

Apartado 10.2: Mínimo común múltiplo. Ítems: 85, 86 y 87. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 56

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 10.2.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
85	5,19%	3,31%	3,85%	17,51%	36,05%	71,34%
86	0,0%	1,32%	1,28%	9,04%	13,95%	43,90%
87	0,0%	0,0%	0,64%	4,52%	14,53%	42,68%

Los tres ítems proponen calcular el mínimo común múltiplo de dos, de tres y de cuatro números, respectivamente. Los resultados muestran el primer ítem como idóneo y en proceso de aprendizaje los otros dos.

#### 4.20. Balance de los Ítems del Bloque de Divisibilidad

El bloque de divisibilidad se organiza en dos apartados y se evalúa mediante cinco ítems. Tratan dos contenido básicos: máximo común divisor y mínimo común múltiplo. El rendimiento de los ítems varía según que el cálculo se pida sobre dos, tres o cuatro números. Los rendimientos obtenidos, muestran diferencias para uno de los ítems, que resulta idóneo, mientras que los restantes se encuentran en proceso de aprendizaje. La comparación entre los niveles teóricos previstos y los obtenidos empíricamente se presentan en la Tabla 57.

Tabla 57

*Balance entre Curso Teórico y Empírico de Divisibilidad*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Máximo común divisor de 2 o 3 números	83 y 84	2º ESO	2º de ESO: en proceso	$\geq 1$
Mínimo común múltiplo de 2 números	85	2º ESO	2º de ESO: Idóneo	
Mínimo común múltiplo de 3 o 4 números	86 y 87	2º ESO	2º de ESO: proceso	$\geq 1$

Calcular el mínimo común múltiplo de dos números primos se muestra como un objetivo idóneo para los alumnos de 2º de ESO. Mas complejo resulta calcular el máximo común divisor de dos números cuando uno de ellos es divisor del otro. Determinar el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo de 3 o 4 números es una destreza en proceso de aprendizaje, no dominada aún por los alumnos de 2º de ESO.

#### 4.21. Nivel Empírico de los Ítems de Media Aritmética

Este undécimo bloque tiene un sólo apartado.

Apartado 11.1: Media aritmética. Ítems: 88, 89 y 90. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 58

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 11.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
88	0,0%	0,0%	1,28%	1,13%	11,63%	36,59%
89	0,0%	0,0%	0,64%	0,56%	1,74%	14,63%
90	0,0%	0,0%	0,64%	0,0%	5,23%	21,95%

El cálculo de la media aritmética se plantea con números naturales, fracciones y decimales, sucesivamente. Ninguno de los ítems supera la categoría de en iniciación para 2º de ESO.

#### 4.22. Balance de los Ítems del Bloque de Media Aritmética

El bloque de media aritmética tiene un sólo apartado y se evalúa mediante tres ítems. En todos los casos se pide calcular la media de tres números: naturales, fracciones y decimales, consecutivamente. El rendimiento de los ítems varía según el tipo de números sobre el que se pida el cálculo, siendo el valor medio de tres fracciones el aspecto más difícil. La comparación entre los niveles teóricos previstos y los obtenidos empíricamente se presentan en la Tabla 59.

Tabla 59

##### *Balance entre Niveles Teórico y Empírico de la Media Aritmética*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Media aritmética de tres naturales	88	2º ESO	Iniciación en 2º de ESO	$\geq 1$
Media aritmética de tres fracciones	89	2º ESO	Iniciación en 2º de ESO	$\geq 1$
Media aritmética de tres decimales	90	2º ESO	Iniciación en 2º de ESO	$\geq 1$

Las diferencias en rendimiento entre los tres ítems parecen ser debidas a la mayor complejidad de unos conceptos numéricos sobre otros, principalmente, si bien la propia noción de media aritmética se encuentra en una etapa de iniciación en el 2º curso de ESO.

#### 4.23. Nivel Empírico de los Ítems de Medidas Geométricas

El décimo segundo bloque se organiza en tres apartados.

Apartado 12.1: Cálculo de longitudes. Este apartado se evalúa a través de los ítems 96 y 100. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: a) Ítem 96 en sexto curso de Educación Primaria; b) Ítem 100 en tercer curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 60

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 12.1.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
96	0,0%	0,0%	1,28%	0,0%	2,33%	9,76%
100	0,0%	0,0%	0,64%	0,0%	0,0%	0,61%

Los ítems de este apartado son desconocidos para los escolares.

Apartado 12.2: Cálculo de áreas. Los ítems que evalúa este apartado son 95, 97 y 98. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: a) Ítem 95, en sexto curso de Primaria; b) Ítems 97 y 98, en segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 61

*Rendimiento por Curso de los Ítems del Apartado 12.2.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
95	0%	0%	0,64%	0%	2,91%	11,59%
97	0%	0%	0,64%	0%	0,58%	6,10%
98	0%	0%	0,64%	0%	0,58%	2,44%

Los ítems de este apartado son desconocidos para los escolares.

Apartado 12.3: Cálculo de volúmenes. Ítem 99. Nivel de instrucción según currículo LOGSE: segundo curso de ESO. Resultados empíricos:

Tabla 62

*Rendimiento por Curso del Ítem del Apartado 12.3.*

Ítem	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
99	0%	0%	0,64%	0%	0,58%	3,66%

Los ítems de este apartado son desconocidos para los escolares evaluados.

#### 4.24. Balance de los Ítems del Bloque de Medidas Geométricas

El bloque de medidas geométricas tiene tres apartados y se evalúa mediante seis ítems. Los apartados corresponden, respectivamente, al cálculo de longitudes, superficies y volúmenes. Los conceptos requeridos incluyen conocer y aplicar las fórmulas de la longitud de la circunferencia, superficie del círculo, área del cuadrado, superficie lateral del cubo y volumen del paralelepípedo. Los tres apartados establecidos dividen el bloque según que la tarea propuesta se refiera al cálculo de una longitud, un área o un volumen. La comparación entre los niveles teóricos previstos y los obtenidos empíricamente se presentan en la Tabla 63.

Tabla 63

##### *Balance entre Niveles Teórico y Empírico de Medidas Geométricas*

Apartado	Ítems	Nivel curricular teórico	Nivel curricular empírico	Retraso del logro en cursos
Calcular una longitud mediante fórmula directa	96	6º Primaria	Desconocido	Desconocido
Calcular una longitud por fórmula indirecta	100	2º ESO	Desconocido	Desconocido
Calcular superficie de un cuadrado	95	6º Primaria	Iniciación en 2º de ESO	$\geq 2$
Calcular superficie del círculo y área lateral total de un cubo	97 y 98	2º ESO	Desconocido	Desconocido
Calcular volumen paralelepípedo	99	2º ESO	Desconocido	Desconocido

Los conocimientos evaluados por estos ítems son desconocidos para los alumnos; sólo los conceptos y destrezas necesarios para el cálculo del área del cuadrado parecen encontrarse en un nivel de iniciación en los alumnos de 2º de ESO. Seguramente la posición de estos ítems al final de la prueba contribuye a los bajos rendimientos obtenidos.

Concluimos así el análisis de los resultados de la aplicación del test, según enunciaba el Objetivo 1.5: Llevar a cabo un análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del test de Ballard ampliado a los estudiantes del curso

2000–2001.

## 5. Análisis Conjunto de los Resultados

En el apartado anterior hemos llevado a cabo un análisis descriptivo de los resultados empíricos obtenidos en la aplicación del test de Ballard. Este análisis se ha hecho organizando los ítems por bloques y apartados e interpretando su rendimiento en cada uno de los niveles escolares. Seguidamente, cada bloque se ha tomado en su conjunto, poniendo de manifiesto las fortalezas y debilidades que sobre cumplimiento de las expectativas de aprendizaje de esos contenidos del programa muestran sus resultados.

### 5.1. Datos Globales

Como complemento del trabajo realizado en el apartado anterior, hacemos una síntesis de esas consideraciones, centrada en esta ocasión en el aprendizaje global mostrado por los alumnos en el periodo evaluado.

Reflexionamos sobre los datos globales obtenidos en términos de contenidos y de categorías de idoneidad. Nos proponemos establecer puntos fuertes y débiles en aritmética escolar del currículo LOGSE según los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91 en el curso 2000–2001, como señala el Objetivo 1.8 de esta investigación.

Para ello agrupamos los 12 bloques de contenidos en tres grandes dominios: 1º) Naturales: operaciones y relaciones; 2º) Racionales y decimales: operaciones y relaciones; 3º) Estudio de magnitudes: unidades y operaciones.

El siguiente cuadro sintetiza los bloques que configuran cada dominio, el número total de ítems en cada uno y el número de ítems según la categoría final alcanzada en cada caso, al menos en el último curso evaluado.

Tabla 64

*Rendimientos Finales en Cada Uno de los Dominios según Categorías de Idoneidad*

Dominios	Bloques	Domi- nados	Idóneos	En pro- ceso	Inicia- ción	Desco- noci- dos	Tota- les
Números naturales: operaciones y relaciones							
	Operaciones aritméticas	18	8	2	6	0	34
	Raíz cuadrada	1	2	2		0	5
	Divisibilidad	1	4	0	0	0	5

Tabla 64

*Rendimientos Finales en Cada Uno de los Dominios según Categorías de Idoneidad*

Totales parciales	20 (45%)	14 (32%)	4 (9%)	6 (14%)	0	44
Números racionales y decimales: operaciones y relaciones						
Fraciones y operaciones	2	2	10	4	1	19
Decimales y operaciones	1	2	11	1	1	16
Porcentajes	0	0	2	2	2	6
Media aritmética	0	0	0	3	0	3
Totales parciales	3 (7%)	4 (9%)	23 (52%)	10 (23%)	4 (9%)	44
Magnitudes: unidades y operaciones						
Dinero, tiempo, SMD	0	0	5	16	1	22
Medidas geométricas	0	0	0	1	5	6
Proporcionalidad	0	0	4	0	0	4
Totales parciales	0	0	9 (28%)	17 (53%)	6 (19%)	32
Totales globales por Categorías de idoneidad	23 (19%)	18 (15%)	36 (30%)	33 (28%)	10 (8%)	120

La tabla resume la distribución de los ítems según categorías de rendimiento logradas en el último curso evaluado (2º ESO), atendiendo a dominios generales y a los bloques que los constituyen. Los resultados finales muestran que los aprendizajes alcanzados se diferencian considerablemente según el bloque que consideremos.

Así, en el bloque correspondiente a los naturales observamos que hay 44 ítems, de los cuales el 77% son idóneos o están dominados y ninguno de ellos resulta desconocido. En el bloque racionales y decimales hay otros 44 ítems, de los cuales el porcentaje de dominados e idóneos es sólo de un 16%, un 52% alcanza el nivel de “en proceso de aprendizaje” y un 9% de los ítems son desconocidos. Finalmente, de los 32 ítems del bloque de magnitudes y medida

no hay ítems dominados o idóneos, un 28% están “en proceso de aprendizaje”, un 53% son de iniciación y un 19% son desconocidos.

La Figura 1 visualiza estos datos:

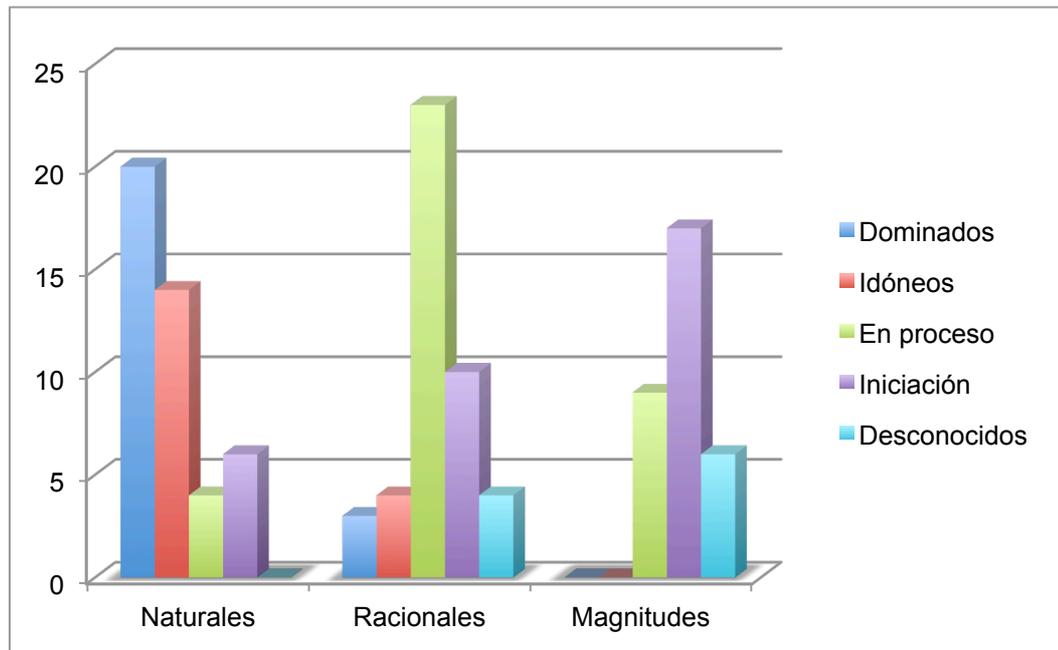


Figura 1. Distribución de ítems por bloques según categorías.

Se muestra así que, según los resultados alcanzados en la evaluación hecha, el conocimiento sobre el sistema de los números naturales es idóneo y resulta una fortaleza del currículo LOGSE. Igualmente, se muestra que los conocimientos sobre los sistemas de los números racionales y decimales están relativamente logrados. Finalmente, los conocimientos sobre las magnitudes básicas (dinero, tiempo, longitud y superficie) son escasos para los estudiantes de la muestra, mayoritariamente en iniciación. Aportamos así información relativa al Objetivo 1.8 del estudio.

## 6. Rendimiento Aritmético de los Escolares

En este apartado nos proponemos dar respuesta al Objetivo 1.6, cuyo enunciado dice: Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 2000–2001.

Para determinar la eficacia de un currículo, ya se ha dicho, necesitamos comparar los niveles teóricos de sus objetivos con los niveles empíricos de idoneidad de esos mismos objetivos, determinados por los rendimientos de los ítems con que se evalúan. Un ítem debiera alcanzar su nivel empírico de

idoneidad de acuerdo con el nivel teórico establecido por el programa. A veces hay coincidencia, a veces se atrasa o adelanta un curso, y en otros casos se atrasa más de un curso.

Ahora bien, para interpretar correctamente la relación entre el nivel teórico de un determinado objetivo y el nivel empírico de idoneidad obtenido mediante su evaluación hay que descontar el tiempo necesario para el proceso de maduración en el aprendizaje de los contenidos. Cabe esperar que entre la enseñanza de un contenido y el logro de los objetivos asociados deba transcurrir el curso completo en el que se estudia y trabaja puesto que, en la práctica, la evaluación externa mediante el test puede tener lugar antes de haber tratado ese contenido, o bien antes de su total desarrollo o de haber madurado su aprendizaje. Para suponer el logro efectivo es necesario que transcurra ese curso. Por ello, cuando pensamos en la valoración de la expectativa de aprendizaje de un ítem hay que retrasar en un año su nivel teórico de instrucción. Es decir, la expectativa sobre el logro empírico de un contenido-objetivo-ítem se sitúa en el curso siguiente al que se imparte, o sea, un curso después del nivel teórico de instrucción. *Establecemos, pues, como nivel teórico de idoneidad de un ítem el nivel siguiente a su nivel teórico de instrucción.*

En el Apartado 4 de este capítulo hemos considerado los distintos ítems de cada uno de los bloques y apartados del currículo evaluados por el test de Ballard ampliado. Hemos utilizado las categorías de idoneidad para situar los resultados empíricos alcanzados por cada ítem en cada curso. Esto permite identificar en cuál curso cada ítem alcanza su nivel de idoneidad, cuándo esta circunstancia se ha producido. Esta clasificación contribuye a determinar el nivel empírico de idoneidad para cada ítem.

Pero el logro alcanzado es distinto del esperado. Según hemos argumentado, las expectativas de éxito del programa señalan que cada ítem debiera alcanzar su nivel teórico de idoneidad en el curso siguiente a aquel que marca su nivel teórico de instrucción. Algunos ítems logran la categoría de idoneidad en ese nivel inmediatamente posterior al teórico y otros no.

Presentamos las conclusiones de este análisis en dos partes diferenciadas. En la primera revisaremos los resultados obtenidos, por cursos, de los conocimientos y destrezas medidos por el test.

## **6.1. Logros por Niveles**

La prueba se efectuó entre el final del primer trimestre del curso escolar 2000-2001 y comienzos del segundo. Los alumnos, por tanto, no han recibido toda la instrucción establecida para ese curso escolar. Ya hemos argumentado antes que los resultados obtenidos en un curso muestran el rendimiento del curso anterior; de ahí que al considerar los niveles empíricos por curso hemos tenido en cuenta los rendimientos del curso siguiente.

Así, el nivel más bajo evaluado es tercero de educación primaria; los resultados obtenidos muestran los conocimientos alcanzados en segundo curso de primaria. Presentamos a continuación los logros por cursos.

2º curso de primaria:

Categoría 1, Conocimientos y destrezas dominados: suma de números naturales en los ítems más elementales y resta sin llevarse.

Categoría 2, Conocimientos idóneos: resta de dos números de dos cifras llevándose una vez, sin ceros en minuendo y sustraendo.

Categoría 3, Conocimientos en proceso de aprendizaje: suma de tres números naturales con diferente número de cifras y uno de ellos con tres cifras, resta sucesiva de cero, combinación de sumas y restas con números de un sólo dígito, completar series numéricas aditivas.

Categoría 4, Conocimientos de iniciación: doble sustracción de números naturales y restas con cero en el minuendo y sustraendo, producto de números naturales con un dígito en el multiplicador, propiedad del elemento neutro para el producto, división de números naturales por uno, dividir a cero, completar serie sustractiva y el ítem de combinación de operaciones lógicas con diferente prioridad lógica de ejecución que coincide con la operación ejecutada de izquierda a derecha.

Categoría 5, Contenidos desconocidos: el resto de los ítems del test.

3<sup>er</sup> curso de primaria:

Categoría 1, Conocimientos y destrezas dominados: La suma de números naturales. La resta sin llevarse, restas de dos números de dos cifras llevándose una vez y sin ceros en minuendo y sustraendo, uno de los ítems de resta sucesiva de cero.

Categoría 2, Conocimientos idóneos: resta sucesiva de cero, producto de números naturales con una cifra en el multiplicador, división por uno y dividir a cero.

Categoría 3, Conocimientos en proceso de aprendizaje: doble sustracción, resta con cero en el minuendo y en el sustraendo, combinaciones de sumas y restas, completar series numéricas aditivas.

Categoría 4, Conocimientos de iniciación: producto de números naturales con números de más de un dígito en el multiplicador, propiedad del elemento neutro para el producto y propiedad de absorción del cero en el producto, división de números naturales, combinación de productos y divisiones de números naturales, completar series numéricas sustractivas y el ítem de combinación de operaciones lógicas con diferente prioridad lógica de ejecución que coincide con la operación ejecutada de izquierda a derecha.

Categoría 5, Contenidos desconocidos: El resto de los ítems del test.

4º curso de primaria:

Categoría 1, Conocimientos y destrezas dominados: La suma de números naturales. La resta sin llevarse, resta de dos números de dos cifras llevándose una vez y sin ceros en minuendo y sustraendo, uno de los ítems de resta sucesiva de cero, división por uno y dividir a cero

Categoría 2, Conocimientos idóneos: resta sucesiva de cero, doble sustracción, restas con cero en el minuendo y en el sustraendo, combinación de sumas y restas con números naturales de dos cifras, producto de números naturales con una cifra en el multiplicador, división de números naturales, combinación de producto y divisiones de números naturales, los dos primeros ítems de completar series numéricas aditivas.

Categoría 3, Conocimientos en proceso de aprendizaje: producto de números naturales con números de más de un dígito en el multiplicador, propiedad del elemento neutro para el producto, el ítem de combinación de operaciones lógicas con diferente prioridad lógica de ejecución que coincide con la operación ejecutada de izquierda a derecha, el primer ítem de orden en los números racionales, el primer ítem de orden en los números racionales.

Categoría 4, Conocimientos de iniciación: combinación de sumas y restas con números naturales de una sola cifra, propiedad absorbente del cero para el producto, operaciones con simplificación de números racionales, suma de números decimales, resta de números decimales, combinaciones de sumas y restas de números decimales.

Categoría 5, Contenidos desconocidos: El resto de los ítems del test.

5º curso de primaria:

Categoría 1, Conocimientos y destrezas dominados: La suma de números naturales, la resta sin llevarse, la resta de dos números de dos cifras llevándose una vez y sin ceros en minuendo y sustraendo, la resta sucesiva de cero, el primer ítem de producto, división por uno, dividir a cero, suma de números decimales.

Categoría 2, Conocimientos idóneos: doble sustracción, restas con cero en el minuendo y en el sustraendo, combinación de sumas y restas con números naturales de dos cifras, producto de números naturales, propiedad del elemento neutro para el producto, división de números naturales, combinación de producto y divisiones de números naturales, completar series numéricas aditivas, el ítem de combinación de operaciones lógicas con diferente prioridad lógica de ejecución que coincide con la operación ejecutada de izquierda a derecha, el primer ítem de orden en los números racionales, el primer ítem de operaciones con simplificación de números racionales.

Categoría 3, Conocimientos en proceso de aprendizaje: combinaciones de sumas y restas de números naturales con una sola cifra, un ítem de producto de números naturales con más de una cifra en el multiplicador, completar series numéricas sustractivas, el segundo ítem de operaciones con simplificación en los

números racionales, resta de números decimales, combinación de sumas y restas de números decimales.

Categoría 4, Conocimientos de iniciación: propiedad absorbente del cero para el producto, completar series numéricas (multiplicativa), combinación de operaciones con diferente prioridad lógica de ejecución, suma de cantidades complejas del sistema monetario español, división de una cantidad compleja del sistema monetario por un número, un ítem de aplicación a la aritmética comercial, suma de cantidades complejas de la magnitud tiempo, reducción de unidades del sistema métrico decimal, resta de cantidades complejas del sistema métrico decimal, un ítem de producto de fracciones, orden en fracciones, resta de números decimales, producto de números decimales, división en los números decimales, combinaciones de productos y divisiones de números decimales, orden en los números decimales, densidad en los números decimales, raíz cuadrada de números naturales, un ítem de tanto por ciento, dos ítems de máximo común divisor y un ítem de mínimo común múltiplo.

Categoría 5, Contenidos desconocidos: El resto de los ítems del test.

6º curso de primaria:

Categoría 1, Conocimientos y destrezas dominados: La suma de números naturales, la resta sin llevarse, la resta de dos números de dos cifras llevándose una vez y sin ceros en minuendo y sustraendo, un ítem de resta sucesiva de cero, doble sustracción, combinación de sumas y restas con números naturales de dos cifras, producto de números naturales con una cifra en el multiplicador, propiedad del elemento neutro para el producto, combinaciones de productos y divisiones, división por uno, dividir a cero, suma de números decimales, completar series aditivas, el primer ítem de orden en los números racionales, el primer ítem de operaciones con simplificación en los números racionales.

Categoría 2, Conocimientos idóneos: un ítem de resta sucesiva de cero, resta con cero en el minuendo y en el sustraendo, producto de números naturales con números con más de una cifra en el multiplicador, división de números naturales, completar series numéricas sustractivas, el ítem de combinación de operaciones lógicas con diferente prioridad lógica de ejecución que coincide con la operación ejecutada de izquierda a derecha, el segundo ítem de orden en los números racionales, el segundo ítem de operaciones con simplificación de números racionales, raíces cuadradas de números naturales, un ítem de mínimo común múltiplo.

Categoría 3, Conocimientos en proceso de aprendizaje: combinaciones de sumas y restas de números naturales con una sola cifra, resta de números decimales, combinación de sumas y restas de números decimales, producto de números decimales.

Categoría 4, Conocimientos de iniciación: propiedad absorbente del cero para el producto, completar series numéricas (multiplicativa), combinación de operaciones con diferente prioridad lógica de ejecución, suma de cantidades

complejas del sistema monetario español, resta de cantidades complejas del sistema monetario español, producto de una cantidad compleja del sistema monetario por un número, división de una cantidad compleja del sistema monetario por un número, aplicación a la aritmética comercial, reducción de unidades de la magnitud tiempo, suma de cantidades complejas de la magnitud tiempo, reducción de unidades del sistema métrico decimal, resta de cantidades complejas del sistema métrico decimal, producto de una cantidad compleja del sistema métrico decimal por un número, división de una cantidad compleja del sistema métrico decimal por un número, reducción de números racionales, resta de números racionales, un ítem de producto de números racionales, un ítem de división de números racionales, orden en fracciones, producto de números decimales, división en los números decimales, combinaciones de productos y divisiones de números decimales, orden en los números decimales, densidad en los números decimales, raíz cuadrada de números naturales, producto de raíces cuadradas de números naturales, tantos por ciento, proporcionalidad, dos ítems de máximo común divisor, mínimo común múltiplo, un ítem de media aritmética.

Categoría 5, Contenidos desconocidos: El resto de los ítems del test.

1<sup>er</sup> curso de secundaria:

Categoría 1, Conocimientos y destrezas dominados: La suma de números naturales, la resta sin llevarse, la resta de dos números de dos cifras llevándose una vez y sin ceros en minuendo y sustraendo, restas sucesivas de cero, doble sustracción, un ítem del producto de números naturales con una cifra en el multiplicador, propiedad del elemento neutro para el producto, combinaciones de productos y divisiones, división por uno, dividir a cero, suma de números decimales, un ítem de raíz cuadrada de números naturales, completar series aditivas, el primer ítem de orden en los números racionales, el primer ítem de operaciones con simplificación en los números racionales.

Categoría 2, Conocimientos idóneos: resta con cero en el minuendo y en el sustraendo, combinaciones de sumas y restas de números naturales, producto de números naturales con números con más de una cifra en el multiplicador, división de números naturales, completar series numéricas sustractivas, el ítem de combinación de operaciones lógicas con diferente prioridad lógica de ejecución que coincide con la operación ejecutada de izquierda a derecha, el primer ítem de orden en el conjunto de los números racionales, el segundo ítem de orden en los números racionales, el segundo ítem de operaciones con simplificación de números racionales, resta de números decimales, raíces cuadradas de números naturales.

Categoría 3, Conocimientos en proceso de aprendizaje: propiedad absorbente del cero para el producto, suma de cantidades complejas del sistema monetario español, dos ítems de aplicaciones a la aritmética comercial, reducción de unidades del sistema métrico decimal, producto de una cantidad compleja del sistema métrico decimal por un número, reducción de números racionales, suma de números racionales, resta de números racionales, producto

de números racionales, división de números racionales, segundo ítem de orden en números racionales, resta de números decimales, combinación de sumas y restas de números decimales, producto de números decimales, división de números decimales, orden en los números decimales, densidad en los números decimales, un ítem de raíz cuadrada de números naturales, tantos por ciento, proporcionalidad, dos ítems de máximo común divisor, mínimo común múltiplo.

Categoría 4, Conocimientos de iniciación: completar series numéricas multiplicativa, combinación de operaciones con diferente prioridad lógica de ejecución, reducción de unidades del sistema monetario español, resta de cantidades complejas del sistema monetario español, producto de una cantidad compleja del sistema monetario por un número, división de una cantidad compleja del sistema monetario por un número, dos ítems de aplicación a la aritmética comercial, reducción de unidades de la magnitud tiempo, suma de cantidades complejas de la magnitud tiempo, producto de una cantidad compleja de medidas de tiempo por un número, resta de cantidades complejas del sistema métrico decimal, división de una cantidad compleja del sistema métrico decimal por un número, combinaciones de sumas y restas de números racionales, combinaciones de productos y divisiones de números racionales, producto de raíces cuadradas de números naturales, tantos por ciento, media aritmética, magnitudes geométricas: cálculo de áreas.

Categoría 5, Contenidos desconocidos: El resto de los ítems del test.

## 6.2. Logros en la Categoría de Idoneidad

La Tabla 65 muestra en cada uno de los niveles los ítems que han alcanzado, al menos, la categoría de idoneidad y que, por ello, satisfacen las expectativas teóricas de logro. Como hemos visto en el Apartado 5.4 son, en total, 39 ítems los que alcanzan la categoría de idóneo (o dominado) en el momento esperado, sobre un total de 106 ítems, que son aquéllos sobre los que tenemos datos de comparación. En este caso los ítems cuyo nivel teórico de idoneidad está en 2º de ESO no pueden contabilizarse, del mismo modo que la información obtenida sobre segundo de primaria es irrelevante. El balance final implica que los alumnos encuestados muestran su dominio sobre los contenidos evaluados en el 36,8% de los ítems.

Tabla 65

*Ítems que Alcanzan su Nivel de Idoneidad según Resultados de la Evaluación*

Edad	Curso	Ítems en la categoría de idóneos en cada nivel	Total ítems por nivel
8-9 años	3º Educación primaria	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 17 y 18	13

Tabla 65

*Ítems que Alcanzan su Nivel de Idoneidad según Resultados de la Evaluación*

9-10 años	4º Educación primaria	6, 11, 12, 14, 101 y 102 (además de los anteriores)	19
10-11 años	5º Educación primaria	19, 20, 23, 52, 103, 111, 112, 114 y 116 (junto a los anteriores)	28
11-12 años	6º Educación primaria	22, 64 y 104 (junto a los anteriores)	31
12-13 años	1º de ESO	5, 54, 55, 56, 65, 66, 85 y 117 (junto con los anteriores)	39
Total ítems idóneos en el periodo evaluado			39

La anterior comparación se complementa con los listados del resto de los ítems, ubicados por niveles según aquellas categorías que alcanzan. Esa distribución queda recogida en la Tabla 66. La tabla visualiza aquellos ítems que, si bien no llegan al nivel esperado de idoneidad establecido teóricamente por el currículo, logran diferentes rendimientos, cuyos óptimos se alcanzan en los tres últimos niveles evaluados.

Tabla 66

*Distribución por Curso de Ítems según Categorías Inferiores*

Edad	Curso	Ítems en la categoría: en proceso de aprendizaje:	Ítems en la categoría de: Iniciación	Total por nivel
11-12 años	5º Educación primaria	53	26, 27, 28, 30 y 61	6
12-13 años	6º Educación primaria	57 y 58	29, 31, 32, 33, 36, 37, 72, 75, 76 y 88	12
13-14 años	1º de ESO	21, 24, 35, 38, 39, 40, 41, 46, 47, 48, 49, 50, 59, 60, 62, 63, 67, 71, 73, 77, 78, 80, 83, 84, 86, 87, 91, 92, 93, 94, 113, 118, 119, 120	25, 34, 42, 43, 44, 45, 51, 68, 74, 81, 89, 90 y 95	47
Total ítems que no son idóneos en el periodo:		37	28	65

Esta tabla muestra el predominio de los números racionales, decimales y porcentajes en la categoría de ítems en proceso de aprendizaje, así como el de las magnitudes dinero, tiempo y sistema métrico decimal en la categoría de ítems de iniciación.

Los resultados globales anteriores se completan con el listado de ítems desconocidos, es decir, de aquellos que no han superado el 10% de éxitos en ninguno de los niveles evaluados.

Tabla 67

*Ítems Desconocidos en el Periodo Evaluado*

Número de ítem	Total
69, 70, 79, 82, 96, 97, 98, 99, 100, 105, 106, 107, 108, 109, 110 y 115	16

Los ítems desconocidos corresponden a tres contenidos diferentes:

Los ítems 69, 70, 79 y 82 tienen en común que trabajan con fracciones, decimales o porcentajes de cantidades complejas de dinero. La transición del sistema tradicional al sistema europeo de monedas se pone de manifiesto por cierto abandono en esos años de este tipo de cálculos, un poco artificiales, sobre un sistema próximo a desaparecer. Es comprensible el desconocimiento sobre estas técnicas complicadas y singulares.

Los ítems 96, 97, 98, 99 y 100 tratan el cálculo de longitudes, superficies o volúmenes de figuras o cuerpos geométricos familiares. Los alumnos desconocen totalmente este tipo de cálculos y las fórmulas en que se sustentan.

Finalmente, los ítems 105, 106, 107, 108, 109, 110 y 115 corresponden a distintos aspectos del test ampliado: sucesiones multiplicativas, orden lógico de operaciones aritméticas y densidad de racionales.

Los tres dominios generales antes considerados muestran rendimientos muy diferentes en las distintas categorías empíricas. Los resultados del test recogen que el aprendizaje alcanzado sobre naturales y operaciones es aceptablemente alto, el aprendizaje logrado sobre racionales y decimales es medio, tirando a bajo, mientras que el aprendizaje sobre magnitudes es bastante deficiente en el logro de las expectativas enunciadas.

La Figura 2 muestra la distribución de los ítems por categorías según su rendimiento, atendiendo a los dominios considerados. Se reafirma el desigual rendimiento en el aprendizaje aritmético, según cada uno de los bloques evaluados.

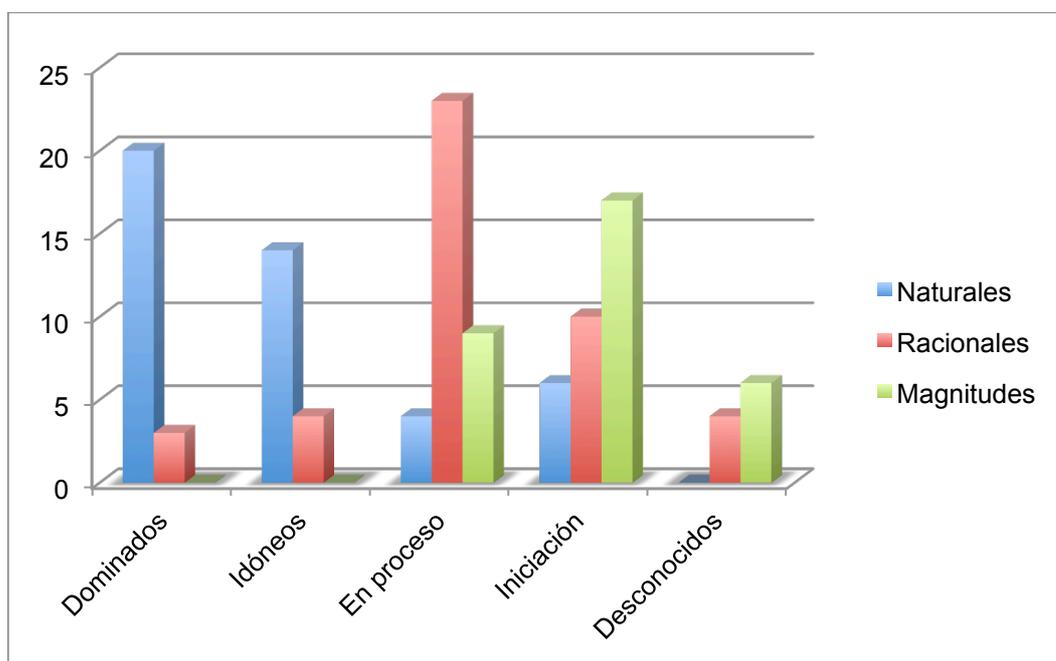


Figura 2. Distribución de ítems por categorías según bloques.

El conjunto de estos resultados, junto con los que aparecen en la Tabla 64, muestran el rendimiento aritmético por cursos y ciclos de los estudiantes de la promoción 2000–2001, dando así cumplimiento al Objetivo 1.6.

## 7. Estudio sobre Eficacia del Currículo

El Objetivo 1.7 establecía: Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo LOGSE según los datos aportados por los estudiantes del curso escolar 2000–2001.

Para lograr esa caracterización establecemos como criterio de eficacia que el resultado de la evaluación de un ítem alcance un nivel de rendimiento idóneo en el curso de su nivel teórico de aprendizaje. Recordamos que cuando un ítem tiene como nivel teórico de instrucción el curso N entonces la expectativa de su aprendizaje, es decir, el nivel teórico de aprendizaje del ítem lo situamos en el curso  $N + 1$ .

Para evaluar la eficacia del currículo LOGSE mediante el Test de Ballard se han presentado en el Apartado 4 de este capítulo los niveles empíricos de idoneidad para cada ítem y se han comparado con los niveles teóricos de instrucción establecidos. Esta comparación se ha realizado para todos los ítems de un mismo bloque temático. A partir de esos datos se deriva la comparación

entre los dos niveles de aprendizaje: empírico y teórico. Esta comparación permite establecer el concepto de *eficacia de un currículo*, es decir, el grado en que un currículo satisface el cumplimiento de sus expectativas sobre el aprendizaje de los escolares. En tanto las expectativas teóricas se confrontan con los resultados empírico tenemos la expresión de la eficacia del plan de formación.

Ahora bien, el estudio de la eficacia del currículo persigue establecer en qué proporción se satisfacen las previsiones teóricas relativas a ítems idóneos para cada nivel. Tomando como referencia los niveles teóricos de instrucción de los ítems, la Tabla 68 compara, por cursos, la previsión para los ítems, presentada en la Tabla 1 de este capítulo, con los niveles empíricos alcanzados mediante el test que hemos analizado en el apartado anterior para cada uno de los bloque de contenidos.

Comparando las frecuencias por cursos de los ítems teóricamente idóneos con las frecuencias obtenidas empíricamente como resultado de la aplicación del test, encontramos los porcentajes de acierto para dichas expectativas. Excluimos de esta comparación los ítems cuyo nivel teórico de idoneidad estaba en 2º de ESO ya que con los datos y criterios utilizados no es posible determinar los ítems que podrían alcanzar empíricamente tal categoría.

Tabla 68

*Porcentaje de Acierto por Curso en las Previsiones de Ítems Idóneos*

	Curso				1º ESO
	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	
Previsión teórica	30	33	45	82	106
Resultados empíricos	13	19	28	31	39
Porcentaje acierto	43,3%	57,5%	62,2%	37,8%	36,8%

Las expectativas teóricas muestran un acierto en las previsiones, que oscila entre un 36,8% en primero de secundaria y un 62,2% para el quinto curso, como se observa en la Tabla 66.

Los datos obtenidos de la aplicación muestran que, con los resultados proporcionados por los alumnos del último curso, mas de un tercio de los ítems alcanzan su nivel de idoneidad teórico en el curso escolar previsto, según la expectativas curriculares establecidas teóricamente. Según el curso que consideremos el índice de eficacia varía de unos a otros, resultando superior en los cursos de primaria que en secundaria.

Globalmente, el índice de eficacia del currículo LOGSE para la habilidad de cálculo aritmético medida por el test de Ballard viene dado por ese 36,8% final. Este valor expresa que solo en el 36,8% de los ítems el rendimiento que alcanzan los alumnos de la muestra, al término de su formación en el programa LOGSE, es igual o superior al 60% (nivel de idoneidad) un curso después del establecido para su instrucción (nivel teórico curricular).

La hipótesis 1 establecía que: el nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del test de Ballard para un determinado currículo es un buen predictor de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que se han formado según ese currículo.

De acuerdo con los resultados de la Tabla 66 comprobamos que esta hipótesis tiene una verosimilitud superior al 50% en los niveles 4º y 5º de primaria, pero no así en 6º de primaria ni en primer curso de secundaria, donde la predicción se satisface sólo en un 37% o un 36% de los casos. El óptimo empírico alcanzado se produce en 5º curso donde los alumnos llegan al nivel de idoneidad en su rendimiento para los dos tercios de los ítems, aproximadamente. El entrenamiento sobre habilidades de cálculo aritmético en el currículo LOGSE es significativamente más eficaz en los cursos de primaria que en la transición y comienzo de la secundaria.

La Figura 3 visualiza la comparación de la tabla anterior:

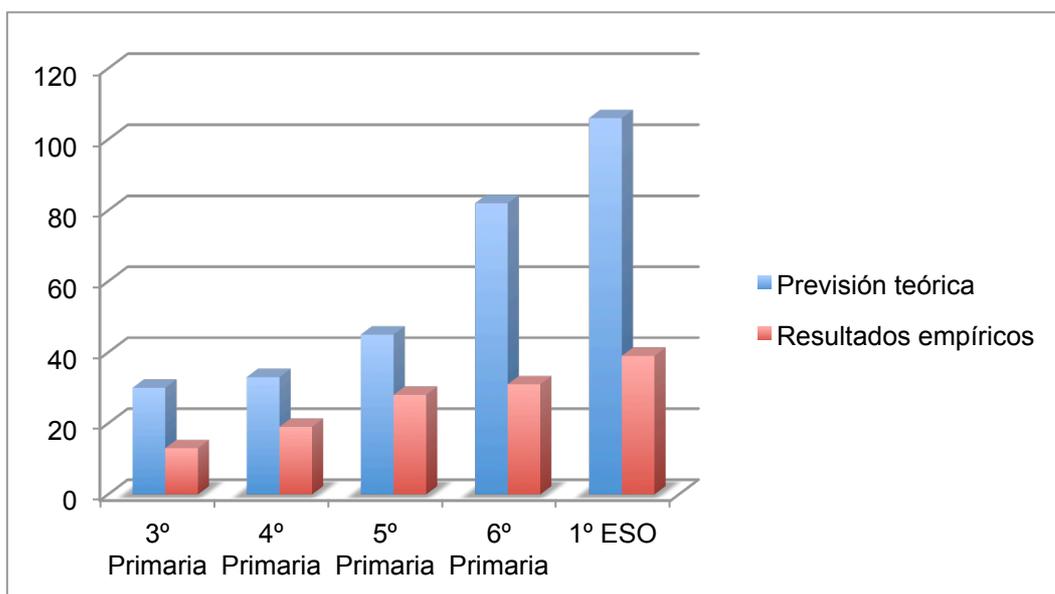


Figura 3. Comparación por cursos de ítems idóneos teóricos y empíricos.

La Figura 4 compara la secuencia de frecuencias de ítems idóneos teóricamente establecida para el conjunto de niveles, con la secuencia análoga establecida empíricamente. La diferencia entre valores teóricos y empíricos es

considerable.

Abordamos también de este modo la hipótesis 1, que establecía: el nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del test de Ballard para un determinado currículo es un buen predictor de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que se han formado según ese currículo.

El nivel curricular teórico de instrucción de cada uno de los ítems predice solo en un tercio de los ítems la habilidad empírica de los estudiantes medida por el test Ballard ampliado a finales de 2º curso de secundaria. La eficacia del programa LOGSE para la habilidad de cálculo aritmético sube hasta un 50% en primaria y disminuye hasta el 37% en secundaria.

La Figura 4 compara las secuencias de ítems idóneos teóricos y empíricos por niveles:

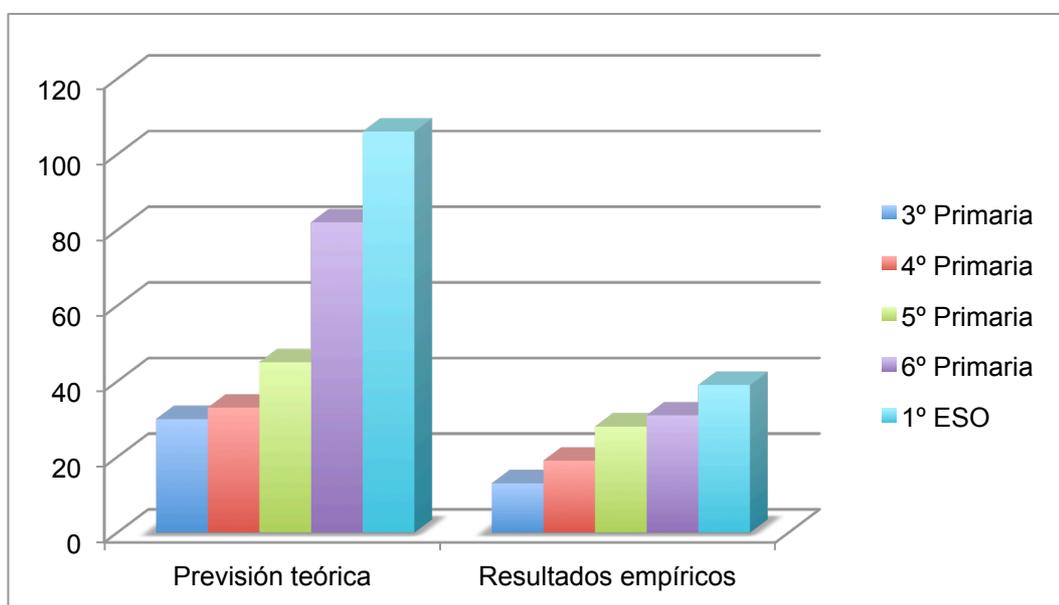


Figura 4. Comparación de las secuencias de ítems idóneos por niveles.

La disparidad notable entre los valores de ambas secuencias pone de manifiesto que no se satisface la hipótesis 1 antes enunciada para el caso del currículo LOGSE, ya que el nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del test de Ballard para dicho currículo no es un buen predictor de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que se forman con el mismo, según los datos obtenidos en nuestro trabajo de campo.



# CAPÍTULO SEXTO

## ESTUDIO COMPARATIVO

### 1. Introducción

El segundo objetivo general planteado en la investigación, según enunciamos en el Capítulo 3 de esta memoria, propone:

“Comparar la habilidad de cálculo aritmético de los escolares del curso 2000–2001 con la de aquellos otros que se instruyeron con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria de 1945 y la Ley General de Educación de 1970, respectivamente.”

El Objetivo 2 se desglosa en siete objetivos parciales que responden a tres ideas:

- Consideración del currículo oficial según la normativa vigente en cada caso, que se aborda mediante los objetivos 2.1 y 2.7;
- rendimiento aritmético escolar, tratado en los objetivos 2.2 y 2.5;
- eficacia del currículo para la aritmética escolar, en los objetivos 2.3, 2.4 y 2.6.

Para llevar a cabo las comparaciones citadas recordemos que los datos manejados son los resultados obtenidos de las tres aplicaciones del Test de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard sin ampliar. Prescindimos en esta parte del estudio de los datos obtenidos en el curso 2000–2001 para los ítems 101 a 120 del Test ampliado ya que dichos ítems no hacen parte de la comparación de la habilidad de cálculo aritmético por no haberse empleado en las tres aplicaciones.

El Objetivo parcial 2.1 propone caracterizar la formación aritmética escolar que prescriben los currículos de la LEP y de la LGE, en término de objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación. El logro de este primer objetivo parcial se ha considerado en el Capítulo 4, en sus Apartados 4, 5 y 6, en los cuales se han comparado, según diferentes niveles y dimensiones, diversos componentes de los currículos correspondientes, de los que se derivan los programas establecidos para la aritmética escolar en cada caso.

Así, en el Apartado 4, la comparación se ha hecho desde un nivel general, en términos del conocimiento matemático, los objetivos establecidos, la organización de contenidos y sus descriptores, la metodología prescrita, y la normativa y criterios marcados para la evaluación en cada uno de estos currículos. Para este nivel se han utilizado 40 descriptores con los que se han organizado 12 componentes curriculares.

En un segundo nivel intermedio de concreción, en el Apartado 5 del Capítulo 4, se desglosan los programas que cada uno de estos currículos prescribe para la formación aritmética de los escolares durante la educación obligatoria.

En el Apartado 6 de ese mismo capítulo, se llega un nivel más detallado y se comparan por edades escolares los contenidos establecidos para los tres bloques de cálculo aritmético: aritmética de los números naturales, aritmética de los números racionales, y aritmética de las distintas magnitudes básicas. Los estándares utilizados para esta comparación permiten establecer diferencias y similitudes entre los tres programas, tanto en su estructura como en su secuenciación, tal y como se analiza en los distintos epígrafes del Apartado 6.

En este sexto capítulo y mediante los datos disponibles, damos respuesta al resto de los objetivos parciales del Objetivo 2, que se orientan a obtener información similar a la contemplada en el Quinto Capítulo para el programa de aritmética en el currículo de la LOGSE. El propósito general establecido consiste en comparar tres programas de formación en términos de su eficacia en el logro de un nivel de idoneidad para los objetivos propuestos en el dominio del contenido aritmético. Los datos los proporcionan escolares que han seguido esos programas, al ser evaluados con un mismo instrumento.

Para realizar esta comparación disponemos de los resultados medios por niveles obtenidos por el profesor Fernández Huerta en su investigación de 1948, publicada bajo el título *Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritmética* (1950) con estudiantes que seguían el programa LEP. Disponemos también de los datos obtenidos para cada ítem y por cada nivel de una muestra de escolares encuestada por la profesora Castro en su investigación del curso 1974-1975, *El cálculo aritmético en la EGB*, formada por estudiantes que seguían el programa de la LGE. Finalmente, contamos con los datos obtenidos por ítem y nivel en nuestro estudio durante el curso 2000-2001, con estudiantes que seguían el programa LOGSE.

No todos los datos que se hubieran requerido para dar respuesta detallada a estos objetivos parciales están disponibles, ya que los resultados del profesor Fernández Huerta no proporcionan información sobre los rendimientos alcanzados en cada uno de los ítems y por cada uno de los niveles. Por el contrario, los datos del estudio de la profesora Castro relativos a los rendimientos del currículo de la LGE de 1970 aportan de modo completo la información requerida para los propósitos de este trabajo.

## 2. Evaluación del cambio curricular

La implantación de un nuevo currículo lleva asociados cambios en metas, contenidos, objetivos, métodos y criterios de evaluación de las distintas materias que organizan los programas escolares; singularmente esto lo hemos documentado para el caso de las matemáticas escolares en los Capítulos 1 y 2. El cambio, como resultante de la confrontación entre valoraciones académicas, sociales, culturales y políticas diversas, promueve el debate en la sociedad donde tiene lugar. En esta valoración dinámica del cambio y la innovación curricular, es relevante recordar que *muchos estudios evaluativos de currículos se han realizado para poner en evidencia la efectividad o no de los nuevos programas y que sólo se puede decir de ellos que, en su inmensa mayoría, no son concluyentes ni efectivos* (Kilpatrick, 1975).

Para efectuar un estudio sobre evaluación de currículos de matemáticas, este autor sugiere tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- En promedio, los alumnos aprenden las matemáticas que se les enseñan;
- En promedio, los alumnos no aprenden las matemáticas que no se les enseñan.

Es concluyente su paradoja sobre este tipo de estudios:

“Si usted desea demostrar que un nuevo programa es mejor, someta a los alumnos a un test sobre la matemática del nuevo programa que no esté en el antiguo. Si desea demostrar que el programa antiguo es mejor, administre un test sobre temas de las matemáticas del programa antiguo que no se consideren o no se les dé demasiada importancia en el nuevo. Si quiere demostrar que no existe diferencia entre los dos programas administre un test sobre matemáticas que estén contenidas en ambos programas o, en ninguno de ellos.” (Op. Cit).

Es propósito de este estudio evaluar los cambios ocurridos en las matemáticas escolares, derivados de tres leyes educativas que han estado vigentes a lo largo de 65 años. La estrategia escogida incluye la comparación del rendimiento aritmético alcanzado por tres muestras distintas de escolares, cada una de las cuales ha seguido uno de estos currículos, respectivamente. Disponemos de los datos proporcionados por esos grupos de escolares a una misma prueba: el THCAB, cuyos contenidos se encuentran en los tres programas, lo cual permite comparar los rendimientos.

Los niveles curriculares teórico y empírico de un ítem y de un objetivo contribuyen a contextualizar su rendimiento. La eficacia de cada currículo se establece mediante los logros alcanzados en términos de las expectativas planteadas por el propio currículo sobre aprendizaje aritmético escolar. Si bien los datos brutos de resultados proporcionan un nivel básico de comparación, serán los datos relativos a la eficacia los que proporcionarán un criterio fundado para la comparación y evaluación de los programas.

En el Apartado 7.1 del Capítulo 4 hemos comprobado que el Programa LEP contempla sólo 92 de los 100 ítems del test de Ballard en sus niveles curriculares; el Programa LGE contempla el total de los 100 ítems; a su vez, el Programa LOGSE considera 99. La comparación entre los niveles teóricos considerados por los distintos programas en dicho apartado muestra que el nivel curricular teórico de los distintos ítems varía de modo apreciable entre unos programas y otros, debido a que los contenidos que evalúan tales ítems se ubican en distintos niveles, según los casos, como destacan la Figura 1 y la Figura 2 de ese capítulo. Pasamos ahora a valorar el rendimiento y la eficacia de cada currículo según los datos disponibles.

### **3. Rendimiento y eficacia del Currículo de la LGE mediante el test de Ballard**

En este apartado abordamos parcialmente los objetivos específicos:

2.2: “Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes... de la población 1974/75 evaluados con el test de Ballard.”

2.4: “Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la LGE de 1970 según expectativas de los programas y los datos aportados por estudiantes de la promoción 1974/1975.”

Utilizamos los datos obtenidos por Castro (1975) que organizamos según una versión abreviada de la secuencia establecida en los Apartados 5, 6 y 7 del Capítulo 5.

#### **3.1. Resultados finales de la prueba en el programa de la LGE**

Como se hizo en el Capítulo 5 para la evaluación del currículo LOGSE, reflexionamos sobre los datos globales obtenidos en términos de contenidos y de categorías de idoneidad, basadas en los aprendizajes mostrados por los alumnos de EGB que respondieron al test.

Mantenemos la agrupación de los 12 bloques de contenidos en tres grandes dominios:

- Números naturales: operaciones y relaciones.
- Números racionales y decimales: operaciones y relaciones.
- Estudio de magnitudes: unidades y operaciones.

La siguiente tabla sintetiza los bloques que configuran cada dominio, el número total de ítems en cada uno y el número de ítems según la categoría final alcanzada en cada caso, al menos en el nivel más avanzado en que se evalúa.

Tabla 1

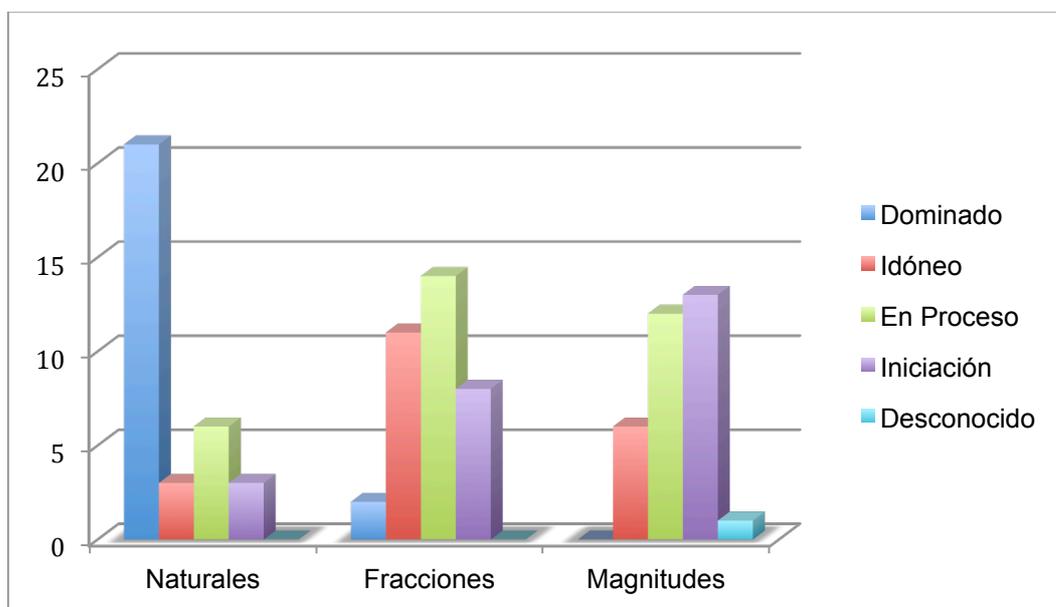
*Rendimientos finales en cada dominio según categorías de idoneidad*

Dominios	Bloques	Domi- nados	Idó- neos	En proceso	Inicia- ción	Descono- cidos	Tota- les
Números naturales: operaciones y relaciones	Operaciones Aritméticas	22	1	0	0	0	23
	Raíz Cuadrada	1	0	3	1	0	5
	Divisibilidad	0	0	3	2	0	5
	Totales Parciales	23 (70%)	1 (3%)	6 (18%)	3 (9%)	0	33
Racionales y decimales: operaciones y relaciones	Fracciones y operaciones	0	7	3	3	0	13
	Decimales y operaciones	2	4	5	2	0	13
	Porcentajes	0	0	6	0	0	6
	Media aritmética	0	0	0	3	0	3
	Totales Parciales	2 (6%)	11 (31%)	14 (40%)	8 (23%)	0	35
Magnitudes, unidades y operaciones	Dinero, tiempo SMD	0	6	6	10	0	22
	Medidas geométricas	0	0	1	4	1	6
	Proporciona- lidad	0	0	4	0	0	4
	Totales Parciales	0	6 (19%)	11 (34%)	14 (44%)	1 (3%)	32
Totales globales por categorías de idoneidad		25 (25%)	18 (18%)	31 (31%)	25 (24%)	1 (1%)	100

La tabla resume la distribución de los ítems según categorías de rendimiento logradas en el último curso evaluado (8° EGB), atendiendo a dominios generales y a los bloques que los constituyen. Los resultados finales muestran que los aprendizajes alcanzados se diferencian considerablemente según el bloque que examinemos.

Así, en el bloque correspondiente a los naturales observamos que hay 33 ítems, de los cuales el 73% son idóneos o están dominados y ninguno de ellos resulta desconocido. En el bloque de números racionales hay 35 ítems, de los cuales el porcentaje de dominados e idóneos es de un 37%; un 40% alcanza el nivel de “en proceso de aprendizaje”, y un 23% de los ítems están en iniciación. Finalmente, de los 32 ítems del bloque de magnitudes y medida no hay ítems dominados; un 19% son idóneos; un 34% están “en proceso de aprendizaje”; un 44% son de iniciación, y un 3% son desconocidos.

La Figura 1 visualiza estos datos:



*Figura 1.* Distribución de ítems por bloque según categorías en el currículo de la LGE.

Se muestra así que, según los resultados alcanzados en la evaluación, el conocimiento sobre el sistema de los números naturales es idóneo y resulta una fortaleza para el currículo de la LGE (73%). Igualmente, se muestra que los conocimientos sobre los sistemas de los números racionales y decimales están relativamente logrados (37%). Finalmente, los conocimientos sobre las magnitudes básicas (dinero, tiempo, longitud y superficie) son escasos para los estudiantes de la muestra (19%), mayoritariamente en iniciación. Los ítems que en este programa alcanzan su nivel de idoneidad están en proporción 4: 2: 1,

según los tres bloques considerados. Aportamos así información relativa al Objetivo 2.2 del estudio.

### 3.2. Rendimiento Aritmético para el currículo de la LGE

La Tabla 2 muestra en cada uno de los niveles los ítems que alcanzaron, al menos, la categoría de idoneidad empíricamente y, por ello, satisfacen las expectativas teóricas de logro. Hemos visto en el apartado anterior que, en total, son 43 los ítems que alcanzan la categoría de idóneo (o dominado) en el momento esperado, sobre un total de 100 ítems, que son aquéllos sobre los que tenemos datos para el programa de la LGE de 1970. No contabilizamos el ítem 100, cuyo nivel teórico de idoneidad estaba en 8º de EGB. El balance final muestra que los alumnos encuestados logran su dominio sobre los contenidos evaluados en el 43,4% de los ítems (43 sobre 99).

Tabla 2

*Ítems idóneos según nivel en el currículo de la LGE*

Edad	Curso	Ítems en la categoría de idóneos en cada nivel	Total de ítems por nivel
8-9 años	3º EGB	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18 y 19	15
9-10 años	4º EGB	11, 14, 20 y 22 (además de los anteriores)	19
10-11 años	5º EGB	21, 23, 24 y 30 (junto a los anteriores)	23
11-12 años	6º EGB	5, 31, 38, 52, 53, 54 y 64 (junto a los anteriores)	30
12-13 años	7º EGB	12, 39, 40, 41, 46, 47, 49, 50, 57, 58, 62, 77 y 78 (junto con los anteriores)	43
Total de ítems idóneos en el periodo evaluado			43

La anterior comparación se complementa con la del resto de los ítems, ubicados por niveles según las categorías que alcanzan. Esa distribución queda recogida en la Tabla 3. Esta tabla visualiza aquellos ítems que, si bien no logran empíricamente el nivel esperado de idoneidad establecido teóricamente por el currículo, logran diferentes rendimientos, cuyos óptimos se alcanzan en los tres últimos niveles evaluados.

Tabla 3

Distribución por curso de ítems según categorías inferiores

Edad	Curso	Ítems en la categoría en proceso de aprendizaje	Ítems en la categoría de: Iniciación	Total por nivel
10-11 años	4° EGB		27	1
11-12 años	5° EGB		25, 28, 29, 36 y 61	5
12-13 años	6° EGB	33, 35, 55, 56, 66 y 67	32, 34, 65, 76, 95 y 96	12
13-14 años	7° EGB	26, 37, 42, 44, 48, 51, 59, 60, 63, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 81, 83, 84, 85, 91, 92, 93, 94 y 99	36, 43, 45, 79, 80, 82, 86, 87, 88, 89, 90, 97 y 98	47
Total de ítems que no son idóneos en el periodo		32	25	57

También la tabla muestra un predominio de los números racionales, decimales y porcentajes en la categoría de ítems en proceso de aprendizaje, así como el de las magnitudes dinero, tiempo y sistema métrico decimal en la categoría de ítems de iniciación.

Los resultados globales anteriores señalan un ítem desconocido, es decir, que no han superado el 10% de aciertos en ninguno de los niveles evaluados.

La Figura 2 muestra la distribución de los ítems por categorías según su rendimiento, atendiendo a los dominios considerados. Se reafirma el desigual rendimiento en el aprendizaje aritmético, según cada uno de los bloques evaluados.

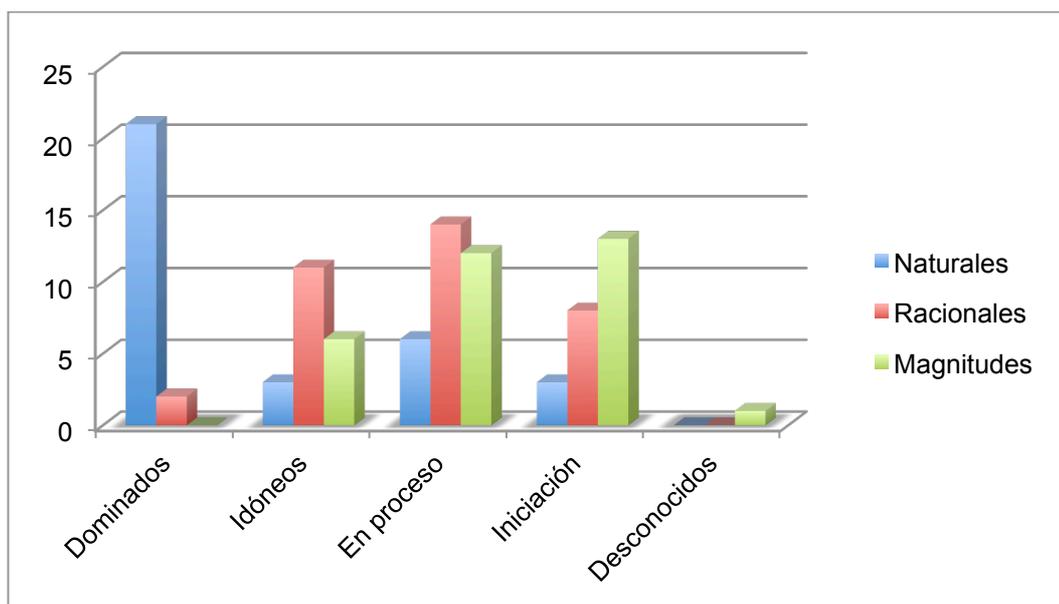


Figura 2. Distribución de ítems por categorías de idoneidad según bloques de contenido.

El conjunto de estos resultados, junto con los que aparecen en la Tabla 1, muestran el rendimiento aritmético por cursos y ciclos de los estudiantes que seguían el Currículo de la LGE en la promoción 1974–1975, lo cual contribuye al cumplimiento del Objetivo 2.2.

### 3.3. Estudio sobre la eficacia del currículo de la LGE

Comparando las frecuencias por cursos de los ítems teóricamente idóneos con las frecuencias obtenidas empíricamente como resultado de la aplicación del test, encontramos los porcentajes de acierto para dichas expectativas. Excluimos de esta comparación el ítem cuyo nivel teórico de idoneidad estaba en 8º de EGB ya que, con los datos y criterios utilizados, no es posible determinar empíricamente si ese ítem podría alcanzar tal categoría.

Tabla 4

*Indicadores de eficacia por curso en las previsiones de ítems idóneos*

Curso	3º Primaria	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	7º EGB
Previsión teórica	21	35	49	75	99
Resultados	15	19	23	30	43

Tabla 4

*Indicadores de eficacia por curso en las previsiones de ítems idóneos*

empíricos

Porcentaje de acierto	71,4%	54,2%	46,9%	40%	43,4%
-----------------------	-------	-------	-------	-----	-------

Las expectativas teóricas muestran un acierto en las previsiones que oscilan entre un 40,0% para 6º de EGB y un 71,4% para 3º de EGB, como se observa en la Tabla 4. Se va produciendo una disminución en el índice de eficacia de los cursos con el que se muestra que los resultados empíricos responden a los teóricos. Globalmente, el índice de eficacia del currículo de la EGB para la habilidad de cálculo medida por el test de Ballard viene dado por el valor final del 43,4%. Este valor expresa que para ese porcentaje de ítems los alumnos de la muestra alcanzan el rendimiento previsto al término de su formación en el programa de la LGE, es decir, al menos un 60% de los escolares responden correctamente a dichos ítems (nivel de idoneidad) un curso después del establecido para su instrucción (nivel teórico curricular).

La Figura 3 visualiza la comparación de la tabla anterior:

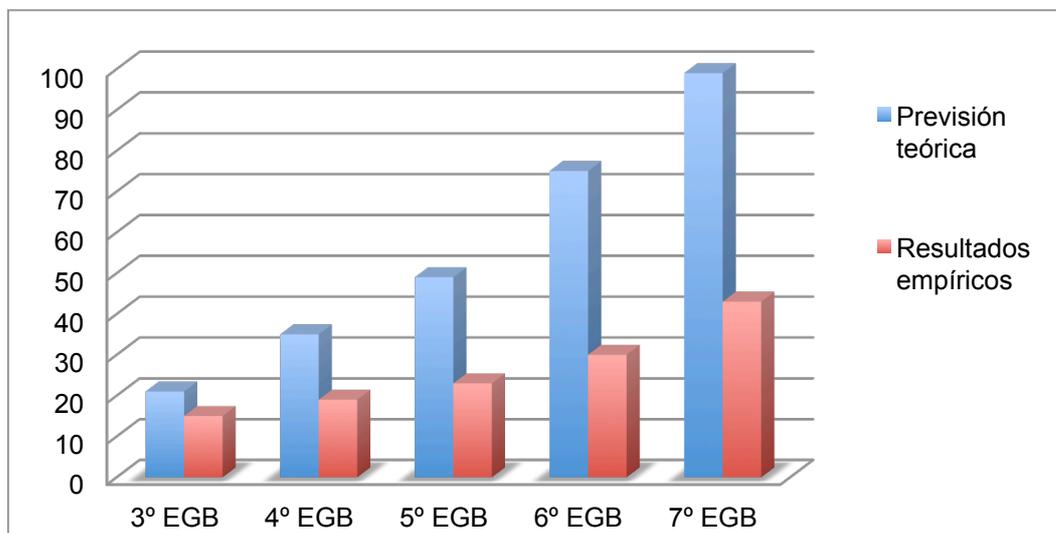


Figura 3. Comparación por cursos de ítems idóneos teóricos y empíricos.

La Figura 4 compara las frecuencias de ítems idóneos por niveles. Los tres dominios generales antes considerados muestran rendimientos muy diferentes en las distintas categorías empíricas. Los resultados del test recogen que el

porcentaje empírico tiene una tasa de crecimiento sensiblemente menor que la establecida teóricamente.

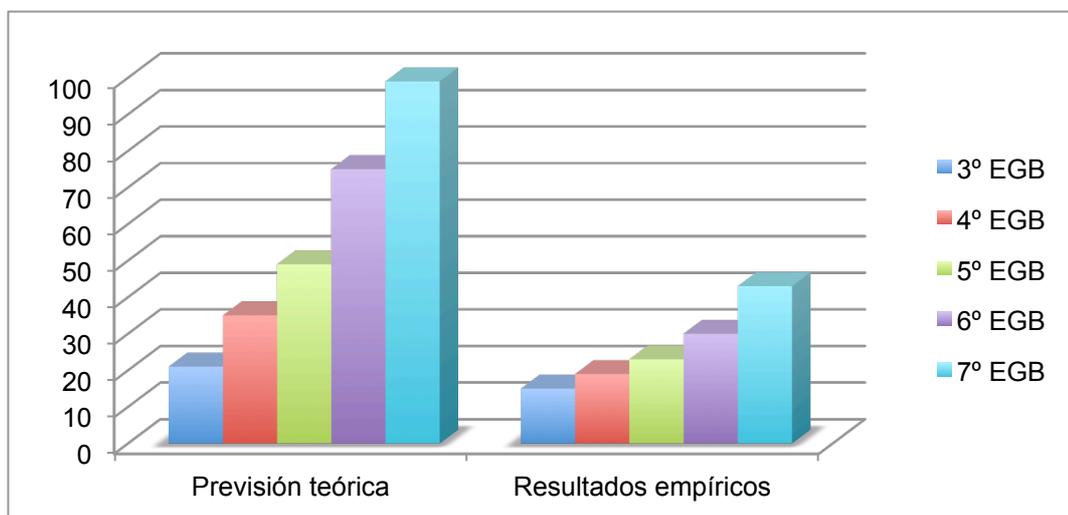


Figura 4. Comparación de las secuencias de ítems idóneos por niveles.

Por otra parte, se repite que el aprendizaje alcanzado sobre naturales y operaciones es aceptablemente alto, el aprendizaje logrado sobre racionales y decimales es intermedio, tirando a bajo, mientras que el aprendizaje sobre magnitudes es bastante deficiente en el logro de las expectativas enunciadas. La proporción entre los resultados de los tres bloques es de 6: 3: 1. Los datos anteriores contribuyen al cumplimiento del Objetivo 2.4.

#### 4. Comparación del rendimiento y la eficacia entre los programas LGE y LOGSE

En el Anexo V se presenta un estudio de la homogeneidad entre las muestras de los cursos 1974-75 y 2000-01, correspondientes a los currículos de la LGE y de la LOGSE. Después de una extensa discusión alcanzamos que no existen diferencias significativas entre las muestras de ambas poblaciones, salvo para los dos últimos niveles, 8º de EGB y 2º de ESO, respectivamente. La homogeneidad de las muestras hace posible la comparación entre los rendimientos alcanzados en ambas aplicaciones. Con la revisión que aquí hacemos se contribuye al logro de los Objetivos 2.5 y 2.6 en lo que se refiere a la comparación entre los currículos de aritmética de la LGE y de la LOGSE.

#### 4.1. Comparación del rendimiento

La Figura 5 visualiza los rendimientos globalmente alcanzados en los ítems del Test de Ballard por los estudiantes de los programas de LOGSE y de la LGE.

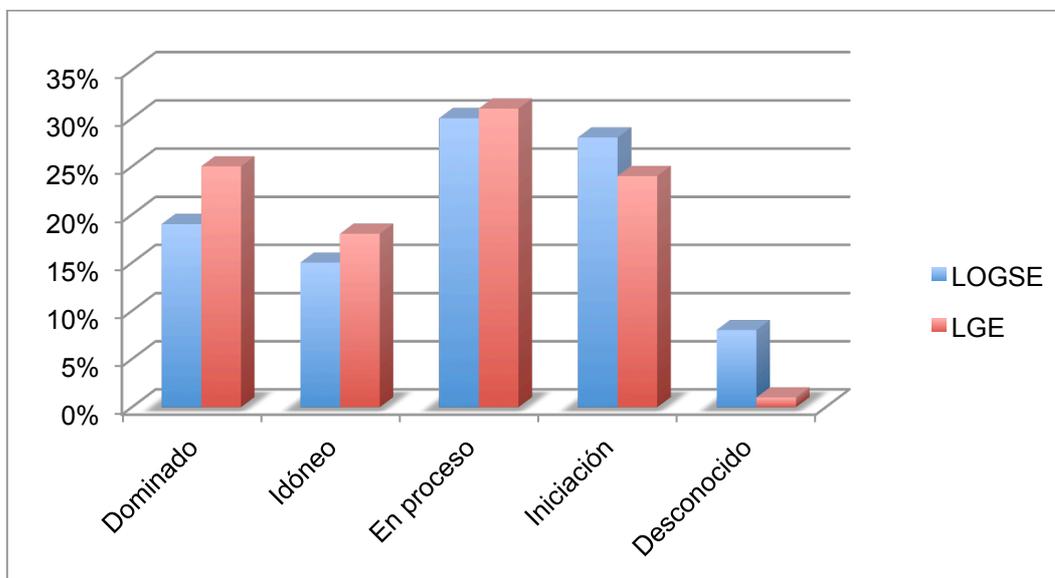


Figura 5. Comparación de rendimientos globales alcanzados en los programas LOGSE y LGE.

La Figura 5 muestra claramente valores más altos para el programa LGE en las categorías superiores, el mismo valor para la categoría central (“en proceso de aprendizaje”) y valores más bajos para las categorías inferiores. El rendimiento global para aritmética del programa de la LGE es claramente superior al rendimiento que muestra el programa de la LOGSE.

La Figura 6 muestra el desglose de las diferencias de rendimiento anteriores, con los resultados segregados según los tres bloques de contenidos e igualmente clasificados según su nivel de idoneidad en cada uno de dichos bloques.

Las diferencias apreciadas globalmente se reiteran para cada uno de los tres bloques, con ligeras singularidades en cada caso que no modifican la consideración global antes realizada. Los datos anteriores contribuyen al cumplimiento del Objetivo 2.5.

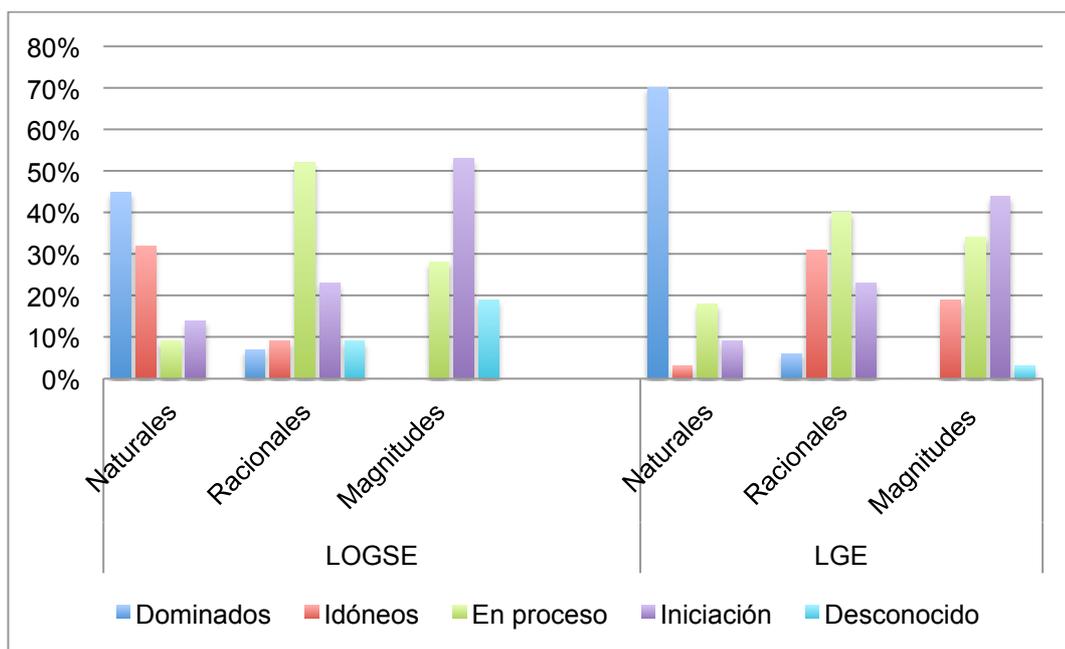


Figura 6. Comparación de rendimientos según bloques entre los programas LGE y LOGSE.

Estos resultados muestran diferencias notables en los rendimientos de los estudiantes de ambas muestras, con apreciable ventaja para los que han seguido el programa de la LGE sobre los que han seguido el programa de la LOGSE.

Con carácter general y con los datos disponibles, los objetivos sobre habilidad de cálculo aritmético alcanzan o superan el nivel de idoneidad para el bloque de Números naturales y operaciones, mientras que los logros para el bloque de Números racionales y operaciones y para el bloque de Magnitudes y operaciones apenas llegan a superar el nivel de “en proceso de aprendizaje”.

Si focalizamos esta comparación sobre el bloque de Naturales y operaciones, apreciamos que los objetivos correspondientes alcanzan o superan el nivel de idoneidad para un alto porcentaje de los ítems que evalúan dicho bloque, cercano o superior al 75% de los ítems en la práctica totalidad de los niveles considerados y para los dos programas, cosa que no ocurre para los otros dos bloques.

Tabla 5

Porcentajes de ítems idóneos de Números y Operaciones en los dos programas

	3º	4º	5º	6º	7º/1º ESO
LGE	71%	83%	75%	82%	73%
LOGSE	62%	74%	81%	78%	76%

## 4.2. Comparación de la eficacia

También es factible establecer comparaciones entre ambos currículos según la eficacia mostrada en el cumplimiento de las expectativas de aprendizaje establecidas. En este caso se comparan los porcentajes de ítems que alcanzan empíricamente el nivel teórico de instrucción establecido para cada curso y según los dos programas. Los datos correspondientes al currículo LOGSE se han presentado en la Tabla 68 del Capítulo 5; los datos relativos a la eficacia del currículo de la LGE se encuentran en la Tabla 4 de este mismo Capítulo. Las dos series de indicadores de eficacia, que muestran los porcentajes de satisfacción empírica de las expectativas teóricamente establecidas, se presentan juntas en la Figura 7:

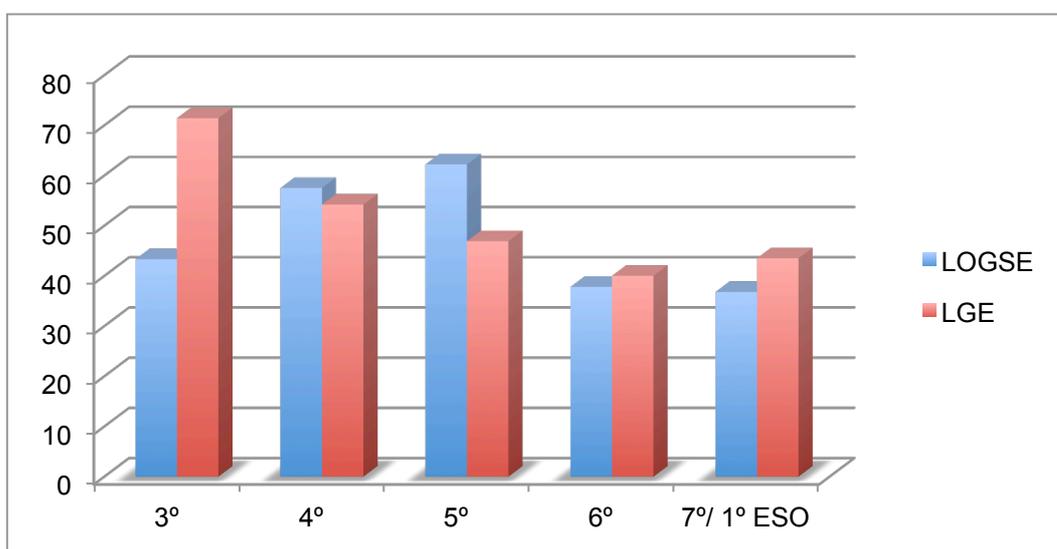


Figura 7. Comparación de los porcentajes de eficacia de los currículos LOGSE y LGE.

Estas dos series de indicadores de eficacia según niveles escolares de los currículos respectivos, muestran comportamientos y tendencias distintos.

El currículo de la LGE muestra una eficacia superior al 50% solo en los cursos 3º y 4º; a partir de 5º la eficacia disminuye; si bien no baja del 40%, muestra tendencia progresiva a disminuir su valor. Las propuestas y expectativas de aprendizaje teóricamente establecidas reciben mayor atención en los cursos iniciales, fundamentalmente; en los cursos siguientes se mantiene una atención moderada, con tendencia a la baja.

Por comparación, la eficacia del currículo LOGSE se inicia con un valor superior al 40% en 3º, destaca en los cursos 4º y 5º, con porcentajes cercanos o que superan el 60% de los ítems considerados y disminuye drásticamente, por debajo del 40% a partir de los cursos 6º y 7º. La fortaleza del currículo LOGSE relativa al cálculo aritmético se centra en los primeros cursos, con buenos porcentajes hasta alcanzar su valor óptimo en 5º nivel, superior al 60%. Por el contrario, la eficacia del currículo a partir de 6º disminuye casi un 20%. Los datos anteriores contribuyen al cumplimiento del Objetivo 2.6.

### **4.3. Puntos fuertes y débiles del currículo LOGSE resultantes de la comparación**

La Figura 6 muestra con datos brutos las diferencias entre los rendimientos que han obtenido los alumnos que han seguido los dos programas según categorías de idoneidad. Estos resultados muestran, sin lugar a dudas, que el programa de la LGE prestaba una mayor atención al cálculo aritmético en el periodo de educación obligatoria que el programa LOGSE ya que obtuvo mejores rendimientos globalmente y en todos los bloques de contenidos considerados.

Ahora bien, la comparación entre las gráficas de las Figuras 5 y 7 muestra que las simples diferencias de rendimiento por niveles no sirven para interpretar las peculiaridades y diferencias que muestran los currículos de la LGE y de la LOGSE relativas a cálculo aritmético. Según los datos obtenidos de las muestras en la aplicación del THCAB, la satisfacción de expectativas sigue distintas pautas para ambos programas. Mientras que el currículo LGE mantiene unos valores decrecientes, contenidos y con pocas diferencias a lo largo de los cinco cursos, el currículo LOGSE muestra una estrategia distinta: atención creciente a las expectativas sobre aprendizaje del cálculo aritmético en los cursos de primaria y abandono acusado de esa atención a partir del último curso de primaria. Estos datos aportan al cumplimiento del Objetivo 2.7.

## **5. Rendimiento y eficacia del Currículo de la LEP mediante el test de Ballard**

Este apartado completa el logro del Objetivo parcial 2.2 y aborda el Objetivo 2.3:

2.2: “Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 1948/49... evaluados con el test de Ballard.”

2.3: “Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la LEP de 1945 según expectativas de los programas y los datos aportados por estudiantes de la promoción 1948/49.”

Utilizamos los datos obtenidos por Fernández Huerta (1950) y la secuencia establecida en el Apartado 5 del Capítulo 5.

## 5.1. Datos globales de la muestra del currículo de la LEP

Los datos proporcionados por Fernández Huerta son los estadísticos descriptivos de la aplicación realizada en 1948 para llevar a cabo su estudio sobre influjo del tiempo en el rendimiento alcanzado por los estudiantes en la realización del test de Ballard. Los estadísticos que interesan se resumen en la Tabla 6.

Tabla 6

Resultados globales de la aplicación de 1948

Nivel	Nº de alumnos	Media	Desviación Típica
3º	36	9,1	3,9
4º	37	15,9	4,623
5º	38	20,2	5,918
6º	37	28,7	6,995
7º	29	41,2	8,239
8º	37	60,3	13,078
Total	214	28,838	18,955

Las comparaciones que se hagan respecto a los resultados obtenidos con los currículos de la LOGSE y de la LGE quedan restringidos por esta limitación: la de ajustarse a las medias y desviaciones globales para cada uno de los cursos, sin poder considerar resultados para los ítems individuales, ni tampoco para los bloques de contenidos. Esta información completa el logro del Objetivo 2.2, iniciado en el Apartado 3.1 de este Capítulo.

## 5.2. Nivel de efectividad

Para abordar el estudio de la eficacia del currículo de la LEP y aportar cierta reflexión en estas circunstancias retomamos las consideraciones de Kilpatrick presentadas en el Apartado 2 de este capítulo y las interpretamos en términos de estas limitaciones. Con tales criterios podemos considerar un nuevo indicador debil para la evaluación de la eficacia, indicador al que llamaremos *nivel de efectividad para un currículo*. Tenemos en cuenta que:

1. El nivel de efectividad es relativo al currículo al que se encuentra asociado.

2. Los niveles de efectividad deben conjugar fundamentalmente tres datos:

- Lo que el currículo pretende teóricamente enseñar.
- El rendimiento aritmético de los alumnos instruidos con ese currículo.
- El instrumento de medida utilizado para evaluar dicho rendimiento.

Atendiendo estas premisas y teniendo en cuenta los datos disponibles para el currículo LEP, vamos a considerar el cociente entre la media de puntuaciones alcanzada por los alumnos en cada nivel y el número de ítems de ese mismo nivel curricular que, según señalamos en el Apartado 7 del Capítulo 4, vienen teóricamente establecidos por los programas. Se establece así un indicador general de la eficacia de un currículo por cada nivel educativo, al que llamamos su nivel de efectividad medido según el test de Ballard, mediante la razón entre los resultados empíricos obtenidos y los resultados máximos teóricos para cada nivel.

Es decir:

$$e_i = \frac{x_i}{n_j}$$

Siendo:

$x_i$  = media de aciertos de alumnos por nivel de cada currículos estudiado.

$n_j$  = número de ítems que teóricamente se deben responder por nivel y currículo.

## 5.3. Estudio de los currículos según sus niveles de efectividad

Aunque los estudios sobre rendimiento y eficacia del currículo de la LGE y su comparación con el currículo LOGSE se han hecho en los apartados anteriores, en lo que sigue consideramos los niveles de efectividad para los tres currículos en estudio ya que esto permitirá hacer comparaciones más completas.

Las Tablas 38, 39 y 40 del Capítulo 4 mostraban los ítems según sus niveles teóricos de instrucción para cada uno de los currículos considerados, respectivamente. La siguiente tabla resume dichos datos.

Tabla 7

*Número de ítems por nivel curricular teórico según programas*

	3º	4º	5º	6º	7º/1º ESO	8º/2º ESO
LEP	31	41	63	88	92	92
LGE	21	35	49	75	99	100
LOGSE	21	24	36	71	90	99

Por otra parte, los valores medios de rendimiento alcanzado por los alumnos de cada programa y en cada uno de los niveles, se resume en esta otra tabla:

Tabla 8

*Rendimiento empírico medio por nivel y programa*

	3º	4º	5º	6º	7º/1º ESO	8º/2º ESO
LEP	9,1	15,9	20,2	28,7	41,2	60,3
LGE	11,05	19,99	23,95	33,26	43,47	57,18
LOGSE	8,90	14,57	19,38	25,65	34,11	48,49

Hechos los cálculos para el índice de efectividad de los diferentes niveles y para cada currículo obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 9

*Efectividad para cada nivel educativo por programas*

	3º	4º	5º	6º	7º/1º ESO	8º/2º ESO
LEP	29,35	38,78	32,06	32,61	44,78	65,54
LGE	52,10	55,60	48,18	42,80	44,36	57,29
LOGSE	42,38	60,70	53,83	36,13	37,90	49,38

Los indicadores de efectividad proporcionan una medida menos precisa de la eficacia. La Figura 8 muestra el comparativo por cursos escolares de los tres programas según los indicadores de efectividad.

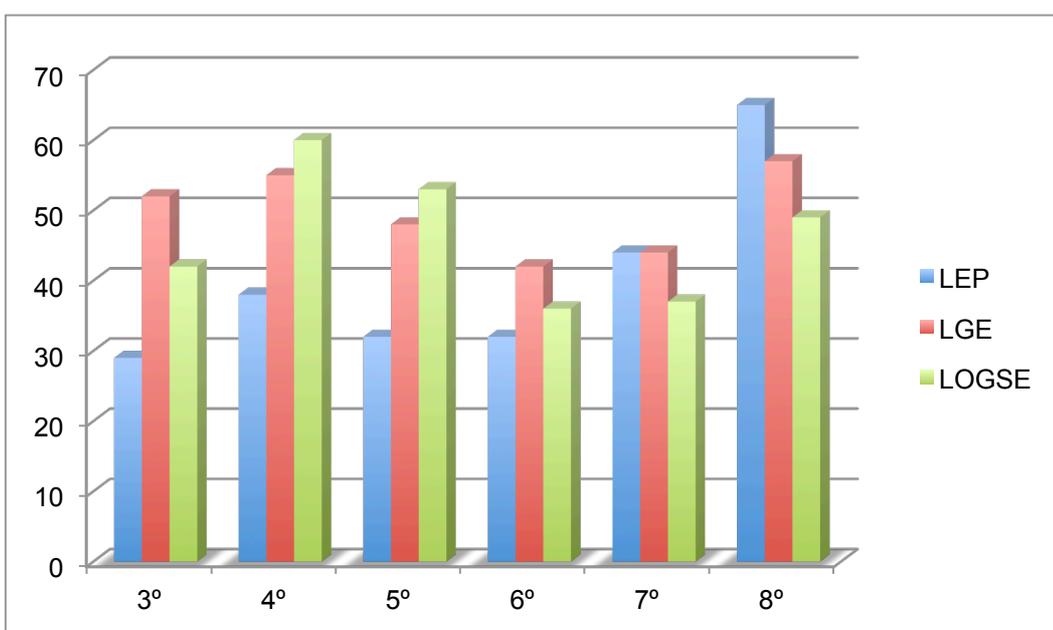


Figura 8. Comparación de los tres programas según indicadores de efectividad.

Estos indicadores tienen dos lecturas: por un lado vienen determinados por el aumento o disminución de los objetivos por curso en cada currículo respecto a la habilidad de cálculo aritmético que mide la prueba; también se adecúan a los objetivos en función del rendimiento alcanzado en cada curso según cada programa.

La efectividad por ciclos (cada dos años) se establece por el valor alcanzado en el último curso de los dos años, al tratarse de un conocimiento acumulativo.

#### **5.4. Comparación de los currículos según sus niveles de efectividad**

Una primera visión de los indicadores de efectividad resultantes da la siguiente caracterización de los currículos según cada curso.

- Tercer Curso.

EGB (52,10); LOGSE (42,38); EP (29,35).

Los indicadores de efectividad en este curso muestran que el currículo de EGB obtiene un mayor valor, bastante distanciado de los obtenidos en los otros dos currículos. Para los alumnos de 8-9 años los objetivos pretendidos y los resultados alcanzados están más acorde para este programa. El currículo de EP propone un número mayor de objetivos pero la mayoría de ellos no se alcanzan; por eso su nivel de efectividad tiene un valor inferior, distanciado de los otros dos currículos.

- Cuarto Curso.

LOGSE (60,70); EGB (55,60); EP (38,78).

Este curso el nivel de efectividad experimenta una subida para los tres currículos con respecto a los niveles de eficacia del curso anterior correspondientes a cada currículo, más destacador en el currículo LOGSE. Interpretamos que en este curso, si bien hay pequeños incrementos de objetivos, fundamentalmente se trabaja para el logro de los objetivos del curso anterior.

Los alumnos de 9-10 años de edad presentan un mejor nivel de efectividad para el currículo LOGSE, donde la razón entre los rendimientos y los objetivos pretendidos reduce sus diferencias con los otros dos currículos, si bien el de EP sigue bastante distanciado de los otros dos.

- Quinto Curso.

LOGSE (53,83); EGB (48,18); EP (32,96).

Se aprecia una disminución de siete puntos entre estos niveles de efectividad y los respectivos niveles de efectividad del curso anterior. Interpretamos que se muestra así un importante aumento de nuevos contenidos y objetivos propuestos para este curso en los tres programas.

Sigue siendo el currículo LOGSE el que muestra mayor efectividad entre objetivos propuestos y alcanzados para los alumnos de 10-11 años, reduciéndose las diferencias entre los tres currículos.

- Sexto Curso.

EGB (42,80); LOGSE (36,13); EP (32,61).

De nuevo se establece una reducción en los niveles de efectividad para todos los programas que consideramos, lo cual atribuimos a la ampliación de objetivos y contenidos para este curso, si bien la caída de dicho nivel es considerable en el currículo LOGSE por un aumento notable de sus contenidos.

Para los alumnos de 11-12 años es el currículo de EGB el que presenta mayor índice de efectividad y se siguen acercando los valores entre los tres currículos.

- Séptimo Curso/Primer Curso de ESO.

EP (44,78); EGB (44,36); LOGSE (37,90).

Se produce un aumento en los niveles de efectividad de los tres currículos, lo cual interpretamos que es debido a un incremento más equilibrado de nuevos contenidos y objetivos para el curso; es espectacular el aumento producido en el currículo de EP. Consideramos que la no obligatoriedad de la educación para este nivel que se daba en esa época ocasionaba una selección para que los mejores alumnos continuaran sus estudios y fuera esa la causa primordial de la llamativa subida que experimenta el nivel de efectividad en este programa.

El currículo de EP es el que presenta mayor nivel de efectividad para los alumnos de 12-13 años, si bien los valores que obtienen los tres currículos son bastante próximos. En este curso es cuando se presentan menores diferencias entre los índices de efectividad de los tres currículos.

- Octavo Curso/Segundo Curso de ESO.

EP (65,54); EGB (57,29); LOGSE (49,38).

Este último curso es de revisión de resultados, los cuales muestran un aumento discreto de nuevos objetivos y contenidos y provoca un nuevo aumento en el nivel de efectividad para todos los currículos. La no obligatoriedad de seguir los estudios a partir de los doce años en Educación Primaria produce una selección de aquellos estudiantes que continúan por su interés en aprender. Esta circunstancia, junto con la disminución de algunos objetivos no contemplados para este curso, provoca el espectacular aumento del índice de eficacia para ese currículo.

En este curso se amplían las diferencias entre los niveles de efectividad de los tres programas.

Con estas reflexiones quedan atendidos los Objetivos parciales 4.3, 4.4 y 4.6.



# CAPÍTULO SÉPTIMO

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

### 1. Introducción

En este capítulo presentamos las conclusiones del estudio. Hacemos un balance general de la investigación, destacamos sus hallazgos y mostramos sus logros.

Este trabajo se encuadra en dos de las líneas de investigación desarrolladas por el Grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico*, (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía. Las líneas que delimitan este estudio se denominan *Diseño, Desarrollo e Innovación del Currículo de Matemáticas y Calidad y Evaluación de Planes de Formación en Matemáticas*, cuyos trabajos se ocupan del rendimiento matemático escolar y la evaluación de programas. Ambas líneas han estudiado los procesos de reforma y cambio curricular así como diversas aproximaciones a la evaluación del rendimiento y de la competencia matemática de los escolares. El uso de pruebas estandarizadas para evaluar y comparar distintos programas formativos en el periodo de la educación obligatoria constituye una peculiaridad de este estudio.

En este capítulo nos proponemos presentar:

- Balance general del trabajo;
- aportaciones principales del estudio;
- logros alcanzados en relación con los objetivos e hipótesis iniciales;
- principales hallazgos de la investigación;
- recomendaciones finales.

### 2. Balance General

En nuestra visión de conjunto al término de esta investigación destacan algunas ideas generales que muestran este estudio en perspectiva.

Una característica propia es su singularidad. Los estudios sobre rendimiento aritmético escolar tienen una larga tradición en nuestro país, que hemos procurado recoger. Los estudios sobre eficacia de un currículo son más recientes. Desde hace unos años la administración educativa ha introducido una recopilación anual de información para determinar indicadores de la calidad del sistema. Los datos se obtienen por medio de encuestas, pruebas y otros estudios de rendimiento, de los cuales se derivan los indicadores de resultados.

La evaluación de programas ha avanzado con las investigaciones. Los indicadores definen la calidad de un programa con distintos grados de precisión cuando expresan la relación entre los resultados alcanzados y los datos pretendidos. No obstante, sus logros aún no se consideran óptimos y muestran distintas aproximaciones. Hasta el momento las relaciones entre los rendimientos alcanzados y las expectativas establecidas han derivado en indicadores singulares de eficacia para el programa formativo en estudio.

Nuestro trabajo ha profundizado sobre la eficacia de un programa de formación aritmética escolar mediante caracterización de sus variables curriculares, su vinculación con una prueba de rendimiento, el estudio de sus resultados, así como la consideración de sus interrelaciones. Los rendimientos escolares obtenidos mediante una prueba contribuyen a evaluar la calidad del programa de formación correspondiente según distintos niveles al comparar ítem a ítem, objetivo a objetivo, contenido a contenido y curso a curso, las expectativas con los logros.

Introducir la dimensión temporal en una investigación sobre eficacia para comparar programas de distintas épocas con un mismo cuestionario ha sido una tarea de la cual no hemos encontrado antecedentes. Esperamos haber proporcionado testimonio suficiente de su interés así como de su originalidad de planteamiento, proceso y resultados. En el estudio comparado de la eficacia de tres programas destacan las fortalezas y debilidades de cada uno de ellos; también se han detectado limitaciones del instrumento escogido para la evaluación del rendimiento.

Cuestión importante ha sido la duración del trabajo, que se ha extendido a lo largo de una década desde la recogida de los datos hasta la finalización de la memoria. Las circunstancias particulares del doctorando y de sus directores han limitado el tiempo de trabajo conjunto a los periodos vacacionales, con lo cual el tiempo en cada año se ha reducido apenas a tres meses, restados del descanso veraniego. Cada uno de estos periodos de trabajo permitió abordar una de las cuestiones en estudio, que era seguida de un periodo de maduración y redacción para, transcurridos otros ocho o nueve meses, retomar el estudio y continuar con una nueva cuestión. No ha sido una opción voluntariamente elegida sino, más bien, resultado de una estrategia adaptativa para optimizar el escaso tiempo anual disponible de trabajo conjunto con un avance sistemático y riguroso sobre los objetivos del programa.

El trabajo de campo y el tratamiento estadístico de los datos se hicieron con relativa rapidez. Como se muestra en el Apartado 3 del Capítulo 3, esta parte del estudio corresponde a las etapas primera a quinta del diseño de la investigación, realizadas entre los años 2001 a 2004. Los Apartados 4.1 a 4.5 de ese mismo capítulo muestran el trabajo y resultados alcanzados durante estas etapas. También se llevó a cabo un análisis factorial, cuya exploración no proporcionó información relevante para los propósitos del estudio y que optamos por desechar. Comprobado el cumplimiento de las condiciones estándar requeridas para un estudio de estas características, estudiados los estadísticos descriptivos de la muestra y obtenidos los resultados de la prueba, se revisó la orientación del estudio y el método para abordar e interpretar los datos encontrados.

El marco teórico general de esta memoria se sitúa en los estudios curriculares y sobre evaluación en educación matemática, como hemos presentado detalladamente en los Capítulos 1 y 2. El trabajo profundiza en ese marco teórico, a cuya validación contribuye. También el estudio vino condicionado por la polémica social que tuvo lugar durante estos años relativa al sistema educativo y al diseño de nuevos currículos.

Los años 2002 a 2004 contemplan en España el debate y aprobación de una nueva ley de educación, la Ley Orgánica 10/2002 de Calidad de la Educación (LOCE). Esta ley llegó a estar vigente dos años, pero no llegó a aplicarse. El gobierno socialista, resultante de las elecciones de 2004, paralizó su calendario de aplicación en mayo de 2004. La ley, finalmente, fue derogada en 2006 por la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). El debate fue intenso en la comunidad educativa durante los años 2002 a 2006. Durante este periodo se discute en profundidad el papel de las matemáticas en el sistema escolar, se debaten sus finalidades y se precisan sus funciones de manera que se pueda superar el falso dilema entre equidad y calidad. Los resultados de la evaluación del Informe PISA 2003 producen un impacto considerable sobre la interpretación y el alcance de las evaluaciones en matemáticas, singularmente las internacionales. Se incrementa la importancia de las evaluaciones comprensivas y de diagnóstico a término de los ciclos formativos, que toman fuerza en estos años. Los rendimientos de tales evaluaciones se incluyen como indicadores de resultados para la delimitación de la calidad de un sistema educativo. Las pruebas de matemáticas pasan de evaluar estudiantes a evaluar programas.

Durante estos años toma forma el segundo objetivo de la investigación y se operativiza la noción de eficacia de un currículo, de modo que los resultados obtenidos al aplicar un conjunto de pruebas a una muestra representativa de sujetos se puedan interpretar no sólo para evaluar a los escolares mediante sus rendimientos individuales en las pruebas sino, también y principalmente, para evaluar el programa de formación en curso por medio de los rendimientos globales de los estudiantes.

Los años 2007 a 2010 los hemos dedicado a construir, precisar y aplicar una metodología para el estudio y comparación de programas de matemáticas escolares insertos en los marcos curriculares a los que dan contenido. En este tiempo hemos elaborado constructos necesarios para la puesta en práctica y desarrollo de las etapas séptima a novena del estudio, que se describen en los Apartados 4.6, 4.7 y 4.8 del Capítulo 3 y que se desarrollan en los Capítulos 4, 5 y 6, respectivamente.

En sentido estricto, esta tesis ha tenido una duración real de algo más de cuatro años, distribuidos en un periodo inicial de quince meses, periodos trimestrales a lo largo de nueve años y un periodo final de otros 15 meses, en los cuales se ha dado culminación al estudio.

Su prolongación a lo largo de varios años y la coexistencia con un proceso de reforma dinámico y polémico, cuyo progreso muchas veces no ha sido coherente y lineal, ha introducido dificultades para su desarrollo y avance. No obstante, la duración del trabajo ha facilitado la necesaria perspectiva para seleccionar información relevante, analizar los datos y establecer conclusiones. Los resultados alcanzados y la valoración que reciban de la comunidad de investigadores en educación matemática, pero también de los profesores y expertos curriculares, dirán con el tiempo si la tarea que aquí se culmina fue merecedora del tiempo y las energías invertidos en ella.

### **3. Aportaciones**

El estudio se contextualiza en unos años de reforma y cambio curricular en el sistema educativo, singularmente en el periodo de la educación obligatoria. Esto ha exigido destacar las dimensiones curriculares en el proceso de cambio, mostrar sus fundamentos y hacer su descripción detallada.

Aportación relevante de este estudio es la implementación de un procedimiento para caracterizar un programa de matemáticas escolares, mediante el cual establecer comparaciones con otros programas. A partir de una consideración sistémica del currículo de matemáticas, estructurado según niveles y dimensiones (Rico, 1997a), hemos descrito tres programas de matemática escolares, vigentes en España durante un periodo de 65 años, por medio de sus componentes. En este estudio la caracterización detallada y la posterior comparación se han llevado a cabo para los programas y contenidos de la aritmética escolar. Ponemos a prueba y comprobamos el potencial del marco teórico. La precisión en el análisis muestra cómo, a partir de una misma estructura conceptual, se desarrollan programas muy diferentes por su secuenciación, alternancia de contenidos y juego de significados en las nociones y conceptos básicos en uso.

Una segunda aportación ha sido la revisión de los niveles de idoneidad para el rendimiento de un ítem o tarea matemática, las nociones de nivel teórico curricular, nivel de expectativa de aprendizaje y nivel empírico de rendimiento de

una tarea matemática escolar. Todos estos conceptos contribuyen a operativizar la noción de eficacia de un programa como criterio más complejo para su evaluación.

El empleo de distintas técnicas estadísticas para el análisis de estos datos han estado subordinados a la necesidad de interpretar y dotar de significado estas nociones.

La comparación de los tres programas estudiados en términos de eficacia y de efectividad destacan una línea metodológica para la evaluación de programas de la que esperamos seguir obteniendo resultados.

Estas nociones también señalan las debilidades y fortalezas de un programa de formación en términos no sólo absolutos, sino también relativos, por comparación con otros programas que se proponen desarrollar el mismo ciclo formativo básico. Además de las debilidades y fortalezas de los distintos programas evaluados con un instrumento común, su aplicación reiterada muestra también las limitaciones del propio instrumento.

## **4. Logros**

Esta investigación estudia la eficacia del currículo de matemáticas de la LOGSE en relación con el rendimiento escolar en aritmética de alumnos que se han formado en dicho plan durante el curso 2000–2001. Igualmente, compara esa eficacia con la de los programas establecidos en otros dos momentos anteriores de cambio curricular en España, sobre los que se dispone de resultados contrastados de sus rendimientos con el mismo instrumento y relativos a alumnos de niveles equivalentes; de este modo se estudia la evolución del rendimiento en aritmética escolar y la eficacia de los correspondientes programas, como señalamos en el Capítulo 1.

### **4.1. Logros de los objetivos de la investigación**

En el Capítulo 3, apartado 1 se concretaron los dos objetivos de esta investigación:

Objetivo 1: Describir y caracterizar la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que durante el curso 2000-2001 siguen el plan de estudios establecido por los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, de acuerdo con la Ley 1/1990.

Los objetivos parciales que desglosan este objetivo general y su consecución son los que siguen:

- Objetivo 1.1: Caracterizar por niveles y ciclos la formación aritmética escolar que prescriben los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91, que desarrollan la LOGSE, en términos de objetivos, contenidos, metodología y

criterios de evaluación. El logro de este objetivo ha quedado descrito en los Apartados 2, 3, 4, 5 y 6 del Capítulo 4.

- Objetivo 1.2: Estructurar por niveles y ciclos el tratamiento establecido para los ítems del test de Ballard ampliado, de acuerdo con el currículo de los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91. El logro de este objetivo se describe en el Apartado 7 del Capítulo 4.
- Objetivo 1.3: Establecer los ítems con expectativas de consecución de un nivel de idoneidad para cada grado o nivel escolar en relación con el currículo de la LOGSE. El logro de este objetivo ha quedado descrito en los Apartados 4.6 del Capítulo 3 y 2.4 del Capítulo 5.
- Objetivo 1.4: Aplicar el test de Ballard ampliado a una muestra de estudiantes de los grados 3º a 6º de Educación Primaria y de 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria durante el curso 2000–2001. El logro de este objetivo ha quedado descrito en el Apartado 4.2 del Capítulo 3.
- Objetivo 1.5: Llevar a cabo un análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del test de Ballard ampliado a los estudiantes de la promoción 2000–2001. El logro de este objetivo se describe en los Apartados 4.3, 4.4 y 4.5 del Capítulo 3.
- Objetivo 1.6: Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 2000–2001. El logro de este objetivo se describe en los Apartados 3, 4, 5 y 6 del Capítulo 5.
- Objetivo 1.7: Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo LOGSE según los datos aportados por los estudiantes de la promoción 2000–2001. El logro de este objetivo se describe en el Apartado 7 del Capítulo 5.
- Objetivo 1.8: Establecer los puntos fuertes y débiles en aritmética escolar del currículo LOGSE según los Reales Decretos 1006/91 y 1007/91 para la promoción 2000–2001. La consecución de este objetivo, síntesis de los anteriores, se describe con detalle en los Apartado 6.1 y 6.2 del Capítulo 5, que muestran los logros de este programa por niveles.

Objetivo 2: Comparar la habilidad de cálculo del objetivo anterior con la de los escolares españoles que se instruyeron con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria, de 1945, y de la Ley General de Educación de 1970, respectivamente.

A su vez, este objetivo se desglosa en los siguientes objetivos parciales:

- Objetivo 2.1: Caracterizar por niveles y por ciclos la formación aritmética escolar que prescriben los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria, de 1945 y de la Ley General de Educación de 1970, en términos de objetivos, contenidos, metodología y criterios de

evaluación. El logro de este objetivo ha quedado descrito en los Apartados 2, 3, 4, 5 y 6 del Capítulo 4.

- Objetivo 2.2: Describir y caracterizar por niveles y ciclos el rendimiento aritmético de los estudiantes de la promoción 1948–1949 y los de la promoción 1974–1975 evaluados con el test de Ballard. El logro de este objetivo se describe en los Apartados 3.1 y 5.1 del Capítulo 6.
- Objetivo 2.3: Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria, de 1945 según expectativas de los programas y su comparación con los datos aportados por los estudiantes de la promoción 1948–1949. El logro de este objetivo se describe en los Apartados 5.2 y 5.3 del Capítulo 6.
- Objetivo 2.4: Describir y caracterizar por niveles y ciclos la eficacia del currículo de la Ley General de Educación de 1970 según expectativas de los programas y su comparación con los datos aportados por los estudiantes de la promoción 1974–1975. El logro de este objetivo ha quedado descrito en el Apartado 3.2 del Capítulo 6.
- Objetivo 2.5: Comparar los rendimientos obtenidos por los estudiantes de la promoción de 2000–2001 en la aplicación del test de Ballard con los estudiantes de las promociones de 1948–1949 y de 1974–1975. El logro de este objetivo se describe en los Apartados 4.1 y 5.1 del Capítulo 6.
- Objetivo 2.6: Comparar por niveles y ciclos la eficacia del currículo LOGSE con la eficacia detectada en los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria y de la Ley General de Educación, según los datos obtenidos de las promociones evaluadas. El logro de este objetivo se describe en los Apartados 4.2 y 5.4 del Capítulo 6.
- Objetivo 2.7: Establecer los puntos fuertes y débiles en Aritmética Escolar del currículo LOGSE según su comparación con los currículos de la Ley de Educación de Enseñanza Primaria y de la Ley General de Educación. El logro de este objetivo se describe en los Apartados 4.3 y 5.4 del Capítulo 6.

Los objetivos contribuyen a dar respuesta a las hipótesis del estudio.

## 4.2. Discusión de las hipótesis

En el Apartado 5 del Capítulo 3 se enuncian las hipótesis de la investigación. Pasamos a discutir alguno de los resultados del estudio según el enunciado de las hipótesis. Tenemos en cuenta que esta discusión, al afectar a cada uno de los ítems, se centra en los programas de la LGE y de la LOGSE, no concerniendo al programa de la LEP para el cual no se dispone de resultados por cada ítem y nivel.

El enunciado de la primera hipótesis, H1, establecía:

El nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del test de Ballard para un determinado currículo es un buen predictor de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que se han formado según ese currículo.

En el Apartado 7 del Capítulo 5 hicimos el estudio de la eficacia del programa de Aritmética para el currículo LOGSE. La discusión mostró que los valores de satisfacción de las expectativas de aprendizaje que mostraban los rendimientos de los ítems oscilaban entre un 36,8% y un 62,2%, de donde inferimos que el nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del test de Ballard no era buen predictor de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que se han formado según el programa LOGSE.

En el apartado 3.2 del Capítulo 6 observamos que los valores de satisfacción de las expectativas de aprendizaje para los mismos ítems según vienen establecidas por el programa de la LGE, oscilan entre el 43,4% y el 61,9%, valores que establecen un intervalo muy similar al del programa LOGSE.

Consideramos que el logro del nivel curricular teórico sólo para valores comprendidos entre un 36% y un 62% de los ítems del test de Ballard no muestra que dicho nivel sea un buen predictor de la habilidad de cálculo de los escolares. Para estos dos programas las expectativas teóricas de aprendizaje no parecen quedar satisfechas cuando se evalúan con el test de Ballard, si bien no existen diferencias relevantes en el intervalo en que se mueven los indicadores de eficacia.

Son varios los argumentos mediante los que se pueden interpretar estos resultados. Estos datos pueden ser debidos a que un número apreciable de los ítems tengan una dificultad superior a su correspondiente nivel curricular, o bien pudiera ocurrir que los resultados del aprendizaje fueran inferiores —por distintas causas— a lo que razonablemente marcan las expectativas. Una tercera posibilidad sería que los niveles curriculares teóricos establecidos por los programas estudiados estuvieran por encima de las posibilidades reales de aprendizaje de los escolares en los niveles considerados. En todo caso, los niveles curriculares teóricos del test de Ballard no predicen adecuadamente el aprendizaje escolar esperado para los programas de la LGE y de la LOGSE y se rechaza H1.

El enunciado de la segunda hipótesis, H2, señalaba:

Los objetivos específicos sobre habilidad de cálculo aritmético establecidos para un currículo de matemáticas alcanzan o superan el nivel de idoneidad cuando se evalúan mediante el Test de Ballard.

La respuesta a H1 parece avanzar una respuesta negativa similar para esta hipótesis. Sin embargo, la comparación realizada en el Apartado 4.1 del Capítulo 6, muestra grandes diferencias entre los rendimientos de los tres bloques de contenidos. En el análisis restringido al bloque de naturales y

operaciones, que muestra la Tabla 6 de ese capítulo, apreciamos que los objetivos correspondientes a este bloque alcanzan o superan el nivel de idoneidad para un alto porcentaje de los ítems que evalúan dicho bloque, cercano o superior al 75% de los ítems en la práctica totalidad de los niveles considerados.

Con carácter general y con los datos disponibles, un alto porcentaje de los objetivos sobre habilidad de cálculo aritmético del bloque de números naturales y operaciones alcanzan o superan el nivel de idoneidad cuando se evalúan mediante el Test de Ballard mientras que, por el contrario, los logros para el bloque de números racionales y operaciones y para el bloque de magnitudes y operaciones no lo superan. Los ítems del test de Ballard resultan adecuados para identificar el nivel de idoneidad establecido por cada programa para los objetivos del bloque de números naturales y operaciones. El test de Ballard, con todas sus limitaciones, deja constancia de un desnivel acusado entre las expectativas y los logros para los bloques de contenidos relativos a números racionales y a magnitudes.

En conclusión, se confirma la hipótesis H2 para los objetivos del bloque números naturales y operaciones, tanto para el programa de la LGE como para el de la LOGSE, cosa que no ocurre para los objetivos de los otros dos bloques de contenido.

El enunciado de la tercera hipótesis, H3, afirmaba:

Las diferencias entre los rendimientos obtenidos por escolares que han seguido diferentes currículos en su formación matemática escolar medidos por el test de Ballard son debidas a las diferencias en los niveles curriculares de cada uno los ítems según los distintos programas.

Para dar respuesta razonada a la hipótesis H3 hemos de tener en cuenta varias consideraciones. En primer lugar, la clasificación de los contenidos que sobre aritmética y magnitudes se obtiene en los tres programas, y que se lleva a cabo en el Apartado 6 del Capítulo 4, pone de manifiesto considerables diferencias en la fundamentación, organización, secuenciación y alcance de los contenidos para los tres bloques considerados en el estudio.

En segundo lugar, las habilidades que evalúan los ítems del test de Ballard se trabajan en los tres programas. La comparación de la distribución global de los ítems hecha en el Apartado 7 del Capítulo 4 pone de manifiesto esas diferencias. Parecería adecuado atribuir a esas diferencias entre los niveles teóricos curriculares los rendimientos distintos alcanzados en las pruebas para los tres programas. Sin embargo, no hay evidencias para sostener que las diferencias entre sus rendimientos sean debidas, principalmente, a sus diferentes niveles curriculares en los respectivos programas. La respuesta para H1 muestra que el nivel curricular teórico de cada uno de los ítems del test de Ballard para un determinado currículo *no* es un buen predictor de la habilidad de cálculo aritmético de los escolares que se han formado según ese currículo.

Tercero: las evidencias disponibles no aportan datos que fundamenten la aceptación de H3. En la comparación de rendimientos del Apartado 4. Del Capítulo 6 se visualizan mejores rendimiento para el programa LGE que para el programa LOGSE. Por otra parte de la reflexión sobre H2 recogemos que los objetivos sobre habilidad de cálculo aritmético del bloque de números naturales y operaciones alcanzan o superan el nivel de idoneidad cuando se evalúan mediante el Test de Ballard mientras que, por el contrario, los logros para el bloque de números racionales y operaciones y para el bloque de magnitudes y operaciones no lo superan.

Concluimos que para el bloque de números y operaciones las diferencias entre los rendimientos parecen debidas a los diferencias en los niveles curriculares de cada uno los ítems según los programas, cosa que no podemos sostener para los otros dos bloques.

### **4.3. Estudios realizados**

Para alcanzar los objetivos y confirmar las hipótesis se han realizado dos tipos de estudios: estudios teóricos, estudios empíricos y, dentro de estos últimos, estudios descriptivos. Estos estudios se han realizado en distintos momentos de la investigación.

En primer lugar, se realizó un estudio piloto previo, con una componente teórica sobre análisis conceptual y curricular de cada uno de los ítems, y una componente empírica para validar la adecuación de los nuevos ítems y de los nuevos enunciados a las necesidades y el estilo requeridos. Este estudio se realizó como trabajo de Tercer Ciclo (Díez, 2001) y dio lugar al Test Ampliado de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard, instrumento de recogida de información para la parte empírica de este trabajo.

En segundo lugar, se llevó a cabo un estudio comparativo entre los currículos de matemática escolar que se desarrollan a partir de la Ley de Educación Primaria de 1945, de la Ley General de Educación de 1970 y de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo de 1990, singularmente de los correspondientes programas para aritmética.

A este estudio se dedicó la totalidad del Capítulo 4. En su primera parte se hace un estudio comparativo global de los tres programas, por caracterización conforme a 12 componentes curriculares y según 40 descriptores. En la segunda parte se contemplan detalladamente los tres programas para la formación aritmética escolar, clasificando sus contenidos en tres bloques y organizando su comparación según los estándares curriculares del NCTM. Este estudio teórico concluye estableciendo el nivel teórico curricular de cada uno de los ítems del test de Ballard en cada uno de los programas. Se constata así que la propuesta formativa sobre matemáticas escolares es muy diferente y, en ocasiones, señalada para los tres programas formativos. La primera parte de este estudio teórico se ha publicado recientemente (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011).

En tercer lugar se realizó un estudio empírico, de aplicación del test ampliado de Habilidad de Cálculo Aritmético de Ballard a una muestra aproximada de 1000 escolares, de edades comprendidas entre los 8 y los 14 años, que se formaban con el currículo LOGSE. Sobre los datos de las pruebas se determinaron los rendimientos de cada ítem por cada nivel escolar. Tales rendimientos, obtenidos empíricamente, se compararon con sus niveles teóricos curriculares dando lugar a un balance entre los niveles teórico y empíricos de los ítems por cada uno de los bloques de contenidos, con los cuales se mide la eficacia del programa según la prueba aplicada. El balance final se expresa en los rendimientos finales de cada uno de los dominios según categorías de idoneidad y en el estudio de la eficacia de este programa según la evaluación realizada con el THCAB. Con esta parte del estudio se da por concluida la consecución del Objetivo 1.

Finalmente, para lograr la consecución del objetivo 2 y confirmar o refutar las hipótesis hemos llevado a cabo un estudio comparativo de los rendimientos alcanzados por distintas muestras y en distintos momentos sobre la misma prueba, interpretando tales comparaciones en el marco de unos procesos de cambio curricular. Los conceptos de rendimiento y eficacia de un currículo evaluados mediante una determinada prueba han sido centrales en esta parte. Hemos logrado así mejorar nuestro conocimiento sobre el rendimiento aritmético de los escolares que han seguido el programa LOGSE mediante su comparación con estudiantes que han seguido programas diferentes. También hemos caracterizado las cualidades del test de Ballard como instrumento para predecir el rendimiento sobre las expectativas teóricas esperadas. Esta parte de la investigación se presenta y desarrolla en el Capítulo 6.

## 5. Hallazgos

Hallazgo importante en este estudio ha sido la caracterización de un determinado currículo de matemáticas según 12 componentes curriculares, organizadas mediante 40 criterios. Estos componentes proceden de los estudios curriculares en matemáticas; los criterios contribuyen a su uso y aplicación para propuestas concretas de programas.

La noción de evaluación que se utiliza destaca el aspecto relacional ya que vincula expectativas sobre el aprendizaje en un programa con unos logros puestos de manifiesto mediante una serie organizada de tareas, realizadas por sujetos que siguen el programa. Una evaluación es siempre relativa a un programa, un instrumento y unos sujetos que atienden al programa y responden al instrumento.

Un segundo hallazgo ha sido establecer una serie de conceptos que mejoran la interpretación de una evaluación en esta perspectiva relacional ya que conectan el instrumento de evaluación con el programa de formación, relacionan los resultados esperados y los finalmente alcanzados. Algunas de

estas nociones son teóricas, como las de nivel curricular teórico y nivel cognitivo teórico, mientras que otras necesitan información empírica, como ocurre con las categorías de nivel(es) de rendimiento de un ítem, nivel(es) de idoneidad de un ítem, nivel cognitivo de un ítem, e indicadores de eficacia de un programa, que expresan la satisfacción de expectativas según recogen los resultados de una prueba. La interpretación coherente de las diferencias de rendimiento obtenidas al aplicar una misma prueba a estudiantes que siguen programas distintos pone de manifiesto la dependencia de los rendimientos alcanzados respecto de los programas de formación seguidos.

Un tercer hallazgo ha mostrado que las expectativas generales de aprendizaje teóricamente establecidas no son predictores fiables de los rendimientos obtenidos, no al menos con los programas e instrumento que hemos utilizado. Los logros alcanzados con un mismo instrumento a lo largo de varios cursos de una misma etapa o ciclo formativo muestran que hay cierta dependencia de la expectativas teóricas, pero también se detecta que la estrategia formativa varía según varían los programas.

Un último e importante hallazgo ha sido detectar la continuidad a lo largo del tiempo en el programa de formación sobre números naturales y operaciones en el periodo de enseñanza obligatoria, con una alta eficacia en sus logros: Por el contrario los programas relativos a números racionales y sus operaciones y al estudio de las magnitudes han mostrado una evidente discontinuidad en sus programas y unos niveles de eficacia muy bajos en el cumplimiento de las expectativas de aprendizaje.

## **6. Perspectivas de futuro y conclusión**

### **6.1. Cuestiones pendientes**

En el desarrollo de la investigación se ha dado prioridad a la consecución de los objetivos y discusión de las hipótesis establecidas. Para atender estas prioridades los investigadores necesitaron definir nuevos conceptos, buscar y organizar informaciones variadas y emprender estudios adicionales, algunos de ellos de gran interés. Uno de estos estudios ha sido el desarrollado en el Apartado 6 del Capítulo 4, dedicado a la clasificación y comparación de los contenidos de aritmética y magnitudes para los tres programas. La comparación se ha desarrollado según los tres bloques de contenidos considerados: números naturales, números racionales y magnitudes y los resultados que se han obtenido de estas comparaciones han mostrado grandes diferencias en los fundamentos de los conceptos, en la secuenciación de las propiedades, en las estrategias de cálculo presentadas y en el planteamiento y resolución de problemas. En el bloque de números racionales destacan las diferencias según la prioridad venga dada a las fracciones o a los decimales y en el bloque de magnitudes según el orden en que se presentan y desarrollan cada una de ellas.

Queda pendiente un estudio mas exhaustivo de estas diferencias y también una interpretación de los resultados de las evaluaciones que las tenga en cuenta.

Aunque en el estudio realizado en los Capítulos 5 y 6 hemos prescindido de llevar a cabo un análisis factorial del test de Ballard con los resultados de las aplicaciones de 1975 y de 2001, no cabe duda que una interpretación de los resultados mejoraría con esta nueva información.

A partir de los estudios comparativos del Capítulo 6 surge un tercer punto relativo a las limitaciones del THCAB como instrumento adecuado para evaluar el currículo de la Aritmética escolar. Los resultados finales, singularmente la discusión de las hipótesis, cuestionan la bondad del instrumento, especialmente para los datos obtenidos en los bloques de números racionales y de magnitudes. Un estudio detallado, centrado en la adecuación del test, la discusión de los ítems añadidos a la versión ampliada y una propuesta sobre su mantenimiento, revisión o abandono es una cuestión pendiente de estudio.

## 6.2. Cuestiones abiertas

Además de las tres cuestiones anteriores surgen otras nuevas, que pueden dar lugar a nuevos estudios.

Una primera propuesta es ampliar el estudio comparativo de los programas realizado en el Capítulo 4 para incluir los datos procedentes del nuevo programa de aritmética establecido por la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), que se concreta en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, de enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria y en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, que establecen las enseñanzas mínimas para Educación Secundaria Obligatoria.

En segundo lugar, la calidad de un programa la entendemos en términos de pertinencia, eficacia y eficiencia. En esta investigación nos hemos aproximado a la pertinencia en el Capítulo 4, hemos profundizado sobre la eficacia en los Capítulos 5 y 6 y, prácticamente, no hemos considerado la eficiencia. Entendemos que en el futuro es conveniente llevar a cabo un trabajo de investigación sistemático relativo a la calidad del programa de aritmética escolar, componente clave del currículo de matemáticas durante el periodo de la educación obligatoria en las edades comprendidas entre los 8 y los 14 años, que tenga en cuenta la noción de calidad en toda su amplitud.

En este trabajo hemos dado un peso importante al test de Ballard, del cual hemos detectado limitaciones importantes. Un tercer trabajo necesario consistiría en diseñar un nuevo instrumento actualizado para evaluar el rendimiento aritmético escolar, basado en el análisis comparado de los programas, en este caso con inclusión del correspondiente análisis de programa de la LOE.

Deseamos que los esfuerzos realizados en este estudio tengan continuidad en nuevos estudios con repercusión práctica y deriven en acción transformadora sobre nuestro medio educativo.

## ANEXO 1

### Ítems que amplían el Test de Ballard en el estudio de Díez (2001)

101. Escribe los dos términos que siguen a: 17, 27, 37, 47, \_\_, \_\_

102. Escribe los dos términos que siguen a: 3, 5, 7, 9, \_\_, \_\_

103. Escribe los dos términos que siguen a: 0, 6, 12, 18, \_\_, \_\_

104. Escribe los dos términos que siguen a: 40, 32, 24, 16, \_\_, \_\_

105. Escribe los dos términos que siguen a: 2, 6, 18, 54, \_\_, \_\_

106. Escribe los dos términos que siguen a: 243, 81, 27, 9, \_\_, \_\_

107.  $6 + 3 \times 4$

108.  $2 + 4 : 2$

109.  $9 - 3 \times 2$

110.  $8 - 4 : 2$

111.  $9 \times 5 - 3$

112. Escribe de menor a mayor las fracciones  $\frac{5}{9}$ ,  $\frac{3}{9}$  y  $\frac{7}{9}$

113. Escribe de menor a mayor las fracciones  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$

114. Escribe una fracción comprendida entre  $\frac{5}{9}$  y  $\frac{7}{9}$

115. Escribe una fracción comprendida entre  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{3}{5}$

**116.** Calcula una fracción comprendida entre  $\frac{3+6+9}{3}$

**117.** Calcular  $\frac{4 \times 6 \times 8}{2}$

**118.** Escribe de menor a mayor los números decimales: 6,65; 6,4; 6,8.

**119.** Escribe un número decimal comprendido entre los números decimales 2,3 y 2,4.

**120.** Escribe un número decimal comprendido entre los números decimales 0,5 y 0,6.

## ANEXO 2



Universidad de Granada

### INSTRUCCIONES

Lo que vas a hacer no es un examen. Únicamente queremos saber cómo los niños españoles resuelven distintas clases de problemas.

Esta prueba contiene 62 cuestiones: unas fáciles y otras difíciles. Es natural que no sepas contestar a todas. Pero haz lo que puedas.

Cuando no sepas resolver un problema, no te preocupes, y pasa a la cuestión siguiente.

**Ten en cuenta que es más importante trabajar bien que deprisa.**

Si tienes que hacer alguna operación, hazla en la hoja en blanco que se te proporciona, escribe la contestación a cada pregunta en el recuadro en blanco que tiene el mismo número. Si no puedes resolver alguno deja el recuadro en blanco y continua.

**En la hoja con las cuestiones no debes escribir.**

Una vez comenzada la prueba no se puede preguntar nada ni fijarse del compañero.

No vuelvas la hoja hasta que se te diga.



**Universidad de Granada**

## **INSTRUCCIONES**

Esta prueba es continuación de la que ya hiciste anteriormente.

Contiene 58 cuestiones: unas fáciles y otras difíciles. Es natural que no sepas contestar a todas. Pero haz lo que puedas.

Cuando no sepas resolver un problema, no te preocupes, y pasa a la cuestión siguiente.

**Ten en cuenta que es más importante trabajar bien que deprisa.**

Si tienes que hacer alguna operación, hazla en la hoja en blanco que se te proporciona, escribe la contestación a cada pregunta en el recuadro en blanco que tiene el mismo número. Si no puedes resolver alguno deja el recuadro en blanco y continua.

**En la hoja con las cuestiones no debes escribir.**

Una vez comenzada la prueba no se puede preguntar nada ni fijarse del compañero.

No vuelvas la hoja hasta que se te diga.

## HOJA DE RESPUESTA 1

Nombre ..... Apellidos .....

Curso ..... Colegio ..... Edad.....

1	14	27
2	15	28
3	16	29
4	17	30
5	18	31
6	19	32
7	20	33
8	21	34
9	22	35
10	23	36
11	24	37
12	25	38
13	26	39

40		44		48
41		45		49
42		46		50
43		47		51

---

101
102
103

104
105
106
107

108
109
110
111

## HOJA DE RESPUESTA 2

Nombre ..... Apellidos .....

Curso..... Colegio..... Edad .....

112	115	118
113	116	119
114	117	120

---

52	58	64
53	59	65
54	60	66
55	61	67
56	62	68
57	63	69

70	80	90
71	81	91
72	82	92
73	83	93
74	84	94
75	85	95
76	86	96
77	87	97
78	88	98
79	89	99
		100

1.  $23 + 5$
2.  $9 + 6 + 8$
3.  $8 + 7 + 13$
4.  $534 - 19$
5.  $8 + 9 - 3 + 2$
6.  $17 + 18 - 14$
7.  $3000 - 1$
8.  $156 - 156$
9.  $200 - 13$
10.  $54 + 368 + 7$
11.  $100 - 4 - 96$
12.  $201 - 102$
13.  $47 \times 8$
14.  $(63 \times 5) : 9$
15.  $587 \times 7$
16.  $1 : 1$
17.  $5 : 1$
18.  $0 : 4$
19.  $2982 : 6$
20.  $1 \times 1 \times 1 \times 1$
21.  $4 \times 7 \times 9 \times 0$
22.  $18 \times 18$
23.  $231 - 201$
24. 3 duros, 4 pesetas + 1 duro, 2,50 pesetas + 13,50 pesetas
25. 5 duros - (2 duros, 4,50 pesetas)

26. 2 horas, 35 minutos, 15 segundos + 46 minutos, 50 segundos
27. 3 kilogramos, 250 gramos – (1 kilogramo, 750 gramos)
28. 23 metros, 2 decímetros, 6 centímetros – (2 decímetros, 9 centímetros)
29. (16 duros, 7,5 pesetas) x 2
30. 3(11 duros, 1 peseta) : 7
31. (2 duros, 2,50 pesetas) x 5
32. (1 duro, 3,50 pesetas) x 15
33. 3(12 kilogramos, 180 gramos) : 5
34. (7 semanas, 4 días, 8 horas) x 335.
35. (2 decímetros, 3 centímetros) x 8
36. (5 metros, 0 decímetros, 4 centímetros) : 6
37. ¿Cuántas semanas son 50 medios días?
38. Reduce 1 metro, 2 decímetros, 2 centímetros a centímetros
39.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
40.  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
41.  $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$
42.  $3 + \frac{5}{6} - 1$
43.  $6 + \frac{3}{5} - 4 - \frac{2}{5}$
44.  $1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$
45.  $2 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{2} - 2 - \frac{2}{3}$
46.  $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

47.  $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$

48.  $\left(\frac{3}{8} \times \frac{4}{5}\right) : \frac{3}{4}$

49.  $8 \times \frac{1}{2}$

50.  $8 : \frac{1}{2}$

51. 20 duros  $\times \frac{1}{3}$



101. Escribe los dos términos que siguen a: 17, 27, 37, 47, \_\_, \_\_

102. Escribe los dos términos que siguen a: 3, 5, 7, 9, \_\_, \_\_

103. Escribe los dos términos que siguen a: 0, 6, 12, 18, \_\_, \_\_

104. Escribe los dos términos que siguen a: 40, 32, 24, 16, \_\_, \_\_

105. Escribe los dos términos que siguen a: 2, 6, 18, 54, \_\_, \_\_

106. Escribe los dos términos que siguen a: 243, 81, 27, 9, \_\_, \_\_

107.  $6 + 3 \times 4$

108.  $2 + 4 : 2$

109.  $9 - 3 \times 2$

110.  $8 - 4 : 2$

111.  $9 \times 5 - 3$

112. Escribe de menor a mayor las fracciones  $\frac{5}{9}$ ,  $\frac{3}{9}$  y  $\frac{7}{9}$

113. Escribe de menor a mayor las fracciones  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$

114. Escribe una fracción comprendida entre  $\frac{5}{9}$  y  $\frac{7}{9}$
115. Escribe una fracción comprendida entre  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{3}{5}$
116. Calcular  $\frac{3+6+9}{3}$
117. Calcular  $\frac{4 \times 6 \times 8}{2}$
118. Escribe de menor a mayor los números decimales: 6,65; 6,4; 6,8
119. Escribe un número decimal comprendido entre los números decimales  
2,3 y 2,4
120. Escribe un número decimal comprendido entre los números decimales  
0,5 y 0,6.
- 

52.  $0,5+0,75+0,25$
53.  $1,2+3,6-2,4$
54.  $18,2-6,7-11,5$
55.  $10-7,35$
56.  $3,1-3,01$
57.  $0,1 \times 0,1$
58.  $0,6 \times 0,07$
59.  $1:0,1$
60.  $3:0,03$
61.  $(7,5 \times 8):0,6$
62.  $0,011 \times 0,26$
63.  $6:0,5$

- 
64.  $\sqrt{81}$
65.  $\sqrt{169}$
66.  $\sqrt{400}$
67. Raíz cuadrada de 441
68.  $\sqrt{49} \times \sqrt{121}$
69. 5 por ciento de 10 pesetas
70. 3.5 por ciento de 300 pesetas
71. 1 por ciento de 100
72. 100 por ciento de 1
73. 100 por ciento de 100
74. 200 por ciento de 100
75. ¿Cuánto cuestan 3 kilogramos, 200 gramos, si el kilo vale 10 pesetas?
76. ¿Cuánto cuestan 4 metros, 10 centímetros de tela, si vale a 250 pesetas el metro?
77. ¿Cuánto cuestan 32 naranjas, si 8 naranjas valen 15 pesetas?
78. ¿Cuánto cuestan 100 naranjas, si 5 naranjas valen 12 pesetas?
79. (3 duros, 12,50 pesetas)  $\times \frac{2}{3}$
80. Simplificar la fracción  $\frac{21}{35}$
81. ¿Cuántas pesetas son 0,875 duros?
82. ¿Qué fracción de 5 pesetas son 3,50 pesetas?
83. Máximo Común Divisor de 32 y 16
84. Máximo Común Divisor de 12 , 20 y 28

85. Mínimo Común Múltiplo de 3 y 5
86. Mínimo Común Múltiplo de 7 , 8 y 112
87. Mínimo Común Múltiplo de 3 , 5 , 9 y 15
88. Media de 5 , 17 y 29
89. Media de  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{4}$
90. Media de 0,5; 0,01 y 1,2
91.  $\frac{14}{7} = \frac{6}{x}$
92.  $\frac{3}{x} = \frac{5}{10}$
93.  $\frac{x}{8} = \frac{3}{12}$
94.  $\frac{8}{7} = \frac{x}{21}$
95. Superficie de un terreno cuadrado de 3,5 metros de lado.
96. Calcular la longitud de una circunferencia de 4 metros de diámetro.
97. Calcular la superficie de un círculo de 4 metros de diámetro.
98. Calcular la superficie lateral total de un cubo de 2 centímetros de arista.
99. Calcular el volumen de un depósito de agua de 2 metros de largo, 2 metros de ancho y 1,5 metros de profundidad.
100. Calcular el radio de un círculo cuya superficie es de 28,26 metros cuadrados.

## ANEXO 3

### Comparaciones múltiples entre grupos por la variable Centro

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: Raíz. DHS de Tukey

Centro (I)	Centro (J)	Diferencia entre medias (I-J)	Error típico	Sign.	Inter. de confianza al 95%	
					Lim. Inf.	Lim. Sup.
Ceuta	Cia. María	-,0647	,2300	1,0000	-,7906	,6612
	Huescar	,2838	,2300	,8752	-,4421	1,0097
	Juan XXIII	,2814	,2300	,8794	-,4446	1,0073
	S. José de Cartuja	,9748*	,2300	,0034	,2488	1,7007
	Sierra Nevada	,2475	,2300	,9332	-,4784	,9735
	Ugíjar	,8434*	,2300	,0147	,1175	1,5694
Cia María	Ceuta	,0647	,2300	1,0000	-,6612	,7906
	Huescar	,3485	,2300	,7337	-,3774	1,0744
	Juan XXIII	,3461	,2300	,7398	-,3799	1,0720
	S. José de Cartuja	1,0395*	,2300	,0016	,3135	1,7654
	Sierra Nevada	,3122	,2300	,8190	-,4137	1,0382
	Ugíjar	,9081*	,2300	,0072	,1822	1,6341
Huescar	Ceuta	-,2838	,2300	,8752	-1,0097	,4421
	Cia de María	-,3485	,2300	,7337	-1,0744	,3774
	Juan XXIII	-,0024	,2300	1,0000	,7284	,7235
	S. José de Cartuja	,6910	,2300	,0703	,0350	1,4169
	Sierra Nevada	-,0363	,2300	1,0000	-,7622	,6897

## Comparaciones múltiples

Variable dependiente: Raíz. DHS de Tukey

					Inter. de confianza al 95%	
Juan XXIII	Ugíjar	,5596	,2300	,2201	-,1663	1,2856
	Ceuta	-,2814	,2300	,8794	-1,0073	,4446
	Cia de María	-,3461	,2300	,7398	-1,0720	,3799
	Huescar	,0024	,2300	1,0000	-,7235	,7284
	S. José de Cartuja	,6934	,2300	,0687	-,0325	1,4193
	Sierra nevada	-,0339	,2300	1,0000	-,7598	,6921
	Ugíjar	,5620	,2300	,2160	-,1639	1,2880

Basado en las medias observadas

\* Significa que la diferencia de medias es significativa

## ANEXO 4

### Comparaciones múltiples en los grupos establecidos por la variable Curso

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: Raíz. DHS de Tukey

Curso ( I )	Curso ( J )	Diferencia entre medias (I-J)	Error típico	Sign.	Inter. de confianza al 95%	
					Lim. Inf.	Lim. Sup
1	2	-1,1700*	,2129	,000	-1,8176	-,5224
	3	3,3473*	,2129	,000	2,6997	3,9949
	4	2,4728*	,2129	,000	1,8252	3,1204
	5	1,6672*	,2129	,000	1,0196	2,3148
	6	,7734*	,2129	,012	,1258	1,4210
2	1	1,1700*	,2129	,000	,5224	1,8176
	3	4,5173*	,2129	,000	3,8697	5,1649
	4	3,6428*	,2129	,000	2,9952	4,2904
	5	2,8372*	,2129	,000	2,1896	3,4848
	6	1,9434*	,2129	,000	1,2958	2,5909
3	1	-3,3473*	,2129	,000	-3,9949	-2,6997
	2	-4,5173*	,2129	,000	-5,1649	-3,8697
	4	-,8745*	,2129	,004	-1,5221	-,2269
	5	-1,6801*	,2129	,000	-2,3277	-1,0325
	6	-2,5739*	,2129	,000	-3,2215	-1,9264
4	1	-2,4728*	,2129	,000	-3,1204	-1,8252
	2	-3,6428*	,2129	,000	-4,2904	-2,9952
	3	,8745*	,2129	,004	,2269	1,5221
	5	-,8056*	,2129	,008	-1,4632	-,1580

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: Raíz. DHS de Tukey

---

6	-1,6994*	,2129	,000	-2,3470	-1,0518
---	----------	-------	------	---------	---------

---

Basado en las medias observadas

\* Significa que la diferencia de medias es significativa

## ANEXO 5

### Homogeneidad de los Resultados de las Aplicaciones del Test de Ballard

Para abordar la comparación entre los rendimientos de las distintas aplicaciones del test, corresponde el estudio de la homogeneidad de las muestras a las que hemos aplicado los 100 ítems del Test de Habilidad Aritmética de Ballard, que se considera en este apartado.

#### 1. Comparación de las muestras que intervienen en el estudio

Cada una de las tres aplicaciones del test se ha hecho en un momento diferente, para muestras cuya descripción se encuentra en Díez (2001) y en el Capítulo 3. Los datos que disponemos para comparar las tres muestras son los referidos a las puntuaciones obtenidas por los escolares en el test. Para las muestras de 1975 y 2001 disponemos, además, de los índices de dificultad de cada uno de los ítems para cada uno de los niveles.

Una de las pruebas que permite estudiar la homogeneidad entre los resultados es el test T para muestras independientes. Dicha prueba contrasta, en primer lugar, si las varianzas teóricas de ambos grupos de datos se pueden considerar iguales o no, es decir:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ para luego proceder a comparar las medias, } H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0.$$

El estadístico de contraste utilizado para comparar las medias dependerá de si ambas poblaciones, la actual y la antigua, son homocedásticas (igualdad de varianzas) o no. Además, vamos a considerar que las varianzas poblacionales son desconocidas.

Así pues, tenemos que:

Si las poblaciones son homocedásticas, el estadístico de contraste usado viene dado por la expresión:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \quad (1)$$

donde:

$$S_p^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2} \quad (2)$$

Dicho estadístico sigue una distribución  $t_{m+n-2}$ .

Si las poblaciones no son homocedásticas (diferentes varianzas), el estadístico de contraste usado es:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}} \quad (3)$$

estadístico que sigue una distribución  $t_v$  con:

$$v \approx \frac{\left(\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{m}\right)^2}{m-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n}\right)^2}{n-1}} \quad (4)$$

La prueba T para dos muestras independientes requiere, para poder aplicarla, que los datos de ambas muestras provengan de distribuciones normales, hecho que es fácil que se dé.

## Comparación de las muestras de 1975 y 2001

Antes de aplicar la prueba hemos de ver si los datos por niveles de 1975 y los de 2001 provienen o no de poblaciones con distribución normal. Para ello vamos a utilizar el contraste de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste. Los resultados obtenidos tras su aplicación son los siguientes:

Tabla 1

*Prueba de Kolmogorov-Smirnov con los datos de 1975*

	N	Parámetros normales		Diferencias más extremas			Z Kol-Sm	Sig. Asint.
		Media	Desviación	Absoluta	Positiva	Negativa		
Tercero	100	10,94	22,74	0,399	0,399	-0,315	3,990	0
Cuarto	100	19,46	28,54	0,283	0,283	-0,248	2,831	0
Quinto	100	23,61	30,56	0,260	0,260	-0,220	2,601	0
Sexto	100	32,10	31,49	0,198	0,198	-0,154	1,978	0,001
1º ESO	100	43,29	29,86	0,135	0,135	-0,108	1,348	0,053
2º ESO	100	57,59	23,93	0,089	0,76	-0,089	0,891	0,405

- a. La distribución de contraste es la normal.  
b. Se han calculado a partir de los datos.

Tabla 2

*Prueba de Kolmogorov-Smirnov con los datos de 2001*

	N	Parámetros normales		Diferencias más extremas			Z Kol-Sm	Sig. Asint.
		Media	Desviación	Absoluta	Positiva	Negativa		
Tercero	100	8,8961	21,1418	0,387	0,387	-0,337	3,871	0
Cuarto	100	14,57	27,5092	0,4	0,4	-0,298	3,999	0
Quinto	100	19,378	30,6247	0,361	0,361	-0,27	3,608	0
Sexto	100	25,65	31,4918	0,253	0,253	0,208	2,527	0
1º ESO	100	34,111	30,8672	0,185	0,185	-0,135	1,85	0,002
2º ESO	100	48,89	26,2534	0,08	0,08	-0,076	0,802	0,541

- a. La distribución de contraste es la normal.  
b. Se han calculado a partir de los datos.

Como se puede comprobar, a un nivel de significación del 5%, el contraste de bondad de ajuste indica en ambos casos que para los niveles 3º, 4º, 5º y 6º de Primaria, los datos no provienen de distribuciones normales. En cuanto a 7º

de EGB los datos de 1975 sí provienen de una distribución normal, mientras que los de 1º de ESO de 2001, no. Finalmente, para los últimos niveles educativos, 8º de EGB y 2º de ESO, obtenemos en ambos casos que los datos provienen de distribuciones normales.

Estos datos parecen coherentes ya los conocimientos de los alumnos que el test mide son conocimientos a término, es decir, conocimientos al final de la etapa educativa. En los niveles educativos más bajos no se dispone de conocimiento suficiente sobre todos los ítems preguntados, por ello no se puede esperar que su distribución sea normal, estando además muy dispersos. A medida que se avanza en la etapa educativa, conforme subimos de nivel se espera que los datos sean normales; en este caso, como ya se ha visto, esto ocurre en los últimos niveles educativos. La normalidad se consigue en 8º de EGB para el programa de la LGE, y en los niveles de 1º y 2º de ESO para el programa de la LOGSE, respectivamente.

A la vista de los datos obtenidos llegamos a la conclusión de que la prueba T para dos muestras independientes solamente sería lícita realizarla para los últimos niveles, siendo los resultados obtenidos tras su aplicación los siguientes.

Aplicada la prueba T, con un nivel de significación del 5%, dicha prueba asume la igualdad de varianzas (homocedasticidad) ya que su nivel de significación ('Sig'=0,644) es mayor que 0,05. Por tanto, para llevar a cabo el contraste de medias debemos suponer que las varianzas son iguales. Dicho análisis, a un nivel de significación del 5%, lleva a rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias ya que Sig.= 0,019 < 0,05. Llegamos así a la conclusión de que existe diferencia entre las poblaciones en el caso de los dos últimos niveles: 8º de EGB y 2º de ESO.

Para realizar el estudio comparativo en los otros niveles podemos utilizar un contraste no paramétrico ya que este tipo de contraste no tiene en cuenta la distribución de los datos. Concretamente, un contraste no paramétrico que constituye una buena alternativa al contraste T de igualdad de medias es el de la U de Mann-Whitney.

En este caso la hipótesis que se contrastan son:

$H_0$ : no hay diferencias entre las medias de los grupos considerados.

$H_1$ : sí hay diferencias entre las medias de los grupos considerados.

Un problema que presenta es que ésta es una prueba sensible a diferencias en tendencia central, así que si los datos están muy dispersos, como es el caso, los resultados obtenidos van a ser poco fiables y no deberíamos aplicarla.

### **Comparación considerando los niveles teóricos curriculares de los ítems**

Llegados a este punto nos planteamos realizar el estudio comparativo considerando bloques de ítems. Concretamente para cada nivel educativo consideraremos los ítems que los alumnos pueden resolver, es decir, consideraremos los ítems según el nivel curricular teórico establecido.

Los ítems del test de Ballard establecidos teóricamente para cada uno de los niveles según los correspondientes currículos, vienen recogidos en las Tablas 38, 39 y 40, en el Apartado 7.1 del Capítulo 4.

Utilizando las Tablas 39 y 40, la comparación entre los niveles de 1º a 7º curso de EGB con los niveles de 3º, 4º, 5º, 6º de Primaria y 1º de ESO del programa de la LOGSE se realizará de la misma forma que al principio, es decir, tendremos que comprobar en primer lugar si los datos provienen de poblaciones con distribución normal y posteriormente realizar la prueba T de igualdad de medias o la prueba U de Mann-Whitney dependiendo de si los datos son o no normales.

Así pues, en cuanto al estudio de la normalidad los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 3

#### *Prueba de Kolmogorov-Smirnov*

	N	Parámetros normales <sub>a,b</sub>		Diferencias más extremas			Z Kol-Sm	Sig. Asint.
		Media	Desviación	Absoluta	Positiva	Negativa		
Tercero/1975	23	46,0435	25,2703	,101	,104	-,091	,483	,974

Tabla 3

*Prueba de Kolmogorov-Smirnov*

	N	Parámetros normales <sup>a,b</sup>		Diferencias más extremas			Z Kol-Sm	Sig. Asint.
		Media	Desviación	Absoluta	Positiva	Negativa		
Tercero/2001	23	37,5212	29,9214	,148	,148	-,123	,780	,698
Cuarto/1975	24	64,0833	23,7119	,171	,083	-,151	,741	,642
Cuarto/2001	24	58,3333	24,9433	,124	,064	-,124	,605	,858
Quinto/1975	29	62,4828	28,7422	,162	,119	-,162	,873	,431
Quinto/2001	29	58,5765	31,4296	,188	,152	-,188	1,011	,258
Sexto/1975	56	47,7679	31,6986	,148	,148	-,143	1,108	,172
Sexto/2001	56	42,1005	33,4455	,148	,185	-,144	1,382	,044
Séptimo/1975	61	58,7377	27,3733	,140	,112	-,140	1,095	,182
Primero/2001	61	49,3805	29,9874	,185	,185	-,131	1,442	,031

a. La distribución de contraste es la normal.

b. Se han calculado a partir de los datos.

A un nivel de significación del 5%, se puede comprobar que excepto los datos de 6º Primaria y 1º de ESO para el 2001, los demás provienen de poblaciones con distribución normal ya que los valores de la columna 'Sig. Asintót. (bilateral)' son todos mayores que 0,05.

En principio, a pesar de que en estos dos casos no se tiene la normalidad de los datos vamos a realizar el contraste T de igualdad de medias. Este contraste como ya se ha dicho con anterioridad realiza en primer lugar la prueba de igualdad de varianzas, prueba que no es tan dependiente del supuesto de normalidad. Concretamente si en estos dos casos obtuviésemos que la prueba no es significativa, es decir, que sí hay igualdad de varianzas prácticamente podríamos fiarnos del resultado ofrecido por la prueba aunque sería conveniente acompañarla de otra prueba no paramétrica para comprobar si los resultados obtenidos son similares.

Así pues, los resultados obtenidos tras la aplicación de la prueba T de

igualdad de medias son los siguientes:

Tabla 4

*Prueba T para la igualdad de medias*

		Prueba Lavane para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias					95% intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error tip. De la diferencia	Inferior	Superior
Tercero	Sí*	,774	,384	1,044	44	,302	8,5223	8,1664	-7,9360	24,9806
	No*			1,044	42,801	,303	8,5223	8,1664	-7,9491	24,9937
Cuarto	Sí	,218	,643	,819	46	,417	5,7500	7,0250	-8,3906	19,8906
	No			,819	45,883	,417	5,7500	7,0250	-8,3916	19,8916
Quinto	Sí	,649	,424	,494	56	,623	3,9063	7,9088	-11,9370	19,7496
	No			,494	55,558	,623	3,9063	7,9088	-11,9398	19,7523
Sexto	Sí	,483	,489	,920	110	,359	5,6674	6,1578	-6,5358	17,8706
	No			,920	109,69	,359	5,6674	6,1578	-6,5362	17,8710
Primero	Sí	1,171	,281	1,800	120	,074	9,3572	5,1986	-,9356	19,6501
	No			1,800	119,02	,074	9,3572	5,1986	-,9356	19,6509

Si: Se han asumido varianzas iguales.

No: No se han asumido las varianzas iguales.

En todos los casos a un nivel de significación del 5% se puede ver que existe igualdad de varianzas (homocedasticidad) ya que todos los valores de la columna 'Sig.' son mayores que 0,05. Partiendo de estos resultados para llevar a cabo el contraste de medias utilizaremos los datos de la Tabla 4. Los datos indican que a un nivel de significación del 5%, tenemos que aceptar la hipótesis nula de igualdad de medias ya que los valores de la columna 'Sig. (bilateral)' son mayores que 0,05, luego llegamos a la conclusión de que para los niveles de 3º,

4º y 5º de Primaria no existen diferencias entre las poblaciones de 1975 y la de 2001.

En cuanto a los niveles educativos de 6º de Primaria y 1º de ESO, aunque también hemos obtenido que no existen diferencias entre las poblaciones actual y antigua sería conveniente acompañar el estudio anterior de una prueba no paramétrica para ver si obtenemos resultados similares. Concretamente aplicaremos la prueba U de Mann-Whitney, fiándonos en este caso de los resultados ofrecidos por ella ya que al haber considerado para cada nivel educativo solamente los ítems que el alumno puede resolver en dicho nivel, los datos no están tan dispersos.

Tabla 5

*Prueba U de Mann-Whitney. Estadísticos de contraste<sup>a</sup>*

	U de Mann-Whitney	W de Wilcoxon	Z	Sig. Asintót. (bilateral)
Sexto	1341,000	2937,000	-1,321	,189
Primero	1480,000	3371,000	-1,948	,051

a. Variable de agrupación: SELECT

Realizando la prueba al nivel de significación del 5%, llegamos a la conclusión de que para los niveles 6º de Primaria y 1º de ESO debemos aceptar la hipótesis nula de que no existen diferencias entre la población actual y la antigua ya que el valor '*Sig. asintót. (bilateral)*' es mayor que 0,05, resultado que coincide con el obtenido con anterioridad.

Por tanto, al haber realizado la comparación por niveles considerando únicamente los ítems correspondientes a cada nivel de instrucción se han llegado a las siguientes conclusiones:

Tabla 6

*Resultados corte curricular*

Nivel curricular	Existencia de diferencias entre las poblaciones de 1975 y de 2001
3º de Primaria	No
4º de Primaria	No
5º de Primaria	No
6º de Primaria	No
1º de ESO	No
2º de ESO	Sí



## BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, F., Azcárate, C., Berini, M., Borrás, E., Callejo, I., Carrillo, M., Colera, J., Contreras, M., Coriat, M., Del Blanco, I., Hernán, F., Juan, C., Mora, J.A., Morata, M., Orero, J.C., Ortiz, A., Pérez, R., Puig, L., Rico, L., Rubio, B., Salvador, A., Soler, M., Tormo, E. (1987), *Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90*. Valencia, España: Mestral.
- Andrés, M. C. (1952). Determinación experimental del rendimiento escolar. *Revista Española de Pedagogía*, 40, 539–550.
- Arnal, J. (1998). Elaboración y validación de un test de instrucción. Valencia, España: Promolibro.
- Arrieta, M. (1996). *Análisis causal para un diagnóstico individual del rendimiento en matemáticas 11–12 años*. San Sebastián, España: Universidad del País Vasco, España.
- Asensi, J. y Lázaro, A. (1979). *Vademecum de pruebas psicopedagógicas*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Assessment of Performance Unit. (1980). *Mathematical development primary survey report nº 1*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Assessment of Performance Unit. (1980). *Mathematical development secondary survey report nº 1*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Assessment of Performance Unit. (1981). *Mathematical development primary survey report nº 2*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Assessment of Performance Unit. (1981). *Mathematical development secondary survey report nº 2*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Beaton, A. (1997). (Ed.). *Third international mathematics and science study (TIMSS)*. Chesnut, MA: TIMSS.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Begle, E. (1979). *Critical variables in mathematics education*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America y National Council of Teachers of Mathematics.

- Begle, E. G. (1968). Curriculum research in mathematics. En H. J. Klausmier, H. J. y G. H. O'Hearn (Eds.), *Research and Development Toward the Improvement of Education* (pp. 44–48). Madison, WI: Denver Educational Research Services.
- Belmonte, E. y Pajares, R. (2004). *Marcos teóricos de PISA. La evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el proyecto PISA*. Madrid: Secretaría General Técnica y Ministerio de Educación y Ciencia.
- Berk, R. A. (Ed.). (1981). *Educational evaluation methodology. The estate of the art*. London: The Johns Hopkins University Press.
- Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht, Netherland: Kluwer.
- Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Leung, F. (2003). *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Bloom, B. S. (1975). *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires: Troquel.
- Bloom, B., Engelhart, M., Furst, E., Hill, W. y Krathwohl, D. (1971). *Taxonomía de los objetivos de la educación: Clasificación de las metas educativas*. Vol. 1. Alcoy, España: Editorial Marfil.
- Bordas, I. (1999). La evaluación de programas para la innovación. En B. Jiménez (Ed.). *Evaluación de programas, centros y profesores* (pp. 237–264). Madrid: Universitas.
- Brownell, A. (1956). Meaning and skill maintaining the balance. *The Arithmetic Teacher*, 18–25.
- Brueckner, L. y Bond, G. (1965). *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*. Madrid: Rialp.
- Campbell, D. T. y Stanley, J. C. (1963). Experimental and quasi-experimental desings for research on teaching. En N. L. Gage (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. Chicago, IL: Rand McNally.
- Cano, G. (Ed.) (2001). *Informe Educativo 2000. Evaluación de la LOGSE*. Madrid: Grupo Santillana.
- Carolino, C. (2000). *Currículos de matemáticas*. Sao Paulo, Brazil: FTD.
- Casanova, M. A. (1995). *Manual de evaluación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Castro, E. [Encarnación], Castro, E. [Enrique], Rico, L., Valenzuela, J., García, A., Pérez, A., Serrano, A., González, E., Sevilla, J., Gutiérrez, J., Ibáñez, B., Miñán, A., Morcillo, N., Segovia, I., Tortosa, A., Fernández, F., Tamayo, R., Torres, C. (1995). *Resolución de problemas en el tercer ciclo de E.G.B. Seminario C.I.E.M. Memoria 86–87*. Granada, España: Departamento de

- Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada y Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
- Castro, E. [Encarnación], Rico, L. y Castro, E. [Enrique] (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.
- Castro, E. [Encarnación]. (1975). *El cálculo aritmético en la E.G.B.* Tesina de Licenciatura no publicada. Universidad de Granada, España.
- Castro, E. [Encarnación]. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Castro, E. [Enrique]. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Licenciatura no publicada. Universidad de Granada, España.
- Castro, E. [Enrique]. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Cockcroft, W. (Ed.). (1982). *Mathematics counts. London: Her Majesty's Stationery Office*. (Versión española: *Las matemáticas sí cuentan*, 1985, Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia).
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2000). *Research methods in education. London: New Fetter Lane*.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2003). *Matemáticas Segundo de Educación Secundaria*. Madrid: Grupo Anaya.
- Coll, C. (1987). *Psicología y curriculum*. Barcelona, España: Laia.
- Cook, T. D. y Campbell, D. T. (1979). *Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings*. Chicago, IL: Rand McNally.
- Coriat, M. (1997). Cultura. Educación matemática y currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Crombach, L. J. (1963). Course improvement through evaluation. *Teachers College Record*, 64, 672–683.
- De Gil, F. (1999). *Indicadores educativos sobre entornos y procesos escolares*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- De la Haza, C., Marqués, M. y Nortes, A. (2003). *Matemáticas 2º de ESO*. Madrid: Santillana.

- De la Haza, C., Marqués, M. y Nortes, A. (2004). *Matemáticas 1º de ESO*. Madrid: Santillana.
- De la Orden, A. (1985). Hacia una conceptualización del proceso educativo. *Revista de Investigación Educativa*, 3(6), 271–283.
- De la Orden, A., Bisquerra, R., Gaviria, J. L., Jornet, J., López, F. A., Sánchez, J., Sánchez, M. C., Sierra, J. y Tourón, F. J. (1997). *Los resultados escolares. Diagnóstico del sistema educativo. 1997*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- De la Orden, A., Bisquerra, R., Gaviria, J., Gil, G., Jornet, J., López, F., Sánchez, J., Sierra, J. y Tourón, F. (1998). *Elementos para un diagnóstico del sistema educativo español. Un informe global, los resultados escolares*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- De Miguel, M. (2000). La evaluación de programas sociales. Fundamentos y enfoque teórico. *Revista de Investigación Educativa*, 18(2), 289–317.
- Del Rio, J., Hernández, I. y Rodríguez, M. J. (1992). *Análisis comparado del currículo de matemáticas (nivel medio) en Iberoamérica*. Madrid: Mare Nostrum Ediciones.
- Department of Education and Science. (1985). *Mathematics from 5 to 16*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Dewey, J. (1898). Some remarks on the psychology of number. *Pedagogical Seminary*, 5, 426–434.
- Díez, A. (2001). *Evaluación del rendimiento aritmético. Estudio y actualización de un instrumento*. Memoria de Tercer Ciclo no publicada. Universidad de Granada, España.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Palmer Press.
- Espinosa, E. (2005). *Tipologías de resolutores de problemas en álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Fernández Huertas, J. (1950). Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritmética. *Bordón. Revista de la Sociedad Española de Pedagogía*. Vol. 2(13), 5–15.
- Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Fernández, J. L. (1996). *Evaluación criterial en matemáticas*. Orense, España: Tempus.
- Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (1997). *Matemáticas 3*. Madrid: Grupo Anaya.

- Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (1997). *Matemáticas 4*. Madrid: Grupo Anaya.
- Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (1998). *Matemáticas 5*. Madrid: Grupo Anaya.
- Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (1999). *Matemáticas 6*. Madrid: Grupo Anaya.
- Ferrero, L., Jiménez, M. C. y Martín, G. (2004). *Primaria/Primer Ciclo: De punta en blanco. Matemáticas 1*. Madrid: Grupo Anaya.
- Ferrero, L., Jiménez, M. C. y Martín, G. (2004). *Primaria/Primer Ciclo: De punta en blanco. Matemáticas 2*. Madrid: Grupo Anaya.
- Freudenthal, H. (1975). Pupils' achievement internationally compared. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 127–186.
- Gairín, J. (1999). *Sistemas de representación de números racionales. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza, España.
- García Hoz, V. (1946). *Normas elementales de pedagogía empírica*. Madrid: Escuela Española.
- García Hoz, V. (1973). *Manual de test para la escuela*. Madrid: Escuela Española.
- García Llamas, J. L. (1995). Evaluación de programas educativos. En R. Pérez Juste, J. L. García Llamas y C. Martínez Mediano (Coord.), *Evaluación de programas y centros educativos* (pp. 45–60). Madrid: UNED.
- García, J. L., Buj, J., González, J., Ibáñez, J. R., De la Orden, A., Pérez, J. L. y Rodríguez, J. L. (1998). *Elementos para un diagnóstico del sistema Educativo. Un Informe global*. Madrid: Instituto de Calidad y Evaluación (INCE) MEC.
- Gil, F. (1999). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre la evaluación en matemáticas*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Gil, G., Fernández, J. y Rubio, F. (2001). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. La evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el proyecto PISA. Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos. Proyecto Pisa*. Madrid: Secretaría General Técnica y Ministerio de Educación y Ciencia.
- Gil, G., Fernández, J., Rubio, F. y López, C. (2000). *Proyecto PISA. La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: Un nuevo marco de evaluación. OCDE*. Madrid: Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

- Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.
- Gimeno, J. y Pérez A. (1983). *Enseñanza: Su teoría y su práctica*. Madrid: Akal.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Goñi, C., Alsina, C., Ávila, D., Burgués, C., Comellas, J., Corvalán, F., García, M., Hamn, C. y Serra, J. (2000). *Currículo de matemáticas en los inicios del Siglo XXI*. Barcelona, España: Grau.
- Gronlund, N. E. (1985). *Measurement and evaluation in teaching*. New York, NY: MacMillan Publishing Company.
- Grupo Cero. (1984). *De 12 a 16 una propuesta de currículo de matemáticas*. Valencia, España: Editorial Mestral.
- Guimaraes, H., Canavarro, M. I. y Silva, J. S. (1993). *Experiencias de inovação no ensino da matemáticas*. Lisboa: Universidad de Lisboa.
- Hart, K., Brown, M., Kuchemann, D., Kerlaker, B., Ruddock, G. y McCarty, M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray.
- Howson, G. (1979). Análisis crítico del desarrollo curricular en educación matemática. En H. Steiner y B. Christiansen (Eds.). *Nuevas tendencias en la enseñanza de las matemáticas*. Paris: UNESCO.
- Howson, G. (1983). *A review of research in mathematical education. Part C. Curriculum development and curriculum research*. Windsor, UK: NFER-NELSON.
- Howson, G. y Kahane, J. P. (1986). *School Mathematics in the 1990s. ICMI Study Series*. Cambridge, MA: Cambridge University Press. (Versión española *Las matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90, 1970*, Valencia, España: Mestral).
- Howson, G., Keitel, K. y Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Hoyles, C. (1988). From fragmentation to synthesis: An integrated approach to research on the teaching of mathematics. En D. A. Grouws y T. Cooney (Eds.). *Effective mathematics teaching*. Reston, VI: LEA-NCTM.
- Husen, T. (1967). *International study of achievement in mathematics. A comparison of twelve countries (FIMS)*. Uppsala, Sweden: Almqvist & Wiksells Bocktryckeri AB.
- Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. (Ed.). (2005). *PISA 2003 Pruebas de matemáticas y solución de problemas*. Madrid: Editor.

- International Association for the Evaluation of Education Achievement. (2000). *Third international mathematics and science study. (TIMSS)*. Madrid: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.
- Izquierdo, M. y Fortuny, J. M. (1996). *Elaboración de instrumentos de evaluación. Diagnóstico de los conocimientos de ciencias y matemáticas*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Jiménez, B. (Ed.). (1999). *Evaluación de programas, centros y profesores*. Madrid: Síntesis.
- Joint Committee on Standards for Educational Evaluation. (1988). *Normas de evaluación para programas, proyectos y material educativo*. México: Trillas.
- Joint Committee on Standards for Educational Evaluation. (1994). *The program evaluation standards: How to assessment evaluation of educational programs*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Joint Committee on Standards for Educational Evaluation. (1998). *Estándares para la evaluación de programas*. Bilbao, España: Mensajero.
- Joint Committee on Standards for Educational Evaluation. (2001). *Estándares de evaluación de personal. Cómo evaluar sistemas de evaluación de educadores*. Bilbao, España: Mensajero.
- Keitel, C. (1987). What are the goals of mathematics all? *Journal of Curriculum Studies in Mathematics*. 19(3), 393–407.
- Kilpatrick, J. (1979). Métodos y resultados de la evaluación con respecto a la educación matemática. En H. Sreiner y B. Christensen (Eds.). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*. Paris: Unesco.
- Kilpatrick, J. (1992). The history of research on mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: MacMillan. (Versión española: *Educación Matemática y Educación*, L. Rico, Trad., en J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, Eds., 1994, Madrid: Síntesis.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: The National Academic Press.
- Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago, IL: University Chicago Press.
- Lafourcade, P. (1977). *Evaluación de los aprendizajes*. Madrid: Cincel.
- Lambdin, D., Kehle, P. y Preston, R. (Eds.). (1996). *Emphasis on assessment reading from NCTM's school-Based. Journal*. Reston, VI: NCTM.
- Lapointe, A., Mead, N. y Philips, G. (1989). *Un mundo de diferencias. Un estudio internacional de evaluación de las matemáticas y las ciencias*. Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia.

- Lappam, G. (1991). *Profesional standards for teaching mathematics*. Reston, VI: NCTM.
- Lash, R. y Lamond, J. L. (1992). *Assessment of authentic performance in school mathematics*. Washington: AAAS.
- Lizasdain, L. y Joaristi, L. (1998). *SPSS para Windows Versión 8 en Castellano*. Madrid: Paraninfo.
- López del Castillo, M.T. (1982). Planes y programas escolares en la legislación española. *Bordón*. 34, 127–202.
- López, J. A. y Moreno, M. L. (2003). *Resultados de matemáticas del Third international mathematics and science study (TIMSS–Matemáticas)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Luján, J. (Dir.). (1981). *Elaboración de instrumentos para la evaluación de aspectos básicos del rendimiento escolar en 8º curso de E.G.B.* Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Lukas, J. F. y Santiago, K. (2004). *Evaluación educativa*. Madrid: Alianza Editorial.
- Mager, R. F. (1975). *Medición del intento educativo*. Buenos Aires: Guadalupe.
- Mansfield, V., Paterman, N. y Bednarz, N. (1996). *Mathematics for tomorrow is young children. International perspective on curriculum*. Dordrecht, Netherland: Kluwert Academic Publisher.
- Martínez, R. (1996). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid: Síntesis.
- Mathematical Sciences Educations Board. (1990). *Reshaping school*. Washington: National Academic Press.
- Maz, A., Torralbo, M. y Abaira, C. (2002). *Currículo y matemáticas en la escuela secundaria en Iberoamérica*. Córdoba, España: Universidad de Córdoba, España.
- Ministerio de Educación Nacional. (1955). *Cuestionarios nacionales para la enseñanza primaria*. Madrid: Dirección General de Enseñanza Primaria del Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1969). *La Educación en España. Bases para una política educativa*. Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1971). *Educación General Básica. Nuevas orientaciones. Segunda Etapa*. Madrid: Magisterio Español.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1989). *Diseño Curricular Base Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- Ministerio de Educación y Ciencia. (1989). Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1990). *Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre de ordenación general del sistema educativo*. (BOE nº 238, pp. 36705–36715). Madrid: Boletín Oficial del Estado.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1991a). *Real Decreto 1006/91 de 14 de junio que fija las enseñanzas mínimas para la educación primaria*. (BOE nº 152, pp. 21191–21193). Madrid: Boletín Oficial del Estado.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1991b). *Real Decreto 1007/91 de 14 de junio que fija las enseñanzas mínimas para la educación secundaria obligatoria*. (BOE nº 152, 17158–17207). Madrid: Boletín Oficial del Estado.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2006a). Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo (BOE nº 106, 17158-17207). Madrid: Boletín Oficial del Estado.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2006b). *Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria*. (BOE nº 5, pp. 677–773). Madrid: Boletín Oficial del Estado.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Disposiciones transitorias primera segunda y tercera de la Orden Ministerial EC1/221/2007* (BOE nº 173, 31491–31492). Madrid: Boletín Oficial del Estado.
- Ministerio de Educación. (1971). *Educación general básica. Nuevas orientaciones. Segunda Etapa*. Madrid: Magisterio Español.
- Ministerio de Educación. (1989). *Diseño curricular base, educación secundaria obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ministerio de Fomento. (1857). Ley de Instrucción Pública (Ley Moyano) de 9 de septiembre de 1857. Madrid: Ministerio de Fomento.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1985). *Assessment standards for school mathematic*. Reston, VI: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematic*. Reston, VI: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics. A quest for coherence*. Reston, VI: Autor.
- Niss, N. (1993a). *Cases of assessment in mathematics education: An ICMI study*. Dordrecht, Netherland: Kluwert.
- Niss, N. (1993b). *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht, Netherland: Kluwert.

- Nortes, A. (1993). Estudio comparativo del currículo de matemáticas (nivel medio en Iberoamérica). *Epsilon*, 25, 93–96.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2003). *The PISA 2003 assessment framework. Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris: OCDE.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2004). *Informe PISA 2003 Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana Educación.
- Ortega, T. (1999). *Temas controvertidos en educación matemática, ESO y bachillerato*. Valladolid, España: Universidad de Valladolid, España.
- Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Evaluación de un programa de formación*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Ortiz, M. (1992). *Rendimiento y dificultades en matemáticas de los alumnos de 8º de E.G.B. en Palencia y provincia*. Valladolid, España: Universidad de Valladolid, España.
- Pajares, R., Sanz, A. y Rico, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: El proyecto PISA 2000*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Pérez Juste, R. (2000). La evaluación de programas educativos: conceptos básicos, planteamientos generales y problemática. *Revista de Investigación Educativa*, 2, 261–287.
- Pérez, C. (2002). *Estadística Práctica con STATGRAPHICS*. Madrid: Pearson Educación.
- Provus, M. (1971). *Discrepancy evaluation. for educational program improvement and assessment*. Berkeley, CA: McCutchan.
- Puig, L. y Calderón, J. (1996). *Plan nacional de investigación educativa. Investigación en didáctica de las matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Real Academia de la Lengua Española. (1992). *Diccionario de la lengua española*. Madrid: Espasa Calpe.
- Reeve, W. D. (Ed.). (1941). *Arithmetic in general education*. Washington: NCTM–Yearbook.
- Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, G. Kilpatrick y L. Rico (Eds.). *Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Rico, L. (1996). Pensamiento numérico. Investigaciones en matemática educativa. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en educación matemática. XX Aniversario del Departamento de Matemática educativa del Centro de*

- Investigación y Estudios Avanzados del IPN* (pp. 27–54). México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Rico, L. (1998). Concepto de currículo desde la educación matemática. *Revista de Estudios del Currículo*, 1(4), 7–42.
- Rico, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el Proyecto PISA 2003. En ICNESE (Ed.), *PISA 2003, Pruebas de matemáticas y de solución de problemas* (pp. 11–25). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Rico, L. (2005b). Valores educativos y calidad en la enseñanza de las Matemáticas. En J. Asemil (Ed.), *Matemáticas: Investigación y Educación. Un Homenaje a Miguel de Guzmán* (pp. 158–180). Madrid: Editorial Anaya.
- Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre Matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, Número extraordinario. 275–294.
- Rico, L. (Ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias Matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rico, L. y Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Almendros, A., Cobo, F., Casares, M., Casares, A., Castro, E., Castro, E., Fernández, E., García, A., González, E., Gutiérrez, J., Ibáñez, B., Linares, J., Miñán, A., Moreno, A., Morcillo, N., Pérez, A., Roa, R., Segovia, I., Serrano, M., Sevilla, F.J., Tamayo, R., Torres, C., Tortosa, A., Urbano, M., Valenzuela, J., Vico, A. (1987). *Didáctica activa para la resolución de problemas. Sexto nivel de la E.G.B.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.
- Rico, L., Castro, E. [Encarnación], Castro, E. [Enrique], Coriat, M., Segovia I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Castro, E. [Encarnación], Castro, E. [Enrique], Fernández, F., Gil, F., Moreno, F., del Olmo, A. y Segovia, I. (1992). *Bibliografía de investigación sobre evaluación en matemáticas. Base de datos BIEM*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

- Rico, L., Castro, E. [Encarnación], Coriat, M., (1997). Revisión teórica sobre la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Castro, E. [Encarnación], Corpas, A., Fernández, A., González, J., Mesas, T., Saenz, O., López, F., Valenzuela, J. (1985). *Investigación Granada–Mats: Un análisis del programa escolar para el área de matemáticas*. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada, España.
- Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). *Currículo de Matemáticas para la Educación obligatoria en España durante el periodo 1945 – 2010*. Educación Siglo XXI Vol. 29 pp. 141–167.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en Secundaria. *Revista Suma*, 58, 7–23.
- Rico, L., Saenz, O., Corpas, A., Fernández, A., Torres, C., González, J. y López, F. (1973a). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión Matemática en el 5º nivel de E.G.B.* Volumen 1. Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., Corpas, A., Fernández, A., Torres, C., González, J. y López, F. (1973b). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión Matemática en el 5º nivel de E.G.B.* Volumen 2. Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1973). *Matemáticas Libro del Profesor 5º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1974a). *Matemáticas Fichas de Trabajo 5º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1974b). *Matemáticas Libro de Consulta 5º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1974c). *Matemáticas Libro del Profesor 6º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1975a). *Matemáticas Libro de Consulta 6º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1975b). *Matemáticas Fichas de Trabajo 6º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1975c). *Matemática Libro del Profesor 7º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1976a). *Matemática Libro de Consulta 7º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1976b). *Matemática Fichas de Trabajo 7º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.

- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1976c). *Matemática Libro del Profesor 8º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1976d). *Matemática Libro de Consulta 8º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1976e). *Matemáticas Fichas de Trabajo 8º nivel de E.G.B.* Granada: Autores.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1976f). *Matemáticas 1º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1976g). *Matemáticas 2º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión Matemática en el 1º nivel de E.G.B.* Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977a). *Guía del Profesor Matemáticas 1º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977b). *Guía del Profesor Matemáticas 2º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977c). *Matemáticas 3º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977d). *Guía del Profesor Matemáticas 3º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977e). *Matemáticas 4º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977f). *Guía del Profesor Matemáticas 4º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977g). *Matemáticas 5º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977h). *Guía del Profesor Matemáticas 5º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977i). *Matemáticas 6º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1977j). *Guía del Profesor Matemáticas 6º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1978a). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión Matemática en el 1º nivel de E.G.B. Segunda Fase* Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.

- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1978a). *Matemáticas 7º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1978b). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión Matemática en el 2º nivel de E.G.B.* Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1978b). *Guía del Profesor Matemáticas 7º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1978c). *Matemáticas 8º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1978d). *Guía del Profesor Matemáticas 8º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1979a). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión matemática en el 2º nivel de E.G.B. Segunda Fase.* Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1979b). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión matemática en el 3º nivel de E.G.B.* Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1980a). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión matemática en el 3º nivel de E.G.B.* Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1980b). *Estudio y adecuación de los contenidos indicativos del área de expresión matemática en el 4º nivel de E.G.B.* Granada: Actas de la Investigación Granada Mats.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1981a). *Matemáticas 2º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1981b). *Guía del Profesor Matemáticas 2º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982a). *Matemáticas 1º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982b). *Guía del Profesor Matemáticas 1º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982c). *Matemáticas 3º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982d). *Guía del Profesor Matemáticas 3º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982e). *Matemáticas 4º de E.G.B.* Madrid: Anaya.

- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982f). *Guía del Profesor Matemáticas 4º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982g). *Matemáticas 5º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1982h). *Guía del Profesor Matemáticas 5º de E.G.B.* Madrid: Anaya.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1985a). *Matemáticas 6º de E.G.B.* Madrid: Algaida.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1985b). *Guía del Profesor Matemáticas 6º de E.G.B.* Madrid: Algaida.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1985c). *Matemáticas 7º de E.G.B.* Madrid: Algaida.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1985d). *Guía del Profesor Matemáticas 7º de E.G.B.* Madrid: Algaida.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1986a). *Matemáticas 8º de E.G.B.* Madrid: Algaida.
- Rico, L., Saenz, O., López, F. y Valenzuela, J. (1986b). *Guía del Profesor Matemáticas 8º de E.G.B.* Madrid: Algaida.
- Rius, J. M. y Rocabet, E. (1989). Área de matemáticas. En F. Rivas y F. Alcantud (Eds.). *La evaluación criterial en la educación primaria.* Madrid: CIDE.
- Rivas, F. y Alcantud, F. (1989). *La evaluación caracterial en la educación primaria.* Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Robitaille, D. F. y Travers, K. J. (1992). *International studies of achievement in mathematics.* New York, NY: NCTM, MacMillan Publishing Company.
- Rodríguez, J. L., Ávila, M., Berruezo, R., Feijoo, A., Gargallo, B., Mallart, J., Pérez Díez, M. J., Pérez, M. J., Salgado, F. y Velasco, M. (1997). *Planes de estudio y métodos de enseñanza. Diagnóstico general del sistema educativo 1997* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Rodríguez, S. (1985). Modelos de investigación sobre el rendimiento académico. Problemas y tendencias. *Revista de Investigación Educativa*, 3(6), 284–303.
- Romberg, T. (1989). Evaluation: a coat of many colors. En D. F. Robitaille (Ed.). *Evaluation and assesment in mathematics educations.* Budapest, Hungary: ICME/6.
- Romberg, T. (1995). *Reform in school mathematics and arithmetics* Albany, NY: Suny Press.

- Romberg, T. y Carpenter, T. (1986). Research on teaching and learning mathematics. Two disciplines of scientific enquiry. En M. C. Wittrock (Ed.). *Handbook of research on teaching*. New York, NY: MacMillan.
- Romero, I. (1995). *Introducción al número real en secundaria*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Ruiz, F. (2000). *La tabla-100; Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Ruttman, L. (1984). *Evaluation research methods: A Basic guide*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Salinas, M. J. (2003). *Competencia matemática al finalizar los estudios de Magisterio. Explicación mediante un modelo causal*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Santiago de Compostela.
- Santos, D., García, P., Vázquez, C., Nevot, A., Gil, J. y Nortes, A. (1995). *Matemáticas 3º de ESO*. Madrid: Santillana.
- Santos, D., García, P., Vázquez, C., Nevot, A., Gil, J. y Nortes, A. (1995.) *Matemáticas 4º de ESO*. Madrid: Santillana.
- Santos, M. P., Canavarro, M. L. y Bocardo, J. (2005). *Educação matemática's caminhos e encruzilhadas*. Lisboa: BPM.
- Sarramona, J. (Ed.). (1985). *Curriculum y educación*. Barcelona, España: Ediciones Ceac.
- Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Scriven, M. S. (1967). The methodology of evaluation. En R. W. Tyler, R.M. Gagné y M.S. Scriven (Eds.). *Perspectives in curriculum evaluation*. Chicago, IL: Rand McNally.
- Segovia, I. (1987). *Estimación y cálculo aproximado en la E.G.B*. Memoria de Licenciatura no publicada. Universidad de Granada, España.
- Segovia, I. (1995). *Estimación de cantidades discretas, estudios de variables y procesos*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma: libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En A. Escolano (Dir.) *Historia ilustrada del libro de texto en España*. Madrid: Pirámide.
- Smith, D. E. (1905). Rêformes á accomplir dans l'enseignement des mathématiques: Opinion. *L'Enseignement Mathématique*, 7, 469-471.
- Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. (1998). *Desenvolvimento curricular em matemáticas*. Portoalegre, Portugal: SPCE.

- Steiner, H. (Ed.). (1980). *Comparative study of mathematics curricula. Change and stability 1960–1980*. Bielefeld, Germany: Institut für Didaktik der Mathematik. Universität Bielefeld.
- Steiner, H. y Christiansen, B. (1979). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática*. Vol. 4. París: UNESCO.
- Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Morata.
- Stenmark, J. (Ed.). (1991). *Mathematics assessment: Myths, models, good question and practical suggestion*. Reston, VI: NCTM.
- Stufflebeam, D. L. y Skinfeld, A. J. (1987). *Evaluación sistemática: Guía teórica y práctica*. Barcelona: Paidós y MEC.
- Suchman, E. A. (1967). *Evaluative research*. Nueva York, NY: Russel Sage Foundation.
- Suydam, M y Dessart, D. (1980). Aprendizaje de destrezas en R. Shumway (Ed.). *Research in mathematics education*. Reston VA.: NCTM.
- Taba, H. (1975). *Elaboración del curriculum*. Buenos Aires: Troquel.
- Tendrink, T. D. (1984). *Evaluación. Guía práctica para el docente*. Madrid: Narcea.
- Thordinke, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York, NY: MacMillan.
- Torralbo, J. (2001). *Análisis cientimétrico, conceptual y metodológico de las tesis en educación matemática*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Torregrosa, J. (1975). *Determinantes del rendimiento académico*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Tortosa, A., Morcillo, N., Fernández, F., Gutiérrez, J., Castro, E. [Encarnación], Castro, E. [Enrique], González, E., González, D., Pérez, A., Rico, L., Segovia, I., Serrano, M. y Valenzuela, J. (1996). *Evaluación en el aula de matemáticas. Seminario C.I.E.M.* Granada, España: Universidad de Granada, España.
- Tourneur, J. (1972). Taxonomie des objectifs cognitifs en mathematique: étude du modèle de la NLSMA. *Mathematica y Pedagogia*, 57, 341–357.
- Tyler, R. (1986). *Principios básicos del currículo*. Buenos Aires: Troquel.
- Tyler, R. W. (1950). *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Webb, N. (1992). Assesment of student's knowledge of mathematics: steps toward a theory. En D. A. Grows (Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, NY: MacMillan Publishing Company.

Wojciechowska, A. (1989). Curriculum reform in mathematics: Beyond the impossible revolution? *Journal of Curriculum Studies*, 21(2), 151–159.

Worth, J. (1988). *Preparing elementary school mathematics teachers. Readings from the arithmetic teacher*. Virginia, VI: NCTM.