UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS EN ÁLGEBRA ELEMENTAL A TRAVÉS DE PROBLEMAS VERBALES

Tesis Doctoral que presenta

Francisco Fernández García

Realizada bajo la dirección de los doctores

Luis Rico Romero **Antonio Fernández Cano**

GRANADA, 1997

Esta Tesis ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dentro del grupo de "Pensamiento Numérico" del II Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía FQM 0193 y parcialmente financiada por el Proyecto PS93-0195, "Evaluación de Conocimientos, Procesos y Actitudes en Matemáticas", subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT).

A mi esposa

y a mis hijas Patricia y Lucía

AGRADECIMIENTOS

A **Luis Rico**, que ha despertado en mí la satisfacción por el trabajo de investigación y que se ha empeñado en que esta tesis sea una realidad.

A **Antonio Fernández Cano**, por el interés que se ha tomado y por su valiosa aportación en la metodología de investigación aplicada en este trabajo.

A los miembros del **Seminario de Investigación CIEM**, muy especialmente a Enrique Castro, Encarna Castro e Isidoro Segovia, por la ayuda y afecto mostrados hacia esta investigación.

A los profesores y alumnos de los **Centros de Secundaria Aynadamar y Hermenegildo Lanz**, así como a los estudiantes de la **Facultad de Ciencias de la Educación de Granada**, por todas las facilidades que me brindaron en la toma de datos.

Deseo agradecer de forma general el apoyo y aliento recibido por los compañeras y compañeros del **Departamento de Didáctica de la Matemática** y en particular, por las aportaciones de documentación para este estudio, a Juan Díaz , Moisés Coriat y Pablo Flores.

PRÓLOGO

"No juzgues... Juzga, por el contrario; no ceses, conciencia infatigable, de evaluar tus acciones, tus pensamientos y los de los demás con la ayuda de tus instrumentos aún primitivos; utliliza lo mejor que tu puedas tu balanza a la vez demasiado y poco sensible, nunca en el fiel, equilibrada bien que mal mediante la aportación de incesantes escrúpulos. Juzga para no ser juzgado el peor de los seres, el cobarde de espíritu, perezosamente dispuesto a todo, que se niega a juzgar."

(Marguerite Yourcenar, Peregrina y extranjera)

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTACIÓN

CAPÍTULO 2: EL PROBLEMA A INVESTIGAR

CAPÍTULO 6: DISEÑO Y PROCEDIMIENTO

CAPÍTULO 7: ANÁLISIS DE DATOS. ESTUDIO EXPLORATORIO

CAPÍTULO 8: ANÁLISIS DE DATOS. ESTUDIOS CONFIRMATORIOS

CAPÍTULO 9: UN ESTUDIO DE CASOS PARA SEGUIMIENTO DE PROCESOS

CAPÍTULO 10: RESUMEN DE RESULTADOS

ANEXOS

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTACIÓN

1.1. Introducción.

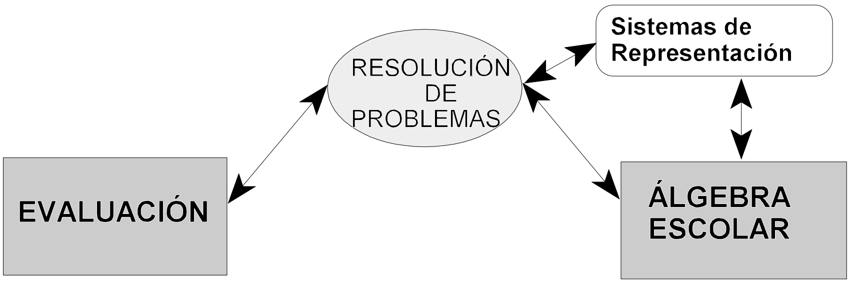
En este trabajo de investigación inciden varios campos o líneas de estudio en Didáctica de la Matemática. En primer término, la *Evaluación en Matemáticas* como tema crítico principal, que consideramos enmarcada por la *Teoría Curricular* en la que se fundamentan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio del Sistema Educativo, y de interés creciente para la comunidad de educadores matemáticos.

En segundo lugar, el *Álgebra Escolar* que contemplamos como herramienta para la manipulación simbólica de cantidades desconocidas y la determinación de sus valores a partir de las relaciones que guardan con otras cantidades conocidas; el aprendizaje del Álgebra Escolar necesita desarrollar un modo propio de pensamiento, llamado *pensamiento algebraico*, no exento de dificultades, que se manifiesta por el manejo significativo de un nuevo lenguaje.

Un tercer campo de estudio, la *Resolución de Problemas Verbales*, conecta con los dos anteriores. La Resolución de Problemas se muestra como modelo potente de tareas para la enseñanza y el aprendizaje y como instrumento adecuado para la evaluación en matemáticas.

En otro plano consideramos un cuarto campo de reflexión, que interrelaciona la Resolución de Problemas Verbales y el Álgebra Escolar. Nos referimos a los *Sistemas de Representación*, entendidos como aquellas notaciones simbólicas o gráficas mediante las que un sujeto expresa su pensamiento de manera organizada y, de este modo, trasmite su conocimiento sobre las matemáticas. Los sistemas de signos matemáticos mediante los que se pueden expresar relaciones de tipo algebraico, que se derivan de los problemas verbales, también tienen relación con la evaluación sobre este tópico.

De esta forma nuestro estudio tiene cuatro soportes principales, interconectados entre sí según distintos planos de relación en los que sustentamos nuestra investigación.



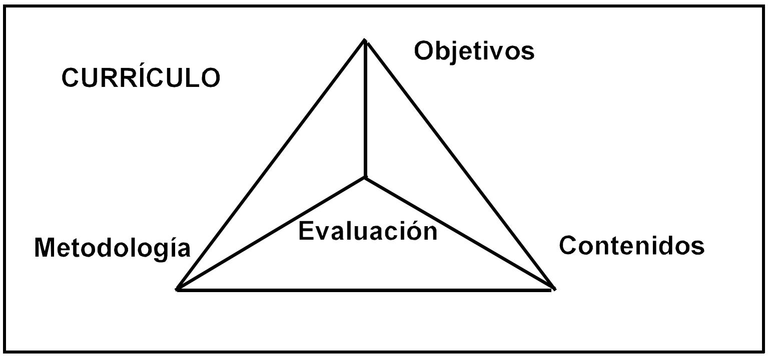
En este Capítulo nos proponemos presentar y desarrollar el marco teórico en que nos basamos para llevar a cabo una *propuesta de evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Para ello, abordaremos los cuatro campos de estudio mencionados y estableceremos las conexiones que dan cuerpo a nuestro trabajo; en consecuencia, deben quedar explícitos los fundamentos que sostienen la propuesta enunciada y que llevan a la elaboración y puesta en práctica de un instrumento de evaluación.

1.2. Sobre la Evaluación en Matemáticas.

1.2.1. Noción de Evaluación en Matemáticas.

El término *evaluación* tiene hoy en día multitud de usos en campos muy diversos, tanto técnico-científicos como sociales, culturales e incluso políticos.

Nuestro estudio se encuentra dentro del campo social y se refiere a la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas; más en particular, está relacionado con los criterios e instrumentos convenientes para valorar los efectos del aprendizaje que pueden mostrar los estudiantes como resultado de su actividad escolar. La reflexión sobre evaluación desde la Educación Matemática encuentra su marco de referencia dentro de los estudios sistémicos sobre el currículo de matemáticas, y considera la evaluación en conexión con las otras componentes curriculares: objetivos, contenidos y metodología (Rico, 1990).



Consideramos la *Evaluación en Matemáticas* como un campo específico de estudio e investigación, ineludiblemente conectado con el campo general de la evaluación del conocimiento pero con carácter propio, determinado por la especificidad del conocimiento matemático, lo cual permite su consideración diferenciada de la evaluación en otras áreas (Webb, 1992). Una teoría de la Evaluación en Matemáticas ha de describir, explicar y predecir algunos fenómenos y situaciones dentro del área, además de clarificar los términos y conceptos utilizados en relación con la valoración específica en matemáticas. La propia evolución histórica de la Evaluación en Matemáticas explica su emergencia como campo diferenciado y avala su situación singularizada actual (Romberg, 1989).

En la bibliografía especializada se establece una distinción entre la *evaluación* como juicio y la *valoración* como análisis comprensivo:

> "La consideración comprensiva del funcionamiento de un grupo o individuo en matemáticas o en la aplicación de las matemáticas, implica considerar la actuación del individuo o grupo en una variedad de contextos, recoger información y hacer inferencias acerca del conocimiento con el propósito de determinar su estado actual o bien guiarle hacia aprendizajes posteriores. Lo que interesa en este caso es levantar el mapa del conocimiento que un sujeto o grupo tienen sobre un determinado tópico o contenido, del modo más exacto posible, para su utilización didáctica. En el otro extremo tenemos

la evaluación como investigación sistemática de la valía o mérito de algún objeto o persona, para ayudar en la toma de decisiones que le afectan. Evaluar en este caso consiste en emitir un juicio sobre el aprendizaje de los alumnos que puede tener implicaciones muy variadas para su orientación escolar y su promoción en el sistema educativo" (Rico y col., 1993, p. 15).

En nuestro caso, y para este trabajo, el significado que asignamos al término **Evaluación en Matemáticas** es el de **Valoración mediante un análisis comprensivo del funcionamiento de un grupo o un individuo en matemáticas**, tal y como se ha descrito en el párrafo anterior, acepción que suelen utilizar los documentos normativos y de política educativa.

De ahora en adelante, y mientras no se indique lo contrario, cuando hablemos de evaluación nos referimos a este sentido señalado.

El método con el que se lleva a cabo una evaluación refleja cierta concepción subyacente de las matemáticas. Dentro de aquellos métodos que consideran las matemáticas como una colección de hechos, destrezas y conceptos, coincidimos con el *Método del Proceso* (Webb, 1992), que identifica los procesos de resolución de problemas, las destrezas de pensamiento de orden superior u otras estrategias de pensamiento como medios para producir resultados. Este método considera los procesos como resultados de la instrucción y, por lo tanto, objeto de evaluación. Este método dirige su atención hacia los procesos, los estima comparables con los productos y da a los procesos un estatus de resultado de la instrucción.

1.2.2. La Evaluación parte integrante de la instrucción.

El concepto de Evaluación en Matemáticas que hemos considerado, siguiendo a Webb (1992), se puede analizar desde cuatro perspectivas:

- Como herramienta utilizada por los profesores para conseguir evidencia y retroalimentación sobre lo que los estudiantes conocen y son capaces de hacer.

- Como expresión de aquello que se valora, en relación con lo que los estudiantes deben conocer, hacer o creer. Comunica lo que es importante conocer.

- Como medio de información para los gestores que deben tomar decisiones, los especialistas gubernamentales y otros.

- Como indicativo sobre la efectividad del sistema educativo como un todo.

Más importante que obtener una puntuación mediante una prueba, es determinar las habilidades de los estudiantes en una variedad de situaciones y tomar decisiones educativas de lo que éstos conocen y pueden hacer.

En efecto, la evaluación y la instrucción coexisten y se refuerzan mutuamente. La evaluación, como parte integrante de la instrucción, es continua: se desarrolla cuando el profesor procesa información sobre lo que el estudiante sabe y utiliza esa información para guiarlo en la instrucción. Evaluar implica algo más que aplicar tests o realizar pruebas; implica una variedad de medios para determinar lo que el estudiante conoce con la mayor precisión posible.

Continuando con la propuesta de Webb (1992), podemos considerar cuatro características de este modo de evaluación:

1.- El profesor comprende la estructura del contenido y utiliza esta estructura para definir expectativas de aprendizaje.

2.- El profesor es sensible a los procesos que los estudiantes utilizan para aprender durante las etapas del desarrollo y estimula los procesos disponibles para facilitar ese aprendizaje.

3.- La evaluación es un proceso en el cual, en primer lugar, se recoge información acerca del conocimiento del estudiante, acerca de la estructura y organización de este conocimiento y acerca de los procesos cognitivos del estudiante. En segundo lugar, hay que dotar de significado a esta información.

4.- La evaluación se emplea para tomar decisiones documentadas durante la instrucción sobre la base de la información actual disponible acerca de lo que un estudiante conoce y de lo que se está esforzando por conocer.

1.2.3. Consideraciones sobre la Evaluación en Matemáticas.

En el transcurso de la historia reciente, la Evaluación en Matemáticas en la Enseñanza Secundaria ha servido para proporcionar criterios de promoción, a lo largo del sistema escolar, y de selección de minorías cualificadas.

Sólo en fechas recientes se han llegado a poner en tela de juicio las funciones clasificadoras y de promoción de la evaluación en matemáticas: en el Simposio de Valencia (1987), la comunidad de educadores matemáticos españoles reflexionó sobre estas cuestiones en los siguientes términos:

> "La formalización, jerarquización y escisión de las matemáticas encaja bien con las funciones del sistema escolar: al separar a los alumnos, reproduce la separación social; al legitimar la diferenciación de los alumnos, legitima las jerarquías sociales; además, los distintos estatutos de las matemáticas puras y aplicadas permiten cualificar de forma diferenciada la fuerza del trabajo (por regla general mediante el establecimiento de currículos diferentes)" (Alonso y col., 1987; p. 50).

La evaluación, a lo largo de todas las fluctuaciones que se han generado en la historia reciente de la Educación Matemática, ha sido la componente curricular que mayores resistencias al cambio ha provocado en amplios sectores de la comunidad educativa (padres profesores e incluso estudiantes) y, por lo tanto, ha sido la menos alterada en todo el currículo de matemáticas.

En 1990 la *International Commission on Mathematics Instruction* impulsó la realización de un seminario internacional monográfico sobre evaluación en matemáticas. Los promotores de la convocatoria ya indicaban la existencia de una tensión creciente entre el estado de la enseñanza contemporánea de las matemáticas y las prácticas de evaluación tradicionales, de tal forma que se estaba ampliando el hueco entre ambas.

El ICMI Study *Assessment in Mathematics Education and its Effects*, celebrado en 1991 en Calonge, España, marcó un punto de partida para la delimitación de los problemas relacionados con la evaluación en matemáticas. En un documento previo, proporcionado por el Comité Organizador, Izard (1991) describe los efectos de la evaluación en relación con los estudiantes, entre los que destacamos:

> “... Consecuencias a largo plazo:

> 14. Influir en la habilidad de los estudiantes para retener y aplicar el material aprendido en contextos y formas diferentes.
> 15. Influir en el desarrollo del aprendizaje de habilidades y estilos de los estudiantes.
> 16. Influir continuamente en la motivación de los estudiantes, tanto en materias generales como particulares.
> 17. Influir en las autopercepciones de los estudiantes, tales como las de su autoeficacia como aprendices.”

La evaluación también condiciona los estilos de enseñanza y el funcionamiento de todo el sistema educativo:

> “ ... la evaluación, al prescribir realmente los objetivos de la educación, determina, en gran medida, las características de la enseñanza y del aprendizaje, lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden, lo que los profesores enseñan y cómo lo enseñan, los contenidos y los métodos, en otras palabras, el producto y el proceso de la educación y, en consecuencia, su calidad.” (Orden, 1985, pp. 521-537)

La influencia de la evaluación en el sistema de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares es una realidad. Una alteración de alguno de los elementos de la evaluación (tipos, métodos, criterios, instrumentos, valoraciones) determina un desequilibrio entre las restantes componentes del Currículo, lo cual obliga a ciertos cambios en los objetivos, contenidos y metodología, para recomponer el equilibrio.

De esta forma, aquellas investigaciones en las que se pone a prueba un instrumento de evaluación en matemáticas deberán tener en cuenta, además de la validez y fiabilidad del instrumento, la obtención de conclusiones acerca de:

- La eficacia de los instrumentos empleados y los procedimientos seguidos.
- Conocimiento sobre la evolución del conocimiento del estudiante, y su distanciamiento o ajuste a las previsiones conjeturadas.
- Determinación de actuaciones instruccionales que mejoren el aprendizaje del estudiante y la enseñanza impartida por el profesor.

- Clarificación de metas y objetivos relevantes para la enseñanza del tópico que se evalúa.

1.3. Los Problemas Verbales como instrumentos de Evaluación.

La evaluación, como parte integral de la instrucción, depende considerablemente del modo en que los profesores indagan el conocimiento de los estudiantes. El tipo de información que se logre obtener de los escolares dependerá considerablemente de las cuestiones que se pregunten. Diseñar situaciones y tareas de evaluación para un propósito particular puede resultar una actividad complicada (Webb, 1992).

La naturaleza de las matemáticas y los enfoques pedagógicos para su enseñanza-aprendizaje permiten considerar técnicas e instrumentos de valoración específicos en el área de las matemáticas (Rico y col., 1993, 1995). El avance en la Evaluación en Matemáticas se ha realizado históricamente integrando en una nueva conceptualización, de manera crítica, instrumentos y métodos ya empleados con anterioridad.

Los estudios para determinar nuevos criterios y para el diseño de nuevos instrumentos de evaluación deben permitir una práctica sobre la valoración del conocimiento matemático de los estudiantes, concordante con los cambios curriculares, que conlleve la emisión de juicios válidos y fiables sobre sus competencias en el área de las matemáticas.

Los instrumentos de evaluación concretan una opción sobre cómo valorar los logros o capacidades de los estudiantes en algún o algunos de los aspectos relativos al dominio de conceptos, procedimientos y actitudes en la aplicación de las matemáticas. Deben facilitar la recogida de observaciones encaminadas a emitir un juicio sobre la valía o mérito de una actuación, así como dotar del mayor grado de objetividad y precisión a los juicios emitidos.

A lo largo de su evolución en los últimos cien años, las pruebas de evaluación en matemáticas han adquirido estos rasgos (Romberg, 1989):

* constan de una variedad de cuestiones
* cada cuestión tiene un planteamiento preciso
* el formato responde a una variedad de tareas
* satisfacen diferentes niveles de complejidad
* hay nitidez en los criterios de valoración
* suponen consenso en el enjuiciamiento de las respuestas
* hay objetividad en los juicios emitidos
* tienen facilidad para expresar los datos sobre una escala
* tienen facilidad para la comparación de los resultados

Sin embargo, el informe Cockcroft (1985) concluye reconociendo que toda la tecnología sobre pruebas de evaluación y criterios de valoración elaborados hasta el momento resultan insuficientes para las necesidades que surgen de los nuevos currículos para la enseñanza de las matemáticas escolares, ya que los proyectos de renovación implican nuevos planteamientos sobre evaluación.

El planteamiento de dicho informe amplía el concepto de evaluación tradicional e incorpora nuevas técnicas e instrumentos para obtener información sobre el progreso y desarrollo en matemáticas de los escolares.

Hay, por lo tanto, una necesidad creciente de instrumentos de evaluación que proporcionen medidas basadas en las actuaciones que surgen en la puesta en práctica de un proceso, motivo por el cual la resolución de problemas ha cobrado gran importancia. En este particular, cada vez son mayoría los autores que proponen que las tareas de evaluación permitan interpretaciones alternativas o múltiples soluciones correctas, por lo que se diseñan tareas en formato abierto, con petición de explicaciones y razonamientos.

En esta perspectiva, los problemas verbales juegan un papel muy importante para la Evaluación en Matemáticas, en general, y en Álgebra en particular.

En efecto, Lamon y Lesh (1992) explican que la clave para el aprendizaje y la instrucción en dominios matemáticamente complejos resulta de dos perspectivas: una, la identificación de los procesos cognitivos que contribuyen a la competencia en un dominio; y otra, el análisis del pensamiento del sujeto para decidir el desarrollo de estrategias y, así, determinar cuándo el proceso cognitivo clave se ha adquirido. En otro orden de ideas, podemos identificar otra perspectiva en el establecimiento de contextos más eficaces para que el sujeto adopte los procesos que el profesor pretende que adquiera.

Las tareas que se basan en modelos de elicitación son un *intermediario* entre las dos primeras perspectivas. Los problemas verbales algebraicos son tareas que elicitan el conocimiento y ofrecen oportunidad de documentar las competencias algebraicas debido a la multiplicidad de formas de abordarlos, lo cual permite al sujeto expresar sobre el papel (son tareas fundamentalmente de papel y lápiz) su pensamiento algebraico.

De esta forma los problemas verbales algebraicos, que admiten múltiples tipos de representación para su resolución correcta y proporcionan al estudiante la oportunidad para que construya un sistema de representación propio más o menos sofisticado, contribuyen a la obtención de una visión más adecuada del desarrollo de las competencias del sujeto; posteriormente, y mediante la instrucción conveniente, será posible alcanzar concepciones más elaboradas y complejas, las cuales pueden continuar ejerciéndose mediante las mismas tareas.

La resolución de problemas verbales de las características descritas cumple, por tanto, con los fines de la evaluación en el sentido explicado.

La elección de contextos útiles, cercanos al entorno del escolar, en el cual se desarrollen las historias de los problemas verbales, favorecerá la elicitación del conocimiento y facilitará que el estudiante adopte los sistemas de representación del pensamiento algebraico que el profesor pretende.

1. 4. El Álgebra Escolar.

1.4.1. Enseñanza y aprendizaje del Álgebra Escolar.

En los *Elementos de Matemática* de Bails[1] (1779), en su prólogo, ya encontramos la siguiente declaración sobre la importancia del Álgebra, y su caracterización:

[1] BAILS, Benito (1779): Elementos de Matemática. Madrid: D. Joachin Ibarra, impresor de Cámara de S.M.

> "Entre los muchos descubrimientos con que puede honrarse la Matemática, el mas portentoso, quando no sea el mas fundamental, es sin duda alguna el Algebra. Haber inventado símbolos ó caracteres que representen todas las cantidades, sea la que fuere su naturaleza; dar reglas seguras para combinarlas y valuarlas, de modo que en un solo caso vengan cifrados otros infinitos, aunque se diferencien del primero en alguna circunstancia particular; trasladar á la clase de reales cantidades de suyo imposibles; calcular finalmente el mismo infinito, todos estos que parecen prodigios los executa el Algebra con igual acierto que facilidad." (Tomo II, p. I del Prólogo).

En nuestra época, documentos curriculares muy elaborados, como *Everybody Counts*[2] o los *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (NCTM, 1991), coinciden en que el Álgebra es una de las áreas críticas que la educación matemática necesita contemplar y que, por tanto, debe incluirse en la enseñanza regular de las matemáticas escolares, tratándola desde un punto de vista más amplio que "un curso corriente de Álgebra".

Para muchos jóvenes el Álgebra se percibe como una rama separada de las matemáticas, sin relación con lo que se aprende en los primeros niveles escolares. En estos niveles iniciales se debe de ayudar a los estudiantes para que establezcan conexiones entre conceptos matemáticos y construyan relaciones entre la Aritmética y el Álgebra.

El Álgebra y el pensamiento algebraico deben ser parte de la formación de todos los ciudadanos antes de su incorporación al mundo del trabajo, tanto de los que quieren estar bien informados como de todos los que desean ser usuarios inteligentes. El incremento creciente del uso de la tecnología requiere que las matemáticas escolares aseguren el desarrollo del pensamiento algebraico en los niveles elementales y en la Educación Secundaria. Las nuevas tecnologías presentan oportunidades de generar muchos ejemplos numéricos, de representar datos y de analizar patrones, generalizando la información que se maneja.

[2] Mathematical Sciences Education Board and National Research Council (1989): *Everybody Counts*. Washington D.C.

En el congreso de 1988 del NCTM[3] en Chicago, el *Mathematics Education Trust* (MET) *Committee* invitó a un grupo de profesores, interesados por la enseñanza de las matemáticas, a discutir este tópico y a sugerir caminos que cubrieran la necesidad de conseguir una amplia comprensión del Álgebra para toda la población estudiantil. La conclusión del MET Committee fue que el enfoque de una enseñanza del Álgebra hacia una población menos capacitada contiene también los valores principales para el total de la población, incluídos los intereses de aquellos estudiantes que siguen un curso de álgebra superior.

Fruto de esta reunión fue la publicación *Algebra for Everyone* (NCTM, 1990), documento en el cual se propone un currículo amplio desde los primeros niveles, de tal modo que, incrementando los grados de comprensión, se consiga que los menos capacitados logren alcanzar los resultados esperados. Los fundamentos del álgebra son necesarios para todos los estudiantes si pretenden tener éxito en el mercado actual de trabajo. Una sociedad industrial debe mantener un nivel alto de competencia, lo que implica la incorporación de personas con una mejor formación en matemáticas, en general, y en álgebra en particular.

De acuerdo con los informes elaborados por el NCTM (1990), todos los segmentos de la población, también los estudiantes menos capacitados, deben tener una base en álgebra, empezando por los niveles elementales de la escuela, para que puedan tanto seguir un curso formal de álgebra como estar capacitados para competir en el mercado de trabajo, donde los conceptos y estrategias algebraicas generales son necesarios.

1.4.2. El currículo del Álgebra Escolar.

Aceptamos que un currículo de Matemáticas es “un plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, cómo deben alcanzar los alumnos estos objetivos curriculares, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen su conocimiento, y el contexto en el que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje” (NCTM, 1991).

[3] NCTM = National Council of Teachers of Mathematics.

De acuerdo con Rico (1997), consideramos que en todo currículo, como plan de formación, hay cinco elementos clave: personas a las que hay que formar, tipo de formación, institución social que realiza la formación, finalidades que se quieren alcanzar y evaluación del plan.

El currículo de matemáticas debe reflejar el proceso constructivo del conocimiento algebraico, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo. La construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad debe culminar en la formalización y estructuración del conocimiento algebraico como sistema deductivo y no al contrario.

La enseñanza del álgebra debe contemplar el aspecto funcional y el formativo de manera indisociable. Los objetivos de progreso intelectual mediante desarrollo de capacidades cognitiva deben quedar conectados con el valor funcional que poseen los procedimientos para resolver problemas y para poner de manifiesto aspectos de la realidad no directamente observables. Esto justifica, en una línea no siempre coincidente con una visión tradicional, la presencia de los contenidos de álgebra en el currículo de las matemáticas escolares; también las características básicas de su enseñanza.

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra deben atender equilibradamente a distintos objetivos educativos:

a) Establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de utilizarse en una amplia gama de casos particulares y que contribuyan, por sí mismas, a la potenciación de las capacidades cognitivas de los estudiantes.

b) La aplicación funcional, que posibilite a los estudiantes valorar y aplicar sus conocimientos algebraicos fuera del ámbito escolar, en situaciones de la vida cotidiana.

c) La valoración instrumental, creciente a medida que el estudiante progresa hacia tramos superiores de la educación, y en la medida en que el Álgebra proporciona formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, herramientas para la simbolización y acceso al lenguaje científico.

El currículo de la **Educación Secundaria Obligatoria** viene especificado en el Real Decreto 1345/1991 de 6 de Septiembre, BOE nº 220 de 13 de Septiembre de 1991. Esta etapa también se conoce como “Etapa 12-16", que son las edades en que han de comenzar y finalizar la generalidad de los estudiantes.

El currículo básico del Álgebra en esta etapa ha de procurar los conocimientos considerados imprescindibles para satisfacer las necesidades algebraicas de un ciudadano adulto en la sociedad actual y futura. Por lo que en los contenidos básicos hay que otorgar un lugar prioritario a los procedimientos o modos de saber hacer, procedimientos de naturaleza muy diversa y que se refieren principalmente a:

“- Habilidades en la comprensión y en el uso de los diferentes lenguajes matemáticos, de la simbología y la notación específica de cada uno de ellos, así como la traducción de unos a otros (por ejemplo, entre representaciones gráficas y expresiones algebraicas).

- Las rutinas y algoritmos particulares, caracterizados por tener un propósito concreto y unas reglas de uso claras y bien secuenciadas.

- Los heurísticos o estrategias heurísticas, como las relativas a la estimación de cantidades y medidas, los procesos de simplificación y análisis de tareas, de búsqueda de regularidades y pautas, de expectativas de resultados, de comprobación y refutación de hipótesis.

- Las competencias relativas a la toma de decisiones sobre qué conceptos, algoritmos o heurísticos utilizar en una situación dada, en el planteamiento y solución de un problema y, en general, en el manejo conjunto y coordinado de las habilidades relativas a los anteriores grupos de procedimientos.”

En el cuarto y último curso de esta etapa obligatoria el área de matemáticas se configura en dos opciones en base al diferente acento que se ha de poner en algunos rasgos del área, según el énfasis se ponga en las matemáticas que, en su caso, se van a encontrar en niveles superiores, o bien se orienten más hacia su papel instrumental y funcional. Estas diferencias se traducen no sólo en contenidos, sino en buena medida en la forma en que serán tratados.

Entre los **Objetivos Generales** propuestos para la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, indicados en el Real Decreto citado, los objetivos número 1, 2, 4, 9 y 10 se refieren o están especialmente relacionados con la enseñanza del Álgebra.

Los **Contenidos** indicados para la enseñanza del Álgebra, recogidos en el Real Decreto, se presentan detallados dentro del Bloque Números y Operaciones.

En cuanto a la **Metodología**, el profesor debe elegir la orientación metodológica más adecuada a cada actividad de aula y combinarla adecuadamente con otras, haciendo uso de los recursos y materiales apropiados. Por lo que respecta a nuestra propuesta, queremos destacar las estrategias metodológicas basadas en la resolución de problemas, que ponen el énfasis en el proceso seguido por el resolutor más que en los resultados obtenidos.

Respecto a los criterios de **Evaluación**, indicamos aquellos que tienen relación con el Álgebra, junto a un breve comentario[4].

" 5. Resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización de las relaciones que puedan distinguirse en ellos y, en su caso, de la resolución de ecuaciones de primer grado."

Este criterio va dirigido a comprobar que el estudiante es capaz de utilizar las herramientas algebraicas básicas en la resolución de problemas. Para ello ha de poner en juego la capacidad de utilizar los símbolos, con las convenientes notaciones habituales, para el planteamiento de ecuaciones y resolverlas por algún medio fiable, que no necesariamente ha de ser la manipulación algebraica de las expresiones.

"6. Resolver problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (específico de la opción B)."

Se trata de garantizar, con este criterio, la adquisición de una cierta destreza en la utilización del lenguaje algebraico. El planteamiento y resolución de sistemas

[4] Los comentarios están tomados del documento *Curriculo de Matemáticas para Educación Secundaria Obligatoria*, elaborado por Luis Rico para la asignatura de "Didáctica de la Matemática" de la Licenciatura de Matemáticas (curso 1995-96) en la Universidad de Granada.

de ecuaciones requiere estar familiarizado con los conceptos de variable-incógnita, con las convenciones de notación y transformación algebraicas y con el significado de ecuación y sistema, así como conocer técnicas de resolución algebraica. El planteamiento de ecuaciones fuera de contexto no constituye una tarea con la que pueda valorarse este criterio.

"14. Utilizar estrategias sencillas, tales como la reorganización de la información de partida, la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y casos particulares o los métodos de "ensayo y error" sistemático, en contextos de resolución de problemas."

Este criterio se refiere a la manera de enfrentarse a la resolución de problemas, así como a alguna de las posibles estrategias que se pueden poner en práctica. Debería tenerse en cuenta la familiaridad del estudiante con los objetos de los que se trata, la disponibilidad de información explícita y no excesivamente abundante, o la facilidad de codificación u organización de la información a la hora de aplicar este criterio.

1.4.3. Pensamiento algebraico.

El proceso de aprendizaje del Álgebra lleva aparejado el desarrollo de una determinada forma de pensamiento: *el pensamiento algebraico*, que se diferencia del pensamiento aritmético de las etapas escolares anteriores, del pensamiento proporcional o del geométrico. En nuestro trabajo vamos a considerar el concepto de pensamiento algebraico descrito por Lins (1992) como "una forma de organizar el mundo a través de modelizar situaciones y manipular esos modelos de una determinada forma".

Lins (1992) define una serie de características del pensamiento algebraico, distinto del Álgebra, que enuncia de la forma siguiente:

Pensar algebraicamente es:

1) Pensar Aritméticamente

2) Pensar Internamente

3) Pensar Analíticamente

Seguimos las argumentaciones que ofrece Lins para aclarar estas características:

1) *Aritmeticidad*. “Aritmeticidad” significa “modelizar con números”, lo que no implica el uso de operaciones aritméticas en orden a producir las relaciones que constituyen el modelo. Sin embargo, los “problemas con números” pueden ser modelados también usando geometría o relaciones parte-todo, que son modelos no aritméticos.

2) *Internalidad*. Se refiere al tratamiento de las relaciones algebraicas (ecuaciones) a través sólo de las propiedades de las operaciones y de la relación de igualdad para modelizarlas en un contexto no-aritmético. El internalismo facilita la distinción entre soluciones internas dentro de un mismo Campo Semántico[5]. Una ecuación, por ejemplo, tiene distinto significado en un Campo Semántico de números y operaciones aritméticas, que en uno de relaciones parte-todo.

Supongamos $3x + 10 = 100$. En un Campo Semántico de números y operaciones aritméticas se puede razonar así: 100 se reparte entre 3x y 10, con lo cual a 3x le corresponde 90 y, entonces, $x = 30$.

Las operaciones aritméticas se tratan como *objetos* y pueden manipularse como herramientas para conseguir el efecto deseado.

La argumentación anterior no puede realizarse en las ecuaciones: $3x + 10 = 6$; en $1{,}8x + 10 = 75$; incluso en $100 - 3x = 87$.

Una solución que implica la producción de pensamiento algebraico sería, para la primera ecuación: $3x = 100 - 10 = 90$; $x = 90/3 = 30$

Las operaciones aritméticas implicadas tienen otro significado, están tratadas a través de sus propiedades y de la relación de igualdad. La solución es *interna* en un Campo Semántico no aritmético.

3) *Analiticidad*. En este apartado se recurre al concepto de análisis y síntesis que describe Pappo[6] en su libro VII (Vera, 1970, p. 991):

[5] *Campo Semántico* denota a un conjunto de significados generados por “una forma de conocimiento dado” (Lins, 1992).

[6] Pappo de Alejandría fue un matemático griego que se le sitúa entre los siglos III y IV d.C.

> “El análisis es el camino que parte de la cuestión que se busca, suponiéndola conocida, para llegar, por medio de las consecuencias que se deduzcan, a la síntesis de lo que se dio por conocido.
>
> Suponiendo obtenido, en efecto, lo que se busca, se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede, hasta que, volviendo sobre los pasos dados, se llega a una cuestión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios; y este camino se llama análisis porque es una inversión de la solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en su orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que buscamos; y este método es la síntesis.
>
> Hay dos clases de análisis: el propio de la investigación, que se llama teorético, y el que se aplica para encontrar lo que se propone, y se llama problemático. En el análisis teorético se considera establecido y verdadero lo que se busca, y después, apoyándose en las consecuencias deducidas y aceptadas como verdaderas, y respondiendo a la hipótesis, se llega a una cuestión ya fijada que, si es verdadera, también lo es la que se busca y la demostración será la inversa de este análisis; y si es falsa, falsa será también la que se busca.
>
> En el análisis problemático se supone conocida la proposición, y después, teniendo en cuenta las consecuencias deducidas y admitidas como verdaderas, se llega a una cuestión que si se puede realizar o ya está adquirida -lo que los matemáticos llaman datos- también se podrá realizar la proposición, y la demostración sera, como antes, inversa del análisis; y si se llega a una cuestión imposible, también lo será el problema.”

La distinción entre análisis teorético, cuyo objeto es buscar la verdad, y análisis problemático, cuyo objeto es encontrar alguna cosa o conjunto de cosas por descubrir, nos lleva a caracterizar la *analiticidad* del pensamiento algebraico como un “método para buscar la verdad”, ya que en el pensamiento algebraico *lo desconocido se opera como si fuera conocido*.

No obstante, la analiticidad no es suficiente para esta caracterización del pensamiento algebraico, sino que éste necesita de las tres componentes descritas. Las tres características son independientes.

La caracterización propuesta por Lins no implica que se dé pensamiento algebraico sólo en contextos simbólicos (literales u otros), pero sí implica que la notación simbólica es la más adecuada para producirlo: “Creemos que nuestra caracterización del pensamiento algebraico proporciona precisamente un marco en que las respuestas de los alumnos se pueden examinar y comprender, y que puede guiar la enseñanza del álgebra de una forma más coherente y fructífera”.

Se trata de no confundir el aprendizaje del álgebra con el desarrollo de habilidades para “hacer álgebra”.

El lenguaje algebraico simbólico constituye una poderosa herramienta intelectual, que no puede reducirse a una colección de reglas huecas de significado, o al mero desarrollo de estrategias de supervivencia escolar.

Las limitaciones que impone el aprendizaje y el manejo de los formalismos del nuevo lenguaje aconsejan una introducción graduada. En muchas ocasiones, por premura de tiempo, se recorre rápidamente el camino que va de las situaciones concretas, cercanas a la intuición, a las expresiones algebraicas y a las operaciones formales con ellas. Esto produce, generalmente, una tendencia hacia los automatismos, lo que conlleva relegar aspectos básicos del pensamiento algebraico que deben ser trabajos por los estudiantes antes de abordar las operaciones con expresiones algebraicas.

Arzarello, Bazzini y Chiappini (1995) expresan su convicción de que las situaciones de aprendizaje efectivo en Álgebra sólo se pueden desarrollar dentro de un *espacio-tiempo didáctico de producción y comunicación* (SP) apropiado. En esta situación, el estudiante puede producir pensamiento algebraico y aplicarlo en un contexto que le es familiar y, a su vez, el profesor puede analizar las diversas situaciones de aprendizaje en Álgebra que se generan.

1. 5. Álgebra Escolar y sistemas de representación.

1.5.1. Sobre la noción de representación.

El Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática: “Pensamiento Numérico" (del II Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía FQM 0193), en el cual se encuadra esta investigación, ha reflexionado detalladamente sobre la noción de representación y ha utilizado este concepto en estudios anteriores (Rico, Castro y Romero, 1996; Castro y Castro, 1997). El concepto de representación también se utiliza en el marco conceptual de este estudio; por este motivo hacemos una revisión de algunas de las ideas más importantes en las que nos sustentamos, que vamos a resumir.

Entre los rasgos generales que caracterizan el concepto de representación se encuentra, en primer lugar, la riqueza de interpretaciones que ha tenido este concepto a lo largo de la historia de la filosofía (Ferrater, 1981). Las diversas interpretaciones del concepto de representación asumen que esta noción implica dos entidades relacionadas pero funcionalmente separadas; precisamente es el carácter dual de este concepto lo que hace que sea una herramienta importante en la mayoría de los planteamientos epistemológicos dualistas, tanto en el paradigma idealista (conceptos intuidos e ideas en la mente) como en el paradigma realista (objetos reales y experiencias percibidas y organizadas). La dificultad de separar la noción de representación de su origen y fundamentación dual la encontramos en la postulación que hace Kaput (1987) sobre un mundo representado y un mundo de las representaciones cuando analiza las representaciones en matemáticas.

No es nuestro propósito entrar en esta discusión, sino dejar constancia de ella para ser precavidos en el manejo de este concepto. Un aspecto interesante, que se puede derivar de las consideraciones anteriores, es la idea de que no se puede reducir un concepto matemático a uno cualquiera de sus modos de representación; cada concepto o estructura matemática viene dado por varias representaciones.

Nuestra posición epistemológica la tomamos de Dancing y Sosa (1993), quiénes argumentan que *representación es todo aquello que puede evaluarse semánticamente*; y señalan que *el contenido de una representación es aquello que hace que la representación se pueda evaluar semánticamente*. Desde esta perspectiva las expresiones simbólicas, los enunciados, diagramas, gráficas, tablas y otras notaciones usuales en matemáticas son representaciones, y su caracterización viene dada por el significado que les asignamos.

Otro rasgo importante de nuestro planteamiento epistemológico lo ubicamos en el carácter sistémico de las representaciones matemáticas (Filloy y Kieran, 1989; Kaput, 1992, Duval, 1993). Asumimos una base fenomenológica para los conceptos y relaciones matemáticos (Freudenthal, 1983). Debido a que los conceptos matemáticos no se refieren a objetos o fenómenos físicos, sino a las relaciones entre objetos, fenómenos o conceptos, consideramos los conceptos y estructuras matemáticas como entidades abstractas que vienen expresadas mediante uno o varios sistemas de representación. Consideramos, al menos, dos niveles diferentes de representación: hechos específicos o conceptos particulares dados por símbolos específicos, y las relaciones entre conceptos que vienen dadas mediante enunciados o relaciones simbólicas.

La pluralidad de sistemas de representación tiene, pues, un doble origen: por diferencias en los sistemas de signos y relaciones básicas o por diferencias en las relaciones de segundo nivel consideradas.

Hasta este momento no hemos considerado una segunda dualidad característica de la noción de representación: la distinción entre representaciones internas y externas, que surge cuando se considera la actividad mental de los seres humanos. Los conceptos matemáticos vienen establecidos, en primer lugar, por sus diferentes usos y significados y, por tanto, mediante sus representaciones; cada concepto viene dado por extensión mediante su campo conceptual. Las representaciones son para nosotros, en este trabajo, externas y su carácter semiótico viene establecido por los signos, símbolos o gráficos utilizados así como por sus reglas de procesamiento.

1.5.2. Comprensión y sistemas de representación.

En Educación Matemática tiene gran interés el conocimiento acerca de cómo comprenden los estudiantes los conceptos matemáticos. Sobre la base de las manifestaciones externas producidas por cada uno de los alumnos particulares se pueden hacer inferencias sobre su comprensión. *La comprensión viene dada por las* *expresiones particulares de los escolares junto con las reglas y argumentos que utilizan en sus producciones y tareas*.

En este sentido interpretamos algunas ideas de Hiebert y Carpenter (1992): "Las matemáticas escolares son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes" (p. 67).

Se admite que los procesos cognitivos son aquellos que manipulan representaciones (Rico, Castro y Romero, 1996). En efecto, "para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas" (Hiebert y Carpenter, 1992, pp- 66-67).

La representación es una actividad esencial en matemáticas; los modos de expresión de conceptos y leyes matemáticas vienen dados mediante representaciones simbólicas o gráficas (Rico, Castro y Romero, 1996). El conocimiento matemático sólo es accesible mediante representaciones semióticas y, por lo tanto, los tratamientos matemáticos están relacionados directamente a tales representaciones.

Las representaciones de los objetos matemáticos son inherentes a los mismos, aunque no deben confundirse: lo que importa conceptualmente es el objeto matemático. La representación concierne al funcionamiento mismo del pensamiento y es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el trabajo *Semiosis y Noesis* de Duval (1993b), este autor distingue tres actividades cognitivas asociadas a los sistemas semióticos:

- La formación de representaciones identificables, mediante una selección de rasgos y datos en el contenido a representar.

- El tratamiento de una representación, que es la transformación en el mismo sistema en el que se ha formado, es decir, una transformación interna.

- La conversión de una representación, que es la transformación de dicha representación a otro sistema distinto, conservando la totalidad o sólo parte del contenido o, en su caso, ampliando el contenido de la representación inicial.

Duval (1993b) indica que, de las tres actividades, sólo las dos primeras se suelen tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas, ya que se considera que la conversión entre representaciones es evidente cuando se domina cada uno de los sistemas semióticos, lo que no siempre suele ocurrir. Sin embargo, la comprensión de los conceptos y procedimientos reposa sobre la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación, lo cual se manifiesta por la rapidez y naturalidad de la actividad cognitiva de conversión.

Se considera que la conversión entre representaciones es evidente, una vez que se dominan las actividades de formación y tratamiento en cada uno de los sistemas semióticos. Esto no siempre es así, pues surgen bloqueos y obstáculos para la compresión por la irreductibilidad entre los sistemas.

Tales coordinaciones no se presentan de modo natural en los procesos de aprendizaje y, desde luego, no suelen considerase en los programas de enseñanza. La tendencia usual enfatiza el carácter cerrado de cada uno de los sistemas de representación; no se destaca la consideración conjunta de los mismos objetos mediante sistemas semióticos diferentes.

No obstante, la ausencia de coordinación no impide cierta comprensión, que se produce para cada sistema aisladamente, mono-registro, lo cual dificulta y entorpece los aprendizajes posteriores. Esto suele ocurrir tanto en aquellos casos en los que hay un sistema simbólico que predomina, por ejemplo en el aprendizaje del álgebra, como en aquellos otros en los que hay varios sistemas que, formalmente, tienen el mismo estatus como puede ser el caso de la geometría.

1.5.3. Conocimiento algebraico escolar y sistemas de representación.

El proceso de adquisición del conocimiento en álgebra se reconoce generalmente por el manejo del lenguaje formalizado. El álgebra no se puede realizar sin una componente escrita, con sus reglas sintácticas: traducción de las estrategias verbales a las fórmulas o planteamientos escritos (Arzarello, Bazzini y Chiappini, -1995).

Comprender la funcionalidad del sistema de signos del álgebra es uno de los problemas didácticos más delicados de su enseñanza-aprendizaje. El uso correcto de las reglas algebraicas suele tener, en algunos casos, principalmente en la etapa escolar, mucho de rutina y poco de significación.

El fenómeno de la *comprensión* reúne, a la vez, la producción de varios sistemas de representación, el trabajo en el interior de cada uno y la coordinación entre ellos, para la aprehensión del objeto matemático que se representa. Es decir, la puesta en juego de cada sistema de representación de un objeto matemático y las transformaciones dentro de ese sistema junto con el paso a los demás sistemas, contribuyen a la comprensión conceptual del objeto matemático en cuestión.

Por lo tanto, podemos afirmar, extrapolando lo indicado por Rico, Castro y Romero (1996), que *un conocimiento más exhaustivo de los diversos sistemas de representación y de sus relaciones mejora la comprensión de los conceptos algebraicos y de su significado, lo que redunda en una mayor capacidad para comprender y abordar otras tareas algebraicas más complejas***.**

Cuando en la resolución de un problema verbal algebraico un estudiante produce un texto como resultado de su interpretación (traducción), necesita activar y poner de acuerdo a sucesivos campos conceptuales[7], estableciendo representaciones de distinta complejidad según la diversidad de los campos conceptuales activados.

En Wagner y Kieran (1989), aparecen varias preguntas acerca de la naturaleza aritmética o algebraica de los problemas verbales. Una de ellas es: ¿hay jerarquías cognitivas con respecto a los modos de representación (lenguaje natural, gráfico, numérico, simbólico, etc.,) que justifiquen un análisis en resolución de problemas algebraicos?

Nuestra respuesta es que resulta pertinente un estudio acerca de los diversos sistemas de representación que utilizan los estudiantes cuando resuelven proble-

[7] La noción de campo conceptual se encuentra en Vergnaud (1990). También consideramos la ampliación que propone González (1995) en la que un campo conceptual incluye:

a) unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados,
b) unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas,
c) un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

mas verbales algebraicos elementales, pues, con la selección de tareas adecuadas, se pone en juego y se explicita mejor el conocimiento que sobre Álgebra escolar poseen los estudiantes. Pero previamente será necesario establecer los posibles sistemas de representación en que se aborda una tarea algebraica, definirlos y categorizarlos.

En la literatura especializada (Wagner y Kieran, 1989; Puig y Cerdán, 1989, 1991; Filloy y Rubio, 1992; Fong y Chong, 1995; Meavilla, 1995; Palarea y Socas, 1995; Rojano, 1996), los sistemas de representación de tareas algebraicas se pueden clasificar, grosso modo, en tres grupos: los sistemas de representación *numéricos*, los *gráficos* y los *simbólicos*.

Para nuestro estudio, y teniendo en cuenta los sistemas de representación usuales y los dos niveles considerados en el punto 1.5.1 (sistemas de signos, reglas de procesamiento), consideramos tres de los sistemas básicos de signos: numéricos, gráficos y simbólicos, mediante los cuales establecemos cinco sistemas de representación diferentes que articulan este estudio. Estos sistemas proceden de una adaptación de los sistemas usuales que se encuentran en la literatura de investigación, realizada por nuestro grupo de investigación para conceptualizar la información obtenida; se trata pues de una caracterización fundada inductivamente.

Los cinco sistemas mencionados son:

Ensayo y error, cuyos signos son numéricos y cuyas relaciones se producen al conjeturar y probar sistemáticamente valores numéricos para las incógnitas.

Parte-Todo, cuyos signos también son numéricos (o tratados como tal) y cuyas relaciones se centran en la inclusión de clases, comparando el todo con la parte.

Gráfico, cuando los signos son gráficos (en sentido ampio) y las relaciones se sustentan en los propios gráficos.

Gráfico-Simbólico, caracterizado por el uso conjunto de signos gráficos y simbólicos, y las relaciones se explicitan tanto gráfica como simbólicamente.

Simbólico, en el que tanto los signos como las relaciones son simbólico-alfabéticas.

En el apartado 2.5.5 caracterizamos con detalle cada uno de los sistemas postulados.

El tránsito de la Aritmética al Álgebra está lleno de lagunas en el currículo escolar, y el conocimiento de los sistemas de representación que utilizan los estudiantes para resolver los problemas verbales algebraicos, debe ser una de las herramientas que permitan al profesor conocer estas lagunas y desarrollar estrategia de enseñanza y de aprendizaje.

Filloy y Rubio (1992) proponen que para la resolución de un problema verbal de aplicación en Álgebra se establezcan una serie de pasos, iniciándose con una interpretación numérica que después vaya acercándose al lenguaje algebraico: "En esta interpretación numérica ya va a estar seguramente subyaciendo la interpretación algebraica del problema" (p. 38).

Los sistemas de representación no simbólicos, como los numéricos (en particular el Ensayo-Error) y el sistema de representación de imágenes (físico-visual) o gráfico, aportan elementos de análisis en la resolución de problemas algebraicos, permitiendo, en muchos casos, una representación y resolución correcta del mismo. Sin embargo, la resolución de un problema o de una ecuación “por tanteo”, en general, se considera de importancia menor y se abandona enseguida, quizá para evitar el que los estudiantes sientan que todo problema matemático ha de tener una solución numérica.

Los sistemas de representación numéricos están en consonancia con ciertas preferencias aritméticas y pre-algebraicas que tiene el estudiante cuando comienza la secundaria. Las representaciones visuales pueden resultar más intuitivas y dotar de significado a las relaciones algebraicas. De esta forma se puede establecer un puente entre aritmética y álgebra, entre el pensamiento aritmético y el algebraico, a través de acercamientos numéricos y gráficos que desemboquen en los sistemas de representación simbólicos.

Estos sistemas de representación numéricos y gráficos necesitan de una mayor presencia en el sistema educativo, presentarlos organizados y sistematizados, y tener carácter autónomo, es decir, autosuficiente.

Las tareas de coordinación entre diferentes sistemas de representación son prácticamente inexistentes en el tratamiento curricular estándar del Álgebra Escolar. La armonización en la enseñanza y el aprendizaje de las diversas representaciones mejorará la comprensión y, por lo tanto, el conocimiento de los contenidos de álgebra.

1.6. Resolución de problemas y evolución del lenguaje simbólico.

1.6.1. Historia de la Matemática.

De acuerdo con Radford (1995), una de las aproximaciones que está emergiendo de las investigaciones en Educación Matemática se refiere al estudio sobre la construcción histórica del conocimiento matemático; estos conocimientos pueden ayudarnos para:

- Comprender mejor las dificultades experimentadas por nuestros alumnos, así como interpretar los errores y las conceptualizaciones incorrectas que aparecen en el proceso de aprendizaje específico de los contenidos matemáticos.
- Tomar decisiones más elaboradas concernientes al conocimiento que se ha enseñado; en particular, se está produciendo una nueva vía para abordar con nuevos recursos la organización y articulación de este conocimiento en la clase de matemáticas.

El estudio de la evolución histórica de los conceptos matemáticos resulta interesante para los programas de formación de los profesores y es importante para la propia investigación en didáctica de la matemática.

Los resultados de una visión didáctica de la historia de la matemática pueden conducir a nuevos caminos en las investigaciones en didáctica de la matemática y proporcionar un conocimiento más profundo de los conceptos generales incluidos en los currículos actuales. Esta perspectiva histórica se puede aprovechar, no sólo con intención motivadora, sino para elaborar modelos de enseñanza que tengan en cuenta los procesos históricos de adquisición de los conceptos y los obstáculos que se han tenido que superar.

Para esto una lectura de los "textos clásicos" puede resultar muy conveniente, sobre todo si se sigue una metodología que tenga en cuenta la triple dimensión funcional de las matemáticas: la correspondiente a los conceptos, a los problemas y a los procedimientos en la resolución de problemas. Es natural que un concepto se entienda mejor en el conjunto de las relaciones dinámicas que lo ligan con otros conceptos, en los problemas en los que se aplica, y en los procedimientos y estrategias que se elaboran para resolver esos problemas (Radford, 1995).

1.6.2. La resolución de problemas en la transición de la aritmética al álgebra.

Diversos autores han destacado el hecho de que el álgebra progresó como un método para resolver problemas en la época de pujanza económica de la Europa medieval (Paradís, 1993; Puig, 1993; Radford, 1995; Rojano, 1996). El álgebra se presentó como una regla (*regola*) desarrollada con la finalidad de resolver problemas verbales; en principio para resolver problemas de entretenimiento, no prácticos, pero enseguida se extendió a los problemas comerciales.

La resolución de problemas ha sido, por tanto, eje predominante en el desarrollo y consolidación del lenguaje simbólico algebraico. El paso de la aritmética al álgebra se produjo, principalmente, por la necesidad de tener un mecanismo potente para resolver problemas (inicialmente fueron problemas aritméticos y geométricos clásicos).

Cada familia de problemas tiene diferentes dificultades: algunas aparecen en términos de parametrización, otras en términos de sintaxis. El lenguaje algebraico permite abordar los problemas a través de sistemas de representación simbólicos que generalizan los métodos de resolución. El álgebra, posteriormente, evolucionó desde ser una herramienta al servicio de la resolución de problemas a ser un objeto matemático en sí, una rama autónoma de las matemáticas.

1.6.3. Implicaciones para la enseñanza.

El álgebra se desarrolla y afianza apoyada en una mejora de los aspectos simbólicos y operativos que generan formas de pensamiento propios. El Álgebra Escolar debiera tener por meta inducir determinadas aptitudes relacionadas con estas formas generales de pensamiento.

Las dos líneas que ha seguido el desarrollo del Álgebra, la línea simbólica y la de los métodos de resolución de problemas, pueden considerarse que representan lo conceptual y lo operacional, y deben ir fuertemente interrelacionadas en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra y, por tanto, en la construcción del pensamiento algebraico.

Sostenemos que el conocimiento sobre el desarrollo histórico de los conceptos algebraicos debe proporcionar una nueva perspectiva para su enseñanza. No se trata que los alumnos sigan los mismos pasos que los matemáticos antiguos, sino que se comprenda mejor la naturaleza del conocimiento algebraico por medio de su evolución histórica, lo cual se puede traducir en nuevas posibilidades para el aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo del álgebra se realizó desde la aritmética, por una parte, al tratar de encontrar solución a los problemas mercantiles (las escuelas de ábaco de la Italia medieval) y, por otra, a través de la geometría resolviendo problemas algebraicos de forma geométrica (Vièta). La enseñanza debe tener en cuenta y sacar provecho de esta evolución histórico-epistemológica para enfocar su aspecto operativo, y potenciar metodologías que permitan, a través de la resolución de problemas, facilitar el paso complejo desde sistemas de representación más intuitivos y con mayor carga aritmética hacia los sistemas simbólicos de representación, más sofisticados.

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA A INVESTIGAR

2.1. Delimitación del área problemática.

La elección de un área de investigación abre una serie de perspectivas que, necesariamente, no convergen en un solo problema. La revisión de la literatura especializada en cada campo conlleva, por lo general, la delimitación de un grupo de problemas. La preferencia por uno de ellos permite encauzar todos los esfuerzos para desarrollar una tarea investigadora concreta, que fructifique en realizaciones de interés para la comunidad preocupada, en este caso, por la Educación Matemática.

La delimitación de un problema de investigación es un proceso complejo que se lleva a cabo por aproximaciones sucesivas, que se van precisando según se alcanzan diferentes niveles de concreción.

Hemos de indicar que las fases en la realización de este trabajo, como en las de otras investigaciones, no se desarrollan linealmente en el tiempo sino que interactúan entre ellas y los resultados de unas influyen e intervienen en el desarrollo de las otras.

2.1.1. Primera aproximación: evaluación del Álgebra Escolar a través de problemas verbales algebraicos.

Nuestra área de indagación es la de la evaluación en matemáticas. Dentro de ella hemos elegido considerar la faceta de su aplicación práctica en el campo de las matemáticas escolares.

El período escolar que nos interesa es la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), de reciente implantación. El tópico específico considerado ha sido el del Álgebra para el período escolar de 12-16 años, que es el período donde todos los estudiantes inician el estudio del Álgebra Escolar de forma obligatoria. El instrumento evaluativo que se va a utilizar será una selección adecuada de ítems, en formato de papel y lápiz, a través de la resolución de problemas verbales. También nos interesa considerar el dominio que se mantiene sobre el Álgebra Escolar en los años posteriores de la Educación Post-Obligatoria.

De todos los posibles aspectos de las competencias en Álgebra Escolar, las competencias específicas que vamos a considerar en nuestro estudio, para su evaluación, están descritas en el apartado 2.1.3.

La población sobre la que se va a llevar a cabo el estudio, así como las características de la muestra que se va a seleccionar, las describiremos ampliamente en el Capítulo 5.

En España, la adaptación de la evaluación en matemáticas a la nueva situación de obligatoriedad para la etapa de 12-16 años plantea nuevas cuestiones organizativas, legales y técnicas. Entre estas cuestiones podemos señalar: la necesaria promoción continua entre cursos de un mismo ciclo, la falta de precisión en los criterios administrativos para llevar a cabo la evaluación, la contradicción entre el carácter abierto de la valoración habitual y la decisión final de promoción de los estudiantes, y la falta de instrumentos de evaluación suficientes y diversificados.

La falta de criterios precisos para esta nueva situación ha dado lugar a una serie de desequilibrios entre los principios enunciados en los documentos normativos y la puesta en práctica de los mismos, que se traducen en malestar de los sectores implicados en la evaluación y, en particular, en el profesorado.

En este trabajo nos vamos a centrar sobre la evaluación en la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) que, actualmente, está en período de implantación en el Sistema Educativo Español y, por lo tanto, en la Comunidad Autónoma Andaluza; se trata del período escolar que mayores atenciones y preocupaciones suscita en el colectivo de profesionales de la enseñanza.

También queremos conocer la competencia algebraica que permanece cuando la instrucción en Álgebra ha terminado, es decir, el poso de conocimientos que queda en aquellos estudiantes que no han seguido recibiendo una enseñanza específica en Álgebra. Para ello estudiaremos a su vez las competencias algebraicas en estudiantes universitarios que llevan varios años sin recibir instrucción en Álgebra, y que no han cursado asignaturas de matemáticas fuera de las obligatorias; estos estudiantes se suelen denominar comúnmente *estudiantes de letras*.

El reconocimiento cada vez mayor de la estrecha relación que existe entre un tema actual como la resolución de problemas y el lenguaje algebraico, pone de relieve el papel crítico que juega el Álgebra como lenguaje de modelización de las situaciones descritas en los problemas verbales que se proponen a los estudiantes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y a los del Bachillerato.

Nuestro estudio se delimita, inicialmente, mediante los siguientes descriptores:

- el tópico de estudio es la evaluación en el área de las matemáticas escolares,

- el contenido es la iniciación al Álgebra,

- la etapa de estudio seleccionada es la Educación Secundaria Obligatoria,

- los instrumentos que utilizaremos son pruebas de papel y lápiz,

- las tareas propuestas serán la resolución de problemas verbales.

2.1.2. Resolución de problemas algebraicos verbales.

Vamos a precisar con mas detalle nuestro campo de estudio. Caracterizar la evaluación en Álgebra Escolar mediante la resolución de problemas verbales no tiene aún la suficiente precisión. Es necesario profundizar en algunos puntos relativos a los problemas algebraicos y su resolución.

Para ello indicaremos algunas otras cuestiones que nos parecen básicas y que permitirán concretar mejor nuestro problema de investigación:

* *Evaluación de competencias en Álgebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.* La función social, ética, pedagógica y profesional de la evaluación implica también un trabajo de orientación de los escolares, que no se puede eludir (Giménez y col., 1997). Los criterios generales para la evaluación en el Área de Matemáticas están recogidos en el Real Decreto 1345 de 6 de Septiembre de 1991 (M.E.C., 1991), que establece el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. También hemos tenido en cuenta el Decreto 106 de 9 de Junio de 1992 de la Junta de Andalucía (Junta de Andalucía, 1992).

En ambos documentos los criterios de evaluación expresan unas consideraciones e intenciones teóricas generales distanciadas de su aplicación práctica; con ello queda abierto un campo a propuestas concretas de evaluación. Pretendemos, por tanto, establecer criterios precisos que permitan evaluar las competencias en Álgebra Escolar

* *Tipo de instrumentos más idóneos para evaluar la competencia en Álgebra escolar.* Los instrumentos usados más frecuentemente y que han mostrado mayor estabilidad frente a los cambios son las pruebas de papel y lápiz (Bell, Burkhardt y Swan, 1992). Estas pruebas deben ser a la vez abiertas y poco convencionales (Rico, 1995). Se considera conveniente que las tareas propuestas sean extensas mejor que cortas, con diversos modos correctos de resolución, cercanas al entorno escolar y que permitan, a la vez, el aprendizaje del alumno.

* *La realización de la evaluación del Álgebra Escolar a través de la resolución de problemas verbales.* En la actualidad, tanto en los documentos curriculares citados como en las propuestas de los innovadores e investigadores en Educación Matemática, se da un énfasis especial a la resolución de problemas no sólo como tópico de estudio para desarrollar sino como medio para llevar a cabo la evaluación.

Los problemas verbales tienen el potencial didáctico de ser intrínsecamente motivantes para los estudiantes; a partir de los problemas se puede dar sentido al uso del lenguaje algebraico. La resolución de problemas verbales algebraicos pone de manifiesto cuándo hay comprensión del Álgebra y un uso competente de sus sistemas de representación. Una selección adecuada de tipos de problemas puede darnos un amplio abanico de niveles de dificultad para los alumnos y, por tanto, posibilidades de estudiar las capacidades de los escolares sobre el Álgebra Escolar; igualmente permite conocer la influencia de los distintos tipos de problemas en el resolutor.

* *La determinación de problemas verbales algebraicos.* La línea divisoria que distingue un problema aritmético de uno algebraico no está claramente definida. Existen criterios diversos que no convergen en una determinación expresa. En nuestro caso hemos recurrido a la opinión de expertos externos, que desarrollamos en otro apartado posterior de este capítulo.

Los problemas verbales algebraicos que vamos a considerar tienen como característica básica que se pueden resolver simbólicamente, bien mediante una ecuación lineal, o bien mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

* *Fases que se pueden considerar en la resolución de un problema.* Existen diferentes clasificaciones de las fases de un problema verbal. Nosotros hemos tomado las fases definidas por Mayer (1986), pero adaptadas a las circunstancias de nuestro estudio. Estas fases las denominanos *Planteamiento*, *Ejecución* y *Desempeño Final*. Desarrollaremos y ejemplificaremos estas fases posteriormente.

* *Construcción de un instrumento válido, basado en la resolución de problemas verbales algebraicos, para evaluar la compentencia algebraica elemental.* Hemos de construir un instrumento de evaluación, en formato de prueba de papel y lápiz, cuyo contenido sea la resolución de problemas verbales algebraicos. Este instrumento deberá ser fiable y tener validez tanto de contenido como de constructo, para aplicarlo a una población estudiantil que haya cursado la enseñanza secundaria o similar.

2.1.3. Competencias que se van a evaluar y otros estudios.

Una vez construido el instrumento de evaluación y administrado a la muestra de estudiantes seleccionada, hemos de estudiar los resultados obtenidos. Para ello tenemos que delimitar qué competencias algebraicas se ponen de manifiesto en la resolución de los problemas del instrumento de evaluación.

Los problemas considerados serán problemas verbales algebraicos cuya resolución pueda ser mediante una o dos ecuaciones lineales. Entonces, las competencias que estudiaremos se relacionan con las tres fases que hemos propuesto anteriormente:

1. *Fase de Planteamiento: Sistemas de representación que utilizan los estudiantes para abordar los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación*

Al abordar un problema verbal algebraico el sujeto pone en juego distintas competencias cognitivas que le permiten abordar la tarea propuesta, expresar sus ideas y dejar un registro de ellas en el papel donde escribe; para ello ha de utilizar un sistema de representación externo, del cual se postula que es expresión de un sistema mental de representación. Nosotros hemos clasificado los sistemas de representación externos con los que se abordan la resolución de los problemas verbales algebraicos en tres grupos (Numéricos, Gráficos y Simbólicos) que dan lugar a cinco clases o categorías: Ensayo-Error (Numérico), Parte-Todo (Numérico), Gráfico simple, Gráfico-Simbólico y Simbólico. Más adelante describiremos sus características.

También queremos conocer la mayor o menor frecuencia en el uso de estos sistemas de representación para la resolución de problemas y su conexión con los tipos de problemas propuestos.

2. *Fase de Ejecución: Características del pensamiento algebraico que están presentes en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.*

Tomaremos las características, propuestas por Lins (1992) y descritas en el capítulo anterior, que determinan el pensamiento algebraico (aritmeticidad, internalidad, analiticidad) para saber cuáles se ponen en juego, y la influencia de los tipos de problemas en la movilización del pensamiento algebraico para su resolución

3. *Fase de Desempeño Final: Errores detectados.*

Pretendemos discriminar el tipo de respuesta que da el estudiante a los problemas propuestos, y no sólo la corrección o incorrección de la misma. Así, estudiaremos si la respuesta proporcionada es completa o no, si los errores detectados son debidos a la falta de atención, al dominio deficiente de los algoritmos o al predominio de errores conceptuales.

Complementariamente a estos puntos nos parece interesante obtener otros datos que relacionen las diversas competencias detectadas, entre sí y entre los distintos conglomerados que formen la muestra.

La utilización de uno u otro sistema de representación para la resolución de los problemas dará lugar a posibles agrupamientos. Conocer estos agrupamientos o tipologías, ya sea de problemas o de sujetos, según los sistemas de representación utilizados, deberá proporcionarnos información válida que implique un mejor conocimiento sobre las dificultades que presentan determinados tipos de problemas, además, dejará constancia de que puede haber diversas tipologías de resolutores y permitirá conocer sus características. Por ello, y conectados con el estudio de las competencias, vamos a llevar también a cabo los siguientes estudios complementarios.

4. *Determinación de diferencias, si existen, sobre competencias en las distintas fases (planteamiento, ejecución, desempeño final) de la resolución de problemas verbales algebraicos, entre los grupos de estudiantes según sean estudiantes de Secundaria o de Universidad.*

Cuando han pasado varios años desde que un estudiante recibe instrucción algebraica elemental y no ha vuelto a tener un contacto explícito con las matemáticas, en particular con el Álgebra, debe quedar un poso o fondo de aquel aprendizaje. Queremos conocer cuáles núcleos de conceptos básicos se mantienen en el tiempo y cómo se muestran mediante determinadas competencias en la resolución de problemas verbales del Álgebra Escolar. Pretendemos, pues, determinar si se producen diferencias significativas, en alguna o en todas las fases de la resolución de los problemas verbales, entre los estudiantes que están recibiendo en el momento presente instrucción en Álgebra elemental y los que hace tiempo la recibieron.

5. *Tipologías posibles entre los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación según el sistema de representación utilizado para abordarlos.*

También pretendemos conocer, para la muestra elegida, si se detectan tipologías entre los problemas propuestos. Dentro de las diversas técnicas de estudio que permiten agrupar ítems hemos optado por hacer un estudio de análisis de la varianza, agrupando los ítems en clusters por amalgamación o lincaje simple según los sistemas de representación utilizados. También pretendemos caracterizar estas agrupaciones.

6. *Tipologías posibles de sujetos según el sistema de representación utilizado para abordar los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación*.

Sostenemos que pueden considerarse tipologías de resolutores según los sistemas de representación utilizados para abordar los problemas. Para determinar estas tipologías utilizaremos, como en el caso anterior, un estudio de clusters del tipo citado y caracterizaremos las agrupaciones que se obtengan.

7. *Determinación, si existen, de diferencias, y en qué sentido, en cada una de las fases (planteamiento, ejecución y desempeño final) de la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento según las tipologías de sujetos, obtenidas*

de acuerdo a los sistemas de representación que han utilizado para abordarlos.

Queremos saber si existen diferencias significativas entre las agrupaciones de resolutores cuando resuelven un problema, comparando los diferentes clusters en las tres fases de la resolución de un problema verbal.

Las tipologías de resolutores se obtienen comparando los sistemas de representación utilizados para abordar los problemas. Si las diferencias que se determinen entre estos grupos implican que se obtienen mejores resultados para ciertas tipologías podremos estudiar si la utilización de determinados sistemas de representación proporciona más garantía para una resolución correcta de los problemas propuestos.

Por lo tanto, una delimitación más precisa de nuestro estudio se puede resumir en el siguiente cuadro:

- los problemas verbales algebraicos propuestos serán aquellos que se puedan resolver mediante una o dos ecuaciones lineales, con los que se construirá un instrumento de evaluación,

- se evaluarán las competencias en las tres fases, *planteamiento*, *ejecución* y *desempeño final*, de los problemas,

- se estudiarán los sistemas de representación y las características del pensamiento algebraico activado en la resolución de los problemas,

- estudiaremos si existen diferencias significativas sobre las competencias citadas entre los distintos conglomerados de la muestra,

- determinaremos tipologías posibles de problemas,

- determinaremos tipologías posibles de sujetos,

- estudiaremos si existen diferencias significativas entre tipologías de sujetos.

2.1.4. El área problemática dentro de la ciencia cognitiva.

El paradigma de la ciencia cognitiva, que participa del paradigma general interpretativo, asume que las actividades observadas se pueden analizar meticulosamente (visión micro) e inferir reglas o patrones que explicarían las variaciones observadas. Este sistema de reglas se puede expresar, entre otros, mediante un diagrama de flujo.

En el campo de la educación este paradigma se aplica en sectores específicos

(Shulman, 1989) como el estudio sobre opiniones críticas, creencias, actitudes o *la resolución de problemas*. Una de las críticas a este paradigma es su tendencia a ignorar el contenido específico del currículo y de las materias que se estudian (Shulman, 1989). Pensamos que tal deficiencia queda subsanada ampliamente en este trabajo.

Una técnica metodológica específica para este paradigma es el denominado *protocolo cognitivo* o técnica de elicitación (sonsacar suavemente) de respuestas en la recogida de datos (Shavelson, Webb y Burstein, 1988).

Nuestro trabajo cae en gran medida en el paradigma de la ciencia cognitiva, pero no renunciamos a utilizar los métodos estadísticos para estudiar los datos recogidos, relacionarlos e inferir consecuencias. Utilizamos, pues, tanto una metodología cualitativa como cuantitativa.

2.2. Cuestiones en estudio.

Vamos a establecer, a modo de interrogantes, los problemas específicos que hemos señalado en el apartado anterior como consecuencia de la delimitación del área problemática de nuestro trabajo. Dichos interrogantes establecen, conjuntamente, el problema de investigación objeto de este estudio. Indicaremos esquemáticamente qué características y qué elementos esenciales habrá que tener en cuenta, cuyo desarrollo posterior servirá para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Por lo tanto, los problemas específicos se delimitan articuladamente como sigue:

1º. ¿Qué criterios básicos son útiles para construir un instrumento que evalúe las competencias en Álgebra Escolar mediante la resolución de problemas verbales?

La construcción del instrumento atenderá a los siguientes criterios básicos:

- Deberá constar de una selección adecuada e idónea de ítems en forma de problemas verbales algebraicos. Serán tareas de papel y lápiz.

- Deberá responder a criterios de validez de contenido y de constructo.

- Deberá ser fiable para poder extender su aplicación.

2º. ¿Qué valores se obtienen al aplicar el instrumento evaluativo a una

muestra representativa de la población estudiantil?

Se obtendrán valores relativos a:

- Los resultados de la fase de planteamiento de los problemas.
- Los resultados de la fase de ejecución de los problemas.
- Los resultados de la fase de desempeño final de los problemas.
- Los resultados de relacionar las tres fases de los problemas.
- Los resultados de aplicar la caracterización del pensamiento algebraico a la resolución de los problemas.
- Los resultados referidos a los sistemas de representación con el que se ha abordado la resolución de los problemas.

3º. ¿Existen diferencias en competencias algebraicas entre los grupos de edad/nivel académico que forman la muestra?

Como ya hemos indicado en el apartado 2.1.1, y más adelante desarrollaremos en el Capítulo 4 al describir la población y la muestra, se pretende administrar el instrumento de evaluación fundamentalmente a dos estratos de población diferenciados en edad y en nivel académico. Uno de ellos será de escolares de último curso de Secundaria (16 años), y el otro será de estudiantes universitarios que no han seguido estudiando matemáticas (mayores de 19 años).

Por lo tanto, habrá que determinar si hay diferencias significativas, y en qué sentido, entre estos dos conglomerados:

- en la fase de planteamiento de los problemas.
- en la fase de ejecución de los problemas.
- en la fase de desempeño final de los problemas.

4º. ¿Qué tipologías de problemas y de resolutores se configuran con el instrumento?

Se pretende determinar si hay tipologías de:

- Problemas, según los sistemas de representación que se han utilizado para abordarlos.
- Sujetos, resolutores, según los sistemas de representación que han utilizado para resolver los problemas.

5º ¿Existen diferencias entre las distintas tipologías de resolutores res-

pecto a las tres fases en la resolución de los problemas verbales?

Tendremos que estudiar si hay diferencias significativas, y en qué sentido, entre las tipologías de resolutores:

- en la fase de planteamiento de los problemas.
- en la fase de ejecución de los problemas.
- en la fase de desempeño final de los problemas.

6º ¿Se confirman las características con las que se identifican las distintas tipologías de sujetos resolutores?

Será necesario hacer un *estudio de casos* que contemple:

- Elaboración de protocolos de actuación para cada una de las tipologías de sujetos.
- Elección de un número reducido de sujetos representativo de cada una de las tipologías de sujetos.
- Aplicar los protocolos a los sujetos y obtención de conclusiones.

2.3. Caracterización del problema de investigación.

Hemos delimitado el área problemática eligiendo como *tema* la evaluación en matemáticas y seleccionando el *tópico* del Álgebra Escolar en la *etapa* de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años). Para ello nos proponemos administrar un *instrumento* basado en *tareas* de papel y lápiz, cuyo *contenido* viene dado por problemas verbales algebraicos.

Los problemas verbales algebraicos que utilizaremos serán problemas resolubles mediante *una o dos ecuaciones lineales*. Además, para su resolución tendremos en cuenta tres fases: *planteamiento*, *ejecución* y *desempeño final* (o resultado).

Por ello, a la vista de las cuestiones específicas anteriormente planteadas, nuestro problema de investigación se propone:

1º. Establecer criterios para construir un instrumento de evaluación formado por un conjunto de cuestiones, en formato de problemas verbales algebraicos, que sea válido y fiable; para ello son necesarios procesos previos de selección, categorización y pruebas piloto de baterías de problemas, considerados adecuados para la finalidad propuesta por los expertos.

2º. Administrar el instrumento de evaluación a una muestra seleccionada de una población estudiantil formada por dos grandes estratos diferenciados en edad y en nivel académico, como se ha indicado anteriormente. De la aplicación del instrumento se obtendrán una serie de resultados relacionados con las fases, los sistemas de representación utilizados, el pensamiento algebraico movilizado y los errores producidos en la resolución de los problemas. Describiremos estos resultados y las relaciones que se puedan establecer entre ellos.

3º. Comparar los resultados obtenidos anteriormente entre los grupos o conglomerados de sujetos que constituyan la muestra, para observar si existen diferencias significativas y determinar en qué sentido.

4º. La elección de un determinado sistema de representación para la resolución de los problemas puede indicar que existen determinadas características de éstos que facilitan o dificultan su resolución mediante unos sistemas u otros. También puede que obedezca, muy probablemente, a la formación matemática u otras circunstancias del sujeto. Por esto creemos interesante conocer si es posible agrupar, por un lado los problemas del instrumento y por otro los sujetos, teniendo en cuenta el/los sistema/s de representación como indicativo de una representación mental o forma de interpretar las relaciones algebraicas.

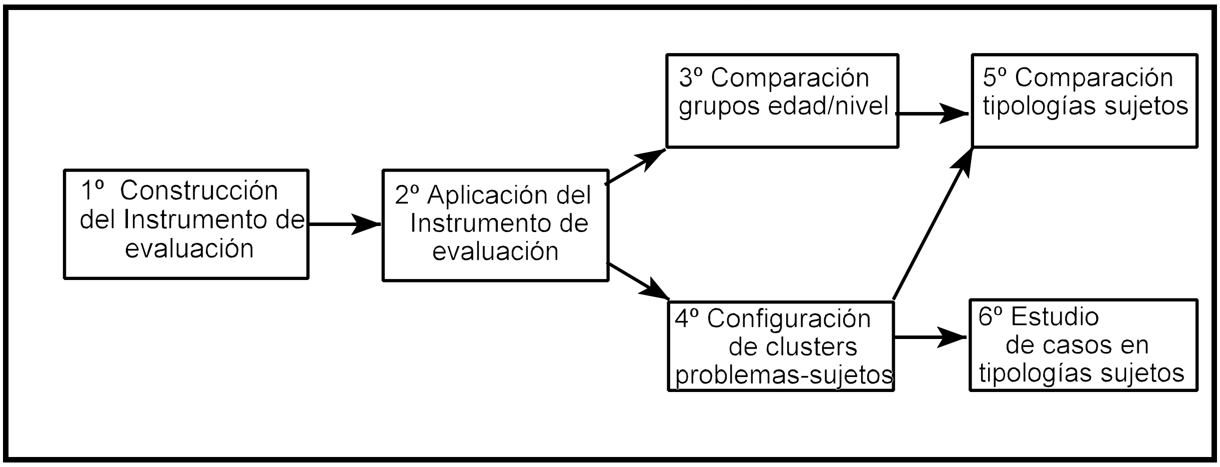
Utilizaremos un estudio de clusters para determinar si existen estas agrupaciones y describiremos sus características.

5º. Si encontramos diferentes tipologías de sujetos, por los sistemas de representación utilizados en la resolución de los problemas, estudiaremos las relaciones que hay entre ellos y si existen diferencias significativas entre ellos en cuanto a las distintas fases consideradas para la resolución de los problemas verbales.

6º. Para confirmar las características de los sujetos que conformarían las agrupaciones obtenidas, será necesario hacer un estudio más detallado, para lo que se tomarán algunos casos representativos de cada agrupación y se hará un estudio clínico con ellos. Se pondrán a prueba las caracterizaciones de las tipologías obtenidas contrastándolas mediante entrevistas individuales que confirmen o contradigan nuestras conjeturas iniciales.

El esquema siguiente resume el problema de investigación relacionando cada uno de los problemas específicos:

Problema a investigar



Este estudio se propone mostrar que, para valorar adecuadamente el conocimiento sobre Álgebra de los escolares en Educación Secundaria Obligatoria mediante resolución de problemas verbales, es necesario caracterizar las tareas, mejorar los instrumentos y profundizar en la determinación de criterios de evaluación. Nuestra investigación queda resumida así:

Sostenemos que al estudiar las actuaciones de los escolares en tareas de resolución de problemas verbales algebraicos y considerar, coordinadamente, los siguientes tipos de datos:

i) competencias mostradas y errores detectados en las distintas fases de resolución de los problemas; ii) sistemas de representación utilizados y su caracterización en términos de variables de las tareas; iii) rasgos del pensamiento algebraico movilizado por los escolares,

se produce un avance en el conocimiento sobre evaluación del Álgebra Escolar que permite alcanzar una caracterización más precisa de las tareas e instrumentos, una determinación de diferentes modos de interpretación y comprensión de las tareas por parte de los escolares así como de sus dificultades, y una mayor concreción para los

criterios de evaluación.

El estudio se complementa con un análisis de la estabilidad de las características y tipologías de resolutores que determinan los datos anteriores transcurridos al menos 3 años desde la conclusión del estudio del Álgebra Escolar. Las hipótesis elaboradas sobre los datos obtenidos en una muestra intencional tratan de confirmarse mediante un estudio de casos.

2.4. Interés general del estudio.

Desde las investigaciones en Educación Matemática y los estudios sobre diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas encontramos tres enfoques que reafirman el interés del estudio que presentamos. Pasamos a exponer la conexión que tiene nuestro trabajo, principalmente con las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje del Álgebra, con las normativas sobre evaluación y con la elaboración de instrumentos de evaluación.

2.4.1. Documentos de expertos para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

La revista de Educación Matemática *Teaching Children Mathematics*, en su número de Abril de 1995 (Volumen 1, Nº 8), hace una llamada a la comunidad científica para recabar manuscritos de investigación sobre el siguiente tema: "*Algebraic Thinking: Opening the Gate*" ("Pensamiento Algebraico: Abriendo la Puerta")

Esta revista, especializada en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria, dedica particular atención al tema del pensamiento algebraico en los niños; sobre todo muestra un interés especial por aquellos razonamientos y argumentaciones que utiliza el pensamiento algebraico antes de alcanzar una expresión formal. Para ello plantea algunas preguntas, de las que hemos extraído las que consideramos relacionadas con nuestro estudio:

"* ¿Qué se entiende por pensamiento algebraico?

* ¿Es similar aprender álgebra que aprender un lenguaje?

* ¿Cómo hacer que el contenido del pensamiento algebraico se relacione con el contenido del pensamiento aritmético?¿Qué tienen de similitud y qué de diferencia?

* ¿Cómo puede identificar un profesor tareas que merezcan la pena y que conduzcan al pensamiento algebraico, como son el usar representaciones múltiples de situaciones y construir modelos para comprender la equivalencia de diferentes representaciones?

* ¿Cómo pueden los profesores ayudar a los estudiantes a escribir sus propias expresiones significativas y ecuaciones?

* ¿Qué tipos de problemas son apropiados, particularmente procedentes desde disciplinas no matemáticas?

* ¿Cómo ayudan los materiales concretos, las ideas verbales, las tablas y los gráficos a los niños chicos a expresar patrones y relaciones?

* ¿Cómo sabemos que los estudiantes han llegado a ser "pensadores algebraicos"?

Comprobamos que existe un interés explícito por caracterizar el pensamiento algebraico, diferenciarlo del pensamiento aritmético, determinar tareas y materiales que estimulen su desarrollo en los escolares y precisar criterios que permitan valorar la presencia activa de este tipo de pensamiento. También se muestra la preocupación por elaborar un currículo apropiado, tanto en relación con los contenidos como con los objetivos y la evaluación. La metodología, en estos niveles, adquiere una atención especial sin olvidar la preparación del profesor.

La importancia de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra se puede constatar también por el interés demostrado en reuniones internacionales relacionadas con la investigación en Educación Matemática. Este es el caso de las Conferencias anuales del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), o los Congresos cuatrienales *International Congress of Mathematics Education* (ICME), convocados por el *International Conference for Mathematical Instruction* (ICMI), cuyos encuentros durante el año 1996 se realizaron en España (Valencia y Sevilla respectivamente).

En efecto, otro foco de investigación en Álgebra Escolar lo ha desarrollado el

Grupo de Trabajo “Procesos y Estructuras Algebraicas” del PME, creado en 1990 en México y preocupado por conseguir avances en temas como el pensamiento algebraico o sobre la enseñanza del Álgebra en el ámbito escolar. En el transcurso del 19º encuentro del PME, celebrado en Recife (Brasil) en Julio de 1995, los miembros del grupo llegaron a una serie de conclusiones sobre la práctica de la investigación en Álgebra. Vamos a citar aquellas ideas que juzgamos más relevantes para nuestro trabajo:

> “ * Al intentar caracterizar el pensamiento algebraico y comprender mejor la transición de la Aritmética hacia el Álgebra y viceversa, la investigación ha puesto el énfasis en las diferencias esenciales entre estos dos dominios. No obstante, es importante que los profesores (y los investigadores) sean conscientes del hecho de que ambos tipos de pensamiento coexisten necesariamente en las mentes de los niños y en la práctica de las clases de Álgebra.
>
> * Muchos estudios de Álgebra se han centrado en los errores y en los conceptos equivocados. Este empeño lleva a descuidar el papel central de lo que las producciones de los niños no expresan sobre sus formas de pensamiento (no necesariamente en términos de una actuación correcta o incorrecta). Es necesario escuchar a los chicos.
>
> * Si es o no importante (y posible) usar problemas sobre situaciones “reales” en la enseñanza del Álgebra es una discusión que está teniendo lugar en la comunidad de investigadores. La controversia surge de la idea de que el Álgebra no debe considerarse sólo como una herramienta para resolver problemas, sino también como parte del conocimiento matemático que han producido los objetos matemáticos. Desde esta posición, la recuperación del aspecto último del Álgebra debería llegar a ser igualmente un objetivo para una enseñanza de ésta.
>
> * Otra discusión que está teniendo lugar en la comunidad investigadora es si es posible hablar de pensamiento algebraico sin la presencia del simbolismo algebraico. Los resultados de estas discusiones pueden tener fuertes implicaciones en las concepciones de los profesores sobre el Álgebra y

> su práctica en la clase". (Documento elaborado por el Grupo de Trabajo "Procesos y Estructuras Algebraicas" en el 19º PME. Sin editar).

La lectura de estos puntos debe darnos una idea de la importancia que está adquiriendo la investigación sobre Álgebra escolar en estos últimos años. El paso de la Aritmética al Álgebra es actualmente uno de los tópicos de estudio más frecuente en la comunidad de investigadores en Educación Matemática. Los fenómenos de comprensión implicados en el paso de la Aritmética al Álgebra suponen el dominio progresivo de un lenguaje matemático complejo de manera significativa, lo que conlleva grandes dosis de abstracción y de dominio simbólico. La importancia de este lenguaje no es despreciable ya que encierra las claves de la comunicación científica y, cada vez más, la comunicación social y cultural de una sociedad avanzada.

Aunque hay acuerdo en considerar el Álgebra como objeto de una enseñanza, que necesita desarrollarse desde una disciplina no formal hasta una estructura abstracta no está claro, sin embargo, cómo controlar didácticamente el proceso de abstracción que subyace en esta evolución.

Otro de los focos que llama la atención del Grupo de Trabajo de Procesos Algebraicos y Estructuras del PME, es la resolución de problemas algebraicos. En particular, en el 20º PME, se ha planteado el papel de los problemas "reales" en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra. En particular se han discutido cuestiones como las siguientes:

* ¿Qué es un problema "real"?¿Puede ser caracterizado por su contexto? ¿Puede serlo por su estructura?
* ¿Qué hace que un problema sea difícil de resolver mediante el Álgebra?
* ¿Cómo se introduce mejor el Álgebra, a través de problemas "reales" o de problemas "no-reales"?
* ¿Cuál es el papel de los problemas "no-reales"?¿Cuándo usarlos?

Hemos constatado que, tanto en el ámbito nacional como internacional, se están produciendo gran cantidad de trabajos de investigación sobre la enseñanza del Álgebra desde finales de los años 70; este interés lo hemos detectado en diversos lugares, que abarcan prácticamente la totalidad de los países culturalmente avanzados, lo cual es un índice de la preocupación general por este tema.

2.4.2. Documentos normativos para la evaluación en matemáticas.

El Real Decreto 1345 de 6 de septiembre de 1991 (M.E.C., 1991) establece el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en todas las áreas y, en particular, el currículo del área de matemáticas. Dicho currículo está estructurado en cuatro partes: 1) introducción, 2) objetivos generales, 3) contenidos y 4) criterios de evaluación. Los criterios de evaluación generales para la Enseñanza Secundaria Obligatoria que se indican tienen una orientación genérica carente de propuestas prácticas, con más carga de intencionalidad que de operatividad.

No obstante, es importante destacar que los criterios propuestos en este documento para evaluar en el área de matemáticas dan un énfasis especial a la resolución de problemas. La resolución de problemas destaca no sólo como una competencia que hay que promover en los alumnos y que, por tanto, hay que evaluar, sino como medio o herramienta mediante la cual contrastar diversos aprendizajes.

La parquedad con la que está redactado este documento oficial hace que en él sólo aparezcan citados explícitamente algunos de los aspectos relacionados con la resolución de problemas. Pero su intención está clara: propone que se evalúen los procesos de resolución de problemas matemáticos.

La resolución de problemas se utiliza también, en este Real Decreto, como *campo de pruebas* en el que los estudiantes deben mostrar hasta qué punto son capaces de aplicar, en situaciones prácticas, determinados conceptos básicos que forman parte del currículo escolar de Secundaria. Siete de los catorce criterios incluídos en este documento para el área de matemáticas proponen que se utilice la resolución de problemas con esta finalidad. Estos criterios pueden agruparse en cuatro bloques: los referidos a números y operaciones, los que corresponden a nociones algebraicas, los relacionados con proporcionalidad y semejanza y los vinculados con la propia resolución de problemas.

* Al bloque de números y operaciones corresponden:

- El criterio 1, que señala que hay que saber utilizar los números (enteros, decimales y fraccionarios) para resolver problemas y situaciones de la vida real.

- El criterio 2, que se refiere a la evaluación, mediante la resolución de problemas, de la capacidad del estudiante para asignar a las operaciones numéricas los distintos significados que vienen ligados a ellas según el contexto.

- El criterio 3, que hace alusión a la resolución de problemas para evaluar la destreza del estudiante en utilizar convenientemente aproximaciones por defecto y por exceso de los números.

* Al bloque de nociones algebraicas corresponden los criterios 5 y 6, en los que se indica que el estudiante debe resolver problemas de la vida real que requieran nociones algebraicas y el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

* El criterio 12 está relacionado con el bloque de proporcionalidad y semejanza. Pero, en cuanto a la evaluación, se indica la necesidad de establecer conexiones entre las distintas representaciones de la proporcionalidad, numérica, geométrica, gráfica y algebraica, y utilizarlas en la resolución de problemas.

* Respecto a la resolución de problemas propiamente tal, el criterio 14 determina la utilización de estrategias sencillas, entre otras los métodos de "ensayo y error" sistemático, en contextos de resolución de problemas:

> "*Utilizar estrategias sencillas, tales como la reorganización de la información de partida, la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y casos particulares o los métodos de "ensayo y error" sistemático, en contextos de resolución de problemas*".

Como podemos comprobar, de los catorce criterios que contempla el Real Decreto, la mitad de ellos hacen referencia a evaluar la resolución de problemas, bien en sí misma o bien en los distintos tópicos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

2.4.3. Elaboración de instrumentos de evaluación fiables.

Uno de los aspectos que más preocupa a la comunidad de profesores de matemáticas consiste, precisamente, en determinar cuales instrumentos de evaluación pueden ser más indicados para ajustarse a las directrices derivadas de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

La práctica de la evaluación en matemáticas debe comenzar por establecer unos instrumentos adecuados a las finalidades de la propia evaluación.

Bell, Burkhardt y Swam (1992) proponen una serie de criterios para la selección de tareas de evaluación que consideramos relevantes y que citamos:

> “ 1º *Relevancia práctica*; muchas cuestiones plantean una situación de la vida real, pero (...) no tienen significado práctico.
>
> 2º *Coherencia o fragmentación*; muchas tareas conducen al estudiante a través de una secuencia de pequeños pasos, que reducen o suprimen la capacidad de decisión del estudiante. Pocas tareas invitan al estudiante a seleccionar su repertorio de técnicas, recorrer una cadena de razonamientos o comparar métodos alternativos.
>
> 3º *Rango de respuestas posibles*; (...) usualmente el nivel de respuestas posibles ha venido determinado más por la tarea que por el estudiante.
>
> 4º *Extensión y valor de la tarea*; el pensamiento de orden superior se muestra mejor, por lo general en tareas extensas que en tareas cortas; (...).
>
> 5º *Modo de trabajar las tareas*; tradicionalmente los estudiantes han trabajado las tareas individualmente y en silencio. Estas condiciones artificiales se han impuesto en beneficio de la fiabilidad, y probablemente se mantendrán en el sistema. Sin embargo, hay una gran necesidad de explorar cómo se puede evaluar la capacidad de los estudiantes para trabajar cooperativamente, quizá utilizando formas de comunicación orales y prácticas en un ambiente usual de trabajo.” (p. 120).

El abanico de posibilidades para los instrumentos es muy amplio, depende de los objetivos de la evaluación, del modelo teórico sobre la enseñanza y el aprendizaje, y del papel asignado al profesor y a los estudiantes, en términos generales. Las pruebas orales tienen inconvenientes obvios para la evaluación en matemáticas, incluso en un contexto individual; a esto añadimos el hecho de que exigen un tiempo y un trabajo intensivos y se consideran menos fiables que las escritas.

Nosotros vamos a utilizar instrumentos basados en tareas de *papel y lápiz*; entendemos que las tareas de papel y lápiz son las que, por su mayor validez y fiabilidad, se mantendrán en el sistema, además de estar más extendidas y tener las preferencias de los profesores de matemáticas.

Para satisfacer adecuadamente los criterios de la evaluación en matemáticas citados anteriormente es importante que exista un amplio rango de variación en el grupo de tareas, así como que éstas permitan también diferentes respuestas a diferentes niveles por parte de los estudiantes.

2.4.4. Balance.

Podemos concluir que:

* Existe una preocupación en la comunidad de educadores matemáticos por la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Escolar, aún en los primeros años de escolaridad. Esta preocupación se traduce en un interés creciente por conocer la construcción del pensamiento algebraico de los más jóvenes, diferenciado del aritmético, con el que coexiste.

Una herramienta valiosa para abordar los diversos aspectos de esta construcción es la resolución de problemas; los problemas propuestos, sobre todo en el inicio, deben ser cercanos al niño y venir contextualizados en un entorno familiar para el alumno. La importancia de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra se ha puesto de manifiesto en el apartado 1.4.1 del capítulo anterior.

* Uno de los aspectos más importantes y menos definido en la enseñanza del Álgebra es el referido a la evaluación como parte integrante de la instrucción. Las características de la evaluación en matemáticas las hemos recogido en el apartado 1.2 del capítulo anterior.

En nuestro caso particular hemos recogido las normas que para España establece el Ministerio de Educación y Ciencia (M.E.C., 1991), destacando que la mayoría de los criterios de evaluación que se establecen hacen referencia a la resolución de problemas, bien como instrumento de evaluación, bien como contenido propio de la evaluación.

* La elaboración de instrumentos de evaluación fiables concreta un modelo de enseñanza y aprendizaje. Diseñar situaciones de evaluación para un propósito particular puede resultar una tarea complicada (Webb, 1992). En nuestro caso, hemos optado por instrumentos de evaluación mediante tareas de papel y lápiz basadas en la resolución de problemas verbales.

Como exponemos en el apartado 1.3, son mayoría los autores que proponen para la evaluación tareas que permitan interpretaciones alternativas o múltiples soluciones correctas, coincidentes con los criterios citados de Bell, Burkhardt y Swam (1992), o los de Lamon y Lesh (1992) descritos en el apartado citado.

2.5. Términos clave.

A lo largo de este trabajo se han utilizado una serie de términos clave que queremos definir para caracterizar los correspondientes conceptos de acuerdo a su empleo en este estudio. Queremos expresar el significado que vamos a adoptar para cada uno de ellos en la presente investigación y describir sus relaciones.

Presentamos aquellos que consideramos más relevantes:

2.5.1. Instrumento de evaluación.

Partimos de la definición que el Diccionario de Vocabulario Científico y Técnico[1] nos ofrece de *instrumento*: "dispositivo diseñado para llevar a cabo cualquier tipo de observación u operación".

La evaluación, en general, se puede considerar como el proceso de identificar, obtener y proporcionar información útil acerca del valor o mérito de un objeto determinado, con el fin de servir de guía para la toma de decisiones y promover la comprensión de los fenómenos implicados (Stufflebeam y Shinkfield, 1987).

Para el caso de la evaluación en matemáticas consideramos que es un proceso sistemático y continuo, encaminado a clarificar complejos mecanismos que se dan en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, mediante la utilización de técnicas y procedimientos científicos, con la intención de facilitar la toma de decisiones (Tortosa y col., 1995).

Las técnicas y procedimientos han de utilizar dispositivos que proporcionen la información necesaria que posibilite la emisión de juicios y decisiones. Estos dispositivos son los que hemos llamado *instrumentos de evaluación*.

Los instrumentos de evaluación pueden ser muy variados. Una clasificación muy genérica podría ser:

- Instrumentos establecidos sobre tareas escritas
- Instrumentos establecidos sobre tareas orales
- Instrumentos establecidos sobre observaciones.

[1] Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990): *Diccionario de Vocabulario Científico y Técnico*. Madrid: Espasa Calpe, p. 396.

Nuestro interés estriba en instrumentos del primer tipo. Algunos ejemplos de los más frecuentes para la evaluación en matemáticas escolares son: *los exámenes o controles clásicos formados por cuestiones teóricas y prácticas*, *las pruebas de papel y lápiz cuyo contenido son problemas (ya sean verbales o no)*, *cuadernos de trabajo*, *informes*, *portafolios*, *investigaciones por parte de los alumnos* y otros menos aceptados, como *pruebas objetivas* o *tests* de distinta índole.

En nuestro caso hemos decido construir un instrumento cuyas tareas consisten en la resolución, mediante papel y lápiz, de diversos problemas verbales algebraicos. Mediante estas tareas nos proponemos observar los sistemas de representación utilizados y las competencias mostradas por los estudiantes durante la resolución de los problemas propuestos.

2.5.2. Problema verbal.

Para una revisión general de la noción de problema, de los tipos de problemas y de las variables principales que se consideran en las investigaciones sobre resolución de problemas, remitimos a los trabajos de Castro (1991, 1995).

Por lo que a nuestro trabajo se refiere, seguimos la propuesta de Gerofski (1996) en el sentido de que la mayoría de los problemas verbales se caracterizan por tres componentes:

* Una componente de “puesta en escena”, estableciendo la contextualización, los caracteres y la localización de la historia que tiene lugar, aunque esta componente, a menudo, no sea esencial para la solución misma del problema.

* Una componente de “información”, que da los datos que se necesitan para resolver el problema. A veces se da información irrelevante como señuelo para producir recelo en un resolutor inseguro.

* Una cuestión o pregunta a la que hay que encontrar respuesta.

Sobre esta estructura hay variaciones; por ejemplo, las componentes *puesta en escena* e *información*, a veces, se unifican en una sentencia por la utilización de cláusulas subordinadas, o la componente *información* se funde con la *pregunta* en una sentencia simple usando una estructura de subjuntivo "si... entonces".

De acuerdo con Pimm (1995), la naturaleza de las historias contenidas en los problemas algebraicos es relevante para los estudiantes en términos de interés y en términos de disposición de los estudiantes para resolver el problema completo. Nesher (1980) ha criticado seriamente la naturaleza estereotipada de los problemas escolares, por sus implicaciones para el significado que los escolares atribuyen al enunciado del problema.

La mayoría de los especialistas sostienen que la cercanía al entorno escolar en la elección de los contextos donde se desarrollan las historias, puede favorecer la compresión de la situación descrita en el problema y, con ello, las relaciones entre los datos e incógnitas.

Igualmente, el texto del problema no debe de crear dificultades añadidas de legibilidad para los escolares a los que va dirigido.

Los problemas verbales que vamos a proponer son problemas algebraicos que se ajustan al modelo básico descrito por Gerofski (1996); es decir, estarán estructurados en las tres componentes citadas y en el orden indicado: una puesta en escena, una información y una pregunta. Los datos se darán en el texto mediante frases concisas, sin excesivo verbalismo, separadas por un signo ortográfico (coma o punto) y no contendrán datos superfluos.

Ejemplo de un problema verbal propuesto:

> “David y Reme deciden ir a un concierto. David compra una entrada, pero Reme va a un sitio mejor donde la entrada cuesta 2,7 veces la de David.
> En total han pagado 5.550 ptas. por las dos entradas. ¿Cuánto cuesta cada entrada?”

2.5.3. Problema algebraico.

Se trata de establecer cuándo un problema se considera que tiene contenido algebraico, a diferencia de uno aritmético. La línea divisoria no está claramente determinada, según juicio de expertos.

Wagner y Kieran (1989) se hacen algunas preguntas acerca de la naturaleza aritmética o algebraica de los problemas verbales. Entre ellas recogemos las siguientes:

- ¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos?

- ¿Qué hace a un método de resolución ser más algebraico que aritmético? ¿Hay jerarquías cognitivas con respecto a los modos de representación (lenguaje natural, gráfico, numérico, simbólico, etc.,) que justifiquen un análisis en resolución de problemas algebraicos?

Estas preguntas también nos las hemos hecho y no parece que haya una opinión admitida o compartida por la generalidad de la comunidad de investigadores en educación ocupada por estos temas.

Hemos encontrado algunos autores, como Cerdán (1993), Palarea y Socas (1995), que hacen depender la distinción entre un problema aritmético y uno algebraico del sistema de representación elegido para su resolución. Sin embargo, Lesh, Post y Behr (1987b) hacen esta distinción puntualizando en que el problema algebraico requiere "primero describir y después calcular" (p. 657).

Otros autores, Kieran y Filloy (1989), Kieran (1992), Stacey (1995), utilizan en sus estudios e investigaciones como problemas algebraicos aquellos que implican relaciones matemáticas en las que el signo "=" no es sinónimo de efectuar una operación aritmética, sino un signo de equilibrio entre el miembro que está a su izquierda y el que está a su derecha. Ambos miembros contienen cantidades que se operan aritméticamente.

Un ejemplo tomado de Palarea y Socas (1995), que se propone como problema algebraico, es el que sigue:

> "Un automóvil parte del punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h.
>
> ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Nuestro criterio se basa en la interpretación de Kieran y Filloy (1989), Kieran

(1992) y Stacey (1995), pues la elección de un sistema de representación más cercano al campo de la Aritmética o del Álgebra para su resolución depende, en gran medida, del resolutor y no del problema en sí.

Teniendo en cuenta el criterio indicado hemos considerado los problemas usuales de currículo del Álgebra Escolar en Secundaria e, igualmente, indagado sobre problemas ya contrastados en otros estudios algebraicos, por lo que los problemas que hemos elegido como algebraicos han sido tomados y adaptados, en la mayoría de los casos, de materiales curriculares y otros trabajos de investigación sobre cuestiones algebraicas realizados por distintos autores. No obstante, en todos los casos los hemos contrastado mediante juicio de expertos que los han considerado como algebraicos.

Por estas razones hemos seleccionado un conjunto de problemas verbales algebraicos que responden a problemas que se pueden resolver mediante el planteamiento de ecuaciones lineales. En unos casos la resolución se puede hacer a través de una ecuación lineal con una incógnita, y en otros es necesario plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2.5.4. Fases en la resolución de un problema verbal.

Desde un planteamiento cognitivo, Mayer (1986) distingue las siguientes fases en el proceso de resolución de un problema verbal, que se esquematizan en el cuadro que reproducimos:

Propuesta de Mayer

Problema verbal:

Enunciado ------> Comprensión ------> Solución ------> Resultado

Nosotros hemos identificado cada una de las fases de Mayer con una actuación diferente de los resolutores y, de este modo, establecemos tres fases en las acciones externas para la resolución de un problema, que utilizamos para su estudio y caracterización. Dichas fases las indicamos en el siguiente cuadro:

Propuesta para nuestro estudio

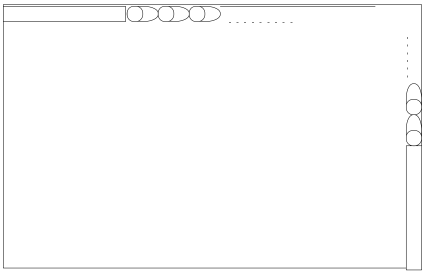
Problema verbal:

Planteamiento ------> Ejecución ------> Desempeño Final (o resultado)

Vamos a ejemplificar las diversas fases en la resolución de un problema verbal, utilizando la respuesta de un estudiante de la muestra de nuestro estudio a uno de los problemas propuestos en el instrumento de evaluación que se ha administrado. Hemos identificado por nuestra parte, recuadrando la superficie adecuada, cada una de las fases del problema, manteniendo la estructura y distribución del texto original, incluso las tachaduras.

En la página siguiente reproducimos el problema en cuestión:

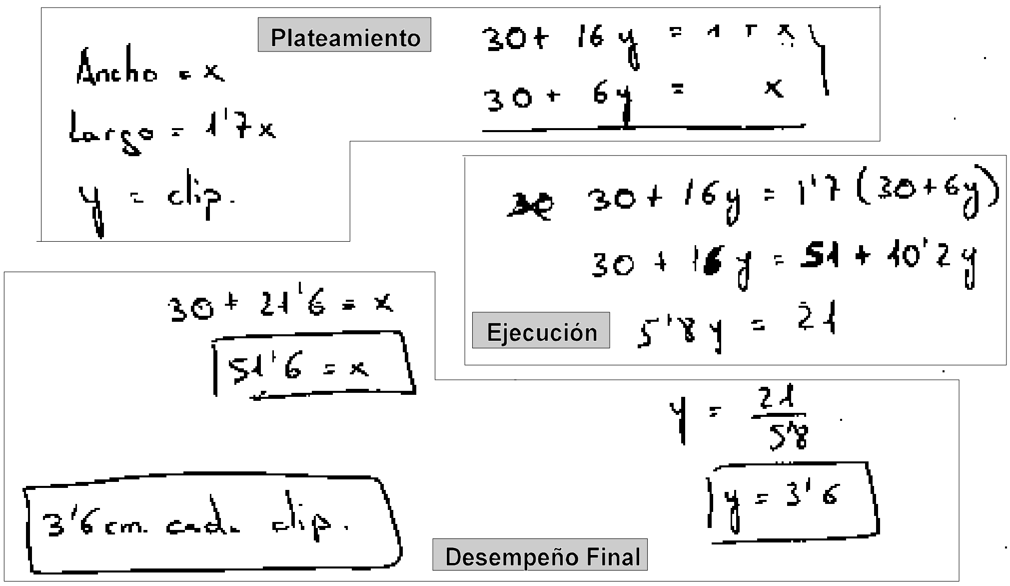
Fases en la resolución de un problema verbal algebraico



"Juan sabe que el tablero de su mesa de clase es un rectángulo cuyo lado largo es 1,7 veces mayor que su lado ancho.

En el lado largo Juan coloca, en hilera, su regla de 30 cm. y 16 clips, y en el lado menor puede poner la regla de 30 cm. y 6 clips.

¿Cuanto mide cada clips?"



2.5.4.1. Planteamiento. Entendemos por éste una fase de *traducción* del texto del problema a un lenguaje matemático más o menos complejo, en el que se establecen relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos o incógnitas; es decir, se integran, primero mentalmente y después se expresan físicamente sobre el papel, los datos en un sistema de relaciones a través de un sistema de representación, que señala un plan de actuación posible.

No siempre un buen planteamiento lleva a un resultado correcto, pero es indicativo de que se activa un campo conceptual, en el sentido de Vergnaud (1990) y González (1995), que permite ligar los pasos de integración de las relaciones matemáticas involucradas a una traducción de esas relaciones en un lenguaje matemático más o menos sofisticado, de mayor o menor complejidad. Podemos considerar esta fase como conceptualmente la más importante en la resolución del problema.

2.5.4.2. Ejecución. Es la fase en la que se lleva a cabo el plan esbozado en el planteamiento. Se trata de poner en juego las reglas del lenguaje algebraico o pre-algebraico para aplicar un *proceso analítico* que, con una componente aritmética muy fuerte, llegue a *equilibrar*, a través del signo "=", los datos desconocidos con los datos conocidos en unas nuevas relaciones obtenidas a partir de las iniciales del planteamiento. Esta fase puede orientarnos, mejor que otras, sobre si se ha movilizado o no pensamiento algebraico en la resolución del problema.

2.5.4.3. Desempeño final. Es la fase terminal donde se obtienen los valores desconocidos. Un resultado correcto viene precedido, generalmente, de un buen planteamiento y de una buena ejecución, aunque se pueden dar procesos mentales, en tareas sencillas, que obvien alguna de las fases anteriores. En esta fase se puede detectar con facilidad los posibles errores producidos en las anteriores.

Queremos tener también en cuenta cuando el resultado del problema es incorrecto debido a *errores de atención en la actuación*: errores leves de cálculo aritmético no achacables a desconocimiento (por ejemplo, 3+5 = 15), o errores al transponer cantidades de una relación a otra, pero el resto del proceso de resolución del problema es correcto. Queremos distinguir estos casos de aquellos otros en los que la actuación no es correcta. Además, pretendemos discriminar, dentro de los resultados correctos, aquellos en los que se obtiene una incógnita de las dos que se pide en el problema, cuando así lo sea.

2.5.5. Sistemas de representación.

Castro y Castro (1997) caracterizan: "Representaciones: son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes. Por ejemplo: la *notación decimal* para la escritura de los números reales; el *diagrama cartesiano*, que asigna un punto del plano a cada pareja de números; los puntos de la *circunferencia unidad*, con centro en el origen, cuyas coordenadas representan los valores de las funciones seno y coseno. Las notaciones simbólicas pueden alcanzar gran complejidad, por lo general se basan en signos alfanuméricos estructurados; las gráficas se basan en combinaciones de figuras o iconos, también estructuradas."

Las representaciones externas, como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y conocimientos haciéndolos accesibles a los demás. Juegan, desde este punto de vista, una doble función:

a) actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción del conocimiento,

b) permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Las vías que un sujeto utiliza para representar externamente un concepto sirven para mostrar, generalmente, cómo es la información que posee sobre tal concepto.

Nosotros nos centramos aquí en las representaciones externas de los conceptos y procedimientos matemáticos convencionales; nuestro interés viene fijado por la diversidad de modos de representación que abarcan un mismo concepto.

Por lo general, los conceptos matemáticos vienen expresados mediante varios sistemas de representación específicos. Janvier (1987) denomina representaciones sinónimas a las representaciones diferentes de un mismo objeto matemático. Cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra.

Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando cuál sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.

Consideramos, pues, que **un *sistema de representación* es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto**. Ninguno de los posibles sistemas de representación de un concepto agota por sí solo a dicho concepto.

La actividad matemática necesita movilizar varios sistemas de representación en una misma acción, o bien elegir un registro en vez de otro.

El fenómeno de la *comprensión* reúne a la vez la producción de uno o varios sistemas de representación junto con la aprehensión del objeto matemático que es representado. Podemos afirmar, entonces, que la comprensión de las relaciones que implican un problema verbal algebraico, necesitan de un sistema de representación que las haga explícitas, de tal forma que las transformaciones dentro de ese sistema o el cambio a otro más económico y/o potente permitan su resolución.

En la resolución de problemas verbales algebraicos elementales hemos constatado la utilización de cinco sistemas de representación. Entre ellos queremos hacer algunas observaciones sobre los sistemas, que hemos denominado numéricos:

Consideramos que referirnos a un sistema de representación *numérico*, de forma general, no recoge toda la riqueza de posibilidades que se produce en las respuestas de los sujetos a los problemas verbales algebraicos. Nuestra opción, entonces, es proponer dos tipos de sistemas de representación numéricos diferenciados: Ensayo-Error y Parte-Todo.

Tanto uno como otro pueden considerarse que verifican la definición de sistema de representación que hemos destacado anteriormente: son un conjunto de notaciones, números y operaciones aritméticas, con reglas y convenios que los vinculan y que permiten expresar, en este caso, las relaciones y resultados de los problemas.

El Ensayo-Error ya viene indicado como "método", objeto de evaluación en la resolución de problemas, en el criterio 14 de evaluación recogido en el Real Decreto que establece el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (M.E.C., 1991), ya citado en un apartado anterior. Filloy y Rubio (1992) utilizan el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES), de forma silimar al Ensayo-Error, en la resolución de problemas algebraicos. En nuestro trabajo, pues, vamos a considerar el Ensayo-Error como un sistema de representación que permite la comunicación externa y la reflexión en contextos de resolución de problemas.

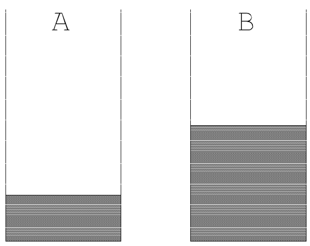
Por otro lado, recogiendo algunos modelos de resolución de problemas como el enfoque "intuitivo" que proponen Kieran y Filloy (1989), o el MIAS (Método de Inferencias Analíticas) propuesto por Filloy y Rubio (1992) o el nivel "concreto" de Radford y Grenier (1996), en los que se mantiene una interpretación aritmética (y en algunos casos manipulativa) de las situaciones algebraicas, vamos a considerar el sistema de representación Parte-Todo, reconocido en la literatura especializada como una forma más de abordar la resolución de problemas, asimilable a los anteriores y cuyas características describiremos a continuación.

2.5.5.1. Sistema de representación Ensayo-Error. Consideramos que se está utilizando este sistema cuando se prueban, de forma sistemática, valores numéricos concretos para la/s incógnita/s, estableciendo las relaciones implícitas en el problema, y utilizando los valores fallidos para conjeturar nuevos valores que aproximen paulatinamente al resultado correcto.

Se utilizan notaciones numéricas y simbología aritmética, pero se establecen un conjunto de reglas y convenios que permiten establecer relaciones entre datos conocidos y desconocidos, además de potenciar la evaluación del dato erróneo para producir un resultado correcto.

Este sistema consume mucho tiempo y es una carga pesada para la memoria de trabajo, excepto si todos los intentos se anotan de alguna forma estructurada. Los estudiantes que usan un sistema de representación de Ensayo-Error como un mecanismo primerizo de resolución de los problemas algebraicos, tienen una noción más desarrollada del equilibrio entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación y del papel del signo igual como equivalencia, que la que poseen los estudiantes que nunca han resuelto un problema algebraico mediante este sistema de representación (Kieran, 1988).

Ejemplificamos la resolución de un problema según este sistema reproduciendo el trabajo efectuado por un estudiante de la muestra:



"Tenemos dos depósitos de agua con la misma capacidad.

El depósito A tiene 20 litros y hemos de echarle 9 cubos más para que se llene.

El depósito B tiene 52 litros y hay que echarle 5 cubos para llenarlo.

¿Qué cantidad de agua cabe en cada depósito?"

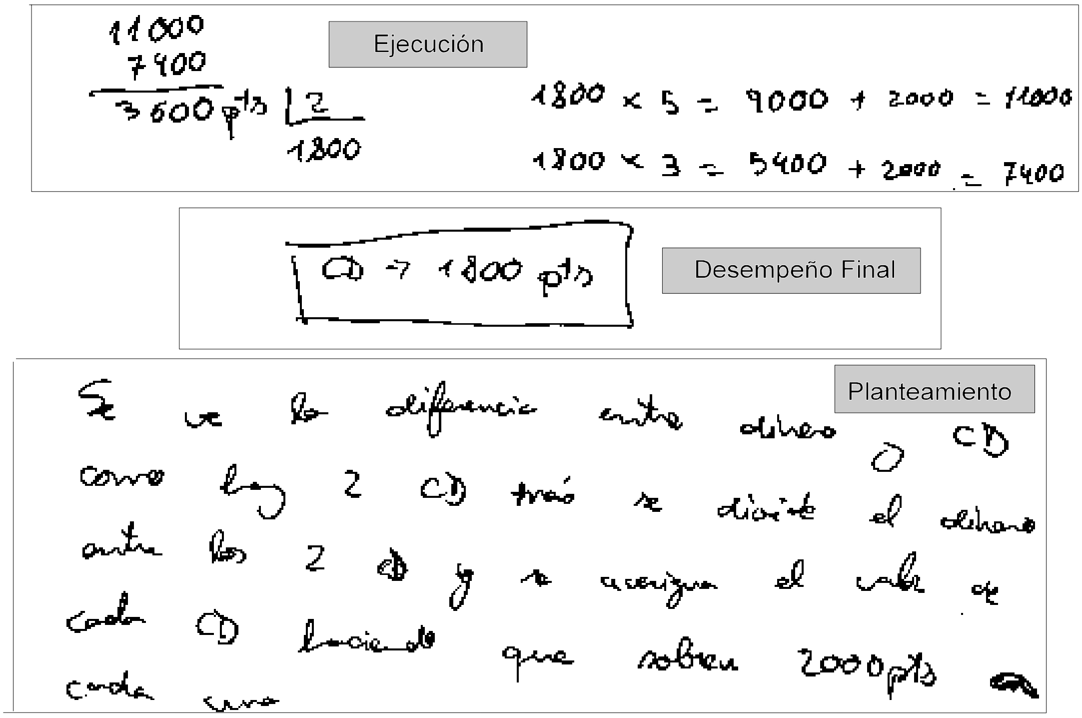
Ensayo-Error

2.5.5.2. Sistema de representación Parte-Todo. Las relaciones que implica el problema se plantean, en su mayoría, numéricamente mediante alguna o varias de estas estrategias para relacionar los datos: combinación, cambio, comparación e igualación. Se establece una inclusión de clases y una comparación, considerando los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos y comparando el total con la parte.

Es un enfoque intuitivo de representación que incluye el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento (Kieran y Filloy, 1989). Este sistema de representación, como el anterior, se caracteriza porque utilizan símbolos numéricos (generalmente, operaciones con números concretos). En algunos casos pueden establecerse ecuaciones, pero no se utilizan las reglas de la sintaxis del álgebra, sino operaciones aritméticas basadas en la comparación e igualación (balanza), no generaliza pero establece unas relaciones entre cantidades que no son operaciones aisladas: existe un plan de actuación. Se interpretan las relaciones matemáticas involucradas en el problema, el sentido del signo "=" no es sólo el de establecer el resultado de una operación, sino el de equilibrar una relación matemática. Veamos el siguiente ejemplo:

"Marta y Sandra van a comprar a una tienda de discos. Marta lleva 7.400 ptas. y Sandra 11.000 ptas.

Marta se compra 3 CD y Sandra compra 5 CD, todos al mismo precio. Después de pagar, a las dos les sobra la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto cuesta cada CD?"



Parte-Todo

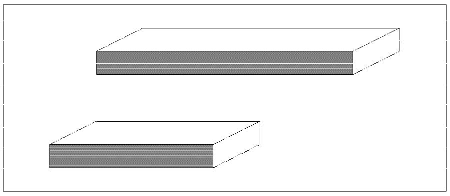
2.5.5.3. Sistema de representación Gráfico. Entendemos este sistema de representación cuando se utiliza un sistema de representación visual (representación física, icónica, geométrica o diagramática), en definitiva un código gráfico, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas del problema, sin ningún otro elemento que podamos considerar simbólico. Las operaciones numéricas se efectúan a partir de las relaciones establecidas en el gráfico, utilizando generalmente un esquema de parte-todo o una relación de proporcionalidad (regla de tres).

Aunque pueda considerarse que existe una representación simbólica, todavía no hay generalidad, se utiliza un esquema particular que cambia para cada problema. Se trabaja en el campo de lo concreto.

Este sistema de representación es especialmente útil cuando, en los problemas verbales algebraicos, las relaciones que se establecen son lineales y el contexto está formado por objetos en los que los datos e incógnitas son cantidades de magnitudes lineales o componentes lineales de magnitudes vectoriales. Entonces, la representación gráfica suele tender a establecer un isomorfismo entre la magnitud que se relaciona en el texto del problema con la magnitud *longitud*. De tal forma que, cualquiera que sea el dibujo geométrico que se utilice, las operaciones que implican las relaciones del problema se hacen depender de la componente *longitud* que se establece en el gráfico: los aumentos, disminuciones, dobles o mitades, tantas veces como, partes de, etc., se representan isomorfamente en esquemas en los que cantidades de longitud del objeto representado se transforman gráficamente mediante las mismas operaciones. Naturalmente el apoyo de todo el aparato aritmético, con sus operaciones y propiedades, está presente y se utiliza para obtener las soluciones numéricas solicitadas en el problema verbal.

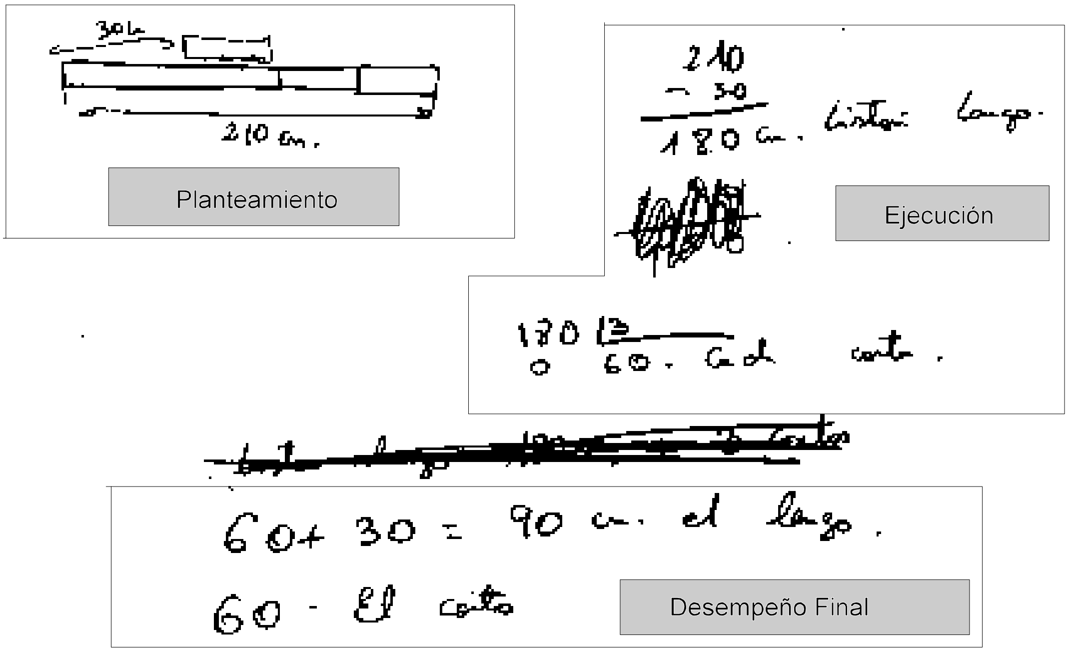
Para otro tipo de problemas de los que en este trabajo consideraremos habrá que tener en cuenta también diagramas o gráficos no lineales, sobre todo los de tipo bidimensional (cuando los datos del problema se puedan relacionar con una superficie) por ser asequibles a tareas de papel y lápiz.

Veamos una aplicación de este sistema de representación en la resolución de un problema realizada por un estudiante:



"En una carpintería hay dos tipos de listones de madera: unos largos y otros cortos. Si ponemos en línea un listón largo junto con dos cortos, miden 210 cm.

El listón largo mide 30cm. más que el corto ¿Cuánto mide cada listón de madera?"



Gráfico

2.5.5.4. Sistema de representación Gráfico-Simbólico. Este sistema de representación podemos considerarlo un híbrido del anterior y del siguiente, pero creemos que tiene entidad propia como para destacarlo como diferente. Se trata de establecer las relaciones mediante un lenguaje simbólico (alfabético), pero con un apoyo explícito en un gráfico o dibujo en donde se representan los datos y las incógnitas, identificando los elementos que intervienen en las relaciones y, a veces, las propias relaciones. Este sistema de representación avanza en complejidad sobre el anterior, pero aún necesita un soporte concreto, una representación en la que se visualicen los datos y las incógnitas del problema. Aún así, no alcanza la formalidad de la generalización, no llega a una abstracción completa.

Se puede advertir que cuando, en el sistema de representación gráfico-simbólico, el planteamiento del problema verbal es incorrecto, la traducción fiel a una representación simbólica será incorrecta. Veamos un ejemplo:

"La familia García realiza un viaje. El Sr. García tiene que conducir 434 kilómetros para ir de Madrid a Granada.

En un punto del trayecto deciden parar a tomar un refresco. Después de la parada aún le quedan por recorrer 1’8 veces más de kilómetros que los que ya llevan recorridos.

¿Cuántos kilómetros le quedan después de la parada?¿Y cuántos kilómetros llevan ya recorridos?"

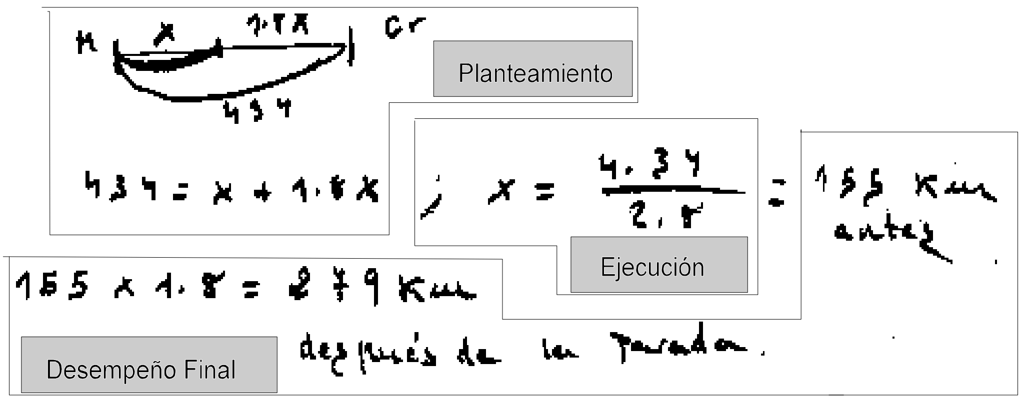
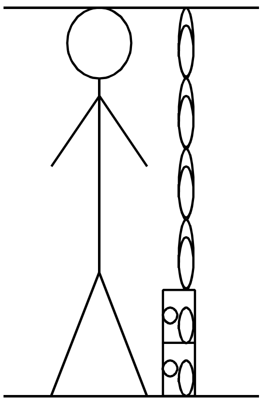


Gráfico-Simbólico

2.5.5.5. Sistema de representación Simbólico. Se presenta cuando se utiliza un lenguaje sólo y exclusivamente abstracto, usualmente alfabético, es decir, un lenguaje algebraico puro. Se identifican las incógnitas con letras o palabras y se expresan las relaciones mediante ecuaciones. No se utilizan objetos concretos (dibujos o gráficos) para representar datos o relaciones. Se produce una abstracción y una generalización de las relaciones. El modelo se puede aplicar a cualquier otro problema de las mismas características, con lo cual se generaliza el método.

El lenguaje algebraico se debe utilizar con competencia, para dar sentido y significación a las letras y aplicar las reglas algebraicas para producir nuevas relaciones que lleven a la solución, es decir, hay que poner en juego la semántica y la sintaxis del lenguaje algebraico.

Ejemplo de una aplicación de este sistema por un estudiante lo podemos ver en a continuación:



"A Teresa le han regalado un muñeco de Epi que mide 21 cm, y a su hermano uno de Blas que mide 30 cm.

La altura de Epi se puede medir también con 4 clips y 2 sacapuntas, como se puede ver en la figura. En el caso de Blas se necesitan 5 clips y 4 sacapuntas.

¿Cuánto mide cada clip y cada sacapuntas?"

$$\left.\begin{array}{l}4a+2b=21\\ 5a+4b=30\end{array}\right\}\quad \begin{array}{ll}4a=21-2b & a=\dfrac{21-2b}{4}\\ 5a=30-4b & a=\dfrac{30-4b}{5}\end{array}$$

Planteamiento

Ejecución

$$\frac{21-2b}{4}=\frac{30-4b}{5} \Rightarrow 105-10b=120-16b$$

$$-10b+16b=120-105$$

$$6b=15$$

$$b=\frac{15}{6}=\boxed{2'5}$$

$$a=\frac{21-2(2.5)}{4}$$

$$a=\frac{21-5}{4}=\frac{16}{4}=\boxed{4}$$

Desempeño Final

$$\begin{array}{r|l}15 & 6\\ 30 & 2'5\end{array}$$

Los clips miden 4 cm

Los sacapuntas miden 2.5 cm.

Simbólico

2.6. Finalidad del estudio.

Tenemos la impresión de que, en el momento actual, en la Educación Matemática se da una cierta paradoja: junto con un desarrollo notable de la investigación y un aumento considerable de las actividades de innovación, todavía se mantiene una distancia apreciable entre los resultados de las investigaciones, el diseño de nuevas tareas y materiales y la actividad práctica en el aula de gran parte de los profesores y alumnos.

Las necesidades derivadas de la renovación del currículo de matemáticas para la Educación Secundaria han provocado la puesta en marcha de programas de investigación para diseñar nuevos instrumentos de evaluación así como criterios que se ajusten a la ampliación de la Enseñanza Obligatoria (hasta los 16 años) y, por lo tanto, a la innovación del currículo dentro de los cambios propuestos por la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE , MEC 1990).

Los instrumentos de evaluación deben contemplar un rango amplio de competencias relativas al aprendizaje de las matemáticas y, en particular, sobre tópicos matemáticos concretos (Lesh y Lamon, 1992). Por lo tanto, se trata de evitar instrumentos de evaluación en los que la resolución de una tarea contemple sólo dos valores u opciones dicotómicas como resultados posibles: bien-mal, 0-1, si-no, todo-nada.

Por otra parte, nuestra intención es reivindicar para las tareas de papel y lápiz un lugar importante en la evaluación de los conocimientos matemáticos, de manera que se dé respuesta adecuada a gran parte de las críticas de que ha sido objeto estas pruebas.

Para ello, como se ha dicho, el tópico elegido ha sido el Álgebra Escolar en Educación Secundaria y las tareas que conforman el instrumento de evaluación se basarán en la resolución de problemas verbales.

La finalidad de nuestro estudio está en la caracterización de un instrumento para la evaluación de las competencias algebraicas elementales, que tenga en cuenta la complejidad de las tareas propuestas y que permita reorientar, en su caso, la comprensión, por parte de los estudiantes, de los conceptos implicados.

Vamos a aplicar el instrumento de evaluación a estudiantes de último curso de

Educación Secundaria Obligatoria (16 años) y a estudiantes universitarios que no han recibido instrucción en Álgebra en un período superior a 5 años. Trataremos de obtener valores grupales evaluativos que revelen cómo se desempeña globalmente toda la muestra a considerar. De este modo tratamos de conocer el poso o fondo de conocimiento algebraico que perdura en estudiantes que han madurado, pero que ya hace bastante tiempo que estudiaron matemáticas, y así compararlo con aquellos estudiantes que están recibiendo una instrucción sistemática sobre Álgebra Escolar.

En definitiva, tratamos de considerar qué relevancia tienen dos variables críticas en todo proceso de aprendizaje como son la práctica mediante la enseñanza y la maduración, entendida como evolución hacia estados psicológicos más avanzados en orden a afianzar la inteligencia abstracta.

Pretendemos que el instrumento tenga un carácter *explicativo* sobre las cuestiones expuestas en el apartado 2.1 y, en particular, sobre las características de las tipologías de sujetos que aparecen cuando se relacionan éstos con los sistemas de representación con que abordan la resolución de los problemas.

También pretendemos que tenga carácter *predictivo*, de tal forma que nos permita establecer la pertenencia de un sujeto a una u otra de las tipologías establecidas y, así, conocer su competencia algebraica. De esta forma, el profesor podrá establecer un plan de actuación que conduzca a los sujetos, mediante la instrucción adecuada, a niveles más complejos del conocimiento algebraico dentro de una evaluación continua y formativa.

Para ello vamos a:

- Establecer variables mediante las que caracterizar tareas algebraicas adaptadas a los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria. Crear una base de problemas verbales algebraicos, que contemplen diferentes opciones de resolución, según las variables establecidas.

- Seleccionar tareas mediante las que evaluar las competencias de los estudiantes en Álgebra Escolar, para construir un instrumento de evaluación.

- Tipificar el pensamiento algebraico que los estudiantes activan cuando resuelven problemas verbales algebraicos.

- Delimitar los sistemas de representación usuales movilizados por los estudiantes para la resolución de problemas verbales algebraicos. Caracterizar los grados de complejidad que implica el manejo de cada uno de estos sistemas.

- Estudiar las relaciones que se establezcan entre las competencias en Álgebra Escolar y los sistemas de representación elegidos y, también entre las competencias y las variables que caracterizan los enunciados de los problemas verbales algebraicos.

- Estudiar las relaciones entre los posibles estratos de la población estudiantil a la que va dirigido el estudio, en orden a determinar si hay diferencias significativas en las competencias en Álgebra Elemental[2].

En estos apartados subyace una finalidad global, que es la profundización en el estudio teórico y práctico del campo conceptual de la evaluación del conocimiento matemático.

2.7. Racionalidad del estudio.

Este estudio se ubica dentro del campo de la investigación en Educación Matemática y puede encuadrarse mediante unos marcos de referencia precisos, los cuales delimitan el trabajo y fundamentan su racionalidad. Situamos nuestro estudio tomando como referencias un marco curricular, un marco cognitivo y un marco conceptual. Finalmente, vamos a precisar el Grupo de Investigación en el que se ha llevado a cabo el estudio y lo conectaremos con otras investigaciones recientemente realizadas por grupos y expertos de reconocido prestigio en nuestra área de conocimiento.

2.7.1. Marco curricular.

Profundizar sobre la evaluación en matemáticas es una de las principales finalidades que orientan este estudio. Concebimos la evaluación como parte integrante y

[2] Los términos de “Álgebra escolar” y”Álgebra elemental” son equivalentes y los utilizaremos indistintamente. En ambos casos nos referimos al Álgebra que se imparte en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

destacada del plan de formación en matemáticas para niños y jóvenes al cual denominamos currículo, plan que organiza y desarrolla la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro del Sistema Educativo (Rico, 1990). Nuestra consideración sistémica del currículo, como se ha dicho, contempla la evaluación conectada con y dependiente de las demás componentes curriculares: objetivos, contenidos y metodología.

En el apartado 1.2 del capítulo anterior hemos hecho una presentación detallada de nuestra conceptualización sobre la evaluación en matemáticas; no obstante, es conveniente precisar algunas cuestiones relevantes sobre ese campo que delimitan de modo particular este trabajo.

Uno de nuestros supuestos considera que el método específico con el que se lleva a cabo la evaluación es reflejo de una concepción subyacente de las matemáticas así como de su enseñanza y aprendizaje; es por ello que consideramos la evaluación como parte integrante del proceso de instrucción. Como investigación de orientación evaluativa y sobre los supuestos anteriores, nuestro estudio puede considerarse incluido dentro del *método del proceso,* señalado por Webb (1992), el cual dirige su atención a los procesos de resolución de problemas y a las destrezas o estrategias de pensamiento como medios para producir resultados. Es decir, consideramos los procesos de pensamiento como efecto o resultado de la instrucción y, por ello, objetos de evaluación. Queremos destacar como objetivo de nuestro trabajo la recogida de información para la toma de decisiones documentada, que permita organizar o reorientar, en su caso, el aprendizaje por los alumnos de los procesos de razonamiento y su uso adecuado, así como su evolución hacia niveles más complejos de conocimiento.

En relación con los criterios de evaluación en matemáticas destacamos nuestra coincidencia con los que proponen Bell, Burkhardt y Swan (1992), ya comentados en el capítulo anterior, cuya prioridad se orienta a que las tareas se presenten en *paquetes de evaluación* que satisfagan dos principios: el *equilibrio curricular* entre los objetivos del currículo y la *validez curricular* que permita, a la vez, el aprendizaje.

También nos proponemos servirnos de los criterios que establecen Lamon y

Lesh (1992) para elaborar tareas de evaluación: que sean cuestiones abiertas, con posibilidad de diversas respuestas correctas y que impliquen distintos niveles de complejidad del conocimiento matemático; estos autores declaran que "*cuando un profesor usa problemas de este tipo, la instrucción y la evaluación llegan a ser insepa-rables"* (p. 341).

Los instrumentos materializan una opción sobre la evaluación en matemáticas. La recogida de información y la sistematización de observaciones tales que permitan una valoración de los logros y capacidades de los estudiantes debe de apoyarse en instrumentos que sean fiables y que permitan el mayor grado de objetividad y preci-sión. Por ello se considera que la elaboración de instrumentos de evaluación no es tarea fácil.

Nos inclinamos por instrumentos de evaluación basados en tareas de papel y lápiz, los cuales son los más usuales y "*probablemente siempre estarán con nosotros*" (Bell, Burkhardt y Swan, 1992, p. 120). Las tareas correspondientes debe-rán adoptar formatos abiertos, que permitan el empleo de esquemas conceptuales con distinto grado de complejidad e, incluso, interpretaciones alternativas por parte de los alumnos. Los problemas verbales algebraicos pueden constituir un modelo de tarea idónea. Lamon y Lesh (1992) establecen cuestiones basadas en modelos de elicitación del conocimiento, con diversos niveles y tipos de soluciones correctas, co-mo tareas adecuadas. Los instrumentos diseñados sobre la base de tales tareas re-sultan útiles para que el profesor pueda tener una información amplia sobre la com-petencia del alumno en un tópico determinado; también pueden incidir en propuestas de enseñanza que lleven al aprendizaje de ese tópico.

El instrumento de evaluación que vamos a utilizar está constituido por tareas de papel y lápiz, cuyos enunciados son problemas verbales. Los criterios que utiliza-remos para seleccionar estas tareas de evaluación son concordantes con los ya mencionados, es decir, consideraremos problemas verbales abiertos, con diversidad de respuestas correctas, cuyo planteamiento y solución puedan abordarse mediante distintos sistemas de representación, y que permitan reflejar la complejidad del pen-samiento matemático activado. De esta manera el profesor obtiene una información que podrá utilizar para dirigir el aprendizaje hacia el objetivo deseado.

2.7.2. Marco conceptual.

El estudio sobre los sistemas de representación mediante los que se expresan los conceptos y estructuras matemáticas, así como su incidencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es uno de los campos de reflexión en Educación Matemática que, actualmente, tiene un desarrollo creciente. De acuerdo con Hiebert y Carpenter (1992), asumimos que la representación externa es vehículo de comunicación de las representaciones mentales desarrolladas por un individuo; en particular, nos interesan las representaciones que elaboran y emplean los estudiantes en su trabajo con el Álgebra.

Sostenemos con Janvier (1987) que un concepto matemático, por lo general, viene expresado mediante varios sistemas de representación específicos. Ninguno de los sistemas de representación agota por sí solo al concepto que representa. Cada sistema de representación pone de manifiesto alguna de sus propiedades y dificulta la comprensión de otras. Por ello, dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando cuál es el sistema más ventajosos para trabajar con determinadas propiedades (Duval, 1993a; Rico y col., 1997).

En nuestro trabajo vamos a considerar los sistemas de representación que utilizan los sujetos cuando resuelven problemas verbales algebraicos elementales.

En este marco conceptual sobre sistemas de representación de los conceptos matemáticos, hemos tenido en cuenta para nuestro trabajo las aportaciones del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.) y, en particular, las de los miembros de dicho grupo en la Universidad de Granada. Trabajos precursores de éste son el de Castro (1995) sobre números figurados, y el de Romero (1997) sobre números reales.

2.7.3. Marco cognitivo.

Existe consenso sobre que el aprendizaje del Álgebra es una tarea difícil para muchos estudiantes, especialmente para el grupo de los menos capacitados (NCTM, 1990), debido a que el Álgebra comprende un pensamiento abstracto elevado.

> ” A pesar de los esfuerzos empleados en los últimos años en la investigación en Educación Matemática, la enseñanza del Álgebra aún suscita muchas cuestiones y las aproximaciones didácticas de introducción al Álgebra (resolución de problemas, generalización, modelización, etc.) siempre conllevan dificultades de aprendizaje para los alumnos” (Radford y Grenier, 1996, p. 253).

Numerosos estudios tratan de encontrar una forma de salvar las dificultades que se producen en la adquisición de un pensamiento algebraico diferenciado del aritmético. Se conjeturan diversas causas para estas dificultades. Sin duda una de ellas, si no la más importante, es la comunicación a través de un lenguaje y de unos sistemas de representación diferentes, extraños para el no iniciado, donde predominan unas notaciones simbólicas y unas reglas con un alto grado de abstracción.

Este carácter abstracto de las representaciones algebraicas convencionales dificulta la comprensión de los conceptos algebraicos por parte de los escolares. Para favorecer la comprensión de estos conceptos nuestra propuesta postula que el profesor inicie a los alumnos en las tareas algebraicas mediante representaciones elementales, que conecten con el gran bagaje aritmético que traen de etapas anteriores, que les permitan avanzar desde lo más cercano y concreto hasta lo abstracto y que, a su vez, facilite el camino inverso.

En un planteamiento cognitivo cercano al procesamiento de la información, asumimos que las distintas representaciones con que los estudiantes abordan los problemas algebraicos orientan acerca de las representaciones mentales que tienen sobre aquellos conceptos del álgebra que están implicados en los problemas. La información obtenida al observar las realizaciones de los escolares puede incidir en propuestas de enseñanza, que ayuden a completar el conocimiento que sobre un concepto algebraico tienen los estudiantes, facilitando el uso de diversos sistemas de representación y de las conversiones entre sistemas, en orden a un mejor dominio del citado concepto.

Sostenemos que la resolución de problemas verbales es un medio adecuado para iniciar el camino de desarrollo cognitivo indicado, dado que se trata de tareas que permiten planteamientos variados mediante diferentes sistemas de representación, desde los más intuitivos y aritméticos hasta los más abstractos y simbólicos, pasando por representaciones de tipo gráfico; también se convierte en un instrumento idóneo para valorar el pensamiento algebraico y los conocimientos sobre álgebra de los escolares.

La resolución de problemas debe ser una poderosa herramienta que favorezca la maduración de competencias del alumno en Álgebra, a la vez que un instrumento útil de evaluación. Cada vez más la resolución de problemas se presenta como tarea adecuada para los dos fines citados: el aprendizaje y la evaluación (Cockcroft, 1985; NCTM, 1990, 1991; Bell, Burkhardt y Swam, 1992; Lamon y Lesh, 1992; Radford, 1995; Radford y Grenier, 1996).

La elección de problemas apropiados que conecten los conceptos algebraicos con las capacidades del estudiante justifica el papel de las representaciones simbólicas y, de esta forma, permiten avanzar en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra.

2.7.4. Ubicación del estudio y referencias a otras investigaciones.

Este trabajo se ha realizado dentro del *Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico*, incluido en el II Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM 0193). Para su realización ha recibido ayuda del Programa Sectorial de Promoción General del Conocimiento de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia durante los bienios 91-93 (PB 90-0849) y 94-96 (PS93-0195), en el Proyecto*“Evaluación de conocimientos, procesos y actitudes en matemáticas”.* La discusión y seguimiento del trabajo se ha realizado en el seno del *Seminario de Investigación y Currículum en Educación Matemática* (Seminario C.I.E.M.) del Departamento de Didáctica de la Universidad de Granada. Información detallada de los grupos y líneas de investigación mencionados puede encontrarse en Rico y cols. (1997, pp. 281-297).

En nuestro trabajo hemos hecho referencia con frecuencia a diversas investigaciones que pueden considerarse precursoras de la nuestra. Las podemos diferenciar en dos campos: las que se refieren al pensamiento algebraico y las aportaciones desde el pensamiento numérico.

Con respecto al primero, uno de los trabajos reiteradamente mencionados es el realizado por Lins (1992), en el cual, entre otros, se hace un estudio de casos sobre las estrategias que utilizan alumnos de 12-14 años en la resolución de problemas algebraicos con distintos grados de dificultad. Se propone una caracterización del pensamiento algebraico, que hemos adoptado en nuestro trabajo para contrastarla con las respuestas que den los estudiantes a los problemas propuestos.

También hemos considerado las investigaciones de Filloy y Rubio (1992) acerca de los diversos métodos de resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. Estos autores ponen de manifiesto que la iniciación al Álgebra mediante la resolución de problemas debe realizarse a través de *aproximaciones numéricas* que den significado al uso de los símbolos, para que en etapas posteriores se logre la competencia necesaria en el empleo adecuado del *método cartesiano (MC)*. Este trabajo conecta con nuestra visión de la utilización de los sistemas de representación, similares a los métodos propuestos por Filloy y Rubio para resolver problemas verbales algebraicos, aunque en nuestro caso describimos y analizamos un mayor número de sistemas de representación.

En el trabajo de Rojano y Sutherland (1995) se pretende impulsar el uso del ordenador en el aula para resolver problemas algebraicos mediante la utilización de las *hojas de cálculo*. Con ello se quiere potenciar la utilización del método de ensayo-error o de conjetura-prueba como paso previo a la introducción de la simbología propiamente algebraica. Esta investigación confirma que el sistema de representación de ensayo-error es una forma válida para resolver un problema algebraico y una buena representación para facilitar al alumno el tránsito de la aritmética al álgebra.

Radford y Grenier (1996) presentan una vía alternativa estructurada para la enseñanza del Álgebra a través de la resolución de problemas verbales. Tomando el desarrollo histórico de la resolución de problemas, proponen tres niveles de abstracción para resolver un problema: un nivel concreto (manipulativo), un nivel semi-concreto (a través de dibujos) y un nivel simbólico (que corresponde al lenguaje algebraico). La propuesta de introducir el dibujo o gráfico como un sistema de representación (nivel) intermedio nos confirma para nuestro estudio sobre el papel que juegan las representaciones gráficas.

Las aportaciones a este trabajo desde el campo del pensamiento numérico tiene sus referencias en los trabajos de Castro (1995) y de Romero (1997).

En el primer caso, la introducción de un sistema simbólico de representación para los números naturales (números figurados) mejora la compresión de los conceptos numéricos, la representación de relaciones entre los números y el reconocimiento de patrones, y proporciona significado a esas relaciones. La construcción en este trabajo de un instrumento de evaluación de Aritmética nos ha motivado para abordar uno que evalúe competencias en Álgebra. Además, hemos confirmado que el dominio de varios sistemas de representación de un concepto matemático mejora el conocimiento de dicho concepto.

En el segundo caso, se consideran, simultanea y complementariamente, los sistemas de representación digitales y analógicos propios del Número Real, estimulando la progresiva profundización en las componentes e interrelaciones de ambos sistema de representación. La utilización de distintos sistemas de representación para la enseñanza de un tópico determinado está relacionada con uno de los estudios que vamos a desarrollar.

Sin embargo, no conocemos ningún trabajo que haya estudiado la resolución de problemas verbales algebraicos en grupos de estudiantes tan dispares como los propuestos en nuestro caso, tomando como criterio discriminador de los grupos el tiempo transcurrido desde que recibieron una instrucción algebraica elemental. Tampoco conocemos que se haya abordado la construcción de un instrumento de evaluación que pueda implicar conclusiones para la instrucción en álgebra.

En nuestra búsqueda hemos encontrado investigaciones sobre la influencia de métodos “visuales” en la enseñanza del álgebra (Palarea y Socas, 1995; Meavilla, 1995), o “aproximaciones numéricas” en los problemas verbales algebraicos como medio de dar sentido a los símbolos (Filloy y Rubio, 1992; Rubio, 1995; Rojano y Sutherland, 1995).

Pero no hemos encontrado ningún trabajo que se haya preocupado en recoger la diversidad de sistemas de representación que ponen en juego los estudiantes cuando resuelven problemas verbales algebraicos, clasificar y categorizar dichos sistemas de representación y relacionarlos con el tipo de problema. Tampoco hemos hallado estudios que establezcan tipologías de resolutores según el tipo de sistema de representación puesto en juego, ni la relación de las tipologías con las posibilidades de éxito en la resolución de los problemas.

Tenemos constancia de que en México, en la actualidad, un grupo de investigadores del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), está llevando a cabo un estudio masivo para conocer la incidencia en los estudiantes de la aplicación de un sistema de representación por Ensayo-Error para resolver problemas algebraicos. Pero no conocemos que se haya iniciado ningún estudio sobre los diferentes sistemas de representación que se pueden aplicar para resolver los problemas verbales algebraicos, ni su utilización con una finalidad evaluadora.

CAPÍTULO 3

REVISIÓN DE LA LITERATURA DE INVESTIGACIÓN

3.1. Fuentes documentales.

Las fuentes documentales consultadas podemos considerarlas bajo dos aspectos:

1) En primer lugar vamos a hacer mención a la documentación que se revisó para realizar el trabajo, en el que colaboramos, *Bibliografía de Investigación sobre Evaluación en Matemáticas. Base de Datos Biem* (Rico y col., 1993), que abarca un período de tiempo que concluye en el año 1992.

2) En segundo lugar relacionaremos las fuentes consultadas a partir de esa fecha, centradas en el área problemática que nos ocupa.

1) Para la *Base de Datos Biem*.

Revistas.

- Arithmetic Teacher, 1979-1992. (*)[1]
- Bordón, 1949-1991.
- Bulletin de la APMEP, nº 357 (1987)-372, 376-380.
- Educational Studies in Mathematics, 1968-1992.
- Enseñanza de las Ciencias, 1985-1992.
- Enseñanza Media, 1956- 1969.
- Epsilón, 1984-1992.
- For the Learning of Mathematics, 1980-1992.
- Infancia y Aprendizaje, 1978-1991.
- Journal for Research in Mathematics Education, 1970-1992.

[1] Las publicaciones marcadas con (*) han sido revisadas a través de referencias obtenidas en la base de datos MATHDI en Noviembre de 1991 o en el Z.D.M.

- L’Enseignement Mathematique, 1986, 1988, 1989.
- Math Ecole, 1979-1986.
- Mathematics Teacher, 1979-1991. (*)
- Mathematique & Pedagogie, nº 7 (1955) -10, 12, 16-24, 41, 43-67.
- Mathematique et Pedagogie, 1975-1992 (excepto tomos 12, 14, 16, 18, 79 y 83).
- Nueva Revista de Bachillerato, 1983-1984.
- Petit x, nº 16 (1988) -24.
- Recherches en Didactique des Mathematiques, nº 1(3), 2(1)-9(1), 9(3).
- Revista de Bachillerato, 1987-1982.
- Revista de Pedagogía, 1922-1936.
- School, Science and Mathematics, 1982-1991.
- Suma, 1988-1992.
- Teaching, Thinking and Problem Solving, 1988-1991. (*)
- Thales, 1984-1987.
- The Journal of Mathematics Behavior, 1985-1991.
- Vida Escolar, 1958-1984.
- Z.D.M., 1987-1992.

Actas de Congresos.

- Jornadas de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales:
    * I Jornadas, Cádiz 1983.
    * II Jornadas, Almería 1985.
    * III Jornadas, Huelva 1987.
    * IV Jornadas, Benalmádena, 1989.
- Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (JAEM):
    * I Jornadas, Barcelona 1981.
    * II Jornadas, Sevilla 1982.
    * III Jornadas, Zaragoza 1983.
    * IV Jornadas, Santa Cruz de Tenerife 1984.
- Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las

Ciencias y de las Matemáticas:

* I Congreso, Barcelona 1985.
* II Congreso, Valencia 1987.
* III Congreso, Santiago de Compostela 1989.

- International Conference on Mathematical Education (ICME):
  * I ICME, Lyon 1969.
  * II ICME, Exeter 1972.
  * III ICME, Karlsruhe 1976.
  * IV ICME, Berkeley 1980.
  * V ICME, Adelaida 1984.
  * VI ICME, Budapest, 1988.
- Conference of Psychology of Mathematics Education (PME):
  * 9th PME, Utrech 1985.
  * 10th PME, Londres1986.
  * 11th PME, Montreal 1987.
  * 12th PME, Veszprem 1988.
  * 13th PME, París 1989.
  * 14th PME, México 1990.
  * 15th PME, Asisi 1991.

Bases de Datos.

- ERIC consultada en Noviembre de 1991 con los descriptores: Mathematics, Achievemente, Secondary, Inglés, Francés, Español, Italiano.
- ISOC del CSIC consultada en Noviembre de 1991 con los descriptores: Evaluación, Rendimiento Escolar y Matemáticas.
- MATHDI consultada en Noviembre de 1991 con los descriptores: Achievement, Secondary, Evaluation, No German, No Software or Computer. School, Leaving, Examination, No German. Secondary, Test Theory, Achievement, Evaluation, No German, No Software or Computer. Secondary, Achievement, No German, No Software or Computer.

- REDINET del CIDE consultada en febrero de 1992 con los descriptores: Investigación, Matemáticas.

Libros.

- Biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada con la signatura DDM.
- Biblioteca particular del profesor L. Rico.

2) Actualización de la bibliografía.

Revistas.

Haremos referencia tanto a las revistas citadas anteriormente de las que se ha hecho un seguimiento continuado, como a nuevas publicaciones, tomando como fecha tope de consulta finales del año 1996. No obstante, antes de pasar a la redacción definitiva de este trabajo, se ha continuado en la consulta de los números publicados en los primeros meses de 1997, cuando ha sido posible.

- Aula de Innovación Educativa.
- Educación Matemática.
- Educational Studies in Mathematics.
- Enseñanza de las Ciencias.
- Epsilón.
- For the Learning of Mathematics.
- Journal for Research in Mathematics Education.
- Suma.
- Teaching Children Mathematics.
- The Journal of Mathematics Behavior.
- Uno

Actas de Congresos.

- International Committee on Mathematical Education (ICME):
    * VII ICME, Montreal 1992.

* VIII ICME, Sevilla 1996.

- Conference of Psychology of Mathematics Education (PME):
  * 16th PME, Durham 1992.
  * 17th PME, Tsukuba 1993.
  * 18th PME, Lisboa 1994.
  * 19th PME, Recife 1995.
  * 20th PME, Valencia 1996.

Bases de Datos.

- ERIC consultada en Octubre de 1995 con los descriptores: Knowledge, Achievement, Mathematics, Instruments, Problems, Cognitives Process, Writes Process.

Libros.

- Biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada con la signatura DDM.
- Bibliotecas particulares de los profesores L. Rico y A. Fernández Cano.

Nota. Queremos destacar la revisión que se ha realizado de los trabajos, que sobre Álgebra, se han publicado en las Actas (Proceeding) de las reuniones del PME desde la constitución del grupo de trabajo “Procesos y Estructuras Algebraicas” en 1990 en México, así como el seguimiento de otros trabajos publicados por miembros de este grupo en diversos medios (libros, revistas, etc.).

A continuación hacemos un recorrido intensivo por la literatura que tiene relación con el problema que aquí se contempla. Se incluye tanto literatura conceptual, como de investigación, dado que ambas están estrechamente relacionadas en este área problemática.

De la revisión que hemos efectuado vamos a referir una selección de aquellos trabajos que han tenido mayor presencia y significación en nuestro estudio. Esta revisión la dividimos en seis bloques temáticos, cuyos contenidos desarrollaremos en los apartados que siguen.

3.2. Evaluación en matemáticas.

Por lo que se refiere a las reflexiones teóricas y estudios generales sobre evaluación en matemáticas, destacamos los documentos que nos resultan más significativos tanto en la literatura internacional como en la española. En relación con los documentos consultados procedentes de la literatura internacional destacamos dos trabajos, realizados por Romberg y Webb, respectivamente:

La evolución histórica de la evaluación en matemáticas ha sido estudiada con detalle por Romberg (1989). Desde su implantación a mediados del siglo pasado, la evaluación en matemáticas se ha venido concretando mediante unos instrumentos específicos, llamados pruebas, que se han aplicado en exámenes y controles, procurando satisfacer a criterios como la imparcialidad, la justicia, la objetividad y la equidad. Se detalla el período de las pruebas con relación a norma y con relación a criterio.

A lo largo de los cien últimos años las pruebas de evaluación han evolucionado y se ha llegado a una variedad de modelos estereotipados, producto de una acotación y reducción del tipo de cuestiones que se consideran adecuadas para la evaluación. La adaptación de la evaluación en matemáticas a las condiciones óptimas de objetividad han proporcionado a la asignatura y a sus profesores dos rasgos destacables: respetabilidad y poder de decisión.

También se describe la llegada del período en que se lleva a cabo la evaluación de los programas, presentando los modelos empleados y las características de los mismos.

Finalmente se establecen criterios a considerar y se señalan necesidades a las que hay que atender en una futura evaluación en matemáticas.

Una de las propuestas teóricas más ambiciosas y mejor estructuradas de los últimos años sobre evaluación en matemáticas se debe a Webb (1992). En su trabajo, publicado en el Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics, comienza planteando cuatro cuestiones:

> “ Primera: ¿Cómo se relaciona la especificidad del contenido matemático, cuyo conocimiento se valora, con las respuestas obtenidas?
>
> Segunda: La fiabilidad y la validez son nociones prioritarias en cualquier valoración, ¿cómo se aplican esas nociones cuando la valoración se hace mediante actuaciones diferentes de un test?
>
> Tercera: existe un problema con la agregación de información, ¿cómo se agrega la puntuación en un test con las observaciones de los profesores y con los proyectos de los estudiantes?
>
> Cuarta: ¿cuál es la relación entre la valoración del conocimiento en matemáticas y la valoración en otras áreas, o bien la valoración de destrezas cognitivas generales?” (p. 677).

La reflexión que sigue trata de encontrar respuestas fundadas a las cuestiones anteriores, destacando los principales problemas con los que se enfrenta la evaluación en la actualidad.

Igualmente destacamos dos documentos importantes entre las aportaciones españolas a este campo de estudio:

La propuesta de Alsina y col. (1996) en *Enseñar matemáticas (en la etapa 12-16)* distingue tres etapas en la Evaluación: Inicial, Seguimiento y Final.

En la Evaluación Inicial se pretende reconocer los preconceptos del alumnado y para ello se proponen instrumentos como los tests cerrados de elección múltiple, cuestionarios abiertos o cerrado y mapas conceptuales, indicando diversos materiales de laboratorio que se pueden utilizar para las partes y contenidos de las matemáticas de esta etapa.

La Evaluación de Seguimiento se propone como un trabajo formativo que forme parte del proceso de enseñanza que se ha proyectado, para lo que:

* se ha de planificar el proceso de evaluación explicando los elementos-formatos

que se utilizarán como control.

* se han de regular las actividades de clase, mediante el cuaderno de clase, preguntas del enseñante, organizadores conceptuales, uso de sintetizadores, la observación sistemática.

* se ha de establecer un control que permita recoger datos referentes a elementos generales, intencionales, instruccionales y actitudinales para interactuar en el aula eficazmente.

Las Evaluaciones Finales se proponen:

* sobre la valoración de objetivos generales, utilizando algún tipo de parrilla en la que apuntar valoraciones sobre el alcance de los objetivos, o bien utilizar actividades de seguimiento retroactivo.

* sobre el rango bajo, medio o alto, según el tipo de actividades a realizar, desde las más rutinarias hasta las más complejas.

* sobre los niveles de dificultad de las actividades dentro de cada rango de los citados anteriormente.

Para cada uno de los apartados anteriores se ofrecen ejemplos de actividades a realizar, o de instrumentos aplicados a un tópico determinado, que pueden ser extensivos a otros contenidos de las matemáticas en la etapa de 12-16.

En el trabajo de Giménez (1997) se hace un amplio recorrido por la evaluación en matemáticas desde la perspectiva de la Reforma Educativa emprendida en España en los últimos años.

El autor analiza diversos modelos de evaluación en matemáticas y aborda la propuesta de un modelo articulado como un proceso integrado de evaluación. Para ello se explicitan los criterios y se ejemplifican, presentando las etapas, funciones y decisiones correspondientes y cómo se organizan. Se tienen en cuenta problemas importantes como el tratamiento a la diversidad y el control de calidad del proceso.

El trabajo plantea la evaluación de los hechos, de los contenidos conceptuales y los procedimientos en matemáticas, valorando los criterios necesarios para una buena organización de cuestionarios en general, recogida de datos y elaboración de informes. Todas las cuestiones que se abordan están seguidas de ejemplos de aplicación práctica en el aula de matemáticas.

El último capítulo del libro está dedicado a la autorregulación en matemáticas, y se explican las características del diálogo y de la reflexión como elemento autorregulador del proceso sobre el quehacer matemático.

En nuestro caso, también hemos realizado un trabajo sistemático sobre evaluación en matemáticas, que puede considerarse antecedente de esta investigación.

En el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y dentro del Seminario de Investigación Curricular e Innovación en Educación Matemáticas (CIEM), hemos llevado a cabo diversos estudios sobre el tema que nos ocupa. Un primer estudio aparece en *La Evaluación en el Aula de Matemáticas* (Tortosa y col., 1995), donde se hace una recopilación y sistematización del concepto de evaluación, a través de una amplia revisión bibliográfica de documentos procedentes del campo de la pedagogía y la didáctica general, además de debates seguidos con grupos de alumnos y profesores en diversos encuentros.

Como ampliación y continuación del estudio anterior apareció el trabajo: *Bibliografía de Investigación sobre Evaluación en Matemáticas. Base de Datos B.I.E.M.* (Rico y col., 1993)[2], que incluye la revisión de 313 documentos específicos sobre el tema. La base de datos está organizada sobre 15 campos distintos. Uno de ellos se refiere a los términos clave mediante los que se pueden caracterizar los documentos e informes estudiados. Estos términos son: Teoría; Currículo; Métodos y Criterios; Instrumentos; Fiabilidad y Validez; Valoración. En base a estos términos clave se realiza la primera delimitación conceptual de los estudios sobre evaluación.

Un tercer trabajo es el que se refiere a las creencias que tiene el profesor de matemáticas sobre la evaluación, a través de una encuesta a profesores de todos los niveles de la enseñanza de las matemáticas. Este estudio dio lugar a la publicación: *Conocimientos y Creencias de los Profesores de Matemáticas sobre Evaluación* (Rico y col.,

[2] Trabajo que se llevó a cabo en el Proyecto de Investigación PB90-0849 de la Dirección General de Investigaciones Científicas y Técnicas (DGICYT) del M.E.C.

1995)[3], donde se establecen las características que debe tener, en opinión de los profesores, la evaluación en matemáticas.

Más recientemente, en *Cuestiones abiertas sobre evaluación en matemáticas* (Rico y col., 1997) se presenta a la evaluación como una componente del complejo plan de formación denominado currículo de matemáticas, sometida a las presiones y fuerzas que impulsan los cambios curriculares. Se comentan algunos de los estándares, recomendaciones y criterios propuestos sobre evaluación e innovaciones curriculares en curso, y se concluye planteando algunos de los interrogantes abierto actualmente en el campo de la evaluación en matemáticas.

Las respuestas a dos preguntas claves de una reflexión sobre la evaluación en matemáticas se abordan en *¿Por qué y para qué evaluar en matemáticas?* (Giménez y col., 1997). Para ello se establece que las funciones básicas de la evaluación son: social, política, pedagógica y profesional. Se indican como exigencias de una buena evaluación en matemáticas que sea válida y reproducible, debe otorgar significado y debe ser un medio de comunicación pertinente que se acepta por el profesor y por los estudiantes. Se hace una consideración histórica y se promueve una nueva reflexión de qué, cuándo y cómo se debe evaluar en matemáticas.

En *La practica de la evaluación aplicada al área de matemáticas* (Fernández y col., en prensa) se presenta a la evaluación de matemáticas dentro de la reforma educativa de la enseñanza obligatoria propiciada por la LOGSE que se está implantando en la actualidad. Se hace una exposición de los criterios que sobre este tópico recoge la Ley, junto con otros criterios propuestos por expertos e innovadores en estudios curriculares. Se hace una propuesta de evaluación en matemáticas centrada en la resolución de problemas y se describen tres posibles instrumentos para llevarla a cabo. Finalmente, se ofrecen dos casos prácticos en los que se aplican los instrumentos descritos.

Destaquemos también las aportaciones de Goldin (1992), Lesh y col. (1992), Niss (1993a, 1993b), Romberg (1995).

---

[3] Trabajo llevado a cabo en el Proyecto de Investigación PS93-0195 de la Dirección General de Investigaciones Científicas y Técnicas (DGICYT) del M.E.C.

3.3. Criterios e instrumentos para la evaluación en matemáticas.

Uno de los aspectos de la evaluación en matemáticas más interesante para la finalidad de nuestro estudio, es la elaboración de instrumentos y la determinación de criterios para su puesta en práctica, que permitan dar respuesta a los retos planteados por los cambios curriculares en la enseñanza obligatoria. En esta revisión hemos considerado, dentro de una amplia gama, algunas propuestas, entre las que destacamos las referidas al conocimiento algebraico y a la resolución de problemas.

Una investigación pionera es la realizada sobre evaluación de conocimientos algebraicos por Küchemann (1978, 1981), llevada a cabo en 1976, como parte del proyecto de evaluación CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science). En síntesis, consistió en un estudio a gran escala sobre las interpretaciones de los estudiantes de los términos literales que se presentan en expresiones algebraicas. Administró un test con 51 ítems en formato de papel y lápiz a 3000 estudiantes británicos de entre 13 y 15 años de edad. Usando una clasificación originalmente desarrollada por Collis (1975), Küchemann categorizó cada ítem dentro de uno de los siguientes seis niveles de interpretación de las letras en textos matemáticos y problemas, de acuerdo al nivel mínimo requerido para resolver correctamente la tarea:

- Letra evaluada: la letra se asigna a un valor numérico desde el principio.
- Letra no considerada: la letra se ignora o su existencia se reconoce sin darle significado.
- Letra considerada como un objeto concreto: la letra se contempla como un signo taquigráfico para un objeto concreto o el objeto concreto en sí mismo.
- Letra considerada como una incógnita específica: La letra es contemplada como un número específico que es desconocido.
- Letra considerada como un número generalizado: la letra es vista como representante, o al menos llega a tomarse como tal, de distintos valores.
- Letra considerada como una variable: la letra se contempla como un conjunto de valores no específicos con unas relaciones sistemáticas, se la considera como elemento de una relación entre dos conjunto semejantes de valores.

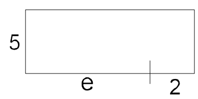
Küchemann encontró que sólo un pequeño porcentaje de los alumnos consideraba las letras como un número generalizado y más de la mitad de los estudiantes trataban a las letras como objetos concretos o las ignoran.

Estos y otros resultados obtenidos por Küchemann, así como algunos de los ítems utilizados en la prueba, han sido profusamente utilizados en posteriores investigaciones para conocer el papel del lenguaje simbólico en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra y han marcado una línea en las investigaciones sobre evaluación del conocimiento algebraico.

A modo de ejemplo vamos a mencionar dos de los ítems cuya utilización hemos constatado en otras investigaciones:

* ¿Cuándo es cierta la igualdad   L+M+N = L+P+N?

* Determinar el área del rectángulo de la figura



En relación con la evaluación sobre resolución de problemas, Charles, Lester y O'Daffer (1987) consideran cuatro métodos para evaluar la capacidad de los alumnos en este campo:

a) Observar y preguntar a los alumnos

b) Utilizar datos valorativos dados por los alumnos

c) Evaluar el trabajo matemático de los alumnos

d) Utilizar exámenes de opción múltiple o de respuestas cortas.

El apartado c), "Evaluar el trabajo matemático de los alumnos"**,** está enfocado preferentemente a la resolución de problemas para su utilización en el aula de matemáticas. Se indica que el profesor debe prestar más atención a los procesos que siguen los estudiantes en la resolución de un problema que a la respuesta final. La evaluación de procesos lleva consigo también analizar los procesos incorrectos y observar los errores que se ponen de manifiesto en la resolución de los problemas.

Estos autores describen dos técnicas concretas de evaluar los trabajos escritos en resolución de problemas: la puntuación analítica y la puntuación global.

En la puntuación analítica se utiliza una escala con la que se asignan puntos a cada una de las fases de la resolución del problema. Por tanto, el primer paso para elaborar una escala de puntuación analítica es decidir qué fases de la resolución de problemas hay que tener en cuenta. El segundo paso es especificar el rango de las puntuaciones para cada fase.

La puntuación global es una técnica de evaluación basada en la teoría de que las entidades globales tienen una existencia superior a la mera suma de sus partes. La puntuación global asigna un único número, en una escala de rango 0-4, al trabajo realizado por el estudiante en la resolución de un problema de acuerdo con criterios específicos relacionados con los procesos mentales que entran en juego en dicha resolución.

A esta escala se le han realizado ligeras modificaciones. Por ejemplo, Otis y Offerman (1988) presentaron una modificación a la escala de Charles y col. (1987), en la que distinguieron entre problemas que son completamente correctos y los que contienen pequeños errores. El diseño de una escala de puntuación total no fue rígido sino que quedó abierta a las modificaciones que el profesor pueda introducir.

Recientemente se han publicado diversas monografías dedicadas a los criterios e instrumentos para la evaluación. Entre ellas destacamos las siguientes.

En primer lugar la publicación del NCTM (1991) *Mathematics assessment: myths, models, good questions, and practical suggestions*, en la cual se hace un recorrido por distintos aspectos de la evaluación en matemáticas: la evaluación del centro desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, la programación de tareas por parte del profesor y su labor en el desarrollo de la clase, la propuesta de cuestiones que sirvan para la evaluación continua, formativa, del estudiante.

El abanico de instrumentos es muy amplio, depende de los objetivos de la evaluación, del tipo enseñanza-aprendizaje, del profesor y de los estudiantes.

Algunos de los instrumentos y técnicas que se proponen para la evaluación en matemáticas a través de tareas, fundamentalmente, de “papel y lápiz” son:

- *Análisis de errores de Newman* (Clarke, 1988), en donde mediante una entrevista estructurada de cinco puntos se ayuda a los estudiantes que empiezan a resolver problemas verbales, tratando de identificar los errores que se puedan producir para conocer mejor el proceso de pensamiento de los estudiantes.

- *Cuestiones de respuesta abierta*. Se trata de cuestiones en las que para resolver un problema se dan una serie de pasos preparados para conseguir una respuesta particular.

- *Cuestiones de resolución abierta (Open-Ended)*: el estudiante puede dar una serie de respuestas correctas, de las que, para evaluar debemos escoger los diversos caminos tomados antes que las soluciones mismas: se insiste en el proceso de resolución antes que en la solución. Se dan una serie de criterios para evaluar las respuestas, según los elementos empleados en el proceso de resolución.

En segundo lugar, destacamos las aportaciones de Bell, Burkhard y Swam (1992) sobre la propuesta de criterios para seleccionar tareas, los cuales hacen hincapié en que éstas deben presentarse en *paquetes de evaluación* y que satisfagan dos principios importantes:

Equilibrio curricular: deben reflejar, en su conjunto, los objetivos del currículo de manera equilibrada.

Validez curricular: deben ser, además, actividades de aprendizaje que aprovechen el tiempo empleado en su ejecución.

Los criterios y principios desarrollados vienen acompañados de algunos ejemplos de tareas de evaluación, junto con la valoración que puede darse a los diversos modos de llevar a cabo la tarea.

En tercer lugar, Lamon y Lesh (1992) abordan la discusión sobre un tipo de cuestiones para la evaluación del conocimiento matemático que, además de ser cuestiones abiertas y con posibles resoluciones correctas, tienen la característica de que las diversas resoluciones pueden implicar distintos niveles de complejidad del pensamiento matemático. Son las llamadas *cuestiones de elicitación del conocimiento (model-eliciting)*. En ellas se evalúan procesos antes que las soluciones mismas. Son tareas que deben proporcionar oportunidades para la construcción de modelos cognitivos de distintos niveles de complejidad o de profundidad.

> “Cuando un profesor usa problemas de este tipo, la instrucción y la eva-

> luación llegan a ser inseparables. Los problemas ofrecen la oportunidad de documentar un nivel inicial del estudiante, y las transformaciones que se realizan en él hasta alcanzar un nivel más complejo, más maduro. Al mismo tiempo, el profesor recibe un amplio abanico de respuestas de la clase, que ordenadas por sofisticación, dan un retrato de la manera en que los conocimientos de los estudiantes se desarrollan, lo que ofrece al profesor la base para tomar decisiones de instrucción" (Lamon y Lesh, 1992, p. 341).

Estos autores ejemplifican una serie de tareas de elicitación, a través de la resolución de problemas verbales, referidas al tópico de la proporcionalidad y al razonamiento proporcional.

En relación con los documentos españoles sobre evaluación en matemáticas para la enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16), destacamos la propuesta de Fortuny, Giménez y Alsina (1994) de un paquete integrado de actividades sobre evaluación, denominado IPMA (Integrated Package of Mathematical Assessment), y que ha sido desarrollado en el ciclo 12-16 en disitntos formatos. En el proyecto han participado cuatro profesores de escuela secundaria del área de Barcelona entre 1992-1993, y posteriormente otros 40 profesores, también de secundaria, que han prestado su colaboración en dicho proyecto.

Los profesores revelan tres niveles de observación en la evaluación continua: a) objetivos locales como un logro específico; b) objetivos generales; c) intenciones, actitudes y confianza como mejora del entorno de clase.

Algunas tendencias que emergen de esta experiencia e investigación son:

- El paquete de evaluación incluye un proceso de aprendizaje específico en el que las tareas de observación fueron facilitadas por las parrillas que se proponen en el trabajo desarrollado. Las actividades interdisciplinares y algunas otras de las propuestas ofrecen oportunidades para mejorar la enseñanza.

- El paquete está en concordancia con un proceso continuo de evaluación, y está sincronizado con el nuevo currículo en España.

- Los estudiantes tienen un papel importante asumiendo responsabilidades en la construcción de los procesos de aprendizaje. Los profesores deben ser cuidadosos en sus propuestas de objetivos generales para ser evaluados y tener un nuevo papel, lo cual es difícil de aceptar.

- La evaluación a través del paquete (desde el punto de vista del estudiante) es bien aceptada por los profesores como una función del perfil del estudiante en el tiempo.

Los perfiles cambian con el tiempo y el profesor puede observar el progreso real del estudiante comparando gráficos para cada categoría de actividades propuestas en el paquete. También puede trabajar con grupos flexibles siguiendo diferentes caminos o puede reestructurar las unidades mediante una serie de pasos guiados.

Los autores proponen que el mismo problema conceptual o procedimental sea analizado usando una perspectiva diferente, una estrategia nueva o una situación distinta.

Finalmente, en este apartado podemos citar también, entre otros, los trabajos de Wilson (1992), Shell Center for Mathematical Education (1993), NCTM (1995), Clarke (1996).

3.4. El paso de la Aritmética al Álgebra.

A raíz del informe que sobre “Investigación relacionada con el proceso de aprendizaje de las matemáticas” se presentó en el ICME 3, en Karlsruhe (Bauersfeld y Skowronek, 1976), y las discusiones que se siguieron, la investigación sobre educación matemática sufrió un cambio de dirección significativo, consistente en dar prioridad a las investigaciones sobre procesos de aprendizaje específicos de un contenido y *no* a los estudios basados en una teoría del aprendizaje general y neutral respecto del contenido, para derivar de ella una teoría del aprendizaje matemático.

Desde entonces, gran parte de las investigaciones realizadas en educación matemática han tomado como foco de interés el contenido específico matemático. Este enfoque ha tenido una incidencia especial para algunos campos de las matemáticas, como ha ocurrido con los estudios sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra. Así ha ocurrido con los estudios llevados a cabo por investigadores en álgebra del International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME), grupo que se formó en el seno del ICME anteriormente mencionado.

Entre los tópicos que han recibido mayor atención dentro de los estudios dedicados a la enseñanza-aprendizaje del álgebra se encuentran los referidos a la transición de la aritmética al álgebra

Cuando un estudiante comienza sus estudios de álgebra ya trae un bagaje bastante completo de nociones, enfoques y experiencias en aritmética, que se han ido madurando a lo largo de, al menos, seis años de escolarización. Sin embargo:

> "El álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones" (Kieran y Filloy, 1989, p. 229).

Uno de los conceptos distintivos del paso de la aritmética al álgebra es el sentido diferente del signo "=". Kieran y Filloy (1989) señalan que la idea extendida de los estudiantes que comienzan con el álgebra es que el signo igual es la "señal de hacer algo" antes de un símbolo de la equivalencia entre los lados a la izquierda y a la derecha (del signo igual) de una ecuación. En este artículo se hace una exposición de otros conceptos que tienen un significado y tratamiento distinto en aritmética y en álgebra, lo que produce no pocas dificultades para los estudiantes que se inician en el álgebra.

Advierten de la falta de modelos paradigmáticos en las investigaciones recientes en álgebra, por lo que todavía es necesario indicar las fronteras de muchos proyectos de investigación

Por otro lado, estos mismos autores indican que cuando se usan sistemas de signos matemáticos en una situación de resolución de problemas algebraicos, se entremezclan el nivel de competencia con el aspecto pragmático, que procede del entorno de enseñanza en el que se está llevando a cabo el proceso de aprendizaje,

> "...siendo la notación algebraica la manera más inmediata, pero no la más fuerte, de todas las formas particulares de usar los sistemas de signos matemáticos en su aplicación a la ciencia, la tecnología y los procesos de información social actuales....Piénsese en todas las evidencias ... sobre la tendencia de los sujetos a mantener interpretaciones aritméticas de la mayoría de las situaciones algebraicas, incluso en etapas bien avanzadas del estudio del álgebra" (Kieran y Filloy, 1989, p. 236).

Sobre la resolución de ecuaciones, señalan que los enfoques usados se pueden clasificar en tres tipos: a) intuitivo, b) sustitución por tanteo, y c) formal.

Kieran y Filloy terminan el estudio citado dirigiendo una apuesta a futuras investigaciones del papel de la computadora en la enseñanza del álgebra, ya que permite enfocar esta enseñanza desde el punto de vista de los procesos y las acciones.

En un estudio llevado a cabo por Arcavi, Friedlander y Hershkowitz (1990), se investiga la habilidad en pre-álgebra de los estudiantes cuando hacen transiciones desde lo cuantitativo a lo cualitativo y viceversa, a la vez que generalizaciones de determinadas situaciones. Para ello analizan, en un estudio de casos (bien en estudiantes individuales o por parejas), las respuestas a tres situaciones problemáticas que empiezan con un carácter meramente cuantitativo (aritmético), para derivar en expresiones cualitativas y generalizaciones (álgebra).

Como resultado de esta investigación dan cuenta de que hay estudiantes que pueden, al menos parcialmente, actuar en un nivel cualitativo sin el lenguaje simbólico del álgebra. También indican que hay situaciones en las que la falta de las herramientas simbólicas impiden su realización, el avance.

Por otro lado advierten que el lenguaje algebraico, que captura la "esencia" de las matemáticas desde una gran variedad de situaciones, puede llegar a ser usado como una técnica de manipulación sin sentido de símbolos en reglas arbitrarias.

Los estudiantes que han intervenido en la investigación son de 7º curso (12-13 años), que no han recibido instrucción algebraica, y los más avanzados se pueden considerar que están en una situación pre-algebraica. Sin embargo, determinadas situaciones, como las que se tratan en este estudio, dan sentido al aprendizaje de los símbolos y técnicas algebraicas, porque desarrollan en los estudiantes la conciencia de la necesidad de las herramientas algebraicas:

> "Hemos visto que, en general, los alumnos son capaces de llegar a un estadio de generalización, así como a diferentes tipos de justificaciones sin utilizar el lenguaje algebraico. Por contra, se ha reconocido un cierto número de situaciones para las que la ausencia de un útil simbólico representa un obstáculo para el pensamiento y la acción" (p. 70).

Un tercer trabajo, importante para nuestra consideración, es el estudio acerca de los modos de aprendizaje que deben favorecer la introducción al álgebra mediante conexiones satisfactorias con la aritmética, que se ha llevado a cabo por Schmidt y Bednarz (1997) mediante una encuesta a un grupo de futuros profesores de enseñanza primaria, secundaria y enseñanza especial.

Se ha tratado de buscar el nexo entre los modelos de razonamiento aritmético y algebraico que se utilizan en la resolución de problemas. Para ello se ha propuesto, a una muestra de 164 futuros profesores, la resolución de cuatro problemas de aritmética y cuatro de álgebra.

Los resultados de la prueba indican una dicotomía entre los sujetos que resuelven mediante procedimientos aritméticos (fundamentalmente el grupo de futuros profesores de enseñanza especial) y los que lo hacen mediante procedimientos algebraicos (fundamentalmente los futuros profesores de secundaria), incluso con los problemas aritméticos. El grupo de futuros profesores de primaria parece, en esta investigación, mejor preparado para tratar con los dos procedimientos indistintamente.

Se concluye con la constatación de la dificultad que tienen los futuros profesores de secundaria de comprender las estrategias de las que se valen los estudiantes en el "álgebra introductoria", y que existe un nexo entre los tipos de razonamiento aritmético y algebraico mediante el "tipo de razonamiento aritmético estructurado".

Además de los trabajos descritos, queremos destacar en este campo, sin pretender ser exhaustivos, los realizados por Filloy y Rojano (1984, 1989), Socas y otros (1989), Rojano (1994), Arcavi (1994, 1995), Da Rocha (1995), Ursini (1996), Linchevski y Hercovics (1996), Bednarz y Janvier (1996).

3.5. Pensamiento algebraico.

Uno de los problemas que hemos detectado a lo largo de nuestra investigación es la falta de acuerdo sobre lo que es el *pensamiento algebraico* de los estudiantes. En efecto:

> "Hoy en día el álgebra no es meramente "dar significado a los símbolos" sino otro nivel más allá de eso, que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos, por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, es lo que significa pensar algebraicamente" (Love, 1986, p. 49).

En este punto ha resultado para nosotros especialmente valioso el trabajo de Lins (1992), quien hace aportaciones esenciales para describir lo que se entiende por pensamiento algebraico. El problema de investigación que se presenta consiste en proporcionar una caracterización de la actividad algebraica.

El trabajo se estructura en tres partes:

i) una caracterización teórica del *pensamiento algebraico*, que se presenta distinto del álgebra, proponiendo que *pensar algebraicamente* es:

* pensar *aritméticamente*

* pensar *internamente*, y

* pensar *analíticamente*

explicando y analizando cada una de estas características detalladamente.

ii) un estudio del desarrollo histórico del álgebra y del pensamiento algebraico, encontrando que la caracterización propuesta es adecuada para comprender las tensiones que ha involucrado la producción de conocimiento algebraico en las diferentes culturas matemáticas.

iii) un estudio experimental, en el que se examinan los modelos usados por escolares de secundaria, en Brasil y en Inglaterra, para resolver problemas verbales algebraicos y problemas de "números secretos". Se comprueba que la caracterización del pensamiento algebraico propuesta, provee de un marco que explica los diferentes tipos de soluciones e identifica las fuentes de errores y dificultades en algunas soluciones dadas por los estudiantes.

Termina indicando que el uso de modelos no-algebraicos, para explicar determinados hechos algebraicos, representa un obstáculo para el desarrollo de un modo algebraico de pensamiento, no sólo porque los *significados* en estos modelos son completamente distintos de los correspondientes al pensamiento algebraico, sino porque la manipulación directa de los números como medidas, entra en conflicto con una comprensión *simbólica* del número, que es un aspecto necesario del *pensamiento algebraico*.

Arzarello, Bazzini y Chiappini (1995) también han estudiado el proceso de adquisición del conocimiento en álgebra, el cual reconocen por ser inseparable de su lenguaje formalizado. El álgebra no se puede trabajar sin una componente escrita, con sus reglas sintácticas, a través de una traducción (traslado), por parte de los estudiantes, de las estrategias verbales a las fórmulas o planteamientos escritos.

Comprender la funcionalidad del sistema de signos del Álgebra es uno de los problemas didácticos más delicados de su enseñanza-aprendizaje.

Para estos autores,

> "el pensamiento algebraico es aquel que construye las propuestas del álgebra elemental ejecutando una gama de interpretaciones (activando diferentes sentidos y/o produciendo diferentes expresiones en los marcos conceptuales convenientes) de un texto a un sistema semiótico (por ejemplo, un problema en el lenguaje ordinario), a un texto en otro sistema (por ejemplo, una ecuación), o desde un texto en un sistema (por ejemplo, una expresión algebraica) a un texto en un sistema parecido (por ejemplo, otra expresión algebraica)" (p.

122).

En este trabajo se introduce la noción de SP: *espacio-tiempo didáctico de producción y comunicación*, que tiene que ver con una situación social espacio-temporal del entorno del sujeto con la que tiene un contacto real. Este espacio-tiempo, que el profesor designa para que el estudiante planifique actividades y tareas, es el que se usará para analizar situaciones de aprendizaje en álgebra.

La convicción de que las situaciones de aprendizaje efectivo en álgebra se pueden desarrollar sólo dentro de un SP apropiado, conduce a los autores a una experiencia con estudiantes de diferentes niveles, desde la enseñanza obligatoria hasta la universitaria en diferentes ciudades (Génova, Pavía, Torino).

En la investigación se utilizan tres ejemplos de problemas: a) el primero se presenta a estudiantes de 6º-7º grado y se desarrollan en dos SP, uno en tareas de papel y lápiz y otro en un entorno computacional a través de hojas de cálculo; b) el segundo se dirige a estudiantes de 4º-5º grado, que trabajan en grupos de 5, simulando un mercado en clase, mediante aproximaciones aritméticas; c) el tercero explora los grupos isométricos de los poliedros regulares y se lleva a cabo entre estudiantes universitarios.

La conclusión es que los procesos de construcción e interpretación (de una fórmula o expresión algebraica) sólo pueden desarrollarse inmersos en un SP, donde los estudiantes puedan llevar a cabo una interacción social, que es un cambio interpersonal entre el alumno y el entorno (profesor, matemáticas...) junto con los mediadores adecuados (llamados artefactos culturales, como libros, computador...). De esta forma el principiante puede aprender álgebra al tiempo que trabaja en un entorno cultural y social.

En otra investigación, que se ha llevado a cabo mediante una experiencia con niños de 5º de Primaria (10-11 años), se ha puesto de manifiesto la adquisición por estos escolares de un pensamiento algebraico, a través de la resolución de problemas no rutinarios. Zack (1995) lleva a cabo este estudio con 25 niños de 10-11 años en una escuela privada de Montreal, Canadá.

A través de un problema de túneles y otro sobre las diagonales de un polígono, conecta la rica experiencia aritmética de los estudiantes para construir expresiones algebraicas.

Se trabaja en parejas, replanteando, interpretando, aclarando y comprobando, sin dejar cerrada la cuestión que se plantea.

Al final hay un grupo de trece estudiantes que comprenden la naturaleza algebraica de los problemas, nueve obtienen expresiones algebraicas y cuatro usan una regla general poderosa para su resolución. Los otros doce comprenden aspectos de los problemas, pero no podrían expresar la solución algebraicamente.

Se concluye que, mediante estrategias adecuadas se puede desarrollar un pensamiento algebraico en los niños que permita la generación de ecuaciones (expresiones algebraicas) para la resolución de problemas del tipo de los propuestos.

En esta misma línea de estudios sobre pensamiento algebraico, citaremos algunos trabajos recientes, como los realizados por Lins (1994,1995), Bloedy-Vinner (1996), Healy y Hoyles (1996), Heid (1996).

3.6. Resolución de problemas algebraicos.

Sobre la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos queremos destacar el trabajo de Filloy y Rubio (1992), en el que se describen los resultados obtenidos en estudios experimentales de aula y en entrevistas clínicas con estudiantes de 15-16 años, analizando la aplicación de tres modelos didácticos para la resolución de este tipo de problemas:

Los modelos de resolución se identifican con las siglas:

- MIAS (Método de Inferencias Analíticas Sucesivas) es un método para resolver estos problemas utilizando sólo la aritmética, que en nuestro trabajo lo asimilamos al sistema de representación Parte-Todo.

- MAES (Método Analítico de Exploraciones Sucesivas) que utiliza exploraciones numéricas para desencadenar el análisis del problema y con ello su solución. En este caso, el sistema de representación que se ajusta a este método, y que nosotros utilizamos en nuestra investigación, es el Ensayo-Error

- MC (Método Cartesiano) en donde, por medio de expresiones algebraicas, se llegan a establecer una serie de relaciones expresadas en lenguaje simbólico, que conducen a una o varias ecuaciones de donde se obtiene la solución. El sistema de representación simbólico que hemos considerado en nuestro estudio puede identificarse con este método.

En la investigación se observa que el Método Analítico de las Exploraciones Sucesivas (MAES) sirve como antecedente para la elaboración de significados de las relaciones algebraicas que se establecen en el Método Cartesiano:

> "(...) creo que he identificado uno de los principales obstáculos para resolver los llamados problemas verbales o de aplicación en Álgebra; éste consiste en la omisión en todas las estrategias usuales de enseñanza, de alguna interpretación numérica del problema que permita "acercarse" a su solución y que conlleve a la interpretación algebraica del mismo" (Filloy y Rubio, 1992, p. 35).

Por lo tanto se hace una propuesta de enseñanza en la que se distinguen los pasos:

1. Compresión del problema
2. Acercamiento numérico a la solución (técnica de tanteos)
3. Interpretación de operaciones y relaciones
4. Obtención de la ecuación proveniente del patrón observado en los tanteos.
5. Resolución algebraica y/o numérica de la ecuación

De esta forma se quiere romper con la enseñanza habitual del Álgebra, a través de la resolución de problemas en donde lo semántico juega un papel secundario frente a lo sintáctico, lo que suele conllevar la producción de errores en la configuración del pensamiento algebraico.

Cerdán (1993) se plantea *El diseño de un instrumento de medida para estudiar* *la puesta de un problema en ecuaciones*, tomando como contexto los problemas verbales susceptibles de ser resueltos tanto por procedimientos aritméticos como algebraicos.

Se traen a colación dos métodos de resolución de problemas, el método de Análisis y Síntesis (A-S) y el Modelo Cartesiano (M.C.), indicando que, históricamente, el modelo M.C. produce traducciones algebraicas y el método A-S traducciones aritméticas. Las preguntas que surgen hacen referencia a las analogías y diferencias entre un proceso de traducción del problema guiado por un método u otro, y dónde puede estar el punto de corte.

El objeto es diseñar un instrumento de medida que permita evaluar el proceso de traducción de un problema verbal. Para ello se intenta conocer lo que se define como *texto intermedio* que sirve de puente entre el enunciado verbal y la expresión aritmética (TIAR) o algebraica (TIAL) que permite resolver el problema. Este instrumento intenta fijar un conjunto de 6 variables dependientes policotómicas para analizar la traducción de problemas verbales a ecuaciones, que son: 1) procedimientos de solución; 2) elección de incógnitas; 3) adecuación de la elección; 4) símbolos compuestos; 5) igualdades; 6) hacia la solución.

El instrumento de medida se ha pasado en una prueba exploratoria a 8 estudiantes de Bachillerato y de Magisterio y está pendiente de una aplicación a una muestra más amplia.

Un estudio sobre la resolución de problemas verbales de varias operaciones, que se consideran límite entre lo aritmético y lo algebraico, mediante el uso de diferentes representaciones, se recoge en un trabajo de Palarea y Socas (1995). Se abordan problemas de grifos, proporcionalidad, móviles y otros. Además de la representación formal (algebraica) establecen otras representaciones que denominan físico-visual y que tiene diferentes subsistemas: representación física, icónica, geométrica y diagramática.

Estos autores relacionan el método de resolución expuesto por Cerdán (1993) de análisis-síntesis con el diagramático. La resolución a partir de una representación geométrica se hace mediante el esquema parte-todo. Hacen observar que no existe una correspondencia unívoca entre un sistema de representación y la estructura del problema. La falta de una buena representación del problema constituye una dificultad esencial en estudiantes incompetentes en Álgebra.

Se establecen tres posibles sistemas de representación en matemáticas: el lingüístico, el físico-visual y el algebraico.

Por otra parte, los autores consideran que, la determinación del límite que existe entre una estructura aritmética o algebraica de un problema verbal de varias operaciones, depende de los sistemas de representación elegidos, los cuales provocan en el resolutor un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su resolución.

Queremos destacar también otras aportaciones afines a este tópico, como las de Puig y Cerdán (1989, 1991), Fong y Chong (1995), Radford (1995), Rojano (1996), Rojano y col. (1996).

3.7. Representación en matemáticas.

En la publicación *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, editada por Janvier (1987), se recopilan una serie de trabajos de varios autores centrados en el fenómeno de la representación en matemáticas, tanto desde un punto de vista general, como de la aplicación a tópicos concretos.

El proceso de translación o traducción se entiende como el conjunto de procesos psicológicos que envuelven el paso de una representación a otra, por ejemplo, de una ecuación a una gráfica. Se destaca la creciente importancia en la resolución de problemas reales y se acentúa su papel crucial en los modelos matemáticos.

Janvier limita los modos de representación de variables a cuatro: descripción verbal, tabla, gráfico y fórmula (ecuación), e indica que:

> “creemos que los estudios de generalización, abstracción, prueba, simbolización ... podrían producir más significado si fueran considerados como componentes de procesos básicos de translación” (p. 31).

Señala que la representación puede considerarse como una combinación de tres componentes: *símbolos o ilustraciones (en forma escrita), objetos reales, e imágenes mentales*, aunque asume que se pueden encontrar representaciones sin la componente del objeto real.

En sendos capítulos, el autor aborda los conceptos de representación para la *noción de función*, en un caso, y para *el círculo*, en otro. Para el caso de la función muestra la enorme distancia que hay entre la riqueza del concepto de variable y la idea de función que a menudo se presenta en los libros de texto.

En el caso del círculo, examina varias acepciones de la palabra *representación* usando la noción de círculo como ejemplo. Se describen dos programas de ordenador dirigidos a desarrollar las concepciones primitivas sobre el círculo con resultados negativos, pero interesantes de cara a proyectos de investigación que utilicen experimentaciones con ordenadores en el ámbito escolar.

El trabajo *Semiosis y Noesis* de Duval (1993b) aborda el problema de la representación en matemáticas y ofrece un marco idóneo para nuestro estudio.

Las representaciones en matemáticas son representaciones semióticas, constituidas por el empleo de signos, distintas pero ligadas a las mentales: el desarrollo de las representaciones mentales no puede separase de una interiorización de las semióticas.

Para la actividad matemática es necesaria la posibilidad de un cambio de registro de representación. Se llama *semiosis* a la aprehensión o producción de representaciones semióticas, y *noesis* a la aprehensión conceptual de un objeto matemático. El término *comprensión* cubre las dos formas de aprehensión: de representaciones y de los conceptos representados.

Duval indica que la conversión o transformación entre diferentes representaciones de un mismo concepto es evidente cuando se dominan cada uno de los sistemas semióticos, lo que no siempre suele ocurrir.

El interés de la diversidad en los sistemas de representación responde a:

- Economía de tratamiento: se puede trabajar en cada caso en el registro que sea más cómodo y potente.

- Complementariedad de los sistemas: toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que representa y otros sistemas abordan otros aspectos del contenido.

- La conceptualización necesita de la coordinación de registros de representación: el cruce de representaciones relativas a un mismo concepto mejora la información sobre éste.

Para nuestro estudio, es importante tener en cuenta las tres cuestiones anteriores, pero sobre todo la primera, ya que un estudiante elegirá para la resolución de problemas aquel sistema de representación que le sea más "cómodo" y/o más "potente", aunque también pueda utilizar otros sistemas.

En la tesis doctoral de la profesora Castro (1995), del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales,* se trata de analizar e interpretar la comprensión que muestran los escolares de 12-14 años sobre nociones de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesiones y término general de una sucesión cuando trabajan con tres tipos distintos de simbolización de números naturales: signos numéricos, desarrollo aritmético de los números y representaciones puntuales.

Se conjetura que los sujetos en edad escolar mejoran su compresión numérica al utilizar la representación figurativa, especialmente aquellos en los que predominan los procedimientos visuales.

La finalidad, pues, de este trabajo es realizar una aproximación a los números figurados como sistema simbólico de representación de números que permita profundizar, mediante actividades de representación, en un tipo de análisis estructural de los números naturales.

El trabajo se concluye poniendo en práctica un instrumento de evaluación para contenidos de Aritmética formado por 10 ítems cuyas resoluciones correctas pueden ser de distintos tipos y a distintos niveles de complejidad de la tarea aritmética.

Las representaciones semióticas del concepto de función son numerosas. En el trabajo de Hitt (1996), se muestran las dificultades que tienen los profesores en articular determinados sistemas semióticos, dificultades que son diferentes a las de los alumnos.

La aprehensión del concepto de función no es una tarea fácil, existen problemas para distinguir entre el objeto y alguna de sus representaciones. Se acude a la propuesta de Duval (1993b) de que son necesarias diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático. En este contexto, el estudio se divide en dos partes: en la primera se investigan las dificultades que hay en la articulación de diferentes sistemas semióticos de representación del concepto de función (se utiliza una muestra de 30 profesores de enseñanza media). La segunda trata sobre errores en el uso de tales sistemas y las repercusiones en la enseñanza (a través de un estudio de casos).

En situaciones inusuales de enseñanza, la población de profesores que se ha sometido a la prueba no realiza una articulación coherente entre los diferentes sistemas semióticos asociados al concepto de función.

Como conclusión, considera el autor que:

> “el conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si él puede articular diferentes representaciones del concepto sin contradicciones” (p. 257)

Por último, analiza la repercusión de los errores en el uso de sistemas semióticos de representación para la enseñanza.

También queremos mencionar en este apartado las aportaciones de Howard (1987), Lesh y otros (1987), Goldin (1987, 1993), Kaput (1987, 1989), Duval (1993a), Meavilla (1995), Palarea y Socas (1995), van Reeuwijk (1995), Rico, Castro y Romero (1996), Janvier (1996).

CAPÍTULO 4

OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Enfoque exploratorio de la investigación: Objetivos a cubrir.

Consideramos adecuado que la definición de los objetivos de este trabajo se planifique en tres fases que, adaptando la propuesta de Colás y Buendía (1992, pp. 179-180), se pueden concretar en:

1ª Fase: precisar la finalidad general en un propósito central específico.

2ª Fase: identificar y articular los aspectos subsidiarios y tópicos que se derivan del objetivo principal.

3ª Fase: plantear la información específica necesaria para cubrir los tópicos propuestos.

Detallamos las tres fases señaladas.

4.1.1. Propósito central.

Nuestro objetivo principal es:

aportar elementos de juicio e instrumentos fiables para evaluar las competencias que sobre Álgebra Elemental tienen los estudiantes españoles, a través de la resolución de problemas verbales.

Para llevar a cabo este objetivo es necesario conocer previamente los criterios de evaluación que se van a tener en cuenta, así como determinar tipos de instrumentos válidos y fiables que permitan conocer las competencias que, sobre el tópico enunciado, un sujeto pone en juego cuando responde a las tareas propuestas en el instrumento.

Queremos saber cómo los estudiantes actúan y responden ante una serie de problemas verbales algebraicos elegidos convenientemente; también nos proponemos establecer si los resultados dependen del tipo de problemas, dentro de una variabilidad controlada. Conocer el sistema de representación que suelen utilizar los estudiantes en la resolución de estos problemas, por su elicitación, puede indicar al profesor el tipo de pensamiento algebraico o pre-algebraico movilizado por el estudiante en la realización de la tarea.

Determinar si en un aula hay grupos de sujetos que, ante los problemas verbales algebraicos, utilizan unos u otros sistemas de representación, dará una información panorámica acerca del nivel de comprensión del lenguaje algebraico elemental en la clase, y la ubicación de estos grupos en el camino que hay que recorrer desde la Aritmética al Álgebra.

De esta forma, este objetivo central se concreta en diversos niveles más específicos, que enunciamos:

* **Construir un instrumento para evaluar las competencias en Álgebra elemental mediante la resolución de problemas verbales**.

* **Precisar criterios mediante los que relacionar los resultados de la administración del instrumento sobre toda la muestra.**

* **Encontrar y caracterizar agrupaciones o tipologías de resolutores de problemas verbales algebraicos, según el sistema de representación que utilicen en la resolución.**

4.1.2. Objetivos subsidiarios.

Para lograr el propósito central específico antes mencionado, se hace necesario establecer y articular una serie de temas y tópicos subsidiarios que se relacionan con el objetivo principal. En nuestra investigación, para el logro del objetivo central, se hace necesario:

a) Seleccionar un conjunto de problemas verbales algebraicos que respondan a los contenidos de Álgebra Escolar en la Educación Obligatoria y a una variabilidad controlada.

b) Estudiar la validez y fiabilidad del instrumento de evaluación constituido por el conjunto seleccionado de problemas verbales.

c) Analizar estadísticamente la incidencia de cada una de las variables que intervienen en la resolución de los problemas verbales, y relacionarlas entre sí.

d) Determinar tipologías de problemas por los sistemas de representación que se han utilizado para su resolución, caracterizando estas agrupaciones.

e) Determinar tipologías de resolutores por el sistema de representación que han utilizado para resolver los problemas del instrumento de evaluación, caracterizando estas agrupaciones.

4.1.3. Objetivos específicos necesarios.

Para la identificación y articulación de cada uno de los objetivos subsidiarios, que se derivan del objetivo principal, se hace necesario explicitar qué necesidades específicas de información se identifican, así como las correspondientes relaciones entre ellas. En este trabajo, y en relación con los objetivos anteriormente enumerados, podemos señalar:

a.1) Seleccionar problemas verbales algebraicos tipo, mediante revisión bibliográfica de la investigación en Álgebra elemental y mediante juicio de expertos, para elaborar un banco de ítems/problemas.

a.2) Determinar las variables de tarea de los problemas y sus posibles combinaciones, en orden a establecer las posibles variantes en los problemas seleccionados.

b.1) Estudiar la validez de contenido del instrumento de evaluación mediante juicio de expertos externos.

b.2) Concretar la validez de constructo del instrumento de evaluación mediante análisis estadísticos.

b.3) Determinar la fiabilidad del instrumento de evaluación a través de distintos índices de fiabilidad, obtenidos por medios estadísticos.

c.1) Analizar los resultados de la fase de *planteamiento* en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.2) Analizar los resultados de la fase de *ejecución* en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.3) Analizar los resultados de la fase de *desempeño final* en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.4) Relacionar los resultados de las tres fases anteriores, *planteamiento*, *ejecución* y *desempeño final*, en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.5) Aplicar la caracterización del *pensamiento algebraico* (Lins, 1992) a los resultados obtenidos en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.6) Analizar los *sistemas de representación* utilizados en la resolución de los problemas algebraicos del instrumento de evaluación.

c.7) Estudiar la implicación que tiene la elección de un sistema de representación en la resolución correcta de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

d.1) Determinar, mediante análisis cluster, si existen tipologías entre los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación, respecto a los sistemas de representación que se utilizan para su resolución.

d.2) Establecer las características de estos agrupamientos y obtener conclusiones.

e.1) Determinar, mediante análisis cluster, si existen tipologías de sujetos por los sistemas de representación que utilicen para abordar los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

e.2) Caracterizar las distintas tipologías de resolutores que resulten del estudio de los clusters de sujetos.

4.2. Enfoque confirmatorio de la investigación: Hipótesis a contrastar.

La resolución de problemas verbales algebraicos elementales por parte de sujetos de una población estudiantil, en distintos niveles de estudios, que sólo han recibido instrucción en Álgebra Elemental durante el período escolar (hasta 16 años), puede verse influida por el tiempo transcurrido desde que han recibido dicha instrucción.

Utilizaremos un diseño comparativo-transversal para contrastar las hipótesis que se refieren a la comparación entre grupos de sujetos.

Enunciamos a continuación las hipótesis específicas que vamos a contrastar.

Hipótesis 1.

Existen diferencias significativas en el *planteamiento* en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 2.

Existen diferencias significativas en la *ejecución* en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 3.

Existen diferencias significativas en el *desempeño final* en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes.

La elección de unos u otros sistemas de representación facilitan o dificultan la resolución correcta de las tareas algebraicas. La complejidad de algunas variantes de las tareas suelen ser obstáculo para el éxito en la aplicación de algunos sistemas de representación. La utilización de sistemas de representación económicos y potentes favorecen una resolución correcta de los problemas verbales algebraicos. Por lo tanto, podemos contrastar las siguientes hipótesis también mediante un diseño comparativo-transversal:

Hipótesis 4.

Existen diferencias significativas en el *planteamiento* en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor.

Hipótesis 5.

Existen diferencias significativas en la *ejecución* en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor.

Hipótesis 6.

Existen diferencias significativas en el *desempeño final* en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor.

La determinación de posibles tipologías de resolutores a través de un estudio de clusters, tomando como referencia el sistema de representación con se abordan los problemas, implicará la descripción de las características comunes a los sujetos que componen cada una de las tipologías. La confirmación de que esas características son adecuadas a cada una de las tipologías que se obtengan nos llevará a formular la siguiente hipótesis, que confirmaremos mediante un estudio de casos:

Hipótesis 7.

Se confirma que los casos procedentes de las tipologías/clusters de resolutores se ajustan a las características de cada una de las tipologías obtenidas.

4.3. Racionalidad de las hipótesis: sentido y lateralidad.

4.3.1. Diferencias entre los grupos de edad/nivel académico.

En las tres primeras hipótesis tratamos de verificar si los estudiantes, con el paso del tiempo, han mantenido un cierto poso o fondo de competencias acerca de una actividad, como es la aplicación del razonamiento algebraico en la resolución de un problema verbal.

Es evidente que cuando ha pasado un período de tiempo suficiente en el que no se ha practicado una actividad, como en nuestro caso son las tareas de tipo algebraico, se pueden haber olvidado algunas rutinas y procedimientos memorísticos que se utilizaron en la época escolar.

Entonces tenemos, por un lado sujetos que están recibiendo enseñanza específica sobre Álgebra Escolar y resolución de problemas algebraicos y, por otro, sujetos que después del período de Secundaria no han vuelto a recibir enseñanza sobre matemáticas.

También tendremos en cuenta que los sujetos de los grupos de más edad/ nivel académico que contemplamos están en el circuito estudiantil, bien porque no lo han abandonado, continuando los estudios en niveles superiores, bien porque al cabo de cierto tiempo han vuelto a la Universidad para elevar su nivel académico inicial (caso muy frecuente entre los estudiantes de los dos últimos cursos de Pedagogía, que provienen de Diplomados en Magisterio, quienes incluso han ejercido o están ejerciendo como Profesores de Primaria).

Esta circunstancia nos permite conjeturar que, en los grupos de estudiantes universitarios, tiene que haberse producido también un proceso lógico de maduración de pensamiento y capacidad de razonamiento, que pueda compensar de alguna forma el olvido debido al paso del tiempo. Esta maduración, junto con la memoria a largo plazo de los aprendizajes significativos de los conceptos algebraicos más elementales, en la etapa escolar, deberá de ponerse en juego para abordar y resolver las tareas algebraicas propuestas.

Las Hipótesis 1, 2 y 3 suponen que existen diferencias significativas entre los grupos de sujetos, tomados por el tiempo transcurrido desde que recibieron instrucción algebraica, en cada una de las fases que se consideran en un problema verbal algebraico.

Nuestra intuición inicial es que deben existir diferencias significativas entre los grupos de edad/nivel académico, en el sentido de que la cercanía a la instrucción algebraica producirá mejores resultados en cualquiera de las fases de la resolución de los problemas algebraicos.

Abrazamos una hipótesis inequívocamente unilateral, en el sentido de que el grupo de sujetos que está finalizando la Enseñanza Secundaria Obligatoria, por estar recibiendo una instrucción permanente y sostenida sobre los contenidos de Álgebra Elemental y poniendo en práctica casi a diario el lenguaje algebraico aprendido para la resolución de problemas verbales algebraicos, debe tener mayor dominio sobre las tareas propuestas en nuestro estudio. Tales tareas, que pueden considerarse como continuación de la actividad de enseñanza del Álgebra en la E.S.O., como una actividad más dentro de contexto, no deben suponer mayor dificultad.

Sin embargo, los sujetos de los grupos de estudiantes universitarios para los que han transcurrido más de 3 años sin recibir instrucción algebraica explícita, que no han seguido estudiando matemáticas puesto que han elegido estudiar humanidades, pueden encontrar mayores dificultades en resolver las tareas algebraicas propuestas. En efecto, el Álgebra puede considerarse como un lenguaje matemático y, como tal lenguaje, si no se practica se llega a olvidar. Como su práctica suele darse en el ámbito escolar o en la enseñanza superior, y no es habitual en situaciones extra-escolares, los estudiantes "de letras" no han vuelto a ejercitar sus conocimientos algebraicos. Sólo queda un poso o fondo de conocimientos, debido básicamente al aprendizaje significativo previo, pero también efecto de la madurez propia del desarrollo intelectual y de la adquisición de niveles culturales y académicos superiores.

Estas diferencias pretendemos confirmarlas mediante contrastes de las tres primeras hipótesis enunciadas.

4.3.2. Diferencias entre tipologías de resolutores.

Las Hipótesis 4, 5 y 6 suponen la existencia de diferencias significativas, en cada una de las tres fases que se consideran en la resolución de los problemas verbales algebraicos, entre los clusters que se producen cuando se agrupan los sujetos al tener en cuenta los sistemas de representación que han utilizado para resolver los problemas propuestos.

Estos agrupamientos de sujetos se pueden caracterizar y, así, dar lugar al establecimiento de tipologías de resolutores de problemas verbales algebraicos.

La resolución de un problema verbal algebraico a través de uno de los sistemas de representación descritos en el Capítulo 1, puede ser indicativo del nivel de complejidad en la respuesta dada por el sujeto cuestión. Cuanto más sofisticado sea el sistema de representación, es decir “más algebraico”, mayor será la profundidad de pensamiento algebraico puesto en juego y, por lo tanto, mejores perspectivas de éxito en la resolución del problema.

Si las tipologías de resolutores agrupan a sujetos por el sistema o conjunto de sistemas de representación utilizados al abordar los problemas, los sujetos de las tipologías que se caractericen por el uso de sistemas de representación más formalizados, deberán obtener mejores resultados en todas o en la mayoría de las fases de la resolución de los problemas propuestos.

Por tanto:

Nuestra intuición inicial es que deben existir diferencias significativas entre las tipologías de resolutores, en el sentido de que hay una gradación de éstas, en orden a los mejores resultados en cualquiera de las fases de la resolución de los problemas algebraicos. Además, esta ordenación de tipologías o clusters deberá ser, de mejores a peores resultados, las cuales se caracterizan por utilizar sistemas de representación simbólicos, gráficos y numéricos.

Adoptamos una hipótesis unilateral, marcando la existencia de diferencias a favor de determinada tipología, pues aquellos sujetos que suelen utilizar con profusión sistemas de representación numéricos (Ensayo-Error, Parte-Todo), no es fácil que se desenvuelvan bien en un lenguaje simbólico de mayor nivel formal. Los problemas verbales algebraicos más sencillos pueden resolverse con facilidad mediante uno de estos sistemas de representación, pero cuando el problema se hace más complejo, aumenta en gran medida la dificultad de resolverlo por alguno de los sistemas anteriores, por lo cual, en la mayoría de los casos, no se conseguirá una resolución correcta del problema.

Sin embargo, los sujetos que utilicen comprensivamente un sistema de representación simbólico, un lenguaje formalizado en su sentido más general, pueden abordar con mayor garantía de éxito los problemas verbales algebraicos, tanto los más sencillos como los más complejos, por la generalidad que supone este sistema de representación, su economía y potencial. Además de ser el que se utiliza casi exclusivamente en la enseñanza del Álgebra y, por lo tanto, se supone que hay una practica mayor sobre él.

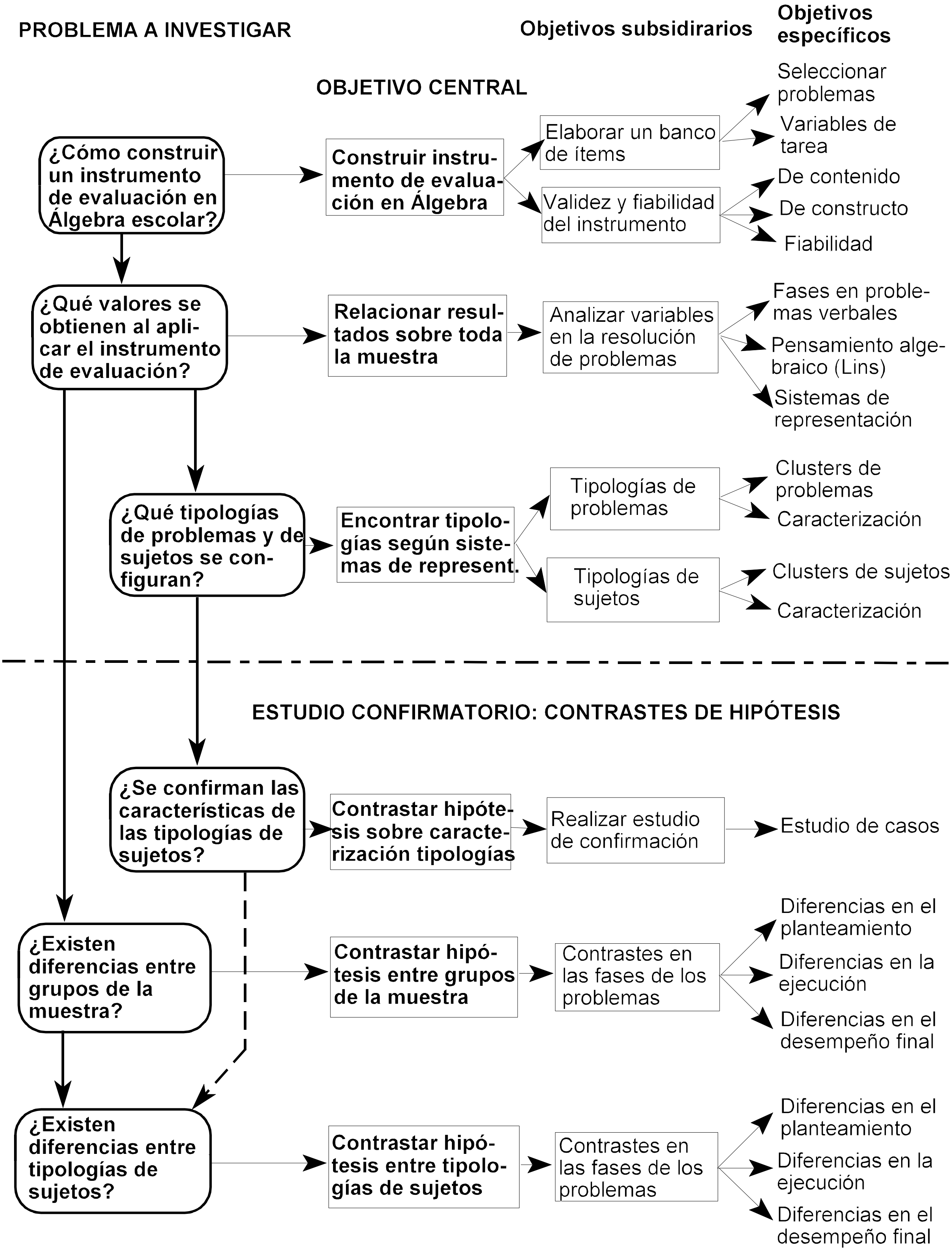
Los sistemas de representación que se apoyan en dibujos o gráficos (Gráfico o Gráfico-Simbólico) suelen ser poco habituales en el Álgebra Escolar. Aunque en algunos casos los gráficos pueden considerarse como símbolos, la utilización de estos sistemas no se puede generalizar a cualquier problema verbal algebraico y la complejidad de algunos de ellos dificultan su resolución correcta. Pueden considerarse como una situación intermedia entre los dos casos anteriores.

De aquí la gradación de tipologías que intentamos confirmar mediante contrastes de las tres hipótesis anteriormente enunciadas.

4.4. Relación entre problemas, objetivos e hipótesis.

Pasamos a establecer las relaciones que existen entre los diversos apartados que constituyen el problema de investigación, junto con los distintos niveles de objetivos e hipótesis propuestos en este Capítulo.

Para ello hemos elaborado el cuadro resumen que se reproduce en la página siguiente:


PROBLEMA A INVESTIGAR
Objetivos subsidirarios
Objetivos específicos
OBJETIVO CENTRAL
Seleccionar problemas
Variables de tarea
¿Cómo construir un instrumento de evaluación en Álgebra escolar?
Construir instrumento de evaluación en Álgebra
Elaborar un banco de ítems
Validez y fiabilidad del instrumento
De contenido
De constructo
Fiabilidad
¿Qué valores se obtienen al aplicar el instrumento de evaluación?
Relacionar resultados sobre toda la muestra
Analizar variables en la resolución de problemas
Fases en problemas verbales
Pensamiento algebraico (Lins)
Sistemas de representación
¿Qué tipologías de problemas y de sujetos se configuran?
Encontrar tipologías según sistemas de represent.
Tipologías de problemas
Clusters de problemas
Caracterización
Tipologías de sujetos
Clusters de sujetos
Caracterización
ESTUDIO CONFIRMATORIO: CONTRASTES DE HIPÓTESIS
¿Se confirman las características de las tipologías de sujetos?
Contrastar hipótesis sobre caracterización tipologías
Realizar estudio de confirmación
Estudio de casos
¿Existen diferencias entre grupos de la muestra?
Contrastar hipótesis entre grupos de la muestra
Contrastes en las fases de los problemas
Diferencias en el planteamiento
Diferencias en la ejecución
Diferencias en el desempeño final
¿Existen diferencias entre tipologías de sujetos?
Contrastar hipótesis entre tipologías de sujetos
Contrastes en las fases de los problemas
Diferencias en el planteamiento
Diferencias en la ejecución
Diferencias en el desempeño final

CAPÍTULO 5

POBLACIÓN Y MUESTRA. VARIABLES E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

5.1. Descripción de la población.

La población a la cual va dirigida este estudio es el conjunto de estudiantes españoles que han recibido instrucción en Álgebra Elemental en los niveles de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) o equivalente[1]. Nuestro estudio se ha centrado en estudiantes de la Enseñanza Obligatoria y Post-Obligatoria y hemos operado con escolares de la ciudad de Granada que han finalizado la instrucción elemental citada.

Como se trata de evaluar la competencia que sobre álgebra elemental tienen los estudiantes de Enseñanza Obligatoria y compararla con la que mantienen transcurrido cierto tiempo desde la terminación de la instrucción algebraica escolar, a modo de fondo o poso de conocimientos, hemos seleccionado la muestra entre aquellos estudiantes que, o bien están finalizando sus estudios de Secundaria Obligatoria, o bien ya los finalizaron y no han recibido posteriormente instrucción algebraica durante un período igual o mayor que tres años.

En el primer caso nos interesa conocer el dominio algebraico elemental en el momento en que se tiene más próximo y en el que se ha producido una masiva instrucción matemática, en general, y algebraica, en particular. En este caso los estudiantes están finalizando la Enseñanza Obligatoria (16 años) y, en muchos casos, no volverán a recibir instrucción en Álgebra posteriormente.

En el segundo caso nos hemos dirigido a una población de “estudiantes de letras” en estudios superiores, es decir, aquéllos que no han seguido estudios universi-

[1] Son enseñanzas equivalentes, las del Bachillerato Elemental (Plan de 1957), 1º y 2º de Bachillerato Unificado Polivalente (B.U.P.) actualmente en vigencia pero en fase de extinción, y la Formación Profesional de 1º ciclo, pendiente también de reforma.

tarios relacionados con las matemáticas superiores o científicas, sino que sus conocimientos sobre Álgebra se reducen a la enseñanza recibida en el Bachillerato, donde la instrucción en Matemáticas era obligatoria hasta el 2º curso (16 años)

Hemos evitado deliberadamente al conjunto de estudiantes que o bien continúan recibiendo instrucción en Álgebra (a niveles superiores), o bien han recibido una enseñanza matemática superior o científica que, en estos casos es opcional, es decir, no obligatoria en el Sistema Educativo Español. La razón es evidente: se supone que estos estudiantes, por su formación, tienen un dominio completo sobre los contenidos algebraicos elementales y superiores y, por lo tanto, la aplicación de un instrumento de evaluación del tipo propuesto no tendría interés para el objetivo de este trabajo.

Hay que destacar el hecho de que en España, en el momento de realización del trabajo de campo durante el Curso 1995-1996, todavía no se ha implantado la E.S.O. de forma generalizada sino que existen algunos Centros donde se imparte de forma experimental. En Granada capital existían sólo dos Centros con estas características en el momento en que este estudio se estaba desarrollando.

Por otro lado, indicar que los contenidos de Álgebra que se imparten en la E.S.O., ahora de forma experimental, son similares a los que se han impartido en los últimos cursos de la Educación General Básica (6-14 años) y en 1º y 2º de Bachillerato Unificado y Polivalente (15-17 años), cursos en los que la asignatura de Matemáticas es obligatoria para todos los estudiantes; lo mismo se puede decir de los cursos de la primera etapa de la Formación Profesional (FP1). Como nuestra muestra está formada por estudiantes de Secundaria y de Universidad, podemos asegurar que todos los sujetos muestrales han recibido normativamente una instrucción similar, en contenidos, de Álgebra Elemental.

5.2. Descripción de la muestra utilizada.

Se ha realizado un muestreo no probabilístico por conglomerados, es decir, hemos utilizado una muestra intencional. En efecto, tomamos como sujetos de la muestra a estudiantes de unos cursos y grupos, seleccionados de antemano, y que obedecen a unas características que a continuación describimos.

El número total de sujetos de la muestra ha sido de 160, distribuidos en dos conglomerados: 80 sujetos son estudiantes que estaban finalizando la Enseñanza Obligatoria Secundaria (4º de E.S.O.), y 80 sujetos son estudiantes universitarios que llevan más de tres años sin recibir instrucción algebraica. Las características de cada uno de estos conglomerados son las siguientes:

Primer conglomerado

Los estudiantes de Secundaria se han elegido de entre los alumnos que cursan la E.S.O. de forma experimental en los dos únicos Centros que la imparten en Granada durante el Curso Académico 95-96, que son, a saber, “Hermenegildo Lanz” y “Aynadamar”, los cuales también imparten Formación Profesional.

En cada Centro hay cuatro grupos de 4º de E.S.O. Se han elegido, al azar, dos grupos de cada uno. Los grupos cuentan con una media de 30 alumnos. La prueba se ha pasado a todos los alumnos de los cuatro grupos seleccionados, y de todos los protocolos completos[2] resultantes se han seleccionado aleatoriamente 20 en cada grupo. De esta forma se ha obtenido un conglomerado de 80 sujetos, 40 de cada uno de los dos Centros de E.S.O.

Segundo conglomerado

Formado por 80 sujetos, estudiantes universitarios, quienes no han recibido instrucción en álgebra al menos hace tres años. Este grupo se ha divido a su vez en dos subgrupos:

- 40 sujetos que no han recibido instrucción algebraica en un período de 3 a 5 años. Estos sujetos se han elegido entre los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada que cursan estudios de la Diplomatura de Magisterio y no han seguido una especialidad de ciencias. Se escogieron dos grupos, uno de la especialidad de Lengua Extranjera -Inglés (1º curso) y otro de la especialidad de Educación Infantil (3º curso). La prueba se pasó a todos los alumnos y, entre

[2] Hacemos esta aclaración porque la prueba en estos grupos se pasó dividida en dos partes en dos días distintos y hubo sujetos que no realizaron la primera o la segunda parte. Entonces se desestimaron aquellos protocolos que no estaban completos.

los que reunían las características citadas (de 3 a 5 años sin cursar estudios de Matemáticas), se eligieron aleatoriamente 40 protocolos.

- 40 sujetos que no han recibido instrucción algebraica hace más de 5 años. En este caso los estudiantes elegidos han sido de los últimos cursos (4º y 5º) de la Licenciatura de Pedagogía, de la Facultad citada. También la prueba se pasó a todos los alumnos de los grupos y, posteriormente, se eligieron aleatoriamente los 40 protocolos de entre los que cumplían las características indicadas[3].

DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA **Distribución del número de estudiantes**			Total
Secundaria	Post-Secundaria: estudiantes que no han cursado Álgebra en los últimos años		
Grupo 1 (G1)	Grupo 2 (G2) 3 a 5 años	Grupo 3 (G3) más de 5 años	
80	40	40	160

En total, se han utilizado 160 protocolos distribuidos al 50% entre estudiantes de último curso de E.S.O. y estudiantes universitarios de humanidades, para quienes ha pasado el tiempo suficiente como para que olviden la instrucción convencional recibida en una disciplina compleja como es el Álgebra. Por tanto, las respuestas de estos últimos sujetos a cuestiones algebraicas serán, posiblemente, consecuencia de un razonamiento y una maduración reflexivos más que de una reproducción rutinaria y memorizada de modelos recientemente aprendidos y practicados.

5.3. Representatividad muestral.

[3] Hay que destacar que en este subgrupo hay 12 protocolos de estudiantes que superan los 10 años sin haber "estudiado" Matemáticas.

Podemos considerar que la muestra elegida, en su globalidad, es intencional[4] y, por tanto, su representatividad sobre el colectivo de estudiantes españoles que han recibido instrucción en Álgebra elemental puede ser cuestionable. No obstante, restringida su consideración a la provincia de Granada se puede considerar que, por su extracción, el primer conglomerado es altamente representativo de la subpoblación de estudiantes de último año de E.S.O. en esta provincia durante el curso considerado.

El segundo conglomerado está orientado a seleccionar sujetos que cumplan las características que hemos definido para este conjunto. En ningún caso se han tomado los sujetos individualmente sino que se han elegido como componentes de grupos que cursan unos mismos estudios. En muchos casos las respuestas han sido anónimas, y, en todos los casos, voluntarias.

La muestra que hemos configurado de esta forma la consideramos como satisfactoria para nuestras necesidades específicas.

5.4. Características de la muestra.

Pasamos a describir algunas características de la muestra empleada. Estas características se explicitan fundamentalmente según el conocimiento que los profesores o tutores tienen sobre cada uno de los grupos que forman parte de los conglomerados, además de las observaciones directas y los comentarios realizados por los estudiantes durante las ocasiones en que se ha tenido un contacto directo con ellos.

En el cuadro que reproducimos en la página siguiente indicamos las variables afines a cada uno de los conglomerados y subconglomerados que forman la muestra, describiendo sus características más relevantes.

[4] En el sentido señalado por Cohen y Manion (1989, p.139)

Variables afines

Conglomerado 1	- Alumnos de 16-17 años en su mayoría - Sexo distribuido: 50% - 50% aproximado - Estatus socio-económico del alumno: clase baja o media-baja - Motivación para el estudio: media - Antecedentes académicos: en su mayoría de clases regulares o bajas. Un número apreciable procede de fracasos en la enseñanza vigente (B.U.P.) - Tipo de enseñanza que cursan: obligatoria

Conglomerado 2	**Subconglomerado 1**	- Alumnos de 19-22 años en su mayoría - Sexo distribuido: 50% - 50% aproximado - Estatus socio-económico del alumno: clase media, media-baja - Motivación para el estudio: media - Antecedentes académicos: en su mayoría de clases regulares o medias. - Tipo de enseñanza que cursan: especialidades de Maestro de "letras", sin formación explícita en matemáticas
	Subconglomerado 2	- Alumnos mayores de 22 años - Sexo distribuido: 50% - 50% aproximado - Estatus socio-económico del alumno: clase media, media-baja. Algunos ejerciendo la profesión de maestro. - Motivación para el estudio: media - Antecedentes académicos: en su mayoría de clases medias, que retornan a la figura de estudiante para conseguir una titulación universitaria superior. - Tipo de enseñanza que cursan: estudios de 4º-5º curso de la licenciatura de Pedagogía, sin contenidos en matemáticas.

5.5. Estudio de variables.

Las variables que vamos a considerar, a los efectos de interpretar mediante ellas los resultados de nuestro trabajo, son de dos tipos: variables independientes y variables dependientes.

5.5.1. Variables independientes.

Consideramos como variables independientes las que se refieren a las características personales de cada sujeto y son, por lo tanto, independientes de la tarea que tiene que realizar. Vamos a tomar en cuenta dos variables independientes:

1) *Grupo de edad/nivel académico*:

Variable G, que toma tres valores:

* G_1, estudiantes de último curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (16-17 años).

* G_2, estudiantes universitarios que llevan entre tres y cinco años sin recibir instrucción en Álgebra, "estudiantes de letras" predominantemente de Magisterio de las especialidades de Lengua Extranjera y de Educación Infantil (19-22 años), especialidades sin contenido en matemáticas.

* G_3, estudiantes universitarios que llevan más de cinco años sin recibir instrucción en Álgebra, "estudiantes de letras" de 4º y 5º curso de la Licenciatura de Pedagogía (más de 22 años). En este grupo hay 12 sujetos para quienes han transcurrido más de diez años desde que concluyeron sus estudios en Álgebra. Estos estudios superiores no tienen contenidos en matemáticas, a excepción de algunas nociones de estadística dentro de materias referidas a los métodos de investigación educativa.

Con esta variable queda identificada la procedencia escolar o universitaria de los sujetos de la muestra.

2) *Tipología de resolutor* a la que el sujeto se adscribe, según solución que se obtendrá y explicará en el Capítulo 6, y que se aplicará posteriormente en un estudio de casos que se presenta en el Capítulo 9.

5.5.2. Variables dependientes.

Variables dependientes serán aquellas que estén relacionadas con la tarea propiamente dicha. Teniendo en cuenta que la tarea es la misma para todos los sujetos de la muestra, y que la instrucción básica recibida en Álgebra escolar ha sido similar[5], po

[5] En el caso de los universitarios podríamos presuponer que ha sido superior, pues el contenido de Álgebra en EGB, 1º y 2º de BUP, o en el Bachillerato anterior era mayor que en la actual E.S.O. Sin embargo el hecho de que los universitarios sean de "letras" nos hace pensar que, en muchos casos, han "fracasado" con las matemáticas y este fracaso es debido, en gran medida, al "fracaso" en Álgebra, por suponer la introducción de

demos considerar que los valores de las variables dependientes obedecerán principalmente a las capacidades que sobre Álgebra elemental tengan los sujetos. Por ello el estudio de estas variables nos proporcionará un conocimiento valioso en orden a la evaluación sobre las capacidades en Álgebra elemental de la población estudiantil.

Para determinar estas variables hemos tenido en cuenta las distintas fases en la resolución de un problema verbal, en este caso algebraico, que ya hemos definido en el Capítulo 1. Lo valores considerados son:

1) *Resultado en el planteamiento*. El planteamiento es la fase en la que se *traduce* el texto del problema a un lenguaje matemático a través de un sistema de representación. Esta fase estará bien resuelta cuando las relaciones expresadas sean las que se deducen correctamente de la sintaxis y la semántica del texto. En otro caso, estará mal el planteamiento.

2) *Resultado en la Ejecución*. En esta fase se desarrolla el plan propuesto en el planteamiento. La ejecución será considerada como buena cuando se aplica correctamente el proceso *analítico*, a través de las reglas algebraicas, y las propiedades aritméticas para obtener nuevas relaciones que lleven a un resultado correcto. En otro caso se tomará como mala la ejecución, salvo en aquellos casos en que se cometan errores leves y aislados de cálculo aritmético (por ejemplo: $2 \cdot 3 = 5$), o en los que al pasar de una relación a otra se escriba una cantidad distinta de la inicial y, por lo tanto, errónea. Hemos considerado que estos errores son debidos a despistes y los hemos catalogado como *errores de atención*.

3) *Resultado en el desempeño final*. Es la tercera fase del problema, en la que se obtiene la solución pedida en la pregunta del texto. Consideramos esta fase independiente de las anteriores. En efecto, podemos encontrar casos en que se obtiene una solución por procesos mentales no expresados en el papel y que no incluyen explícitamente una o ambas de las fases iniciales. También es fácil encontrar sujetos que escriben y borran pasos intermedios, dejando sólo los resultados.

Otro caso será el del sujeto que copia de una compañera o compañero. Por

---

un lenguaje nuevo y abstracto, el lenguaje simbólico, con una sintaxis y una semántica muy compleja, ello, en el transcurso de la administración del instrumento, hemos tratado de evitar con nuestra presencia posibles interacciones; además hemos tratado de prevenir a los sujetos contra este sesgo evitable. Consideramos, en definitiva, que si se han producido algunos casos de copia, su número es irrelevante en el tamaño total de respuestas mues-trales.

Queremos distinguir entre el proceso de resolución y el resultado. Para ello conviene tener en cuenta cuando el proceso de resolución del problema es correcto pero el resultado del problema puede ser incorrecto debido a errores de atención en la actuación: errores leves de cálculo aritmético, no achacables a desconocimiento, o errores al transponer cantidades de una relación a otra. Queremos discriminar entre un resultado incorrecto debido a una actuación incorrecta de aquel otro resultado incorrecto producto de un error de atención. Además, dentro de los resultados correctos, distinguimos aquellos en los que se obtiene una incógnita (de las dos que se pide en el problema), de los resultados totalmente correctos en los que se alcanzan todos los datos solicitados (en este caso, dos). Por ello consideramos una cuarta variable dependiente.

4) *Resultado final*. Todos los problemas vebales algebraicos que vamos a proponer tienen solución numérica, es decir, existen unos valores numéricos que hay que determinar, de acuerdo a las condiciones del problema. Hemos introducido, por lo tanto, esta variable para indicar si *todos* los valores que se obtienen en la resolución del problema son los correctos, independientemente de otras consideraciones.

También hemos tenido en cuenta otras tres variables que consideramos muy ligadas a la resolución de los problemas verbales algebraicos.

5) *Sistema de representación utilizado*. Las expresiones de las relaciones que se explicitan en el planteamiento y las que se obtengan en la ejecución, por transformación analítica de las iniciales, se ajustarán a un sistema organizado de códigos o símbolos, es decir, a un sistema de representación. Dado que el sistema de representación no es único y que hemos establecido unas categorías para las posibles respuestas, debemos considerar el sistema de representación como otra variable dependiente, con tantos valores como categorías se establezcan.

6) *Características del pensamiento algebraico*. Tomaremos el modelo de pensamiento algebraico que elabora Lins (1992). Este autor propone tres características que determinan el pensamiento algebraico: *aritmeticidad, internalidad y analiticidad*, que ya se han descrito en otro capítulo. Siempre que se pueda identificar la presencia de un pensamiento algebraico estructurado, se puede hablar de que se ha desarrollado una tarea algebraica, aunque no se llegue a un resultado correcto. En otro caso, alguna de las características, o todas, no se han hecho explícitas, no se dominan aunque el resultado sea correcto.

En nuestro estudio hemos tratado de identificar qué características del modelo que propone Lins se dominan a fin de indicar, en positivo, competencias que posee el sujeto al abordar las tareas algebraicas propuestas, y destacar las que predominan y las que ofrecen mayores dificultades para el aprendizaje del Álgebra. Debemos considerar la presencia o no de estas características como otra variable dependiente, con distintos valores según las posibles combinaciones de éstas.

5.6. Enfoque métrico general.

Uno de los aspectos que más preocupa a la comunidad de profesores que van a impartir la E.S.O. es, precisamente, la orientación sobre qué tipo de instrumentos de evaluación deberán utilizarse y con cuáles criterios se deberán aplicar, para ajustarse a las directrices de la Reforma de la Enseñanza derivadas de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo. La práctica de la evaluación debe comenzar por el establecimiento de unos instrumentos adecuados a los objetivos de la propia evaluación**.**

En Rico y otros (1995) hemos estudiado los resultados de una encuesta de opinión que sobre la evaluación en matemáticas se pasó a un grupo de profesores de los distintos niveles de la enseñanza. En este estudio se recogen, entre otras, opiniones relativas a los instrumentos más adecuados, utilizados por el profesor, para evaluar a los alumnos en matemáticas. Las respuestas dadas por los profesores quedan clasificadas, en este trabajo, en tres categorías:

- Pruebas escritas: 58% de las respuestas

- Pruebas orales: 12% de las respuestas
- Observación: 30% de las respuestas

Queda claro que los profesores se inclinan, principalmente, por las pruebas escritas y, con menor énfasis, por la observación.

Dentro de lo que se consideran pruebas escritas las respuestas presentan una gran variedad de tipos, siendo las más frecuentes, por orden, las siguientes:

Exámenes,

Pruebas de papel y lápiz,

Trabajo de clase,

Trabajo de casa,

Cuaderno de trabajo.

Y, de entre las menos frecuentes destacamos:

Pruebas objetivas,

Tests estandarizados,

Pruebas de ensayo,

Tests diagnósticos.

La apuesta es notoria hacia instrumentos de evaluación usuales pero, a la vez, que admitan respuestas abiertas e, incluso, poco convencionales. Los instrumentos de evaluación que sólo contemplan dos opciones dicotómicas (0 -1, todo-nada, bien- mal) son desechados por la mayoría de los profesores encuestados.

En consecuencia, nuestro instrumento de evaluación sobre competencias algebraicas estará basado en la resolución de problemas verbales, presentados como tareas de papel y lápiz, con respuesta abierta y que contemple el posible uso de distintos sistemas de representación para su resolución correcta.

Nuestro primer objetivo consiste *en establecer tareas que sirvan para elicitar la competencia algebraica subyacente* en el estudiante, posibilitando caracterizar la información manifiesta. Pretendemos, siguiendo las propuestas del paradigma de la ciencia cognitiva, captar y seguir los procesos en las realizaciones de los estudiantes y darles así un tratamiento métrico (Shavelson, Webb y Burstein, 1986).

Las tareas han de responder a una serie de cuestiones de tipo general que enunciamos:

* deben ser ítems con formato de problemas verbales algebraicos

* su contenido debe corresponder al de álgebra escolar de la Secundaria Obligatoria

* el texto será adecuado a los niveles de la Educación Secundaria

* la resolución debe poder hacerse mediante varios sistemas de representación alternativos.

Este tipo de tareas deben considerarse como un modelo para elicitar el pensamiento algebraico de los estudiantes, deben admitir múltiples tipos de representación para su resolución correcta a fin de proporcionar oportunidades para que el sujeto construya un modelo de sistema de representación más o menos sofisticado.

No hay método establecido para construir problemas verbales algebraicos del tipo señalado. La consecución de un problema no es tarea fácil, y su elaboración lleva aparejado un proceso de *retroalimentación continua* que puede documentar el aprendizaje mejor que muchas otras actividades.

Deben ser tareas en las que los estudiantes puedan y deban construir sus propias respuestas. De suficiente complejidad para que sea necesario encarar una diversidad de cuestiones en el proceso de llevar adelante la tarea propuesta. Han de permitir la captura del pensamiento algebraico de manera que pueda ser analizado para revelar cuáles de sus características subyacentes son explicitadas por el estudiante. También es muy importante tener en cuenta los contextos que se utilizan puesto que algunos contextos permiten elicitar el razonamiento mejor que otros, como propone la perspectiva situacional (*situative*) (Greeno, 1991; Anderson, Reder y Simon, 1997).

La dificultad de las tareas debe ser variada, admitiendo una diversidad de niveles en la competencia algebraica necesaria para abordar las tareas con éxito. De este modo se quiere evitar lo que se conoce como “efecto techo” (todos los estudiantes resuelven con el mayor nivel de éxito los problemas) y el “efecto suelo” (ningún estudiante es capaz de resolver satisfactoriamente los problemas).

Las tareas que se propongan deben ser tareas asequibles para una mayoría de estudiantes a fin de evitar el desánimo que produce no encontrar caminos de resolución, lo que llevaría a bloqueos y abandonos. En este caso, se tendrá en cuenta también que los textos de los problemas sean motivadores y que inciten a resolverlos.

5.7. El proceso de construcción del instrumento central.

5.7.1. Descripción.

5.7.1.1. Primer paso: Explicitando el contenido. Esta primera etapa ha consistido en hacer un barrido lo más amplio posible por textos que contienen problemas verbales algebraicos, cuyo nivel se ajusta al de los contenidos de la E.S-.O. Dicho recorrido ha empezado por libros de texto de 1º y 2º de BUP[6] y libros de texto publicados específicamente para la Secundaria (Coriat y otros, 1994, González y Villanova, 1996). Otra fuente de información en este recorrido ha sido los problemas de contenido algebraico de distintas Olimpiadas Matemáticas[7], tanto nacionales como internacionales. Por último hemos tomado en cuenta los problemas que se han utilizado en diversas investigaciones recientes (Lamon y Lesh, 1992; Filloy y Rubio, 1992; Lins, 1992, 1994, 1995; Arzarello y otros, 1995) relacionadas, ya sea con el álgebra escolar, con la propia resolución de problemas o con estudios sobre evaluación. En este caso se han tomado en cuenta problemas de contenido diverso, pero que se han podido transformar en problemas con contenido algebraico elemen-

---

[6] Se han repasado los libros de texto de las Editoriales Anaya, S.M., Magisterio Español, Everest y Edelvives.

[7] ICE de la Universidad de Zaragoza. (1990). Ante la Segunda Olimpiada Matemática. Zaragoza: Cometa, S.A.

ICE de la Universidad de Zaragoza. (1991). III Olimpiada Matemática en EGB. Aragón 1991. Zaragoza: Cometa S.A.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (1994). IV Olimpiada Matemática Nacional Española. Badajoz: F.E.S.P.M.

Greitzer S.L. (Recopilación) (1994). Olimpiadas Matemáticas. Madrid: Dls-Euler tal.

De todos estos documentos hemos seleccionado un conjunto amplio y variado de ítems/problemas que, a nuestro juicio, responden a las características enunciadas en el apartado anterior.

En sucesivas reuniones con el Grupo de Investigación sobre Evaluación, que coordina el profesor Rico[8], exponemos el banco de ítems/problemas seleccionado para discutir acerca de su idoneidad. Las discusiones se centran en la adecuación de las tareas para el nivel de la E.S.O., su dificultad, y al contenido del problema en cuanto a que su resolución sólo sea posible en un contexto algebraico (pensamiento algebraico), diferenciado de una resolución aritmética. Una vez hecha una primera selección se ve la necesidad de pasar la batería de problemas seleccionados a una pequeña muestra de estudiantes, para que los resultados puedan servir de indicador sobre las cuestiones planteadas.

5.7.1.2. Segundo paso: Primera prueba piloto. En una sesión con cinco alumnos de 2º de Magisterio de la Especialidad de Ciencias, es decir, estudiantes de más de 18 años, con estudios de matemáticas en todo su periplo escolar, se pasa una prueba de 28 ítems/problemas. La prueba es comentada con los estudiantes, ejercicio por ejercicio, acerca de su nivel de dificultad y su contenido algebraico, comentarios que están recogidos en cinta magnetofónica y transcritos. Teniendo en cuenta que los cinco estudiantes seleccionados han tenido experiencias de impartir algún tipo de enseñanza escolar, bien a familiares o a alumnos de E.G.B. y B.U.P., los comentarios se han considerado pertinentes y han dado lugar a la eliminación de 2 ítems y a la inclusión de 4 ítems nuevos. De esta forma la batería queda configurada con 30 problemas verbales de contenido netamente algebraico.

5.7.1.3. Tercer paso: Segunda prueba piloto. El paso siguiente consistió en pasar la prueba de 30 ítems a una muestra heterogénea, elegida intencionalmente, de 50 estudiantes de distintos niveles: 10 estudiantes de 8º de E.G.B., 10

---

[8] En el contexto del Proyecto de Investigación PS93-0195, aprobado por la DGYCIT (MEC)

estudiantes de 2º curso de B.U.P., 10 estudiantes de C.O.U. de Ciencias, 10 estudiantes de C.O.U. de Letras y 10 estudiantes Universitarios de distintos cursos y de distintas carreras no de Ciencias o similares (por ejemplo, de Filosofía, Derecho o Medicina).

Con esta prueba se trató de comprobar una primera aproximación a la validez del instrumento. Para ello, los resultados se dieron a corregir a cinco expertos externos, que opinaron sobre la bondad o deficiencia del planteamiento y la ejecución de los ítems, sin tener en cuenta los resultados finales de los problemas, utilizando para ello una escala prefijada por nosotros. Se contrastan los resultados de las correcciones y se eliminan aquellos ítems cuyas "puntuaciones" difieren ostensiblemente.

Al final nos quedamos con un banco de 8 ítems/problemas, cuyo detalle aparece en el Anexo I.

5.7.1.4. Cuarto paso: Tercera prueba piloto. Llegados a este punto en la selección de problemas, nos planteamos conocer las diversas estrategias que usan los estudiantes para resolver las tareas, entender el conocimiento o estructura subyacente de pensamiento algebraico en el estudiante cuando responde a un determinado ítem, es decir, obtener una determinada información sobre lo que piensa el estudiante cuando plantea y ejecuta un problema verbal algebraico. Conocer qué errores puede cometer y su origen. También pretendemos establecer categorías para las estrategias que se puedan dar.

Para ello nos planteamos hacer un estudio exploratorio con una muestra, como en casos anteriores, intencional. En este caso elegimos 18 estudiantes voluntarios, de entre alumnos de 1º de Magisterio y de los primeros cursos de Pedagogía, que hace tres años o más que no han recibido instrucción en Matemáticas.

La prueba se les pasa individualmente, en presencia del investigador, y se van anotando en un protocolo las circunstancias observadas en la resolución de los problemas. Para cada problema se rellena un protocolo. Esta hoja es la que se reproduce a continuación:

Problema Nº _______ **Tiempo _____ minutos** **Nivel______**

NOMBRE: ____

Curso:__________ **Edad: _____** **Nº identificación. ____**

____

Observación de la resolución (solicitar al resolutor que enumere los pasos del proceso):

Interacciones verbales durante la resolución (diálogo, apoyos solicitados y/o ofertados):

Aportes por elicitación retrospectiva tras la resolución (se le solicita al resolutor que explique el cómo y el porqué de sus realizaciones):

____

Comentarios y peculiaridades detectadas:

Con ello hemos obtenido 144 protocolos que hemos revisado y estudiado. Hemos constatado la idoneidad de los niveles y los contenidos de los ítems/problemas para el estudio que estamos realizando, pero vemos la necesidad de estructurar éstos de acuerdo a unas características prefijadas que nos permitan clasificarlos en categorías bien definidas y diferenciadas entre sí. En efecto, el estudio de los protocolos indica que determinadas características de los ítems/problemas (el tipo de números del enunciado, la presencia de dibujo o gráficos en el texto) influyen en la forma de abordar su resolución por algunos sujetos. Por lo tanto, hemos de definir unas variables que nos lleven a una categorización adecuada de los ítems/problemas.

5.7.2. Variables de control en la tarea.

La necesidad de estructurar los problemas a fin de obtener un instrumento de evaluación coherente por el tipo de tareas y fiable en cuanto a su aplicación, nos lleva establecer una serie de variables mediante las cuales controlar la construcción de los ítems y su clasificación.

Para controlar mejor el proceso acordamos reducir la variabilidad de contextos de los problemas y combinarlos según las variables elegidas.

Consideramos, pues, variables controladas:

- los contextos de los problemas,
- el número de incógnitas,
- el tipo de números en los datos,
- la presencia de gráficos o dibujos en el texto.

Variables de tarea**:** según los sondeos previos efectuados en la tercera prueba piloto descrita hemos detectado la influencia de tres variables de tarea, que vamos a controlar mediante equipresencia del modo que se indica:

1) **V_1 = nº de incógnitas necesarias**. En la propia instrucción algebraica hay distinción, tanto en los textos como la temporalización, de problemas algebraicos *de ecuaciones* y problemas algebraicos *de sistemas*. Tomamos, pues, dos alternativas:

a) Problemas de una incógnita: cuando en el texto del problema subyace una relación lineal algebraica independiente, fácilmente deducible. Es decir, cuando para su resolución no es necesario utilizar más de una relación (ecuación lineal en un sistema simbólico), aunque sean dos las cantidades a determinar en la tarea propuesta. Esta posibilidad la designaremos como valor “1".

b) Problemas de dos incógnitas: cuando en el texto del problema subyacen dos relaciones lineales algebraicas independientes y, necesariamente, será preciso establecer estas dos relaciones para su resolución (un sistema de dos ecuaciones lineales en un sistema simbólico). Esta posibilidad la designaremos como valor “2".

2) **V_2 = tipo de números en los datos del problema**. Al tratarse de problemas verbales próximos al entorno de estudiante de Secundaria, se utilizarán números positivos, naturales o decimales. Las investigaciones, tanto sobre problemas aritméticos (Hart, 1981; Luke, 1988), como algebraicos (Lins, 1992) indican la influencia en la resolución del tipo de números empleados como datos en el texto. También los resultados de los problemas serán números similares a los datos, que no obstaculicen la utilización de los diversos sistemas de representación. Los valores posibles serán duales:

a) Que sean números naturales sencillos, es decir, números fáciles de manejar mentalmente por los estudiantes de Secundaria: números menores de 100, decenas o números fácilmente reducibles y simplificables. En este caso le asignaremos el valor “1".

b) Que sean números naturales menos sencillos, en el sentido de números mayores de 100, que no sean decenas y no se puedan reducir a otro más sencillos, o bien números decimales con parte entera de una cifra y parte decimal también de una cifra. El valor asignado para esta posibilidad es “2".

3) **V_3 = presencia en el enunciado de un dibujo o gráfico de apoyo al texto**. Se trata de incluir, o no, un dibujo-gráfico alusivo al contexto del problema. El dibujo-gráfico no deberá ser necesario para resolver el problema, y evitará reproducir fielmente o a escala los objetos representados, así como las posibles relaciones de proporcionalidad entre ellos. La presencia de este dibujo tendría como objeto el de acercar al estudiante al contexto del problema (núcleo algebraico), y/o ofrecerle la posibilidad, implícita, de utilizarlo (tal cual o por medio de alguna otra esquematización) en el sistema de representación en el que se aborde la resolución del proble-

ma. Esto supone dos valores, duales:

a) Problemas con dibujo en el enunciado, valorados con "1".

b) Problemas sin dibujo en el enunciado, valorados con "2".

De acuerdo con estas tres variables y sus combinaciones aparecen **8 tipos de problemas distintos**. Cada problema viene identificado por tres coordenadas, que pueden tomar los valores 1 o 2, correspondiendo cada una de ellas a una de las tres variables de tarea enunciadas.

Contextos. Creemos que utilizar en los enunciados de los problemas ocho contextos distintos para cubrir todas las combinaciones de las variables de tarea supone una dispersión innecesaria. Hemos decidido utilizar sólo cuatro contextos diferentes, lo cual corresponde a dos problemas para cada contexto. Dichos contextos son:

-listones de madera,

-discos-cassettes,

-material escolar,

-entradas.

Además, proponemos otros dos problemas que sean réplicas de otros anteriores, a fin de verificar si se resuelven de igual forma, y que sirvan, por lo tanto, para contrastar la validez de la prueba. Estos dos problemas serán de contextos distintos a los anteriores y entre sí, y de variables distintas entre sí.

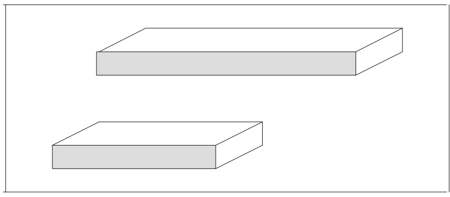
Hemos elegido los contextos de los problemas del instrumento del Anexo I, aplicados a una muestra piloto, que ya han sido utilizados por otros autores en trabajos de investigación, aunque no siempre se han utilizado en estudios sobre problemas algebraicos (de ellos hemos tomado el contexto, no el enunciado). No obstante, los enunciados de los problemas derivados de ellos son novedosos (en el caso de los que presentan dos relaciones algebraicas), o transformados de los originales, en orden a una adecuación a nuestro entorno y a las características de este estudio.

Queremos resaltar que la elección de los contextos obedece, además, a que contienen elementos que se pueden manipular, ya sea físicamente o mentalmente. Estos elementos se pueden unir o pegar, añadir, juntar, separar, cortar, superponer, partir, y otras actividades de esta naturaleza que permiten una representación físico-visual más o menos inmediata en el papel y que, a su vez, puede/n representar la/s relacion/es indicada/s en el texto del problema. Consideramos esta cuestión de suma importancia, pues esto nos permite asegurar que todos y cada uno de los problemas se pueden abordar de forma asequible desde cualquiera de los sistemas de representación que hemos categorizado, lo que no se podría asegurar de otro tipo de contextos (por ejemplo, problemas de mezclas o resolver directamente un sistema de ecuaciones).

Los problemas seleccionados para el instrumento de evaluación, ordenados respecto a las variables de tarea, son:

1) Variables de tarea (1,1,1). Contexto: listones (tiras) de madera

"En una carpintería hay dos tipos de listones de madera: unos largos y otros cortos. Si ponemos en línea un listón largo junto con dos cortos, miden 210 cm. El listón largo mide 30 cm. más que el corto. ¿Cuánto mide cada listón de madera?"



1: una relación

1: números sen-cillos

1: con dibujo

2) Variables de tarea (1,1,2). Contexto: discos-cassettes

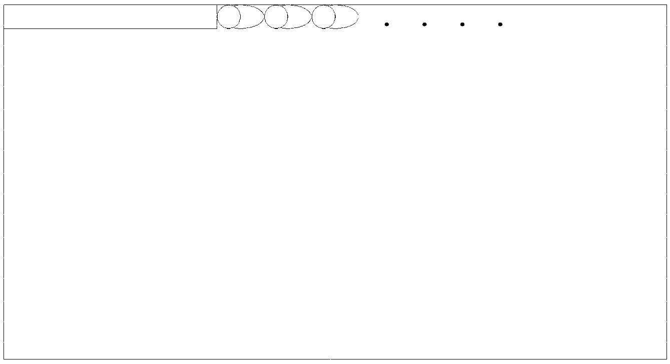
"Marta y Sandra van a comprar a una tienda de discos. Marta lleva 7.400 ptas. y Sandra 11.000 ptas.

Marta se compra 3 CD y Sandra compra 5 CD, todos al mismo precio. A la salida, después de pagar, resulta que a las dos les sobra la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto cuesta cada CD?”

1: una relación

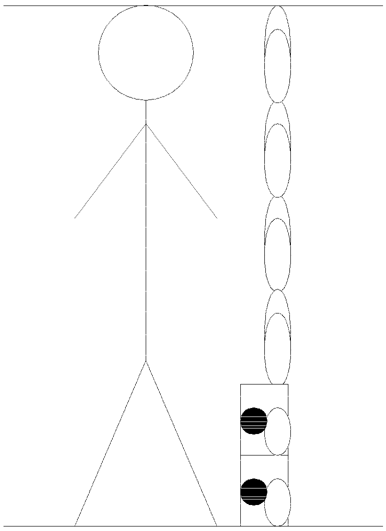
1: números sencillos

2: sin dibujo

3) Variables de tarea (1,2,1). Contexto: material escolar "Juan sabe que el tablero de su mesa de clase es un rectángulo cuyo lado largo es 1,7 veces mayor que su lado ancho.  En el lado largo Juan coloca, en hilera, su regla de 30 cm. y 16 clips, y en el lado menor puede poner la regla de 30 cm. y 6 clips. ¿Cuánto mide cada clip?"	1: una relación 2: números difíciles 1: con dibujo

4) Variables de tarea (1,2,2). Contexto: entradas (tickets) "David y Reme deciden ir a un concierto. David se compra una entrada, y Reme quiere ir a un sitio mejor donde la entrada es 2,7 veces más cara que la de David. En total han pagado por las dos entradas 5.550 ptas. ¿Cuánto vale cada entrada?"	1: una relación 2: números difíciles 2:sin dibujo

5) Variables de tarea (2,1,1). Contexto: material escolar.



"A Teresa le han regalado un muñeco de Epi que mide 21 cm, y a su hermano pequeño uno de Blas que mide 30 cm.

La altura de Epi se puede medir también con 4 clips y 2 sacapuntas, como se puede ver en la figura. En el caso de Blas se necesitan 5 clips y 4 sacapuntas.

¿Cuánto mide cada clip y cada sacapuntas?"

2: dos relaciones

1:números fáciles

1: con dibujo

6) Variables de tarea (2,1,2). Contexto: entradas (tickets)

"David y Reme deciden ir a un concierto, cada uno con sus hermanos. David tiene que sacar 2 entradas y Reme 3 entradas.

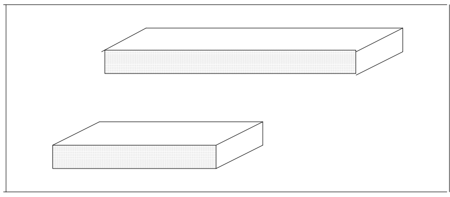
Hay dos tipos de entradas, según estén en un sitio más caro o en otro más barato, y no hay entradas para todos en el mismo sitio.

Si la familia de David va al sitio de las baratas y Reme al de las caras en total les cuestan 14.500 ptas. y si es al revés (Reme al sitio de las baratas y David al de las caras), entonces les cuestan 13.000 ptas. ¿Cuál es el precio de cada entrada?"

2: dos relaciones

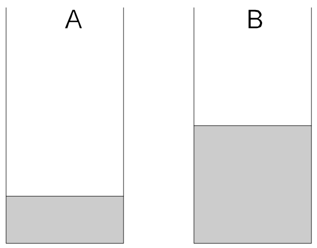
1: números fáciles

2: sin dibujo

7) Variables de tarea (2,2,1). Contexto: listones (tiras de madera) "Para un trabajo manual, Rocío ha comprado 2 listones cortos y 2 listones largos que si se ponen uno detrás de otro miden en total 242cm.  Daniel necesita algunos más y compra 3 cortos y 4 largos que unidos miden 446cm. ¿Cuánto mide cada listón?"	2: dos relaciones 2: números difíciles 1: con dibujo

8) Variables de tarea (2,2,2). Contexto: discos-cassettes "Raquel y Sara van a comprar discos. Les gustaría comprarse 2 CD y 5 Cassettes que suman en total 6.740 ptas. Pero no pueden gastarse tanto dinero y al final escogen 1 CD y 3 Cassetes, por los que pagan 3.745 ptas. ¿Cuánto cuesta cada CD y cada Cassette?"	2: dos relaciones 2: números difíciles 2: sin dibujo

Hemos creído conveniente añadir algunos problemas que fueran réplica o paralelos, en cuanto a variables, de los ya propuestos para verificar resultados posteriores. Por lo tanto, añadimos dos problemas a fin de tener un instrumento con 10 ítems, que consideramos adecuado y suficiente para nuestros propósitos. Los problemas que hemos añadido son:

9) Réplica.Variables de tarea (1,1,1). Contexto: depósitos (tanques) de agua  "Tenemos dos depósitos de agua con la misma capacidad. El depósito A tiene 20 litros y hemos de echarle 9 cubos más para que se llene. El depósito B tiene 52 litros y hay que echarle 5 cubos para llenarlo. ¿Qué cantidad de agua cabe en cada depósito?".	1: una relación 1: números fáciles 1: con dibujo

10) Réplica. Variables de tarea (1,2,2). Contexto: distancias "La familia García realiza un viaje. El Sr. García tiene que conducir 434 kilómetros para ir de Madrid a Granada. En un punto del trayecto deciden parar a tomar un refresco. Después de la parada aún le quedan por recorrer 1’8 veces más de kilómetros que los que ya llevan recorridos. ¿Cuántos kilómetros le quedan después de la parada?¿Y cuántos kilómetros llevan ya recorridos?".	1: una relación 2: números difíciles 2: sin dibujo

Estos dos problemas de réplica se han escogido de aquellos que contienen una relación lineal algebraica, $V_1 = 1$, pues son más comunes en la práctica escolar, tanto a nivel de aula como de libros de texto de Secundaria, y hemos combinado las otras dos variables (tipo de números y dibujo).

Se proponen contextos diferentes de los iniciales para que, al incluirlos en una misma sesión de la prueba, los estudiantes no interpreten que tiene dos problemas idénticos, y puedan sentirse desmotivados por la repetición de tareas.

También se ve conveniente añadir una coletilla en cada problema que incite al sujeto a su resolución de la forma que mejor sepa. Después de algunos intentos, llegamos a la siguiente redacción:

"*Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema*"

El esquema siguiente resume el conjunto de ítems/problemas que constituyen el instrumento de evaluación, de acuerdo a la combinación de variables de tarea:

Problema	**Relaciones**		**Datos**		**Dibujo**	
	una [1]	**dos [2]**	**fáciles [1]**	**difíciles [2]**	**con [1]**	**sin [2]**
1 (1,1,1)	*		*		*	
2 (1,1,2)	*		*			*
3 (1,2,1)	*			*	*	
4 (1,2,2)	*			*		*
5 (2,1,1)		*	*		*	
6 (2,1,2)		*	*			*
7 (2,2,1)		*		*	*	
8 (2,2,2)		*		*		*
9 (1,1,1) Réplica	*		*		*	
10 (1,2,2) Réplica	*			*		*

Con esto hemos dado respuesta a los objetivos a.1) y a.2), recogidos en el

Capítulo 4, referentes a la selección de una serie de problemas verbales algebraicos que respondan a unas variables de tarea, con los que construir un instrumento de evaluación.

5.8. Hacia la estandarización del instrumento de evaluación.

5.8.1.Puesta a punto del instrumento de evaluación.

Acordamos que en Secundaria la prueba se divida en dos partes, para aplicar cada una en una sesión distinta. Cada parte constará de cinco problemas, cuatro de los ocho problemas base y uno de los replicados, distribuidos de tal forma que se repartan equilibradamente las variables y los contextos en cada sesión. Los problemas deben de ir en hojas singulares, de tal forma que la resolución de cada problema se realice en la misma. De esta forma se elaboran dos cuadernillos con cinco hojas cada uno, una por problema, indicando en la primera hoja los datos del estudiante.

Para los estudiantes universitarios, teniendo en cuenta que disponen de más tiempo por sesión y que están más habituados a realizar tareas en sesiones largas, decidimos ofrecer un solo cuadernillo con las hojas de los diez problemas.

Decidimos también que la prueba empiece por un problema atractivo para el estudiante, por su sencillez y por el dibujo que incorpora. Por lo tanto la secuencia de presentación de los problemas queda como sigue:

1ª Sesión:
- 1.1. Problema de variables (1,1,1), listones de madera
- 1.2. Problema de variables (2,1,1), material escolar
- 1.3. Problema de variables (1,2,2), tickets
- 1.4. Problema de variables (2,2,2), discos-cassettes
- 1.5. Réplica de variables (1,2,2), distancias

2ª Sesión:
- 2.1. Réplica de variables (1,1,1), depósitos
- 2.2. Problema de variables (2,1,2), tickets

2.3. Problema de variables (1,1,2), discos-cassettes
2.4. Problema de variables (2,2,1), listones de madera
2.5. Problema de variables (1,2,1), material escolar

Con esta distribución, el instrumento construido para evaluar las competencias algebraicas elementales quedó conformado como un cuadernillo de diez hojas que reproducimos en el Anexo II.

5.8.2. Administración del instrumento.

Se ha pasado la prueba a la muestra convenida de 160 estudiantes que hemos descrito en el apartado 5.2 de este Capítulo.

Las circunstancias de la administración del instrumento han sido las siguientes: el desarrollo de la prueba se produjo en el aula habitual de cada grupo de estudiantes y a una hora de clase, como actividad no prevista en ese momento. Los profesores de los estudiantes involucrados no conocían ni el tipo de prueba ni el contenido de la misma. Los estudiantes no estaban avisados de que se les iba a pasar una tanda de problemas, por lo tanto no hubo preparación previa, y los resultados se produjeron espontáneamente. El profesor de esos alumnos no intervino en el desarrollo de la prueba y, en algunos casos, no estuvo presente.

En cuanto a la realización en el aula hay que distinguir:

1) Para los alumnos de Secundaria, la prueba se dividió en dos sesiones de cinco problemas cada una. Cada una de estas partes se pasó un día distinto con, al menos, una semana de intervalo entre una sesión y la otra. Cada una duró 50 minutos aproximadamente.

2) Para los alumnos universitarios se pasó la prueba con los diez ítems/problemas en una única sesión, que duró 90 minutos aproximadamente.

El tiempo no se controló pues no era decisivo sino orientativo, pero fue suficiente para la terminación de toda la tarea: se trata, pues, de una prueba más de potencia que de velocidad.

No obstante, esta distribución en sesiones puede explicar por qué los estudiantes de Secundaria dejaron en blanco con mayor frecuencia los problemas últimos de cada parte, sin intentos de planteamiento o sin resolver. Estos problemas son los números 5 y 10; en el caso de los estudiantes universitarios esto ocurre con los últimos problemas de la prueba: algunos sujetos manifiestan cansancio o desidia en continuar con la tarea cuando no consiguen buenos resultados en los primeros ítems/problemas.

5.8.3. Baremación del instrumento.

Hemos considerado seis variables dependientes que se van a medir en cada problema. Son variables categoriales a las que vamos a asignar, mediante consenso de expertos, un número por cada categoría, con lo que se transformarán en variables intervales de naturaleza métrica discreta. Esto nos permite adoptar un modelo aditivo para su estudio estadístico.

Se han vaciado los 160 protocolos y se han corregido los problemas describiendo su resolución según el siguiente procedimiento:

Se identifica al sujeto con tres dígitos, empezando en el 001 y terminando en el 160. Los 80 primeros sujetos son estudiantes de Secundaria (G_1), los 40 siguientes son estudiantes del grupo G_2 (entre 3 y 5 años sin matemáticas) y los 40 restantes son del grupo G_3 (con más de 5 años sin matemáticas).

Cuando hemos encontrado un problema en blanco, sin ningún tipo de escritura hemos rellenado sus casillas con asteriscos, * (dato perdido, no dado o *missing*), para su estudio estadístico y para diferenciarlos de aquellos en los que ha habido algún intento, incluso de pasar al papel los datos o algún atisbo de relación del problema.

La baremación de las variables ha sido:

a) *Variables independientes*:

1) Grupo de la muestra a la que pertenece el sujeto. Con un dígito identificamos al grupo al que pertenece: 1 para G_1, 2 para G_2, y 3 para G_3:

Numeración	Grupo
1	G_1

Numeración	Grupo
2	G_2
3	G_3

2) La variable tipología o cluster no se ha baremado en esta fase, pues no se conocían los posibles cluster que se podrían formar. Queda pendiente su consideración para el Capítulo 9.

b) *Variables dependientes*:

1) La primera variable que hemos tomado en el vaciado de los protocolos es el *sistema de representación* con el que se ha abordado el problema. Si ha utilizado más de un sistema de representación tomamos como indicativo aquel en el que se ha resuelto el problema. Si no ha terminado de resolver el problema (por ejemplo, sólo lo ha planteado) y podemos identificar en qué sistema ha empezado, lo tomamos como el sistema de representación que el sujeto ha elegido para intentar resolverlo. Cuando, con los datos que explicita el sujeto, no se puede determinar el sistema de representación porque consideramos que no hay información suficiente, le adjudicamos el dígito 0. En el resto de los casos identificamos los sistemas del 1 al 5, según el siguiente cuadro:

Numeración	Sistema de Representación
0	Información insuficiente
1	Ensayo-Error
2	Parte-Todo
3	Gráfico
4	Gráfico-Simbólico
5	Simbólico

2) A continuación identificamos si el *planteamiento* es correcto o incorrecto, es decir, si las relaciones algebraicas entre los datos y las incógnitas del problema son correctas o erróneas, o no se han definido bien las incógnitas. Hemos atribuido los siguientes valores: 0 cuando no hay planteamiento, es decir, no hay relaciones explícitas, sólo datos, conocidos o desconocidos, pero sin relacionar; 1 cuando se ha realizado un planteamiento, pero no es correcto; 2 cuando el planteamiento es correcto:

Numeración	Planteamiento
0	No
1	Incorrecto
2	Correcto

3) También hemos codificado la *ejecución* , según sea buena o errónea, independientemente de si el problema está bien o mal planteado. Es decir, controlamos si se dominan las reglas algebraicas necesarias para el desarrollo de un determinado planteamiento en un problema algebraico. Asignamos el 0 cuando no hay ejecución, tanto si hay planteamiento como si no lo hay; 1 cuando hay ejecución y desarrollo, pero es incorrecto; 2 cuando el desarrollo es correcto, independientemente de si se parte de un planteamiento correcto, o de si se llega a un resultado correcto, lo que queda recogido en el siguiente esquema:

Numeración	Ejecución
0	No
1	Incorrecta
2	Correcta

4) En cuarto lugar hemos considerado si el *resultado* es correcto o es erróneo. Tomaremos el resultado correcto cuando se obtenga alguna de las soluciones solicitadas en el problema. Identificamos el 0 cuando no se obtiene ningún resultado; 1 cuando los resultados que se obtienen son incorrectos; 2 cuando algún resultado

obtenido es correcto. El esquema es el siguiente:

Numeración	Resultado
0	No
1	Incorrecto/s
2	Algún resultado correcto

5) Identificamos las *componentes que caracterizan el pensamiento algebraico*, según Lins (1992), que se explicitan a lo largo del desarrollo escrito de la resolución de un problema algebraico. Hemos adjudicado los siguientes códigos: 0 cuando hemos considerado que no hay información suficiente para identificar la presencia de alguna de estas características; 1 cuando se encuentra explícita la aritmeticidad; 2 cuando se encuentra explícita la internalidad; 3 cuando se encuentra explícita la analiticidad; 4 cuando se pueden identificar aritmeticidad e internalidad; 5 cuando se pueden identificar aritmeticidad y analiticidad; 6 cuando se pueden identificar internalidad y analiticidad; 7 cuando están presentes las tres características y, por lo tanto, existe un buen razonamiento y desarrollo de la tarea algebraica. Vamos a resumir en un cuadro las adjudicaciones para esta variable:

Numeración	Características del Pensamiento Algebraico
0	Información insuficiente
1	Aritmeticidad
2	Internalidad
3	Analiticidad
4	Aritmeticidad-Internalidad
5	Aritmeticidad-Analiticidad
6	Internalidad-Analiticidad
7	Aritmeticidad-Internalidad-Analiticidad

6) La descripción del *desempeño final* del problema, según sea correcto el resultado para una solución, correcto para las dos soluciones, o bien sea incorrecto debido a una falta de atención en la actuación (un error mecánico al trascribir un término de una relación a otra, o un error simple de algoritmo aritmético), nos lleva a la siguiente codificación: 0 cuando el resultado es erróneo debido a una resolución incorrecta del problema; 1 cuando el resultado erróneo se debe a la falta de atención; 2 cuando se obtiene un resultado correcto de dos solicitados; 3 cuando el resultado contiene a todas las soluciones correctas. La tabla-resumen queda de la siguiente forma:

Numeración	Desempeño Final
0	Resultado/s erróneo/s
1	Falta de atención
2	Un resultado de dos
3	Resultados correctos

Toda la baremación, utilizada para codificar los protocolos, está recogida esquemáticamente en una hoja de codificación que aparece en el Anexo III.

La corrección codificada de los 160 protocolos nos llevará a una matriz de 160 filas y 64 columnas, que está recogida en el Anexo IV.

5.9. Validez del instrumento de evaluación.

5.9.1. Aproximación a la validez de contenido.

En cada una de las pruebas piloto que hemos realizado hemos tratado que los contenidos de las tareas propuestas en los ítems sean adecuados al nivel y a los contenidos del Álgebra que se imparten en la E.S.O.; se han eliminado aquellos ítems que no respondían a estas exigencias y se han incluido algunos nuevos que se adecuan a estas características. También se ha hecho referencia a las discusiones que se han llevado a efecto, a nivel de grupo de expertos, en las que se han visto y comentado las tareas propuestas, en donde ha sido constante la preocupación por proponer ítems/ problemas netamente algebraicos, adecuados a los contenidos del Álgebra Elemental en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Además, la validez de contenido queda justificada en dos aspectos:

1) Los contextos de algunos de los problemas y/o su estructura básica están tomados de otros problemas que ya han sido utilizados por otros autores en investigaciones similares. En efecto: los problemas 1, 3, 5 y 6 son variantes de otros problemas utilizados por Lins (1992, 1995). El problema nº 2 está inspirado en el problema de *Mr. Short and Mr. Tall* que utilizan Karplus y Peterson (1970)[9] pero, en este caso, en un contexto de razonamiento proporcional. El resto de los problemas son variaciones sobre los anteriores, que cumplen con las variables descritas en un apartado anterior.

2) Por otro lado se ha querido comprobar el grado de concordancia de nuestro criterio con el expresado por un grupo de expertos externos a nuestro trabajo. Para ello se ha elaborado un protocolo, expuesto en el Anexo V, que se ha propuesto a diez jueces externos. Estos protocolos se han acompañado del conjunto de problemas referenciados en el Anexo I.

Hemos de destacar que ningún juez externo ha indicado la no adecuación de alguno de los problemas; en todo caso han señalado la posible colisión de algún problema con otro tipo de razonamiento. Hemos tomado la decisión de eliminar estos problemas junto con los que mayor dificultad ofrecían a los estudiantes de la muestra piloto, descrita en otro apartado anterior. De los resultados de los protocolos de la

[9] Karplus, R. & Peterson, R.W. (1970): *Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, a survey*. Berkeley, CA: University of California, Lawrence Hall of Science.

muestra piloto y los recogidos a los jueces externos, hemos elaborado la lista definitiva de problemas verbales que han constituido el instrumento de evaluación propuesto.

De esta forma queda cumplido el objetivo b.1), descrito en el Capítulo 4.

5.9.2. Aproximación a la validez de constructo.

Se trata de estudiar la estructura del constructo emergente en el instrumento de evaluación constituido por 10 ítems mediante análisis factorial, solución por componentes principales. Para este análisis se ha utilizado el paquete estadístico BMDP (Dixon, 1992), que hemos aplicado a la matriz de los códigos, tomando como variable el *Desempeño Final* en la resolución de los problemas, obteniendo la tabla de factores que reproducimos:

Tabla de Factores sobre la variable *Desempeño Final*

Factor	Varianza explicada	Varianza acumulada
1	4.0074	0.7672
2	1.2157	1.0000
3	0.9202	
4	0.8469	
5	0.6755	
6	0.6205	
7	0.5290	
8	0.4927	
9	0.3902	
10	0.3018	

Excluimos aquellos factores cuya varianza explicada no supera el 10% ($\lambda<1$). Como se puede observar entonces, quedan sólo dos factores para interpretar la varianza. Al limitarse sólo a los dos primeros factores, el primero de ellos ya explica más del 75% de la varianza de los datos. Este primer factor lo asimilamos a un factor general representativo del constructo *Desempeño Final*, subyacente en la variable.

También vamos a considerar, dentro de otras posibilidades, la tabla de factores no rotados que nos indica la presencia de los dos factores, obtenidos en la tabla anterior, en cada uno de los ítems/problemas del instrumento de evaluación, con el coeficiente de carga correspondiente.

Sombreamos las cargas que se tendrán en cuenta ($|a| > 0,30$).

Tabla de cargas de los factores no rotados

Problemas	Factor 1	Factor 2
1	0.459	-0.090
2	0.715	0.014
3	0.584	0.586
4	0.716	0.271
5	0.654	0.530
6	0.525	-0.435
7	0.656	-0.216
8	0.617	-0.196
9	0.617	-0.475
10	0.732	-0.093
λ	4.007	1.216

En esta tabla hemos tomado las cargas cuyas casillas se destacan. Cada ítem carga de forma destacada en un sólo factor, salvo el nº 3 y el nº 5 que cargan equilibradamente en los dos factores. La carga de los ítems nº 6 y nº 9 en el Factor 2 es negativa, haciendo de éste un factor eminentemente bipolar.

Por lo tanto, se observa que el Factor 1, carga como factor general de todos los ítems. Este factor se puede interpretar como que todos los ítems tiene un elemento común, que es el desempeño de una tarea algebraica, es decir, interpretamos que:

El desempeño algebraico es un factor general, ya que carga significativamente en todos los problemas que configuran el instrumento.

Respecto a los ítems nº 3 y nº 5, observamos que su carga en ambos Factores es similar y se debe tener en cuenta. Esto indica que existe cierta especificidad para estos ítems. En efecto, corresponden a problemas que responden a las mismas variables: el problema nº 5 es réplica del nº 3.

Todo este análisis trae como consecuencia la validez de constructo del instrumento, determinada por la coherencia interna de los ítems, la uniformidad en la tarea a realizar, es decir, el contenido algebraico elemental y el nivel de dificultad para los estudiantes. Con esto hemos cubierto también el objetivo b.2) descrito en el Capítulo 4 y, por lo tanto, podemos afirmar **la validez de contenido y de constructo del instrumento de evaluación**.

5.10. Fiabilidad del instrumento de evaluación.

La idea de fiabilidad se ha venido considerando tradicionalmente como equivalente a la de exactitud: un instrumento de recogida de datos será fiable si es estable (sin diferencias en aplicaciones consecutivas), si genera valores equivalentes (dos instrumentos semejantes producen la misma medida) y si es consistente (grado de uniformidad con que cumple su cometido).

Thorndike y Thorndike (1997) enuncian una caracterización más ajustada al definir la fiabilidad como “la exactitud con que las observaciones muestrales/datos recogidos representan el universo amplio de respuestas admisibles” (p. 775),

En este estudio determinaremos la fiabilidad por consistencia interna de unidades/ítems (al correlacionar entre sí los ítems del instrumento) ya que permite obtener valores de fiabilidad con una única administración del instrumento. La consistencia interna se verifica pues el instrumento es congruente, en el sentido sentido de que todos los ítems miden un atributo común (Factor 1, determinado anteriormente).

Para determinar la fiabilidad del instrumento de evaluación hemos obtenido distintos índices (Shavelson, 1988), tomando los resultados obtenidos a través de la aplicación del BMDP (Dixon, 1992), que a continuación exponemos:

- El valor encontrado para la **Theta de Carmines $\Theta = 0.83$** en el análisis factorial supone un grado alto de fiabilidad para el conjunto de ítems aplicados.

- Además, hemos determinado la fiabilidad, por consistencia interna de unidades (ítems policotómicos), por el procedimiento de α de Cronbach o Kuder-Richardson-22[10]. En nuestro caso, el valor de la **α de Cronbach = 0.825** supone un valor muy aceptable sobre la fiabilidad, por consistencia interna, del conjunto de ítems de la prueba.

- También se ha determinado la fiabilidad mediante el **Índice de Hoyt**[11], calculado a partir de componentes de la varianza. Se ha utilizado para ello un diseño de medidas repetidas: sujetos (n=160 - faceta aleatoria) × ítems (n=10 - faceta aleatoria: variable *Desempeño Final*).

Componente	F. de V.	s l	g l	M C	F	p	σ^2
Aleatoria	casos / sujeto (c)	1072.8	159	6.75	5.61	0.00	0.554
Aleatoria	ítems / desemp. (i)	290.5	9	32.28	26.83	0.00	0.194
Residual	casos x ítems (c x i)	1721.3	1431	1.20			1.202

El valor obtenido para el **Indice de Hoyt, γ = 0.82** se considera también muy aceptable, en concordancia con la **θ de Carmine (0.83)** obtenida en el análisis factorial y la **α de Cronbach (0.83)**.

---

10 $$\alpha = \frac{n_i}{n_{i-1}}\left(1 - \frac{\Sigma s_i^2}{s_t^2}\right)$$

11 $$\gamma = \frac{\hat{\sigma}_c^2}{\hat{\sigma}_c^2 + \frac{\hat{\sigma}_{c \cdot i}^2}{i}}$$

Los tres índices tienen valores prácticamente idénticos, próximos a 1, muy significativos, denotando alta fiabilidad del instrumento de evaluación. Por lo tanto se espera que este conjunto de ítems actúe siempre así, es decir que los resultados sean estables, lo que permite pronosticar que sea posible su aplicación a una población más amplia con resultados similares. Esto nos permite alcanzar el objetivo b.3) del Capítulo 4.

Teniendo en cuenta los objetivos específicos que ya hemos verificado, a.1), a.2), b.1), b.2) y b.3), podemos afirmar que se cumple el primer nivel del objetivo central, referido en el Capítulo 4, de **construir un Instrumento de evaluación de las competencias algebraicas elementales, mediante la resolución de problemas verbales, que sea válido y fiable** para la población de estudiantes españoles.

5.11. Errores de medida plausibles.

Los errores típicos de medida para las tres variables-criterio de naturaleza cuantitativa-interval, se determinan como sigue:

Variables:	$\bar{x}$	**S**	$S_{\bar{x}}$
Planteamiento	5,29	2,63	1,08
Ejecución	3,65	2,74	1,13
Desempeño Final	10,87	8,26	1,85

Los errores de medida[12] que obtenemos son razonablemente aceptables, pese al tamaño del instrumento que es relativamente pequeño (10 ítems/problemas valorados policotómicamente).

[12] El error típico de la media es:

$$S_{\bar{x}} = S\sqrt{1 - r_{xx}}$$ siendo r_{xx} el índice de fiabilidad

CAPÍTULO 6

DISEÑO Y PROCEDIMIENTO

6.1. Selección del diseño.

El diseño elegido para este análisis tiene dos componentes:

1) Un estudio muestral simple, que analiza el comportamiento de las variables definidas en todos los sujetos de la muestra, sin tener en cuenta al Grupo en que los hemos clasificado (G_1,G_2,G_3), a través de diversos estudios estadísticos descriptivos de carácter exploratorio de las variables dependientes, cuya estructura será:

$G(G_1+G_2+G_3)$ -------------> Observación/ Medida

Martínez Arias (1995, p. 387) categoriza este diseño como eminentemente descriptivo, con la función de obtener información sobre el gran grupo.

2) Un estudio transversal, que compara el comportamiento entre algunas variables dependientes y la variable independiente “grupo de edad/nivel académico”. Se trata, entonces, de un estudio confirmatorio de las hipótesis propuestas acerca de la estabilidad de las variables al comparar los Grupos entre sí:

G_1: -------------> Observación 1 G_2: -------------> Observación 2 G_3: -------------> Observación 3

La función de este estudio, siguiendo a Martínez Arias (1995, p. 387), sería explicativa y analítica, para estudiar y relacionar asociaciones entre variables y/o comparación entre subgrupos.

6.2. Amenazas a la validez del diseño.

Las amenazas al diseño de este estudio pueden venir dadas desde dos vertientes:

1) *La elección de la muestra*. Ha sido una elección intencional, en el sentido señalado por Cohen y Manion (1989, p.139). Por lo tanto no es una muestra aleatoria. Esto lleva a tomar con precaución los resultados de los estadísticos inferenciales, pues la distribución en la que se comparan los valores de las variables es manifiestamente no aleatoria. Si asumiéramos una aleatoriedad para las variables estudiadas, podríamos generalizar sin reserva los resultados obtenidos.

En nuestro caso, la muestra condicionada responde a nuestros intereses y satisface nuestras necesidades específicas.

2) *El estudio transversal*. Este tipo de estudios suele producir muchas amenazas a la validez. En nuestro caso, esta amenaza viene determinada también por el hecho de que los tres grupos de sujetos en los que hemos clasificado la muestra están compuestos por sujetos distintos, es decir, no son los mismos sujetos en distintas etapas de su formación estudiantil, sino que, incluso estas etapas han sido distintas para unos y otros sujetos y para los sujetos dentro de un mismo grupo. Por estas razones hemos de ser cautelosos a la hora de tomar una decisión sobre las hipótesis en curso.

Estas amenazas se podrían controlar:

- Eligiendo una muestra aleatoriamente de la población a la que va dirigido nuestro trabajo.

- Haciendo un seguimiento a los sujetos del Grupo G_1, estudiantes de E.S.O., a lo largo de su vida de estudiantes para aplicarles la misma prueba en las distintas etapas que caracterizan a los Grupos (al cabo de 3-5 años y después de haber transcurrido 5 años), es decir, transformando el estudio transversal en uno eminentemente longitudinal o de panel. No obstante, habría que asegurarse de que en este tiempo no han recibido instrucción algebraica, lo que supone otra dificultad, además de la temporal, para llevar a efecto el estudio: habría muchos sujetos del G_1 que no podrían formar parte de los Grupos G_2 o G_3, con lo que estos grupos serían muy poco numerosos con respecto al grupo inicial.

Sin embargo, otras amenazas a la validez de los diseños tanto muestral simple como transversal sí han sido más controladas. En el siguiente esquema exponemos el tipo de amenaza al diseño, su modo de control y el grado del mismo:

Amenaza	Control	Grado de control plausible
Características de los sujetos	- Grupos de sujetos de clases regulares, no manifiestamente extremos ("outliers"). - Características atributivas presumiblemente distribuidas aleatoriamente. - Muestra amplia ($N \geq 40$).	Medio
Localización en la administración de los instrumentos	- Se administran en aulas habituales. -No se utilizan espacios reactivos ni singulares.	Alto
Deterioro de los instrumentos	- Esfuerzo por conseguir respuestas standarizadas. - Se descartan interpretaciones confusas	Medio
Características del recolector de datos	- El procedimiento de recogida está standarizado. - El mismo instrumento se administra a todos los sujetos - Un único recolector	Medio
Sesgo por expectativas del investigador	- No fue posible un doble ciego, sin embargo: - El investigador principal asumió, en base a la evidencia previa, la hipótesis contraria a la inicialmente propuesta	Medio
Administración del instrumento	- Para el G_1 se realizó en dos etapas distanciadas en una semana. No hay deterioro - Para el resto hay una sola administración. No es posible el deterioro	Alto
Mortalidad	- El nº de sujetos que realiza la prueba es superior al de la muestra elegida. - La muestra se extrae aleatoriamente de entre los que han completado la prueba	Alto

Teniendo en cuenta todo lo anterior, las amenazas propias de este diseño están mínimamente controladas, si obviamos la ausencia de representatividad muestral, debido a la no aleatoriedad de la misma.

6.3. El procedimiento: descripción y temporalidad.

Vamos a indicar a grandes rasgos las fases que consideramos más importantes y decisivas en el desarrollo de este trabajo:

6.3.1. Primera Fase: Campo de investigación a estudiar.

Al inicio del curso 1993-94 el Grupo de Investigación de Evaluación del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dirigido por el profesor Rico, propone continuar la línea iniciada por la profesora Castro para su trabajo de tesis de doctorado (centrada en la Aritmética del ciclo 12-14 años) a la nueva E.S.O. (en el segundo ciclo: de 14-16 años), que se iba a implantar en el sistema educativo español. La propuesta inicial consiste en elaborar instrumentos de evaluación para Álgebra que contemplen ítems con posibilidad de múltiples niveles y tipos de respuestas.

6.3.2. Segunda Fase: Determinación del Proyecto de Tesis.

En los primeros meses del curso citado se suceden discusiones en distintas reuniones del Grupo de Investigación sobre los pasos a seguir, y se evalúan algunos problemas propuestos en cuanto a su idoneidad respecto al nivel al que van dirigidos y el contenido algebraico de los mismos.

Durante este período se solicita a algunos profesores del Departamento, interesados en el tema, sus opiniones sobre los ítems propuestos y los pasos a seguir. Realizamos algunas sesiones de trabajo con estos profesores para tratar de delimitar lo que se entiende por *Pensamiento Algebraico*, diferenciado del *Pensamiento Aritmético*, y lo que se define como *Pre-Álgebra*. Consultamos también documentación científica publicada sobre esta materia (entre otros, Filloy y Rojano, 1989; Kieran y Filloy, 1989; Puig y Cerdán, 1991; Kieran,1992; Lins, 1992; Lamon y Lesh, 1992).

Todos los datos recogidos dan lugar al **Proyecto de Tesis**, documento que se presenta en el Seminario de Investigación del Departamento, para su posterior aprobación por el Consejo de Departamento (10-12-93), y tramitación a la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada; este Proyecto contiene las líneas generales de desarrollo y la metodología a seguir para la realización de la Tesis.

6.3.3. Tercera Fase: Primeras pruebas piloto.

Durante el año 1994 se revisan y recopilan numerosas tareas algebraicas. En Abril-Mayo-Junio de 1995 comenzamos a realizar las primeras pruebas piloto, ya descritas en el apartado 6.2. sobre el proceso de construcción del instrumento. Estas pruebas permiten depurar los tipos de ítems/problemas que son adecuados a nuestros objetivos.

6.3.4. Cuarta Fase: Opiniones de expertos.

En Septiembre de 1995 tenemos una reunión con el profesor Arcavi[1], que ha venido a impartir un Seminario en el Departamento de Didáctica de la Matemática de Granada, con el que intercambiamos ideas acerca de la finalidad de nuestro trabajo. Nos informa de sus últimas investigaciones en pre-álgebra y nos aporta documentación sobre otros trabajo realizados anteriormente.

El profesor Arcavi revisa la documentación que aportamos y propone que establezcamos tareas que sirvan para entender el conocimiento o la estructura subyacente de Álgebra en el estudiante. Cada pregunta debe servir para obtener un tipo de información. La dificultad está en describir las posibles respuestas.

Tomamos nota de algunos tipos de problemas que ha utilizado en investigaciones sobre Álgebra escolar y le proponemos utilizarlos en nuestro trabajo.

6.3.5. Quinta Fase: Plan estructurado de actuación.

Septiembre-Octubre de 1995. Dado el interés que tiene en el tema que se aborda, y su vinculación a estas cuestiones de didáctica de la matemática, el profesor Rico y este investigador acuerdan solicitar al profesor Fernández Cano que contribuya en la dirección de la tesis como codirector. Se informa al Departamento y se solicita la preceptiva aprobación por el Consejo, de manera que se comunique al Rectorado para su nombramiento efectivo.

A partir de este momento las reuniones para tratar de los temas de este trabajo son conjuntas (profesores Rico, Fernández Cano y este investigador), y la intervención del profesor Fernández Cano, por su conocimiento de la metodología de

[1] Abraham Arcavi. The Weizman Institute of Science. Departament of Science Teaching. Rehovot. Israel.

investigación y tratamiento de datos orienta eficazmente este estudio.

Establecemos un plan de trabajo estructurado y, aprovechando las tareas ya realizadas, marcamos unos objetivos y una temporización para llevarlos a cabo. Las primeras metas son: realizar una revisión en profundidad de la literatura especializada y elaborar un instrumento de evaluación, aplicarlo a una muestra superior a 100 sujetos. En una segunda etapa se hará un estudio estadístico para obtener conclusiones y verificar las hipótesis propuestas.

6.3.6. Sexta Fase: Primera categorización de las respuestas.

Octubre-Noviembre de 1995. En distintas reuniones se van presentando y discutiendo una serie de ítems/problemas y las posibles clasificaciones de las respuestas, de acuerdo al nivel de pensamiento algebraico explicitado. El profesor Rico insiste en mejorar y modificar la clasificación. El profesor Fernández Cano propone pasar los problemas a opinión de expertos, que validen su contenido. La tarea que se propone es mejorar el instrumento en los dos sentidos indicados (completarlos y ajustar mejor los enunciados y la clasificación), proponiendo su validación a expertos externos.

6.3.7. Séptima Fase: Presentación a la Comunidad de Investigadores.

En el II Congreso Internacional de Psicología y Educación, (Madrid, Noviembre 16,17 y 18), se expone la ponencia “Cuestiones abiertas en Educación Matemática”, coordinada por los profesores Rico y Bermejo. En esta ponencia se plantea la cuestión de la evaluación del conocimiento parcial, tomando como tópico el Álgebra de la E.S.O.

A raíz de esta exposición y de los comentarios que surgen en la discusión posterior del tema, el profesor Rico propone que la clasificación de las respuestas se realice teniendo en cuenta el modo de abordar la tarea, el modo de traducir el problema (planteamiento) a un esquema simbólico, y el modo de ejecutarla.

En distintas reuniones posteriores vamos depurando las posibles formas de “traducir” un problema a un lenguaje algebraico. El profesor Fernández Cano propone que el primer nivel de clasificación, que se ha venido denominando como pre-algebraico, sea el de resolución numérica (categorizado en dos niveles: ensayo-error, parte-todo), y los demás niveles (gráfico, gráfico-simbólico alfabético, simbólico alfabético) sean niveles algebraicos elemental, medio y superior. El investigador insiste en distinguir, además, los errores que se cometan según sean algebraicos o aritméticos.

Acordamos establecer una parrilla que permita corregir los problemas, teniendo en cuenta sólo los bien resueltos, que indique el sistema en que se ha planteado y los errores en el planteamiento. Añadimos la posibilidad negativa de ambas variables.

De esta forma elaboramos la siguiente matriz de resultados:

Resolución	**Traducción incorrecta. No algebraico**	**Ensayo-Error. Pre-Algebraico**	**Simbol. gráfico. Algebraico Elemental**	**Gráfico-alfab. Algebraico Medio**	**Simbol. alfab. Algebraico Superior**
Mal planteado	X	X	X	X	X
Plantea bien con Errores algebraicos	X	X	X	X	X
Plantea bien con Errores aritméticos	X	X	X	X	X
Plantea y resuelve bien	X	X	X	X	X

con la que se trata de conocer las posibles formas de "traducir" el problema verbal y el sistema que se usa para esta traducción. La identificación con los distintos niveles de conocimiento algebraico era una propuesta nuestra que tendría que ser validada por expertos externos.

6.3.8. Octava Fase: la variable Sistemas de Representación.

Enero-Febrero 1966. Tratamos de definir las variables que vamos a medir en la investigación. Se discute sobre la conveniencia de tomar como variables los niveles de pensamiento algebraico o los marcos conceptuales (Arzarello y col., 1995) puestos en juego en la resolución de la tarea algebraica. El profesor Rico indica, que en la enseñanza obligatoria, hay que tener en cuenta la dimensión social del conocimiento, que no hay jerarquías en el conocimiento y que lo que tratamos es de diferenciar modos útiles de expresar el pensamiento algebraico de un ciudadano. Por lo tanto, no debemos entrar en ordenar o jerarquizar los apartados anteriores de la tabla, referidos a los esquemas o marcos conceptuales en que clasificamos las respuestas de los problemas, en orden a determinar si un conocimiento algebraico parcial, explicitado en las respuestas, es mejor o peor que otro, sino que ambos son válidos para el tipo de enseñanza y de ciudadanos que se pretende formar con los estudios de secundaria obligatoria.

Acordamos, entonces, referirnos a partir de ahora a *sistema de representación*, en el sentido de Janvier (1987) y Duval (1993a, 1993b).

Se discute acerca de en qué fase de la resolución del problema se toma el sistema de representación, porque puede haber sujetos que pasen de un sistema a otro. Ante la diversidad de casos, se opta por tomar aquel sistema en que quede resuelto el problema. Si no se resuelve el problema se tomará en sistema en que se plantea, siempre que haya indicios que puedan asegurar que estamos ante uno de los sistemas indicados. En caso contrario pueden ocurrir dos casos: a) que se identifique un nuevo sistema de representación, no contemplado en las categorías iniciales; b) que no haya datos para clasificarlo en ninguna categoría. En el primer caso, el nuevo sistema de representación se incorporará a las categorías propuestas, y el segundo caso se contabilizará en una categoría aparte que contemple estos casos de falta de información.

6.3.9. Novena Fase: Características del pensamiento algebraico.

Febrero 96. Tenemos una reunión con el profesor Lins[2]. La reunión, en sesión de mañana y tarde, dura aproximadamente cuatro horas. En este tiempo exponemos nuestro trabajo y su finalidad, con un intercambio intenso de ideas, aclaraciones y propuestas. Lins nos explica sus nuevas aportaciones a la teoría de los *campos semánticos*, en particular el referente al pensamiento algebraico, y nos aclara el concepto de *núcleos algebraicos*, que nosotros habíamos identificado erróneamente con los *contextos*. También nos explica y clarifica lo que entiende por *pensamiento algebraico* y su caracterización, definida en su trabajo de tesis doctoral (1992).

Después de la reunión, hacemos un balance de lo que se discutió y de lo que se sacó en claro. Tomamos la idea de clasificar las producciones de los alumnos en *positivo,* dando énfasis a lo que se explicita, es decir, a lo que de pensamiento algebraico se pone en juego por el alumno, y no a los errores o carencias mostradas por el alumno.

Mantenemos nuestra propuesta de clasificar las respuestas por los sistemas de representación empleados para plantear el problema. Nos reafirmamos en esta idea y en la de que para evaluar el trabajo de los escolares no se puede considerar un sistema mejor que otro en los niveles de secundaria obligatoria, ya que unos y otros implican conocimiento algebraico y competencia para resolver una tarea algebraica.

El profesor Fernández Cano propone que se siga trabajando con esta clasificación e incluso con la que se hizo para el desarrollo propio del problema (las operaciones para solucionar el problema): "plantea mal", "comete errores algebraicos", "ídem errores aritméticos", "plantea y resuelve bien".

Proponemos hacer un estudio que ponga de manifiesto qué características del pensamiento algebraico se hacen explícitas en la resolución de las tareas algebraicas. Para ello vamos a tomar caracterización que propone Lins: *aritmeticidad, analiticidad e interioridad*. De esta forma trataremos también de confirmar la aplicación del modelo de pensamiento algebraico que describe Lins a la resolución de los problemas verbales algebraicos que se van a proponer.

---

[2] Romulo Campos Lins. Departamento de Matematica. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. Brasil.

Fernández Cano propone el tercer paso con el cual cerrar la investigación. Se elaboraría una ficha que contuviera un problema y las soluciones que se han obtenido de acuerdo a la clasificación, por sistemas de representación, que proponemos. Buscaremos problemas en los que se den respuestas según los cuatro sistemas propuestos. Esta ficha se la daremos a los profesores y les pediremos que valoren la respuesta en una escala del 0 al 10. De esta forma podremos comprobar si las respuestas correctas dadas por los estudiantes se valoran de igual o diferente forma, de acuerdo con el sistema de representación empleado.

En resumen nos proponemos analizar:

1) riqueza de modos de resolución;

2) complejidad del pensamiento algebraico y las opciones o fases que reconocemos (caracterización de Lins, 1992);

3) enfrentamiento del profesor a una evaluación de lo anterior.

En esta fase acordamos que el instrumento se pase a:

- 60 alumnos de 4º de Secundaria elegidos de los dos centros que imparten estos estudios en Granada.

- 40 (para quedarse con 30) alumnos de 1º de Magisterio que no hayan estudiando matemáticas en el Bachillerato ni C.O.U, y que esta carencia tenga un máximo de 5 años (para evitar encontrarnos con alumnos muy mayores que distorsione la muestra)

- 40 (para quedarse con 30) alumnos de 5º de Pedagogía de "letras", que no hayan estudiando matemáticas desde hace 7 años o más (se tendrá en cuenta, si existe, la posible cola de alumnos con más de 10 años sin haber estudiando matemáticas).

Para ello es necesario incluir en el cuestionario un apartado en que se pregunte por el nº de años que se lleva sin estudiar matemáticas.

6.3.10. Décima Fase: Determinación de las variables.

Marzo de 1996. En una reunión con el profesor Castro, del Departamento de Didáctica de la Matemática de Granada, para comentar las variables de los problemas verbales aritméticos de estructura multiplicativa, para Primaria, que ha utilizado en su investigación para la Tesis doctoral, y compararlas con las que nosotros vamos a utilizar en los problemas verbales algebraicos para Secundaria, llegamos a la conclusión que deben ser muy simple y fácil de discriminar. De acuerdo con los resultados obtenidos en las pruebas piloto, llegamos a la conclusión que son suficientes tres variables de tarea:

una o dos relaciones independientes,

números "fáciles" o "difíciles", y

presencia o no, en el texto, de un dibujo o gráfico alusivo a la tarea.

Llevamos esta idea a posteriores reuniones con los profesores Rico y Fernández Cano y acordamos ajustar los ítems/problemas estas variables, lo que implica seleccionar ocho problemas, teniendo en cuenta también los contextos o los "núcleos algebraicos" (en el sentido de Lins). Quedamos, por lo tanto, en que se pasen 10 problemas, 8 variables y 2 réplicas, en dos sesiones (5 y 5), para evitar que haya problemas repetidos y provocar el desinterés de los estudiantes de Secundaria; mantenemos la idea de incluir dos problemas por cada contexto, de acuerdo con una proposición del profesor Lins.

Este investigador propone también pasar los 8 problemas base mencionados a los alumnos de 5º de la Licenciatura de Matemáticas, especialidad de Metodología, que tienen asignaturas relacionadas con la didáctica de la matemática, y han efectuado prácticas de enseñanza en centros de Secundaria, para que los intenten hacer de *todas* las formas posibles. El objeto es verificar, a modo de validez por expertos externos, que, efectivamente, todos y cada uno de los problemas se pueden resolver en los cinco sistemas de representación que hemos definido.

El resultado de esta prueba es que, espontáneamente, sin previo aviso y sin ninguna otra aclaración, salvo la de que intenten hacer los problemas de *todas* las formas que se les ocurran, se pueden identificar claramente en las resoluciones los siguientes sistemas de representación: Ensayo-Error, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico. No se ha encontrado en esta aplicación el sistema Parte-Todo, que sí aparece en las pruebas piloto. También hay que aclarar que estos cuatro sistemas no se encuentran en todos los problemas, sino que hay problemas que se abordan según dos, tres o los cuatro sistemas de representación.

En algunos casos el sujeto toma como distinta resolución cuando un problema se resuelve mediante un sistema simbólico literal (usando el nombre de los objetos: “disco”), o uno simbólico sincopado (usando una letra del nombre del objeto: “d” para identificar al objeto “disco”). Nuestro criterio es que, en ambos casos, nos encontramos en un mismo sistema simbólico de representación.

En algún caso el sujeto ha explicado que cuando se utiliza el nombre del objeto, por ejemplo, “disco”, lo que se relaciona y se opera no es el objeto, sino una medida del mismo, en este caso su precio, que es una cantidad. Lo que nos indica su preocupación por conceptos que subyacen en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

6.3.11. Undécima Fase: Administración del instrumento y corrección de protocolos.

Marzo-Abril-Mayo de 1996. Se define la muestra definitiva, que consta de 160 sujetos, 80 de Secundaria Obligatoria y 80 de la enseñanza Post-Obligatoria, con las condiciones que ya se han descrito en Capítulo 5.

Se administra el instrumento de evaluación en dos sesiones, separadas por una semana de intervalo para los estudiantes de Secundaria, y en una única sesión para los estudiantes universitarios.

Se corrigen los protocolos y se comienza el estudio estadístico de los datos y la obtención de conclusiones.

6.3.12. Duodécima Fase: Redacción del informe.

Septiembre 1996. Comenzamos a redactar todo el proceso de la investigación, ajustándonos a un guión acordado a la vista del trabajo en conjunto que se ha realizado. A la vez vamos interpretando y obteniendo conclusiones de los análisis del estudio estadístico de los datos, que se completan con dos análisis de clusters, de ítems y de sujetos, para verificar las hipótesis previstas y perfilar nuevas, que abran el trabajo a nuevas perspectivas para abordar en el futuro.

6.3.13. Decimotercera Fase: Discusión con expertos.

Entre Marzo y Noviembre de 1996, se han tenido diversas entrevistas con profesores e investigadores interesados en el tema, a los que se les ha expuesto las líneas generales del trabajo y algunas conclusiones que hemos ido obteniendo. De entre ellos queremos destacar las entrevistas con:

* El profesor D'Amore[3] en el mes de Marzo. Preparamos un informe, por escrito, sobre el estado de nuestro trabajo y nuestros objetivos, que le entregamos. Al día siguiente tenemos una entrevista en la que nos pide aclaraciones a algunos puntos expuestos y sobre nuestro plan de trabajo. Valora como interesante la investigación y encuentra los problemas adecuados a nuestro propósito. Nos indica que no es conveniente hablar de nivel de conocimiento en este tipo de tareas, muestra interés por la idea de conocer el "poso" de competencia algebraica, que queda con el paso del tiempo, de acuerdo a uno de nuestros objetivos.

* Nos reunimos con el Dr. Hitt[4] en Abril. Con la prueba recién aplicada, y a la vista de algunos resultados que hemos encontrado, intercambiamos ideas sobre los sistemas de representación que estamos encontrando en las respuestas. Al igual que con el profesor D'Amore, hemos elaborado un informe escrito que pretendemos revisar y criticar. El profesor Hitt nos informa sobre las investigaciones que se llevan a cabo en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV Méjico respecto a la resolución de problemas algebraicos en Secundaria. Nos pide aclaración sobre los distintos sistemas de representación que hemos definido, indicando la posible colisión entre los sistemas Gráfico y Simbólico, por utilizar ambos aspectos "simbólicos". Nosotros le aclaramos la cuestión y le parece correcta la explicación. Después de intercambiar opiniones cree conveniente, según nuestra propuesta, distinguir la categoría del sistema de representación Gráfico-Simbólico como diferenciada del Gráfico y del Simbólico. También cree conveniente la inclusión de los sistemas no puramente algebraicos: Ensayo-Error y Parte-Todo en una categoría única.

El doctor Hitt ha realizado una estancia con el profesor Duval (referenciado en

[3] Bruno D'Amore. Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica. Dipartimento di Matematica. Università di Bologna. Italia.

[4] Fernando Hitt. Director del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN (Centro de Investigación y Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional). Méjico.

este trabajo), en Estrasburgo, y nos aporta documentos sobre los sistemas de representación en los que están trabajando.

* En julio, durante la celebración del 20º encuentro del PME en Valencia, nos reunimos, el profesor Rico y este investigador, con la profesora Rojano[5], autora de numerosos estudios y publicaciones sobre Álgebra escolar (algunos referenciados en este trabajo), coordinadora del Grupo de Trabajo de Álgebra en el seno del PME. Le expusimos las líneas generales de nuestro trabajo y le aportamos algunos resultados ya obtenidos en nuestra investigación. Se interesó por nuestro enfoque (los sistemas de representación) y estuvo de acuerdo en el sistema de categorías establecido. Mostró curiosidad por los problemas, algunas de las soluciones que se habían obtenido en la prueba y la variedad de los sistemas que se podían encontrar y nos animó a concluir el trabajo.

* El profesor Arzarello[6] estuvo en Granada en Noviembre de 1996. Aprovechamos su visita al Departamento de Didáctica de la Matemática para tener una entrevista con él. En dicha reunión abordamos algunos conceptos que se recogen en una publicación que hemos referenciado. En particular nos interesaba conocer su punto de vista sobre el significado de *esquema conceptual* que propone, y sobre la consideración los sistemas de representación de Ensayo-Error o Parte-Todo como indicativos de un pensamiento algebraico o aritmético. Para ello le aportamos las respuestas a algunos problemas de la prueba que hemos pasado y que se han abordado en estos sistemas. Su opinión es que cuando hay un plan de trabajo estructurado en base a unas relaciones establecidas en el problema, se puede considerar que estamos ante un pensamiento más complejo que el aritmético, pero que no es todavía algebraico puro. Entonces podemos decir que estamos en una etapa pre-algebraica.

Coincidimos con el profesor Arzarello en que, en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra, el paso de la etapa aritmética a la algebraica debe llevar consigo una etapa pre-algebraica, con sistemas de representación como los citados, que en muchos casos no se produce.

[5] Teresa Rojano. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Méjico.

[6] Ferdinando Arzarello. Dipartimento di Matematica. Università di Torino. Italia.

6.3.14. Decimocuarta Fase: Redacción de la Tesis.

Diciembre de 1996 - Enero y Febrero de 1997. Esta fase es la más amplia y activa. En ella se termina el estudio de casos consecuencia de la obtención estadística de los clusters de sujetos. Se transcriben las entrevistas y se da por finalizada la parte referente a la obtención, clasificación e interpretación de datos. Esta fase concluye con la redacción de un borrador de la memoria de la Tesis

6.3.15. Finalización del trabajo y presentación de la memoria.

Desde Marzo a Julio de 1997 se hace una revisión extensa y detallada del borrador elaborado, procediendo a un examen minucioso del marco teórico en el cual se fundamenta e incardina el estudio. Se suceden distintos procesos de corrección que mejoran y completan el texto inicial y se procede a la redacción definitiva, que será presentada en el Seminario de Investigación del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, previamente a su propuesta a la Comunidad de Investigadores, en general, y a los miembros del Tribunal encargado de juzgar su idoneidad, en particular.

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS DE DATOS. ESTUDIO EXPLORATORIO

7.1. Estudio muestral. Datos descriptivos.

El listado de los datos relativos a la muestra medidos a través del instrumento de evaluación construido, es decir, el vaciado de los 160 protocolos/sujetos está recogido en el Anexo VI. Son datos exploratorios directos en los que se explicitan los porcentajes de distribución de las distintas variables dependientes, que hemos considerado en la codificación de los resultados de los protocolos, considerando una matriz *sujetos* × *ítems*.

Vamos a relacionar, dentro de cada variable, los porcentajes que corresponden a cada ítem y a describir los resultados para determinar, si ello es posible, patrones de respuesta a la hora de la resolución de los problemas.

Advertimos que en algún caso aislado se pueden encontrar diferencias mínimas en los porcentajes de los recuentos, debidas a distintas interpretaciones tomadas por el investigador al observar el desarrollo que ha seguido el sujeto en la tarea en cuestión. No obstante las diferencias, cuando existen, son insignificantes y no alteran la interpretación de los resultados.

7.1.1. Tasa de respuestas.

Se puede observar que existen dos series de porcentajes decrecientes. Las primera va desde el problema 1 al 5, y la segunda desde el 6 al 10. Entendemos que ello es debido al método seguido para aplicar la prueba. En efecto, en los grupos de Secundaria (G_1) la aplicación se hizo en dos sesiones; precisamente en la primera se propusieron los 5 primeros problemas y en la segunda los 5 últimos. Los estudiantes disminuían su esfuerzo en la tarea, bien por encontrarse cansados, o bien porque habían fracasado en algún problema anterior y se encontraban desmotivados para continuar.

Tasa de Respuestas (Porcentaje de Problemas abordados sobre el total de la muestra: 160)									
Problemas									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
100	93,1	88,8	88,1	73,8	91,3	78,1	77,5	65	42,5

Hemos encontrado en los grupos de Universitarios (G_2 y G_3) protocolos en los que se desarrolla con todo detalle y explicación la primera parte de la tarea, los cinco o seis primeros problemas pero, a continuación, declaran explícitamente que están cansados y que no siguen.

Estas circunstancias, unidas a nuestra declaración de que la tarea era voluntaria y no tendría efectos valorativos, causaron que algunos estudiantes no se esforzaran en mayor medida. No obstante, de esta forma, se consiguió que las respuestas tuvieran un alto grado de espontaneidad.

7.1.2. Planteamiento de los problemas.

Como podemos notar en la parte sombreada, la mayoría de los estudiantes hacen un buen planteamiento. Es decir, reconocen los datos, las incógnitas o datos desconocidos, que se deben obtener, y los relacionan algebraicamente de forma correcta. Podemos destacar algunos datos interesantes:

En primer lugar, los problemas 5 y 10 tienen los menores porcentajes en la tercera columna. De los cinco primeros problemas, el nº 5 tiene el menor porcentaje de buen planteamiento. De los 5 últimos problemas el nº 10 tiene un resultado similar al nº 5. Podríamos explicarlo con las razones ya dadas anteriormente.

Porcentajes en el Planteamiento de los Problemas			
	No Plantea	Mal Planteado	Bien Planteado
Problema 1	3,8	30,6	65,6
Problema 2	3,4	9,4	87,2
Problema 3	3,5	46,5	50
Problema 4	4,3	12,8	83
Problema 5	12,7	41,5	45,8
Problema 6	5,5	24,7	69,9
Problema 7	8	25,6	66,4
Problema 8	16,9	30,6	52,4
Problema 9	4,8	9,6	85,6
Problema 10	23,5	32,4	44,1

También podemos destacar los altos porcentajes de mal planteamiento que tienen los problemas nº 3 y nº 5. Estos dos problemas pertenecen a la misma categoría de clasificación por sus variables (1,2,2), es decir son problemas que se pueden resolver mediante una relación entre datos e incógnitas, que los números que intervienen en su texto son decimales y que no tienen dibujo de apoyo. Frente a estas variables hay un gran porcentaje de estudiantes que trata de resolverlos aritméticamente y no llegan a establece las relaciones algebraicas necesarias. El porcentaje de mal planteamiento en el problema nº 10 también es relativamente alto, con respecto al de buen planteamiento, ya que se intenta plantear aritméticamente.

Estos tres problemas (los números 3, 5 y 10) tienen como característica común que en sus enunciados aparecen datos numéricos decimales (decimales simples, de un dígito entero y una sola cifra decimal). Como consecuencia podemos conjeturar que:

Los problemas algebraicos verbales cuyos enunciados contengan números decimales ofrecen mayor dificultad para el planteamiento de las relacio-

***nes algebraicas necesarias en su resolución y tienden a resolverse aritméticamente, en un porcentaje considerable*.**

Resultados que corroboran los obtenidos en investigaciones similares sobre problemas aritméticos (Castro, 1995) y en problemas algebraicos (Lins, 1992), en este caso, con un estudio clínico de siete alumnos.

Por otro lado, el porcentaje de planteamientos correctos en los problemas supera el 50% en la mayoría de los problemas (8 de 10), por lo que también podemos concluir que:

***La mayoría de los estudiantes que han terminado Secundaria tienen un conocimiento algebraico elemental que les permite reconocer una tarea algebraica y plantear correctamente las relaciones algebraicas que ésta induce*.**

Con este estudio respondemos al objetivo c.1) formulado en el Capítulo 4.

7.1.3. Ejecución de los problemas.

En este estudio tratamos de establecer el grado de ejecución de un problema, por parte del estudiante, que ha hecho un determinado planteamiento, ya sea correcto o incorrecto. Queremos distinguir cuándo un estudiante hace bien el desarrollo, independientemente del planteamiento, es decir, cuando es coherente con la decisión tomada de abordar una tarea algebraica de una determinada forma.

Generalmente una ejecución correcta de un planteamiento incorrecto no suele dar soluciones buenas, pero es posible si se introducen en ese desarrollo otros procesos ocultos (mentales o desarrollados aparte), o bien son copia del resultado de algún compañero/a (estimamos despreciable el número de estos casos).

Porcentajes en la Ejecución de los Problemas			
	No Ejecuta	Mal Ejecutado	Bien Ejecutado
Problema 1	10	13,1	76,9

Porcentajes en la Ejecución de los Problemas			
Problema 2	18,8	33,6	47,7
Problema 3	12,7	14,8	72,5
Problema 4	21,3	21,3	57,4
Problema 5	23,7	10,2	66,1
Problema 6	11,6	11	77,4
Problema 7	20	24	56
Problema 8	26,6	14,5	58,9
Problema 9	15,4	26	58,7
Problema 10	44,1	16,2	39,7

En la tabla anterior se destacan sombreados los porcentajes mayores que se obtienen. Destacan, en todos lo casos, los bien ejecutados, salvo en el problema nº 10 cuyo porcentaje mayor es para los estudiantes que no ejecutan, aunque lo puedan plantear correcta o incorrectamente. Interpretamos que las razones de esta singularidad son las ya reiteradas anteriormente: ser el último problema de la prueba y tener números decimales en los datos del problema.

Respecto al problema nº 2, el porcentaje de resultados bien ejecutados no llega al 50% porque en muchos casos se hace un planteamiento por ensayo-error, que después no se desarrolla correctamente o no se termina; en este caso se toma un valor arbitrario para una variable y, a partir de él, se obtiene la otra variable aplicando una de las relaciones algebraicas (ecuación), pero no se comprueba el que estos resultados verifiquen la otra relación algebraica de este problema (en el planteamiento simbólico sería un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas).

Según lo anterior, podemos conjeturar que la variable V_1 del problema, número de relaciones algebraicas necesarias para resolverlo, que en este caso es de dos, influye en la ejecución del problema. En efecto, así lo confirman los datos de los porcentajes menores para la “buena ejecución” siguientes al del problema nº 2 (excluyendo el nº 10), que son el del problema nº 7 (56%), el nº 4 (57,4%) y el nº 9 (58,7%), problemas en los que el valor de $V_1 = 2$ para todos ellos; es decir, en los cuatro problemas subyacen dos relaciones algebraicas independientes (para resolverlos simbólicamente se necesita un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas). Podemos concluir que:

Los problemas algebraicos verbales en los que subyacen dos relaciones algebraicas independientes ofrecen mayor dificultad en la ejecución de los procesos para su resolución.

Con este estudio respondemos al objetivo c.2) formulado en el Capítulo 4.

7.1.4. Desempeño Final de los problemas.

En la tabla siguiente están recogidos los datos correspondientes al desempeño final, que expresa los resultados o soluciones obtenidos en los problemas.

En la primera columna se recogen los porcentajes correspondientes a resultados incorrectos o cuando no se obtienen dichos resultados (cualquiera que sea la causa), incluidos los problemas que se dejan en blanco.

En la segunda columna se recogen los porcentajes de aquellos problemas que están bien desarrollados, tanto en su planteamiento como en su ejecución, pero a lo largo de su desarrollo se ha producido lo que hemos llamado un error debido a una falta de atención en la actuación, que ya hemos descrito en el capítulo anterior. En este caso hemos incluido tanto los problemas con un resultado como con los dos, en estas condiciones.

En la tercera columna hemos indicado los porcentajes de problemas en los que se han obtenido correctamente uno de los dos resultados solicitados en la tarea. El segundo resultado o no se ha obtenido, o se ha obtenido erróneamente.

En la cuarta columna se indica el porcentaje de problemas que se han resuelto correctamente obteniéndose todos los datos pedidos.

Porcentaje en el Desempeño Final de los problemas				
	Resultado Mal o Sin Resultado	Error de Atención en la Actuación	Un solo Resultado Correcto	Dos Resultados Correctos
Problema 1	34,4	1,9	2,5	61,3
Problema 2	55,7	5,4	3,4	35,6
Problema 3	53,5	1,4	13,4	31,7
Problema 4	48,2	8,5	6,4	36,9
Problema 5	58,5	5,9	3,4	32,2
Problema 6	34,2	4,1	5,5	56,2
Problema 7	54,4	8	1,6	36
Problema 8	53,2	1,6	0	45,2
Problema 9	46,2	11,5	1,9	40,4
Problema 10	69,1	13,2	0	17,6

Hemos considerado, entonces, como “buenos resultados” aquellos problemas que están contemplados en las columnas segunda, tercera y cuarta, cuya suma nos da el porcentaje complementario al de la primera columna, es decir:

Problema	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Buen Resultado	65,6	44,3	46,5	51,8	41,5	65,8	45,6	46,8	53,8	30,9

Según se observa, podemos destacar que sólo hay cuatro problemas (el nº 1, el nº 4, el nº 6 y el nº 9) cuyo porcentaje de buenos resultados supera el 50%.

Pero son los problemas nº 1 y nº 6 los que destacan ampliamente del resto, porque la diferencia, en incremento, de sus porcentajes de acierto con respecto a los demás es considerable (12 puntos o más). Además, ambos valores son similares, prácticamente idénticos (su diferencia es sólo de 0,2 puntos).

Estos dos problemas presentan los mismos valores para las variables V_1, V_2 y V_3. Son del tipo (1,1,1). Uno es réplica del otro. Responden a problemas en los que subyace una relación algebraica independiente (se pueden resolver simbólicamente mediante una ecuación de una incógnita), tienen números "fáciles" y tienen un dibujo orientativo en el texto.

Respecto al resto de la tabla, excepción del nº 10, la distribución de porcentajes no reúne características que se puedan relacionar. Por lo tanto podemos concluir que:

Los problemas verbales algebraicos en los que subyace una relación algebraica independiente, en cuyo texto los datos vienen dados por números fáciles (números naturales inferiores a cien, o decenas) y que contienen un dibujo orientativo son más fáciles de resolver, obtienen mejores resultados.

Se responde al objetivo c.3) del Capítulo 4.

7.1.5. Relación entre las tres fases de un problema verbal.

En la tabla siguiente vamos a destacar ciertas relaciones entre los porcentajes obtenidos, que nos permitan derivar algunas conclusiones sobre las tres fases de la resolución de los ítems/problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

Vamos a describir las relaciones que encontramos, a la vista de los resultados:

- Problema nº 1: Se observa mayor dificultad en el planteamiento que en la ejecución. El porcentaje de "buen resultado" es igual que el de "buen planteamiento", por lo que podemos concluir que los buenos resultados están más afectados por el plantea miento que por la ejecución.

- Problema nº 2: En este caso la ejecución tiene mayor dificultad que el planteamiento, y el resultado es similar a la ejecución, por lo que podemos indicar que el "buen resultado" está más afectado por una "buena ejecución".

Porcentajes referidos a la buena resolución en las tres fases de los Problemas			
	Bien Planteado	Bien Ejecutado	Buen Resultado
Problema 1	65,6	76,9	65,6
Problema 2	87,2	47,7	44,3
Problema 3	50	72,5	46,5
Problema 4	83	57,4	51,8
Problema 5	45,8	66,1	41,5
Problema 6	69,9	77,4	65,8
Problema 7	66,4	56	45,6
Problema 8	52,4	58,9	46,8
Problema 9	85,6	58,7	53,8
Problema 10	44,1	39,7	30,9

- Problema nº 3: El "buen planteamiento" ofrece mayor dificultad que la "buena ejecución". El resultado está más afectado por el planteamiento que por la ejecución.

- Problema nº 4: La ejecución tiene, en este caso, mayor dificultad que el planteamiento. El resultado es más cercano a la ejecución, es decir, está más afectado por la ejecución.

- Problema nº 5: El planteamiento muestra mayor dificultad que la ejecución. El resultado es similar al planteamiento por lo cual podemos concluir que el resultado está más influenciado por el planteamiento que por la ejecución.

- Problema nº 6: Existe mayor dificultad de planteamiento que de ejecución, por ello el resultado está más afectado por el planteamiento.

- Problema nº 7: La ejecución tiene mayor dificultad que el planteamiento, por lo que el resultado queda más afectado por la ejecución que por el planteamiento.

- Problema nº 8: En este caso el planteamiento presenta mayor dificultad que la ejecución y el resultado está más influenciado por el planteamiento.

- Problema nº 9: Hay una gran diferencia entre ejecución y planteamiento. La ejecución presenta mayor dificultad que el planteamiento y afecta, por lo tanto, más al resultado.

- Problema nº 10: En este caso las diferencias entre planteamiento y ejecución son las menores de toda la tabla, por lo que podemos concluir que indistintamente afectan estas dos fases a la del resultado.

De las observaciones anteriores y de los datos de la tabla podemos establecer algunas conclusiones:

a) El problema nº 1 tiene porcentajes similares en las tres fases que el nº 6 (para el problema nº 1: 65,6%; 76,9%; 65,6%; para el problema nº 6: 69,9%; 77,4%; 65,8%). Ambos problemas son réplicas el uno del otro, corresponden a valores de las variables (1,1,1).

Análogamente, los problemas nº 3 y nº 5 también tienen porcentajes similares en sus tres fases (para el problema nº 3: 50%; 72,5%; 46,5%; para el problema nº 5: 45,8%; 66,1%; 41,5%). Estos dos problemas son también uno réplica del otro, que corresponden con los valores (1,2,2) de las variables.

Podemos concluir que:

Los problemas verbales algebraicos que tienen las mismas características, establecidas por los mismos valores de las variables consideradas, obtienen porcentajes similares de buena resolución en cualquiera de las fases del problema.

lo que confirma la bondad del ítem/problema réplica o paralelo.

b) Si hacemos excepción del problema nº 10 en el que los porcentajes de “buen planteamiento” y “buena ejecución” son similares (44,1% y 39,7%, respectivamente), y podríamos decir que es *neutro* en cuanto la influencia sobre un buen resultado, observamos que:

1) los problemas en los que el “buen planteamiento” afecta más al “buen resultado” son los problemas número 1, 3, 5, 6 y 8; estos problemas son

aquellos en los que V_1=1, es decir, en los que se plantea una relación independiente en su texto, se corresponden a los que pueden resolverse mediante una ecuación;

2) en los problemas números 2, 4, 7 y 9, la “buena ejecución” afecta de mayor forma al “buen resultado”; estos problemas son los que V_1=2, es decir, aquellos en donde existen dos relaciones (ecuaciones) independientes que han de resolverse con un sistema de dos relaciones o ecuaciones lineales.

Por lo tanto podemos concluir:

Los problemas verbales algebraicos que se resuelven mediante una ecuación (hay, implícita en su texto, una relación independiente entre datos conocidos y desconocidos) presentan mayor dificultad en la fase de planteamiento que en la de ejecución, por lo que los buenos resultados dependen principalmente de que se haga un buen planteamiento del problema.

Los problemas verbales algebraicos que se resuelven mediante un sistema de dos ecuaciones (hay, implícitas en su texto, dos relaciones independientes entre datos conocidos y desconocidos) presentan mayor dificultad en la fase de ejecución que en la de planteamiento, por lo que los buenos resultados dependen en mayor medida de que se haga una buena ejecución del problema.

Estas conclusiones responden al objetivo c.4) formulado en el Capítulo 4 de este trabajo.

7.1.6. Modelo de Lins y resolución de problemas algebraicos.

Con los datos que nos ofrece la siguiente tabla hemos reflejado la presencia, en cada uno de los problemas propuestos, de alguna/s o todas las componentes que utiliza Lins (1992) para describir lo que entendemos por Pensamiento Algebraico (*Aritmeticidad, Internalidad y Analiticidad*).

En la mayoría de los casos hemos conseguido identificar claramente que la ejecución errónea del problema se debe a la falta de alguna de estas características (una o dos).

Porcentajes sobre la presencia de las características que definen el Pensamiento Algebraico, según Lins, en la resolución de los problemas								
	No hay información suficiente	Aritmeticidad	Internalidad	Analiticidad	Aritmeticidad e Internalidad	Aritmeticidad y Analiticidad	Internalidad y Analiticidad	Aritmeticidad Internalidad y Analiticidad
Problema 1	6,9	1,3	3,8	0	24,4	0,6	5	58,1
Problema 2	16,8	6	0,7	1,3	14,8	4,7	13,4	42,3
Problema 3	9,2	0	7,7	0	27,5	2,1	8,5	45,1
Problema 4	20,6	2,8	0,7	0,7	14,9	2,1	12,1	46,1
Problema 5	17,8	0,8	4,2	1,7	32,2	0,8	5,1	37,3
Problema 6	11	0,7	4,8	0	20,5	0	2,1	61
Problema 7	16	8	1,6	0	20,8	1,6	12,8	39,2
Problema 8	22,6	0,8	1,6	0,8	25	0	3,2	46
Problema 9	12,5	4,8	4,8	1,9	6,7	5,8	16,3	47,1
Problema 10	32,4	2,9	10,3	0	17,6	0	16,2	20,6

Hemos observado que no se ha encontrado ningún caso en que, teniendo bien el planteamiento del problema, se hayan cometido errores que indiquen la falta a la vez de las tres componentes de la caracterización anterior.

Con los datos de la tabla, podemos conjeturar que:

Aquellos estudiantes que son capaces de plantear unas relaciones de tipo algebraico explicitan, en su mayoría, el Pensamiento Algebraico adquirido.

En la primera columna hemos consignado el porcentaje de problemas en los que la información explicitada por el estudiante no la hemos considerado suficiente como para identificar alguna de las componentes descritas por Lins. En esta columna destaca el problema nº 10 que, como en casos anteriores, o se deja en blanco o se indican los datos del problema sin relacionarlos.

En la última columna existe un paralelismo, como no podía ser de otra forma, con la tabla anterior, pues un problema que está bien planteado, bien ejecutado y con un resultado correcto, implica, en general, que se domina un conocimiento algebraico, en este caso, elemental. Esto no es posible sin poseer un Pensamiento Algebraico que desarrolle las capacidades algebraicas del sujeto, es decir, en el estudiante debe existir un pensamiento aritmético, internalista y analítico.

Nuevamente vuelven a destacar los problemas nº 1 y nº 6 con porcentajes muy próximos en cuanto a la competencia algebraica.

Debemos resaltar también que en la columna 5ª se agrupan mayores porcentajes que en las otras (excluída la última, 8ª), salvo para los problemas nº 9 y nº 10. Es decir, en 8 problemas sólo se puede afirmar que se ha puesto en juego la Aritmeticidad y la Internalidad, pero no la Analiticidad. Esto puede interpretarse como que:

La mayor dificultad en adquirir el Pensamiento Algebraico está en tener capacidad analítica, en saber relacionar lo conocido (datos del problema) con lo desconocido (incógnitas), como si fuera conocido, para llegar a obtener la solución.

Con este estudio respondemos al objetivo c.5), formulado en el Capítulo 4 de este trabajo.

7.1.7. Sistemas de representación.

La siguiente tabla refleja los porcentajes de los distintos sistemas de representación con los que se han abordado los 10 problemas propuestos.

Porcentajes de problemas planteados según los distintos sistemas de representación(*)					
	Ensayo-Error	Parte-Todo	Gráfico	Gráfico-Simbólico	Simbólico
Problema 1	4,4	30	4,4	13,1	46,9
Problema 2	12,1	13,4	2	0	69,1
Problema 3	0,7	32,4	0	0	65,5
Problema 4	2,8	12,8	0	0	81,6
Problema 5	0	27,1	6,8	17,8	41,5
Problema 6	4,1	26	2,1	0,7	64,4
Problema 7	5,6	22,4	0	0	64,8
Problema 8	4,8	21	0	0,8	65,3
Problema 9	3,8	9,6	1,9	1	81,7
Problema 10	0	11,8	5,9	16,2	55,9

(*) Se han considerado sólo aquellos problemas en los que se ha identificado claramente el Sistema de Representación que el estudiante emplea para resolverlos

Cuando en un determinado problema se utiliza, en alguna fase, más de un sistema de representación, hemos tomado el criterio de clasificarlo en aquel sistema en el cual se ejecuta la tarea que lleva al resultado final. En efecto, nuestro criterio es que este sistema de representación es el que predomina en el estudiante y, en definitiva, es el que elige como idóneo para encontrar la solución del problema.

Destacamos, en sombreado, los porcentajes mayores en cada problema y podemos observar que el sistema “Simbólico” es el que predomina en todos los problemas. La razón de este fenómeno la suponemos dada por el tipo de instrucción recibida a lo largo de la vida escolar.

Aunque a los estudiantes de los grupos G_2 y G_3 se les animaba a tratar de resolver los problemas por “cualquier método”, los comentarios personales insistían en que el uso del sistema simbólico (“ecuaciones” en el lenguaje coloquial) era lo que mejor conocían y, además, les ofrecía seguridad y garantía de éxito.

La columna correspondiente al sistema “Parte-Todo”, con excepción del problema 10, tiene los porcentajes mayores después de la columna correspondiente a la del sistema “Simbólico”. Esto puede ser indicativo de una fuerte presencia de la interpretación aritmética en la resolución de este tipo de tareas. Este sistema de representación lo utilizan con igual frecuencia los estudiantes del grupo G_1, que los de los grupos G_2 y G_3. Una interpretación posible es, por un lado, su cercanía a la instrucción y práctica correspondiente a los contenidos aritméticos, junto con la no consolidación de los dominios algebraicos (para los sujetos del grupo G_1) y, por otro lado, la práctica habitual de habilidades aritméticas en la vida cotidiana en la que, ordinariamente, no se presentan situaciones algebraicas (para los sujetos de los grupos G_2 y G_3).

También queremos destacar el hecho de que los problemas nº 1 y nº 6 ofrecen, en su resolución, toda la gama de sistemas de representación categorizados al inicio del trabajo. No se ha encontrado en la muestra ningún otro sistema diferente de los reseñados aquí.

En cuanto a los sistemas “Ensayo-Error”, “Gráfico” y “Gráfico-Simbólico”, la utilización de uno u otro y el predominio entre ellos es desigual y depende de las variables de cada problema, del contexto al que se refiere el problema y de la experiencia tanto escolar como extraescolar del estudiante. Por ejemplo, el problema número 5 es un ejercicio cuyo contexto está muy relacionado con el área de Física, y en esta disciplina es habitual realizar esquemas (en mucho casos obligatoriamente) para enfocar y resolver distintas cuestiones y problemas; por esta razón es el problema que tiene el porcentaje más alto de utilización de un sistema de representación “Gráfico-Simbólico”.

Después de todo lo expuesto, podemos señalar que:

1) Los sistemas de representación que utilizan los estudiantes para resolver problemas verbales algebraicos elementales se pueden clasificar en cinco categorías diferenciadas: “Ensayo-Error”,” Parte-Todo”, “Gráfico”, “Gráfico-

Simbólico" y "Simbólico".

2) El sistema de representación prioritariamente utilizado para resolver problemas verbales algebraicos elementales es el sistema Simbólico.

Con este estudio respondemos al objetivo c.6) formulado en el Capítulo 4.

7.1.8. Problemas bien resueltos en los distintos sistemas de representación.

La primera cantidad de cada casilla indica el porcentaje de problemas bien resueltos en cada uno de los sistemas de representación. El par ordenado que acompaña a esa cantidad indica: la primera componente es el número de problemas abordados en ese sistema, y la segunda componente del par es el número de problemas bien resueltos.

En primer lugar vuelve a destacar la columna correspondiente a los problemas resueltos en un sistema Simbólico: existe un porcentaje superior al 50% de acierto en todos los problemas, a excepción del problema 10.

Porcentajes de problemas bien resueltos según los distintos sistemas de representación(*)					
	Ensayo-Error	Parte-Todo	Gráfico	Gráfico-Simbólico	Simbólico
Problema 1	100 (7;7)	58,3 (48;28)	71,4 (7;5)	76,2 (21;16)	62,7 (75;47)
Problema 2	50 (18;9)	15 (20;3)	0 (3;0)		53,4 (103;55)
Problema 3	100 (1;1)	0 (46;0)			71 (93;66)
Problema 4	25 (4;1)	27,8 (18;5)			58,3 (115;67)
Problema 5		3,1 (32;1)	0 (8;0)	81 (21;17)	63,3 (49;31)
Problema 6	33,3 (6;2)	65,8 (38;25)	100 (1;1)	100 (1;1)	71,3 (94;67)
Problema 7	28,6 (7;2)	25 (28;7)			54,3 (81;44)
Problema 8	33,3 (6;2)	20,8 (26;8)	0 (1;0)	0 (1;0)	59,3 (81;48)
Problema 9	25 (4;1)	60 (10;6)	100 (1;1)	100 (1;1)	55,3 (85;47)
Problema 10		0 (8;0)	36,4 (11;4)	36,4 (11;4)	44,7 (38;17)

Totales	47,2(53;25)	30,3(274;83)	34,4(32;11)	69,6(56;39)	60,1(814;489)

(*) Se han considerado sólo aquellos problemas en los que se ha identificado claramente el Sistema de Representación que el estudiante emplea para resolverlos.

En las casillas de los totales el mayor porcentaje corresponde al sistema Gráfico-Simbólico. Sin embargo el número total de problemas abordados en este sistema (56) es poco significativo respecto a los abordados en el sistema Simbólico (814), que mantiene un porcentaje de aciertos bastante aceptable (60%). Podemos concluir que:

La utilización de un sistema de representación simbólico ofrece al estudiante, en la resolución de problemas algebraicos elementales, perspectivas aceptables de acierto, superiores a la media y superior a los otros sistemas de representación.

Con este estudio respondemos al objetivo c.7) formulado en el Capítulo 4.

7.2. Análisis de clusters.

Es una técnica multivariada exploratoria que permite agrupar categorías de entes similares para generar una clasificación. Las unidades de análisis son medidas en diversas variables, a partir del cálculo de distancias euclidianas, y aplicando diversos algoritmos de agrupamiento obtenemos una aglomeración ramificada visualizada en un diagrama de árbol. Cada estadio intermedio corresponde a una partición.

El problema que plantea este tipo de análisis es elegir el número más apropiado de grupos (Everitt, 1993). Generalmente se adopta el criterio de arborescencia jerárquica: empezar por el tronco y seguir por las ramificaciones (ir de lo general a lo parcial). Como en todo estudio exploratorio, el juicio del analista será el que dé sentido interpretativo (si lo admite) a los diversos clusters generados.

Pensamos que, en los dos análisis realizados en este estudio, hemos otorgado sentido interpretativo a los agrupamientos obtenidos (evidencia disponible).

7.2.1. Clusters para los ítems/problemas.

Con el fin de establecer tipos de problemas según los sistemas de representación utilizados para su resolución, hemos realizado un análisis cluster de los ítems /proble-mas respecto a los sistemas de representación empleados. Para ello hemos utilizado el paquete estadístico BMDP (Dixon, 1992).

Pretendemos estudiar las agrupaciones posibles entre los problemas, según la variable propuesta, a fin de determinar similitudes y características comunes entre los problemas, que permitan inferir futuros resultados con relación a los sistemas de representación con que se aborda cada grupo de problemas.

Para el análisis de clusters se ha utilizado el algoritmo de amalgamación o de anclaje simple, que se encuentra reproducido en el Anexo VII, y cuya representación gráfica en árbol o *dendograma*, reproducimos a continuación, en la siguiente página, tal y como se ha producido en los resultados del estudio estadístico:

```
Problema nº       1       4       9       7       8       6       3       10      5       2

Distancias de
amalgamación      *       *       *       *       *       *       *       *       *       *

0.413             I       I       I       ----+----       I       I       I       I       I
0.936             I       ----+----           I           I       I       I       I       I
1.540             I           I               I           ----+----       I       I       I
1.735             I           I               --------+-----------I       I       I       I
2.264             I           ------------+----------------I              I       I       I
2.405             ----------------------------I                           ----+----       I
2.453                                         I                               I           I
2.456                                         ---+---------------------------------------------       I
2.582                                            I------------------------------------------------------------
```

El resultado se ha interpretado de la siguiente forma:

Los ítems se agrupan en tres clusters básicos: el primer cluster contiene a los problemas números 1, 4, 9, 7, 8, 6 y 3 El segundo cluster contiene a los problemas números 10 y 5. El tercer cluster contiene sólo al problema número 2. Pasamos a caracterizar cada uno de ellos:

1) El primer cluster contiene la mayoría de los ítems. Es decir, la mayoría de los problemas ofrecen unos resultados similares y con pocas variaciones:

La mayoría de los problemas verbales algebraicos elementales se abordan, de forma predominante, mediante un sistema de representación simbólico, con una presencia variada del resto de los sistemas de representación.

Dentro de la agrupación, el problema nº 1 se destaca del resto porque tiene porcentajes significativos en todos los sistemas de representación.

2) El segundo cluster contiene a los problemas nº 10 y 5. Son los dos únicos problemas en los que no se ha dado el sistema de representación de Ensayo-Error y las proporciones de resolución gráfica son las más altas (7,3% y 6,6% respectivamente).

La variable más característica de ambos es que, en sus enunciados, uno de los datos es un número decimal (una cifra entera y una decimal). Además, este número decimal es el dato de una estructura de comparación multiplicativa (“veces más que”), lo cual introduce un factor de gran dificultad a la hora de abordarlo mediante un sistema de Ensayo-Error. Por otro lado, el problema nº 5 es réplica del problema nº 3, pero el contexto del nº 5 es propicio a una representación gráfica, ya que es un problema sobre “distancias” y en estos casos existe una fuerte influencia por parte de otras disciplinas que, como la Física, incluye en la resolución de problemas similares (velocidades-trayectorias) una representación gráfica para la mayoría de los casos. Sin embargo, el contexto del problema nº 3, entradas-tickets, es muy poco propicio a plantearlo en un sistema de representación gráfico (0% de los casos en el sistema de representación Gráfico y 0% en el Gráfico-Simbólico), que contrasta con el problema nº 5 (7,3% en el Gráfico y 19,1% en el Gráfico-Simbólico).

Por otra parte, los porcentajes de los distintos sistemas de representación para los problemas 10 y 5 son equiparables. Esto nos lleva a la conclusión de que ambos problemas son similares: en efecto, se pueden resolver mediante una relación independiente entre datos e incógnitas, y contienen un dato decimal que afecta a la estructura multiplicativa del problema. La diferencia entre ambos es que, mientras el problema nº 10 contiene en su texto un dibujo alusivo, el nº 5 no tiene gráfico, pero el contexto de este problema condiciona fuertemente una imagen gráfica mental que es fácilmente representable en el papel (un segmento con una marca en un punto interior del segmento).

Todo lo anterior nos lleva a considerar el ítem 5 como un problema con las mismas variables que el nº 10: (1,2,1),es decir: una relación, datos difíciles (decimales), presencia de un dibujo. Entonces podemos concluir que:

Los problemas algebraicos en los que existe una relación de comparación multiplicativa que viene dada por un número decimal (una cifra entera y una decimal), y tienen un dibujo o gráfico relativo al contexto (o una imagen gráfica mental fuerte), no se abordan mediante el sistema de representación de Ensayo-Error. En estos casos destaca la presencia, de forma significativa, de sistemas de representación Gráficos, sobre todo el sistema Gráfico-Simbólico*.*

Sin olvidar que el sistema que predomina es el Simbólico, destacan, respecto al resto de los problemas, la presencia de los sistemas Gráficos.

3) El tercer cluster contiene al problema nº 2. Este problema es de variables (2,1,1), es decir, dos relaciones, con números fáciles y con dibujo en el texto. Es el que se ha abordado con mayor porcentaje en el sistema de representación de “Ensayo-Error” (12,5%), más del doble del siguiente (el nº 8, con un 5,2%). Se trata de un problema con un contexto, material escolar (clips y sacapuntas), muy cercano al estudiante, y además, el dibujo de este material en el texto es relativamente próximo

a sus medidas reales, de tal forma que el sujeto puede hacer fácilmente una estimación de las medidas y comprobar si cumplen las relaciones descritas en el texto. Otro dato contenido implícitamente en el dibujo es la relación de orden en las medidas del clip (mayor en el dibujo) y del sacapuntas (menor en el dibujo), aunque no guardan una proporción que se ajuste a los datos del problema; en este caso, esta relación puede orientar, también, a la hora de ensayar valores para cada uno de los objetos. Podemos decir que:

***Los problemas verbales algebraicos elementales cuyo texto contiene un dibujo en el que se pueden identificar fácilmente los datos desconocidos (las incógnitas), siendo éstos próximos a su valor real, se abordan de forma destacada en el sistema de representación de Ensayo-Error*.**

Tenemos que indicar, una vez más, que el sistema de representación prioritario sigue siendo el Simbólico.

De esta forma hemos cumplido los objetivos d.1) y d.2) que nos habíamos propuesto en el Capítulo 4.

7.2.2. Análisis de clusters para sujetos.

Queremos estudiar si existen características comunes en el comportamiento de los sujetos, a la hora de escoger un determinado sistema de representación para resolver los problemas propuestos, es decir, si existen categorías de resolutores que indiquen grupos de sujetos que respondan a las tareas algebraicas de acuerdo a un sistema de representación, o conjunto de ellos, fruto de una representación interna sobre la cual opera la mente (Hiebert y Carpenter, 1992).

Para hacer el análisis de clusters hemos tomado las secuencias de dígitos referidas a los sistemas de representación con que han abordado cada uno de los sujetos los problemas del instrumento de evaluación administrado y le hemos aplicado el paquete estadístico BMDP (Dixon, 1992).

El resultado ha sido una representación en diagrama de árbol con 160 columnas correspondientes a los sujetos. A partir de ahí, se ha hecho una interpretación de las agrupaciones o clusters que aparecen, según apreciaciones visuales de densidad de la representación gráfica y de las diferencias en las distancias de amalgamación. La representación gráfica está recogida en el Anexo VIII.

A continuación, hemos reagrupado a los sujetos que componen cada cluster, tomados en el orden establecido por los resultados estadísticos e identificados por sus números de orden, junto con las secuencias de los dígitos correspondientes a los sistemas de representación, para tratar de encontrar similitudes o pautas de comportamiento que puedan caracterizar a cada cluster y, de este modo, determinar tipologías de resolutores de problemas verbales algebraicos y conjeturar comportamientos de los sujetos según el cluster al que se adscriben.

Hemos concretado cuatro clusters que, tomados de izquierda a derecha según el diagrama en árbol o *dendograma*, pasamos a describir en las páginas siguientes:

7.2.2.1. Cluster 1.

Identificación	Sistemas de representación/Problemas	Identificación	Sistemas de representación/Problemas
001	2025225250	059	2255055000
089	5552452222	035	5220220550
042	2522055050	087	5122220250
113	2521522050	066	3120200550
047	2320225050	055	3120220050
084	3225215554	050	2120251050
032	5505555050	126	5222032233
136	5555525005	106	3355550535
069	0005000000	122	5555550555
099	2555502000	100	4555550000
127	4555500000	148	5555550000
150	4555400000	019	5505252525
149	4555400000	044	5555555000
103	5555300000	153	5555555000
105	4155500000	094	4555555000
007	2025250023	096	2555455200
033	2255352214	115	4055555555
060	2500020000	146	5055555555
124	2500000000	029	5555012554
138	5505050500	104	2500450000
152	5505050000	063	3522250102

Sistemas de Represent.	0=Sin información	2=Parte-Todo	4=Gráfico-Simbólico
	1=Ensayo-Error	3=Gráfico	5=Simbólico

Características:

* En este cluster hay un total de 42 sujetos, de los que 17 son de Secundaria (G_1) y 25 de Universidad (de ellos, 13 son del grupo de entre 3-5 años sin Álgebra, G_2,

y 12 son del grupo de más de 5 años sin Álgebra, G_3).

Existe, pues, una relación de 40/60 entre los estudiantes de Secundaria y los de Universidad y, dentro de éstos, los de ambos grupos están equilibrados.

CLUSTER 1		
Secundaria	Universidad	
G_1	G_2=13	G_3=12
17 (40%)	25 (60%)	
42 sujetos		

* Contiene un número alto de los sujetos que han dejado ejercicios en blanco o sin información suficiente para categorizarlos en uno u otro sistema de representación (0). En total hay 11 estudiantes que tienen 5 o más ejercicios en esta situación, lo que supone un 26% del total, que es un número bastante alto de estudiantes, siendo los más frecuentes los de Universidad.

El número de ejercicios en blanco o sin información suficiente representa el 32% del total para este cluster, lo que supone también una cifra alta. En este caso, los ejercicios que con más frecuencia se han dejado de hacer son los últimos del instrumento de evaluación, lo que se puede considerar lógico debido, sobre todo, al carácter voluntario de la prueba y al abandono de la tarea cuando no se perciben éxitos en la resolución de los ítems/problemas anteriores.

* Es el cluster que contiene más veces (frecuencia 14) el valor “3" (sistema de representación Gráfico) respecto a los demás clusters. Por otro lado, predominan los sujetos que usan el sistema “2" (Parte-Todo), con un porcentaje del 18% del total, y el sistema “5" (Simbólico) con un porcentaje del 40%. También se encuentran sujetos (15 casos) que han abordado algunos problemas mediante el sistema “4" (Gráfico-Simbólico) y se observan otros 11 casos del sistema “1" (Ensayo-Error).

Por tanto, podemos afirmar que, en este conjunto de sujetos, se dan todos los sistemas de representación, aparecen en las secuencias todos los dígitos, del 1 al 5.

Aunque el dígito mayoritario es el 5 (Simbólico), como ha quedado de manifiesto en apartados anteriores, aparecen con una cierta frecuencia el resto de los dígitos. Es decir, se presenta una variedad de sistemas de representación utilizados en la resolución de los problemas del instrumento de evaluación.

Encontramos 2 sujetos cuya secuencia de dígitos contienen todos los valores, o sea, han utilizado todos los sistemas de representación que hemos categorizado:

033 (2255352214) estudiante de Secundaria

084 (3225215554) estudiante de Universidad del grupo G_2

Conclusión: podemos caracterizar el **cluster 1** por la **variedad en la elección del sistema de representación para abordar un problema verbal algebraico**. El sistema elegido depende tanto del problema como del sujeto, no existe patrón definido, aunque sí un predominio del sistema simbólico.

Existe una tipología de resolutores de problemas verbales algebraicos que corresponden con sujetos que conocen los diversos sistemas de representación categorizados en este trabajo, y elegirán aquel que les sea más adecuado al problema. Tratarán de rentabilizar la potencia de cada sistema según las circunstancias, pero no sabemos, a priori, si tendrán éxito en uno o en varios, o en ninguno.

7.2.2.2. Cluster 2.

CLUSTER 2		
Secundaria	Universidad	
G_1	G_2=9	G_3=5
14 (50%)	14 (50%)	

28 sujetos

015	2022225520	141	2000000000
062	2222225522	098	1000000000
071	2220300202	036	2121011112
156	2220302220	037	1120015110
160	0220220200	039	5020220000
074	2022350000	092	2100521200
080	2222252100	040	2255022200
086	2201022223	107	2555000000
046	2222222200	101	2525200000
111	2122222222	112	2525222200
053	2020220000	120	2505020000
051	1100021100	123	2525030000
075	1111011100	118	2525050000
137	1120010000	026	2225021000

Características:

* El cluster contiene 28 sujetos, de los que 14 son de Secundaria y otros 14 son de Universidad, es decir, se reparten al 50% entre ambos conglomerados. De los 14 de Universidad, 9 son del grupo G_2 y 5 son del grupo G_3, pero las cantidades son relativamente pequeñas y no consideramos esta diferencia como significativa.

* El número de estudiantes que han dejado 5 o más problemas en blanco (0) ha sido de 13, que es el 46%, el mayor porcentaje, con diferencia, de todos los clusters. De estos 13 sujetos, 10 son de Universidad, lo que reafirma la interpretación dada para el cluster 1.

El número de problemas con 0 (en blanco o sin información), es también muy elevado en esta agrupación: representa el 40% del total, que es el mayor de los clusters estudiados.

En estas circunstancias, se puede intuir que los sujetos de este cluster, en general, tienen escaso éxito en la resolución de la tarea propuesta, conjetura que posteriormente pondremos a prueba.

* En las secuencias de dígitos de la tabla correspondiente a este grupo podemos observar la presencia mayoritaria del sistema “2" (Parte-Todo) con un 37.5% de los resultados, junto con el sistema “1" (Ensayo-Error), que tiene un porcentaje del 11.5%. También encontramos un 9% de las veces el sistema “5" (Simbólico) y un 2% el sistema “3" (Gráfico), pero de forma poco significativa de tal forma que podemos despreciarlo. No aparece en ninguna secuencia de dígitos el “4" (Gráfico-Simbólico).

Encontramos algunas secuencias en las que los únicos sistemas empleados son todos “1" o todos “2":

075 (1111011100) estudiante de Secundaria

046 (2222222200) estudiante de Secundaria

La singularidad de la mayoría de los sujetos de este cluster es la no-utilización del sistema de representación Simbólico al abordar los ítems/problemas propuestos, sistema mayoritario en toda la prueba, el más extendido y reiterado en la instrucción algebraica; en este cluster es más frecuente la utilización de los sistemas de representación que hemos venido en llamar numéricos: Ensayo-Error (1) y Parte-Todo (2).

Conclusión: la característica de los sujetos del **cluster 2** es la **utilización preferente de sistemas de representación numéricos, Ensayo-Error y Parte-Todo, para resolver los problemas verbales algebraicos**.

Existe, pues, una tipología de sujetos que abordan los problemas verbales algebraicos predominantemente de una forma numérica, aritmética. Aunque conozcan la resolución de ecuaciones de forma algebraica y, por lo tanto, el lenguaje simbólico algebraico, cuando tienen que resolver un problema verbal no ven con facilidad su traducción a una expresión simbólica, o no comprenden bien la semántica del Álgebra, por lo que recurren a razonamientos numéricos, haciendo patente que están en una fase pre-algebraica, a medio camino entre la Aritmética y el Álgebra.

7.2.2.3. Cluster 3

Es el cluster central, donde se agrupan un gran número de sujetos y es, por tanto, el más amplio.

CLUSTER 3		
Secundaria	Universidad	
G_1	G_2=14	G_3=19
29 (47%)	33 (53%)	
62 sujetos		

008	5555055555	081	4525555555
070	5555055555	049	4525255555
143	5555055555	048	4555555504
144	5555055555	014	4555055550
058	5555255555	054	4555055550
095	4555445554	056	4555055550
131	4555455554	065	5555055550
140	4555455555	079	5555255550
114	4555455545	130	5555455550
076	5555455555	155	5555555550
085	5555455555	072	5555555550
128	5555455555	038	5555555550
145	5555455555	024	5555555550
108	5555455554	082	5555425050
102	5555455554	129	5555335250
097	5555455554	010	5555505050
121	5555555554	077	5255255255
157	5555555555	061	5555055500
132	5555555555	117	5555555500
125	5555555555	139	5555555500
116	5555555555	147	5555555500
110	5555555555	158	5555555500
109	5555555555	154	5555455500
093	5555555555	012	5555552500
027	5555355454	030	5525022253
134	5555525555	073	4305022250
133	5555525555	064	3525022250
083	5555525555	043	5505052250
045	5555425255	057	5525052550
034	2555555555	052	4525252050
067	3525255552	004	2525050050

Este cluster contiene un núcleo central muy homogéneo que se va dispersando conforme se desplaza hacia los extremos. Las siete últimas secuencias tienen mucho en común con el cluster siguiente, pero en el diagrama en árbol, quedan adscritas a esta agrupación.

Características:

* Este cluster es el más numeroso de los cuatro, pues contiene 62 sujetos, cerca del 40% del total de la muestra. De ellos 29 son estudiantes de Secundaria, G_1, y el resto, 33, son estudiantes universitarios, 14 del grupo G_2 y 19 del grupo G_3. La distribución entre conglomerados es similar y se puede considerar que están equilibrados.

* En este grupo no hay ningún sujeto que tenga cinco o más “0". Es decir, todos los estudiantes han abordado más de la mitad de los ítems/problemas, del instrumento de evaluación, de forma tal que hemos podido identificar el sistema de representación utilizado.

Por otro lado, el número de ejercicios en blanco o sin información suficiente representa sólo el 8% del total, que es el porcentaje menor de todos. Además, la mayoría de estos “0" corresponden al problema nº 10.

Por lo tanto, podemos intuir que hay un gran número de estudiantes que han resuelto con éxito, o así lo creen, los problemas propuestos, lo cual les motiva a intentar resolverlos todos o la mayoría

* El sistema de representación Simbólico (5) predomina de forma clara y rotunda sobre el resto, con un 80% de las respuestas. Hay bastantes sujetos que aplican este sistema en todos los casos y no dejan ítems/problemas en blanco.

Se pueden contar algunos “4" (Gráfico-Simbólico), con un porcentaje del 6%, sobre todo en los problemas nº 1, 5 y 10.

Existen muy pocos “3" (Gráfico), que se pueden considerar casi anecdóticos 1% de porcentaje, y también algunos casos del sistema 2 (Parte-Todo) con porcentaje del 5%, que se presentan en los últimos sujetos adscritos a este cluster, cercanos al cluster siguiente.

Sin embargo, podemos destacar que no existe ningún “1" (Ensayo-Error), es decir, ningún sujeto de este agrupamiento utiliza el sistema de Ensayo-Error, lo que supone que en 620 ítems/problemas no ha existido ningún intento de buscar la solución probando valores para la incógnita.

Conclusión: Es característica del **cluster 3** la preponderancia de la **utilización del sistema de representación Simbólico (a veces con apoyo gráfico) para resolver los problemas verbales algebraicos y el rechazo del sistema de Ensayo-Error**.

Entonces podemos afirmar que existe una tipología de sujetos, la más numerosa, que abordan los problemas verbales algebraicos mediante un sistema de representación simbólico, lo cual les da seguridad y garantías de una resolución correcta. Conocen el lenguaje algebraico, entienden su semántica y se desenvuelven bien con su sintáctica. Utilizan con soltura la operativa algebraica y saben manejar el Álgebra como herramienta potente para la resolución de problemas verbales algebraicos que también suelen utilizar para problemas verbales aritméticos con cierta complejidad, (Schmidt y Bednarz, 1977). Podemos considerar que, en su mayoría, han movilizado correctamente el pensamiento algebraico adquirido.

Paralelamente se produce un rechazo total a un sistema de representación como el Ensayo-Error, fundamentalmente intuitivo pero muy engorroso, que necesita una gran cantidad de tiempo para su aplicación y que, por lo tanto, no se ve útil para este tipo de problemas. La falta de instrucción escolar en esta forma de resolución, e incluso un mal predicamento entre los profesores y estudiantes que lo tildan de “cuenta de la vieja”, abundan en las razones del citado rechazo.

Indiquemos, por último, que el conjunto de los sujetos del cluster 1 y del 3 suponen el 65% del total de la muestra.

7.2.2.4. Cluster 4.

142	5555050000	021	2155555550
159	5552425200	018	2252552550
017	2555052500	020	2252552520
009	2555050500	005	2252552520
041	2222255555	090	4252525552
022	5525020205	016	5155050550
091	2525525255	011	2055050550
088	5105050550	002	1155052550
135	2555525550	068	2055505000
078	2522255550	031	5555050055
028	1505220550	003	5120555555
119	2055302050	006	5520222500
025	5105251015	023	4550052250
013	5055555500	151	5000005550

CLUSTER 4		
Secundaria	Universidad	
G_1	$G_2=4$	$G_3=4$
20 (71%)	8 (29%)	
28 sujetos		

Características:

* Este cluster está formado por 28 sujetos, de los que 20 son de Secundaria, grupo G_1, y 8 de Universidad que se reparten igualitariamente entre 4 de G_2 y 4 de G_3. El desequilibrio en esta agrupación está claramente decantada hacia los estudiantes de Secundaria que representan el 71% del conjunto, frente al 29% de los estudiantes universitarios. Es el único cluster en donde se produce una desigualdad tan grande entre ambos conglomerados.

Este cluster, junto con el cluster 2, es reducido y sólo representa al 17,5% del total de la muestra

* Hemos encontrado 2 sujetos que tienen cinco o más “0", es decir un 7% del conjunto del cluster. Es un porcentaje bajo, indica que la gran mayoría de los sujetos han abordado más de la mitad de los ítems/problemas del instrumento administrado.

El valor “0" representa cerca del 25% de todos los ítems/problemas, es decir, la cuarta parte del total, lo que puede considerarse una cifra aceptable porque nos hace notar que aproximadamente el 75% de las tareas propuestas se han resuelto o intentado resolver mediante un sistema de referencia que hemos podido reconocer de entre los categorizados en este trabajo.

* Se observa un predominio del valor “5" (Simbólico), con un porcentaje del 49.5%, y del valor “2" (Parte-Todo), con un porcentaje del 20%. También aparece el valor “1" (Ensayo-Error) con un porcentaje del 3.5%, que podemos considerar significativo. Observando la tabla de las secuencias, destacan los sujetos que tienen una secuencia de valores “2" y “5" en proporciones similares.

Los sistemas de representación con aporte gráfico, “3" y “4", sólo aparecen en 4 problemas de los 280 que constituyen este cluster, es decir, en un porcentaje muy bajo 1.5%.

Conclusión: los sujetos del **cluster 4** se caracterizan por **el rechazo de los sistemas de representación que utilizan algún apoyo gráfico**, sistema de representación Gráfico (3) o Gráfico-Simbólico (4), al abordar los problemas del instrumento de evaluación, ni siquiera en aquellos cuyo enunciado contienen un soporte gráfico ilustrativo e incitador para su utilización en la resolución del problema.

Los sujetos de este grupo resuelven los problemas según dos sistemas de representación: el Simbólico (5) preferentemente y, alternativamente, un sistema numérico, con predominio de Parte-Todo (2).

En este caso podemos conjeturar que existe una tipología de sujetos que no establecen un puente entre un esquema numérico y el lenguaje algebraico. Por esta razón hemos caracterizado el cluster mediante una proposición en negativo.

En efecto, estos estudiantes, en su mayoría, de Secundaria se encuentran en fase de transición de un pensamiento aritmético a uno propiamente algebraico. Entonces aquellos problemas verbales más simples y elementales los abordan en un sistema de representación numérico, que potencia una fuerte experiencia en el campo aritmético adquirido en la enseñanza Primaria y que han madurado en la Secundaria. Cuando los problemas son más complejos han de utilizar una herramienta más elaborada, como es la algebraica, que da mayores garantías de éxito y que permite simplificar y potenciar las fases de resolución del problema verbal, por ejemplo, el planteamiento de dos relaciones lineales mediante un sistema de dos ecuaciones, o bien la integración en una ecuación de factores decimales (1,8x + x).

Sin embargo, desconocen o rechazan las representaciones gráficas como apoyo para la resolución del problema verbal. En este particular, no son intuitivos aunque las relaciones gráficas sean bastante explícitas.

En nuestra opinión, la utilización de sistemas de representación gráficos podría ser un puente que comunicara los razonamientos numéricos de los algebraicos (Fong y Chong, 1995), lo que mejoraría la comprensión del lenguaje algebraico y, por lo tanto, su aplicación con éxito a la resolución de los problemas verbales algebraicos.

En la siguiente tabla se resumen los porcentajes con los que aparecen cada uno de los sistemas de representación en los cuatro clusters y las frecuencias totales obtenidas por sistema y por cluster:

Sistemas/ Clusters	1	2	3	4	5	0	Totales
1º	3%	18%	3%	4%	40%	32%	420
2º	11.5%	37.5%	2%	0%	9%	40%	280
3º	0%	5%	1%	6%	80%	8%	620
4º	3.5%	20%	0.5%	1%	50%	25%	280
Totales	53	274	32	56	814	371	1.600

7.3. Hallazgos del análisis de clusters.

A continuación presentamos dos cuadros, resumen de las conclusiones a las que se ha llegado en el estudio de clusters, tanto para el caso de los problemas como para los sujetos, esquematizando las características de cada uno.

Clusters para los ítems/problemas		
Clusters	Problemas	Características
C.1	1, 4, 9, 7, 8, 6, 3	- Diversidad en las variables de tareas - Preponderancia del sistema de representación Simbólico y presencia del resto de los sistemas
C.2	10, 5	- Problemas con fuerte componente gráfica - Relación multiplicativa con factor decimal - Ausencia del sistema de representación Ensayo-Error y presencia de los Gráficos
C.3	2	- Problema con dibujo donde identificar fácilmente los datos - Se destaca el sistema de representación Ensayo-Error

Clusters para los sujetos		
Clusters	Sujetos:Secund-Univ.	Características
C_1	42 sujetos: 40% - 60%	- 32% de problemas en blanco - Cluster con más sistem. de represent. Gráfico - **Variedad en la elección del sistema de representación**
C_2	28 sujetos: 50% - 50%	- 40% de problemas en blanco - Ausencia del Gráfico-Simbólico - **Preferencia por sistem. de represent. numéricos: Ensayo-Error, Parte-Todo**

Clusters para los sujetos		
C_3	62 sujetos: 47% - 53%	- 8% de problemas en blanco - Ausencia del Ensayo-Error - **Preferencia abrumadora por sistem. de represent. Simbólico**
C_4	28 sujetos: 71% - 29%	- 25% de problemas en blanco - Predominio de los sistem. de represent. Simbólico y Parte-Todo - **Rechazo de sistem. de represent. con apoyo gráfico: Gráfico y Gráfico-Simbólico**

CAPÍTULO 8
ANÁLISIS DE DATOS. ESTUDIOS CONFIRMATORIOS

8.1. Primer estudio comparativo - transversal. Diferencias entre grupos.

Se trata de un análisis *confirmatorio-analítico* de los datos de la muestra. Para ello vamos a comparar tres variables dependientes de la resolución de los problemas verbales algebraicos (*Planteamiento, Ejecución y Desempeño Final*) según su incidencia en cada uno de los tres Grupos de sujetos de la muestra. Se trata de detectar si existe o no estabilidad, en el desempeño de estas variables, respecto a la cercanía en el tiempo de la instrucción algebraica, diferente para cada Grupo.

8.1.1. Transformación de medidas nominales en intervales.

Para este estudio transversal vamos a simplificar el sistema de codificación de las variables citadas que hemos tomado en el Capítulo 5, en orden a facilitar los estudios estadísticos de contraste. Para ello vamos a reunir las categorías que habíamos definido en el apartado 5.8.3 de la siguiente forma:

a) *Planteamiento*: hemos reunidos, dos categorías definidas inicialmente como distintas, “no plantea” y “mal planteado”, en una sola a la que vamos a identificar con “0", y la otra categoría, “bien planteado”, la identificamos con “1". Hemos reducido de tres a dos las categorías para esta variable, que es una variable cuantitativa, discreta e interval con valores que oscilarán, en cada sujeto, de 0 a 10.

b) *Ejecución*: de forma análoga a la anterior, identificamos "0" con “no ejecuta” o “mal ejecutado”, y “1" con “bien ejecutado”. También hemos reducido las categorías de esta variable de tres a dos. Entonces esta variable será cuantitativa, discreta e interval con valores entre 0 y 10 para cada sujeto.

c) *Desempeño Final*: en este caso adjudicamos “0" cuando se da “sin resultado” o “resultado mal”. Identificamos “1" con “error de atención” o “un resultado correcto” e identificamos el “2" con “resultados correctos”. En este caso hemos pasado de cuatro a tres categorías y esta variable aditiva será, pues, cuantitativa, discreta e interval, cuyos valores oscilarán entre 0 y 20 para cada sujeto

8.2. Estadísticos a estudiar.

Para el estudio se van a utilizar:

a) estadísticos descriptivos: muestrales (media, desviación típica, error típico de la media y rango) y de contraste (tamaño del efecto, fuerza de la asociación).

b) estadísticos inferenciales de contraste: univariados (generalización del tamaño del efecto, análisis de la varianza o ANOVA y de comparaciones múltiples) y multivariados (razón de Wilks y otros).

8.3 Hipótesis a contrastar en el primer estudio.

Recordemos los enunciados de las hipótesis que vamos a contrastar:

1) Enunciado de la hipótesis 1:

"Existen diferencias significativas en el ***planteamiento*** *en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes*"

2) Enunciado de la hipótesis 2:

"Existen diferencias significativas en la ***ejecución*** *en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes"*

3) Enunciado de la hipótesis 3:

"Existen diferencias significativas en el ***desempeño final*** *en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes"*

Para no hacer muy extenso este estudio comparativo-transversal vamos a explicitar los resultados correspondientes a la variable clave ***planteamiento***. Posteriormente indicaremos las conclusiones para el resto de las variables, obtenidas a partir de estudios paralelos cuyos datos estadísticos están recogidos en el Anexo IX.

8.3.1. Análisis de datos relativos a la hipótesis 1.

Es estudio estadístico versará sobre la hipótesis 1, que será extensible al resto de las hipótesis. Las conclusiones se expondrán en un apartado posterior:

Vamos a suponer que existen diferencias significativas en el planteamiento, en la resolución de problemas algebraicos, dependiendo del tipo de sujetos que se consideren: estudiantes de Enseñanza Secundaria (G_1), estudiantes que no recibieron instrucción específica sobre álgebra desde hace entre 3 y 5 años (G_2), y estudiantes que hace más de 5 años que no recibieron dicha instrucción (G_3).

La direccionalidad de la hipótesis apunta a que cuanto más reciente es la instrucción mayor será el desempeño; o sea, se trata de una hipótesis unilateral. El suspuesto básico en esta hipótesis es que en la relación entre olvido y maduración, se asume que los efectos del olvido son más contundentes que los contrarios de maduración.

Para ello vamos contrastar los datos estadísticos siguientes:

8.3.1.1. Estadísticos descriptivos.

a) Estadísticos muestrales[1]:

Estadísticos muestrales para la variable *planteamiento,* según grupo de edad/nivel académico

[1] n = número de sujetos
$\bar{x}$ = media aritmética
S = desviación típica
$S_{\bar{x}}$ = error típico de la media

Planteamiento	n	$\bar{x}$	S	$S_{\bar{x}}$	Rango
G_1	80	4.68	2.27	0.25	(1;10)
G_2	40	5.65	2.72	0.43	(1;10)
G_3	40	6.12	2.93	0.46	(1;10)

b) Estadísticos descriptivos de contraste.

b.1) Tamaño del efecto (TE)

Se utiliza la fórmula del tamaño del efecto[2] propuesta por Cohen (1977, p. 20) y Hunter y col. (1982, p. 92), en la que se recomienda utilizar la desviación típica intragrupos. Este estimador del TE es menos sesgado a causa de su menor error muestral y su mayor sensibilidad a la heterogeneidad de las varianzas (según Hedges, 1981).

También, en este caso, aplicamos este estimador para comparar los distintos grupos de edad/nivel académico de los sujetos de la muestra:

Tamaños del efecto para la variable *planteamiento* según el grupo de edad/nivel académico

COMPARACIÓN	T.E.	Decisión sobre la Hipótesis
$G_1 \Leftrightarrow G_2$	-0.40	**H_0**
$G_1 \Leftrightarrow G_3$	-0.57	**H_1**
$G_2 \Leftrightarrow G_3$	-0.16	**H_0**

Aceptando un tamaño del efecto significativo cuyo valor absoluto sea mayor o igual a 0.5 (tamaño del efecto promedio standar), podríamos afirmar que no se verifica la

2

$$TE = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_1^2}{n_1+n_2-2}}}$$

hipótesis de nulidad ya que existen diferencias sensibles al comparar los grupos G_1 y G_3.

b.2) Magnitud de la fuerza de la asociación.

Es posible determinar la fuerza de asociación entre las dos variables que se consideran a partir de componentes de varianza (para fórmulas afines véase Snyder y Lawson, 1993).

Su interpretación se hace en base al porcentaje de varianza de una variable (que asumimos como criterio: *planteamiento*), frente a otra variable (que asumimos como predictiva : tipo de sujeto).

La tabla de resultado se reproduce a continuación:

Estadísticos de magnitud de la fuerza de la asociación para un modelo de efectos fijos: *planteamiento & grupo de edad/nivel académico*:

η^2 **Eta cuadrática**	Ω^2 **Omega cuadrática**	Σ^2 **Epsilon cuadrática**	**Wherry**	**Herzberg**	**Lord**
0.050	0.047	0.038	0.044	0.032	0.026

Con la más liberal de las fórmulas obtenemos que el porcentaje de varianza explicado por una variable sobre la otra alcanza apenas el 5%. Habitualmente se acepta como indicador de varianza explicada suficiente, valores superiores a 0.20. En este caso deberíamos manifestar que existe una escasa fuerza de la asociación entre ambas variables.

8.3.1.2. Estadísticos inferenciales de contraste.

i) **Estadísticos univariados**. Dentro de este grupo de estadísticos podemos considerar:

i.1) Generalización de los tamaños del efecto.

Estamos ante lo que Shavelson (1988) denomina investigación caso II. Si esta muestra de 160 sujetos se hubiera obtenido mediante selección aleatoria de una población disponible, a la que se generaliza, y asumiésemos que la distribución de valores correspondiente a la variable criterio es manifiestamente normal (supuesto que no se verifica), podríamos hacer una generalización a los tamaños del efecto anteriormente obtenido.

Con un tamaño muestral mínimo de 40 sujetos por grupo de comparación, con los niveles de significación, *α*, y la potencia, *1-β*, que se indican, un tamaño del efecto sería generalizable si su valor es superior a los que se indican. (Para valores críticos se puede consultar la tabla de Friedman, 1982).

Valores críticos aproximados del tamaño del efecto para un tamaño muestral mínimo de 40 sujetos/grupo en contraste unilateral

($G_1 \Leftrightarrow G_2 \Leftrightarrow G_3$)

T.E. críticos	0.49	0.56	0.66	0.58	0.62	0.71
α	0.05	0.05	0.05	0.01	0.01	0.01
1 - β	0.70	0.80	0.90	0.70	0.80	0.90

De todos los tamaños del efecto calculados sólo tendrán significación estadística (α = 0.05 y 1-β = 0.80) el relativo a la comparación de G_1 con G_3. Podremos rechazar, pues, la hipótesis nula y manifestar que existen diferencias estadísticamente significativas (generalización de un tamaño del efecto) entre los dos grupos de comparación sobre la variable *planteamiento de problemas algebraicos*. En todo caso, el hallazgo hay que relativizarlo dada la manifiesta no normalidad de la distribución en la que se compara la variable.

i.2) Estadísticos univariados de significación

Se trata de estimar estadísticos de significación (test de significación estadística) que permitan generalizar de la muestra a la población. Dado que la muestra no se ha obtenido por selección aleatoria a partir de una población de interés, la inferencia habrá de tomarse con mucha precaución, ya que ésta tendrá sólo un valor orientativo. (Tejedor, 1984).

Variables	(1) Independencia	(2) Normalidad (w;p)	(3) Homocedasticidad (F;p)	Test adecuado ANOVA AFIN	Valores p	(4) Decisión
Planteamiento-Grupo de edad/nivel	SI	(0.93;0.00) NO	(2.03;0.13) SI	Welch F=4.49 F=4.71	0.014 0.010	**H_1**

De los datos anteriores podemos deducir que:

- Se trata de grupos manifiestamente independientes.

- La normalidad de la distribución, determinada por el test de Shapiro-Wilk, determina los valores de p menores que 0.05, lo cual indica que la muestra ha sido extraída de una población marcadamente no normal.

- Se verifica el supuesto de homocedasticidad u homogeneidad de las varianzas, calculadas a partir del test de Levene. Los valores de p menores que 0.05 indican ausencia de homogeneidad en las variables que se comparan.

- Los valores de p inferiores a 0.05 conllevan rechazo de la hipótesis nula.

i.3) Estadísticos de comparación múltiple.

Dado que son tres los grupos de comparación que se consideran, habrá que acudir a los procedimientos de comparación múltiple para demostrar entre qué grupos existen diferencias estadísticamente significativas. Para ello se van a utiliza diferentes estadísticos, de los que exponemos los resultados de los siguientes:

i.3.1) Procedimiento de Kruskal-Wallis

	G_1	G_2	G_3
G_1	–		**
G_2		–	
G_3	**		–

** = Significación al 5%

Existen diferencias estadísticamente significativas entre los grupos G_1 y G_3

i.3.2) Procedimiento de Bonferroni

	t	g.l.	p
$G_1 \Leftrightarrow G_2$	-1.92	66	0.060
$G_1 \Leftrightarrow G_3$	-2.71	63	0.008
$G_2 \Leftrightarrow G_3$	-0.75	77	0.455

Si se comparan tres pares de medidas, p debe ser inferior a 0.016 para ser significativo al 5%. Podemos afirmar que existen diferencias estadísticamente significativas entre los grupos G_1 y G_3. Lo que nos lleva a rechazar H_0.

ii) **Estadísticos multivariados de significación**. El contraste en curso podría considerarse como un diseño mixto en el que la variable *tipo de sujeto* sería en factor intersujetos y la variable *planteamiento* sería un factor intrasujetos. Se nos determina un diseño 3×10: 3 tipologías de sujeto por 10 problemas administrados a todos los sujetos.

Los estadísticos multivariantes que se obtengan nos indicarán si existen diferencias significativas al considerar la interacción entre el factor “entre” (*tipos*) con el factor “intra” o de medidas repetidas (*planteamiento*):

Estadísticos multivariados de significación: diseño inter (grupo edad/nivel) ×

intra (planteamiento)[3]

Estadísticos	Valor	F	g. l.	p	Decisión
Razón de Wilks: λ	0.77	2.23	(18;298)	0.0032	H_1
Traza de Hottelling-Lawley: T	4155	$\chi^2 =$ 33.69	(14;26)	0.0026	H_1
Raiz máxima de Roy: R_o	0.19	_	_	0.001	H_1
Ajuste de Greenhouse-Geisser: Σ	0.87	2.83	(15;1228)	0.0002	H_1
Ajuste de Huynh-Feldt: Σ	0.93	2.83	(16;1315)	0.0001	H_1

Todos los estadísticos calculados denotan una señalada significación estadística, por tanto ***se rechaza la hipótesis de nulidad*** *y se considera que existen profundas diferencias entre tipos de sujetos respecto a una serie de medidas repetidas (10) de una misma variable dependiente,* ***planteamiento***.

[3] **F** = Razón de F de Fisher-Snedecor. Valor de ANOVA
g.l. = grados de libertad
p = nivel de probabilidad
Estos estadísticos han sido obtenidos con el programa 4V.2 del BMDP

8.4. Discusión de resultados para las hipótesis 1, 2 y 3.

Los estadísticos estudiados en el apartado anterior se han aplicado a las variables *ejecución* y *desempeño final* (hipótesis 2 y 3), llegando a resultados similares a los obtenidos para la variable *desempeño final*, es decir, el estudio estadístico confirmatorio de las tres hipótesis que hemos contrastado nos lleva a un resultado uniforme y consistente, tanto en cada una de las hipótesis como entre las hipótesis. En definitiva, podemos concluir que:

Tanto respecto al Planteamiento, como a la Ejecución como al Desempeño Final en la resolución de problemas algebraicos elementales, a nivel de Enseñanza Secundaria Obligatoria, hemos de rechazar la hipótesis nula y tomar en consideración la hipótesis alternativa.

El rechazo se produce en el sentido de que existen diferencias, que consideramos estadística y sustantivamente, como significativas entre el grupo G_1 (estudiantes de Secundaria) y el grupo G_3 (estudiantes universitarios con más de 5 años sin instrucción en Álgebra).

El grupo G_2 (estudiantes universitarios entre 3 y 5 años sin recibir instrucción en Álgebra) no expone diferencias significativas con los otros dos grupos.

Esquemáticamente el patrón de los resultados sería:

$$\boxed{G_1 \approx G_2\,; \qquad G_2 \approx G_3\,; \qquad G_1 < G_3}$$

Las diferencias se dan en el sentido de mejores resultados, respecto a las tres variables, para el tercer grupo respecto al primero, manteniéndose sin diferencias significativas los grupos próximos.

8.5. Segundo estudio comparativo-transversal. Diferencias según tipologías/clusters.

En este caso, vamos a comparar las tres variables de la resolución de los problemas verbales algebraicos (*planteamiento, ejecución y desempeño final*) según su incidencia en cada uno de los cuatro clusters de sujetos de la muestra obtenidos en el Capítulo 7. Se trata de detectar si existe o no diferencias, en el desempeño de estas variables, respecto a la tipología que hemos caracterizado para cada uno de los clusters.

Para ello vamos a realizar un análisis *confirmatorio-analítico* de los datos de la muestra, utilizando los mismos estadísticos que se han aplicado para las hipótesis anteriores.

8.6. Hipótesis a contrastar en el segundo estudio.

Recordemos las hipótesis que vamos a contrastar:

1) Enunciado de la hipótesis 4:

*"Existen diferencias significativas en el **planteamiento** en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor"*

2) Enunciado de la hipótesis 5:

*"Existen diferencias significativas en la **ejecución** en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor"*

3) Análisis de datos relativos a la hipótesis 6.

*"Existen diferencias significativas en el **desempeño final** en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor"*

Al igual que en el primer estudio, para no hacer muy extenso este segundo estudio comparativo-transversal vamos a explicitar los resultados correspondientes a la variable clave ***desempeño final***. Posteriormente indicaremos las conclusiones para el resto de las variables, obtenidos a partir de estudios paralelos cuyos datos estadísticos están recogidos en el Anexo X.

8.6.1. Análisis de datos relativos a la hipótesis 6.

Haremos todo el estudio estadístico sobre la hipótesis 6, que será extensible a las anteriores.

Vamos a nombrar C_1, C_2, C_3, C_4, respectivamente a los clusters-tipologías que hemos caracterizado en el Capítulo 7.

8.6.1.1. Estadísticos descriptivos.

a) Estadísticos muestrales:

Estadísticos muestrales para la variable *desempeño final* , según tipología/cluster de sujetos:

Clusters	n	$\bar{x}$	S	$S_{\bar{x}}$	Rango
C_1	42	7	5,11	0,79	17
C_2	28	6,3	5,25	1,01	21
C_3	62	16,5	8,84	1,12	30
C_4	28	9,3	5,7	1,07	22

Se puede observar que la media en el Desempeño Final para la cluster 3 es muy alta con respecto a los demás conglomerados. A nivel de medias, se puede indicar que:

$$C_3 > C_4 > C_1 > C_2$$

b) Estadísticos descriptivos de contraste.

b.1) Tamaño del efecto (TE)

Tamaños del efecto para la variable *desempeño final,* según el cluster/tipología de sujetos.

COMPARACIÓN	**T.E.**	**Decisión sobre la Hipótesis**
$C_1 \Leftrightarrow C_2$	-0,13	H_0
$C_1 \Leftrightarrow C_3$	1,24	H_1
$C_1 \Leftrightarrow C_4$	0,41	H_0
$C_2 \Leftrightarrow C_3$	1,27	H_1
$C_2 \Leftrightarrow C_4$	0,53	H_1
$C_3 \Leftrightarrow C_4$	-0,90	H_1

Aceptando un tamaño del efecto significativo cuyo valor absoluto sea mayor o igual a 0.5 (tamaño del efecto promedio standar), podríamos afirmar que se rechaza la hipótesis de nulidad, ya que existen diferencias sensibles al comparar los grupos:

$C_1 < C_3$; $C_2 < C_3$; $C_2 < C_4$; $C_4 < C_3$

Se puede ver que el cluster 3 tiene un *desempeño final* significativamente mejor que los tres restantes. También el cluster 4 tiene un *desempeño final* mejor que el cluster 2.

b.2) Magnitud de la fuerza de asociación

Es posible determinar la fuerza de asociación entre las dos variables que se consideran a partir de componentes de varianza**.** Su interpretación se hace en base al porcentaje de varianza de una variable (que asumimos como criterio: *desempeño final*), frente a otra variable (que asumimos como predictiva : *adscripción del sujeto a un cluster-tipología*).

La tabla siguiente muestra distintos valores estadísticos de la fuerza de asociación para las dos variables que estudiamos:

Estadísticos de magnitud de la fuerza de la asociación para un modelo de

efectos fijos: *desempeño final & cluster/tipología de sujetos*:

η^2 Eta cuadrática	Ω^2 Omega cuadrática	Σ^2 Epsilon cuadrática	Wherry	Herzberg	Lord
0,30	0,29	0,28	0,08	0,07	0,07

Habitualmente se acepta como indicador de varianza explicada suficiente, valores superiores a 0,20. En este caso la varianza de la variable *desempeño final* es explicada en un 30% (η^2) por la tipología-cluster al que cada sujeto se adscribe, lo que se considera una fuerte asociación entre las dos variables.

Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula H_0.

8.5.3.2. Estadísticos inferenciales de contraste.

i) **Estadísticos univariados**

i.1) Generalización de los tamaños del efecto

Vamos a tomar un tamaño muestral mínimo de 28 sujetos, correspondiente al menor número de sujetos adscritos a un cluster (cluster 2) para obtener la generalización propuesta:

Valores críticos aproximados del tamaño del efecto para un tamaño muestral mínimo de 28 sujetos/grupo en contraste bilateral

T.E. críticos	0,60	0,65	0,75	0,85	0,75	0.85	0,90	1,00
α	0,05	0,05	0,05	0,05	0,01	0,01	0,01	0,01
1 - β	0,60	0,70	0,80	0,90	0,60	0,70	0,80	0,90

Según estos valores, las diferencias estadísticamente significativas serían las que existen entre el cluster 3 con los tres clusters restantes.

De esta forma, rechazamos la hipótesis nula y manifestamos que existen diferencias significativas entre los clusters.

i.2) Estadísticos univariados de significación:

Variables	Independencia	(1) Normalidad (w;p)	(2) Homocedasticidad (F;p)	Test adecuado ANOVA AFIN	Valores p	Decisión
Desempeño final en cluster/ tipología	SI	(0.90 ;0.00) NO	(9.21 ; 0.00) SI	Welch F=18.71 F=22.04	0.00 0.00	**H_1**

(1) Prueba de Shapiro-Wilks
(2) Prueba de Levenne

Nuevamente se rechaza la hipótesis nula, H_0, y se admite que existen diferencias estadísticamente significativas entre grupos.

i.3) Estadísticos de comparación múltiple.

Vamos a establecer un procedimiento de comparación múltiple que nos indique los grupos entre los que existen las diferencias estadísticamente significativas:

i.3.1) Procedimiento de Kruskal-Wallis

	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**
C_1	–	–	***	–
C_2		–	***	–
C_3			–	***
C_4				–

*** = Significación al 0,1%

Podemos afirmar que existen diferencias profundamente significativas entre el cluster 3 y los restantes. Se rechaza la hipótesis nula.

ii) **Estadísticos multivariados de significación**.

Estadísticos multivariados de significación: diseño inter (*cluster*/tipología) × intra (*desempeño final*) sobre 10 tareas-componentes

Estadísticos	Valor	F	g. l.	p	Decisión
Razón de Wilks: λ	0,70	2,00	(27;429)	0,0024	**H_1**
Traza de Hottelling-Lawley: T	0,37	χ^2 = 44,03	(20;903)	0,0022	**H_1**
Raiz máxima de Roy: R_o	0,19	_	_	0,003	**H_1**
Ajuste de Greenhouse-Geisser: Σ	0.87	2,28	(22;1163)	0,006	**H_1**
Ajuste de Huynh-Feldt: Σ	0.93	2.28	(24;1252)	0,004	**H_1**

*Todos los estadísticos calculados llevan al **rechazo de la hipótesis nula** y afirman que existen diferencias en el **desempeño final** (concebido como una variable determinada por 10 componentes) según el cluster-tipología al que el sujeto esté adscrito.*

8.6. Discusión de resultados para las hipótesis 4, 5 y 6.

Hemos aplicado los estadísticos estudiados en el apartado anterior a la variable *planteamiento* (hipótesis 4) y a la variable *ejecución* (hipótesis 5), descritas en capítulos anteriores y hemos llegado resultados similares a los obtenidos para la variable *desempeño final*, es decir, se rechaza la hipótesis nula y verificamos que existen diferencias estadísticamente significativas entre los cluster, respecto al planteamiento y a la ejecución que hacen, de los ítems/problemas del instrumento de evaluación, los sujetos de la muestra.

Las diferencias entre los clusters sigue la secuencia:

$$C_3 > C_4 > C_1 > C_2$$

respecto al mayor porcentaje de buenos planteamientos y ejecuciones correctas de los ítems/problemas.

En las tres hipótesis contrastadas, hemos de rechazar la hipótesis nula y tomar en consideración la hipótesis alternativa. Por tanto, hemos de concluir que:

1) Tanto para el *planteamiento*, como para la *ejecución*, como para el *desempeño final* de un problema verbal algebraico, existen diferencias estadísticamente significativas entre los cluster o tipologías a las que se adscribe un sujeto, de acuerdo al sistema de representación elegido para abordar la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación objeto de este trabajo. Estas diferencias siguen la secuencia en cuanto a buenos resultados:

$$\boxed{\mathbf{C_3 > C_4 > C_1 > C_2}}$$

Por otra parte, hemos encontrado una gran diferencia entre los resultados de los sujetos adscritos al cluster 3 y los restantes, llegando a ser, en el valor de la media de buenos resultados, casi el doble del siguiente grupo, el cluster 4, y superior al doble respecto a los otros dos cluster, el cluster 1 y el cluster 2, (16,5% frente al 9,3%, 7% y 6,3% respectivamente).

Recordamos que la característica con la que hemos descrito al cluster 3 es que los sujetos adscritos a este cluster utilizan, de forma predominante, un sistema de representación Simbólico para resolver los ítems/problemas del instrumento de evaluación. Por lo que podemos afirmar que:

2) Aquellos sujetos que dominan la semántica y la sintaxis del lenguaje simbólico algebraico resuelven con mejor aprovechamiento los problemas verbales algebraicos.

Las aproximaciones a la resolución de problemas verbales algebraicos por otras vías más intuitivas pueden y deben, sobre todo para los estudiantes con menos habilidades, utilizarse para lograr la adquisición del lenguaje algebraico por excelencia, el simbólico, que permita la adquisición y desarrollo del pensamiento algebraico.

Por lo tanto, parece que un objetivo deseable, para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria sería el dominio, al término de esta Etapa, del lenguaje simbólico algebraico elemental por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 9

UN ESTUDIO DE CASOS PARA SEGUIMIENTO DE PROCESOS

9.1. Acotación del problema.

A la vista de los resultados del análisis cluster, de la determinación de tipologías de sujetos que hemos realizado en el apartado 7.2.2, y de la decisión adoptada respecto a las características que hemos definido para ellos, se obtienen cuatro categorías de resolutores de problemas verbales algebraicos elementales, de acuerdo al sistema o grupo de sistemas de representación que utilizan al abordar las tareas.

Pretendemos hacer un estudio confirmatorio de nuestras conjeturas, extraídas del proceso estadístico realizado. Para ello hemos efectuado un estudio de casos consistente en proponer a dos sujetos seleccionados por cada uno de los cluster, una serie de tareas, similares o iguales a las del instrumento de evaluación administrado. Las tareas se han seleccionado adecuadamente para tratar de confirmar las características del cluster o tipología en cuestión.

Hay que tener en cuenta las numerosas críticas a los *estudios de casos* utilizados para confirmar o refutar una predicción o aserto hipotético derivado de una teoría, de la investigación previa o de la experiencia del investigador. Sin embargo, Bromley (1986, p. 289) expone que un simple *estudio de casos* puede ser convincente e incluso demostrativo/probativo. La fuerza del *estudio de casos* no es sólo obtener fundadas intuiciones, sino también, como la lógica deductiva sugiere, permite una refutación directa, que es más efectiva para falsar una teoría que todo un cúmulo de confirmaciones (Platt, 1964).

Recordemos también que, con el método del *estudio de casos*, se han realizado grandes avances en educación: Piaget, Lewin e incluso Skinner utilizaron este método con sus posibles acepciones (Merriam, 1988; Stake, 1988).

En nuestro caso queremos conocer, con unos casos disponibles, si la ubicación de cada sujeto en su cluster correspondiente obedece al sistema de representación movilizado ante problemas verbales algebraicos propuestos y, adicionalmente, cuál puede ser el papel o influencia que las variables afines a los mismos tienen en el sistema de representación utilizado.

En resumen, queremos confirmar las siguientes conjeturas:

Conjeturas a confirmar	
- Conjetura 1:	Los sujetos elegidos en cada cluster cumplen las características con las que hemos definido el cluster al que pertenecen.
- Conjetura 2:	El cambio del valor 1 al 2 (facilidad a dificultad) en las variables de los ítems/problemas influye en el sistema de representación elegido para la resolución del mismo (apartado 7.1.7).
-Conjetura 3:	El planteamiento en un ítem/problema de dos relaciones obtiene mejores resultados que el de una relación (apartado 7.1.5).

Identificamos con un número los diversos planteamientos que vamos a utilizar en los instrumentos a administrar a los sujetos. Estos códigos coinciden con los números ya asignados a los sistemas de representación en los que están planteados, es decir:

Planteamientos
* 1: Planteamiento en el sistema de representación Ensayo-Error
* 2: Planteamiento en el sistema de representación Parte-Todo
* 3: Planteamiento en el sistema de representación Gráfico
* 4: Planteamiento en el sistema de representación Gráfico-Simbólico
* 5: Planteamiento en el sistema de representación Simbólico

9.2. Selección de casos.

Dada la composición de la muestra empleada en nuestro estudio, y de que esta nueva prueba se hace con un curso escolar de diferencia, no se puede contar con gran parte de los estudiantes de la muestra inicial porque han concluido el período de enseñanza en el que estaban (final de Secundaria, 5º de Pedagogía) y no se pueden localizar con facilidad. Por otra parte, por las características de la administración del instrumento de evaluación, muchos protocolos son anónimos, lo que imposibilita la identificación de dichos sujetos.

Por todo lo anterior hemos elegido intencionalmente dos sujetos de cada cluster, uno de entre los estudiantes de Secundaria y otro de entre los estudiantes universitarios, que están identificados y a cuya colaboración se ha podido acceder. De esta forma estudiamos ocho casos, dos por cada cluster, a los que hemos sometido a una prueba, mediante una entrevista clínica a cada sujeto por separado, cuyos resultados analizaremos posteriormente.

9.3. Configuración del instrumento de recogida de datos.

El instrumento de recogida de datos es una prueba que consta de una serie de problemas/tareas a realizar por el sujeto/caso, más una entrevista semiestructurada.

La prueba o instrumento de recogida de datos ha sido ajustada a las características que tratamos de confirmar en cada tipología. Por lo tanto, hemos elaborado cuatro pruebas, una distinta por cada par de sujetos de cada uno de los clusters. Vamos a describir estos instrumentos:

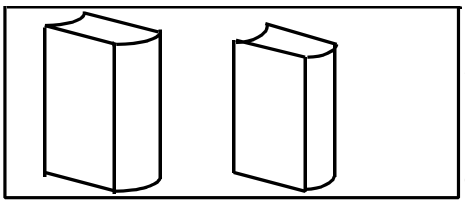
9.3.1. Instrumento para el Cluster 1.

Recordemos que la característica establecida para estos sujetos, ya descrita, es **la variedad de opciones en la elección del sistema de representación** para abordar un problema. Los sujetos de este cluster pueden resolver los problemas en distintos sistemas de representación, dependiendo en cada caso del tipo de problema, es decir, de sus variables.

Hemos elegido sujetos que han utilizado al menos tres sistemas de representación distintos, ya que tratamos de estudiar, en este caso, la valoración que el sujeto hace de cada uno de los sistemas de representación (con esto se produce el entrelazamiento y/o solapamiento de las fases procedimentales, tan peculiar del método del *estudio de casos*). Para ello hemos elaborado el siguiente protocolo de actuación:

9.3.1.1. Primera Etapa: Elección de planteamiento. Se muestra al sujeto, en una hoja independiente, un ítem/problema igual o similar a los utilizados en el instrumento de evaluación ya administrado, fácilmente resoluble en cualquier sistema de representación. En la misma hoja se reproduce un planteamiento correcto del ítem/problema en cada uno de los sistemas de representación que hemos descrito[1].

Un problema que responda a estas características es un problema cuyas variables tomen los valores (1,1,1). El problema elegido es el siguiente:

9.3.1.1. *1ª Etapa*. Variables de tarea (1,1,1). Contexto: libros "En una estantería hemos colocado una colección de novelas. En la colección hay dos tipos de novelas por su anchura: novelas gruesas y novelas delgadas. Si ponemos juntas una novela gruesa y dos delgadas, ocupan 18 cm de la estantería.  La novela gruesa es 3 cm más ancha que la delgada. ¿Qué anchura tiene cada una de las novelas?”	1: una relación 1: números sencillos 1: con dibujo

A continuación reproducimos los planteamientos que hemos utilizado para este ítem/problema, indicando que, en la hoja que hemos entregado al sujeto, el orden de presentación de los mismos ha sido distinto para tratar de evitar que dos planteamientos próximos en su concepción (Gráfico con Gráfico-Simbólico, o Gráfico-Simbólico con Simbólico) estuvieran juntos y no se pudieran discriminar bien.

[1] Los diversos planteamientos son similares a los que han realizado los sujetos en sus respuestas al instrumento de evaluación. Se han reproducido los esquemas y razonamientos correctos que han utilizado los estudiantes en los distintos sistemas de representación.

Delgada	Gruesa	1 gruesa + 2 delgadas = 18 cm
2	5	5 + 4 = 9
3	6	6 + 6 = 12
7	10	10 + 14 = 24
…	…	…

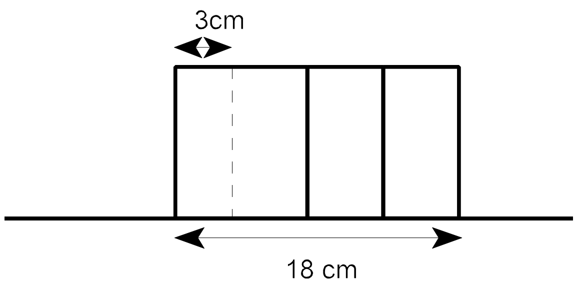
Ensayo-Error

La gruesa es 3 cm más ancha que la delgada

Entonces se le resta al total 3 cm y se divide:

18 - 3 = 15 cm

Parte-Todo



Gráfico

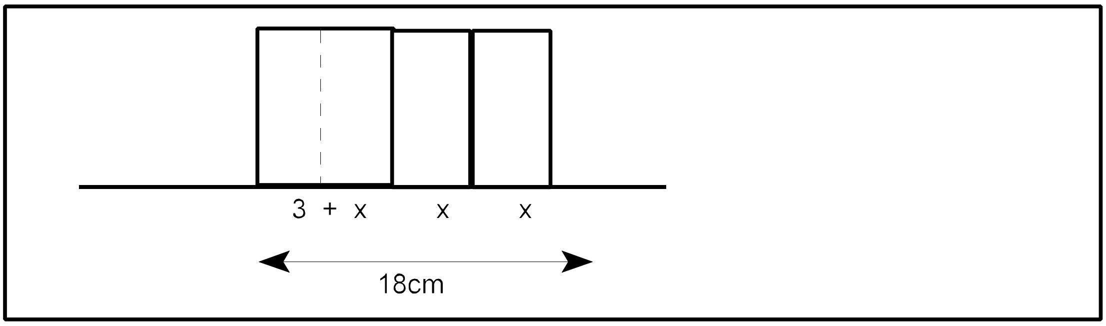


Gráfico-Simbólico

Delgada = x

Gruesa = x + 3

entonces: x + 3 + x + x = 18 cm

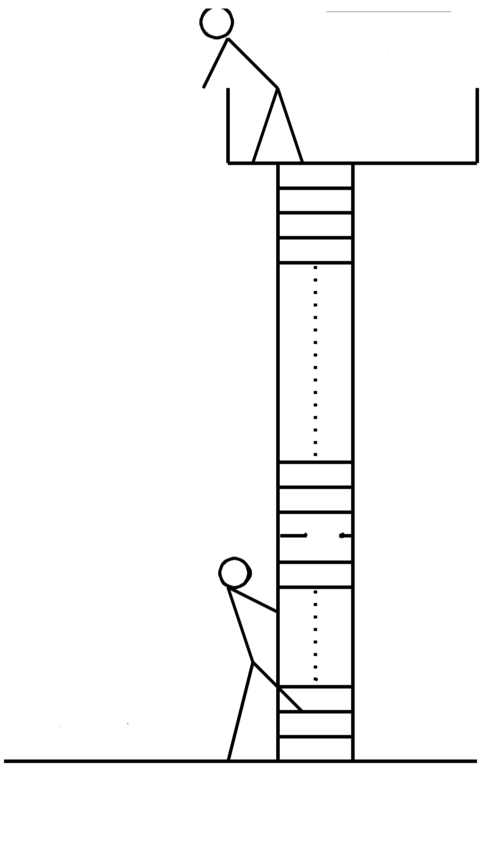
Simbólico

9.3.1.2. Segunda Etapa: Primera Entrevista**.** Para conocer la valoración que hace el sujeto sobre los diferentes sistemas de representación y el sentido de su elección hemos establecido una secuencia de actuación, siguiendo un modelo de entrevista semiestructurada; nos proponemos indagar en los razonamientos del sujeto y conseguir una mayor precisión sobre ellos. La estructura de esta entrevista es la siguiente:

Preguntas-clave de la 1ª entrevista
1. *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema.* 2. *Explica la razón de esa elección*. (Se tratará de conseguir la mayor precisión). 3. *¿Por qué no has elegido “cada una” de las restantes?* (Se pregunta por todos y cada uno de los planteamientos restantes). En este caso se trata de discriminar si la no elección obedece a que se le atribuye “dificultad” en la resolución o “imposibilidad” de esa resolución en ese sistema de representación.

9.3.1.3. Tercera Etapa: Resolución de otro ítem/problema. Nuestra hipótesis es que, ante cada tarea, el sujeto elige aquel sistema de representación con el que espera obtener mayor ventaja de las variables del problema. Entonces le proponemos que resuelva otro problema mediante el mismo sistema de representación elegido para el anterior. El nuevo problema debe tomar aquel valor de la variable que hace más difícil su resolución en el sistema de representación elegido (de acuerdo a los datos estadísticos obtenidos en el apartado 7.1.7 y a su posterior interpretación), y mantener los valores de las otras dos variables. Es decir:

a) Si elige en la Primera Etapa un planteamiento numérico (Ensayo-Error o Parte-Todo), deberá aplicar un planteamiento similar en un problema donde V_2=2 (números “difíciles”), para conocer la influencia de esta variable en la elección del planteamiento. Entonces el problema que proponemos es:

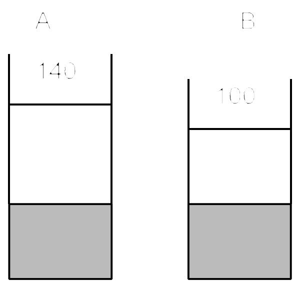
9.3.1.3.a. *3ª Etapa*. Variables de tarea (1,2,1). Contexto: distancias  Dos amigos, Ricardo y Roberto deciden subir a una torre. Ricardo sube primero, pero Roberto no se atreve. Entonces Ricardo le dice desde arriba: "¿Porqué no subes, si sólo tiene 56 peldaños?" Pero Roberto le contesta: "No subo. Yo sé que a partir del escalón roto hay 2'5 veces más peldaños que antes". ¿Cuántos peldaños hay hasta el escalón roto (incluido éste) y cuántos hay después?”	1: una relación 2: números difíciles 1: con dibujo

b) Si el sistema de representación es Gráfico o Gráfico-Simbólico, se le propone al sujeto que resuelva, mediante el mismo sistema, un problema de variables (1,1,2), es decir, sin dibujo en el texto, para conocer el influjo de la variable, $V_{3,}$ en la elección de un sistema de representación gráfico. En este caso proponemos:

9.3.1.3.b. *3ª Etapa*. Variables de tarea (1,1,2). Contexto: distancias "Sara recorre 12 Km para ir de su casa al trabajo. Una parte del trayecto lo hace andando y la otra en autobús. En autobús recorre un trayecto que es dos veces mayor que el que recorre andando. ¿Cuánto recorre andando y cuánto en autobús?"	1: una relación 1: números sencillos 2: sin dibujo

c) Si el sistema de representación elegido es el Simbólico, podemos presumir que cualquier otro problema lo resolverá según este sistema, pues es aplicable a cualquier tipo de problemas algebraicos. Por esta razón, la propuesta será presentarle otro problema del modelo (1,1,1), pero con sólo planteamientos en los sistemas Numérico y Gráfico. Para este caso el problema propuesto ha sido:

9.3.1.3.c. *3ª Etapa*. Variables de tarea (1,1,1). Contexto: depósitos



"Tenemos dos depósitos de agua. Al depósito A le caben 140 litros y al depósito B le caben 100 litros.

Del depósito A se sacan 17 cubos de agua y del depósito B se sacan 12 cubos de agua, quedándose los dos depósitos con la misma cantidad de agua.

¿Qué cantidad de agua cabe en cada cubo?"

1: una relación

1: números sencillos

1: con dibujo

El sujeto deberá continuarlo según uno de los planteamientos que acompañan a este problema, que son:

cubo	Depósito A: 140 l. - 17 cubos	Depósito B: 100 l. - 12 cubos
5 l.	$140 - 17 \cdot 5 = 140 - 85 = 55$ l. no	$100 - 12 \cdot 5 = 100 - 60 = 40$ l. no
6 l.	$140 - 17 \cdot 6 = 140 - 102 = 38$ l. no	$100 - 12 \cdot 6 = 100 - 72 = 28$ l. no
10 l.	$140 - 17 \cdot 10 = 140 - 170 =$ no	$100 - 12 \cdot 10 = 100 - 120 =$ no
.....	......	....

Ensayo-Error

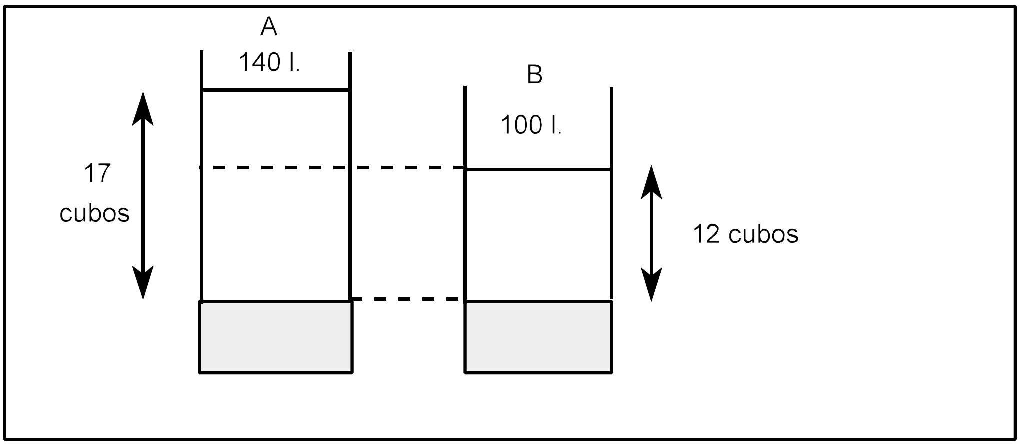
Le queda a A: 140 l. - 17 cubos

Le queda a B: 100 l. - 12 cubos

Le queda a A igual que a B

A tiene: (140 - 100) l. más que B ; De A se sacan: (17 - 12) cubos más que de B

Parte-Todo



Gráfico

Si el sujeto no es capaz de resolver el segundo ítem/problema en el sistema de representación elegido para el primero, en los casos a) y b), o en el elegido para el segundo, en el caso c), se le planteará la siguiente cuestión:

9.3.1.4. Cuarta Etapa: Segunda Entrevista. Establecemos una nueva entrevista semiestructurada:

Pregunta-clave de la 2ª entrevista
Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido

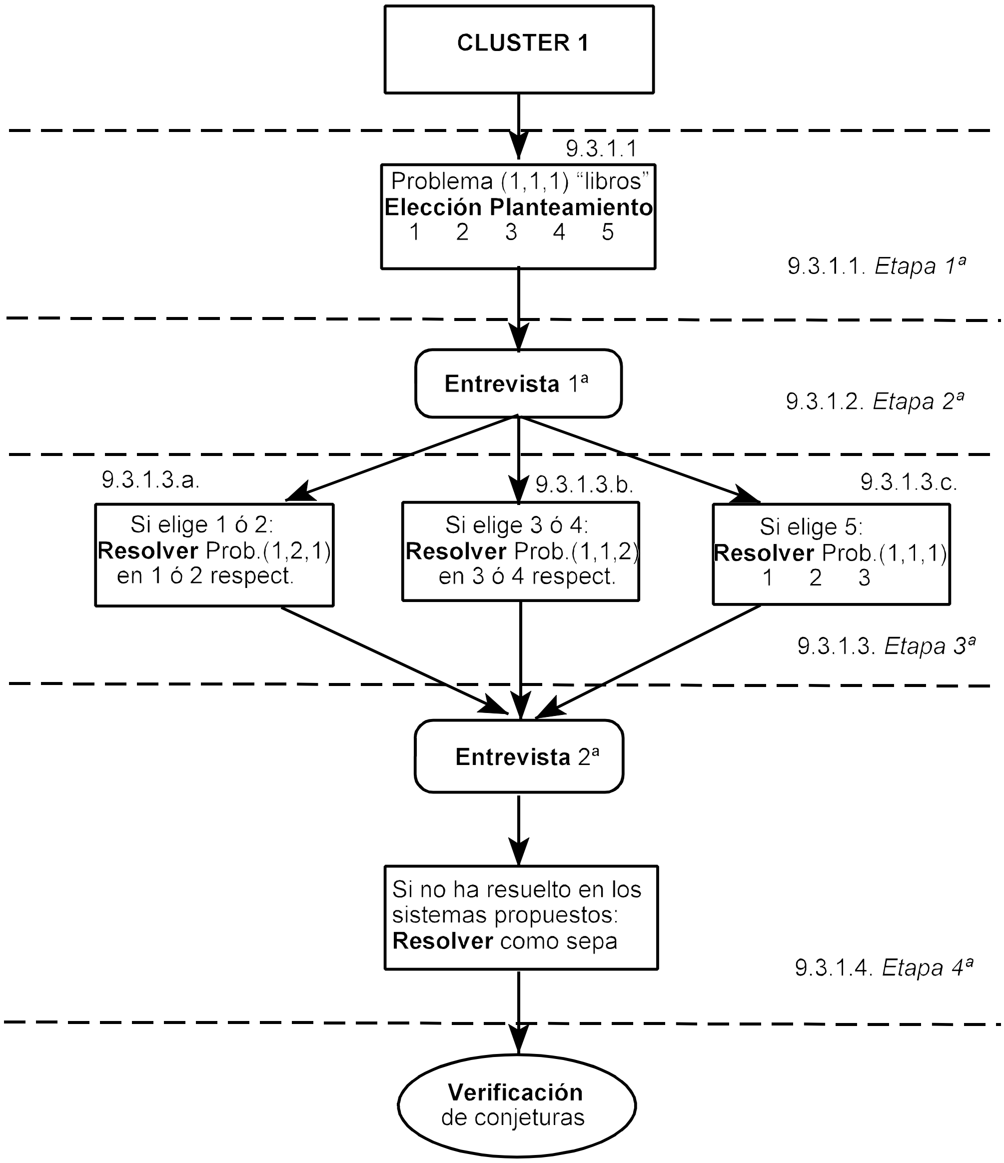
Pretendemos puntualizar si las dificultades expresadas por el sujeto obedecen al tipo de problema, es decir, a sus variables controladas.

A continuación se le pide que lo trate de resolver como mejor sepa y tomamos nota del sistema de representación con que lo aborda.

El proceso a seguir se reproduce en el siguiente esquema:

ESQUEMA 1

SEGUIMIENTO DE PROCESOS EN CLUSTER 1



9.4. Recogida de datos.

Hemos administrado los instrumentos elaborados a dos sujetos de cada cluster, un estudiante de Secundaria y otro de Universidad, es decir, ocho sujetos. Dado que en la mayoría de los cluster (salvo en cluster 4), la distribución de estudiantes de una y otra procedencia es similar, queremos comprobar si los resultados de la recogida de datos, en uno y otro caso, son parecidos o dispares.

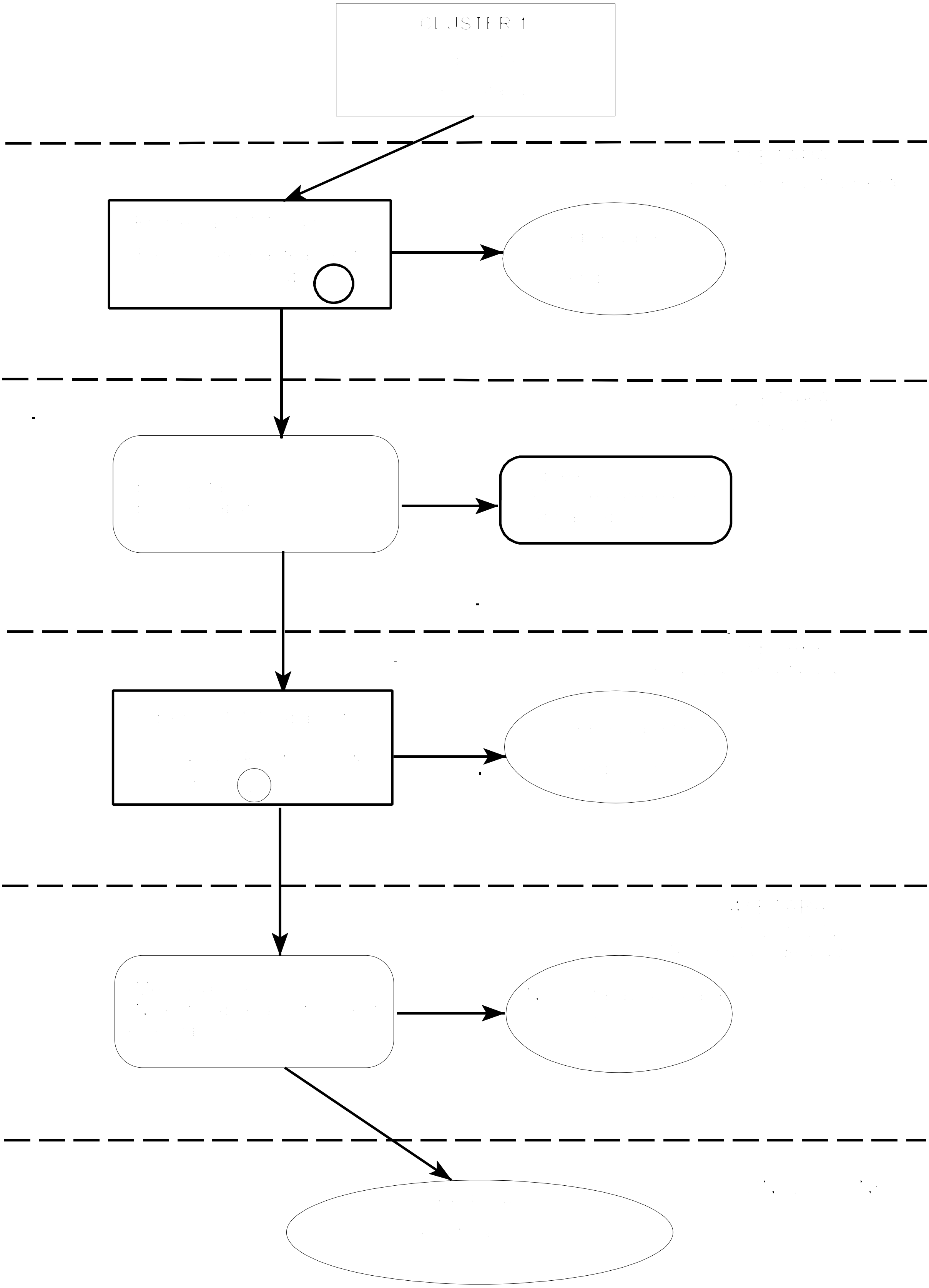
Para la recogida de datos hemos tomado notas de las actuaciones de cada sujeto y grabado en audio las entrevistas e intercambios orales que hemos tenido.

Todo el proceso se ha transcrito, junto con las anotaciones tomadas por el investigador, referentes a observaciones sobre la actitud del sujeto y detalle del desarrollo de las sesiones, se puede encontrar con todo detalle, en el Anexo.....

9.5. Análisis de datos.

A continuación se muestran los esquemas de cada uno de los sujetos sobre los que hemos efectuado el estudio de casos.

Vamos a identificar las distintas intervenciones con un tipo de recuadro para cada una, siguiendo la siguiente codificación:

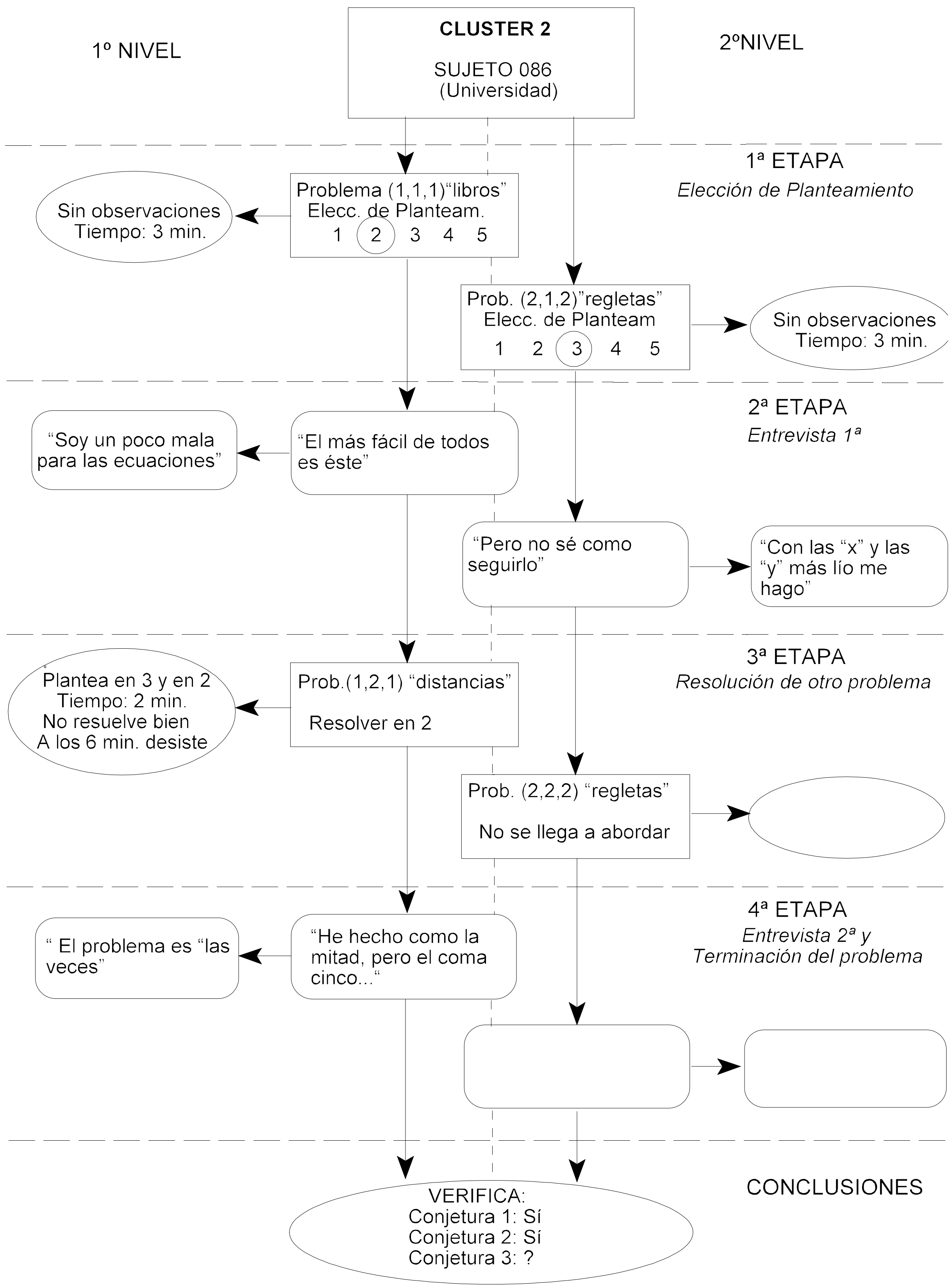

CLUSTER 1

Resultados para el Cluster 1.

Ambos sujetos cumplen las expectativas que habíamos conjeturado:

- La primera elección es la de un sistema de representación simbólico, porque “es más fácil”, “es más rápido” o “con las ecuaciones se pueden hacer muchos”. No obstante, se encuentran capacitados, por lo menos para intentarlo, siguiendo otro planteamiento de los propuestos.
- La segunda elección es distinta para cada uno de los sujetos. El estudiante de Secundaria escoge el 2 (Parte-Todo) y no entiende el 3 (Gráfico), mientras que el de Universidad elige el 3, pero indica que también podría haber elegido el 2. Es decir, que pueden seguir la resolución de un problema algebraico mediante sistemas de representación no simbólicos.
- El sistema de representación 1 (Ensayo-Error) es el más rechazado. No se entiende que haya “una serie de números de los que no nos habla el problema”, no les atrae la idea del tanteo, del probar y rectificar. En ambos casos sería el último sistema de representación a elegir.
- Ambos estudiantes muestran su rechazo hacia las matemáticas, “no se me dan bien”. La resolución del 2º problema es dificultosa para los dos. En un caso ha necesitado ayuda, que ha consistido en hacer el razonamiento que expresa el planteamiento en voz alta insistiendo en los datos del problema. Para un problema fácil, de variables (1,1,1), han necesitado 10 minutos el estudiante de Secundaria (incluído el tiempo de ayuda) y 5 minutos el de Universidad en ejecutar el planteamiento y obtener el resultado.

Vemos confirmada en todos sus aspectos la 1ª conjetura de las enunciadas al principio del Capítulo (apartado 9.1).



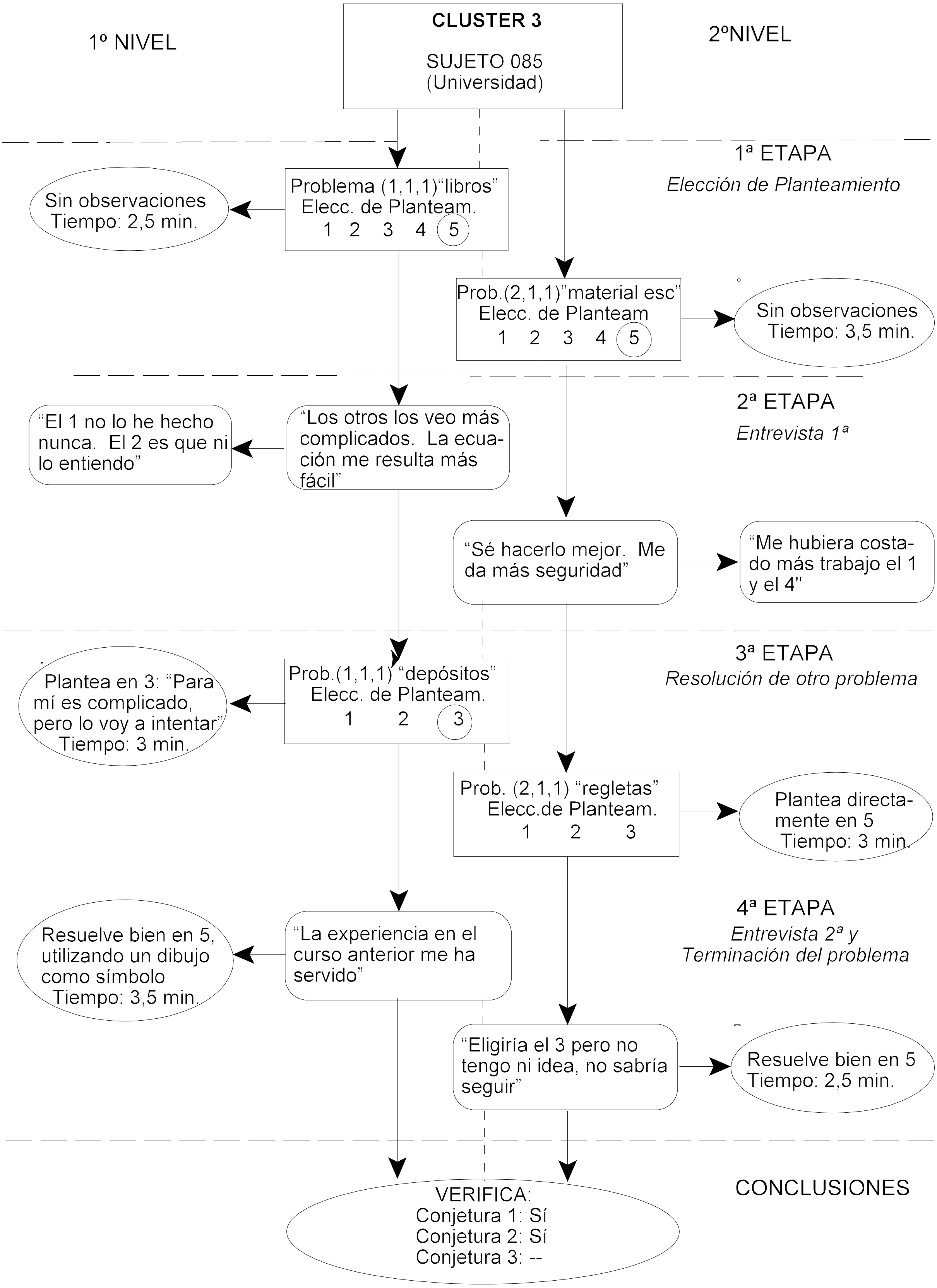
Resultados para el Cluster 2.

Los dos sujetos elegidos del cluster responden a las características que habíamos definido para el mismo (elección de sistemas de representación numéricos, sobre todo el 2, Parte-Todo), además de verificar otras conjeturas. En efecto:

- El caso del estudiante de Secundaria cumple todas las expectativas sobre un sujeto típico de este cluster: elige el planteamiento 2 expresado en un sistema de representación Parte-Todo en los dos casos, y lo hace con determinación y seguridad. El estudiante de Universidad elige para el 1º nivel el planteamiento 2 (parte-Todo), pero en el 2º nivel se decide por el planteamiento 3 (Gráfico), porque lo entiende, pero no sabe ejecutarlo y no resuelve el problema. Ambos sujetos muestran su rechazo explícito a los sistemas de representación con contenido simbólico, ya sea con gráfico o sin él, "lo de las "x" casi no es razonar, es hacerlo con una fórmula", "soy un poco mala para las ecuaciones", "con las "x" y las "y" más lío me hago", "paso de las "x"". Queda confirmada, pues, la 1ª conjetura (apartado 9.1).

- El problema de variables (1,2,1) y contexto "distancias", contiene en el texto, como dato un número "difícil": "2,5 veces", que forma parte de una comparación multiplicativa. Los dos estudiantes han mostrado su dificultad en relacionar correctamente los elementos del problema, y esta dificultad insalvable para ellos ha estado en la cifra decimal. Ambos han declarado que si hubiera sido "2 veces", "3 veces", "4 veces"..., hubieran resuelto el problema, incluso han explicado como hacerlo. Se confirman los resultados obtenidos por Lins (1992) al pasar de utilizar, como factores, números enteros a números decimales, aún siendo asequibles para un cálculo mental con cierto nivel de desarrollo (2,5 es la mitad de 5, la cuarta parte de 10). De esta forma, también confirmamos la conjetura 2ª (apartado 9.1).

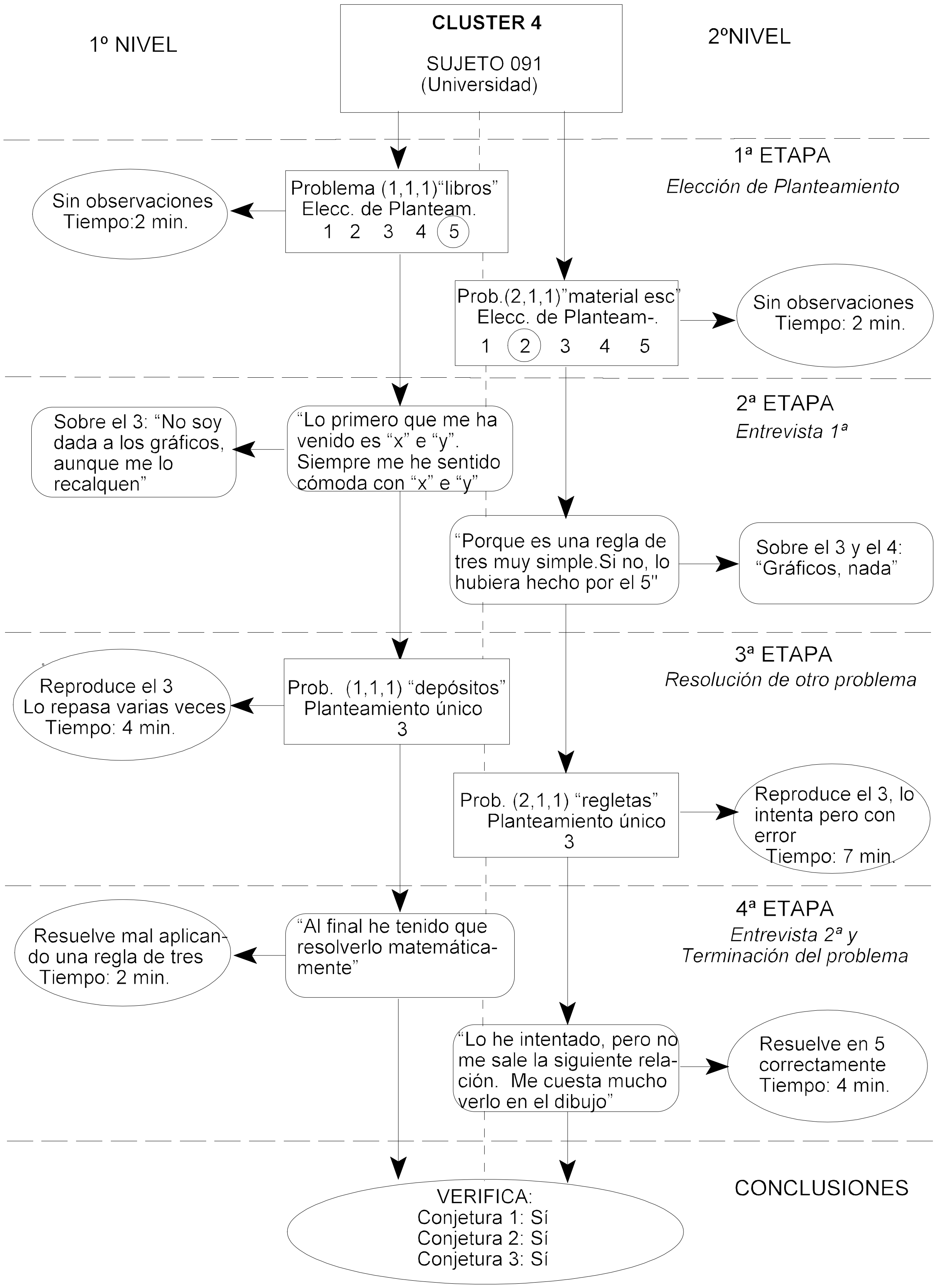
- El estudiante de Secundaria plantea un problema de este tipo con mayor acierto cuando han de emplearse dos relaciones para su resolución. El estudiante Universitario no llegó a abordar el 2º problema del 2º nivel, ya que en el 1º problema había manifestado que no sabía seguir, y el 2º problema presentaba mayores dificultades. Se confirma la 3ª conjetura (apartado 9.1) para uno de los sujetos y no hay constancia en el otro.



Resultados para el Cluster 3.

Los estudiantes representantes de este cluster (sistema de representación Simbólico y rechazo del Ensayo-Error) obedecen a las características y expectativas que se esperaba. En efecto:

- Ambos sujetos se decantan sin duda por el sistema de representación Simbólico (5), y lo ven como más natural, “lo veo lógico”, “los otros los veo más complicados”, “es lo que más se hace”. Conocen la semántica y la sintáctica del lenguaje algebraico, conmocen las reglas algebraicas, su significado y aplicación. En definitiva, se desenvuelven bien en un sistema de representación Simbólico. Confirmamos la 1ª conjetura descrita en el aprtado 9.1 de este Capítulo.
- Estos sujetos se sienten “incómodos” con razonamientos sin “reglas” ni símbolos. El planteamiento más rechazado es el 1 (Ensayo-Error), “no lo he hecho nunca”, “me hubiera costado más trabajo”, lo encuentran engorroso, en el que se pierde mucho tiempo y no se sabe si se va a obtener la solución correcta, “con el 2 no se resolvería bien”. No saben relacionar los datos de forma numérica.
- Las soluciones gráficas pueden ser utilizadas, pero fundamentalmente como apoyo o para ver mejor las relaciones simbólicas. Cuando una relación gráfica está muy clara y sencilla la pueden utilizar, pero cuando se ve un poco de complicación, estos estudiantes identifican sobre la gráfica las incógnitas mediante símbolos y establecen las relaciones correspondientes, “no sé sin poner las “x”, “eligiría el 3, pero no sabría seguir”, “en 3 hubiese sacado también incógnitas”.
- En los problemas más simples, de variables (1,1,1) pueden intentar resolverlos mediante planteamientos no simbólicos, pero cuando se complica la tarea, problemas de dos relaciones, entonces no se hace ningún intento que no sea establecer las relaciones simbólicas. Confirmamos, así, la 2ª conjetura (apartado 9.1).
- El planteamiento simbólico de los problemas de dos relaciones se hace, en todos los casos, adecuadamente, de forma rápida y sin dilación. La resolución en estos casos es correcta en todas sus fases. Aunque no hay confirmación expresa de la 3ª conjetura (apartado 9.1), porque ambos sujetos plantean bien tanto una como dos relaciones, lo que sí podemos asegurar es que no contradicen dicha conjetura.


CLUSTER 4
SUJETO 091
(Universidad)
1º NIVEL
2ºNIVEL
1ª ETAPA
Elección de Planteamiento
Problema (1,1,1)"libros"
Elecc. de Planteam.
1 2 3 4 5
Sin observaciones
Tiempo:2 min.
Prob.(2,1,1)"material esc"
Elecc. de Planteam-.
1 2 3 4 5
Sin observaciones
Tiempo: 2 min.
2ª ETAPA
Entrevista 1ª
"Lo primero que me ha venido es "x" e "y". Siempre me he sentido cómoda con "x" e "y"
Sobre el 3: "No soy dada a los gráficos, aunque me lo recalquen"
"Porque es una regla de tres muy simple.Si no, lo hubiera hecho por el 5"
Sobre el 3 y el 4: "Gráficos, nada"
3ª ETAPA
Resolución de otro problema
Prob. (1,1,1) "depósitos"
Planteamiento único
3
Reproduce el 3
Lo repasa varias veces
Tiempo: 4 min.
Prob. (2,1,1) "regletas"
Planteamiento único
3
Reproduce el 3, lo intenta pero con error
Tiempo: 7 min.
4ª ETAPA
Entrevista 2ª y
Terminación del problema
"Al final he tenido que resolverlo matemática-mente"
Resuelve mal aplican-do una regla de tres
Tiempo: 2 min.
"Lo he intentado, pero no me sale la siguiente rela-ción. Me cuesta mucho verlo en el dibujo"
Resuelve en 5 correctamente
Tiempo: 4 min.
CONCLUSIONES
VERIFICA:
Conjetura 1: Sí
Conjetura 2: Sí
Conjetura 3: Sí

Resultados para el Cluster 4.

Los sujetos de este cluster abordan los ítems/problemas del instrumento de evaluación prioritariamente mediante el sistemas de representación Simbólico (5) o Numéricos (1 ó 2). Pero los sistemas gráficos no aparecen practicamente en estos sujetos. Los estudiantes del cluster 4 que han formado parte de este estudio de casos reproducen y, por lo tanto, confirman este comportamiento, además de otras conjeturas. En efecto:

- El sujeto de Secundaria elige el planteamiento 5 (Simbólico) en los dos casos, y el universitario elige el 5 (Simbólico) para el 1º Nivel y el 2 (Parte-Todo) para el 2º Nivel, de entre los propuestos. El primer sujeto no encuentra dificultades en el 2 (Parte-Todo), “dificultades del 2, ninguna”. Los planteamientos gráficos (3 ó 4) no los tienen en cuenta, “no me hubiese salido eso”, “no soy dada a los gráficos”, “gráficos, nada”. El sujeto de Universidad insiste al final de la entrevista “me cuesta mucho trabajo verlo en el dibujo, pero en todo, no sólo en matemáticas”.
- Cuando se les fuerza a utilizar un planteamiento gráfico intentan resolverlo, pero no pueden establecer otras nuevas relaciones, “no me sale”, “no sé seguir” “no sé relacionarlos”, “al final he tenido que resolverlo matemáticamente”. Todo lo expuesto anteriormente nos confirma plenamente la 1ª conjetura (apartado 9.1).
- Los dos sujetos intentan resolver el problema (1,1,1) que se les había propuesto del modo gráfico en la 3ª Etapa, pero no saben continuar. El estudiante de Secundaria lo intenta mediante el sistema de representación Simbólico (5), plantea bien, pero no sabe seguir. El estudiante de Universidad aplica un sistema de representación Parte-Todo (2), aunque lo resuelve mal porque plantea mal la relación. Sin embargo, en el problema (2,1,1) de la misma Etapa, ambos estudiantes resuelven correctamente en el sistema de representación Simbólico (5). Esto nos confirma la influencia de las variables, en este caso la V_1 (nº de relaciones), en la elección de los sistemas de representación, es decir, queda confirmada la 2ª conjetura (apartado 9.1).
- Ambos sujetos plantean correctamente y con decisión el ítem/problema que hemos propuesto en la 3ª Etapa 2º Nivel, (2,1,1), mediante un sistema de representación Simbólico (5). El estudiante de Secundaria aclara “creo que con una regla de dos [sic] se puede hacer”, refiriéndose a un sistema de dos ecuaciones con

dos incógnitas. Para el universitario le ha sido “fácil” establecer un sistema de ecuaciones. Comprobamos que los problemas verbales en los que se necesitan dos relaciones para su resolución ofrecen mejores perspectivas para un planteamiento correcto, lo que puede llevar a una buena resolución. Por lo tanto, confirmamos la 3ª conjetura establecida en el apartado 9.1.

9.6. Estudio de un caso compilativo.

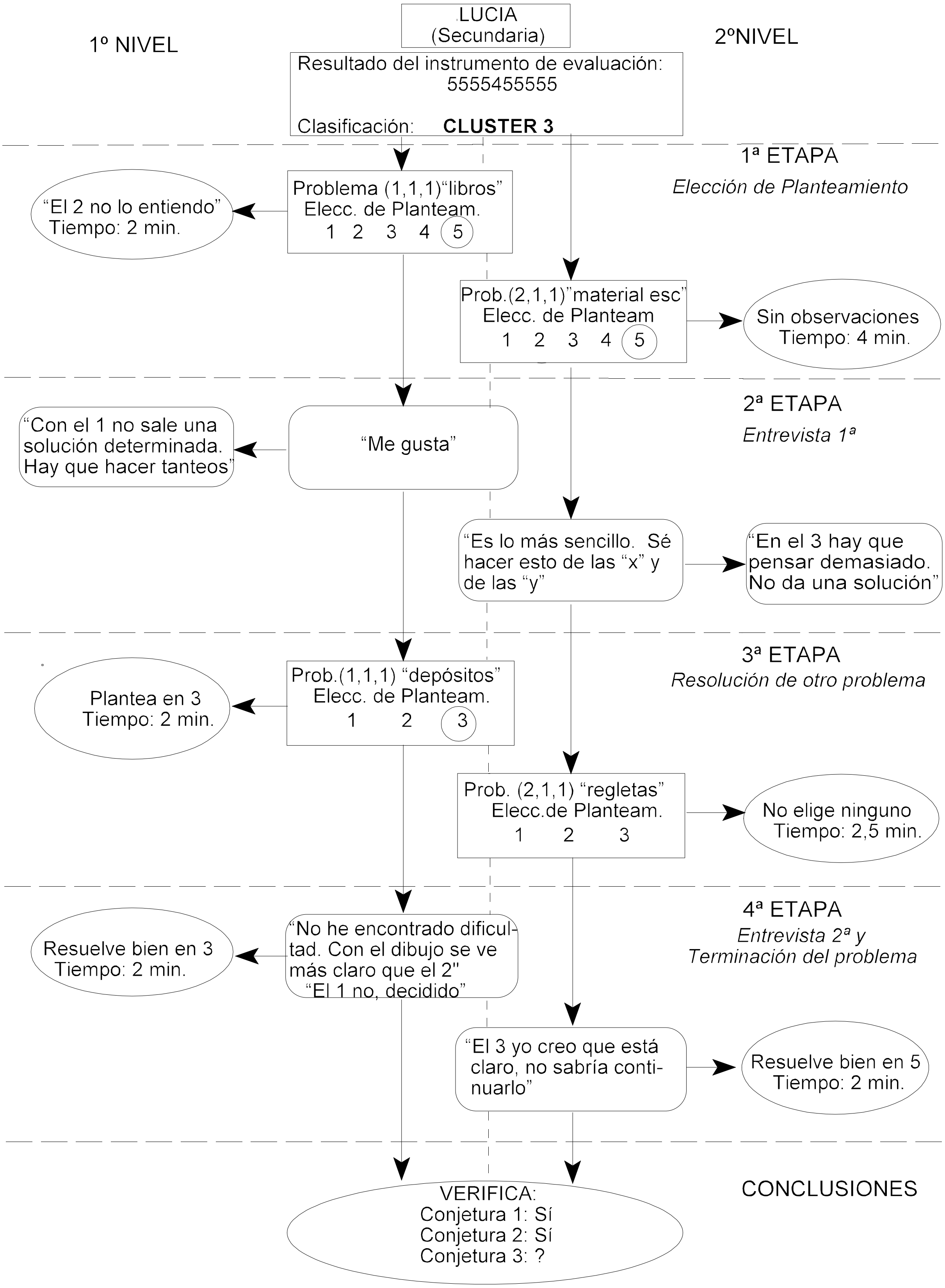
Lucía es estudiante que está comenzando el curso 2º de BUP (15 años), que se puede considerar equivalente al último curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Esto quiere decir que ha recibido instrucción algebraica suficiente como para resolver adecuadamente los ítems/problemas que conforman el instrumento de evaluación.

Le administramos la prueba en Enero de 1997, cuando ya conocemos las agrupaciones en cluster de los sujetos de la muestra, y las características con las que los hemos definido.

Los datos obtenidos en la aplicación del instrumento nos da como resultado la correccción de las resoluciones en todos los ítems/problemas. El conjunto de dígitos referidos a los sistemas de representación que se han utilizado para resolver los ítems/problemas es: 5555455555.

En estas condiciones hemos establecido la adscripción de Lucía a la tipología-cluster 3, es decir, de aquellos sujetos que utilizan un sistema Simbólico para resolver los problemas algebraicos del tipo a los propuestos en el instrumento. Entonces le hemos administrado el instrumento del estudio de casos que hemos elaborado para los sujetos del cluster 3 y que hemos descrito en el apartado 9.3.3. La recogida de datos, con la transcripción de la entrevista se recogen en el Anexo ....., junto con el resto de las entrevistas.

Los resultados de este caso se describen en el esquema siguiente:


.LUCIA
(Secundaria)
1º NIVEL
2ºNIVEL
Resultado del instrumento de evaluación:
5555455555
Clasificación: **CLUSTER 3**
1ª ETAPA
Elección de Planteamiento
Problema (1,1,1)“libros”
Elecc. de Planteam.
1 2 3 4 5
“El 2 no lo entiendo”
Tiempo: 2 min.
Prob.(2,1,1)”material esc”
Elecc. de Planteam
1 2 3 4 5
Sin observaciones
Tiempo: 4 min.
2ª ETAPA
Entrevista 1ª
“Me gusta”
“Con el 1 no sale una solución determinada. Hay que hacer tanteos”
“Es lo más sencillo. Sé hacer esto de las “x” y de las “y”
“En el 3 hay que pensar demasiado. No da una solución”
3ª ETAPA
Resolución de otro problema
Prob.(1,1,1) “depósitos”
Elecc. de Planteam.
1 2 3
Plantea en 3
Tiempo: 2 min.
Prob. (2,1,1) “regletas”
Elecc.de Planteam.
1 2 3
No elige ninguno
Tiempo: 2,5 min.
4ª ETAPA
Entrevista 2ª y Terminación del problema
“No he encontrado dificultad. Con el dibujo se ve más claro que el 2"
“El 1 no, decidido”
Resuelve bien en 3
Tiempo: 2 min.
“El 3 yo creo que está claro, no sabría continuarlo”
Resuelve bien en 5
Tiempo: 2 min.
CONCLUSIONES
VERIFICA:
Conjetura 1: Sí
Conjetura 2: Sí
Conjetura 3: ?

Resultados para el caso compilativo.

Los resultados contenidos en el esquema anterior obedecen al mismo patrón que los otros dos sujetos del cluster 3 del estudio de casos, lo que nos indica que hemos ubicado correctamente a esta estudiante.

Lucía cumple todas las expectativas que se espera de un sujeto con las características que hemos descrito para el cluster 3 y, por lo tanto, verifica las mismas conjeturas que hemos tratado de confirmar para los sujetos de este cluster.

Este caso nos ha permitido, a través del instrumento de evaluación construido, conocer las características algebraicas de esta joven, referidas a los sitemas de representación que utiliza cuando resuelve problemas verbales algebraicos elementales. De este forma el profesor de matemáticas, mediante la instrucción adecuada, podrá incidir en aquellos aspectos que ofrezcan al estudiante una visión más completa y rica de los conceptos, a través de los diversos sistemas de representación, para mejorar su conocimiento y capacidad, en este caso, algebraica.

9.6. Discusión de resultados.

Los hallazgos obtenidos confirman todas nuestras expectativas. Las conjeturas que habíamos establecido al inicio de este Capítulo se han visto ratificadas en el estudio de casos que hemos seguido. Es decir:

9.6.1. *Tipologías de resolutores*. Las características con las que habíamos definido cada cluster se confirman plenamente en todos los casos. Los sujetos objeto del estudio de casos, mantienen, en el desarrollo de la adminsitración del instrumento específico para cada caso de cluster, una actuación y conducta coherentes con las tendencias que habiamos pronosticado. Por lo tanto podemos confirmar que:

***Conjetura 1*: Las características que hemos definido para cada cluster se confirman en las actuaciones de los sujetos.** Por lo tanto, podemos afirmar que: **Existen tipologías de resolutores de problemas verbales algebraicos**

elementales, según el sistema de representación que utilizan para resolverlos o tratar de resolverlos, y éstas son:

*** sujetos que reconocen los distintos sistemas de representación que hemos descrito y pueden aplicarlos dependiendo fuertemente del tipo de problema algebraico, en cuanto a las variables que hemos definido**. Este conocimiento de la variedad de sistemas de representación no garantiza las resoluciones correctas de los problemas algebraicos.

*** sujetos que no han asimilado bien el lenguaje algebraico simbólico y abordan las tareas algebraicas mediante razonamientos numéricos estructurados, estableciendo relaciones artiméticas que equilibran los miembros a la izquierda y derecha del signo igual**. Debemos conjeturar que estos sujetos se ecuentran en una etapa pre-algebraica, superada la etapa aritmética, donde el contexto del ítem/problema es útil para resolverlo mediante un sistema de representación menos sofisticado. Estos sujetos no cambian facilmente a un sistema de representación más complejo, como el Simbólico, ya que no advierten la importancia de este sistema de representación en la resolución de problemas.

*** sujetos que utilizan casi exclusivamente el sistema de representación Simbólico alfabético, propio del lenguaje algebraico avanzado. Suelen rechazar el resto de los sistemas de representación, sobre todo el Ensayo-Error. En algunos casos puntuales pueden hacer uso de un gráfico o dibujo, orientativo de las relaciones entre datos e incógnitas**. Estos sujetos no suelen comprender el significado y las consecuencias de las operaciones realizadas tan sólo basándose en relaciones o transformaciones numéricas y no contemplan una etapa pre-algebraica, entre los aritmético y lo algebraico. Por otro lado, se confirman los resultados del apartado 7.1.8 en cuanto a resoluciones correctas cuando se aborda un problema algebraico mediante este sistema de representación.

*** sujetos que rechazan un sistema de representación que utilice un gráfico o dibujo, ya sea para establecer las relaciones derivadas del problema**

o para identificar datos e incógnitas sobre el dibujo. Pueden usar cualquiera de los otros sistemas de representación, tanto numéricos, preferentemente Parte-Todo, como el Simbólico, éste con mayor frecuencia, pero el razonamiento por medio de un soporte físico visual les supone gran esfuerzo, en algún caso insuperable. Estos sujetos pueden establecer nexos entre una etapa pre-algebraica y una algebraica sin necesidad de un apoyo a través de una representación gráfica.

Estos hallazgos confirman, por un lado, algunos aspectos y amplian, por otro, los obtenidos por Schmidt (1994) y Schmidt y Bednarz (1997).

9.6.2. *Influencia de las variables de los problemas en la elección del sistema de representación utilizado en su resolución.* El ítem/problema más simple que hemos propuesto en el instrumento de evaluación tiene como variables (1,1,1). Cuando hemos propuesto a los sujetos otro ítem/problema con alguna variable cambiada, hemos podido comprobar que aumentaba la dificultad para aplicar un planteamiento en el mismo sistema de representación que en el primero.

De forma análoga, resoluciones correctas forzadas en un determinado sistema de representación para un ítem/problema de variables (1,1,1), no han sido posibles cuando hemos modificado los valores de algunas de estas variables.

Esto nos lleva a confirmar la:

Conjetura 2: El valor, 1 ó 2, de las variables que hemos definido para los ítems/problemas influye en la elección del sistema de representación utilizado para abordarlo. Por regla general, el valor 2 de las variables dificulta la elección de sistemas de representación numéricos y gráficos e inclina hacia la utilización de planteamientos en el sistema de representación Simbólico, más generalistas y menos dependientes del contexto, que confirma los resultados estadísticos obtenidos en el apartado 7.1.7.

9.6.3. *Mejora de planteamientos correctos en ítems/problemas de dos relaciones, respecto a los de una relación*. En el apartado 7.1.5 hemos encontrado, estadísticamente, que los planteamientos en los ítems/problemas de dos relaciones,

V_1=2, obtienen mejores resultados que los de una relación, V_1=1. No ocurre así con la fase de ejecución de la tarea. En este caso queremos verificar si los datos estadísticos son confirmados en el estudio de casos. Para ello comprobamos los resultados en los ítems/problemas de variables (2,1,1) y (2,2,2) que hemos propuesto resolver, en la 3ªetapa, a los sujetos y hemos confirmado la:

Conjetura 3: se obtienen mejores resultado en los planteamientos de los ítems/problemas propuestos cuando para resolverlos son necesarias dos relaciones independientes. Para los sujetos del cluster 3 no podemos decir que hay confirmación de esta conjetura, pero tampoco lo contrario, por lo que queda indeterminada para estos casos.

En definitiva, estos resultados vienen a confirmar las conjeturas que habíamos establecido al comienzo de este Capítulo.

CAPÍTULO 10
RESUMEN DE RESULTADOS

10.1. Comentario general a los hallazgos.

Hemos administrado un instrumento de evaluación, basado en la resolución de problemas verbales, para establecer las competencias que, sobre Álgebra elemental, tienen sujetos de distintos niveles académicos. Esta etapa comprende desde recién terminado el aprendizaje en el tópico citado, en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, hasta los últimos cursos de estudios universitarios, próximos a terminar una Licenciatura en la Universidad.

Hemos analizado los resultados de 160 protocolos de actuación y se han obtenido una serie de hallazgos: unos relativas a los resultados propiamente dichos en cada una de las fases de la resolución de los problemas, otros relativos a los propios problemas, es decir, a su estructura dentro del instrumento de evaluación, debido a las variables de tareas que se han propuesto. Un tercer grupo de hallazgos se refieren al comportamiento de los sujetos a la hora de responder a las tareas algebraicas propuestas.

Por otra parte, hemos comprobado si se verifican las hipótesis que se recogen en el Capítulo 3 a través de diversos métodos de contraste, encontrando que se verifican las Hipótesis 1,2 y 3, pero en otro sentido al supuesto inicialmente. Para las Hipótesis 4,5 y 6, hemos visto confirmadas las intuiciones que habíamos expresado y se verifican tal como se predecían.

Algunas de las conclusiones a que hemos llegado suponen, en unos casos la confirmación de otros estudios de investigación, que hemos referido en el Capítulo 2, y la extensión de los resultados a una población escolar mayor. En otros casos, supone la obtención de datos significativos en un ambiente, todavía estudiantil, pero alejado en el tiempo y en la práctica de una enseñanza-aprendizaje del tópico que se investiga.

Por último, hemos llegado a conclusiones que son novedosas en el ámbito de investigación en educación matemática y que suponen, por una parte la propuesta de diseñar estrategias de instrucción y de evaluación, basadas en la intervención, para mejorar la competencia en la resolución de problemas verbales algebraicos y, por otra, la apertura de nuevas líneas de investigación y estudio que permitan avanzar en el conocimiento del complejo proceso del aprendizaje de las matemáticas, en general, y del Álgebra en particular.

Hemos cubierto, en nuestra opinión de forma satisfactoria, todos los objetivos que nos habíamos propuesto en el Capítulo 3 y algunas conclusiones han mejorado nuestras expectativas iniciales.

Incluso la verificación de las hipótesis en el caso de las Hipótesis 1, 2 y 3 han sido en sentido contrario a nuestros supuestos, produciendose las diferencias entre grupos de edad/nivel académico en el sentido opuesto a nuestra intuición inicial. Este cambio de sentido ha sido razonado por expertos externos, a posteriori, encontrando posibles explicaciones que comentaremos en su momento.

10.2. Conclusiones específicas.

Vamos a considerar dos tipos de conclusiones: las que se refieren a las obtenidas, con carácter general, de los datos recogidos en los estudios exploratorios de los resultados, tras aplicar el instrumento de evaluación diseñado a la muestra que hemos elegido, y las referidas a los resultados de los contrastes confirmatorios de las hipótesis que hemos enunciado en el Capítulo 3.

A continuación vamos a indicar las conclusiones más relevantes a las que hemos llegado, comentando brevemente el alcance de las mismas y sus relaciones, si las hay, con otros trabajos.

10.2.1. Conclusiones relativas a la resolución de problemas.

1) La mayoría de los estudiantes que han recibido instrucción alge-

braica elemental reconocen una tarea algebraica escolar y plantean correctamente las relaciones que están implícitas en la misma.

En efecto, ocho de los diez ítems/problemas del instrumento de evaluación han superado el 50% de planteamientos correctos de las relaciones algebraicas, llegando en seis casos a más del 65%. Los sujetos que han recibido instrucción algebraica tienen tendencia a buscar planteamientos algebraicos a los problemas verbales, aún en el caso de los aritméticos. Este hallazgo es similar al de Schmidt y Bednarz (1997), pero referido, en este caso, a un grupo de futuros profesores de primaria y secundaria.

2) Los problemas verbales algebraicos que incluyen datos decimales, como factores multiplicativos, en sus relaciones implícitas dificultan su resolución.

Este hecho viene a confirmar los resultados obtenidos por otros autores, tanto en el campo artimético (Luke, 1988), como algebraico (Lins, 1992). En nuestro caso, hemos realizado un estudio más extensivo que el referido, incluyendo la novedad de aplicar estos problemas a grupos de sujetos que no han estudiado ni practicado Álgebra en un período superior a los tres años. El resultado obtenido por Lins (1992) en un estudio de casos, se puede generalizar según nuestras conclusiones aún en el caso de que los estudiantes hayan terminado hace tiempo la enseñanza secundaria.

3) Los problemas verbales algebraicos que implican una relación independiente para su resolución (una "ecuación" lineal) son más difíciles de plantear, pero más fáciles de ejecutar. Sin embargo los problemas en los que son necesarias dos relaciongs independientes para su resolución (un "sistema" de dos ecuaciones lineales) son más fáciles de plantear, pero más difíciles de ejecutar.

En este caso, el texto de un problema del primer tipo (una ecuación, $V_1=1$) suele evitar exponer de forma inmediata la relación entre datos e incógnitas, que viene enmascarada en la historia del problema y en el orden en que se da la información. Realizar correctamente la secuencia de identificar la incógnita, ordenar los datos y establecer la relación, es tarea más dificultosa.

Una vez establecida la relación correcta, mediante una ecuación lineal u otro tipo de relación, resolver dicha ecuación o relación es más fácil, dependiendo también del sistema de representación que se haya utilizado. Para aquellos sujetos que emplean un sistema de representación Simbólico o Gráfico-Simbólico, la resolución de una ecuación lineal no suele suponerles dificultad, en la mayoría de los casos, pues han de poner en juego las reglas más elementales de operatoria dentro del Álgebra

Los problemas en los que han de utilizarse dos relaciones independientes para su resolución (un sistema de dos ecuaciones lineales, V_1=2), se suelen caracterizar porque los datos que dan lugar a cada una de las relaciones mantienen una cierta ordenación en el texto del problema. En efecto, los datos de cada una de las relaciones suelen aparecer en la información separados por signos ortográficos de puntuación (coma, punto seguido, punto y aparte, punto y coma), con lo que el sujeto puede encontrar cada una de ellas delimitada por estos signos.

Al tratarse de problemas elementales dirigidos a escolares, a través de la propia estructra del texto es fácil encontrar las relaciones implícitas y, por lo tanto, realizar un planteamiento correcto del problema. Sin embargo, la siguiente fase de ejecución es más dificultosa por el hecho de ser dos las relaciones que hay que transformar para obtener nuevas relaciones que lleven a la solución.

La facilidad en las transformaciones en la fase de ejecución dependerá del dominio del sistema de representación que se ha utilizado. Por ejemplo, en el caso del Simbólico, representará dominar un conjunto mayor y más complejo de reglas algebraicas que permitan transformar un sistema de dos ecuaciones lineales en una sola ecuación de la que, despejando la incógnita, se obtiene un resultado. Por lo tanto, implica mayores dificultades la fase de ejecución en estos problemas que en los de una relación o ecuación.

4) Los problemas verbales algebraicos que se pueden resolver mediante una relación independiente (una ecuación, V_1=1), en cuyo texto los datos vienen dados por números fáciles (números naturales inferiores a cien, o decenas, V_2=1) y que contienen un dibujo orientativo (que no contenga datos ni relaciones no explicitadas en el texto, V_3=1), son en los que se obtienen mayores resultados correctos.

Esta conclusión está relacionada con las anteriores y es una consecuencia lógica y esperada. Los problemas de variables de tarea (V_1=1, V_2=1, V_3=1) son los más elementales: se resuelven mediante un relación, que puede ser orientada en el sentido correcto por el dibujo del texto, y que las operaciones a realizar se facilitan cuando los datos son números naturales relativamente pequeños, o bien decenas que a la hora de las operaciones son como los anteriores.

10.2.2. Conclusiones al pensamiento algebraico.

La mayor dificultad para la elaboración de pensamiento algebraico, a través de la resolución de problemas, está en la capacidad analítica del sujeto, es decir, en saber relacionar lo conocido (datos del problema) con lo desconocido (incógnitas), como si fuera conocido, para llegar a obtener la solución.

Hemos utilizado la caracterización que del pensamiento algebraico propone Lins (1992), mediante tres cualidades: aritmeticidad, internalidad y analiticidad.

En la aplicación del instrumento de evaluación hemos confirmado que, en la mayoría de los problemas, es la falta de analiticidad la que produce las mayores dificultades para la resolución correcta del problema.

Los mayores porcentajes (por encima del 50%) en donde se ponen en juego competentemente las tres cualidades del pensamiento algebraico, se dan en los dos problemas de variables (1,1,1), uno en paralelo o réplica del otro. El ser éstos los problemas más elementales, concuerda con que el pensamiento algebraico que permite su resolución correcta es menos profundo y elaborado que el necesario para abordar una tarea algebraica más compleja.

10.2.3. Conclusiones relativas a los sistemas de representación.

1) Los sistemas de representación que se utilizan para abordar los problemas verbales algebraicos se pueden clasificar en cinco categorías diferenciadas: *Ensayo-Error*, *Parte-Todo*, *Gráfico*, *Gráfico-Simbólico* y *Simbólico*.

La descripción de cada uno de estos sistemas de representación se ha hecho en el Capítulo 1. Al comienzo del trabajo se utilizaron inicialmente cuatro de estos sistemas (Ensayo-Error, Parte-Todo, Gráfico, Simbólico), pero en el proceso de construcción del instrumento de evaluación, en las primeras pruebas piloto, se pudo detectar un sistema de representación (Gráfico-Simbólico) que tenía características propias y, por lo tanto, era necesario darle entidad y añadirlo al conjunto inicial.

En el análisis de los 160 protocolos hemos encontrado ejemplos de todas y de cada una de las categorías de sistemas de representación señalados. Además no hemos podido identificar ninguna otra categoría fuera de las citadas.

2) La utilización del sistema de representación Simbólico ofrece al estudiante perspectivas aceptables de acierto, en la resolución de los problemas verbales algebraicos, superiores a los otros sistemas de representación.

En efecto, el sistema de representación Simbólico predomina fuertemente sobre todos los demás sistemas a la hora de su utilización para abordar los problemas. La razón es obvia: responde al tipo de instrucción recibida por el estudiante en su vida escolar.

Además es el sistema de representación más económico y potente. Se puede utilizar en todos los problemas algebraicos y su dominio presupone el dominio del lenguaje algebraico, que es la puerta necesaria al lenguaje científico y a los estudios superiores en cualquier área relacionada con las ciencias o con las tecnologías.

3) Las variables que caracterizan las tareas de resolución de problemas verbales algebraicos condicionan parcialmente el sistema de representación utilizado.

La mayoría de los problemas verbales algebraicos se abordan, de forma predominante, mediante el sistema de representación Simbólico, por ser el que presenta mayor generalidad de aplicación.

No obstante, podemos destacar que determinadas variables de tarea facilitan o dificultan, según los estados que tomen, la utilización de uno u otro sistema de representación.

En los problemas en donde uno de los datos es un número decimal (números “difíciles”, V_2=2), que se relaciona como factor multiplicativo, y su texto contiene un dibujo relativo al mismo (o una presencia mental fuerte de una imagen visual, V_1=1) destaca, de forma significativa los sistemas de representación Gráficos, sobre todo el sistema Gráfico-Simbólico. Sin embargo, estos problemas no se abordan mediante el sistema de representación de Ensayo-Error.

Cuando un problema contiene en su texto un dibujo, en donde es fácil relacionar visualmente los datos e incógnitas, siendo éstos próximos a su valor real, se destaca la utilización del sistema de representación de Ensayo-Error.

10.2.4. Conclusiones relativas a las tipologías de sujetos.

1) Existen cuatro tipologías diferenciadas de sujetos resolutores de problemas verbales algebraicos, respecto a los sistemas de representación que utilizan para abordar los problemas.

En un estudio de clusters de sujetos hemos encontrado que es posible determinar cuatro agrupaciones o clusters, cuyos sujetos obedecen a unos comportamientos comunes, en cuanto a los sistemas de representación con que han abordado los problemas, que podemos caracterizar.

Se han hecho unas conjeturas sobre las características de estas tipologías de resolutores. A continuación hemos realizado un estudio clínico de casos (dos para cada tipología, un estudiante de Secundaria y un estudiante de Universidad) para confirmarlas. Se han elaborado los instrumentos adecuados para este estudio de casos y analizado los resultado de los protocolos.

En todos los casos se han confirmado las características con que se han definido las tipologías. Estas características son:

2) Existe una tipología de resolutores de problemas verbales algebraicos que se caracteriza por la *variedad en los sistemas de representación* elegidos para abordar los problemas.

En esta agrupación se dan todos los sistemas de representación, aunque el sistema mayoritario sea el Simbólico.

El sistema elegido depende tanto del problema como del sujeto. No existe un patrón definido, el sujeto conoce todos los sistemas de representación y elige el que considera más adecuado al problema.

Es un cluster en el que los estudiantes de Secundaria y los de Universidad se encuentran distribuidos en porcentajes del 40% - 60% respectivamente.

3) Existe una tipología de resolutores de problemas verbales alge-

braicos que se caracteriza por la *utilización preferente de sistemas de representación numéricos, Ensayo-Error y Parte-Todo,* para abordar los problemas.

Aunque conozcan la resolución de ecuaciones de forma algebraica, estos sujetos no tienen facilidad para la utilización del lenguaje algebraico simbólico. Entonces abordan los problemas de forma numérica. Aunque utilizan más el sistema de representación Parte-Todo, también son frecuentes los sistemas de Ensayo-Error. Se puede considerar que estos sujetos están en una fase pre-algebraica.

Este cluster es el menos numeroso (28 sujetos sobre 160), y los problemas que se dejan sin abordar, o que no tienen información suficiente para su clasificación en uno u otro sistema de representación, son muy frecuentes (44% del total para este cluster).

Los sujetos se reparten igualitariamente entre estudiantes de Secundaria y de Universidad (50% - 50%).

4) Existe una tipología de resolutores de problemas verbales algebraicos que se caracteriza por la *utilización del sistema Simbólico (a veces con apoyo gráfico)* para abordar los problemas.

Es el cluster más numeroso (62 sujetos sobre un total de 160) y, sin embargo, es el que menos problemas se han dejado sin abordar (9%).

En consonancia con la característica que lo define, es la agrupación que más utiliza el sistema de representación Gráfico-Simbólico.

En el otro extremo, no hay ningún sujeto que emplee el sistema Ensayo-Error. En las entrevistas a los estudiantes de este cluster, realizadas en el estudio de casos, muestran su rechazo a este sistema de representación, sobretodo, por la gran cantidad de tiempo que consume, en contraposición con la economía de tiempo y esfuerzo del sistema Simbólico.

Las conclusiones anteriores, en el sentido de que el sistema de representación Simbólico es con el que se consigue mayor éxito en la resolución de problemas, junto con el hecho de ser el cluster en el que menos tareas en blanco se han dejado, nos hacen presuponer que los sujetos adscritos a esta agrupación serán los que mejores resultados obtengan en este tipo de tareas algebraicas.

La distribución de sujetos entre estudiantes de Secundaria y Universidad está bastante equilibrada (47% - 53%).

5) Existe una tipología de resolutores de problemas verbales algebraicos que se caracteriza por la *nula utilización de los sistemas gráficos (Gráfico y Gráfico-Simbólico)* para abordar los problemas.

Es un cluster poco numeroso (28 sujetos sobre 160), formado en su mayoría por estudiantes de Secundaria, 71% frente al 29% de Universidad.

Los sistemas de representación más frecuentes son el Simbólico, que predomina, y Parte-Todo, que se alterna con el anterior. También se encuentra el sistema de Ensayo-Error. Pero los sujetos de este cluster rechazan las representaciones gráficas aunque sean bastante explícitas en el texto del problema.

Los estudiantes de esta agrupación, en su gran mayoría de Secundaria, abordan los problemas más simples mediante una representación que implica relaciones numéricas. Cuando el problema es más complejo, dejan de lado lo numérico y tratan de resolverlo mediante lo simbólico, pero no establecen, practicamente en ningun caso (sólo un 1,4% de los problemas), un puente entre ambos sistemas de representación a través de lo gráfico. Son sujetos que no tienen desarrollada una visión espacial intuitiva de las relaciones entre los objetos que se citan en el texto de los problemas verbales.

10.2.5. Conclusiones relativas a las hipótesis sobre diferencias entre grupos de edad/nivel académico.

Recordemos la enunciación de las tres hipótesis:

Hipótesis 1: "*Existen diferencias significativas en el planteamiento, en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes*".

Hipótesis 2: "*Existen diferencias significativas en la ejecución, en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes*".

Hipótesis 3: "*Existen diferencias significativas en el desempeño final, en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes*".

Respecto a las tres Hipótesis se han hecho estudios estadísticos de tipo comparativo-transversal para optar entre las hipótesis de nulidad o las hipótesis alternativas correspondientes:

La conclusión de los tres estudios confimatorios ha sido uniforme:

1) Tanto en la fase de *planteamiento*, como en la de *ejecución*, como en la de *desempeño final*, en la resolución de los problemas verbales algebraicos, hemos de rechazar la hipótesis nula y tomar en consideración la hipótesis alternativa, en el sentido de que existen diferencias, que consideramos estadística y sustantivamente como significativas, entre el grupo G_3 (universitarios con más de cinco años sin instrucción en Álgebra) y el grupo G_1 (estudiantes que terminan la Enseñanza Secundaria Obligatoria).

El grupo G_2 (universitarios sin instrucción en Álgebra en un período de 3 a 5 años) no expone diferencias significativas con los otros dos grupos.

Las diferencias significativas se dan entre el grupo G_1 y G_3, en el sentido de cambio a mejores resultados en cada una de las Hipótesis para el segundo, es decir:

$$\boxed{G_1 < G_3}$$

Por lo tanto, este estudio transversal comparando las tres variables referentes a las fases en la resolución de los problemas algebraicos respecto grupo de sujetos de edad/nivel académico, nos confirma en los resultados de los tres contrastes de hipótesis llevados a cabo y nos proporciona la siguiente conclusión:

2) La maduración parece ser una variable más relevante que el olvido en la resolución de problemas verbales algebricos. Se obtiene mejores resultados con sujetos maduros que con sujetos más jóvenes, aunque en éstos la instrucción y la práctica sean masivas y momentáneas.

La maduración influye positivamente en todas las fases de la resolución de los problemas verbales algebraicos, más que la influencia negativa que ejerce el olvido al distanciarse en el tiempo la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

Tomando todas las reservas derivadas de las amenazas a la validez de un estudio con un diseño de este tipo, este resultado ha sido sorpresivo para nosotros, pues suponíamos que un estudiante que está terminando la Enseñanza Secundaria Obligatoria tiene muy "fresca" toda la instrucción y prácticas algebraicas, y, por lo tanto, debe tener "reciente" la adquisición del pensamiento algebraico que le permite comprender las relaciones que plantea un problema verbal algebraico y operar con ellas.

Sin embargo, este hallazgo nos indica que la adquisición del pensamiento algebraico complejo necesitan también de una cierta maduración que dé sentido al nuevo lenguaje.

Una razón que podemos aportar para explicar este resultado es que la maduración en un sujeto, que continúa en el circuito del estudio como estudiante universitario, mejora su capacidad de manejo del lenguaje natural, el conocimiento de su estructura y la aplicación de las reglas sintácticas.

Teniendo en cuenta que estamos ante problemas verbales, con un texto, será lógico que el nivel de comprensión del texto mejore con la maduración, lo que lleva a tener más posibilidades de establecer correctamente las relaciones y poder resolver el problema.

Por otro lado, el Álgebra, en definitva, es un lenguaje con su semántica y su sintáctica. La maduración permite manejar con mayor significado el lenguaje algebraico y la aplicación de sus reglas.

10.2.6. Conclusiones relativas a las hipótesis sobre diferencias entre tipologías/clusters de resolutores.

Recordemos la enunciación de las tres hipótesis:

Hipótesis 4 : "*Existen diferencias significativas en el planteamiento, en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo de la tipología de resolutores*".

Hipótesis 5 : "*Existen diferencias significativas en la ejecución, en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo de la tipología de resolutores*".

Hipótesis 6 : "*Existen diferencias significativas en el desempeño final, en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo de la tipología de resolutores*".

Como en el apartado anterior, se han realizado estudios estadísticos comparativos-transversales para decidir entre las hipótesis de nulidad o las alternativas.

Hipótesis nula: **H_0 = estabilidad**

Hipótesis alternativa: **H_1 = mejoría significativa de resultados según la tipología**

Los resultados de los tres estudios confirmatorios han sido uniformes: rechazo de la hipótesis nula. Por lo tanto, una conclusión es que

1) Tanto para el *planteamiento*, como para la *ejecución*, como para el *desempeño final*, existen diferencias estadísticamente significativas entre los clusters o tipologías a las que se adscribe un sujeto, de acuerdo al sistema de representación elegido para abordar la resolución de los problemas verbales.

Las diferencias, en cuanto a buenos resultados, sigue la secuencia:

Cluster 3 > Cluster 4 > Cluster 1 > Cluster 2

La media de buenos resultados de los sujetos adscritos al cluster 3 llega a ser casi el doble del cluster 4, y superior al doble respecto a los otros dos cluster.

La característica de la tipología 3 es que el sistema de representación que predomina de forma abrumadora es el sistema Simbólico, acompañado a más distancia por el Gráfico-Simbólico. Entonces establecemos la siguiente conclusión:

2) La utilización de un sistema de representación Simbólico en la resolución de los problemas verbales algebraicos está asociada a mejores competencias resolutorias.

En efecto, los estudiantes que dominan la semántica y la sintaxis del lenguaje simbólico algebraico pueden resolver problemas algebraicos a través de un sistema de representación Simbólico que garantiza mejores resultados. Como ya hemos comentado en ocasiones anteriores, es un sisterma de representación económico y potente. Es el lenguaje que debe dominar un estudiante que pretenda continuar en niveles superiores de enseñanza que tengan algún contenido científico. Esta es una de las razones que hace de la enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico simbólico un objetivo de la educación matemática en la Secundaria.

Comparando la tipología de sujetos de los clusters, en la ordenación anterior, el segundo es el cluster 4, en el que predomina el uso del sistema de representación Simbólico, junto con el sistema Parte-Todo, pero existe una carencia clara de sistemas con apoyo gráfico (sistema de representación Gráfico y Gráfico-Simbólico). La mayoría de sujetos adscritos a este cluster son estudiantes de Secundaria.

Este resultado se puede interpretar como que estos sujetos conocen bien el lenguaje algebraico simbólico, pero para problemas más elementales todavía utilizan, con relativo éxito, el potencial aritmético adquitido en la Educación Primaria. Cierto tipo de aversión al uso de un apoyo gráfico para establecer relaciones algebraicas, puede ser indicativo de dificultades de comprensión de la semántica del lenguaje algebraico, lo que conduciría a una utilización no siempre significativa del simbolismo algebraico. Estas circunstancias llevan a unos resultados comparativamente peores que los obtendidos por los sujetos de la tipología 3.

En el caso del cluster 1, aunque lo sujetos que responden a esta tipología utilizan diversidad de sistemas de representación, todas las posibilidades, es una agrupación con gran cantidad de problemas "en blanco" (32%). El empleo de esta diversidad de sistemas puede suponer la falta de profundización en el dominio de uno o de una gama más restringida de ellos y, por lo tanto, la consecución de malos resultados en la resolución de los problemas verbales algebraicos.

El cluster 2 se caracteriza por la presencia destacada de los sistemas de representación que hemos llamado "numéricos", Ensayo-Error y Parte-Todo. Además el número de problemas "en blanco" es el más abundante (44% del total de problemas para este cluster). La frecuencia en la utilización de sistemas de representación más cerca de lo aritmético que de lo algebraico, es indicativo de que los estudiantes están todavía en una fase claramente pre-algebraica, por lo que la resolución de problemas verbales algebraicos más complejos signifique una mayor tasa de fracasos.

Estas circunstancias pueden explicarnos que los sujetos de la tiplogía 2 sean los que peores resultados ofrezcan en la resolución de problemas verbales algebraicos.

10.3. Implicaciones y repercusiones de los hallazgos.

Las conclusiones a las que hemos llegado y los hallazgos que se han obtenido nos permiten establecer algunas implicaciones de nuestro trabajo en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar y en su evaluación.

10.3.1. Implicaciones acerca de la evaluación.

1) La elaboración de problemas con distintos tipos de niveles y de respuestas correctas adecuados al tópico citado.

El proceso de búsqueda de tareas que respondieran a las características de una evaluación abierta, en cuanto a posibilitar la flexibilidad de respuestas por parte de los estudiantes, ha llevado a determinar cuestiones algebraicas que eliciten el pensamiento algebraico del sujeto.

2) La construcción de un instrumento válido y fiable que permite evaluar las competencias en Álgebra escolar mediante la resolución de problemas verbales.

El hecho de considerar diversas variables de tarea para los problemas verbales algebraicos, ha determinado un conjunto de ellos que ofrecen la validez y fiabilidad que, con las reservas ya indicadas en otro apartado, puede aplicarse a grupos de estudiantes heterogéneos que hayan finalizado la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

3) Los criterios de evaluación de problemas verbales algebraicos han de considerar la variedad de sistemas de representación y la complejidad de las respuestas con que se abordan los mismos.

La interpretación de tareas de resolución de problemas verbales algebraicos se aborda, por parte de los estudiantes, mediante una variedad de sistemas de representación y con diferentes niveles de complejidad en las respuestas. Los criterios de evaluación deben tener en cuenta la flexibilidad en las respuestas de los estudiantes, fijando más el procedimiento de resolución que la solución misma.

Las posibilidades de resolución de este tipo de tareas algebraicas mediante diversos sistemas de representación, debe ofrecer al sujeto libertad para elegir un sistema adecuado que le permita poner en juego el pensamiento algebraico o pre-algebraico necesario para tener éxito en la resolución de los problemas verbales algebraicos.

Para un estudiante de Enseñanza Secundaria Obligatoria, la opción por uno u otro sistema de representación no debe ser motivo de una evaluación negativa. Si la finalidad de una educación para todos es la formación de ciudadanos adaptados a una sociedad moderna, no se es mejor ciudadano por el sistema de representación elegido para expresar el conocimiento algebraico.

4) El diseño de actividades de evaluación, basadas en la intervención, para mejorar la capacidad de resolución de problemas verbales algebraicos en cada una de las tipolologías de resolutor.

Cada uno de los tipos de resolutores presenta unos modos estables de interpretar las tareas propuestas y manifiestan, en la mayoría de los casos, ciertas dificultades estructurales específicas para concluir las diversas variantes en las tareas. Determinar si en un aula predomina una tipología u otra de resolutores de problemas verbales algebraicos, debe inducir al enseñante a establecer estrategias de actuación e intervenciones instruccionales que permitan que todos los estudiantes consigan con éxito el conflictivo paso de la Aritmética al Álgebra. Esta actuación aplicada individualmente, dentro de una evaluación formativa contínua, permitirá la progresión del estudiante hacia un conocimiento algebraico más profundo.

10.3.2. Implicaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje.

1) Los problemas verbales algebraicos que incluyen datos decimales, como factores multiplicativos en sus relaciones implícitas, dificultan su resolución.

Esta implicación ya está recogida por otros autores (Lins, 1992), y debe conocerse por el profesor a fin de intervenir y establecer estrategias, que permitan la superación autónoma de los errores que suelen inducir problemas de este tipo.

2) Los problemas verbales algebraicos que se pueden resolver mediante una ecuación lineal, tienen mayor dificultad en su planteamiento que los que necesitan de dos ecuaciones. Sin embargo, la ejecución de los primeros es

más fácil que la de los segundos.

Este hallazgo puede repercutir en la enseñanza-aprendizaje de los problemas algebraicos, en el sentido de incidir más en la lectura comprensiva del texto de los problemas verbales más elementales, que permita traducir e integrar dicho texto en un planteamiento correcto.

La dificultad de estos problemas estriba en la comprensión de las relaciones implicadas en el enunciado, que se reduce a plantear una relación o una ecuación lineal. Ejecutar el plan proyectado y encontrar la solución de una relación o ecuación lineal ofrece menos dificultades, pues se ponen en juego una cantidad restringida y básica de reglas operatorias algebraicas.

3) Los sistemas de representación con que los estudiantes pueden abordar los problemas verbales algebraicos se pueden clasificar en cinco categorías: Ensayo-Error, Parte-Todo, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico.

El conocimiento, por parte del profesor de matemáticas, de la variedad de sistemas de representación de una tarea algebraica como la propuesta, debe implicar la enseñanza-aprendizaje de todos los sistemas de representación posibles a que pueda dar lugar una tarea, en este caso, algebraica. La aprehensión de un objeto matemático será más rica y completa cuanto más sistemas de representación de ese objeto se puedan poner en juego (Duval, 1993).

La complejidad de los conceptos que implica cada sistema de representación, debe servir para que el profesor planifique estrategias que permitan ir del más simple al más sofisticado, pasando por los intermedios. De esta forma se le va dando significado al lenguaje simbólico, en el paso de lo aritmético a lo algebraico, por medio de simbolizaciones más intuitivas y perceptivas como las gráfico-visuales.

4) La utilización del sistema de representación Simbólico ofrece mejores perspectivas de acierto, en la resolución de problemas verbales algebraicos, que el resto de los sistemas de representación.

El manejo del lenguaje simbólico algebraico, mediante un sistema de representación Simbólico, se manifiesta como una herramienta muy útil para la resolución de estos problemas, muy por encima de otros sistemas de representación como el Ensayo-Error, Parte-Todo o Gráfico.

Se confirma la importancia de enseñar Álgebra dentro de una perspectiva simbólica, aún con los riesgos que comporta la pérdida de significación debida a la creencia, frecuente entre los estudiantes, de que las matemáticas son, básicamente, una serie de reglas que hay que memorizar.

5) Las variables que caracterizan las tareas de resolución de problemas verbales algebraicos condicionan parcialmente el sistema de representación utilizado.

Generalmente, el profesor de matemáticas propone a sus almunos problemas algebraicos que responden a distintas variables controladas. En nuestro estudio hemos propuesto tres variables de tarea, que dan lugar a ocho problemas diferentes.

Hemos comprobado que, en algunos casos y para bastantes sujetos, la elección del sistema de representación depende de los valores que tomen estas variables. En estos casos, pues, valores concretos de las variables descritas facilitan la utilización de ciertos sistemas de representación para abordar los problemas verbales algebraicos.

De esta forma, el profesor puede proponer tareas con las variables adecuadas para poner en juego la facilidad, potencia y comodidad de usar un determinado sistema de representación que, incluso, mejore la comprensión y significación de las relaciones que implica un problema verbal algebraico.

6) Existen tipologías diferenciadas de resolutores que se mantienen estables transcurridos varios años desde la terminación de la Educación Secundaria.

La elección de uno o varios sistemas de representación para abordar los problemas verbales algebraicos obedece también, seguramente, a un tipo de enseñanza recibida, a una práctica escolar y, sobre todo, a una comprensión significativa de las relaciones que implican un problema. Cuando se aborda un problema de este tipo, la traducción e integración (interna al sujeto) del texto se hará de acuerdo a las condiciones anteriores.

Debe ser importante para el profesor descubrir la existencia de las diversas tipologías de alumnos en su aula de matemáticas-álgebra, que se producen por el sistema de representación que suelen utilizar los sujetos para abordar tareas algebraicas. Esto permitirá conocer mejor la capacidad algebraica del sujeto, su situación en cuanto al manejo del lenguaje algebraico y si está en condiciones de pasar de un pensamiento aritmético a desarrollar el pensamiento algebraico que le permita desenvolverse con éxito en Álgebra.

Cada tipo de resolutor manifiesta ciertas dificultades estructurales específicas para abordar las distintos variantes de tareas mediante los diversos sistemas de representación. Por esta razón, y en consonancia con lo anterior, los sujetos adscritos a algunas de las tipologías tienen dificultades en concluir algunos tipos de estas tareas.

El profesor, conociendo las características de cada una de las tipologías y que se muestran estables en el tiempo, puede diseñar actividades de evaluación basadas en la intervención, que mejoren la capacidad de resolución de problemas verbales algebraicos.

7) Los sujetos adscritos a determinadas tipologías obtienen mejores resultados en la resolución de los problemas verbales algebraicos.

Hemos comprobado que los sujetos que obedecen a una tipología que se caracteriza por la utilización preponderante del sistema de representación Simbólico, obtienen mejores resutados, con diferencia, en las tareas algebraicas que hemos propuesto. Esta tiplogía es la que resulta del cluster 3, descrito en el Capítulo 7, apartado 7.2.2.3 de este trabajo.

Podemos afirmar, siguiendo a Lins (1992), que los sujetos adscritos a este cluster 3 tienen consolidado, en mayor medida que los del resto de clusters, un pensamiento algebraico más complejo que les posibilita enmarcar la resolución de los problemas verbales algebraicos en un Campo Semántico Simbólico, propio del Álgebra.

El manejo del lenguaje simbólico algebraico, a través de un sistema de representación Simbólico, se manifiesta como una herramienta muy útil para la resolución de los problemas verbales algebraicos elementales, muy por encima de la utilización de otros sistemas de representación, como el Ensayo-Error, Parte-Todo o Gráfico.

8) La maduración del estudiante es más relevante que el olvido en la resolución de los problemas verbales algebraicos.

Los resultados en la resolución de los problema verbales algebraicos parecen que mejoran con el transcurso del tiempo, dentro del circuito estudiantil. La madurez de los estudiantes facilita la comprensión del texto de este tipo de problemas y, por lo tanto, la comprensión del significado de las relaciones algebraicas.

Ciertas rutinas basadas en la memorización y la repetición tienden a perderse en la memoria a largo plazo, permaneciendo las obtenidas a través de una enseñanza de tipo significativo.

En efecto, una enseñanza constructivista, que permita enfrentar al sujeto a situaciones problemáticas que le posibiliten generar una construcción de los conocimientos con significado para él, facilitará su fijación en la memoria a largo plazo y el acceso a la información almacenada a través de esta enseñanza.

Por lo tanto, parece más adecuado para la enseñanza-aprendizaje de los problemas verbales algebraicos una enseñanza más cercana a la corriente constructivista del conocimiento, que a la conductista.

10.4. Aperturas y nuevas propuestas.

El trabajo realizado abre otras vías de investigación, estableciendo diversos problemas a indagar y nuevas propuestas a establecer. Algunas aperturas que nos ofrece este estudio y que quedan para futuras tareas de investigación a abordar, las detallamos a continuación:

a) Realizar un estudio, réplica del presente trabajo, pero en sentido longitudinal del tiempo.

Esto implicaría hacer un seguimiento en el tiempo a una muestra suficientemente amplia de sujetos, desde la E.S.O. hasta un período posterior superior a cinco años, estableciendo tres etapas: al finalizar la E.S.O.; al cabo de tres años de esa fecha; y al cabo de cinco años de la primera etapa.

Para ello sería necesario hacer el seguimiento de aquellos estudiantes que abandonan las matemáticas y eligen estudios de “letras”.

b) Replicar las Hipótesis 1, 2 y 3, en el sentido de denotar cuál de las variables, la práctica masiva o la maduración, es más relevante. Réplica que se haría a través de un estudio comparativo-causal que permitiera excluir las posibles hipótesis explicativas, posibilitando de esta forma la consecución de una inferencia causal más contundente.

La conclusión de que *la maduración parece más relevante que el olvido* debe de hacerse con ciertas cautelas, debido al diseño que hemos adoptado en nuestro estudio.

La elección de una muestra más representativa, seleccionada aleatoriamente, y la realización de un estudio comparativo causal, producirán entonces resultados más concluyentes.

c) Replicar las Hipótesis 4, 5 y 6, en el sentido de confirmar, a través de estudios de tipo comparativo-causal o de estudios de casos múltiples, las relaciones obtenidas de la comparación de tipologías de resolutores, y establecer inferencias causales más firmes.

Las relaciones entre las tipologías o clusters de sujetos nos han dado la siguiente ordenación según la resolución correcta en las distintas fases de la resolución de los problemas verbales: $C_3 > C_4 > C_1 > C_2$

En nuestro estudio hemos establecido unas causas de esta ordenación, fruto de una inferencia que nos parece lógica de acuerdo a nuestra experiencia, pues no conocemos ningún trabajo que relacione el tipo de sistema de representación con el éxito en la resolución de los problemas verbales algebraicos. Creemos, por lo tanto, que debe darse un estudio confirmatorio de nuestras conjeturas.

d) Abordar el trabajo realizado en su conjunto, pero aplicado a otro tópico de las matemáticas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Este proceso llevaría a construir instrumentos de evaluación de competencias, mediante la resolución de problemas verbales, de otros tópicos de la E.S.O., como las proporciones, las funciones u otros.

La aplicación de los instrumentos diseñados ofrecerían datos con los que llevar a cabo estudios similares a los producidos en este trabajo y a obtener conclusiones acerca de la enseñanza-aprendizaje y evaluación de los tópicos elegidos.

REFERENCIAS

ABRAIRA, C.F. (1993): *Efectos de la Evaluación formativa en Alumnos de Matemáticas de E.U. de Profesorado de E.G.B.* Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación.

ALONSO y otros (1987). *Aportaciones al debate sobre las Matemáticas de los 90. Simposio de Valencia 1987*. Valencia: Mestral.

ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J.; GIMENEZ, J. y TORRA, M. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Grao.

ANDERSON, J.R.; REDER, L.M. & SIMON, H.A. (1997): Situative versus Cognitive Perspectives: Form versus Substance. *Educational Research*, 26, 1, 18-21.

ARCAVI, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 14(3), 24-35.

ARCAVI, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. *Journal of Mathematical Behavior*. 14, 145-162.

ARCAVI, A.; FRIEDLANDER, A. & HERSHKOWITZ, R. (1990): L'Algébre avant la lettre. *Petit x*, 24, 61-71.

ARZARELLO, F.; BAZZINI, L. & CHIAPPINI, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory ans practice. *Proceeding 19th PME* (pp. 1, 119-134). Recife, Brasil.

AZARQUIEL, (1991): *Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.

BAILS, B. (1779): *Elementos de Matemática*. Madrid: Joachin Ibarra.

BAUERSFELD, H. & SKOWRONEK, H. (1976). Research related to the mathematical learning process. En H. Athen &H. Kunle (Eds.) *Proceeding of the 3th I.C.M.E* (pp. 231-245). Karlsruhe, RFA*:* Universität Karlsruhe, Z.D.M.

BEDNARZ, N.; RADFORD, L. & JANVIER, B. (1995): Algebra as a problem solving tool: One unknown or several unknowns? *Proceeding of 19th PME* (pp. 3, 160-167). Recife, Brasil.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C. & LEE, L. (Eds.) (1996): *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1996): Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran & Lee L. (Eds.) (pp. 115-136).

BELL, A.; O'BRIEN, D.; SHIU, C. (1980): Designing teaching in the light of research on understanding. *Proceedings of 4th PME* (pp. 119-125). Berkeley, CA.

BELL, A., BURKHARDT, H., SWAM, M. (1992). Balanced Assessment of Mathematical Performance. En R. Lesh & S. Lamon (Eds.) (pp. 119-144).

BLOEDY-VINNER, H. (1996):The analgebraical mode of thinking and other errors in word problem solving. *Proceeding of 20th PME* (pp. 2,105-112). Valencia.

BOCHNER, S. (1991): *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*. Madrid: Alianza Editorial.

BOOTH, L.R. (1983). A diagnostic teaching programme in elementary algebra: results and implication. *Proceeding 7th PME* (pp. 307-312). Rehovot, Israel.

BROMLEY, D.B. (1986). *The case-study method in psychology and relate disciplines*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.

CARRETERO, R.; CORIAT, M. & NIETO, P. (1995): Secuenciación, Organización de Contenidos y Actividades de Aula. En Junta de Andalucía (Ed.), *Materiales Curriculares. Educación Secundaria Obligatoria*, Vol. 17. Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.

CASTRO, ENC. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada: Comares.

CASTRO, ENC. y CASTRO, ENR. (1997): Representaciones y Modelización. En L. Rico

(Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Capítulo IV. Barcelona: Horsori.

CASTRO, ENR. (1991): *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

CASTRO, ENR. (1995). *Niveles de compresión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.

CERDAN, F. (1993): El Diseño de un Instrumento de Medida para Estudiar la Puesta de un Problema en Ecuaciones. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) (pp. 1-9).

CHAIKLIN, S. (1989): Cognitive studies of algebra problem solving and learning. En S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp.93-114). Reston, VA: NCTM-LEA.

CHAPPELL, M.F. (1997): Preparing Students to Enter the Gate. *Teaching Children Mathematics*, 3, 6, 266-267.

CHARLES, R.; LESTER, F. & O´DAFFER PH. (1987): *How to Evaluate Progress in Problem Solving?*. Reston, VA.: NCTM.

CHEVALARD, Y. (1990): La passage de L'Arithmétique à L'Algèbre dans L'enseignement des mathématiques au college. *Petit x*, 23, 5-38.

CLARKE, D. (1988). *Asessment Alternatives in Mathematics*. Canberra, Australia: Curriculum Corporation.

CLARKE, D. (1996): Assessment. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 327-370). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

COADY, C. & PEGG, J. (1996): Levels of formal reasoning in school algebra. *Proceeding of 20th PME* (pp. 2, 233-240). Valencia.

COCKROFT, W.H. y OTROS. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft*. Madrid:Servicio de Publicaciones del MEC.

COHEN, J. (1977): *Satistical power analysis for the behavioral sciences*. New York: Academic Press.

COHEN, L. y MANION, L. (1989): *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

COLÁS, G. y BUENDÍA, L. (1992): *Investigación Educativa*. Sevilla: Alfar.

COLLIS, K. (1975): *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

CONSEJERIA DE EDUCACIÓN DE LA JUNTA DE ANDALUCÍA (1992): *Decreto 106/1992, de 9 de Junio, por el que establecen las Enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía* . BOJA núm. 56 de 20 de Junio de 1992, pp. 3962-3966.

CORIAT, M.; MARÍN, A.; PALOMINO,G. y RICO, L. (Coord.) (1994). *Educación Secundaria Obligatoria. 3º. Matemáticas*. Sevilla: Algaida.

CORIAT, M.; MARÍN, A.; PALOMINO,G. y RICO, L. (Coord.). (1994). *Educación Secundaria Obligatoria. 4º. Matemáticas Opción A*. Sevilla: Algaida.

CORIAT, M.; MARÍN, A.; PALOMINO,G. y RICO, L. (Coord.). (1994). *Educación Secundaria Obligatoria. 4º. Matemáticas Opción B.* Sevilla: Algaida.

DANCING, J. & SOSA, E. (1993): *A Companion to Epistemology*. Oxford: Basil Blackwell.

DA ROCHA, J.T. (1995): A case study of algebraic scaffolding: From balance scale to algebraic notation. *Proceeding of 19th PME* (pp. 2, 66-73). Recife, Brasil.

DA ROCHA , J.T. (1996): Clinical analysis of difficulties in algebraic problmes solving among Brazilian students: Principal aspects and didactic issues. *Proceeding of 20th PME* (pp. 2, 257-264). Valencia.

DIXON, W.J. (1992): *BMDP.Statistical Software Manual*. Berkeley, CA: University of California Press.

DUVAL, R. (1993a): Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 5, 37-65.

DUVAL, R. (1993b): Semiosis et Noesis. *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

EDGAR, L. & EDWARDS, JR. (Eds.) (1990): *Algebra for Everyone*. Reston, VA: NCTM.

EVERITT, B.S. (1993): *Cluster analysis*. Sevenoaks: E. Arnold.

FERNÁNDEZ, F. (1996): El paso de la Aritmética al Álgebra: una propuesta didáctica. *Aula de Innovación Educativa*, 50, 17-21.

FERNÁNDEZ, F. (en prensa): *De la aritmética al álgebra: aspectos históricos de la evolución del lenguaje simbólico. Implicaciones para la enseñanza*.

FERNÁNDEZ, F.; CASTRO, ENR.; SEGOVIA, I. y RICO, L. (1996): El lenguaje matemático. En A. Romero (Ed.), *Lenguajes y Enseñanza* (pp. 317-344). Granada: Fundación Educación y Futuro.

FERNÁNDEZ, F., CASTRO ENR. y RICO, L. (en prensa): *La práctica de la evaluación aplicada al área de matemáticas*.

FERNÁNDEZ-CANO, A. (1990a): *Aproximación al desarrollo del cálculo como un programa de investigación lakatoriano*. (Tesis predoctoral). Granada: Universidad de Granada.

FERNÁNDEZ-CANO, A. (1990b): Hacia un programa de investigación de la enseñanza-aprendizaje de la Aritmética elemental. *Revista de Investigación Educativa*, 16, 129-137.

FERNÁNDEZ-CANO, A. (1995 a): *Métodos para Evaluar la Investigación en Psicopedagogía*. Madrid: Síntesis.

FERNÁNDEZ-CANO, A. (1995 b): Metodología de la Investigación en Educación Matemática. En L. Berenguer, P. Flores y J.M. Sánchez (Eds.), *Investigación en el Aula de Matemáticas* (pp. 47-66). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada - S.A.E.M. THALES.

FERRATER, J. (1981): *Diccionario de filosofía*. Madrid: Alianza Editorial.

FIEDLANDER, A.; HERSHKOWITZ, R. & ARCAVI, A. (1989): Incipient “algebraic” thinking in pre-algebra students. *Proceeding of 13th PME* (pp. 283-290). París.

FILLOY, E. (1993a): “El Libro de los Cuadrados” de Leonardo de Pisa. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) (pp. 11-30).

FILLOY, E. (1993b): Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 11 (2), 160-166.

FILLOY, E. y ROJANO, T. (1984): La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L’Educazione Matematica*. Anno V, 3, 278-306.

FILLOY. E. y ROJANO, T. (1989): Solving equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9, 2, 19-25.

FILLOY, E. y RUBIO, G. (1992). *Familia de problemas verbales aritmético-algebraicos y las tensiones entre los diferentes usos de las expresiones algebraicas*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

FILLOY, E., PUIG, L. Y ROJANO, T. (Eds.) (1993): *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las Ideas Algebraicas. Valencia, 1991*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV

FILLOY, E. & SUTHERLAND, R. (1996): Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. En A. Bishop, K.Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 139-160). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

FONG, H.K. & CHONG, T.H. (1995): Solving algebraic word problems. *Mathematics Teachers*, 151, 34-35.

FORTUNY, J.M.; GIMÉNEZ, J. y ALSINA, C. (1994): Integrated Assessmente on Mathematics 12-16. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 401-412.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

FRIEDMAN, H. (1982): Simplified determinations of statistical power: Magnitud of effect and research sample sizes. *Educational and Psychological Measurement*, 42, 521-526.

GEROFSKY, S. (1996): A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 16, 2, 36-45.

GIMÉNEZ, J. (1997a) (Ed.). *Evaluación en Matemáticas. Una Integración de Perspectivas.* Madrid: Síntesis.

GIMÉNEZ, J.; RICO, L.; GIL, F.; FERNÁNDEZ, F.; CASTRO, ENC.; CASTRO, ENR.;DEL OLMO, A.; MORENO, F. y SEGOVIA, I. (1997). ¿Por Qué y Para Qué Evaluar en Matemáticas?. En J. Giménez (Ed.), *Evaluación en Matemáticas. Una* *integración de Perspectivas* (pp. 15-38). Madrid: Síntesis.

GOLDIN, G. (1987): Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed.) (pp. 125-145).

GOLDING, G. (1992): Toward an Assessment Framework for School Mathematics. En R. Lesh & S. Lamon (Eds.) (pp. 63-88).

GOLDIN, G. (1993): The IGPME Working Group on Representations. *Proceeding of 17th PME* (pp.117-119). Tsukuba, Japón.

GONZÁLEZ, F. y VILLANOVA, J. (1996): *Curso de Matemáticas E.S.O. 3º,4º.Volumen I.* Barcelona: Edunsa.

GONZÁLEZ, F. y VILLANOVA, J. (1996): *Curso de Matemáticas E.S.O. 3º,4º.Volumen II*. Barcelona: Edunsa.

GONZÁLEZ, J.L. (1995): *El campo conceptual de los números naturales relativos*.Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

GREENO, J.G. (1991): Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 3, 170-218.

GRUGNETTI, L. (1993). *L'Evaluation Centrée sur L'Elève. Actes de la 45e Recontre de la CIEAEM*. Cagliari: CIEAEM.

GUNTTENPLAN, S. (1994): *A Companion to the Philosophy of Mind*. Oxford: Blackwell.

HART, K. (Ed.) (1981): *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: John Murray

HEALY, L. & HOYLES, C. (1996): Seeing, doing and expressing: An evaluation of task sequences for supporting algebraic thinking. *Proceeding of 20th PME* (pp. 3, 67-76). Valencia.

HEDGES, L.V. (1981): Distribution theory for Gass's estimator of effect size and related estimators*. Journal of Educational Statistics*, 6, 137-140.

HIEBERT, J. & CARPENTER, T. (1992): Learning and teaching with understanding. En D.A. Grows (Ed.) *Hanbook of Research on Mathematics Teaching an Learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

HITT, F. (1996): Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica: Investigaciones en Matemática Educativa. XX Aniversario Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN* (pp.245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

HOWARD, R.W. (1987): *Concepts and schemata: an introduction*. Chatham, G.B.: Mackays of Chatham Ltd.

HOWSON, G.; KEITEL, C. & KILPATRICK, J. (1981). *Curriculum Development in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

HUNTER, J.L.; SCHMIDT, F.L. & JACKSON, G.B. (1982)*: Metaanalysis: Cumulating finding across studies*. Beverly Hills, CA: Sage.

IZARD, J. (1991): Assessment Practices on Students. *Pre-Proceedings ICMI Assessment in Mathematics Education and its Effects*. Calonge: Comité Organizador.

JANVIER, C. (Ed.) (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, New Jersey: LEA.

JANVIER, C. (1996): Modeling and the Initiation into Algebra. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) (pp. 225-236).

KAPUT, J. (1987): Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.) (pp. 19-26).

KAPUT, J. (1989): Linking Representation in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner & C. Kieran (Eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: LEA-NCTM.

KAPUT, J. (1992): Technology and Mathematics Education. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Mac Millan.

KIERAN, C. (1985): Use of substitution procedure in learning algebraic equation-solving. *Proceedings 7th PME-NA* (pp. 145-152). Columbus, Ohio: Ohio State University.

KIERAN, C. (1988): Two differents approaches among algebra learners. En Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K-12. 1988 Yearbook* (pp.91-96). Reston, VA: NCTM.

KIERAN, C. (1992): The learning and teaching of school algebra. En D.A. Grows (Ed.) *Hanbook of Research on Mathematics Teaching an Learning* (pp.390-419). New York: MacMillan Publishing Company.

KIERAN, C. y FILLOY, E. (1989): El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 3, 229-240.

KLEIN, J. (1968): *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Cambridge: M.I.T. Press.

KLINE, M. (1978): *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI.

KÜCHEMANN, D. (1978): Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7 (4), 23-26.

KÜCHEMANN, D. (1981): Algebra. En Hart, K. (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp.102-119). London: John Murray.

KULM, G. (1990): *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics. Washington*: AAAS Press.

KULM, G. (1994): *Mathematics Assessment. What Works in the Classroom*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

LAKATOS, I. (1983): *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Universidad.

LAMON, S.J &; LESH, R. (1992): Interpreting Responses to Problems with Several Lavels and Types of Correct Answers. En R. Lesh & S.J. Lamon (Eds.) (pp. 319-342).

LEONARDO DE PISA, (1973): *El libro de los números cuadrados.* Reedición del original con introducción de Paul Ver Eecke. Buenos Aires: Eudeba..

LESH, R.; POST, T. & BEHR, M. (1987a): Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. En C. Javier (Ed.) (pp. 33-40).

LESH, R.; POST, T. & BEHR, M. (1987b): Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. En I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in school mathematics education around the world* (pp. 647-680).Reston,VA: NCTM.

LESH, R. & LAMON, S.J. (Eds.) (1992): *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*. Washingyon, DC: AAAS Press.

LESH, R.; LAMON, S.J.; LESTER, F. & BEHR, M. (1992): Future Directions for Mathematics Assessment. En R. Lesh & S.J. Lamon (Eds.) (pp. 379-426).

LINCHEVSKI, L. & HERSCOVICS, N. (1996): Crossing the cognitive gap between Arithmetic and Algebra: operating on the unknow in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65.

LINS, R.C. (1992): *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Tesis doctoral. Nottingham: Nottingham University.

LINS, R.C. (1994). Eliciting the meaning for algebra produced by students: knowledge, justification and Semantic Fields. *Proceeding of 18th PME* (pp. 3, 184-191). Lisboa.

LINS, R.C. (1995). “Algebraic” word problems and the production of meaning: an interpretation based on a Theoretical Model of Semantic Fields. *Proceeding of 19th PME* (p. 1, 209). Recife, Brasil.

LODHOLZ, R.D. (1990): The Transition from Arithmetic to Algebra. En Edgar, L. & Edwards, JR. (Eds.), *Algebra for Everyone* (pp. 24-33). Reston, VA: NCTM.

LOVE, E. (1986): What is algebra? *Mathematics Teaching*. 117, 48-50.

LUKE, C. (1988): The repeat addition model of multiplication and children’s performance on mathematical word problems. *The Journal of Mahematical Behavior*, 7, 217-226.

MACNAB, D.S. & CUMMINE, J.A. (1992): *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16.Un enfoque centrado en la dificultad*. Madrid: Visor.

MARTÍNEZ, R. (1995): Metodología de Encuestas. En M.T. Anguera (Ed.), *Métodos de Investigación en Psicología*. *Parte IV* (pp. 385-509). Madrid: Síntesis.

MAYER, R.E. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

MEAVILLA, V. (1993): Una Aproximación al “Libro Primero de Arithmética Algebratica” de Marco Aurel. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) (pp. 65-95).

MEAVILLA, V. (1995): Estudio sobre el comportamiento visual en Álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (1), 97-105.

MERRIAM, S. (1988): *Case study research in Education. A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: M.E.C.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (1990): *Ley Orgánica 1/1990 de 3 de Octubre de Ordenación General del Sistema Educativo*. B.O.E. nº 238, de 4 de Octubre de 1990, pp. 28297-28924.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (1991): *Real Decreto 1345/1991 de 6 de Septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. B.O.E. nº 220, de 13 Septiembre 1991, pp. 30228-30231.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (1991): *Bachillerato. Estructura y Contenidos*. Madrid: M.E.C.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, (1980): *An Agenda for Action*. Reston, VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, (1991): *Mathematics assessment: myths, models, good questions, and practical suggestions*. Reston, VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, (1994): *A Framework for Constructing a Vision of Algebra*. Reston, VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, (1995)*: Assessment standards for schoool mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NESHER, P. (1980): The stereotyped nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics*, 1, 41-48.

NISS, M. (1993a): *Investigations into Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

NISS, M. (1993b): *Cases of Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study*. Drodrecht: Kluwer Academic Publishers.

ORDEN, A. de la (1985): Modelos de Evaluación Universitaria. *Revista Española de Pedagogía*, año XLIII, nº 169-170, pp. 521-537.

OTIS, M.J. & OFFERMAN, T.R. (1988): How Do You Evaluate Problem Solving? *Arithmetic Teachers*, 35, 49-51.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1995): Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma*, 20, 29-36.

PANIZZA, M.; SADOWSKY, P. & SESSA, C. (1996): The first algebraic learning. The failure of succes. *Proceeding of 20th PME* (pp. 4, 107-114). Valencia.

PARADIS, J. (1993): La “Triparty” en la Science des Nombres de Nicolas Chuquet. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) (pp. 31-63).

PETITTO, A. (1979): The role of formal and non-formal thinking in doing algebra. *Journal of Children’s Mathematical Behavior*, 2, 69-82.

PIMM, D. (1990): *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata/M.E.C.

PIMM, D. (1995): *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.

PLATT, J.R. (1964): Strong inference. *Science*, October, 3437-3453.

PUIG, L. (1993): El “De Numeris Datis” de Jordanus de Nemore: esbozo de un análisis. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) (pp. 171-206).

PUIG, L. y CERDAN, F. (1989): *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

PUIG, L. y CERDAN, F. (1991): Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. *Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática. Apredizaje y Enseñanza del Álgebra* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

RADFORD, L. (1995): Before the Other Unknowns were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 15, 3, 28-37.

RADFORD, L. (1996): The Roles of Geometric and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks form a Didactic Perspective. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) (pp. 39-53).

RADFORD, L. & GRENIER, M. (1996): Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'education*, XXII, 2, 253-276.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1986): *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa.

RICO, L. (1990): Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.

RICO L. (1997): *Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.

RICO, L.; CASTRO, ENC.; CASTRO, ENR.; FERNÁNDEZ F.; GIL, F.; MORENO, F.; OLMO, A. y SEGOVIA, I. (1993): *Bibliografía de Investigación sobre Evaluación en Matemáticas*. Base de datos BIEM. Granada: Universidad de Granada.

RICO, L.; FERNÁNDEZ, F.; GIL, F.; CASTRO, ENC.; CASTRO, ENR.; MORENO, F.; OLMO, A. y SEGOVIA, I. (1995): *Conocimientos y Creencias de los Profesores de Matemáticas sobre Evaluación*. Granada: Universidad de Granada.

RICO, L.; CASTRO, ENC. y ROMERO, I. (1996): The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceeding 20th PME* (pp. 1, 87-102). Valencia.

RICO, L.; CASTRO, ENC.; CASTRO, ENR.; FERNANDEZ, F. y SEGOVIA, I. (1997): Cuestiones abiertas sobre evaluación en matemáticas. *Uno*, 11, 7-23.

RICO, L. (Coord.); CASTRO, ENC.; CASTRO ENR.; MARÍN, A.; PUIG, L.; SIERRA, M. y SOCAS, M. (1997): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

ROBITAILLE, D. (Ed.) (1989): *Evaluation and assessment in mathematics education*. París: Unesco.

ROBITAILLE, D. & GARDEN, R. (1989): *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and Outcomes of School Mathematics*. Oxford: Pergamon Press.

ROMBERG, T. (1989): Evaluation: a coat of many colors. En D. Robitaille (Ed.), *Evalua-*

tion and assessment in mathematics education (pp 3-18). París: Unesco.

ROMBERG, T. (Ed.) (1992): *Mathematics Assessment and Evaluation*. New York: SUNY Press.

ROMBERG, T. (1995)*: Reform in School Mathematics and Authentic Assessment*. New York: SUNY Press.

ROMERO, I. (1997): *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada: Comares.

ROJANO, T. (1994a): La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), 45-56.

ROJANO, T. (1994b): The case of pre-symbolic algebra and the operation of the unknow. *Proceedings of 18th PME* (125-128). Lisboa.

ROJANO, T. (1996):The Role of Problems and Problem Solving in the Development of Algebra. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) (pp. 55-62).

ROJANO, T & SUTHERLAND, R. (1993): La Sintaxis Algebraica en el Proyecto Viético. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) (pp. 117-130).

ROJANO, T. & SUTHERLAND, R. (1995): A new approach to algebra: Results from a study with 15 year old algebra-resistant pupils. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Memorias de IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Didáctica del Álgebra* (pp. 27-46). Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. 1992. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

ROJANO, T.; SUTHERLAND, R.; URSINI, S.; MOLYNEUX, S. & JINICH, E. (1996): Ways of solving algebra problems: The influence of school culture. *Proceedings of 20th PME* (pp. 4, 219-226). Valencia.

RUBIO, G. (1995): El desarrollo de la capacidad para realizar el análisis lógico de los problemas aritmético-algebraicos y su vinculación con su comprensión y uso competente. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Memorias de IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Didáctica del Álgebra* (pp. 47-72). Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Agosto 1992. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

SANTOS, L. (1996): Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. *Educación Matemática*, 8, 2, 57-69.

SCHMIDT, S. (1994): *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un context de rèsolution de problème*. Tesis doctoral. Montreal: Université du Québec.

SCHMIDT, S. & BEDNARZ, N. (1997): El nexo entre los modelos de razonamiento aritmético y algebraico para resolver problemas entre los futuros profesores. *Uno*, 11, 93-100.

SIERRA, M. (1993): La Introducción y Enseñanza de las Ideas Algebraicas en España durante los Siglos XVII y XVIII. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) (pp. 153-158).

SHAVELSON, R.J.; WEBB, N.M. & BURSTEIN, L. (1986): Measurement of Teaching . En M.C. Wittroc (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 50-91). New York: Macmillan.

SHAVELSON, R.J. (1988): *Statistical reasoning for the behavioral sciences*. Boston: Allyn & Bacon.

SHELL CENTER FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1990): *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao: Servicio Editorial, Universidad del País Vasco.

SHELL CENTER FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1993): *Problemas con pautas y números*. Bilbao: Servicio Editorial, Universidad del País Vasco.

SHUFELT, H. & SMART, J. (Eds.) (1983): *The Agenda in Action*. Reston, VA: NCTM.

SHULMAN, L.S. (1989): Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza. Una perspectiva contemporánea. En M.C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza I* (pp. 9-91). Barcelona: Paidos-MEC.

SNYDER, P. & LAWSON, S. (1993): Evaluating results using corrected and uncorrected effect size estimates. *Journal of Experimental Education*, 61 (4), 334-349.

SOCAS, M.M.; CAMACHO, M.; PALAREA, M.M. y HERNANDEZ, J. (1989): *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

SOCAS, M.M. y PALAREA, M.M. (1995): El uso de sistemas de representación con imágenes en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. En *Actas del Simposium*

Internacional sobre la "Matemática Actual" (pp. 507-521). La Laguna: Universidad de La Laguna.

SPEER, W.R.; HAYES, D.T. & BRAHIER, D.J. (1997): Becoming Very-Able with Variables. *Teaching Children Mathematics*, 3, 6, 305-311.

STACEY, K. (1995): The influence of problem representation on algebraic equation writing and solution strategies. *Proceeding 19th PME* (pp. 2, 90-97). Recife, Brasil.

STAKE, R.E. (1988): Case study methods in educational research. En R.M. Jaeger (Ed.) *Complementary Methods for Research in Education*, (Sector V). Washington, D.C.: AERA.

STEINER, H. & CHRISTIANSEN, B. (1979): *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática. Volumen IV*. París: Unesco.

STEINER, H. (Ed.) (1980): *Comparative Studies of Mathematics Curricula. Change and Stability 1960-1980*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld.

STUBBS, M. (1984): *Lenguaje y escuela. Análisis sociolingüístico de la enseñanza*. Madrid: Cincel-Kapeluz.

STUFFLEBEAM, D. & SHINKFIELD, A. (1987): *Evaluación Sistemática. Guía Teórica y Práctica*. Barcelona: Paidós.

SUTHERLAND, R.; ROJANO, T.; MOCHON, S.; JINICH, E. & MOLINEUX, S. (1996): Mathematical modelling in the sciences trough the eyes of Marina and Adam. *Proceeding of 20th PME* (pp. 4, 291-297). Valencia.

SUYDAM, M. (1974): *Evaluation in the Mathematics Classroom. Froms What and Why to How and Where*. Columbus, Ohio: ERIC-SMME.

TEJEDOR, F.J. (1984): *Análisis de varianza aplicado a la investigación en Pedagogía y Psicología*. Madrid: Anaya.

THORNDIKE, R.L. & THORNDIKE, R.M. (1997): Reliability. En J.P. Keeves (Ed.), *Educational Research, Methodology and Measurement: An International Handbook*.

New York: Pergamon.

TORTOSA, A., MORCILLO, N., FERNANDEZ, F. y COL. (1995): *La Evaluación en el Aula de Matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.

URSINI, S. (1996): Experiencias pre-algebraicas. *Educación Matemática*, 8, 2, 33-40.

USISKIN, Z. (1997): Doing Algebra in Grades K-4. *Teaching Children Mathematics*, 3, 6, 346-356.

VAN DER WAERDEN, B.L., (1985): *A History of Algebra*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

VAN REEUWIJK, M. (1995): Students' Knowledge of Algebra. *Proceeding 19th PME* (pp. 1, 135-151) . Recife, Brasil.

VAULÈZARD, J.L. (1986): *La nouvelle algèbre de M. Viète*. Reedición del original de 1630. Tours: Fayard.

VERA, F. (1970): *Científicos Griegos*. Madrid: Aguilar.

VERGNAUD, G. (1990): La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didatique des Mathématiques*, (10), 2-3, 133-170.

WAGNER, S. & KIERAN, C. (1989): An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra. En S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 220-237). Reston, VA: NCTM-LEA.

WEBB, N. (1992): Assessment of Student' Knowledge of Mathematics: Steps toward a Theory. En D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.661-683). New York: Macmillan.

WEELER, D. (1996): Rough or Smooth? The Transition from Arithmetic to Algebra in Problem Solving. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) (pp. 147-149).

WILSON, M. (1992): Measuring Levels of Mathematical Uderstanding. En T. Romberg (Ed.), *Mathematics Assessment and Evaluation* (pp. 213-241). New York: SUNY Press.

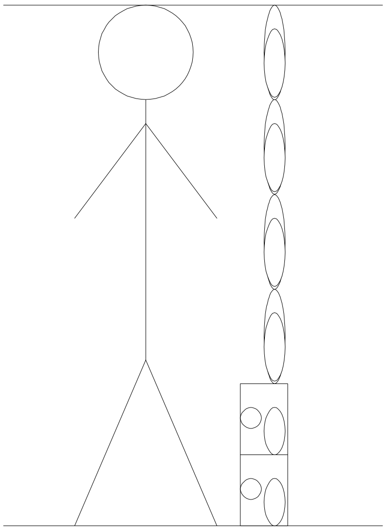
YACKEL, E. (1997): A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades. *Teaching Children Mathematics*, 3, 6, 276- 280.

ZACK, V. (1995): Algebraic thinking in the upper elementary school: The role of collaboration in making meaning of generalisation. *Proceeding of 19th PME* (pp. 2, 106-113). Recife, Brasil.

ANEXOS

ANEXO I

Problema 1.



A Teresa le han regalado un muñeco de Epi que mide 21 cm., y a su hermano pequeño uno de Blas que mide 30 cm.

La altura de Epi se puede medir también con 4 clips y 2 sacapuntas, como se puede ver en la figura. En el caso de Blas se necesitan 5 clips y 4 sacapuntas.

¿Cuánto mide cada clips y cada sacapuntas?

Explica cómo haces el problema. Resuélvelo como mejor sepas: sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario.

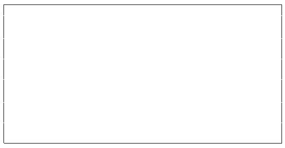
Problema 2.

Por una regla y dos bolígrafos iguales he pagado 228 ptas. La regla cuesta 36 ptas más que el bolígrafo. ¿Cuál es el precio de la regla?

Explica cómo haces el problema. Resuélvelo como mejor sepas: sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario.

Problema 3.

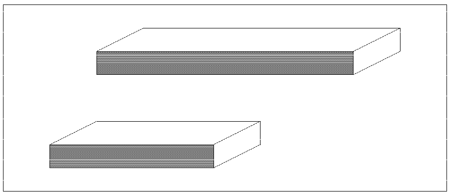
En un recinto rectangular el lado mayor aumenta un 10% y el otro disminuye en un 10% también. ¿Cómo será ahora su área: aumenta, disminuye o queda igual? ¿Y en el caso de que sea el lado mayor el que disminuye y el lado menor el que aumenta?



Explica con detalle cómo resolverías el problema. Resuélvelo como mejor sepas: sigue tus propias ideas y asegúrate de incluir cada paso que sea indispensable. Revisa tu explicación si lo crees necesario.

Problema 4.

En una carpintería hay dos tipos de tiras de madera: unas largas y otras cortas.



Si ponemos en línea una tira larga junto con dos cortas miden 162 cm.
Si ponemos dos tiras cortas juntas miden 28 cm. menos que una larga.
¿Cuánto mide cada tira de madera?

Explica cómo lo haces. Resuélvelo como sepas: sigue tus propias ideas. No te dejes ningún paso que consideres necesario.

Problema 5.

Marta y Sandra van a comprar a una tienda de discos. Marta lleva 7.400 ptas. y Sandra 11.000 ptas.

Marta se compra 3 CD y Sandra compra 5 CD, todos al mismo precio. A la salida, después de pagar, resulta que a las dos les sobra la misma cantidad de dinero.

¿Cuánto cuesta cada CD?

Explica cómo haces el problema. Resuélvelo como sepas: sigue tus propias ideas. No omitas ningún paso que creas necesario.

Problema 6.

Un ejercicio antiguo:

"Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el caballo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía". Decidme, ¿cuántos sacos llevaba el caballo y cuántos el mulo?"

Explica cómo haces el problema. Resuélvelo como sepas: sigue tus propias ideas. No dejes de hacer los pasos que creas necesarios.

Problema 7.

La familia García realiza un viaje. El Sr. García tiene que conducir 434 kilómetros para ir de Madrid a Granada.

En un punto del trayecto deciden parar a tomar un refresco. Después de la parada aún le quedan por recorrer 1’8 veces más de kilómetros que los que ya llevan recorridos.

¿Cuántos kilómetros le quedan después de la parada?¿Y cuántos kilómetros llevan ya recorridos?

Explica cómo haces el problema. Resuélvelo como sepas: sigue tus propias ideas. No omitas ningún paso que creas necesario.

Problema 8.

Juan promete a Inés que si le deja la bicicleta durante un mes le dará 1.000 pesetas y una cinta de vídeo. Al cabo de los 15 días se rompe el acuerdo y Juan le da a Inés la cinta de vídeo y 200 pesetas.

¿Qué valor tiene la cinta de vídeo?

Explica cómo haces el problema. Resuélvelo como sepas: sigue tus propias ideas. No dejes de hacer los pasos que creas necesarios.

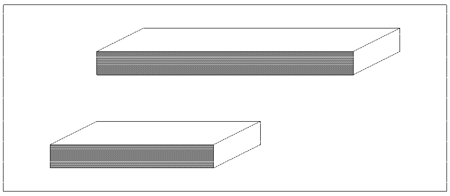
ANEXO II

Nombre____Curso_____

Nº de años sin Matemáticas_____

Problema 1.1.

"En una carpintería hay dos tipos de listones de madera: unos largos y otros cortos. Si ponemos en línea un listón largo junto con dos cortos, miden 210 cm.

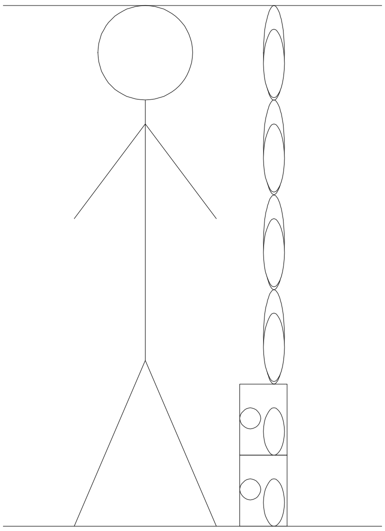


El listón largo mide 30cm. más que el corto.

¿Cuánto mide cada listón de madera?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 1.2.



"A Teresa le han regalado un muñeco de Epi que mide 21 cm., y a su hermano pequeño uno de Blas que mide 30 cm.

La altura de Epi se puede medir también con 4 clips y 2 sacapuntas, como se puede ver en la figura. En el caso de Blas se necesitan 5 clips y 4 sacapuntas.
¿Cuánto mide cada clips y cada sacapuntas?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 1.3.

"David y Reme deciden ir a un concierto.

David se compra una entrada, y Reme quiere ir a un sitio mejor donde la entrada es 2,7 veces más cara que la de David.

En total han pagado por las dos entradas 5.550 ptas.

¿Cuánto vale cada entrada?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 1.4.

"Raquel y Sara van a comprar discos. Les gustaría comprarse 2 CD y 5 Cassetes que suman en total 6.740 ptas.

Pero no pueden gastarse tanto dinero y al final escogen 1 CD y 3 Cassetes, por los que pagan 3.745 ptas. ¿Cuánto cuesta cada CD y cada Cassete?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 1.5.

"La familia García realiza un viaje. El Sr. García tiene que conducir 434 kilómetros para ir de Madrid a Granada.

En un punto del trayecto deciden parar a tomar un refresco. Después de la parada aún le quedan por recorrer 1'8 veces más de kilómetros que los que ya llevan recorridos.

¿Cuántos kilómetros le quedan después de la parada?¿Y cuántos kilómetros llevan ya recorridos?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

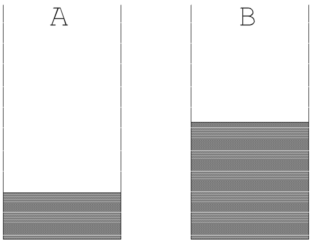
Nombre____ **Curso**_____

Nº de Años sin Matemáticas_____

Problema 2.1.

"Tenemos dos depósitos de agua con la misma capacidad. El depósito A tiene 20 litros y hemos de echarle 9 cubos más para que se llene.

El depósito B tiene 52 litros y hay que echarle 5 cubos para llenarlo.



¿Qué cantidad de agua cabe en cada depósito?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 2.2.

"David y Reme deciden ir a un concierto, cada uno con sus hermanos. David tiene que sacar 2 entradas y Reme 3 entradas.

Hay dos tipos de entradas, según estén en un sitio más caro o en otro más barato, y no hay entradas para todos en el mismo sitio.

Si la familia de David va al sitio de las baratas y Reme al de las caras en total les cuestan 14.500 ptas. y si es al revés (Reme al sitio de las baratas y David al de las caras), entonces les cuestan 13.000 ptas. ¿Cuál es el precio de cada entrada?"

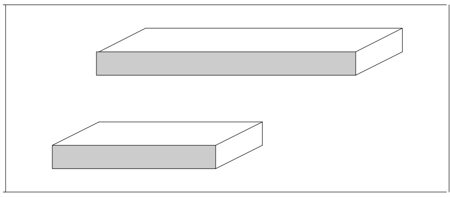
Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 2.3.

"Marta y Sandra van a comprar a una tienda de discos. Marta lleva 7.400 ptas. y Sandra 11.000 ptas.

Marta se compra 3 CD y Sandra compra 5 CD, todos al mismo precio. A la salida, después de pagar, resulta que a las dos les sobra la misma cantidad de dinero.

¿Cuánto cuesta cada CD?



Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 2.4.

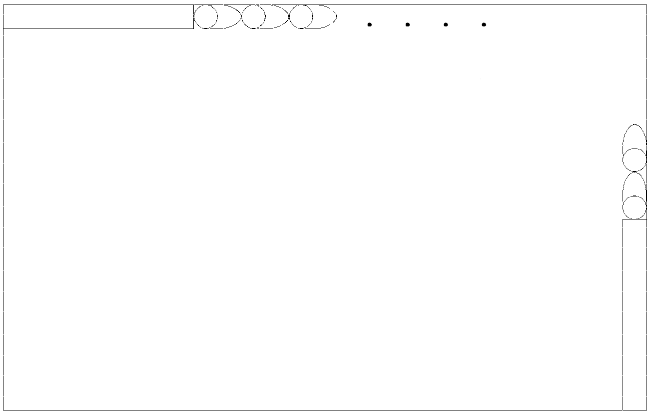
"Para un trabajo manual, Rocío ha comprado 2 listones cortos

y 2 listones largos que si se ponen uno detrás de otro miden en total 242 cm. Daniel necesita algunos más y compra 3 cortos y 4 largos que unidos miden 446 cm.
¿Cuánto mide cada listón?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

Problema 2.5.

"Juan sabe que el tablero de su mesa de clase es un rectángulo cuyo lado largo es 1,7 veces mayor que su lado ancho. En el lado largo Juan coloca, en hilera, su regla de 30 cm. y 16 clips, y en el lado menor puede poner la regla de 30 cm. y 6 clips.



¿Cuanto mide cada clips?"

Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema.

ANEXO III

Codificación.

Variables independientes

* Sujeto: ### (tres dígitos)

* Variables sujeto: (VS) # 1 = Alumnos de Secundaria
2 = Alumnos de 3–5 años sin álgebra
3 = Alumnos de más de 5 años sin álgebra

Variables dependientes - producto

* Blanco: todas las casillas siguientes se rellenan con un "*"

* Sistema de representación (Traducción-Integración): (VD-1) # 0 = Información Insuficiente
1 = Numérico por Ensayo-Error
2 = Numérico por Parte-Todo
3 = Gráfico
4 = Gráfico-Simbólico
5 = Simbólico

* Planteamiento de las relaciones (Planificación): (VD-2) # 0 = No Plantea
1 = Plantea mal
2 = Plantea bien

* Ejecución del plan (Desarrollo): (VD-3) # 0 = No Ejecuta
1 = Ejecuta mal
2 = Ejecuta bien

* Resultado: (VD-4) # 0 = Sin resultado
1 = Resultado mal
2 = Resultado bien

* Característica de la Actuación (Modelo de Lins): (VD-5) # 0 = Sin información para caracterizar
1 = Aritmeticidad
2 = Internalidad
3 = Analiticidad
4 = Aritm. + Intern.
5 = Atirm. + Analit.
6 = Intern. + Analit.
7 = Aritm. + Intern. + Analit.

* Atención en la Actuación (errores mecánicos o simples de algoritmo): (VD-6) # 0 = Resultado mal
1 = Con error

2 = Una solución

3 = Dos soluciones

<u>Matriz</u>

Esto nos dará una matriz de 160 filas con 64 columnas: 4 correspondientes al sujeto y 6 por cada problema (por 10 problemas), que será como la siguiente (indicada para el primer problema):

Sujeto	VS	[1-VD-1	1-VD-2	1VD-3	1-VD-4	1-VD-5	1-VD-6]
###	#	#	#	#	#	#	#

ANEXO IV

MATRIZ DE CODIGOS

0 0 1 1 2 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 5 2 1 0 4 0 2 1 2 1 4 1 2 2 2 2 7 3 5 2
1 1 4 0 2 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 * * * * * *
0 0 2 1 1 2 2 2 7 3 1 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 2 1
2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 0 * * * * * *
0 0 3 1 5 2 2 2 7 3 1 2 2 2 7 3 2 1 2 1 4 0 0 0 0 0 0 0 5 1 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2
1 1 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 1 5 1 1 1 6 0
0 0 4 1 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 5 1 0 0 0 0 * * * * * * 5 2 2 2 2 3 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 1 2 1 4 0 * * * * * *
0 0 5 1 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 1 0 5 2 2 2 7 3 2 0 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 2 2
2 2 7 3 5 1 1 1 4 0 2 1 1 0 1 0 * * * * * *
0 0 6 1 5 2 2 2 7 3 5 1 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 2 2 2 7 3 2 2
2 2 7 3 5 1 1 1 4 0 * * * * * * * * * * * *
0 0 7 1 2 1 2 1 2 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 5 1 1 0 4 0 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 * *
* * * * * * * * * * 2 2 2 2 7 3 3 0 0 0 0 0
0 0 8 1 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 6 0 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 0 0 0 0 0 5 2 1 1 6 0 5 1 0 0 4 0
0 0 9 1 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 7 1 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * *
* * * * 5 2 2 2 7 3 * * * * * * * * * * * *
0 1 0 1 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2
1 0 6 0 * * * * * * 5 2 1 1 5 0 * * * * * *
0 1 1 1 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * *
* * * * 5 0 0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 * * * * * *
0 1 2 1 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 2 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * * * * * * * *
0 1 3 1 5 1 2 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 2 5 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 2 5 1
2 1 4 0 5 1 1 2 6 3 * * * * * * * * * * * *
0 1 4 1 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 6 0 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 1 0 0 4 0 5 2 2 1 6 1 * * * * * *
0 1 5 1 2 2 2 2 7 3 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 2 1 1 4 0 2 1 2 1 4 0 2 2 2 2 7 3 5 2
1 1 1 0 5 1 1 2 6 0 2 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0
0 1 6 1 5 2 2 2 7 3 1 2 2 2 7 3 5 0 0 0 0 0 5 1 1 1 2 0 * * * * * * 5 0 0 0 0 0 * *
* * * * 5 0 0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 * * * * * *
0 1 7 1 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 2 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * * * * * * * *
0 1 8 1 2 1 2 1 4 0 2 2 1 1 1 0 5 2 2 2 7 3 2 1 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 2 1
2 1 1 0 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 * * * * * *
0 1 9 1 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 1 0 * * * * * * 5 1 1 1 1 0 2 1 1 1 4 0 5 2 2 2 7 1 2 1
1 1 1 0 5 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 5 1 1 1 2 0
0 2 0 1 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 1 0 5 2 2 2 7 2 2 1 2 1 4 0 5 2 1 2 7 2 5 2 2 2 7 2 2 2
2 2 7 2 5 1 1 1 2 0 2 0 0 0 1 0 * * * * * *
0 2 1 1 2 1 2 1 4 0 1 1 0 0 0 0 5 1 0 0 6 0 5 2 1 1 1 0 5 1 1 1 1 0 5 1 1 0 4 0 5 1
2 0 4 0 5 2 2 0 7 0 5 2 2 1 6 1 * * * * * *
0 2 2 1 5 1 0 0 4 0 5 2 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 2 1 0 0 0 0 * *

```
* * * * 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 5 2 0 0 0 0
0 2 3 1 4 1 2 1 4 0 5 2 1 1 6 0 5 2 0 2 0 3 * * * * * * * * * * * * 5 1 1 0 2 0 2 1
0 0 4 0 2 1 2 1 4 0 5 2 0 0 2 0 * * * * * *
0 2 4 1 5 1 2 1 4 0 5 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 7 1 5 1 2 1 2 0 5 1 2 1 4 0 5 1
1 1 2 0 5 1 2 1 4 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * *
0 2 5 1 5 1 1 2 1 3 1 1 2 1 4 0 * * * * * * 5 1 2 1 4 0 2 1 1 1 2 0 5 1 2 1 4 0 1 2
1 1 4 0 0 0 0 0 0 0 1 2 1 1 4 0 5 2 0 0 2 0
0 2 6 1 2 2 2 2 7 3 2 2 1 1 1 0 2 1 0 0 4 0 5 1 2 1 4 0 * * * * * * 2 2 2 2 7 3 1 1
1 1 4 0 0 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * *
0 2 7 1 5 2 2 1 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 3 0 0 0 0 0 5 2 1 1 6 1 5 2
0 0 0 0 4 1 1 0 4 0 5 2 1 1 6 1 4 1 2 1 4 0
0 2 8 1 1 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 2 2 1 0 0 0 0 2 2 2 2 7 3 0 0
0 0 0 0 5 1 1 1 4 0 5 2 2 2 7 2 * * * * * *
0 2 9 1 5 1 1 1 4 0 5 2 1 1 2 0 5 1 2 0 6 0 5 2 2 0 7 0 * * * * * * 1 2 1 0 4 0 2 2
1 1 4 0 5 2 0 0 0 0 5 2 1 0 5 0 4 1 0 0 0 0
0 3 0 1 5 1 1 1 1 0 5 2 1 1 5 0 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 5 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 1
2 1 4 0 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 5 0 3 0 0 0 0 0
0 3 1 1 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 1 5 0 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * *
* * * * * * * * * * 5 2 1 1 6 0 5 0 0 0 0 0
0 3 2 1 5 0 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 5 2 0 0 0 0 5 1 0 0 4 0 5 1 0 0 0 0 5 1
0 0 0 0 * * * * * * 5 1 1 0 2 0 * * * * * *
0 3 3 1 2 1 2 1 4 0 2 2 1 1 4 0 5 1 0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 3 1 2 1 4 0 5 2 2 1 7 1 2 1
2 1 4 0 2 1 2 1 4 0 1 2 2 1 4 0 4 1 0 0 6 0
0 3 4 1 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
0 3 5 1 5 1 2 0 4 0 2 2 1 1 4 0 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 1 2 1 4 0 0 0
0 0 0 0 5 1 0 0 0 0 5 2 1 1 1 0 * * * * * *
0 3 6 1 2 2 1 1 4 0 1 2 1 1 4 0 2 1 2 1 4 0 1 2 1 1 4 0 * * * * * * 1 1 1 1 2 0 1 2
2 1 7 0 1 2 2 1 7 0 1 2 2 1 7 0 2 0 0 0 0 0
0 3 7 1 1 2 2 2 7 3 1 2 2 2 7 3 2 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 * * * * * * 1 2 2 2 7 3 5 0
0 0 0 0 1 2 1 1 7 0 1 2 2 2 7 3 * * * * * *
0 3 8 1 5 1 2 1 4 0 5 2 2 1 7 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 7 2 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 4 0 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 * * * * * *
0 3 9 1 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 2 2 0 7 0 * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
0 4 0 1 2 2 2 2 7 3 2 2 1 1 1 0 5 2 1 1 5 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 2 1 1 1 4 0 2 1
2 1 1 0 2 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 * * * * * *
0 4 1 1 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 1 0 2 1 2 1 2 0 2 1 2 1 4 0 2 1 2 1 2 0 5 2 2 2 7 3 5 1
0 0 4 0 5 0 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 5 1 0 0 4 0
0 4 2 1 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 3 0 2 1 0 0 0 0 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 1
0 0 4 0 0 0 0 0 0 0 5 2 1 1 3 0 * * * * * *
0 4 3 1 5 1 1 1 6 0 5 2 1 1 6 0 * * * * * * 5 2 1 0 6 0 * * * * * * 5 1 1 1 2 0 2 1
1 1 1 0 2 1 1 1 4 0 5 2 1 1 2 0 * * * * * *
0 4 4 1 5 1 1 1 2 0 5 2 1 1 6 0 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2
1 1 4 0 * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

0 4 5 1 5 2 1 2 4 3 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 4 2 2 2 2 7 3 2 2 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 2 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 1 7 1
0 4 6 1 2 2 2 2 2 7 3 2 2 1 1 5 0 2 1 2 1 4 0 2 2 1 1 5 0 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 4 0 2 1
2 1 4 0 2 1 2 1 4 0 * * * * * * * * * * * * *
0 4 7 1 2 2 2 2 2 7 3 3 2 0 1 4 0 2 1 1 1 2 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 2 2 2 2 7 3 5 2
1 1 6 0 * * * * * * 5 2 2 2 2 7 3 * * * * * *
0 4 8 1 4 1 0 0 0 0 5 2 1 1 6 0 5 0 0 0 0 0 5 2 2 2 2 7 3 5 1 0 0 4 0 5 1 1 1 1 0 5 2
1 0 6 0 5 1 1 1 1 0 * * * * * * 4 0 0 0 0 0
0 4 9 1 4 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 2 1 1 1 2 0 5 2 2 2 2 7 3 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 1 0 0 4 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3
0 5 0 1 2 2 2 2 2 7 3 1 1 2 1 4 0 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 5 1 2 2 4 3 1 1
2 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 2 7 3 * * * * * *
0 5 1 1 1 2 2 2 2 7 3 1 2 2 0 7 0 * * * * * * * * * * * * * * * * * * 2 1 1 2 2 3 1 2
1 2 7 3 1 2 1 1 4 0 * * * * * * * * * * * * *
0 5 2 1 4 1 2 1 4 0 5 2 2 2 2 7 3 2 1 1 1 2 0 5 2 1 1 6 0 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 2 7 3 2 1
1 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 2 7 3 * * * * * *
0 5 3 1 2 2 2 2 2 7 2 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 2 0 0 0
0 2 0 3 * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
0 5 4 1 4 2 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 5 2 2 1 7 1 5 2 2 2 2 7 2 * * * * * * 5 2 2 2 2 7 3 5 1
0 0 0 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 1 7 1 * * * * * *
0 5 5 1 3 0 0 2 0 3 1 1 2 2 7 1 2 1 1 1 4 0 * * * * * * 2 1 2 1 2 0 2 2 2 2 2 7 3 0 0
0 2 0 3 0 0 0 0 0 0 5 1 0 0 0 0 * * * * * *
0 5 6 1 4 2 2 2 2 7 3 5 2 1 2 6 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 2 7 3 5 2
0 0 0 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 1 7 1 * * * * * *
0 5 7 1 5 2 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 2 1 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 5 2 2 2 2 7 3 2 1
1 1 4 0 5 0 0 0 0 0 5 2 2 2 2 7 3 * * * * * *
0 5 8 1 5 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 2 1 1 1 4 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2
0 0 0 0 5 1 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0
0 5 9 1 2 1 1 1 4 0 2 2 1 1 4 0 5 1 0 0 4 0 5 2 2 1 7 1 0 0 0 0 0 0 5 2 2 2 2 7 3 5 1
2 1 4 0 0 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * * *
0 6 0 1 2 1 1 1 4 0 5 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * * * 2 2 2 2 2 7 3 0 0
0 2 0 3 * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
0 6 1 1 5 1 0 0 6 0 5 1 1 1 1 0 5 2 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 2 2 2 2 7 2 5 2
1 0 6 0 5 1 2 2 4 3 * * * * * * * * * * * * *
0 6 2 1 2 2 2 2 2 7 3 2 2 2 2 2 7 3 2 1 2 1 4 0 2 2 2 2 2 7 3 2 1 2 1 4 0 2 2 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 2 1 1 1 4 0
0 6 3 1 3 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 2 2 2 1 6 1 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 2 7 3 0 0
0 0 0 0 1 2 2 2 2 7 3 * * * * * * 2 1 0 0 4 0
0 6 4 1 3 2 2 2 2 7 3 5 2 1 1 3 0 2 1 0 0 0 0 5 2 1 1 3 0 * * * * * * 2 2 2 2 2 7 3 2 1
0 0 5 0 2 2 2 2 2 7 3 5 2 1 1 3 0 * * * * * *
0 6 5 1 5 1 1 1 6 0 5 2 2 2 2 7 2 5 1 2 1 6 0 5 2 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 0 5 1 1 1 2 0 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1 * * * * * *
0 6 6 1 3 0 0 0 0 0 1 2 1 1 4 0 2 1 2 1 4 0 0 0 0 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 * * * * * * * *
* * * * 5 1 2 1 4 0 5 2 1 1 6 0 * * * * * *
0 6 7 1 3 2 2 2 2 7 3 5 2 2 2 2 7 2 2 1 2 1 4 0 5 2 2 1 6 1 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 2 7 3 5 2

2 1 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 2 0 1 1 4 0
0 6 8 1 2 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 1 2 1 4 0 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2
1 1 4 0 * * * * * * * * * * * * * * * * * *
0 6 9 1 0 0 0 2 0 3 * * * * * * * * * * * * 5 2 1 0 6 0 * * * * * * 0 0 0 1 0 0 * *
* *
0 7 0 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
0 7 1 1 2 2 2 2 7 3 2 2 1 1 5 0 2 1 1 1 4 0 * * * * * * 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 2 1 2 1 2 0 2 1 2 1 1 0 2 1 1 1 1 0
0 7 2 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1 0 0 0 0 0 0
0 7 3 1 4 2 2 2 7 3 3 2 1 1 4 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 2 2 2 2 7 3 2 1
2 1 4 0 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 7 4 1 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 2 1 1 1 2 0 2 2 2 1 7 1 3 0 0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 * *
* *
0 7 5 1 1 2 2 2 7 3 1 2 1 1 4 0 1 2 2 2 7 3 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 2 7 3 1 2
0 0 0 0 1 2 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * *
0 7 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 1
1 1 2 0 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 5 1 1 1 2 0
0 7 7 1 5 1 0 0 0 0 2 1 1 1 1 0 5 2 1 0 5 0 5 2 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 1 5 1
2 1 4 0 2 0 0 0 0 0 5 2 1 1 5 0 5 0 0 0 0 0
0 7 8 1 2 1 2 1 4 0 5 2 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 2 2 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * * * * * * * *
0 7 9 1 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 5 2 1 1 5 0 5 2 1 1 6 0 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2
1 0 6 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 0 0 0 0 0 0
0 8 0 1 2 1 1 1 4 0 2 2 2 1 6 1 2 1 2 1 4 0 2 2 2 2 7 3 2 1 1 1 4 0 5 2 2 2 7 2 2 1
1 1 1 0 1 2 2 2 7 3 * * * * * * 0 0 0 0 0 0
0 8 1 2 4 1 1 0 4 0 5 2 2 1 6 0 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 6 0 5 1 0 0 4 0 5 1 2 1 4 0 5 2
2 1 6 1 5 1 2 2 6 1 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 4 0
0 8 2 2 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 2 5 1 2 1 6 0 5 2 2 2 7 3 4 1 0 0 4 0 2 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * * * * * *
0 8 3 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
0 8 4 2 3 2 0 0 0 0 2 2 1 1 5 0 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 5 0 2 1 2 1 4 0 1 2 1 1 4 0 5 2
1 1 5 0 5 1 1 1 3 0 5 2 1 1 4 0 4 1 1 1 1 0
0 8 5 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
0 8 6 2 2 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 * * * * * * 1 2 1 1 4 0 * * * * * * 2 2 2 2 7 3 2 2
2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 3 1 0 0 4 0
0 8 7 2 5 1 2 2 4 3 1 2 1 1 4 0 2 1 0 0 4 0 2 1 2 1 1 0 2 1 2 1 4 0 2 1 2 1 4 0 * *
* * * * 2 0 0 0 0 0 5 1 1 1 2 0 * * * * * *
0 8 8 2 5 2 2 2 7 3 1 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * *
* * * * 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1 * * * * * *
0 8 9 2 5 1 2 1 4 0 5 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 2 2 1 1 1 4 0 4 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 2 1
2 1 1 0 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 1 0 2 1 2 1 2 0

0 9 0 2 4 1 1 1 4 0 2 2 1 1 5 0 5 2 2 2 7 2 2 1 2 1 4 0 5 1 1 1 2 0 2 1 2 1 4 0 5 1
2 1 1 0 5 1 2 1 4 0 5 1 1 1 4 0 2 1 1 1 2 0
0 9 1 2 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 2 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1 2 1 2 1 4 0 5 2
2 1 6 1 2 1 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 1 1 1 2 0
0 9 2 2 2 2 2 2 7 3 1 2 2 2 7 3 * * * * * * 0 0 0 0 0 0 5 1 0 0 6 0 2 2 2 2 7 3 1 2
2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 * * * * * *
0 9 3 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 7 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
0 9 4 2 4 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 0 5 1 2 1 6 0 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 6 0 5 2 1 1 4 0 5 2
2 2 7 3 * * * * * * * * * * * * * * * * * *
0 9 5 2 4 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 4 2 2 1 6 1 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3
0 9 6 2 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 6 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 1 2 1 3 0 5 1 2 1 4 0 5 2
1 0 4 0 2 1 1 0 4 0 * * * * * * * * * * * *
0 9 7 2 5 2 1 1 5 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 1 6 1 5 0 0 0 0 0 5 2
1 1 6 0 5 0 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 4 2 2 1 6 1
0 9 8 2 1 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 *
* *
0 9 9 2 5 2 1 0 4 0 5 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 1 0 2 4 2 0 0 0 0 0 0 2 1 2 1 4 0 * *
* *
1 0 0 2 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 * *
* *
1 0 1 2 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 2 1 1 1 6 0 5 2 1 0 4 0 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 * *
* *
1 0 2 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 1 1 1 6 0 5 2 2 1 6 1 4 1 2 1 4 0 5 1 2 1 4 0 5 2
2 1 6 1 5 1 0 0 4 0 5 2 2 1 6 1 4 1 2 1 4 0
1 0 3 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 1 0 6 0 3 0 0 0 0 0 * * * * * * * *
* *
1 0 4 2 2 1 2 2 4 3 5 1 1 0 4 0 0 0 0 0 0 0 * * * * * * 4 1 0 0 4 0 5 2 2 2 7 3 * *
* *
1 0 5 2 4 2 2 2 7 3 1 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * * * *
* *
1 0 6 2 3 2 2 2 7 3 3 2 0 0 0 0 5 1 1 0 2 0 5 2 0 0 0 0 5 2 1 1 3 0 5 2 0 0 0 0 * *
* * * * 5 2 0 0 0 0 3 2 2 2 7 3 5 1 0 0 4 0
1 0 7 2 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 5 1 1 1 2 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * * * *
* *
1 0 8 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 1 6 1 5 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 4 2 2 1 6 1
1 0 9 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 1 2 2 4 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1
1 1 0 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1
1 1 1 2 2 1 1 1 2 0 1 2 1 1 4 0 2 1 1 1 4 0 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 4 0 2 2 1 1 4 0 2 2
2 2 7 3 2 1 1 1 4 0 2 2 2 2 7 3 2 1 1 1 4 0
1 1 2 2 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 5 0 2 1 1 1 4 0 5 2 1 1 6 0 2 1 2 1 4 0 2 2 2 2 7 3 2 2

1 1 4 0 2 1 2 1 4 0 * * * * * * * * * * * *
1 1 3 2 2 1 1 2 2 3 5 2 0 0 0 0 2 1 1 1 4 0 1 2 2 1 6 1 5 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 2 1
2 1 4 0 0 0 0 0 0 0 5 2 1 1 5 0 0 0 0 0 0 0
1 1 4 2 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 1 1 1 6 0 5 2 2 2 7 2 4 2 2 2 7 3 5 1 2 1 4 0 5 2
2 0 7 0 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1
1 1 5 2 4 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 0 4 0 5 2 2 2 7 3 5 1 0 0 4 0 5 2
2 0 7 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 0 5 2 0 0 0 0
1 1 6 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 7 1 5 2 2 2 7 3 5 2
2 1 7 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 0
1 1 7 2 5 2 1 1 4 0 5 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 4 0 5 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2
1 1 4 0 5 1 0 0 4 0 * * * * * * * * * * * *
1 1 8 2 2 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 2 1 2 1 4 0 5 2 1 1 4 0 0 0 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 * *
* *
1 1 9 2 2 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 5 1 2 0 2 0 5 2 0 0 0 0 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 1
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * *
1 2 0 2 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 2 2 2 2 7 3 * *
* *
1 2 1 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 1 0 0 4 0
1 2 2 3 5 1 0 0 2 0 5 2 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 5 1 2 1 4 0 5 2 0 0 0 0 * *
* * * * 5 2 0 0 0 0 5 2 2 0 7 0 5 1 1 0 2 0
1 2 3 3 2 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 2 1 0 0 4 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 3 1 2 1 4 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * *
1 2 4 3 2 1 2 1 4 0 5 2 0 0 0 0 *
* *
1 2 5 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 1 5 2 2 1 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1
1 2 6 3 5 2 1 1 4 0 2 2 1 1 5 0 2 1 1 1 2 0 2 1 1 1 1 0 * * * * * * 3 0 0 0 0 0 2 1
1 1 1 0 2 1 2 1 4 0 3 2 0 0 0 0 3 0 0 0 0 0
1 2 7 3 4 2 2 2 7 2 5 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * * *
* *
1 2 8 3 5 1 2 1 6 0 5 2 0 0 0 0 5 2 2 1 6 0 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
1 1 6 0 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 5 2 2 1 6 1
1 2 9 3 5 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 4 0 5 2 1 1 6 0 3 0 0 0 0 0 3 1 2 1 4 0 5 2
1 1 6 0 2 0 0 2 0 3 5 2 2 1 6 1 0 0 0 0 0 0
1 3 0 3 5 2 2 1 6 1 5 2 2 1 6 1 5 1 2 1 6 0 5 2 2 1 6 1 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 1 2 1 4 0 5 2 2 1 7 1 * * * * * *
1 3 1 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3
1 3 2 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 1 2 2 4 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
1 3 3 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
1 3 4 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 6 0 5 2 2 0 7 0

```
1 3 5 3 2 2 1 2 7 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 1 2 7 1 2 1 2 2 4 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * *
1 3 6 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 2 1 2 2 7 1 5 2
2 2 7 3 * * * * * * * * * * * * 5 2 0 0 0 0
1 3 7 3 1 0 0 2 0 3 1 2 0 2 7 3 2 1 1 1 2 0 * * * * * * 0 0 0 1 0 0 1 1 2 1 4 0 * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
1 3 8 3 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 2 7 2 * *
* * * * 5 2 2 2 7 3 * * * * * * * * * * * *
1 3 9 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2
0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * *
1 4 0 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
1 4 1 3 2 2 2 2 7 3 0 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
1 4 2 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 7 1 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 * * * * * * 5 2 2 1 6 0 * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
1 4 3 3 5 1 0 0 6 0 5 1 0 0 4 0 5 1 0 0 4 0 5 2 0 0 0 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 1 0 0 4 0 5 1 0 0 4 0 5 2 0 0 0 0
1 4 4 3 5 1 2 1 4 0 5 2 2 1 7 1 5 2 2 2 7 2 5 2 1 1 6 0 * * * * * * 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 1 7 1 5 2 2 2 7 3 5 2 0 0 0 0
1 4 5 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 1 7 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 1 6 1
1 4 6 3 5 1 2 1 4 0 * * * * * * 5 1 2 1 4 0 5 2 2 1 6 1 5 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2
2 1 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2 1 0 5 0 5 0 0 0 0 0
1 4 7 3 5 2 0 2 7 3 5 2 1 1 4 0 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 1 2 1 4 0 5 2
2 2 7 3 5 2 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * *
1 4 8 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
1 4 9 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 4 2 2 2 7 3 * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
1 5 0 3 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
1 5 1 3 5 2 2 1 6 0 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * 5 2
2 1 6 1 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 * * * * * *
1 5 2 3 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 7 2 * * * * * * 5 2 2 2 7 2 * * * * * * 5 2 0 0 0 0 * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
1 5 3 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 3 5 0 0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * *
1 5 4 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 2 2 7 2 4 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 2 2 1 6 0 * * * * * * * * * * * *
1 5 5 3 5 1 2 1 4 0 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 2 5 2 0 0 0 0 5 2 0 0 0 0 5 2 2 2 7 2 5 2
0 0 0 0 5 2 2 2 7 3 5 2 1 1 4 0 * * * * * *
1 5 6 3 2 1 1 2 2 3 2 2 1 1 4 0 2 1 2 1 4 0 * * * * * * 3 1 0 0 5 0 * * * * * * 2 1
1 1 4 0 2 1 1 1 4 0 2 1 1 1 2 0 * * * * * *
1 5 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
```

2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3
1 5 8 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2 2 2 7 3 5 2
2 2 7 3 5 0 0 0 0 0 * * * * * * * * * * * *
1 5 9 3 5 2 2 2 7 3 5 2 1 0 6 0 5 1 2 2 4 2 2 2 2 2 7 3 4 2 2 2 7 3 2 2 2 2 7 3 5 2
0 0 0 0 2 2 2 2 7 3 * * * * * * * * * * * *
1 6 0 3 0 0 0 2 0 3 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 2 0 * * * * * * 2 1 2 1 4 0 2 1 1 1 4 0 * *
* * * * 2 1 1 1 4 0 * * * * * * * * * * * *

ANEXO V

PROTOCOLOS DE RESPUESTA

Problema nº _______ (tachar lo que no proceda)

[Sí]
1.- Opino que este problema [No] se trata de un problema algebraico,
(en caso de <u>no</u>) porque ____
____

[Sí]
2.- Considero que [No] es apto para la Secundaria Obligatoria,
(en caso de <u>no</u>) porque ____
____

3.- En este apartado las consideraciones que propongo son: ______________
____
____

ANEXO VI

```
NUMBER OF CASES READ. . . . . . . . . . . . . .     160
 HISTOGRAM OF VARIABLE    2 sujeto
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      160      1.750      0.832
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
secunda +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 80  80 50.0
50.0
tricin   +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX       40  120  25.0  75.0
mascinco +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX        40  160  25.0
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE    3 sistem_1
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      160      3.644      1.481
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XX                                2    2   1.3   1.3
NEE      +XXXXXXX                               7    9   4.4   5.6
NPT     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  48   57  30.0
35.6
grafico  +XXXXXXX                               7   64   4.4  40.0
grafsimb +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                      21   85  13.1  53.1
simbolo +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 75 160 46.9
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE    4 plant_1
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      160      1.619      0.559
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXXX                                6    6   3.8   3.8
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 49  55 30.6
34.4
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 105 160 65.6
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
```

```
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE    5 ejecu_1
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      160       1.669      0.651
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXX                              16   16  10.0  10.0
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                              21   37  13.1  23.1
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 123 160 76.9
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE    6 resul_1
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      160       1.556      0.652
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXX                              14   14   8.8   8.8
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX      43   57  26.9
35.6
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 103 160 64.4
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE    7 lyns_1
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      160       5.463      2.166
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXX                              11   11   6.9   6.9
aritmeti +XX                              2   13   1.3   8.1
internal +XXXXXX                              6   19   3.8  11.9
analiti  +                              0   19   0.0  11.9
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX        39   58  24.4  36.3
ari_anal +X                              1   59   0.6  36.9
inte_ana +XXXXXXXX                              8   67   5.0  41.9
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 93 160 58.1
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE    8 atenci_1
```

```
                     SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                       X      160       1.906       1.418
              EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                    FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  55   55  34.4
34.4
errorat  +XXX                                  3   58   1.9  36.3
unobien  +XXXX                                  4   62   2.5  38.8
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 98 160 61.3
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE    9 sistem_2
                     SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                       X      149       3.906       1.698
              EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                    FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XXXXX                                   5    5   3.4   3.4
NEE      +XXXXXXXXXXXXXXXXXX                          18   23  12.1  15.4
NPT      +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                         20   43  13.4  28.9
grafico  +XXX                                  3   46   2.0  30.9
grafsimb +                                    0   46   0.0  30.9
simbolo +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 103 149 69.1
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   10 plant_2
                     SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                       X      149       1.839       0.451
              EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                    FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXX                                   5    5   3.4   3.4
malplant +XXXXXXXXXXXXXX                             14   19   9.4  12.8
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 130 149 87.2
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   11 ejecu_2
                     SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                       X      149       1.289       0.765
              EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                    FREQUENCY PERCENTAGE
```

```
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                  28   28  18.8  18.8
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 50  78 33.6
52.3
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 71 149 47.7
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   12 resul_2
                          SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                            X      149       1.208       0.747
                  EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                 29   29  19.5  19.5
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 60  89 40.3
59.7
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 60 149 40.3
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   13 lyns_2
                          SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                            X      149       4.705       2.685
                  EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                     25   25  16.8  16.8
aritmeti +XXXXXXXXX                                      9   34   6.0  22.8
internal +X                                              1   35   0.7  23.5
analiti  +XX                                             2   37   1.3  24.8
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                        22   59  14.8  39.6
ari_anal +XXXXXXX                                        7   66   4.7  44.3
inte_ana +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                          20   86  13.4  57.7
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 63 149 42.3
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   14 atenci_2
                          SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                            X      149       1.188       1.411
                  EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
```

```
nada      +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  83   83  55.7
55.7
errorat  +XXXXXXXX                                         8   91   5.4  61.1
unobien  +XXXXX                                            5   96   3.4  64.4
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 53 149 35.6
100.0
          +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
               5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   15 sistem_3
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      142       3.930      1.500
                  EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                        FREQUENCY PERCENTAGE
NAME          5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
          +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XX                                        2    2   1.4   1.4
NEE       +X                                        1    3   0.7   2.1
NPT       +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  46   49  32.4
34.5
grafico  +                                          0   49   0.0  34.5
grafsimb +                                          0   49   0.0  34.5
simbolo +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 93 142 65.5
100.0
          +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
               5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   16 plant_3
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      142       1.465      0.567
                  EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                        FREQUENCY PERCENTAGE
NAME          5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
          +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXX                                     5    5   3.5   3.5
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  66   71  46.5
50.0
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 71 142 50.0
100.0
          +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
               5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   17 ejecu_3
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      142       1.599      0.705
                  EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                        FREQUENCY PERCENTAGE
NAME          5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
          +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXXX                       18   18  12.7  12.7
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                    21   39  14.8  27.5
```

```
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 103 142 72.5
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
            5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   18 resul_3
                              SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                                X      142      1.303      0.714
                     EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                       21   21  14.8  14.8
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 57  78 40.1
54.9
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 64 142 45.1
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
            5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   19 lyns_3
                              SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                                X      142      5.021      2.277
                     EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXX                       13   13   9.2   9.2
aritmeti +                                 0   13   0.0   9.2
internal +XXXXXXXXXXX                         11   24   7.7  16.9
analiti  +                                 0   24   0.0  16.9
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX        39   63  27.5  44.4
ari_anal +XXX                                3   66   2.1  46.5
inte_ana +XXXXXXXXXXXX                        12   78   8.5  54.9
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 64 142 45.1
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
            5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   20 atenci_3
                              SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                                X      142      1.232      1.377
                     EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 76   76  53.5
53.5
errorat  +XX                                 2   78   1.4  54.9
unobien  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXX                      19   97  13.4  68.3
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  45 142 31.7
```

```
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   21 sistem_4
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      141       4.362       1.385
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XXXX                                  4    4   2.8   2.8
NEE      +XXXX                                  4    8   2.8   5.7
NPT      +XXXXXXXXXXXXXXXXXX                           18   26  12.8  18.4
grafico  +                                  0   26   0.0  18.4
grafsimb +                                  0   26   0.0  18.4
simbolo +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 115 141 81.6
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   22 plant_4
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      141       1.787       0.504
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXXX                                6    6   4.3   4.3
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXX                           18   24  12.8  17.0
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 117 141 83.0
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   23 ejecu_4
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      141       1.362       0.813
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                30   30  21.3  21.3
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                30   60  21.3  42.6
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 81 141 57.4
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   24 resul_4
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
```

```
                         X      141       1.163       0.816
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                 FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX          37   37  26.2  26.2
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX    44   81  31.2
57.4
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 60 141 42.6
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   25 lyns_4
                       SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                         X      141       4.716       2.789
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                 FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                29   29  20.6  20.6
aritmeti +XXXX                             4   33   2.8  23.4
internal +X                              1   34   0.7  24.1
analiti  +X                              1   35   0.7  24.8
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                     21   56  14.9  39.7
ari_anal +XXX                              3   59   2.1  41.8
inte_ana +XXXXXXXXXXXXXXXXX                     17   76  12.1  53.9
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 65 141 46.1
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   26 atenci_4
                       SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                         X      141       1.319       1.390
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                 FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  68   68  48.2
48.2
errorat  +XXXXXXXXXXXX                      12   80   8.5  56.7
unobien  +XXXXXXXXX                        9   89   6.4  63.1
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 52 141 36.9
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   27 sistem_5
                       SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                         X      118       3.534       1.567
```

```
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XXXXXXXX                              8    8   6.8   6.8
NEE      +                             0    8   0.0   6.8
NPT      +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX           32   40  27.1  33.9
grafico  +XXXXXXXX                              8   48   6.8  40.7
grafsimb +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                21   69  17.8  58.5
simbolo +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 49 118 41.5
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   28 plant_5
                       SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                         X      118       1.331       0.693
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXXXXXXXXXXXX                        15   15  12.7  12.7
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  49   64  41.5
54.2
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 54 118 45.8
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   29 ejecu_5
                       SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                         X      118       1.424       0.851
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX               28   28  23.7  23.7
malejecu +XXXXXXXXXXXX                          12   40  10.2  33.9
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 78 118 66.1
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   30 resul_5
                       SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                         X      118       1.136       0.761
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX               27   27  22.9  22.9
```

```
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 48  75 40.7
63.6
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX     43  118  36.4
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   31 lyns_5
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      118       4.390      2.565
               EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                        21   21  17.8  17.8
aritmeti +X                                     1   22   0.8  18.6
internal +XXXXX                                      5   27   4.2  22.9
analiti  +XX                                    2   29   1.7  24.6
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX          38   67  32.2  56.8
ari_anal +X                                     1   68   0.8  57.6
inte_ana +XXXXXX                                      6   74   5.1  62.7
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX   44  118  37.3
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   32 atenci_5
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      118       1.093      1.384
               EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 69   69  58.5
58.5
errorat  +XXXXXXX                                     7   76   5.9  64.4
unobien  +XXXX                                      4   80   3.4  67.8
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX        38  118  32.2 100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45


 HISTOGRAM OF VARIABLE   33 sistem_6
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      146       3.870      1.586
               EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XXXX                                      4    4   2.7   2.7
NEE      +XXXXXX                                      6   10   4.1   6.8
```

```
NPT      +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX        38   48  26.0  32.9
grafico  +XXX                              3   51   2.1  34.9
grafsimb +X                                1   52   0.7  35.6
simbolo +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 94 146 64.4
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   34 plant_6
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      146      1.644      0.584
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXXXXX                              8    8   5.5   5.5
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX         36   44  24.7  30.1
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 102 146 69.9
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   35 ejecu_6
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      146      1.658      0.679
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXX                     17   17  11.6  11.6
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXX                      16   33  11.0  22.6
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 113 146 77.4
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   36 resul_6
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X      146      1.500      0.726
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                  20   20  13.7  13.7
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX          33   53  22.6  36.3
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 93 146 63.7
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   37 lyns_6
```

```
                      SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                        X      146      5.315      2.426
               EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXXXXX                         16   16  11.0  11.0
aritmeti +X                                1   17   0.7  11.6
internal +XXXXXXX                               7   24   4.8  16.4
analiti  +                               0   24   0.0  16.4
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                30   54  20.5  37.0
ari_anal +                                0   54   0.0  37.0
inte_ana +XXX                                3   57   2.1  39.0
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 89 146 61.0
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   38 atenci_6
                      SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                        X      146      1.836      1.400
               EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  50   50  34.2
34.2
errorat  +XXXXXX                               6   56   4.1  38.4
unobien  +XXXXXXXX                               8   64   5.5  43.8
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 82 146 56.2
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   39 sistem_7
                      SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                        X      125      3.744      1.778
               EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XXXXXXXXX                              9    9   7.2   7.2
NEE      +XXXXXXX                               7   16   5.6  12.8
NPT      +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                28   44  22.4  35.2
grafico  +                               0   44   0.0  35.2
grafsimb +                                0   44   0.0  35.2
simbolo  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 81 125 64.8
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45
```

```
 HISTOGRAM OF VARIABLE   40 plant_7
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      125      1.584      0.637
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXXXXXXX                               10   10   8.0   8.0
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX              32   42  25.6  33.6
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 83 125 66.4
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   41 ejecu_7
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      125      1.360      0.797
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                    25   25  20.0  20.0
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX               30   55  24.0  44.0
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 70 125 56.0
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   42 resul_7
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      125      1.136      0.776
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX               30   30  24.0  24.0
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 48  78 38.4
62.4
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 47 125 37.6
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   43 lyns_7
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      125      4.536      2.678
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                         20   20  16.0  16.0
```

```
aritmeti +XXXXXXXXXX                                10   30   8.0  24.0
internal +XX                                2   32   1.6  25.6
analiti  +                                0   32   0.0  25.6
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                26   58  20.8  46.4
ari_anal +XX                                2   60   1.6  48.0
inte_ana +XXXXXXXXXXXXXXXX                          16   76  12.8  60.8
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 49 125 39.2
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   44 atenci_7
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      125      1.192      1.407
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME          5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  68   68  54.4
54.4
errorat  +XXXXXXXXXX                                10   78   8.0  62.4
unobien  +XX                                2   80   1.6  64.0
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  45 125 36.0
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   45 sistem_8
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      124      3.766      1.786
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME          5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XXXXXXXXXX                                10   10   8.1   8.1
NEE      +XXXXXX                                6   16   4.8  12.9
NPT      +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                26   42  21.0  33.9
grafico  +                                0   42   0.0  33.9
grafsimb +X                                1   43   0.8  34.7
simbolo  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 81 124 65.3
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   46 plant_8
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      124      1.355      0.756
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                FREQUENCY PERCENTAGE
NAME          5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
```

```
noplant  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                      21   21  16.9  16.9
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX       38   59  30.6  47.6
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 65 124 52.4
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45


 HISTOGRAM OF VARIABLE   47 ejecu_8
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      124      1.323      0.870
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                    FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX             33   33  26.6  26.6
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXX                            18   51  14.5  41.1
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 73 124 58.9
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   48 resul_8
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      124      1.185      0.849
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                    FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX           35   35  28.2  28.2
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX               31   66  25.0  53.2
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 58 124 46.8
100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
              5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   49 lyns_8
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X      124      4.476      2.804
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                    FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                  28   28  22.6  22.6
aritmeti +X                                              1   29   0.8  23.4
internal +XX                                             2   31   1.6  25.0
analiti  +X                                              1   32   0.8  25.8
ari_inte +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX               31   63  25.0  50.8
ari_anal +                                               0   63   0.0  50.8
inte_ana +XXXX                                           4   67   3.2  54.0
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 57 124 46.0
```

```
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   50 atenci_8
                              SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                                X      124       1.371       1.490
                     EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                     FREQUENCY PERCENTAGE

NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada    +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  66   66  53.2
53.2
errorat  +XX                                       2   68   1.6  54.8
unobien  +                                         0   68   0.0  54.8
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 56 124 45.2
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   51 sistem_9
                              SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                                X      104       4.413       1.312
                     EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                     FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XX                                        2    2   1.9   1.9
NEE      +XXXX                                       4    6   3.8   5.8
NPT      +XXXXXXXXXX                                   10   16   9.6  15.4
grafico  +XX                                       2   18   1.9  17.3
grafsimb +X                                        1   19   1.0  18.3
simbolo +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 85 104 81.7
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   52 plant_9
                              SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                                X      104       1.808       0.504
                     EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                     FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXX                                       5    5   4.8   4.8
malplant +XXXXXXXXXX                                   10   15   9.6  14.4
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 89 104 85.6
100.0
        +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
           5   10   15   20   25   30   35   40   45
```

```
 HISTOGRAM OF VARIABLE   53 ejecu_9
                        SYMBOL  COUNT    MEAN     ST.DEV.
                          X      104      1.433      0.747
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXX                            16   16  15.4  15.4
malejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                 27   43  26.0  41.3
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 61 104 58.7
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   54 resul_9
                        SYMBOL  COUNT    MEAN     ST.DEV.
                          X      104      1.221      0.763
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                       21   21  20.2  20.2
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX     39   60  37.5  57.7
bonresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX   44  104  42.3
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   55 lyns_9
                        SYMBOL  COUNT    MEAN     ST.DEV.
                          X      104      5.038      2.565
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME        5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXX                           13   13  12.5  12.5
aritmeti +XXXXX                                5   18   4.8  17.3
internal +XXXXX                                5   23   4.8  22.1
analiti  +XX                                 2   25   1.9  24.0
ari_inte +XXXXXXX                               7   32   6.7  30.8
ari_anal +XXXXXX                                6   38   5.8  36.5
inte_ana +XXXXXXXXXXXXXXXXX                        17   55  16.3  52.9
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 49 104 47.1
100.0
       +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   56 atenci_9
                        SYMBOL  COUNT    MEAN     ST.DEV.
                          X      104      1.365      1.408
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
```

```
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME       5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada    +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX*  48   48  46.2
46.2
errorat  +XXXXXXXXXXXX                           12   60  11.5  57.7
unobien  +XX                                  2   62   1.9  59.6
todobien +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX      42  104  40.4
100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45



 HISTOGRAM OF VARIABLE   57 sistem_0
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X       68       3.853       1.660
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME       5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinform +XXXXXXX                              7    7  10.3  10.3
NEE     +                              0    7   0.0  10.3
NPT     +XXXXXXXX                              8   15  11.8  22.1
grafico  +XXXX                              4   19   5.9  27.9
grafsimb +XXXXXXXXXXX                           11   30  16.2  44.1
simbolo  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX        38   68  55.9 100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   58 plant_0
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X       68       1.206       0.802
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME       5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noplant  +XXXXXXXXXXXXXXXX                        16   16  23.5  23.5
malplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                    22   38  32.4  55.9
bonplant +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX              30   68  44.1 100.0
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
         5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   59 ejecu_0
                        SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                          X       68       0.956       0.921
                 EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                  FREQUENCY PERCENTAGE
NAME       5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noejecu  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX              30   30  44.1  44.1
```

```
malejecu +XXXXXXXXXXX                                    11   41  16.2  60.3
bonejecu +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                    27   68  39.7 100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
             5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   60 resul_0
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X       68      0.706      0.754
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noresul  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX               32   32  47.1  47.1
malresul +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                       24   56  35.3  82.4
bonresul +XXXXXXXXXXXX                                   12   68  17.6 100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
             5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   61 lyns_0
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X       68      3.353      2.838
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
noinfor  +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX                         22   22  32.4  32.4
aritmeti +XX                                              2   24   2.9  35.3
internal +XXXXXXX                                         7   31  10.3  45.6
analiti  +                                                0   31   0.0  45.6
ari_inte +XXXXXXXXXXXX                                   12   43  17.6  63.2
ari_anal +                                                0   43   0.0  63.2
inte_ana +XXXXXXXXXXX                                    11   54  16.2  79.4
ar_in_an +XXXXXXXXXXXXXX                                 14   68  20.6 100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
             5   10   15   20   25   30   35   40   45

 HISTOGRAM OF VARIABLE   62 atenci_0
                         SYMBOL  COUNT     MEAN     ST.DEV.
                           X       68      0.662      1.141
                EACH SYMBOL REPRESENTS        1 OBSERVATIONS
INTERVAL                                   FREQUENCY PERCENTAGE
NAME         5   10   15   20   25   30   35   40   45  INT. CUM. INT.  CUM.
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
nada     +XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX* 47   47  69.1
69.1
errorat  +XXXXXXXXX                                       9   56  13.2  82.4
unobien  +                                                0   56   0.0  82.4
todobien +XXXXXXXXXXXX                                   12   68  17.6 100.0
         +----+----+----+----+----+----+----+----+----+
             5   10   15   20   25   30   35   40   45
```

NUMBER OF INTEGER WORDS USED IN PRECEDING PROBLEM 6668

```
APLICACIÓN DEL MODELO DE LINS DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO
/INPUT         VARIABLES = 9.
               FORMAT IS FREE.
/VARIABLE      NAMES = problema, noinform, aritmeti, internal,
               analitic, ari_inte, ari_ana, inte_ana, ar_in_an.
               LABEL = problema.
/PROCEDURE     LINK = centroid.
/PRINT         DATA.
               DISTANCE.
/END
PROBL_1  6.9 1.3  3.8 0.0 24.4 0.6  5.0 58.1
PROBL_2 16.8 6.0  0.7 1.3 14.8 4.7 13.4 42.3
PROBL_3  9.2 0.0  7.7 0.0 27.5 2.1  8.5 45.1
PROBL_4 20.6 2.8  0.7 0.7 14.9 2.1 12.1 46.1
PROBL_5 17.8 0.8  4.2 1.7 32.2 0.8  5.1 37.3
PROBL_6 11.0 0.7  4.8 0.0 20.5 0.0  2.1 61.0
PROBL_7 16.0 8.0  1.6 0.0 20.8 1.6 12.8 39.2
PROBL_8 22.6 0.8  1.6 0.8 25.0 0.0  3.2 46.0
PROBL_9 12.5 4.8  4.8 1.9  6.7 5.8 16.3 47.1
PROBL_0 32.4 2.9 10.3 0.0 17.6 0.0 16.2 20.6
```

```
/END
```

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN UTILIZADO EN LOS PROBLEMAS

```
/INPUT          VARIABLES = 7.
                FORMAT = free.
/VARIABLE         NAMES = problema, noinform, EE, PT, grafico,
                grasimbo, simbolo.
                LABEL = problema.
/PROCEDURE         LINK = CENTROID.
/PRINT          DATA.
                DISTANCE.
/END
probl_1  1.3  4.4  30.0 4.4  13.1 46.9
probl_2  3.4 12.1 13.4 2.0  0.0 69.1
probl_3  1.4  0.7 32.4 0.0  0.0 65.5
probl_4  2.8  2.8 12.8 0.0  0.0 81.6
probl_5  6.8  0.0 27.1 6.8 17.8 41.5
probl_6  2.7  4.1 26.0 2.1  0.7 64.4
probl_7  7.2  5.6 22.4 0.0  0.0 64.8
probl_8  8.1  4.8 21.0 0.0  0.8 65.3
probl_9  1.9  3.8  9.6 1.9  1.0 81.7
probl_0 10.3  0.0 11.8 5.9 16.2 55.9
```

/END

ANEXO VII

ANALISIS DE CLUSTERS, PARA CASOS-PROBLEMAS, SEGUN SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: ALGORITMO DE AMALGAMACION LINKAGE SIMPLE

NUMBER OF CASES READ. 10

PRINT DISTANCE MATRIX? . . . . NO

TYPE OF TREE PRINTED. . . . . VERTICAL

CALCULATING PROCEDURE . . . . SUM-SQR

STANDARDIZATION OF INPUT DATA . . . . YES

AMALGAMATION RULE . . . . SINGLE

NUMBER OF NEIGHBORS USED FOR DISTANCE CALC. . . 1

```
 NO          1
    . 1 4 9 7 8 6 3 0 5 2
 AMALG.
DISTANCE
       * * * * * * * * * *
```

```
   0.413  I I I -+- I I I I I
   0.936  I -+-  I  I I I I I
   1.540  I  I   I  -+- I I I
   1.735  I  I   --+--  I I I
   2.264  I  ----+--    I I I
   2.405  ------+-      I I I
   2.453       I       -+- I
   2.456       --+-------  I
   2.582         -+---------
```

```
*** NOTE   *** DISTANCES BETWEEN CASES REPRESENTED IN SHADED FORM.
               HEAVY SHADING INDICATES SMALL DISTANCES.
CASE  CASE
 NO.  LABEL
  1 prob     X
  4 prob     .X
  9 prob     .XX
  7 prob     -X+X
  8 prob     -X-XX
  6 prob     XXXXXX
  3 prob     ---++XX
 10 prob     .  .-. X
  5 prob     +   .. +X
  2 prob     .-++-+.  X
```

```
THE DISTANCES HAVE BEEN REPRESENTED ABOVE IN SHADED
FORM ACCORDING TO THE FOLLOWING SCHEME
        X                  LESS THAN       2.413
        +     FROM     2.413     TO          2.773
        -     FROM     2.773     TO          3.817
        .     FROM     3.817     TO          4.304
```

GREATER THAN 4.304

ANEXO VIII

CLUSTERS SUJETOS

ANEXO IX

CONTRASTES DE HIPÓTESIS DE GRUPOS.

ESTADISTICOS DESCRIPTIVOS DE PLANTEAMIENTO TOTAL

```
  ************
  * TOTAPLAN *
  ************
                                                VALUE    ZSCORE  CASE #
                                       MAX     10.0000000     1.794      34
VARIABLE NUMBER . . . . . .       63     MIN      0.0000000    -2.013     160
NUMBER OF DISTINCT VALUES .       11
NUMBER OF VALUES COUNTED. .      160                VALUE    VALUE/S.E.
NUMBER OF VALUES NOT COUNTED       0     SKEWNESS      0.17     0.870
***VALUES ARE ROUNDED TO. .   1.0000     KURTOSIS     -0.86    -2.218
        H            EACH 'H' REPRESENTS     3 COUNTS
     H H H   H        EACH '-' REPRESENTS  .500000 UNITS
     H H H H H
     H H H H H     H   L =  0.00000
  H H H H H H H H   H   U =  11.0000
  H H H H H H H H H H
  H H H H H H H H H H
 HH H H H H H H H H H
L----------------------U
             ESTIMATE      ST.ERROR                      ESTIMATE
MEAN            5.2875000      0.2076348         ST.DEV.        2.6263960
MEDIAN           5.0000000      0.2886753         VARIANCE       6.8979550
MODE            5.0000000                      RANGE         10.0000000
                                   (Q3-Q1)/2      2.0000000
TRIM(.15)        5.2053571
HAMPEL           5.2128000            LOWER 95% C.L. OF MEAN      4.8774220
BWEIGHT          5.2191525            UPPER 95% C.L. OF MEAN      5.6975780
```

```
                                        Q1      3.0000000
TEST OF NORMALITY                            Q3      7.0000000
W STATISTIC        0.9356                 S-      2.6611040
SIGNIFICANCE LEVEL  0.0000                     S+      7.9138960
      EACH '.' BELOW =       0.1500
           S Q               Q    S
  M          - 1       M M      3    +        M
  I...............................E.E...............................A
```

VARIABLE DESEMPENO TOTAL-FINAL: Obtenida mediante sumatorio de atencion en la actuacion en cada uno de los 10 items/problemas

```
                                    VALUE    ZSCORE  CASE #
                              MAX     30.0000000     2.315      34
VARIABLE NUMBER . . . . . .       63     MIN      0.0000000    -1.317      22
NUMBER OF DISTINCT VALUES .       11
NUMBER OF VALUES COUNTED. .      160              VALUE    VALUE/S.E.
NUMBER OF VALUES NOT COUNTED       0     SKEWNESS      0.74     3.844
***VALUES ARE ROUNDED TO. .   3.0000     KURTOSIS     -0.24    -0.620
   H
 H H H          EACH 'H' REPRESENTS     3 COUNTS
 H H H          EACH '-' REPRESENTS  1.50000 UNITS
 HH H H H H
 HH H H H H          L =  0.00000
 HH H H H H          U =  33.0000
 HH H H H H H       H
 HH H H H H H H H H H
 HH H H H H H H H H H
L---------------------U
```

```
            ESTIMATE     ST.ERROR                  ESTIMATE
MEAN         10.8750000   0.6530498      ST.DEV.      8.2604990
MEDIAN        9.0000000   0.0000000      VARIANCE    68.2358500
MODE          9.0000000               RANGE       30.0000000
                                  (Q3-Q1)/2    5.6250000
TRIM(.15)     9.7500000
HAMPEL        9.9777778       LOWER 95% C.L. OF MEAN    9.5852290
BWEIGHT       9.8147831       UPPER 95% C.L. OF MEAN   12.1647700
                                     Q1     3.7500000
TEST OF NORMALITY                              Q3    15.0000000
W STATISTIC       0.8958                    S-     2.6145010
SIGNIFICANCE LEVEL  0.0000                      S+    19.1355000
        EACH '.' BELOW =      0.5000
        S Q              Q     S
     M   - 1      MH M     3     +             M
     I................EA.E.....................................A
     N            DM A                         X
                IP N
```

	PERCENTS				PERCENTS	
VALUE	COUNT	CELL	CUM	VALUE	COUNT	CELL	CUM
0.	17	10.6	10.6	18.	9	5.6	84.4
3.	23	14.4	25.0	21.	6	3.7	88.1
6.	24	15.0	40.0	24.	5	3.1	91.2
9.	27	16.9	56.9	27.	6	3.7	95.0
12.	17	10.6	67.5	30.	8	5.0	100.0
15.	18	11.3	78.7				

DIFERENCIA EN DESEMPENO TOTAL SEGUN TIPO DE SUJETOS. CONTRASTE NO PARAMETRICO

KRUSKAL-WALLIS ONE WAY ANALYSIS OF VARIANCE TEST RESULTS

VARIABLE 63 TOTAL

GROUP NO.	NAME	FREQUENCY	RANK SUM
1	secunda	80	5693.5
2	trescin	40	3370.5
3	mascinco	40	3816.0

KRUSKAL-WALLIS TEST STATISTIC = 7.69. LEVEL OF SIGNIFICANCE = 0.0214

USING CHI-SQUARE DISTRIBUTION WITH 2 DEGREES OF FREEDOM

MULTIPLE COMPARISONS

THE NULL HYPOTHESIS IS REJECTED IF ZSTAT IS LARGER THAN
THE CRITICAL VALUE ZC, WHERE 1-PHI(ZC)= ALPHA/(K(K-1)),
PHI IS THE CUMULATIVE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION FUNCTION,
ALPHA IS THE DESIRED OVERALL SIGNIFICANCE LEVEL, AND
K IS THE NUMBER OF GROUPS COMPARED.

WITH 3 GROUPS , THE CRITICAL Z VALUES ARE:

2.13 FOR OVERALL ALPHA OF .10 (*)

2.39 FOR OVERALL ALPHA OF .05 (**)

COMPARISONS	ZSTAT	DIF	SE
secunda - trescin	1.46	-13.09	8.95
secunda - mascinco	2.71**	-24.23	8.95
trescin - mascinco	1.08	-11.14	10.33

ANALISIS MULTIVARIADO DE LA VARIANZA: DESEMPENO TOTAL x TIPO DE

SUJETOS

BETWEEN FACTORS: sujeto

WITHIN FACTORS: atenci

NUMBER OF CASES READ. 160

NUMBER OF WITHIN CELLS 10

NUMBER OF BETWEEN CELLS 3

SUMMARY STATISTICS FOR VARIATE(S):

VARIATE COUNT MEAN STDERROR STD_DEV WTD_MEAN MAXIMUM MINIMUM

DEP_VAR 1600 1.091 0.3472E-01 1.389 1.157 3.000 0.0000

ANALYSIS INSTRUCTIONS

ANALYSIS PROC = FACTORIAL. /

WITHIN EFFECT: OBS: WITHIN CASE MEAN

EFFECT VARIATE STATISTIC F DF P

OVALL: GRAND MEAN

DEP_VAR

SS= 1926.544000

MS= 1926.544000 301.49 1, 157 0.0000

s: sujeto

DEP_VAR

SS= 69.622500

MS= 34.811250 5.45 2, 157 0.0052

ERROR

DEP_VAR

SS= 1003.25500000

MS= 6.39015924

WITHIN EFFECT: a: atenci

```
EFFECT   VARIATE      STATISTIC            F        DF        P
 a
     DEP_VAR
           TSQ=      283.677          29.91     9,   149  0.0000
        WCP SS=       243.121000
        WCP MS=        27.013444      23.04     9,  1413  0.0000
        GREENHOUSE-GEISSER ADJ. DF     23.04  7.56,1186.97 0.0000
        HUYNH-FELDT ADJUSTED DF       23.04  8.08,1268.75 0.0000
 (a) X (s: sujeto)
     DEP_VAR
           LRATIO=  0.761505          2.42    18, 298.00 0.0012
           TRACE=   0.297210
           TZSQ=     44.5815
             CHISQ =   36.23                 14.259  0.0011
           MXROOT=  0.184830                         0.0015
        WCP SS=        64.790000
        WCP MS=         3.599444       3.07    18,  1413  0.0000
        GREENHOUSE-GEISSER ADJ. DF      3.07 15.12,1186.97 0.0001
        HUYNH-FELDT ADJUSTED DF        3.07 16.16,1268.75 0.0000

 ERROR
     DEP_VAR
        WCP SS=      1656.52000000
        WCP MS=         1.17234253
        GGI EPSILON     0.84004
        H-F EPSILON     0.89791
```

ANALISIS MULTIVARIADO DE LA VARIANZA: PLANTEAMIENTO x TIPO-SUJETOS

BETWEEN FACTORS: sujeto

WITHIN FACTORS: PLANT

NUMBER OF CASES READ. 160

*** WARNING *** IN PARAGRAPH VARIABLE THE FOLLOWING TEXT WAS NOT READ:

/VARIABLE NAMES = sujeto, plant_1, plant_2, plant_3, plant_4, plant_5, plant_6, plant_7, plant_8, plant_9, plant_0.

*** NOTE *** NONE OF THIS PARAGRAPH WAS READ.

Proceed with execution ? (Y/N/H)▸

NUMBER OF WITHIN CELLS 10

NUMBER OF BETWEEN CELLS 3

SUMMARY STATISTICS FOR VARIATE(S):

VARIATE COUNT MEAN STDERROR STD_DEV WTD_MEAN MAXIMUM MINIMUM

DEP_VAR 1600 0.5288 0.1248E-01 0.4993 0.5487 1.000 0.0000

ANALYSIS INSTRUCTIONS

ANALYSIS PROC = FACTORIAL. /

WITHIN EFFECT: OBS: WITHIN CASE MEAN

EFFECT VARIATE STATISTIC F DF P

OVALL: GRAND MEAN

DEP_VAR

SS= 433.622250

MS= 433.622250 657.98 1, 157 0.0000

s: sujeto

DEP_VAR

SS= 6.211250

```
            MS=         3.105625      4.71     2,   157  0.0103
 ERROR
       DEP_VAR
            SS=       103.46625000
            MS=         0.65902070
WITHIN EFFECT: P: PLANT
EFFECT   VARIATE      STATISTIC            F        DF        P
 P
       DEP_VAR
            TSQ=     272.366         28.72     9,   149  0.0000
          WCP SS=        44.170250
          WCP MS=         4.907806      30.33     9,  1413  0.0000
          GREENHOUSE-GEISSER ADJ. DF     30.33  7.82,1228.41 0.0000
          HUYNH-FELDT ADJUSTED DF       30.33  8.38,1315.44 0.0000
 (P) X (s: sujeto)
       DEP_VAR
            LRATIO=  0.776850          2.23    18, 298.00 0.0032
            TRACE=   0.277027
            TZSQ=    41.5540
              CHISQ =   33.69                14.259  0.0026
            MXROOT=  0.189089                         0.0011
          WCP SS=         8.238750
          WCP MS=         0.457708       2.83    18,  1413  0.0001
          GREENHOUSE-GEISSER ADJ. DF      2.83 15.65,1228.41 0.0002
          HUYNH-FELDT ADJUSTED DF        2.83 16.76,1315.44 0.0001

 ERROR
       DEP_VAR
          WCP SS=       228.64625000
          WCP MS=         0.16181617
```

GGI EPSILON 0.86936

H-F EPSILON 0.93095

ANALISIS MULTIVARIADO DE LA VARIANZA: RESOLUCION x tipo de sujetos

BETWEEN FACTORS: sujeto

WITHIN FACTORS: resul

NUMBER OF CASES READ. 160

NUMBER OF WITHIN CELLS 10

NUMBER OF BETWEEN CELLS 3

SUMMARY STATISTICS FOR VARIATE(S):

VARIATE COUNT MEAN STDERROR STD_DEV WTD_MEAN MAXIMUM MINIMUM

DEP_VAR 1600 0.3650 0.1204E-01 0.4816 0.3867 1.000 0.0000

ANALYSIS INSTRUCTIONS

ANALYSIS PROC = FACTORIAL. /

WITHIN EFFECT: OBS: WITHIN CASE MEAN

EFFECT VARIATE STATISTIC F DF P

OVALL: GRAND MEAN

DEP_VAR

SS= 215.296000

MS= 215.296000 302.79 1, 157 0.0000

s: sujeto

DEP_VAR

SS= 8.205000

MS= 4.102500 5.77 2, 157 0.0038

ERROR

DEP_VAR

SS= 111.63500000

MS= 0.71105096

```
WITHIN EFFECT: r: resul
EFFECT   VARIATE      STATISTIC            F        DF        P
 r
      DEP_VAR
              TSQ=     289.735          30.55     9,   149  0.0000
          WCP SS=        31.819000
          WCP MS=          3.535444      24.34     9,  1413  0.0000
          GREENHOUSE-GEISSER ADJ. DF     24.34  7.60,1192.66 0.0000
          HUYNH-FELDT ADJUSTED DF       24.34  8.12,1275.15 0.0000
 (r) X (s: sujeto)
      DEP_VAR
              LRATIO=  0.757413          2.47    18, 298.00 0.0009
              TRACE=   0.303942
              TZSQ=     45.5913
                 CHISQ =   37.07                  14.259  0.0008
              MXROOT=  0.189728                          0.0011
          WCP SS=          8.570000
          WCP MS=          0.476111       3.28    18,  1413  0.0000
          GREENHOUSE-GEISSER ADJ. DF      3.28 15.19,1192.66 0.0000
          HUYNH-FELDT ADJUSTED DF        3.28 16.24,1275.15 0.0000

 ERROR
      DEP_VAR
          WCP SS=       205.24000000
          WCP MS=          0.14525124
          GGI EPSILON     0.84406
          H-F EPSILON     0.90244
```

```
NUMBER OF CASES READ. . . . . . . . . . . . . .    160
DIFERENCIAS EN PLANTEAMIENTO TOTAL SEGUN TIPO DE SUJETOS
HISTOGRAM OF * TOTAPLAN * (  63)   GROUPED  BY   * sujeto   * (   2)
          ************              ************
       secunda       trescinc       mascinco
MIDPOINTS................+................+................+
 10.500)
 10.000)**           ******         *******
  9.500)
  9.000)**           **            ***
  8.500)
  8.000)*****          ***           ****
  7.500)
  7.000)**********      ***            ******
  6.500)
  6.000)***********     ****            M**
  5.500)             N
  5.000)***********     ******          ******
  4.500)N
  4.000)*********      ********        ****
  3.500)
  3.000)***************  ****            **
  2.500)
  2.000)**********      *
  1.500)
  1.000)*****          ***           ****
  0.500)
  0.000)                  *
       LEGEND FOR GROUP MEANS:     M - MEAN COINCIDES WITH AN ASTERISK
                                   N - MEAN DOES NOT COINCIDE WITH ANY ASTERISK
```

MEAN 4.687 5.650 6.125

STD.DEV. 2.276 2.723 2.937

S. E. M. 0.254 0.430 0.464

MAXIMUM 10.000 10.000 10.000

MINIMUM 1.000 1.000 0.000

CASES INCL. 80 40 40

ALL GROUPS COMBINED (EXCEPT CASES WITH UNUSED VALUES FOR VARIABLE sujeto)

MEAN 5.287

STD. DEV. 2.626

S. E. M. 0.208

MAXIMUM 10.000

MINIMUM 0.000

CASES EXCLUDED (0)

CASES INCLUDED 160

ROBUST S.D. 2.744

```
---------------------------------------------------------------------------
| ANALYSIS OF VARIANCE TABLE FOR MEANS                     TAIL    |
|  SOURCE       SUM OF SQUARES    DF   MEAN SQUARE  F VALUE PROBABILITY
|  --------      --------------  ----   -----------  ------- ----------- |
|  sujeto            62.1125      2      31.0562    4.71    0.0103    |
|    ERROR          1034.6625   157       6.5902                      |
|-------------------------------------------------------------------------|
| EQUALITY OF MEANS TESTS; VARIANCES ARE NOT ASSUMED TO BE EQUAL
    |
|  WELCH                      2,  76              4.49    0.0143    |
|  BROWN-FORSYTHE                2, 110              4.25    0.0167    |
|-------------------------------------------------------------------------|
| LEVENE'S TEST FOR VARIANCES     2, 157              2.03    0.1352    |
---------------------------------------------------------------------------
```

TUKEY STUDENTIZED RANGE METHOD

95% CONFIDENCE INTERVALS

```
  GROUP        GROUP        MEAN                    .
 NO. LABEL     NO. LABEL      DIFF                  .
  1 secunda     2 trescinc   -0.96      L_______M_____._U
  1 secunda     3 mascinco   -1.44    L______M______U  .
  2 trescinc    3 mascinco   -0.47        L________M__._____U

                          -----+---------+---------+---------+-----
                            -2.25    -0.75     0.75     2.25
```

TUKEY STUDENTIZED RANGE METHOD

```
      SIGNIFICANCE AT
      ---------------
       1%  LEVEL  **
       5%  LEVEL  *
      10%  LEVEL  -        s  t  m
     >10%  LEVEL           e  r  a
      FOR   3 TESTS        c  e  s
                     u  s  c
                     n  c  i
                     d  i  n
 GROUP               SAMPLE  a  n  c
NO. LABEL      MEAN   SIZE     c  o
------------   ------  ----  --- --- ---
 1 secunda      4.69   80         *
 2 trescinc     5.65   40
 3 mascinco     6.12   40   *
```

STUDENT-NEWMAN-KEULS MULTIPLE RANGE TEST

```
                    95% CONFIDENCE LEVEL
            secunda  trescinc mascinco
            _______________
                  _______________
    MEANS          4.69    5.65    6.13
SAMPLE SIZE         80.     40.     40.
                  CONFIDENCE INTERVALS FOR EACH GROUP
                        T-DISTRIBUTION
                    95% CONFIDENCE INTERVALS
  GROUP          SAMPLE
 NO. LABEL    MEAN   SIZE
 1 secunda    4.69   80    L______M______U
 2 trescinc   5.65   40         L__________M__________U
 3 mascinco   6.12   40              L___________M___________U
                  +---------+---------+---------+---------+
                 4.00      4.80      5.60      6.40      7.20

PAIRWISE T-TEST OF * TOTAPLAN * (  63) GROUPED BY * sujeto   * (   2)
             ************               ************
  sujeto          SEPARATE VARIANCE   POOLED VARIANCE      DIFF.     CELL
  GROUP              T-VAL  DF P-VAL     T-VAL  DF P-VAL     OF MEANS   NO.
--------------------  ------------------  ------------------  --------  ------
  secunda  VS.                                              1
     trescinc       -1.92  66 0.0585    -1.94 157 0.0546      -0.962       2
     mascinco        -2.71  63 0.0085*   -2.89 157 0.0044*     -1.437       3
  trescinc VS.                                             2
     mascinco        -0.75  77 0.4554    -0.83 157 0.4092      -0.475       3
```

NOTATION FOR BONFERRONI SIGNIFICANCE LEVELS

A SINGLE COMPARISON MUST HAVE A P VALUE LESS THAN 0.016667 TO BE SIGNIFICANT AT THE .05 LEVEL WHEN COMPARING 3 PAIRS OF MEANS.

0.1% SIGNIFICANCE ***

1% SIGNIFICANCE **

5% SIGNIFICANCE *

10% SIGNIFICANCE -

>10% SIGNIFICANCE

ANEXO X

DESEMPEÑO FINAL SEGÚN CLUSTERS

	TIPO 1	TIPO 2	TIPO 3	TIPO 4
MEAN	7.048	6.333	16.452	9.250
STD.DEV.	5.113	5.248	8.446	5.694
S. E. M.	0.789	1.010	1.123	1.076
MAXIMUM	17.000	21.000	30.000	22.000
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000
CASES INCL.	42	28	62	28

ALL GROUPS COMBINED
(EXCEPT CASES WITH UNUSED
VALUES FOR VARIABLE cluster)

MEAN	10.891
STD. DEV.	8.194
S. E. M.	0.650
MAXIMUM	30.000
MINIMUM	0.000
CASES EXCLUDED	(1)
CASES INCLUDED	160
ROBUST S.D.	8.308

| ANALYSIS OF VARIANCE TABLE FOR MEANS

SOURCE	SUM OF SQUARES	DF	MEAN SQUARE	F VALUE	TAIL PROBABILITY
cluster	3172.4338	3	1057.4779	22.04	0.0000
ERROR	7436.5096	155	47.9775		

|---|

| EQUALITY OF MEANS TESTS; VARIANCES ARE NOT ASSUMED TO BE EQUAL

WELCH	3, 75	18.71	0.0000
BROWN-FORSYTHE	3, 146	27.22	0.0000

|---|

LEVENE'S TEST FOR VARIANCES	3, 155	9.21	0.0000

TUKEY STUDENTIZED RANGE METHOD

SIGNIFICANCE AT

1% LEVEL **
5% LEVEL *
10% LEVEL -
>10% LEVEL

FOR 6 TESTS

GROUP NO. LABEL	MEAN	SAMPLE SIZE	tipo 1	tipo 2	tipo3	tipo4
1 tipo 1	7.05	42			* *	
2 tipo 2	6.33	28			* *	
3 tipo3	16.45	62	* *	* *		* *
4 tipo 4	9.25	28			* *	

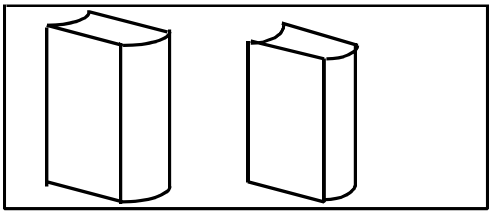
PAIRWISE T-TEST OF * DESEMPEÑO * (64) GROUPED BY * CLUSTER * (63)

Cluster GROUP	SEPARATE VARIANCE T-VAL	DF	P-VAL	POOLED VARIANCE T-VAL	DF	P-VAL	DIFF. CELL DIFF. OF MEANS
tipo 1 VS.							
tipo 2	0.56	54	0.5796	0.42	155	0.6765	0.714
tipo 3	- 6.85	99	0.0000***	- 6.79	155	0.0000***	- 9-404
tipo 4	- 1.65	53	0.1047	- 1.30	155	0.1944	- 2.202
tipo 2 VS.							
tipo 3	- 6.70	78	0.0000***	- 6.34	155	0.0000***	-10.118
tipo 4	- 1.98	52	0.0533	- 1.56	155	0.1205	- 2.917
tipo 3 VS.							
tipo 4	4.63	77	0.0000***	4.57	155	0.0000***	7.202

NOTATION FOR BONFERRONI SIGNIFICANCE LEVELS

A SINGLE COMPARISON MUST HAVE A P VALUE LESS THAN 0.016667 TO BE SIGNIFICANT AT THE .05 LEVEL WHEN COMPARING 3 PAIRS OF MEANS.

0.1% SIGNIFICANCE ***
1% SIGNIFICANCE **
5% SIGNIFICANCE *
10% SIGNIFICANCE -
>10% SIGNIFICANCE



ANEXO XI

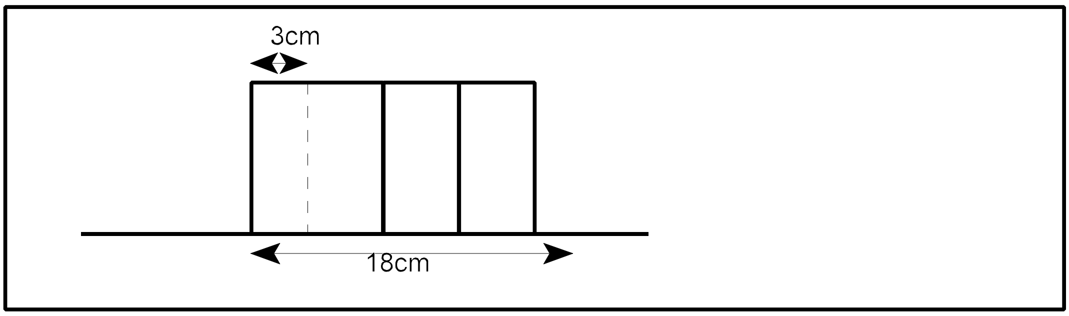
(1,1,1) (1ª etapa)

"En una estantería hemos colocado una colección de novelas. En la colección hay dos tipos de novela por su anchura: novelas gruesas y novelas delgadas. Si ponemos juntas una novela gruesa y dos delgadas, ocupan 18 cm de la estantería. La novela gruesa es 3 cm más ancha que la delgada.

¿Qué anchura tiene cada una de las novelas?"

Delgada	Gruesa	1 gruesa + 2 delgadas = 18 cm
2	5	5 + 4 = 9
3	6	6 + 6 = 12
7	10	10 + 14 = 24
…	…	…

Planteamiento 1



Planteamiento 3

Delgada = x

Gruesa = $x + 3$

entonces: $x + 3 + x + x = 18$ cm

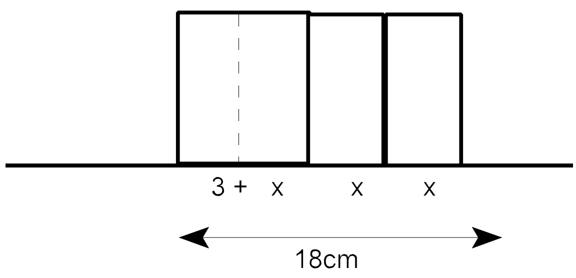
Planteamiento 5

Gruesa es 3 cm más ancha de la delgada

Entonces se le resta al total 3 cm y se divide:

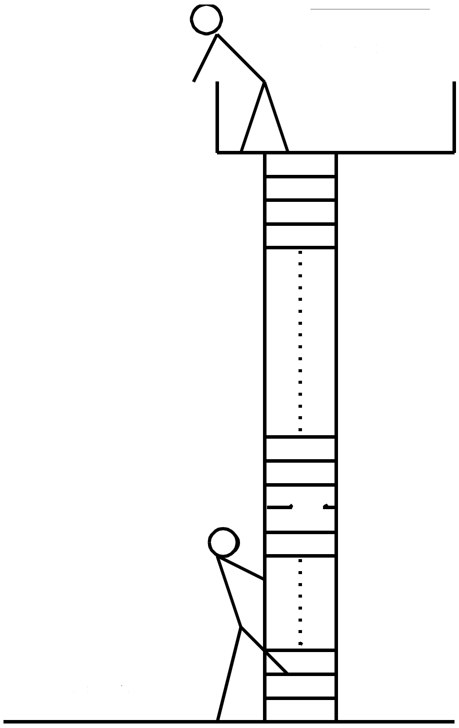
$18 - 3 = 15$ cm

Planteamiento 2



Planteamiento 4

(1,2,1) (2ª etapa)



Dos amigos, Ricardo y Roberto deciden subir a una torre. Ricardo sube primero, pero Roberto no se atreve. Entonces Ricardo le dice desde arriba: "¿Porqué no subes, si sólo tiene 56 peldaños?"

Pero Roberto le contesta: "No subo. Yo sé que a partir del escalón roto hay 2'5 veces más peldaños que antes".

¿Cuántos peldaños hay hasta el escalón roto (incluido éste) y cuántos hay después?”

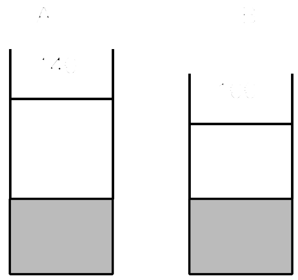
(1,1,2) (2ª etapa)

“Sara recorre 12 Km para ir de su casa al trabajo. Una parte del trayecto lo hace andando y la otra en autobús.

En autobús recorre un trayecto que es dos veces mayor que el que recorre andando.

¿Cuánto recorre andando y cuánto en autobús?”

(1,1,1) (2ª etapa)



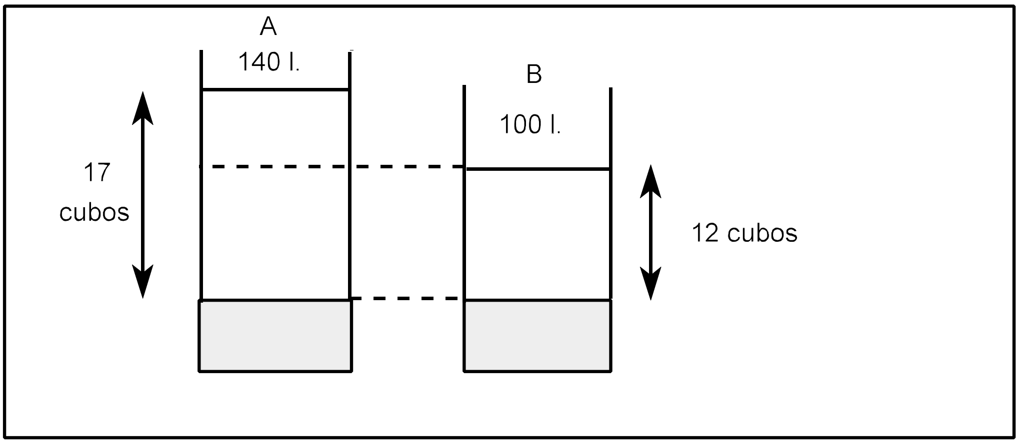
"Tenemos dos depósitos de agua. Al depósito A le caben 140 litros y al depósito B le caben 100 litros.

Del depósito A se sacan 17 cubos de agua y del depósito B se sacan 12 cubos de agua, quedándose los dos depósitos con la misma cantidad de agua.

¿Qué cantidad de agua cabe en cada cubo?"

cubo	Depósito A: 140 l. - 17 cubos	Depósito B: 100 l. - 12 cubos
5 l.	140 - 17·5 = 140 - 85 = 55 l. no	100 - 12·5 = 100 - 60 = 40 l. no
6 l.	140 - 17·6 = 140 - 102 = 38 l. no	100 - 12·6 = 100 - 72 = 28 l. no
10 l.	140 - 17·10 = 140 - 170 = no	100 - 12·10 = 100 - 120 = no
.....	......	....

Planteamiento 1



Planteamiento 3

Le queda a A: 140 l. - 17 cubos

Le queda a A igual que a B

Le queda a B: 100 l. - 12 cubos

A tiene: (140 - 100) l. más que B ; De A se sacan: (17 - 12) cubos más que de B

Planteamiento 2

(2,1,2) (1ª etapa)

“En un hipermercado ofertan un juego de 4 bolígrafos y 3 lápices por 410 ptas. Pero también hay un juego con 2 bolígrafos y 2 lápices, como los anteriores, por 220 ptas.

¿Cuánto cuesta cada bolígrafo y cada lápiz?

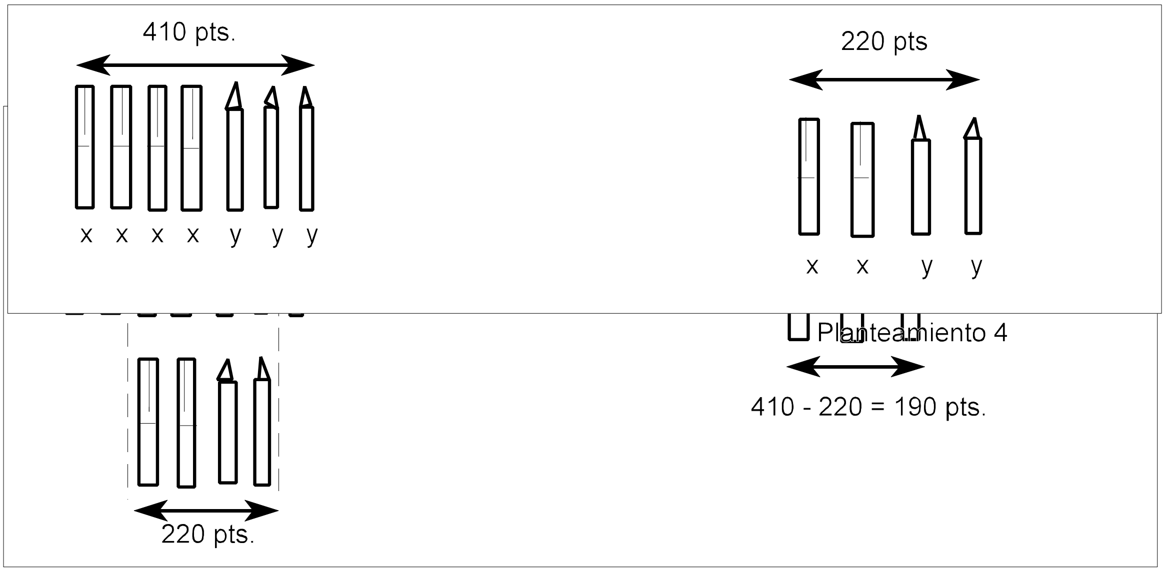
4 bolígrafos y 3 lápices cuestan 410 pts.

2 bolígrafos y 2 lápices cuestan 220 pts.

Entonces, 2 bolígrafos y 1 lápiz cuestan = 410 - 220 = 190 pts.

Planteamiento 2

Planteamiento 1



Planteamiento 3

bolígrafo = x	por lo tanto	$4x + 3y = 410$ pts.
lápiz = y		$2x + 2y = 220$ pts.

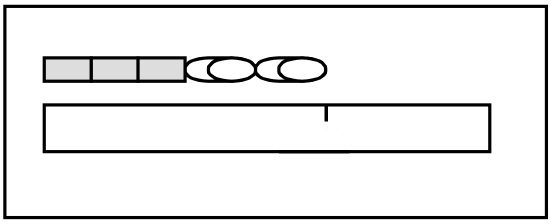
Planteamiento 5

(2,2,2) (2ª etapa)

"El tablero de una mesa de la biblioteca tiene 248 cm de largo por 172 cm de ancho.

David tiene dos regletas, una más larga que la otra. Ha comprobado que en lado largo de la mesa le caben 5 regletas grandes y 4 de las cortas, y en el lado ancho de la mesa le caben 4 regletas grandes y 2 cortas.

¿Cuánto mide cada regleta?"



(2,1,1) (1ª etapa)

"Patricia pone 3 gomas junto a 2 clips y mide con la regla 18 cm.
Pero si pone 2 gomas y 1 clip, entonces la regla marca 11 cm.
¿Cuánto mide cada goma y cada clip?"

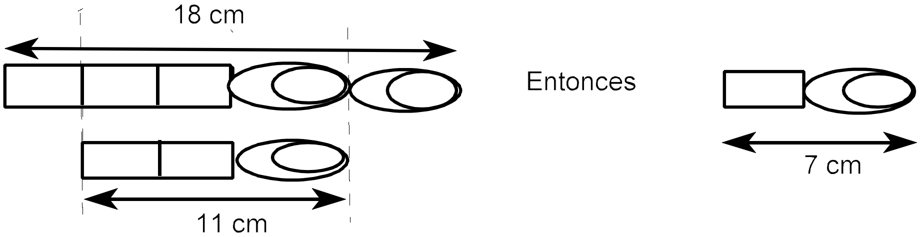
goma = x

clip = y

Por lo tanto:

$$3x + 2y = 18 \text{ cm}$$
$$2x + y = 11 \text{ cm}$$

Planteamiento 5



Planteamiento 3

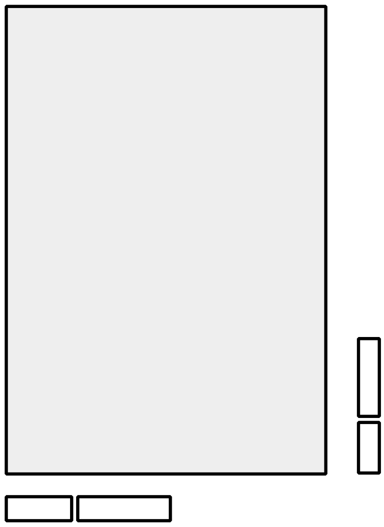
3 gomas y 2 clips miden 18 cm
2 gomas y 1 clip miden 11 cm

Entonces, 1 goma y 1 clip miden: 18 - 11 = 7 cm

Planteamiento 2

3	2	9 + 4 = 13	6 + 2 = 8
6	4	18 + 8 = 26	12 + 4 = 16
…	…	…	…

Planteamiento 1



(2,1,1) (2ª etapa)

“El tablero de una mesa de dibujo tiene 140cm de largo por 100 cm de ancho.

David tiene dos regletas, una más larga que la otra. Ha comprobado que en lado largo de la mesa le caben 5 regletas largas y 4 cortas, y en el lado ancho de la mesa le caben 4 regletas largas y 2 cortas.

¿Cuánto mide cada regleta?”

R. larga	R. corta	Largo: 5 largas + 4 cortas = 140 cm.	Ancho: 4 largas + 2 cortas = 100 cm.
10	5	5·10 + 4·5 = 50 + 20 = 70; no	4·10 + 2·5 = 40 + 10 = 50; no
15	10	5·15 + 4·10 = 75 + 40 = 115; no	4·15 + 2·10 = 60 + 20 = 80; no
30	20	5·30 +4·20 = 150 + 80 = 230; no	4·30 + 2·20 = 120 + 40 = 160; no
.....	.....	....	....

x x x y y

Planteamiento 1

11 cm

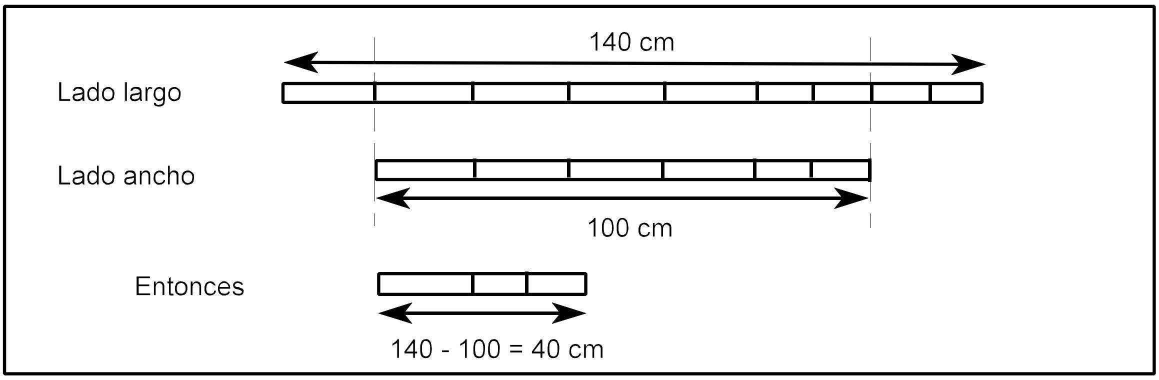
Planteamiento 4

Lado largo = 5 regletas largas + 4 regletas cortas = 140 cm.

Lado ancho = 4 regletas largas + 2 regletas cortas = 100 cm.

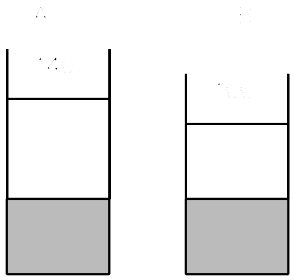
Entonces: 1 regleta larga + 2 regletas cortas = 40 cm.

Planteamiento 2



Planteamiento 3

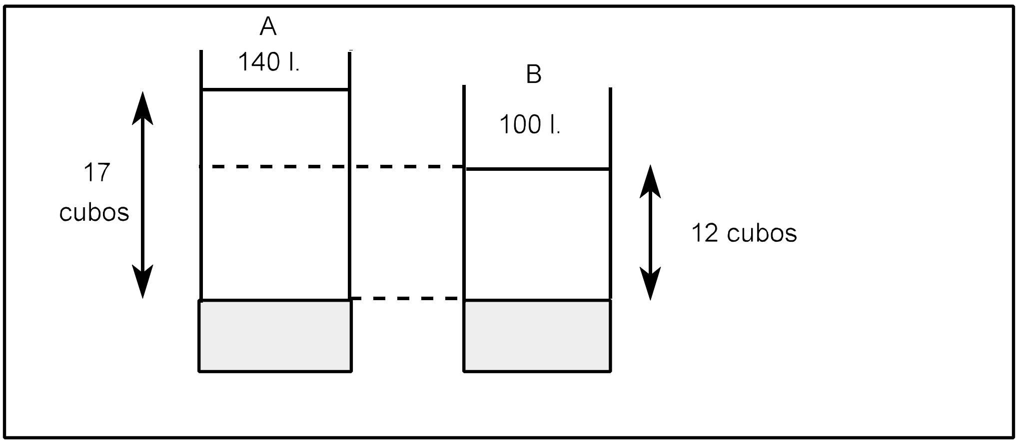
(1,1,1) (2ª etapa)



"Tenemos dos depósitos de agua. Al depósito A le caben 140 litros y al depósito B le caben 100 litros.

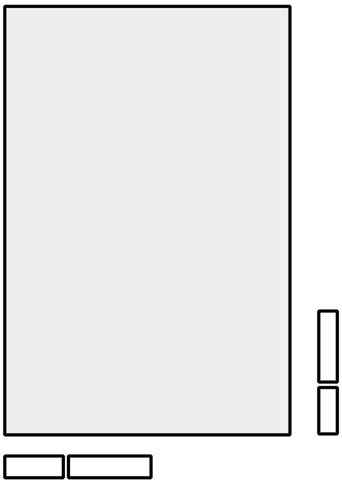
Del depósito A se sacan 17 cubos de agua y del depósito B se sacan 12 cubos de agua, quedándose los dos depósitos con la misma cantidad de agua.

¿Qué cantidad de agua cabe en cada cubo?"



Planteamiento 3

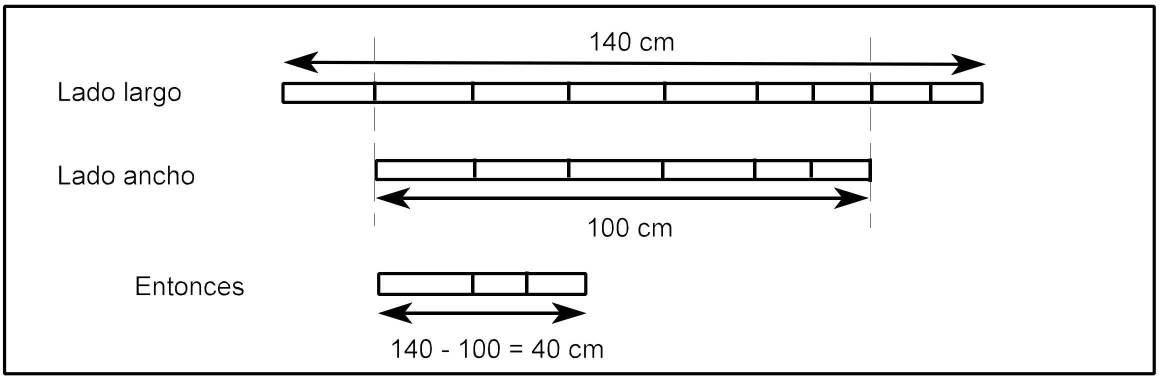
(2,1,1) (2ª etapa)



"El tablero de una mesa de dibujo tiene 140cm de largo por 100 cm de ancho.

David tiene dos regletas, una más larga que la otra. Ha comprobado que en lado largo de la mesa le caben 5 regletas largas y 4 cortas, y en el lado ancho de la mesa le caben 4 regletas largas y 2 cortas.

¿Cuánto mide cada regleta?"



Planteamiento 3

ANEXO XII

ENTREVISTAS PARA EL ESTUDIO DE CASOS

1. Cluster 1.

1.1. *Estudiante de Secundaria*. El sujeto elegido es el nº 063 de la muestra, que corresponde al grupo G_1. La secuencia de sistemas de representación utilizados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 3522250102. Es por lo tanto un sujeto característico de esta cluster. En efecto, utiliza cuatro de los cinco sistemas de representación descritos. No existe un sistema mayoritario, aunque tiene mayor frecuencia el 2 (Parte-Todo): puede considerarse un buen representante del cluster.

Pasamos a administrar el instrumento propuesto para los sujetos de este cluster.

1ª Etapa. Le presentamos el problema tipo (1,1,1), referido en el apartado 9.3.1, con planteamientos en todos los sistemas de representación y le pedimos que elija uno de ellos, en el cual resolvería el problema.

Lee en silencio y al cabo de 2 minutos tiene tomada su decisión.

2ª Etapa. Pasamos entonces a establecer la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*[1].

S: El planteamiento 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esa elección*.

S: Porque es más fácil, es más rápido.

I: ¿Sabes resolver una ecuación?

S: Sí: ahora estoy estudiando las ecuaciones.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: No entiendo por qué hay tantos números.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

---

[1] a) Utilizaremos las iniciales siguientes: I = Investigador; S = Sujeto

b) Las preguntas en cursiva son literales de la entrevista propuesta en 9.3.4.
El resto de las intervenciones del Investigador, en letra normal, obedecen al carácter semiestructurado de la entrevista, y tratan de adaptarse a las respuestas de los sujetos, en orden a conseguir mayor precisión en el sentido de sus respuestas.

S: No sé qué planteamiento habría que seguir después, con el dibujo solo no sabría seguir.

I: ¿No ves la relación en el dibujo?

S: No.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: A mí me parece bien.

I: ¿Sabrías seguirlo?

S: Sí, ahora sí.

I: ¿Pero prefieres el 5 (Simbólico)?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Me parece igual que el 3 (Gráfico).

I: ¿Tampoco se te hubiera ocurrido hacerlo así?

S: No.

3ª Etapa. A continuación le presentamos un ítem/problema réplica del (1,1,1), indicado en el apartado 9.3.1, pero con planteamiento sólo en los sistemas de representación Ensayo-Error (1), Parte-Todo (2) y Gráfico (3). Hemos eliminado aquellos sistemas en los que hay una simbolización alfabética. Le pedimos que elija uno y lo continúe hasta su resolución completa.

Lee atentamente durante 3 minutos y toma su elección. Se decide por el planteamiento 2 (Parte-Todo), copia el planteamiento en un hoja en blanco y plantea bien las siguiente relación (diferencia de cantidad de agua y diferencia de cantidad de cubos), pero no termina de resolver correctamente.

Le ofrezco ayuda y acepta. Le hago hincapié en la relación en la relación anterior y entonces encuentra la solución correcta. En todo este proceso invierte 7 minutos. En total ha tardado 10 minutos en resolver el problema.

4ª Etapa. Establecemos la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El planteamiento 2 (Parte-Todo).

I: *Explica la razón de esa elección.*

S: Me lo explica mejor.

I: ¿Lo entiendes bien?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el 1 (Ensayo-Error)?*

S: No sé de dónde salen estos litros.

I: *¿Por qué no has elegido el 3 (Gráfico)?*

S: No entiendo el planteamiento en el dibujo. No sabría seguir después.

Esta respuesta es coherente con la conducta seguida en toda la prueba, los sistemas de representación con los que es capaz de abordar estos problemas oscilan preferentemente entre el 5 (Simbólico) y el 2 (Parte-Todo).

Agradecemos su colaboración en esta prueba.

1.2. *Estudiante Universitario*. El sujeto elegido es el nº 084 de la muestra, que corresponde al grupo G_2. La secuencia de sistemas de representación utilizados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 3225215554. Es por lo tanto un sujeto característico de esta cluster. En efecto, utiliza todos los sistemas de representación en algún ítem/problema, contiene toda la gama de variedades de sistemas, aunque con distinta frecuencia: puede considerarse un buen representante del cluster.

Pasamos a administrar el mismo instrumento propuesto para el caso anterior.

1ª Etapa. Le presentamos el problema tipo (1,1,1), referido en el apartado 9.3.1, con planteamientos en todos los sistemas de representación y le pedimos que lo elija uno de ellos, en el cual resolvería el problema.

Se siente muy nerviosa y hace la observación de que desde 2º de BUP no ha estudiado matemáticas: “no se me dan bien las matemáticas”. Al cabo de 3 minutos indica que tiene decida su elección.

2ª Etapa. Pasamos entonces a establecer la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: Yo creo que con la ecuación.

I: ¿Con el que hemos llamado aquí planteamiento 5 (Simbólico)?.

S: Si.

I: *Explica la razón de esa elección*.

S: Porque pienso que es el que está mejor. ¡Es que con las ecuaciones se pueden hacer muchos!

I: ¿Sabes resolver una ecuación?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: Aquí pone unas medidas que no aparecen el texto. Aquí aparecen una serie de números que no nos habla de ellos el problema.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Es un simple dibujo. Tendríamos que hacer operaciones.

I: ¿Te costaría trabajo seguir este planteamiento?

S: Yo creo que sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: Me suena muy raro. Me cuesta seguir este razonamiento.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Esto es un dibujo, pero es más complicado que el 5 porque pone aquí las “x” (señala en el dibujo la situación de las “x”). Es más fácil con la ecuación y ya está.

3ª Etapa. A continuación le presentamos un ítem/problema réplica del (1,1,1), indicado en el apartado 9.3.1, pero con planteamiento sólo en los sistemas de representación Ensayo-Error (1), Parte-Todo (2) y Gráfico (3). Hemos eliminado aquellos sistemas en los que hay una simbolización alfabética. Le pedimos que elija uno y lo continúe hasta su resolución completa. Lee atentamente, dedicándole bastante tiempo a la elección. Se decide por el planteamiento 3 (Gráfico) y resuelve con bastante dificultad. En todo este proceso invierte 5 minutos.

4ª Etapa. Establecemos la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El 3 ó el 2, pero el 1 no.

I: *¿Por qué no has elegido el 1 (Ensayo-Error)?*

S: ¡Con tantos números....!

I: Decídete por uno de los planteamientos y resuélvelo.

S: Los dos planteamientos son iguales, uno con dibujo y otro con números. Lo voy a intentar con el 3.

I: ¿Qué orden establecerías a la hora de elegir uno de estos planteamientos?

S: Primero el 5, segundo el 3, después el 4, después el 2 y el más difícil el 1.

Esta respuesta es coherente con la conducta seguida en toda la prueba. En la 3ª Etapa duda entre el 2 y el 3, decidiéndose por el 3, porque los planteamientos propuestos son el 1, el 2 y el 3.

Agradecemos su colaboración en esta prueba.

2. Cluster 2.

2.1. *Estudiante de Secundaria*. El sujeto elegido es el nº 062 de la muestra, que corresponde al grupo G_1. La secuencia de sistemas de representación utilizados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 2222225522. Es por lo tanto un sujeto característico de este cluster, en donde el uso de sistemas de representación Numéricos, en particular el Parte-Todo, es predominante (80%) frente a otros sistemas (20%), en este caso el sistema de representación Simbólico (5).

Pasamos el instrumento elaborado para los sujetos de este cluster.

1ª Etapa. 1º Nivel. Le presentamos al sujeto un ítem/problema del tipo (1,1,1) con planteamientos en los cinco sistemas considerados, indicado en el apartado 9.3.2., y le pedimos que lea atentamente el problema y elija uno de ellos, aquel con el que resolvería el problema. Le indicamos que puede tomarse el tiempo necesario y pedir, en su caso, las aclaraciones que crea pertinentes.

Lee en silencio y no hace observaciones. Tarda 3 minutos en tomar la decisión.

2ª Etapa. 1º Nivel. A continuación pasamos a hacer la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tu resolverías el problema*.

S: El 2 (Parte-Todo).

I: *Explica la razón de esa elección*.

S: Sería más rápido. Entiendo los otros también.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: No entiendo esos números.

I: *¿Por qué no ha elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Es lo mismo que el dos sólo que con dibujo gráfico.

I: ¿Se te ocurriría hacer un dibujo en el problema?

S: No.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 5 (Simbólico)?*

S: Lo veo fácil.

I: ¿Entonces porqué no lo has elegido?

S: Es que no me gustan las “x”.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Por lo mismo, porque están las “x” y el lo mismo que el 5 (Simbólico) practicamente.

I: ¿Tú razonas mejor sin las “x”?

S: Sí, quizás sí.

I: Lo de la “x” para tí casi no es razonar, es...

S: Hacerlo con una fórmula.

1ª Etapa. 2º Nivel. Le presentamos un ítem/problema del tipo (2,1,2), que ya hemos descrito en el apartado 9.3.2, con el que pretendemos comprobar las dificultades que puede tener en la elección de un sistema de representación numérico un cambio de las variables del problema. Le pedimos que elija uno de los planteamientos propuestos.

Lee en silencio sin hacer observaciones durante 2 minutos e indica que ya tiene la elección.

2ª Etapa. 2º Nivel. Pasamos a hacerle la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tu resolverías el problema*.

S: El 2 (Parte-Todo) también.

I: *Explica la razón de esa elección*. ¿Lo entiendes bien?¿Serías capaz de continuar con este planteamiento?

S: Sí. Y el 3 (Gráfico) también lo eligiría. Es parecido, sólo que con dibujo.

I: ¿Pero el 2 (Parte-Todo) te parece más idóneo?

S: Sí. Es que cuando hago las cosas me gusta, también, explicarlas. Entonces, pues, también por eso elijo éste.

I: ¿A tí te gusta explicarlas como están aquí, en este planteamiento?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: Lo mismo que antes, la verdad es que no acabo de entenderlo.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Sí lo entiendo.

I: ¿Serías capaz de continuar el planteamiento sólo con dibujos?

S: Sí, pero me gusta más la otra forma.

I: ¿Necesitarías hacer dibujos para resolver el problema?

S: No

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Es muy parecido al 3 (Gráfico).

I: Porque tiene los dibujos.

S: Sí, los dibujos.

I: Pero, después habrá que hacer algo.

S: Yo lo restaría.

I: ¿No harías un sitema de ecuaciones?

S: No.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 5 (Simbólico)?*

S: Paso de las "x".

I: ¿Te cuesta trabajo resolver un sistema?

S: Cuando ya está planteado es fácil.

3ª Etapa. 1º Nivel. En este caso le hemos pedimos que resuelva un ítem/problema del tipo (1,2,1), descrito en 9.3.2, en la opción elegida para el ítem/problema (1,1,1), es decir en el sistema de representación Parte-Todo (opción 2).

Lee el problema. Al cabo de 2 minutos empieza a plantear una división (56:2,5) y otra operaciones artiméticas. Al cabo de 6 minutos más interrumpimos su tarea y pasamos a la siguiente fase. Ha tardado 8 minutos en todo este proceso.

4ª Etapa. 1º Nivel. Después de los intentos de resolver el problema le planteamos las siguientes cuestiones:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido*.

S: El problema es el "2,5".

I: ¿Si en lugar de tener "2,5" tuvieras "2 veces más", tendrías que dividir por...?

S: Por tres, y me saldrían los peldaños que hay por debajo del escalón roto.

I: ¿Y si en lugar del “2 veces más”, tienes “2,5 veces más”, entoces...?

S: Se dividiría entre cinco, sería dos veces una y luego, abajo, tres de dos. (Se pone a hacer la división y ve que no sale exacta)

I: ¿Cual es la dificultad?

S: Dos escalones y medio.

I: ¿El “ cero con cinco” (0,5) te plantea problemas?

S: Sí, me plantea problemas.

I: ¿El decimal?

S:Sí.

I: Si no hubiera decimal, por ejemplo, si te dicen “3 veces más”, ¿cómo resolverías el problema?

S: Sería dividir entre cuatro, una parte debajo y tres partes encima.

I: Entonces, ¿tu problema es el decimal?

S: Sí.

I: ¿Se te hubiera ocurrido hacerlo de otra forma?

S: Sí, por ésta (señala un planteamiento Simbólico).

I: ¿Cómo lo hubieras planteado?

S: “x” peldaños son los que queda por debajo del escalón, entonces se multiplica “x·2,5 = 56", y después se divide.

Hemos comprobado que la variable V_2=2 (números “difíciles”, en este caso el número decimal 2,5) en un problema verbal, dificulta, en este sujeto, la resolución a través de un sistema de representación Parte-Todo.

3ª Etapa. 2º Nivel. A continuación le pedimos que resuelva el ítem/problema de variables (2,2,2), indicado en el aprtado 9.3.2, dentro de los propuestos en el instrumento para este cluster. Le solicitamos que lo haga el el sistema de representación Parte-Todo, que es la elección que ha hecho en una fase anterior.

Lee y al cabo de 2 minutos empieza a plantear el problema según la opción 2 (Parte-Todo), elegida en los casos anteriores. Resuelve todos los pasos con soltura y obtiene buenos resultados en 3 minutos. En todo el proceso ha invertido, pues, 5 minutos.

4ª Etapa. 2º Nivel. Entoces, le planteamos las siguientes cuestiones:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido*.

S: No he tenido dificultades.

I: ¿Has entendido bien las relaciones, lo has visto claro?

S: Sí.

I: ¡Te conoces bien el sistema (Parte-Todo) que has utilizado!

S: Sí

Confirmamos que, en este caso, para este sujeto, la inclusión de números decimales sencillos en un relación de comparación multiplicativa, en un problema algebraico verbal, dificulta su resolución, tanto en sistemas de representación numéricos como simbólicos. Pero, particularmente, en el sistema de representación Parte-Todo implica la imposibilidad de relacionar el Todo con las Partes.

También hemos confirmado las conclusiones del apartado 8.1.5. en el sentido de mejores resultados en los planteamientos para los problemas de variable $V_1 = 2$ (dos relaciones, que en los de variable $V_1 = 1$ (una relación).

Agradecemos la colaboración prestada para la realización de esta prueba.

2.2. *Estudiante Universitario*. El sujeto elegido es el nº 086 de la muestra, que corresponde al grupo G_2. La secuencia de sistemas de representación utilizados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 2201022223. Es por lo tanto un sujeto característico de esta cluster, en donde el uso de sistemas de representación Numéricos es preponderante (80%) frente a otros sistemas (10%), en este caso el uso del sistema de representación Gráfico (3) una sola vez.

Pasamos el mismo instrumento elaborado para el caso anterior.

1ª Etapa. 1º Nivel. Le presentamos al sujeto un ítem/problema del tipo (1,1,1) con planteamientos en los cinco sistemas considerados, indicado en el apartado 9.3.2, y le pedimos que lea atentamente el problema y elija uno de ellos, aquel con el que resolvería el problema. Le indicamos que puede tomarse el tiempo necesario y pedir, en su caso, las aclaraciones que crea pertinentes.

Lee en silencio y no hace observaciones. Tarda 3 minutos en tomar la decisión.

2ª Etapa. 1º Nivel. A continuación pasamos a hacer la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tu resolverías el problema*.

S: El 2 (Parte-Todo).

I: *Explica la razón de esa elección*.

S: Por fácil. La más fácil de todas es ésta.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: Porque es más lioso, tienes que estar probando uno para adelante y otro para atrás, intentando elegir una que coincida. Hay que dedicarle más tiempo.

I: *¿Por qué no ha elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: No es dificil, es más o menos igual. No se me hubiera ocurrido hacerlo así.

I: ¿Se te ocurriría hacer un dibujo en el problema?

S: Yo creo que mezclaría los dos. El dibujo me orienta.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Por las ecuaciones.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 5 (Simbólico)?*

S: Tambien por las ecuaciones. Soy un poco mala para las ecuaciones.

1ª Etapa. 2º Nivel. Le presentamos un ítem/problema del tipo (2,1,2), que ya hemos descrito en el apartado 9.3.2, con el que pretendemos comprobar las dificultades que puede tener en la elección de un sistema de representación numérico un cambio de las variables del problema como el efectuado al proponer uno del tipo (1,1,1) y otro del tipo (2,1,2). Le pedimos que elija uno de los planteamientos propuestos. Lee en silencio sin hacer observaciones durante 3 minutos e indica que ya tiene la elección.

2ª Etapa. 2º Nivel. Pasamos a hacerle la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tu resolverías el problema*.

S: Eligiría el 3 (Gráfico) en principio.

I: *Explica la razón de esa elección*.

S: Lo veo que me guía más.

I: ¿Entiendes las relaciones?

S: Si, pero no sé como seguirlo. El planteamiento sí lo entiendo pero es que no sé como seguirlo.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*¿ Este planteamiento lo entiendes?

S: Si.

I: ¿Sabrías continuar?

S: No.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: Por la misma razón de antes. Es muy lioso, no me sale a mí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Con este no me saldría.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 5 (Simbólico)?*

S: Con “x” y con “y” más lio me hago.

3ª Etapa. 1º Nivel. En este caso le hemos pedimos que resuelva un ítem/problema del tipo (1,2,1), ya indicado en 9.3.2, en la opción elegida para el ítem/problema (1,1,1), es decir en el sistema de representación Parte-Todo (opción 2).

Lee el problema y comienza a hacer un esquema gráfico, pero tiene dificultades y no representa bien la relación. Hace expreso que su problema es “representar el 2,5 veces”, por ser decimal. Representa graficamente el doble, pero no lo hace con el 2,5 veces. Después de este intento, prueba a hacerlo dividiendo, es decir aplica un sistema de Parte-Todo, pero no establece bien las relaciones. Al final lo deja. En todo este proceso ha invertido 6 minutos.

4ª Etapa. 1º Nivel. Después de los intentos de resolver el problema le planteamos las siguientes cuestiones:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido*.

S: El problema es “las veces”.

I: ¿No sabes relacionar “las veces”?

S: “veces” es como el doble ¿no?. Entonces yo he hecho como hacer la mitad de 56 que son 28 peldaños, pero ya el “coma 5" ...

I: ¿El decimal?

S: Claro, no sé.

Hemos comprobado que la variable V_2=2 (números “difíciles”, en este caso el número decimal 2,5) en un problema verbal, dificulta, en este sujeto, la resolución a través de un sistema de representación Numérico. Tal y como se ha producido este resultado no seguimos con el siguiente nivel y no le proponemos el otro ítem/problema que teníamos preparado para un 2º nivel, que era del tipo (2,2,2), porque las respuestas

podemos esperar que sean parecidas a las obtenidas para el caso anterior, más aún si cabe con la dificultad añadida de tomar V_1=2, es decir, necesitar dos relaciones para su resolución.
Agradecemos su colaboración en esta prueba.

3. Cluster 3.

3.1. *Estudiante de Secundaria*. El sujeto elegido es el nº 076 del grupo G_1. La sucesión de dígitos, referida a los sistemas de representación, utilizados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 5555455555. Como podemos observar es un sujeto característico de este cluster, donde el sistema predominante es el Simbólico (5) y en un caso utiliza el Gráfico-Simbólico (4), lo que significa que es un sujeto que ha resuelto todos los problemas mediante simbolismos alfabéticos (“ecuaciones”, “x” e “y”), con ayuda, en casos aislados, de una representación gráfica.

Pasamos a administrar el instrumento descrito para los sujetos de este cluster.
1ª Etapa. 1º Nivel. Presentamos al sujeto el ítem/problema (1,1,1), indicado en 9.3.3, junto con los planteamientos en los cinco sistemas de representación descritos. Le indicamos que debe elegir uno de ellos, con el que resolvería el problema y que puede tomarse el tiempo necesario.
Después de ver todo el problema pregunta: “¿Hay que averiguar lo que mide la goma con el clip?”. Le aclaramos que debe obtener cada medida por separado y continúa su reflexión.Tarda 2,5 minutos en tomar su decisión.
2ª Etapa. 1º Nivel. Reproducimos la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esta elección*.

S: Lo veo lógico.

I: ¿Ves lógico plantear una ecuación?

S: Sí.

I: ¿Así lo resolverías?

S: Sí

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: No sé, no lo veo lógico.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: No lo entiendo bien.

I: ¿No se te hubiera ocurrido hacer un dibujo para resolverlo?

S: A lo mejor lo hubiera dibujado para entenderlo, pero al final hubiera hecho una ecuación.

I: *¿Por que no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: Porque no, en todo caso se le restaría 6 porque son dos delgadas.

I: ¿Crees que con el 2 (Parte-Todo) no se resolvería bien?

S: No

I: ¿Está mal planteado?

S: Sí

I :*¿ Por que no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Como he elegido las ecuaciones, no me he fijado mucho.

I: ¿Te hubiera planteado dificultades resolverlo por el 4 (Gráfico-Simbólico)?

S: Sí.

I: ¿Te hubiera costado trabajo pasar del 4 (Gráfico-Simbólico) al 5 (Simbólico)?

S: Yo creo que con esto se puede llegar a una ecuación, pero ya está en el 5 (Simbólico).

1ª Etapa. 2º Nivel. Le presentamos al sujeto el problema (2,1,1) indicado en el apartado 9.3.3, planteado en los cinco sistemas conocidos y le repetimos las mismas condiciones que en el anterior.

Lee en silencio. No hace observaciones. En este caso ha tardado 4 minutos en elegir un planteamiento.

2ª Etapa. 2º Nivel. La entrevista que tenemos a continuación es la siguiente:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esa elección.*

S: Porque es lo que más se hace.

I: ¿Estás más segura con el sistema de ecuaciones?

S: Sí

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: Tengo lo que vale una goma y un clip, pero seguir es más complicado.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Que es lo mismo que el 2.

I: ¿Te sería complicado obtener otra relación?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: De aquí se puede poner un sistema.

I: ¿El dibujo no lo necesitas para plantear el sistema de ecuaciones?

S: Lo podemos poner directamente.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: Hay que darle muchos valores a las gomas y a los clips para que salgan las medidas. Es más largo.

I: ¿Se comprende bien?

S: Sí.

3ª Etapa. 1º Nivel. Ahora le pasamos el problema réplica del tipo (1,1,1), descrito en el apartado 9.3.3, pero con sólo con tres planteamientos: 1 (Ensayo-Error), 2 (Parte-Todo) y 3 (Gráfico). Se han eliminado las opciones simbólicas 4 y 5. Le pedimos al sujeto que lea con atención y que elija uno de los planteamientos propuestos.

Lee en silencio y no hace ninguna observación. Tarda 3 minutos en tomar la decisión. Ha elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo) y le pedimos que continúe y termine de resolver el problema. Entoces plantea una ecuación y despeja, pero no resuelve bien porque no ha establecido la relación correcta. En todo este proceso ha tardado 8 minutos: 3 en tomar la decisión y 5 en resolver.

4ª Etapa. 1º Nivel. Le hacemos las siguientes preguntas

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.*

S: No sé sin poner las “x”.

I: Aunque el problema no está planteado con las “x”, tú, al final, pones “x” y resuelves, es decir, ¿no has sabido seguir sin utilizar los símbolos?.

S: Lo veo más rápido y más fácil.

I: ¿No has deducido ninguna nueva relación en el gráfico?.

S: No.

I: ¿Tienes dificultad en aplicar un esquema gráfico?

S: Si, se podría hacer, pero hubiese sacado también “incógnitas”.

3ª Etapa. 2º Nivel. Le planteamos ahora un problema réplica del tipo (2,1,1), descrito en el apartado 9.3.3, con opciones sólo gráfica y numéricas, como en el caso anterior. Le indicamos que ha de elegir un planteamiento de entre los propuestos y terminar de resolver el problema.

Tarda sólo 1,5 minutos en elegir el planteamiento. Se fija en el 2 (Parte-Todo) y sigue las relaciones indicadas para identificar los datos y las incógnitas con las letras “x” e “y” y establecer un sistema de ecuaiones, es decir, aplicar el sistema de representación Simbólico (5). Plantea bien y aplica correctamente las reglas algebraicas de una forma muy estructurada para obtener la solución exacta. En resolver el problema ha tardado 4,5 minutos (6 minutos en todo el proceso).

4ª Etapa. 2º Nivel. Entonces le proponemos la siguiente entrevista:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.*

S: Podría haber seguido probando números ahí (se refiere al planteamiento 1 por Ensayo-Error), pero hubiese tardado mucho.

I: ¿No has elegido ninguno de los tres?

S: No. Al final he planteado un sistema de ecuaciones.

I: ¿Y los otros dos planteamientos, el 2 y el 3?¿Sabrías continuarlos?

S: No.

I: ¿El único que podrías haber seguido es el 1?

S: Muy largo.

Esta respuesta confirma, en parte, las conclusiones del apartado 8.1.5, de que los problemas que se resuelven mediante dos relaciones ofrecen mejores resultados en cuanto a su planteamiento, mayores porcentajes “buenos planteamientos”.

Agradecemos la participación y la colaboración ofrecida.

3.2. *Estudiante Universitario*. El sujeto elegido es el nº 085 del grupo G_2. La sucesión de dígitos, referida a los sistemas de representación, utilizados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 5555455555. Como podemos observar es un sujeto característico de este cluster, donde el sistema predominante es el Simbólico (5) y en un caso utiliza el Gráfico-Simbólico (4), lo que significa que es un sujeto que ha resuelto todos los problemas mediante simbolismos alfabéticos (“ecuaciones”, “x” e “y”), con ayuda, en casos aislados, de una representación gráfica.

Pasamos a administrar el instrumento descrito para los sujetos de este cluster.

1ª Etapa. 1º Nivel. Presentamos al sujeto el ítem/problema (1,1,1), indicado en 9.3.3, junto con los planteamientos en los cinco sistemas de representación descritos. Le indicamos que debe elegir uno de ellos, con el que resolvería el problema y que puede tomarse el tiempo necesario. Lee en silencio sin hacer ninguna observación y al final indica que ya ha tomado opción. Ha tardado 2,5 minutos.

2ª Etapa. 1º Nivel. Reproducimos la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esta elección*.

S: Por que los demás son de más razonar y a mí se me da mejor esta otra forma. Los otros los veo más complicados. El de la ecuación me resulta más fácil.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: No lo he hecho nunca.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Lo entiendo. No encuentro dificultad en hacer esto, pero no se me hubiera ocurrido hacerlo así. Si hubiera tenido que hacerlo explicado para niños (el sujeto es una estudiante de Magisterio) igual sí, pero a mí me ponen este problema y lo hago por la ecuación.

I: *¿Por que no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: Este ya ni se me hubiera ocurrido, yo creo que no. Es que ni lo entiendo.

I :*¿ Por que no has elegido el plantemaiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: No sé, tampoco se me hubiera ocurrido.

1ª Etapa. 2º Nivel. Le presentamos al sujeto el problema (2,1,1) indicado en el apartado 9.3.3, planteado en los cinco sistemas conocidos y le repetimos las mismas condiciones que en el anterior. Lee en silencio. No hace observaciones. Después de verlos todos los sistemas se detiene en el 1 (Ensayo-Error) y pone una expresión que se puede interpretar como un intento de comprenderlo y de ver cómo se podría continuar. De todas formas no duda en su decisión. En este cado ha tardado 3,5 minutos en elegir un planteamiento.

2ª Etapa. 2º Nivel. La entrevista que tenemos a continuación es la siguiente:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: Otra vez el 5.

I: *Explica la razón de esa elección.*

S: Porque sé hacerlo mejor. Me da más seguridad.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Seria capaz de hacerlo así porque el año pasado lo vimos en clase, pero antes nunca lo había visto así. A mí no se me hubiera ocurrido hacerlo de esta forma.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: No se me hubiera ocurrido.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: No lo hubiera hecho así. Los que me hubieran costado más trabajo son el 1 y el 4.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: No lo he visto antes nunca.

3ª Etapa. 1º Nivel. Ahora le pasamos el problema réplica del tipo (1,1,1), descrito en el apartado 9.3.3, pero con sólo con tres planteamientos: 1 (Ensayo-Error), 2 (Parte-Todo) y 3 (Gráfico). Se han eliminado las opciones simbólicas 4 y 5. Le pedimos al sujeto que lea con atención y que elija uno de los planteamientos propuestos. Lee en silencio, utiliza el dedo para seguir los planteamientos y no hace ninguna observación. Tarda 3 minutos en tomar la decisión.

Ha elegido el planteamiento 3 (Gráfico) y le pedimos que continúe y termine de resolver el problema. Entonces indica: “para mí es complicado, pero lo voy a intentar”. Lo hace y tarda 3,5 minutos.

4ª Etapa. 1º Nivel. Le hacemos las siguientes preguntas

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.*

S: Para mí es complicado, pero la experiencia en el curso anterior me ha servido para intentar hacerlo de esta forma.

I: Parece que has utilizado al final el sistema simbolico, lo que has hecho es identificar la incognita con un cuadrado geométrico y operar como si fuera una letra.

S: Si. He sustituido la x por cuadrados .

I: ¿No has deducido ninguna nueva relación en el gráfico?.

S: No.

I: ¿Tienes dificultad en aplicar un esquema gráfico?

S: Si, porque no lo he utilizado nunca. Los problemas los he resuelto siempre por ecuaciones. No los he resuelto nunca por la cuenta de la vieja, ni cosas así, eso no me sale.

I: ¿En la escuela nunca has hecho cosas de este tipo?

S: Yo creo que no. Yo no recuerdo.

I: ¿Te costaria mucho trabajo seguir un esquema gráfico, que no fuera simbolico?

S: Si.

3ª Etapa. 2º Nivel. Le planteamos ahora un problema réplica del tipo (2,1,1), descrito en el apartado 9.3.3, con opciones sólo gráfica y numéricas, como en el caso anterior. Le indicamos que ha de elegir un planteamiento de entre los propuestos y terminar de resolver el problema. Durante 3 minutos repasa todas las posibilidades y decide no hacerlo: “yo eligiría el 3, pero no tengo ni idea, no sabría seguir”. Le pedimos que los resuelva de la forma que sepa hacerlo, y elige el sistema Simbólico. Se observa que lo hace con soltura, plantea y ejecuta bien y obtiene los resultados correctos. Para ser un problema que necesita dos “ecuaciones” para su resolución, tarda relativamente poco: 2,5 minutos en todo el proceso.

4ª Etapa. 2º Nivel. Entonces le proponemos la siguiente entrevista:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.*

S: He elegido el 3, pero no sé seguir.

I: Te parece este problema mas dificil que el anterior para resolverlo de esta forma.

S: Si. Para mí si.

I: Y los otros dos planteamientos, el 1 y el 2.

S: No se ocurriria hacelos así. Me parecen más complicados y no sabría como seguir.

I: ¿Te ha resultado facil resolverlo por un sistema de ecuaciones?

S: Si.

I: ¿Estas más comoda en este sistema?

S: Si.

I: ¿Cualquier problema que te pusieran de este tipo lo resolverías de igual forma?

S: Lo intentaría hacer así. Yo siempre lo he hecho así.

I: Resolver este problema de forma gráfica te ha resultado más dificil que el anterior, pero de forma simbólica te resulta más dificil.

S: Yo creo que en el anterior hubiera encontrado más dificultades.

Esta respuesta confirma, en parte, las conclusiones del apartado 8.1.5, de que los problemas que se resuelven mediante dos relaciones ofrecen mejores resultados en cuanto a su planteamiento, mayores porcentajes “buenos planteamientos.

Agradecemos la participación y la colaboración ofrecida.

4.Cluster 4.

4.1. *Estudiante de Secundaria.* Hemos elegido al sujeto nº 068 del grupo G_1. El conjunto de dígitos de este sujeto, referido a los sistemas de representación usados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 2055505000. En este caso ha utilizado el sistema Simbólico de forma generalizada y, en un ítem/problema, el sistema Numérico. Es un sujeto que responde a las características con las que hemos definido el cluster, pues sólo aborda los ítems/problemas mediante sistemas de representación Numéricos (Ensayo-Error o Parte-Todo) o Simbólicos, pero no utiliza apoyos gráficos.

Pasamos a administrar el instrumento elaborado para los sujetos de este cluster.

1ª Etapa. 1º Nivel. Presentamos al sujeto el ítem/problema de variables (1,1,1), indicado en 9.3.4., junto con cinco planteamientos, uno en cada uno de los sistemas de representación ya descritos para que eliga uno de ellos. Le indicamos que no se trata de resolver el problema, sino de elegir el planteamiento con el que mejor se identifica en el caso de que tuviera que resolverlo, y que puede tomarse el tiempo que crea necesario.

Mira todos los planteamientos con detenimiento y pregunta "¿Tengo que elegir uno nada más?". Se le responde afirmativamente y continúa. Ha tardado 3 minutos.

2ª Etapa. 1º Nivel. A continuación se produce la siguiente 1ª entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S:El planteamiento 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esa elección*.

S: Sé hacerlo mejor.

I: ¿Sabrías resolver esta ecuación?

S: Sí.

I: ¿Te siente cómodo con este planteamiento?

S: Sí

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)*

S: Porque hay que estar pensando las medidas, los valores.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: No lo sé.

I: ¿Tú lo hubieras hecho así?¿Se te hubiera ocurrido hacerl el dibujo?

S: El dibujo, no.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*¿Qué dificultades tiene?

S: Dificultades ninguna. No sé.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: A mí no me hubiera salido eso.

I: ¿No se te hubiera ocurrido este esquema?

S: No

1ª Etapa. 2º Nivel. Presentamos al sujeto el ítem/problema de variables (2,1,1), indicado en 9.3.4., con los cinco planteamientos en los distintos sistemas de representación. Lo lee en silencio durante 3 minutos.

2ª Etapa. 2º Nivel. Le hacemos la siguiente entrevista:

I: ¿Te ha parecido más difícil que el anterior?

S: Un poco más difícil.

I. *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El planteamiento 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esa elección*

S: Por el sistema.

I: ¿Te resulta más cómodo aplicar el sistema?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: No tiene salida.

I: ¿Sabrías continuar?

S: Ahí me atrancaría.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: Como el caso anterior, hay que probar mucho. Hay que estar más tiempo buscando las medidas.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Va a dar lo mismo que el dos. Aquí también me atrancaría.

I: ¿Se te hubiera ocurrido hacer un dibujo para resolver este problema?

S: Puede ser, sí, se me hubiera ocurrido.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Lo mismo que el 5 (Simbólico), pero...no creo que se me hubiera ocurrido.

3ª Etapa 1º Nivel. Planteamos un ítem/problema de variables (1,1,1), pero sólo con un planteamiento en un sistema Gráfico. Le facilitamos un folio en blanco y se le pide que reproduzca el esquema gráfico y que, a partir de ahí, continúe con la resolución del problema.

Reproduce el esuqma gráfico en la hoja en blanco y se detiene mucho tiempo delante de él, en silencio, sin hacer nada. Al cabo de 5 minutos empieza a escribir. Pregunta, señalando la parte sombreada del dibujo, "¿Esta es el agua con la que se queda?". Le respondemos afirmativamente y al cabo de 3 minutos más decide dejarlo: "no me sale". No ha seguido el planteamiento gráfico, sino que ha abordado el problema mediante un sistema de dos ecuaciones (Simbólico), pero no ha sabido relacionar ambas ecuaciones y obtener una nueva relación válida. En todo el proceso ha tardado 8 minutos.

4ª Etapa. 1º Nivel. Cuando ha terminado tratamos de precisar con la 2ª entrevista:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido*. ¿Te ha costado trabajo?

S: No sé relacionarlos.

I:¿Has intentado hacerlo por un sistema de ecuaciones?

S: Sí.

I:¿Al final no te ha salido?¿No has conseguido relacionar estas dos ecuaciones?

S: No.

3ª Etapa. 2º Nivel. Ahora la presentamos un ítem/problema de variables (2,1,1), pero con sólo un planteamiento en un sistema de representación Gráfico, como hemos descrito en 9.3.4. Le indicamos que ha de resolverlo como el anterior, es decir, siguiendo el mismo sistema. Le dejamos en folio y le pedimos que copie el dibujo del planteamiento propuesto.

Copia el esquema gráfico y se queda mucho tiempo reflexionando, 6 minutos. Dado que se ve bloqueado se establece un diálogo corto:

I: ¿Crees que puedes seguir?

S: Sí, yo creo que con una regla de dos (sic) se puede hacer.

I: Entonces, inténtalo.

Observamos que la “regla de dos” consiste en plantear el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. En efecto, plantea el sistema (Simbólico) y resuelve correctamente, aplicando una secuencia de reglas algebraicas muy estructurada. En todo el proceso ha tardado 10 minutos.

4ª Etapa. 2º Nivel. Establecemos la siguiente 2ª entrevista:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.*¿Te plantea dificultades resolver un problema mediante un gráfico?

S: Sí.

I: ¿No sabes seguir?

S: No.

I: Has utilizado un sistema de ecuaciones. ¿No has aprovechado el dibujo para nada?

S: No.

I: ¿La primera relación gráfica la ves?

S: Sí.

I: ¿No sabes obtener otra relación con estos dibujos?

S: No.

Como podemos comprobar, en este caso, el sujeto encuentra gran dificultad en aplicar un sistema de representación Gráfico en los dos niveles de problemas que le hemos propuesto, es decir, tanto cuando se resuelven mediante una relación como cuando lo hacen con dos.

Por otro lado hemos confirmado, para este caso, que se ha planteado mejor cuando hay que establecer dos relaciones, un sistema de dos ecuaciones, que cuando sólo es necesaria una relación, una ecuación, para resolver el problema, de acuerdo a las conclusiones del apartado 8.1.5.

A continuación agradecemos al sujeto su colaboración.

4.2. *Estudiante Universitario*. Hemos elegido al sujeto nº 091 del grupo G_2. El conjunto de dígitos de este sujeto, referido a los sistemas de representación usados en la resolución de los ítems/problemas del instrumento de evaluación es: 2525525255. En este caso ha utilizado el sistema Simbólico (5) en seis ocasiones y el Parte-Todo (2) en las cuatro restantes. Es un sujeto que responde a las características con las que hemos definido el cluster, pues sólo aborda los ítems/problemas mediante sistemas de representación Numéricos (Ensayo-Error o Parte-Todo) o Simbólicos, pero no utiliza apoyos gráficos.

Pasamos a administrar el instrumento propuesto para el caso anterior.

1ª Etapa. 1º Nivel. Presentamos al sujeto el ítem/problema de variables (1,1,1), indicado en 9.3.4., junto con cinco planteamientos, uno en cada uno de los sistemas de representación ya descritos, para que opte por uno de ellos. Le indicamos que se trata de elegir el planteamiento con el que mejor se identifica en el caso de que tuviera que resolverlo, y que puede tomarse el tiempo que crea necesario.

Lee todos los planteamientos con rapidez, en silencio, y toma una decisión dando una sensación de seguridad. Ha tardado 2 minutos.

2ª Etapa. 1º Nivel. A continuación se produce la siguiente 1ª entrevista:

S:El planteamiento 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esa elección*.

S: Yo he visto dos tipos de libros y lo primero que me ha venido es ”x” e “y”.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)*?

S:Yo siempre me he sentido muy cómoda haciendo los problemas de “x” e “y”.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Viendo el gráfico, ahora, sí.

I: ¿Tú lo hubieras hecho así?¿Se te hubiera ocurrido hacer el dibujo?

S: Nunca. No soy dada a los gráficos, y eso que siempre me han recalcado “el gráfico para que lo veas gráficamente”, pero no...

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: No, no me lo he planteado. Yo lo veo así por la cuenta de la vieja.

I: ¿Se pueden resolver los problemas también de esta forma?

S: Sí, cuando no me salen las “x”, entonces siempre me voy a la cuenta de la vieja.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Es de alguna forma complementario al 5. Es lo mismo pero con gráfico.

I: ¿No se te hubiera ocurrido este dibujo?

S: No.

1ª Etapa. 2º Nivel. Presentamos al sujeto el ítem/problema de variables (2,1,1), indicado en 9.3.4., con los cinco planteamientos en los distintos sistemas de representación. Lo lee en silencio durante 2 minutos.

2ª Etapa. 2º Nivel. Le hacemos la siguiente entrevista:

I. *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El planteamiento 2.

I: *Explica la razón de esa elección*

S: Porque es una regla de tres muy simple, vamos.

I: ¿Sabrías seguir para resolverlo?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3?*

S: No.

I: ¿Sabrías continuar?

S: Otra vez el problema del gráfico.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 5?*

S: También lo habría hecho así. Si no hubiera visto antes el 2, lo habría hecho así.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1?*

S: No. Esto de ir probando, no. Son muchos números. Prefiero lo rápido y lo más fácil.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Tampoco. Gráficos, nada.

El sujeto interpreta el planteamiento en 2 (Parte-Todo) como una regla de tres simple, en un caso, y como la "cuenta de la vieja" en otro caso, en definitiva como un planteamiento numérico proporcional en unos casos y pre-algebraico en otras.

3ª Etapa 1º Nivel. Planteamos un ítem/problema de variables (1,1,1), pero sólo con un planteamiento en un sistema Gráfico. Le facilitamos un folio en blanco y se le pide que reproduzca el esquema gráfico y que, a partir de ahí, continúe con la resolución del problema.

Se detiene mucho tiempo delante del esquema gráfico, en silencio, sin hacer nada. Al cabo de 4 minutos empieza a operar, meditando y pensando lentamente cada paso. Abandona el planteamiento gráfico y se explica: "al final he tenido que resolverlo matemáticamente, no sé relacionar, en el gráfico los litros con los cubos". Aplica una regal de tres simple sin establecer correctamente las relaciones y , por lo tanto, resuelve mal. En todo este proceso ha tardado 6 minutos.

4ª Etapa. 1º Nivel. Cuando ha terminado tratamos de precisar con la 2ª entrevista:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido*. ¿Te ha costado trabajo?

S: Sí. Lo único que he podido relacionar son los cinco cubos de diferencia.

I:¿Cómo lo has hecho?

S: Por una regla de tres.

3ª Etapa. 2º Nivel. Ahora la presentamos un ítem/problema de variables (2,1,1), pero con sólo un planteamiento en un sistema de representación Gráfico, como hemos descrito en 9.3.4. Le indicamos que ha de resolverlo como el anterior, es decir, siguiendo el mismo sistema. Le dejamos en folio y le pedimos que copie el dibujo del planteamiento propuesto.

Copia el esquema gráfico y se queda reflexionando durante 3 minutos. Intenta seguir con el sistema de representación gráfico, pero se queda bloqueada, y se establece un diálogo corto:

S: He visto que lo podía hacer y lo he intentado, pero me sale la regleta corta más grande que la larga y no puede ser.

Ha establecido bien la segunda relación, pero a continuación establece otra relación gráfica confusa, que le hace equivocarse a la hora de representar en el dibujo la regleta larga y la corta. Ha invertido 4 minutos. En vista de que no sabe salir de la confusión, intervengo:

I: Inténtalo como sepas hacerlo.

Entonces establece un sistema de dos ecuaciones y resuelve correctamente. En este paso ha tardado 4 minutos en el planteamiento y obtención de la solución. En total en este período ha invertido 11 minutos.

4ª Etapa. 2º Nivel. Establecemos la siguiente 2ª entrevista:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.*¿Te plantea dificultades resolver un problema mediante un gráfico?

S: Sí.

I: ¿Cómo has resuelto el problema?

S: Por un sistema de ecuaciones.

I: ¿No has podido establecer una relación en el gráfico?

S: No.

I: ¿Te ha resultado más fácil establecer el sistema de ecuaciones?

S: Sí.

I: ¿Has visto bien las relaciones en este problema?

S: Sí, muy fácil.

I: ¿Entiendes las relaciones en el planteamiento gráfico?

S: Sí, sí las entiendo. Ha sido fácil ver la primera relación pero ya no sé pasar a la siguiente.

I:¿Es que las relaciones gráficas te cuestan más trabajo?

S: Sí, de verdad. Siempre trato de ponerlo todo en un sistema de ecuaciones.

I: Está claro que no te gustan los gráficos. ¿Es que nunca lo has hecho en la escuela?

S: Sí, pero me cuesta mucho trabajo verlo en el dibujo, pero en todo, no sólo en matemáticas sino en todo.

Como podemos comprobar, en este caso, el sujeto encuentra gran dificultad en aplicar un sistema de representación Gráfico en los dos niveles de problemas que le hemos propuesto, es decir, tanto cuando se resuelven mediante una relación como cuando lo hacen con dos.

Por otro lado hemos confirmado, para este caso, que se ha planteado mejor cuando hay que establecer dos relaciones, un sistema de dos ecuaciones, que cuando sólo es necesaria una relación, una ecuación, para resolver el problema, de acuerdo a las conclusiones del apartado 8.1.5.

A continuación agradecemos al sujeto su colaboración.

Estudio de un caso compilativo.

Lucía es estudiante que está comenzando el curso 2º de BUP (15 años), que se puede considerar equivalente al último curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Esto quiere decir que ha recibido instrucción algebraica suficiente como para resolver adecuadamente los ítems/problemas que forman el instrumento de evaluación.

Le administramos la prueba en Enero de 1997, cuando ya conocemos las agrupaciones en cluster de los sujetos de la muestra, y las características con las que los hemos definido.

La corrección del instrumento nos da como resultado la correccción de las resoluciones en todos los ítems/problemas. El conjunto de dígitos referidos a los sistemas de representación utilizados para resolver los ítems/problemas es: 5555455555.

En estas condiciones hemos establecido la clasificación de Lucía en el cluster 3, es decir, de aquellos sujetos que utilizan un sistema Simbólico para resolver los problemas algebraicos del tipo a los propuestos en el instrumento.

Entonces le hemos administrado el instrumento del estudio de casos que hemos elaborado para los sujetos del cluster 3 y que hemos descrito en el apartado 9.3.4, cuyos resultados describimos a continuación:

1ª Etapa. 1º Nivel. Presentamos al sujeto el ítem/problema (1,1,1), indicado en 9.3.4, junto con los planteamientos en los cinco sistemas de representación descritos. Le indicamos que debe elegir uno de ellos, con el que resolvería el problema y que puede tomarse el tiempo necesario.

Después de ver todo el problema explica que “el planteamiento 2 (Parte-Todo) no lo entiendo”. Le pedimos que elija uno y lo hace al cabo de 2 minutos.

2ª Etapa. 1º Nivel. Reproducimos la siguiente entrevista:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esta elección*.

S: Me gusta.

I: ¿Sabes resolver esa ecuación?

S: Sí.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: Demasiado complicado.

I: ¿Lo entiendes?

S: No. ¡Pero es que en el primero no sale una solución determinada! Tienes que ir haciendo tanteos. No, no me gusta.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Porque tampoco lo entiendo demasiado bien.

I: ¿No se te hubiera ocurrido hacer un dibujo para resolverlo?

S: Sí, se me ocurriría hacer el dibujo, pero no para resolverlo así.

I: *¿Por que no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: Ahora sí lo entiendo, pero no entiendo por qué dice luego que se divide, ¿entre dos?

I: Puede ser entre tres, depende.

S: Bueno, sí.

I: ¿Por qué no lo has elegido?

S: No sé. Es que me veo más segura con las “x”, las ”y” y todo eso.

I :*¿ Por que no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: También se podría elegir. Está bien.

I: ¿Lo entiendes bien?

S: Sí.

I: ¿Por qué no lo has elegido?

S: Por el dibujo.

I: ¿No hubieras puesto el dibujo para hacerlo?

S: No. Yo, el dibujo no.

1ª Etapa. 2º Nivel. Le presentamos al sujeto el problema (2,1,1) indicado en el apartado 9.3.4, planteado en los cinco sistemas conocidos y le repetimos las mismas condiciones que en el anterior.

Lee en silencio. No hace observaciones. Ha tardado 4 minutos en elegir un planteamiento.

2ª Etapa. 2º Nivel. La entrevista que tenemos a continuación es la siguiente:

I: *Elige el planteamiento con el que tú resolverías el problema*.

S: El 5 (Simbólico).

I: *Explica la razón de esa elección.*

S: Porque sí, porque es lo más sencillo.

I: ¿Para ti es lo más sencillo, lo más fácil?

S: Sí, porque sé hacer esto de las “x” y de las “y”.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 2 (Parte-Todo)?*

S: No, que tampoco lo entiendo.

I: ¿Sabrías continuar?

S: No.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 3 (Gráfico)?*

S: Esto hay que pensar demasiado para hacerlo así. Esto se entiende, pero para llegar hasta ahí...

I: ¿Nunca lo has hecho así?

S: No.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 4 (Gráfico-Simbólico)?*

S: Está bien. También podría hacerlo así. Es el mismo que el 5 (Simbólico).

I: Sí, pero aquí hay que dibujar primero y luego identificar, pero ¿el dibujo, de primeras, lo hubieras hecho?

S: No lo dibujaría, lo haría directamente.

I: *¿Por qué no has elegido el planteamiento 1 (Ensayo-Error)?*

S: No lo sé. No da ninguna solución al final, igual que el 3 (Gráfico). Esto puede ser cualquier cosa.

I: Pero es que el problema no está terminado. El problema hay que continuarlo. Tampoco el 5 (Simbólico) da la solución.

S: Sí, pero de todas formas, con esos datos no se puede seguir.

I: ¿Tú crees que no se puede seguir?

S: No.

3ª Etapa. 1º Nivel. Ahora le pasamos el problema réplica del tipo (1,1,1), descrito en el apartado 9.3.4, pero con sólo con tres planteamientos: 1 (Ensayo-Error), 2 (Parte-Todo) y 3 (Gráfico). Se han eliminado las opciones simbólicas 4 y 5. Le pedimos al sujeto que lea con atención y que elija uno de los planteamientos propuestos.

Lee en silencio y hace la siguiente observación: “¿Se supone que tienen la misma capacidad? No”. Se pregunta y se responde a sí misma. Tarda 2 minutos en tomar la decisión.

Ha elegido el planteamiento 3 (Gráfico) y le pedimos que continúe y termine de resolver el problema. Entoces plantea una nueva relación en el dibujo (entre diferenicias de litros y de cubos) y resuelve correctamente. Ha resuelto en 2 minutos, es decir , ha tardado 4 minutos en todo el proceso.

4ª Etapa. 1º Nivel. Le hacemos las siguientes preguntas

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.*

S: No he encontrado ninguna dificultad.

I: ¿Has comprendido bien la relación que se expresa aquí?

S: Sí, es bastante fácil.

I: ¿No has elegido el 1 por las mismas razones que antes?.

S: Sí, decidido.

I: ¿Por qué no has elegido el 2? Aquí está bastante claro.

S: Si, pero no. Es que con el dibujo se ve más claro.

3ª Etapa. 2º Nivel. Le planteamos ahora un problema réplica del tipo (2,1,1), descrito en el apartado 9.3.4, con opciones sólo gráfica y numéricas, como en el caso anterior. Le indicamos que ha de elegir un planteamiento de entre los propuestos y terminar de resolver el problema.

Tarda 2,5 minutos en decidirse. Su decisión ha sido no resolverlo por ninguno de los planteameintos propuestos.

Después de la entrevista que se reproduce a continuación, lo resuelve mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que identifica previamente con lo que pide en el texto del problema. Es decir aplica un sistema de representación Simbólico (5) al estilo más clásico. Tarda 2 minutos en resolver este problema correctamente.

4ª Etapa. 2º Nivel. La entrevista que hemos tenido es la siguiente:

I: *Explica las dificultades que has encontrado para aplicar el sistema elegido.* ¿Al final no has elegido ningún planteamiento?

S: No.

I: ¿Ni con el 3 (Gráfico) tampoco, no sabes continuar con el 3 (Gráfico)?

S: Yo creo que no. Yo creo que está claro, pero luego terminarlo...

I: ¿Encuentras dificultad en buscar otra relación?

S: Sí.

I: ¿El 1 (Ensayo-Error) tampoco?

S: No, es que eso de ir probando...

I: ¿Y el 2 (Parte-Todo)?

S: Este es lo mismo que el 3 (Gráfico), pero sin dibujo. Entonces está claro hasta aquí (señala la última relación indicada en el planteamiento), pero luego ya no sé seguir.

I: Resuélvelo, entonces, como sepas hacerlo.

Estas respuestas confirman los resultado obtenidos en 8.1.7, en donde el empleo de un sistema de representación gráfico tiene mayor dificultad en un ítem/problema que se puede resolver mediante dos relaciones, que cuando se puede resolver estableciendo una relación, es decir, que la variable V_1 (nº de relaciones) influye en la utilización de los sistema de representación Gráficos al resolver un problema verbal algebraico.

Además, todo el proceso nos indica que hemos ubicado correctamente a Lucía en el cluster 3. Con lo que cualquier otro sujeto que responda al instrumento de evaluación siguiendo las pautas descritas, podremos conjeturar las características en cuanto a los sitemas de representación con los que abordan los problemas verbales algebraicos.