CAPITULO VI

REFLEXION FINAL Y CONCLUSIONES

VI. Introdución

La investigación que se presenta en esta memoria responde desde un principio a la necesidad de conjugar la dimensión teórica y la dimensión práctica de nuestra área de conocimiento: la Didáctica de la Matemática. Dentro de este área, nuestro trabajo se inserta en la línea de trabajo denominada Pensamiento Numérico (apartado I.2), y se centra concretamente en el campo conceptual de los Números Reales.

Los estudios realizados hasta el momento en este campo conceptual han estado dedicados a analizar concepciones de los alumnos, pero

a) no han evaluado la eficacia de programas de enseñanza,

b) no han abordado la discusión de las concepciones de partida de los alumnos,

c) no han tratado la utilidad de una aproximación al tema mediante planteamiento de conflictos cognitivos y situaciones didácticas que permitan la evolución de dichas concepciones.

Nuestro compromiso con la práctica nos ha llevado a apostar por estas dos últimas vías para la investigación.

Así pues, dentro de este esquema, hemos otorgado prioridad al contexto en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje, con toda su riqueza y la multiplicidad de variables que lo conforman, ya que nuestro objetivo primordial no ha sido explicar los procesos cognitivos subyacentes a la adquisición de ciertos contenidos, sino estudiar el proceso constructivo que desarrollan los alumnos en torno al concepto de Número Real en la situación escolar en que dicho proceso tiene lugar.

Para ello, y por los motivos expuestos en el apartado I.4 de esta memoria, hemos considerado adecuado adoptar un modelo de Investigación-Acción para el desarrollo de nuestro trabajo, haciendo uso de la figura del Investigador como Profesor, experto en contenido y en didáctica de la disciplina, cuyo precedente encontramos en Castro 1994.

En el apartado I.6 se detalla el esquema particular de nuestra investigación-acción, diseñado para abordar nuestro problema general de investigación: Explorar vías para la introducción al concepto de Número Real en el curriculum de Enseñanza Secundaria. Detectar y estudiar las dificultades y potencialidades que se pueden presentar en la comprensión matemática de los alumnos sobre estos conceptos, en un contexto escolar, explicitando las limitaciones y posibilidades para el aprendizaje que proporciona el aula como escenario natural complejo.

En una primera etapa, centramos nuestra atención en un análisis teórico del problema general de investigación apoyándonos, fundamentalmente, en las dos primeras componentes del campo conceptual de los Números Reales: la estructura de este conjunto numérico y las funciones o competencias cognitivas asociadas a dicho conjunto numérico. Para abordar los aspectos estructurales hicimos un estudio de la evolución histórica del concepto de Número Real, destacando obstáculos y rupturas conceptuales esenciales que se detectan en las reflexiones histórico-críticas sobre este campo ,y otorgando especial interés a los sistemas de representación de los Números Reales que se fueron consolidando a lo largo de la historia y los problemas implicados en cada uno de estos sistemas. Para realizar el estudio cognitivo partimos de la noción de comprensión de Hiebert y Carpenter (1992) y nos centramos sobre los sistemas de representación de los Números Reales, sus elementos y relaciones, para poner de manifiesto la utilización que los alumnos hacen de cada uno de estos sistemas, los significados que les atribuyen y los contextos en los que los emplean, así como las contradicciones reales o aparentes que surgen al trabajar con los diferentes sistemas. Además, tuvimos en cuenta para nuestro análisis los aspectos sociales y contextuales en la construcción del conocimiento por parte de los alumnos.

A partir del análisis teórico del problema general fue posible elaborar una serie de supuestos teóricos, delimitar y reenunciar el Objetivo General de investigación y enunciar la Hipótesis de nuestro estudio, que retomamos en el apartado siguiente.

VI. 2 Elementos básicos de la investigación

Los supuestos en los que se basa nuestra investigación quedaron enunciados como sigue a continuación:

1.- La construcción del concepto de Número Real se asienta sobre dos familias de representaciones: notaciones numéricas -notaciones simbólicas, de carácter proposicional- y modelos geométricos -imágenes y representaciones gráficas-; es decir, en el concepto de Número Real intervienen sustantivamente representaciones digitales y analógicas.

A nivel estructural, la imbricación e interdependencia de ambos tipos de representación se pone de manifiesto en el proceso histórico de la construcción del *concepto de Número Real, especialmente en el planteamiento y resolución de los conflictos más significativos.*

A nivel cognitivo los dos tipos de representación resultan ser, igualmente, necesarios y mutuamente complementarios. Sostenemos que la comprensión del concepto de Número Real pasa por el manejo de ambos sistemas de representación (notaciones numéricas y modelos geométricos) y de las conexiones y relaciones entre ellos, de forma complementaria y progresivamente más profunda y compleja.

2.- Consideramos que el tratamiento didáctico que se hace del concepto de Número Real, derivado esencialmente del programa de la Matemática Moderna, ha resultado inadecuado y pobre en significatividad para los alumnos. El problema de la irracionalidad es altamente complejo, y a esta complejidad se añaden las dificultades derivadas de las nociones de infinito implicadas.

Consideramos que el concepto de Número Real no puede abordarse de forma efectiva mediante un tratamiento convencionalmente formal, basado en representaciones proposicionales, y con referencias superficiales y pobremente conectadas en el terreno de las imágenes.

Del supuesto anterior se deriva que la estrategia didáctica del curriculum de matemáticas convencional pretende solucionar problemas importantes de comprensión soslayándolos mediante un planteamiento formal que, al pasar de puntillas por las dificultades del Número Real, elude las cuestiones fundamentales que están en la raíz de la comprensión de este concepto.

Bajo estos supuestos, reenunciamos con mayor precisión el Objetivo General de este estudio:

Explorar dificultades y potencialidades que presenta la introducción del concepto de Número Real a escolares de 14-15, utilizando para ello una propuesta didáctica que se caracterice por:

-tener en cuenta la complejidad de dicho concepto y abrir vías para la presentación, comprensión y solución de problemas fundamentales en la construcción del mismo,

-basarse, de forma simultánea y complementaria, en los sistemas de representación digitales y analógicos propios del Número Real y en un conocimiento claro, preciso y riguroso de la red conceptual que sustentan,

-estimular la progresiva profundización en las componentes e interrelaciones de ambos sistemas de representación, con objeto de proporcionar una base consistente para una adecuada formación de los alumnos en este terreno,

-insertarse en un contexto curricular, y considerar las limitaciones y posibilidades que proporciona el aula como escenario natural complejo.

Bajo los anteriores supuestos, objetivo y caracterizaciones, la Hipótesis de nuestro estudio quedó enunciada de la forma siguiente:

Sostenemos que

1º es viable una propuesta didáctica con las condiciones enunciadas, que nos permita introducir el Número Real a un grupo de alumnos de 1º de B.U.P.;

2º el desarrollo en el aula de la mencionada propuesta permitirá recoger información relevante de la comprensión de los escolares de 14-15 años sobre el concepto de Número Real.

VI.3 Desarrollo del Objetivo General

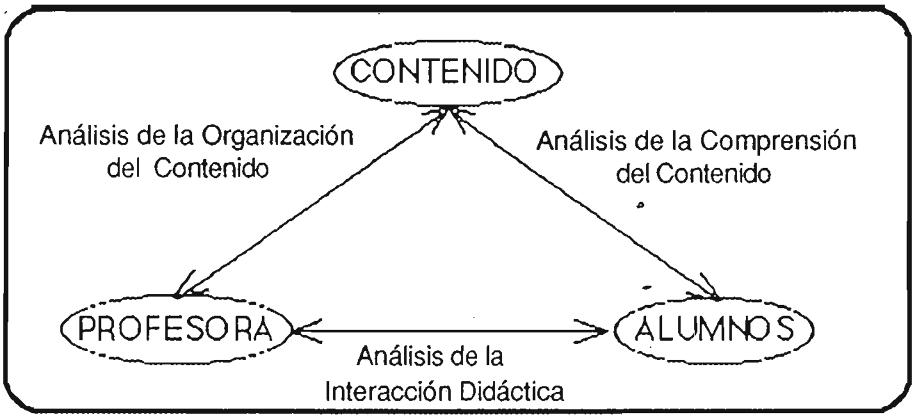
Una vez perfilado el objetivo general de nuestro estudio, el capítulo III estuvo destinado a desarrollar la planificación de la propuesta didáctica señalada en el mismo, teniendo en cuenta la caracterización en él explicitada.

Por una parte, nos proponíamos basar nuestra propuesta de forma simultánea y complementaria, en los sistemas de representación digitales y analógicos propios del concepto de Número Real y en un conocimiento claro y preciso de la red conceptual que sustentan. Por otra parte, nos proponíamos tener en cuenta la complejidad del concepto de Número Real y sus problemas fundamentales, con objeto de abrir vías para la presentación, comprensión y avances en la resolución de los mismos.

Para cubrir estos dos objetivos subsidiarios, decidimos articular dos Focos de Investigación. El Primer Foco estudia los problemas didácticos implicados en las Notaciones Numéricas usuales para representar los Número Reales, así como las potencialidades que el trabajo con este tipo de notaciones tiene para la comprensión del concepto; el Segundo Foco estudia, a su vez, los problemas que surgen de las Representaciones Geométricas de los Números Reales y las potencialidades que éstas presentan en el terreno didáctico. En cada uno de estos focos se desglosaron subobjetivos específicos: 4 subobjetivos para el Primer Foco y 5 subobjetivos para el Segundo Foco de Investigación, que se operativizaron mediante el enunciado de Cuestiones Específicas de Investigación, 23 en total, que se acompañan de una serie de Cuestiones Complementarias.

La otras dos propuestas que habíamos decidido que caracterizara nuestro estudio se referían a la inserción de nuestra exploración en un marco curricular, considerando las limitaciones así como las posibilidades que presenta el aula como escenario natural complejo, de una forma dinámica que hiciera posible la progresiva profundización en las componentes e interrelaciones entre los dos sistemas de representación y en los problemas y conflictos fundamentales del tópico que nos ocupa. Con este motivo, tanto las cuestiones de investigación específicas como las complementarias estaban pensadas para constituir el eje en torno al cual articular las sucesivas etapas del Plan Didáctico que habría que desarrollar con un grupo de alumnos de 1º de B.U.P.; las cuestiones fueron propuestas a los alumnos con formato de tareas escolares: ejercicios, pruebas, trabajos de exploración, exámenes o cuestiones para el debate.

Una vez organizado nuestro Objetivo General mediante un Plan Didáctico, que presentamos en forma detallada en los Anexos III.1 y III.2 de esta memoria, estábamos ya en disposición de implementarlo, siguiendo las fases marcadas por nuestro esquema de investigación-acción. Para organizar y procesar toda la información obtenida a lo largo de la implementación fue necesario elaborar Unidades de Análisis para cada una de las distintas componentes del triángulo didáctico Alumnos-Contenido-Profesora.



Dichas unidades de análisis nos han permitido, delimitar y concretar la Hipótesis de nuestro estudio, tal como veremos en el apartado que sigue.

VI.4 Conclusiones

Pasamos a presentar las principales conclusiones de esta investigación en relación a la Hipótesis General enunciada.

VI.4.1 Viabilidad de la propuesta didáctica con las condiciones enunciadas para la introducción del Número Real a escolares de 14-15 años

Nuestra propuesta didáctica estaba prevista en principio para que fuera viable su implementación con un grupo de alumnos de 1º de B.U.P. en un instituto de bachillerato de Granada capital. El plan se acomodaba al horario de cuatro horas lectivas semanales de la asignatura de Matemáticas, su duración prevista era de un total de 41 sesiones (aproximadamente el primer trimestre del curso escolar 93-94).

En los comienzos del curso, la actitud y el comportamiento de los alumnos resultó problemática para la viabilidad del plan que habíamos previsto. Especialmente la Puesta en Común se veía muy dificultada por el desorden en las intervenciones de los alumnos (cuya espontaneidad resultaba complicada de controlar para la profesora) , a su falta de reflexión sobre la pertinencia o no de las intervenciones propias y a la falta de atención a las de los compañeros.

También a partir de los comienzos de curso, empezó a extenderse un cierto malestar entre los alumnos con respecto al material y a la metodología empleados por la profesora-investigadora. Por una parte, las novedades metodológicas introducidas delegaban una mayor responsabilidad, autonomía y tiempo de trabajo en el alumno; pero por otra, es cierto que la presentación de las tareas que versaban sobre tópicos ya conocidos para los alumnos, eran poco estimulantes para que realizaran el esfuerzo requerido.

Como consecuencia de estas dificultades actitudinales, que fueron agravándose, a pesar de los esfuerzos realizados por la profesora-investigadora a lo largo de la Fase de acción 1, el trabajo conceptual se vio deteriorado, avanzó a un ritmo muy lento y con resultados bastante pobres para los alumnos. Al final de esta Fase de acción el esfuerzo requerido para desarrollar el plan previsto se incrementó y la dinámica que venía manteniéndose en el grupo, unida a los avances deficientes en el terreno conceptual hicieron cuestionar seriamente la viabilidad de la investigación con el grupo de alumnos con el que veníamos trabajando, ya que los conceptos que habían de abordarse en la siguiente fase de acción (destinada a la introducción de los números irracionales y los Números Reales) eran demasiado complejos como para ser tratados en las circunstancias imperantes.

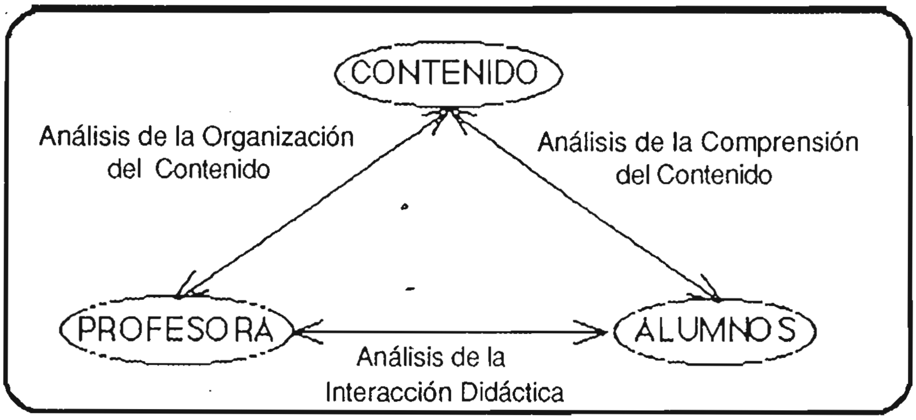
Ante este estado de cosas, la profesora-investigadora y el director del trabajo examinaron distintas opciones, y decidieron posponer la Fase de Investigación 2 e introducir una Fase Intermedia en la investigación (de aproximadamente un mes de duración), destinada a intentar solucionar los problemas actitudinales y de dinámica de grupo mientras se trabajaba con un nuevo tópico (alejado de nuestra investigación, para evitar así las dificultades añadidas por la presión que esto suponía).

Al término de la Fase Intermedia, se había observado una evolución positiva significativa en los problemas actitudinales y de interacción grupal que nos habíamos propuesto solucionar. Por este motivo, decidimos continuar con el plan previsto en el punto en que lo habíamos interrumpido.

Para pasar a la Fase de acción 2 fue necesario, no obstante, retomar los resultados de la Fase de acción 1 y revisar explícitamente los puntos fundamentales sobre Números Racionales que era conveniente conocer para avanzar hacia la construcción de los conceptos de número irracional y Número Real, intentando aclarar aquellos aspectos que se habían registrado como problemáticos.

las cuestiones de investigación específicas como las complementarias estaban pensadas para constituir el eje en torno al cual articular las sucesivas etapas del Plan Didáctico que habría que desarrollar con un grupo de alumnos de 1º de B.U.P.; las cuestiones fueron propuestas a los alumnos con formato de tareas escolares: ejercicios, pruebas, trabajos de exploración, exámenes o cuestiones para el debate.

Una vez organizado nuestro Objetivo General mediante un Plan Didáctico, que presentamos en forma detallada en los Anexos III.1 y III.2 de esta memoria, estábamos ya en disposición de implementarlo, siguiendo las fases marcadas por nuestro esquema de investigación-acción. Para organizar y procesar toda la información obtenida a lo largo de la implementación fue necesario elaborar Unidades de Análisis para cada una de las distintas componentes del triángulo didáctico Alumnos-Contenido-Profesora.



Dichas unidades de análisis nos han permitido, delimitar y concretar la Hipótesis de nuestro estudio, tal como veremos en el apartado que sigue.

VI.4 Conclusiones

Pasamos a presentar las principales conclusiones de esta investigación en relación a la Hipótesis General enunciada.

VI.4.1 Viabilidad de la propuesta didáctica con las condiciones enunciadas para la introducción del Número Real a escolares de 14-15 años

Nuestra propuesta didáctica estaba prevista en principio para que fuera viable su implementación con un grupo de alumnos de 1º de B.U.P. en un instituto de bachillerato de Granada capital. El plan se acomodaba al horario de cuatro horas lectivas semanales de la asignatura de Matemáticas, su duración prevista era de un total de 41 sesiones (aproximadamente el primer trimestre del curso escolar 93-94).

En los comienzos del curso, la actitud y el comportamiento de los alumnos resultó problemática para la viabilidad del plan que habíamos previsto. Especialmente la Puesta en Común se veía muy dificultada por el desorden en las intervenciones de los alumnos (cuya espontaneidad resultaba complicada de controlar para la profesora) , a su falta de reflexión sobre la pertinencia o no de las intervenciones propias y a la falta de atención a las de los compañeros.

También a partir de los comienzos de curso, empezó a extenderse un cierto malestar entre los alumnos con respecto al material y a la metodología empleados por la profesora-investigadora. Por una parte, las novedades metodológicas introducidas delegaban una mayor responsabilidad, autonomía y tiempo de trabajo en el alumno; pero por otra, es cierto que la presentación de las tareas que versaban sobre tópicos ya conocidos para los alumnos, eran poco estimulantes para que realizaran el esfuerzo requerido.

Como consecuencia de estas dificultades actitudinales, que fueron agravándose, a pesar de los esfuerzos realizados por la profesora-investigadora a lo largo de la Fase de acción 1, el trabajo conceptual se vio deteriorado, avanzó a un ritmo muy lento y con resultados bastante pobres para los alumnos. Al final de esta Fase de acción el esfuerzo requerido para desarrollar el plan previsto se incrementó y la dinámica que venía manteniéndose en el grupo, unida a los avances deficientes en el terreno conceptual hicieron cuestionar seriamente la viabilidad de la investigación con el grupo de alumnos con el que veníamos trabajando, ya que los conceptos que habían de abordarse en la siguiente fase de acción (destinada a la introducción de los números irracionales y los Números Reales) eran demasiado complejos como para ser tratados en las circunstancias imperantes.

Ante este estado de cosas, la profesora-investigadora y el director del trabajo examinaron distintas opciones, y decidieron posponer la Fase de Investigación 2 e introducir una Fase Intermedia en la investigación (de aproximadamente un mes de duración), destinada a intentar solucionar los problemas actitudinales y de dinámica de grupo mientras se trabajaba con un nuevo tópico (alejado de nuestra investigación, para evitar así las dificultades añadidas por la presión que esto suponía).

Al término de la Fase Intermedia, se había observado una evolución positiva significativa en los problemas actitudinales y de interacción grupal que nos habíamos propuesto solucionar. Por este motivo, decidimos continuar con el plan previsto en el punto en que lo habíamos interrumpido.

Para pasar a la Fase de acción 2 fue necesario, no obstante, retomar los resultados de la Fase de acción 1 y revisar explícitamente los puntos fundamentales sobre Números Racionales que era conveniente conocer para avanzar hacia la construcción de los conceptos de número irracional y Número Real, intentando aclarar aquellos aspectos que se habían registrado como problemáticos.

Ya en la Fase de Acción 2 se consigue mejorar la dinámica de trabajo, pero sigue habiendo problemas para mantener una comunicación fluida en gran grupo y se observa falta de interés en los alumnos por realizar tareas fuera de clase. En el análisis a través de las categorías de interacción didáctica se detecta, también, un predominio de actuaciones destinadas a fijar normas y establecer significados, que puede venir motivado por falta de experiencia en la realización de actividades de tipo dialéctico con los alumnos, pero que supone un esfuerzo de convergencia en las normas por las cuales nos regimos y los significados que compartimos, en especial cuando se trata de un grupo numeroso y heterogéneo. Aún así, no se presentan dificultades importantes para avanzar en el terreno conceptual.

En cuanto a rasgos positivos que se registran, cabe señalar la buena reacción de los alumnos a actividades de tipo manipulativo, y su iniciativa, implicación y buen hacer en la realización de trabajos voluntarios sobre el número π y el número de Oro y en su tratamiento en clase, tanto por parte de los alumnos que exponían como del resto de los compañeros. También se observó que los niños reaccionaban bastante bien a la discusión reiterada sobre tópicos conceptuales que les resultaban novedosos y conflictivos, y sobre los que tenían posibilidad de contrastar su avance en las diferentes sesiones.

A pesar de los logros y el avance conseguido a nivel conceptual, a medida que íbamos tratando cuestiones más complejas y puntos más conflictivos, nos dimos cuenta de que para cierto tipo de cuestiones eran necesarias herramientas matemáticas de las que no disponíamos y de que se había producido una saturación en el tiempo que habíamos dedicado a tratar este tipo de problemas con los alumnos. Dado que habíamos recogido una buena cantidad de información relevante, y que considerábamos prioritario respetar los intereses de los escolares, decidimos, a falta de las dos últimas cuestiones de investigación, dedicar nuestras energías a cerrar el proceso didáctico y prescindir de todo aquello que pudiera entorpecer ese fin (ver la descripción de la sesión 1-3-94 en el apartado V.I.4).

Finalmente, hemos de añadir que , además de la interrupción debida a la Fase de Acción Intermedia, fueron necesarias nueve sesiones más para completar el plan de acción previsto en principio: cuatro para la Fase de acción 1 y cinco para la Fase de acción 2.

En general, podemos concluir con una respuesta afirmativa a la hipótesis de la viabilidad de una Propuesta Didáctica de las características explicitadas en nuestro Objetivo General para introducir el concepto de Número Real a escolares de 14-15 años, con objeto de explorar dificultades y potencialidades que presenta. Si bien hemos de tener en cuenta las salvedades y reajustes anteriormente descritos.

VI.4.2 Información relevante de la comprensión de los escolares de 14-15 años sobre el concepto de Número Real

Puesto que el objetivo principal de nuestro estudio ha sido el de introducir el concepto de Número Real a escolares de 14-15 años, mediante una propuesta didáctica que nos permitiera explorar dificultades y potencialidades que pueda presentar este tópico para el desarrollo de la comprensión matemática de los alumnos, pasamos a enumerar algunos de los puntos más relevantes de la información que hemos obtenido al respecto.

Potencialidades más importantes detectadas

<u>1. Comprensión de los alumnos a lo largo del proceso didáctico sobre la tipología de expresiones decimales, significado que atribuyen a las mismas, y discriminación de distintas clases de Números Reales a partir de esta tipología.</u>

En general, se observa que los alumnos no tienen, desde un principio, dificultad para discriminar entre los decimales periódicos y los no periódicos. Dentro de los primeros, no tienen problemas relevantes para suministrar ejemplos e indicar su procedencia, con la excepción mencionada de la procedencia de una división al caso de los decimales con periodo 9.

Dentro de los decimales infinitos no periódicos, podemos ver que se produce una evolución en la comprensión de los alumnos a lo largo del proceso didáctico. En un principio, sólo la mitad de los alumnos reconoce la existencia de los decimales infinitos no periódicos y los ejemplos que suministran corresponden principalmente a raíces cuadradas, aunque también se mencionan decimales no periódicos con cifras arbitrarias y alguna alusión al número π. Sin embargo, hay bastante confusión y lagunas por lo que se refiere a la procedencia de estas expresiones decimales, la cual se atribuye en la mayoría de los casos a las raíces cuadradas.

Hacia el final del proceso didáctico, los alumnos están familiarizados con decimales infinitos no periódicos de diversos tipos, y mencionan especialmente el número de Oro y el número π (sobre los que han realizado trabajos varios grupos), junto con las raíces cuadradas y los decimales con cifras arbitrarias que siguen una regularidad. En este sentido, llama la atención la disminución en la mención de decimales infinitos con cifras arbitrarias con respecto al comienzo del tratamiento didáctico; esto puede deberse a que, una vez que los alumnos han trabajado con diversos tipos de decimales no periódicos atendiendo a su origen, su utilidad y su razón de ser, éstos tengan preferencia o resulten más significativos, incluso en el caso de que el motivo de su aparición sea el estar construidos con arreglo a una regularidad, que aquéllos que responden, aparentemente, a dar cifras al azar. En este caso los alumnos actúan de acuerdo con una intuición parcialmente acertada: si no se conoce el procedimiento para obtener las sucesivas cifras de un número, tal número no está bien definido y, por tanto, las cifras aportadas no son suficientes para decir que hay un número; de esas expresiones lo único admisible es considerarlas como una aproximación.

También los alumnos han progresado en su capacidad de identificar el origen de decimales infinitos no periódicos de distinto tipo: raíces cuadradas, proporciones, solución de ecuaciones. Aunque se observa que esta clasificación se solapa ($\sqrt{3}$ pertenecería a los tres grupos mencionados y el número de Oro a los dos últimos), y que los alumnos tienden a atribuir a las raíces cuadradas, una sola procedencia (aquella con la que están más familiarizados). En cualquier caso, desde el punto de vista didáctico, resulta positiva esta primera clasificación, fruto del trabajo de los alumnos en distintas situaciones.

Como observación final, señalaremos que los alumnos, en general, tienen una buena noción de tipos de decimales infinitos y no tienen problema en presentar un buen número de ejemplos, así como en asignarles una procedencia; aunque a efectos de una clasificación estructurada, se aprecian deficiencias, que serán comentadas en el apartado correspondiente a dificultades.

2. Correspondencia entre la notación habitual operatoria y la notación decimal de los Números Reales.

Los alumnos son capaces de establecer, comprender y aceptar un razonamiento que permite establecer la infinitud de las expresión decimal de algunas raíces cuadradas, por ejemplo $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{3}$: si el número de cifras de una expresión decimal es finito, la última cifra que resulta de multiplicarlo por sí mismo tiene un número finito de posibilidades, que en un buen número de casos no coincide con la última cifra del número cuya raíz queremos hallar. Sin embargo, este argumento no permite saber si podría ser periódica.

Los alumnos manifiestan un gran interés por conocer cómo puede saberse a ciencia cierta que la expresión decimal de π nunca va a ser periódica, es decir, ¿cómo puede llegar a saberse tal cosa, tratándose de una expresión decimal infinita? Esta pregunta es recurrente para ellos y tiene un gran valor en sí misma, aunque carezcamos en este nivel de instrumentos para contestarla. Sin embargo, hemos de señalar que su interés ha surgido de una implicación personal en el trabajo sobre el número π; la misma pregunta en el terreno de la v2, pasó completamente desapercibida, al ser propuesta por la profesora.

3. Orden y densidad de los Números Reales a través de la notación decimal.

Los ejercicios planteados para tratar esta cuestión (Ficha F11) resultaron muy interesantes en su tratamiento con los alumnos, y la estrategia ideada por ellos para comparar decimales (consistente en buscar el decimal con mayor número de cifras a la derecha de la coma y nombrar cuántas décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, etc. tenía, para luego hacer lo mismo con el resto de las expresiones decimales) resultó muy efectiva. Una vez encontrado un criterio para estudiar el orden en los decimales, resultó sencillo para los alumnos establecer la cuestión de la densidad. A través del reconocimiento de la densidad para los decimales, es fácil extrapolar al caso de las fracciones, pero esta conexión, que supone la previa identificación de las representaciones decimal y fraccionaria, no resultó inmediata para los alumnos.

4. La idea de infinito potencial en el sistema de notación decimal.

Se advierte un progreso de los alumnos en cuanto a la articulación del lenguaje y la determinación y manejo de elementos en relación con el infinito potencial. Por ejemplo, son capaces de delimitar con un lenguaje muy afinado la diferencia entre si el número más grande "existe pero no podemos saber cuál es" o "sabemos que no existe", con razonamientos como el que sigue, expresado por uno de los niños: "Suponte que hay alguno que es el más grande, le llamo x, entonces x + 1 es más grande".

5. Capacidad de los alumnos para conectar la conmensurabilidad de una longitud con respecto a otra tomada como unidad con la expresión racional (fracción, decimal periódico) de dicha longitud en esa unidad.

Capacidad para establecer la consiguiente inconmensurabilidad con respecto a la unidad de longitudes cuya expresión no es racional (lados de cuadrados de área dada, longitud de la circunferencia con respecto a su diámetro, lados de figuras con las proporciones áureas...):

Haciendo una revisión general de la evolución de la comprensión de los alumnos en torno a este punto, podemos decir que, si bien no resulta fácil entender el concepto de inconmensurabilidad de ciertas longitudes con respecto a otra tomada como unidad a través de su expresión decimal infinita no periódica (y por tanto no correspondiente a una fracción), sí es cierto que el trabajo sobre determinadas situaciones didácticas, conjugando la conmensuración de longitudes y la expresión de sus medidas a través de fórmulas o relaciones teóricas (correspondiente a decimales infinitos no periódicos), unidas a las explicaciones de la profesora sobre el concepto de inconmensurabilidad en términos geométricos, han hecho posible la construcción de un lenguaje común (cuyo término principal es la palabra "proporción", para referirse a razones inconmensurables) que ha permitido a varios alumnos tener una buena noción de la inconmensurabilidad, la cual son capaces de poner en juego para resolver situaciones problemáticas a las que no habían sido enfrentados con anterioridad. Por ejemplo, a la hora de comprender la inconmensurabilidad en la proporción áurea, comparándola con el caso de la razón inconmensurable de la longitud de la circunferencia a su diámetro.

6. Inyectividad de la correspondencia Números Reales-puntos de la recta.

Aunque los alumnos asignen a veces aproximaciones decimales finitas a puntos correspondientes a racionales cuya expresión decimal es periódica y a irracionales

construibles o no construibles, al discutir con ellos esta cuestión explícitamente reconocen correctamente, en general, que cualquier expresión decimal finita para los números mencionados es una aproximación.
A lo largo del proceso didáctico se observa la discriminación de algunos alumnos entre el concepto de número irracional, cuya expresión exacta y completa es imposible de aprehender con la notación decimal y sólo es posible lograrlo mediante la notación operatoria, y las aproximaciones decimales de dicho número irracional. Este aspecto no es trivial, ya que hemos observado que hay alumnos que tienden a transformar cualquier resultado en notación operatoria de números irracionales en aproximaciones decimales finitas (racionales), porque para ellos estas expresiones decimales tienen estatus de número y no de operación, sin discriminar en las razones conceptuales que justifican la prioridad de la notación operatoria en estos casos).

7. Correspondencia Números Reales-recta numérica.
A la conclusión del estudio, los alumnos tuvieron que definirse ante el dilema "puesto que todas las longitudes son conmensurables con respecto a otra tomada como unidad, la recta real la llenan los números racionales", sin haber sido enfrentados a él previamente. Resultó importante constatar que un 60% de los alumnos se mostró en desacuerdo con tal afirmación y bastantes de ellos lo hicieron rebatiéndola con la existencia de longitudes inconmensurables con la unidad y de sus correspondientes números irracionales, ya que esto supone haber puesto en juego conexiones entre los conceptos de: medidas conmensurables con la unidad - números racionales/ decimales infinitos no periódicos-números irracionales-medidas inconmensurables con la unidad / puntos de la recta, las cuales no habían sido explicitadas con anterioridad.

8. Características que otorgan la condición de número a diversos tipos de expresiones decimales, a juicio de los alumnos.
Los alumnos parecen dar por sentado desde un primer momento que los decimales periódicos son números. En cuanto a los decimales infinitos no periódicos, la necesidad de decidir sobre su estatus de número les lleva a explorar distintas características que otorgan dicho estatus. A pesar de que el proceso didáctico está enfocado para llamar la atención de los niños sobre las características de los Números Reales (en especial los construibles) en el ámbito geométrico, con énfasis en la medida de longitudes, los alumnos centran insistentemente su atención en el terreno de las operaciones aritméticas y, en segundo lugar, en la representación en la recta. Pensamos que esto puede deberse a su experiencia más dilatada en estos ámbitos a lo largo de la EGB, y a que su experiencia en el terreno de la geometría, que se reduce exclusivamente a este curso, aún no ha tenido tiempo de sedimentar.

En principio, las dudas sobre que cualquier tipo de decimal infinito no periódico fuera un número eran muy fuertes. Más adelante, los alumnos fueron aceptando el status de número de los decimales correspondientes a irracionales construibles y, al final del proceso didáctico, un alto porcentaje de alumnos conviene en esta aceptación; en el caso del número π, este porcentaje disminuye ligeramente. Hemos de señalar que, aunque la aceptación se produce a partir de la manipulación de estos números en situaciones didácticas, las razones aducidas por los alumnos no tienen conexión directa con el trabajo concreto realizado durante las mismas sino que, más bien, parecen ser fruto de que han sido utilizadas en el contexto didáctico.

En el caso de los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias, la mayor parte de los alumnos se mantienen reacios a aceptar que sean números, en especial aquéllos cuyas cifras no tienen ninguna regularidad, y esto es razonable después de las experiencias de manipulación con los otros tipos de decimales infinitos. La discusión profunda sobre el estatus de número de este tipo de expresiones decimales precisa de instrumentos que están fuera de nuestro alcance a este nivel.

9. Comprensión de los alumnos del concepto de Número Real sobre la base de la tipología establecida para las expresiones decimales, de las características que otorgan estatus de número a dichas expresiones decimales, y de su comparación y clasificación tanto en el ámbito numérico como en el geométrico.

Al tratar la cuestión de "qué aportan los irracionales a los racionales", los alumnos aludieron a las medidas y a las proporciones, y también apuntaron la resolución de ecuaciones; sin embargo, cuando la profesora apuntó la completitud de la notación decimal con los decimales infinitos no periódicos, a los alumnos no les resultó en absoluto significativo, y bastantes dieron muestras de no entender.

En otro orden de cosas, el intento de una estructuración global del tema de los Números Reales a través de un mapa elaborado por la profesora-investigadora para que los alumnos establecieran las conexiones entre el concepto de Número Real (racional e irracional), la Medida de longitudes (conmensurables e inconmensurables), la Representación en la recta y la Notación Numérica (notación habitual operatoria y notación decimal, con todos sus tipos, respectivamente), mostró que la realización de tal actividad requería una puesta en común de significados entre la profesora y los alumnos y también un proceso de maduración que desbordaba el tiempo previsto para la finalización de nuestra experiencia de campo. Pero, en su realización, se apreciaron muestras de tener bastante interés y de resultar útil a algunos alumnos para completar una visión total del tema y terminar de realizar conexiones entre sus distintos elementos, según la propia opinión espontánea de algunos alumnos.

10. La medida de longitudes. El problema del contexto.

En el trabajo que realizaron los alumnos sobre π, al intentar calcularlo midiendo longitudes y diámetros de distintas circunferencias y obtener aproximaciones distintas a la expresión decimal de π que ellos conocían, y al darse cuenta de que las aproximaciones de π habían variado a lo largo de la historia, surgió una duda a los alumnos que se reiteró a lo largo de las exposiciones sobre π en distintos momentos: "¿Cómo se sabe que la aproximación decimal que manejamos actualmente es correcta hasta las cifras que tomemos?" Si recordamos que en la actividad F12, dedicada a la conmensuración de parejas de segmentos, los niños no mostraron interés por contrastar los distintos resultados que obtuvieron ni por averiguar un criterio que permitiera decidir sobre la mayor o menor exactitud de éstos, reafirmamos la idea de que el contexto didáctico en el que se realizan las experiencias de medir de longitudes juega un papel importante, y que la expectativa de los alumnos de que haya un resultado correcto, dado de antemano, para la actividad que están realizando dificulta el que salgan a la luz problemas que subyacen a la medida en el plano físico, como el de los métodos para contrastar resultados diferentes; por otra parte, este tipo de conflictos podría suponer un paso para avanzar hacia la medida en el plano teórico, como forma de expresar numéricamente relaciones entre longitudes a partir de sus definiciones teóricas.

11. Utilización de distintas representaciones de los Números Reales según la finalidad que se pretenda y de la correspondencia entre los decimales periódicos y las fracciones para justificar por analogía determinadas propiedades de los decimales infinitos no periódicos correspondientes a irracionales construibles.

Es interesante observar cómo los alumnos han recurrido a distintas representaciones de números reales según el fin que pretendían (por ejemplo, operar con decimales periódicos mediante su expresión fraccionaria, o transformar la notación decimal infinita cuando querían representar determinados números reales en la recta), y cómo se han apoyado en la interrelación existente entre ellas para trabajar aspectos como las operaciones aritméticas con los irracionales. Por ejemplo, para justificar que dos decimales infinitos no periódicos correspondientes a irracionales cuadráticos podían multiplicarse a través de su expresión radical, análogamente al caso de los decimales periódicos a través de su notación fraccionaria; o recurrir a la analogía con las fracciones-decimales periódicos para justificar que los decimales infinitos no periódicos correspondientes a raíces cuadradas pudieran representarse en la recta exactamente.

Aunque también hemos de señalar que la posibilidad de determinadas representaciones para resolver cuestiones que no es posible abordar mediante representaciones alternativas (por ejemplo, la posibilidad de realizar operaciones aritméticas y representar exactamente en la recta las fracciones y la imposibilidad de hacer esto mismo con los decimales periódicos), suscita dudas en los alumnos de que ambos tipos de representación puedan corresponder a un mismo ente. Asímismo, se observó que algunos alumnos mostraron reticencias para admitir que el caso de los decimales infinitos no periódicos fuera análogo al de los infinitos periódicos.

Dificultades más importantes detectadas

1. Correspondencia entre la notación habitual operatoria y decimal de los Números Reales.

En la primera fase del proceso didáctico, por lo que respecta a la conversión fracción-decimal periódico y viceversa salieron a la luz las siguientes dificultades:

.Primera: La intuición de los alumnos de que decimales como 0,6666666666895 no pueden provenir de una división (y por tanto de una fracción), ya que su experiencia al hacer las divisiones es que una vez que las cifras del cociente empiezan a repetirse, ya se repetirán siempre; que la razón de tal fenómeno radique en la repetición de los restos no resulta significativo para ellos.

.Segunda: El argumento que permite establecer que todo decimal que proviene de una fracción será finito o periódico, a través de los restos de la división presenta mucha dificultad de comprensión para los alumnos; en principio, intentan reproducirlo sin entenderlo realmente y prácticamente ninguno de ellos es capaz de organizar un razonamiento con las premisas e implicaciones necesarias. Por otra parte, hay alumnos que afirman que a un decimal infinito no periódico no le corresponde ninguna fracción, pero sin dar justificación alguna de ello.

Pensamos que en este tipo de argumento hay varios pasos que se deben tener en cuenta para enlazarlos debidamente, y los alumnos de este nivel no están acostumbrados, o no tienen aún la madurez suficiente, para moverse en el terreno del razonamiento lógico deductivo.

.Dado que la mayoría de los alumnos se encuentran todavía en un nivel muy concreto de razonamiento, sería necesario un trabajo repetido, con ejemplos concretos, que permitiera avanzar en los distintos puntos de dificultad del argumento. Estos puntos aparecen detallados en los aspectos relacionados con la comprensión, en la fecha 5-11-93 del Diario de la profesora-investigadora.

.Tercera: El caso del periodo nueve merece una consideración explícita detallada. Sobre este particular los alumnos, en general, mantienen su intuición primitiva de que 7,999... no es igual que 8 y de que la regla para convertir expresiones decimales en fracciones aproxima o no es válida en el caso del periodo nueve. El resto de las actividades destinadas a proporcionar argumentos a favor de la igualdad entre 7,9999... y 8, se realiza aisladamente y, aún cuando se explicitan las conexiones, éstas no resultan significativas para los alumnos. Los que aceptan la igualdad, parece que lo hacen sobre la base de que es un conocimiento establecido que deben dominar.

No fue posible en la primera fase de acción lograr que los alumnos establecieran de forma consistente la correspondencia fracciones-decimales finitos o periódicos.

Una vez avanzado el proceso didáctico, los alumnos parecen asociar los decimales periódicos con las fracciones y los números racionales, y establecer, en general, que los decimales infinitos no periódicos no pueden provenir de una fracción. De manera intuitiva, establecen una dicotomía entre las raíces cuadradas no exactas y las fracciones y, por este motivo, atribuyen a las raíces una expresión decimal infinita no periódica. Sin embargo, en la gran mayoría de los alumnos, como estas conexiones no están bien sustentadas por razonamientos lógicos (muy difíciles de asimilar por los niños del nivel en que nos encontramos), surgen dudas e inseguridades al enfrentarse con preguntas como la de si es posible saber que la expresión decimal de las raíces cuadradas no enteras y del número π serán infinitas (a diferencia de no saber si lo serán o no), y como saber si en la expresión decimal de estos números podrá surgir un periodo alguna vez.

A nuestro juicio se detectan varias dificultades en relación con la correspondencia entre la notación habitual de los irracionales y su notación decimal infinita no periódica:

.La correspondencia biunívoca fracción-decimal periódico es establecida por los alumnos, en general, a un nivel intuitivo, sin estar sustentada por una justificación es términos de razonamiento lógico-deductivo. El razonamiento por el que se ha intentado en diversos momentos establecer esta conexión se ha mostrado difícil de asimilar y manejar con cierta soltura para la mayoría de los alumnos.

.Los alumnos establecen una dicotomía entre las raíces no enteras y las fracciones; no necesitan demostración al respecto. Esta conexión se establece, por tanto, de forma muy débil, y aunque la profesora intenta reforzarla introduciendo a algunos alumnos (voluntarios) en la demostración, el resultado es que este tipo de razonamiento se muestra excesivamente sofisticado, incluso para los alumnos más avanzados. La debilidad de esta conexión, hecha sólo en términos de conocimiento establecido, saldrá a la luz en momentos posteriores y se revelará como un obstáculo para avanzar sobre otros aspectos.

.No es inmediata la conexión entre la dicotomía raiz cuadrada-fracción, y el que la expresión decimal de las raíces cuadradas no pueda ser periódica. Algunos alumnos establecen esta conexión, pero otros siguen teniendo dudas al respecto. (Esto puede tener su origen en la dificultad señalada en el primero de estos puntos).

.En el caso del número π no se ha establecido la dicotomía con las fracciones: es más, la misma definición suele llevar a confusión. Después de haber explorado en torno al concepto de π, ha resultado mucho más intrigante determinar cómo puede saberse que su expresión decimal será infinita y que nunca podrá aparecer un periodo. El interés conceptual suscitado por esta cuestión y la insistencia de los alumnos en profundizar en ella ha tenido que quedar en suspenso en esta etapa inicial.

Ninguno de estos problemas parece sencillo de solucionar trabajando en una clase de alumnos de un nivel similar al de nuestra experiencia de campo.

Mención aparte merece el caso del periodo nueve. En la interacción didáctica sobre el Cuestionario de Repaso, se vio que los alumnos eran capaces de establecer que 0,999....= 1, y de extrapolar este resultado al caso de cualquier decimal acabado en "periodo 9 ". Pero encontraban paradójico este resultado, que obtenían al aplicar la regla habitual para transformar las expresiones periódicas en fracción, y pensaban, en general, que la regla "aproximaba". La profesora era consciente de la carencia de instrumentos para discutir la cuestión con más profundidad y de la dificultad de establecerlos con alumnos de este nivel, y optó por establecer la igualdad en términos de conocimiento decretado.

<u>2. Construcción del concepto de Número Real, a través de sus distintas representaciones numéricas y la interrelación entre las mismas.</u>

La definición del concepto de número racional, que se ha pretendido hacer a partir de las correspondencia biunívoca entre las representaciones fraccionaria (teniendo en cuenta que todas las fracciones equivalentes representan un mismo número racional) y decimal finita o periódica de los números racionales, no resulta fácil de asimilar para los alumnos. Estos tienen bastantes dificultades en discriminar los errores o carencias en las conexiones establecidas entre dichas representaciones en distintas definiciones que se proponen como alternativas, e incluso hay una parte de los alumnos que sigue pensando que los racionales pueden tener una expresión decimal infinita no periódica. Los argumentos mediante los cuales otros compañeros intentan justificar que esto no es posible traslucen falta de rigor e incluso falacias, como "este tipo de decimales no pueden pasarse a fracción porque no hay una regla para convertirlos"; sin embargo, en un nivel general que permita un ritmo de clase razonable, la profundización en el rigor de las conexiones queda fuera de nuestro alcance con estos alumnos. Este es uno de los puntos que se registró como problemático en el apartado anterior, y que se revela como fundamental para la comprensión del concepto de número racional.

Con estas consideraciones, *la comprensión del concepto de Número Real sobre la base de su representación simbólica, mediante la conexión entre las distintas notaciones numéricas resulta pobre*. Al final del proceso didáctico se observa que alrededor del 25% de los alumnos son capaces de asociar correctamente los números racionales e irracionales a sus notaciones respectivas, tanto habitual operatoria como decimal, sin que eso signifique que puedan razonar dichas asociaciones o conexiones. Más de un 40% de los alumnos del grupo sólo son capaces de asociar los números racionales o irracionales a una de sus representaciones, no logran hacer algún tipo de caracterización sistemática y sólo dan rasgos o ejemplos aislados, o bien hacen asociaciones incorrectas o no contestan a la pregunta.

También hemos de señalar que hay alumnos en los que se sigue observando confusión entre el concepto de número y sus representaciones, ej: "Las fracciones forman parte de los racionales".

Sería muy conveniente tener en cuenta todos estos puntos para diseñar material que permitiera a los alumnos afianzar de forma progresiva y no lineal, a partir de distintas situaciones las conexiones que se han mostrado como deficientes.

Mención aparte merece el caso del número π. El que dicho número tenga infinitas cifras no periódicas y sin embargo "provenga de una división" (a saber, longitud de la circunferencia / su diámetro) es un problema para los alumnos, para los que no resulta trivial captar el concepto de razón inconmensurable. Sólo el trabajo en profundidad sobre π, la manipulación con su medida y la recogida y discusión de información establecida al respecto, puede contribuir a ir esclareciendo progresivamente este dilema, que no es en absoluto trivial.

<u>3. Comprensión de los alumnos sobre el significado de la medida. El problema de la unidad.</u>

Los alumnos se encontraban, en principio, desconcertados en el terreno de la medida de superficies. Asociaban el concepto de medir con "dar un resultado a través de una fórmula" o también, en un lenguaje más coloquial, "saber el espacio que ocupa algo", pero no eran capaces de delimitar algún procedimiento para averiguarlo.

Cuando estos niños realizaron actividades de medición, la tendencia inmediata fue medir con las unidades estándares del Sistema Decimal. No se planteaban la necesidad de explicitar la unidad de medida; es conveniente notar que un elemento tan importante para la propia definición de medida, como es la unidad de medida, pasa completamente desapercibido para los alumnos. Esto puede ser debido a que en EGB el tema de la medida se trabaja fundamentalmente a través del sistema métrico decimal y las fórmulas métricas. Para avanzar en este punto específico sería necesario plantear actividades que dieran a los alumnos oportunidad de realizar mediciones a través de distintas unidades, incluso escogidas por ellos mismos, de manera que tuvieran que enfrentarse con la necesidad de explicitar la unidad de medida como referencia y, al mismo tiempo, la relatividad de la misma.

Pensamos que este es un punto importante para la comprensión de los Números Reales en su aspecto geométrico, ya que está en la base del problema de la conmensurabilidad-inconmensurabilidad.

4. Conmensurabilidad de segmentos y expresión de su relación mediante un número.

En la primera fase del proceso didáctico salió a la luz que la gran mayoría de los alumnos admiten la existencia de una parte alícuota para dos longitudes cualesquiera, es decir, admiten que dos longitudes cualesquiera son siempre conmensurables. En una primera interpretación, podríamos pensar que los alumnos están reproduciendo el mismo obstáculo que ya tuvieron los pitagóricos, y al que que se enfrentaron con la aparición de medidas inconmensurables. Sin embargo, hay varias cuestiones importantes que matizan esta primera impresión:

.Los alumnos en general trabajan y se contentan con un nivel de precisión bastante bajo y, por otra parte, uno de los dos procedimientos mayoritarios para conmensurar longitudes se basa en una aproximación. Esto no es causa de conflicto para ellos (ni siquiera la discrepancia de resultados) y, en ningún momento, surge la necesidad de precisión, ni de establecer la unicidad del resultado ni de discutir sobre los criterios para obtener el resultado correcto. No se plantean la necesidad de trascender el plano físico. Además, varios alumnos aluden al Sistema Métrico Decimal al referirse a la división de segmentos: "una millonésima parte", "aunque sea un milímetro" (refiriéndose a una parte muy pequeña, "le sobre una décima" (cuando, en realidad, el trozo sobrante corresponde a 1/3 del total).

En estas circunstancias, *el aparato conceptual y procedimental con el que los alumnos habrán de abordar el problema de la inconmensurabilidad se muestra indudablemente débil,* ya que en la aparición de medidas inconmensurables, la preocupación por la precisión y la trascendencia del plano físico juegan un papel fundamental.

.Por otra parte, la *falta de conexión entre los sistemas de representación geométrico y numérico,* más o menos sistemática, también puede constituir un obstáculo importante a la hora de iniciar el estudio de la Irracionalidad, lo cual presenta muchos más problemas por lo que a coordinación entre el plano numérico y el geométrico se refiere, debido a la aparición de los procesos infinitos.

No tenemos claro hasta qué punto la propia formulación de la pregunta, en los términos aseverativos en que la hemos planteado, induce a una respuesta afirmativa sobre la existencia de una parte alícuota ya que, de hecho, pedimos el número que expresa la relación; tampoco está claro en qué términos podría formularse para evitar esta confusión y con un enunciado que permitiera que fuese comprendida, discutida y trabajada por los alumnos. Por otra parte intuimos que, a cualquier nivel en que se formule la pregunta por primera vez, se planteará el mismo problema.

5. Capacidad de los alumnos para conectar la conmensurabilidad de una longitud con respecto a otra tomada como unidad con la expresión racional (fracción, decimal periódico) de dicha longitud en esa unidad.

Capacidad para establecer la consiguiente inconmensurabilidad de longitudes cuya expresión no es racional (lados de cuadrados de área dada, longitud de la circunferencia con respecto a su diámetro, lados de figuras con las proporciones áureas...).

Nuestra intuición en este caso es que los alumnos no son capaces de entender la correspondencia rigurosamente establecida entre expresión fraccionaria o decimal periódica y existencia de una parte alícuota, y entre la expresión decimal infinita no periódica y la no existencia de una parte alícuota; en este último caso pensamos que asocian ambas ideas intuitivamente, quizás apoyándose en la idea de que no existe una parte decimal alícuota.

6. Capacidad para comprender la no existencia en el plano físico de longitudes inconmensurables y de cuestionarse la existencia en otro plano.

Aunque hay alumnos que han llegado a captar que en el plano físico no podemos hablar de longitudes inconmensurables, sino que sólo es posible plantear esta cuestión cuando se conoce la relación en abstracto entre la longitud que se quiere medir y la unidad de medida, en general, las discusiones en torno a los procedimientos para averiguar el número π, por ejemplo, mostraron que los alumnos no son capaces de discriminar entre la medida a nivel teórico (a partir de las relaciones geométricas abstractas entre las longitudes) y la medida a través de procedimientos físicos.

En este punto se pone de manifiesto una de las lagunas más importantes en el estudio del concepto de Número Real: en el terreno geométrico, la irracionalidad sólo aparece cuando somos capaces de trascender el apoyo constituido por la figura geométrica en el sentido físico y podemos razonar sobre ella en términos abstractos. Este tipo de razonamiento requiere un grado de madurez que los alumnos de este nivel aún no han alcanzado (no olvidemos que históricamente, la geometría nace en una sociedad, la griega, en donde el pensamiento lógico-deductivo había alcanzado un nivel de desarrollo muy importante). Por otra parte, también es cierta la carencia de formación específica que tienen los escolares de este nivel sobre razonamiento geométrico deductivo; una de las mayores lagunas del currículo actual de matemáticas para la Enseñanza General Básica es la inexistencia de la geometría como disciplina deductiva. Esta falta de formación en un modo específico de razonamiento se hace evidente al enfrentarnos con los problemas mencionados de la conmensurabilidad.

7. Carácter de aplicación de la correspondencia Números Reales-puntos de la recta. Asignación de un punto de la recta a las distintas notaciones de los números racionales e irracionales. Procedimientos para realizar esta asignación.

-En general, la representación en la recta de la expresión decimal de los Números Racionales presenta bastante más dificultad para los alumnos que la representación de la expresión fraccionaria. Pensamos que esto puede deberse a que en la etapa de EGB se hace más hincapié en la notación fraccionaria que en la decimal a la hora de representar los números racionales en la recta numérica; sin embargo, nuestra experiencia muestra que la representación en la recta de las expresiones decimales sirve de apoyo para comprender el significado de esta notación y, además, resulta imprescindible para abordar la representación en la recta de los números irracionales.

.La expresión fraccionaria suele representarse dividiendo la unidad en las partes que indica el denominador y tomando las que indica el numerador. En el caso de las fracciones impropias aumenta el número de niños que pasan la fracción a su expresión decimal; además, las fracciones impropias con números grandes resultan muy difíciles de representar para los alumnos y pensamos que sería conveniente diseñar material para tratar este punto.

.Un error cometido por algunos niños al representar fracciones en la recta consiste en situarse en la unidad que indica el numerador y dividir la siguiente unidad en las partes que indica el denominador.

.En el caso de la representación en la recta de los decimales, sólo un 25% de los alumnos toma las unidades indicadas en la parte entera y divide la siguiente en décimas, centésimas, etc..., para marcar el número indicado en la parte decimal. También aquí hemos de señalar el caso de alumnos que explican el proceso teóricamente, pero no son capaces de llevarlo a cabo a efectos prácticos. Para los decimales periódicos, los resultados mejoran a medida que se avanza en el proceso didáctico: aumenta el número de alumnos que utilizan el procedimiento de pasar el decimal periódico a su expresión fraccionaria para hacer la representación exacta; quizás porque éste sea un punto sobre el que se ha insistido en clase especialmente.

.El número de alumnos que asigna el mismo punto de la recta a distintas notaciones (fraccionaria y decimal) de un mismo racional es mayor que el número de éstos que lo hace cuando se trata de distintas notaciones decimales de un mismo racional. La comprensión sobre la representación en la recta de las distintas notaciones de los numeros racionales ha progresado lentamente, en especial por lo que se refiere a la notación decimal. A pesar de que se trata de un contenido de repaso de la anterior etapa de E.G.B., sería conveniente diseñar ejercicios detallados que permitieran a los alumnos un mayor dominio del mismo.

-Por lo que respecta a la comprensión de los alumnos sobre la correspondencia números reales-puntos de la recta, partiendo de los distintos tipos de notación decimal infinita, las dificultades más significativos son:

.*Aunque casi todos los alumnos piensan que existe punto en la recta correspondiente a los decimales periódicos*, sólo un 55% lo representa correctamente.

.*Un resultado similar se obtienen para los irracionales construibles*. Sin embargo, *los alumnos, en principio, no tienen claro que el cuadrado de área correspondiente al número cuya raiz hay que representar en la recta ha de construirse con la misma unidad de* *medida de la recta.* Algo análogo ocurre con el caso del número π: como en el caso de las raíces cuadradas, tampoco los alumnos tenían claro al principio si esa circunferencia podría ser cualquiera; sólo una alumna logró establecer que sería la circunferencia de diámetro la unidad de la recta; el resto de sus compañeros no dieron muestras de comprender, quizá porque no estuviera tan claro para ellos el significado del número π. De hecho, esto se pone de manifiesto en una de las exposiciones sobre π, cuando un alumno manifestó sus reticencias a aceptar que la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro fuera siempre la misma.

Para el caso de los irracionales no construibles, la profesora intentó centrar la atención de los alumnos en que las aproximaciones decimales sucesivas por exceso y por defectos constituían una sucesión de intervalos encajados, e intentó aprovechar el caso de π como puente entre los irracionales claramente construibles para los alumnos (raíces cuadradas) y los no construibles; en el caso de π las aproximaciones sucesivas convergían a un punto que correspondería a la medida de la longitud de la circunferencia de diámetro unidad, es decir, convergerían al punto correspondiente al número π. Los alumnos, sin embargo no captaron la intención de la profesora; la existencia de un punto en la recta correspondiente a un irracional determinado parecía depender de su constructibilidad, y las aproximaciones sucesivas eran sólo aproximaciones; no fue posible un avance a partir de aquí.

<u>8. Sobreyectividad de la correspondencia Números Reales-Puntos de la Recta. Evolución de la comprensión a lo largo del proceso didáctico.</u>

En general se observa que los alumnos consideran que a todo punto de la recta corresponde un número. Sin embargo, se detecta que esta creencia responde a una intuición, en la gran mayoría de los casos sin fundamentar y sin delimitar o establecer en términos más o menos sistemáticos. Un número muy escaso de alumnos es capaz de justificar esta creencia estableciendo la correspondencia números-puntos de la recta en términos de medidas de longitudes, a pesar de que en alguna de las actividades realizadas hay alumnos que se tornan conscientes de esta correspondencia (que no habían advertido durante toda la etapa en la que habían representado números racionales mediante procedimientos estándares y no tratando de buscar procedimientos para asignar números a puntos de la recta).

En cuanto al tipo de número que puede corresponder a un punto cualquiera de la recta real, se observa una evolución en las concepciones de los alumnos. En un principio, éstos rechazan, el que a un punto de la recta pueda corresponderle un decimal infinito. Después de construir longitudes inconmensurables, piensan que a un punto de la recta también puede corresponderle un irracional construible. Al final del proceso didáctico, aproximadamente la mitad de los alumnos piensan que a un punto dado de la recta puede corresponderle un número racional o irracional construible (aunque hay algunos que creen que sólo le puede corresponder un número racional), y la otra mitad piensan que puede corresponderle cualquier tipo de decimal, esto es, cualquier número real. Consideramos que esta última respuesta puede venir influenciada por el conocimiento establecido de que "los números reales son los que llenan la recta real".

A propósito de la comprensión de los alumnos sobre qué números llenan la recta, cómo es la correspondencia números-recta, a mediados del proceso didáctico se planteó una pregunta destinada a explorar las intuiciones de los alumnos acerca de si los números racionales llenan o no la recta numérica, es decir, si en la intuición de los alumnos el modelo de la recta podía corresponder a los números racionales. En principio, esta pregunta estaba formulada con la expectativa de que, después de la actividad sobre la conmensurabilidad de segmentos, los alumnos pudieran establecer una correspondencia entre puntos de la recta-longitudes-números y, dado que la mayoría de ellos pensaban que dos longitudes cualesquiera son conmensurables, establecieran que todos los puntos de la recta corresponden a números racionales.

Las respuestas de los alumnos, sin embargo, revelaron otros aspectos. Uno de los puntos más destacados es la creencia de que los racionales no llenan la recta debido a la necesidad de "finalizar el proceso infinito" de colocarlos todos y a la imposibilidad de hacerlo (especialmente cuando este obstáculo, detectado en experiencias anteriores, se había intentado evitar planteando la pregunta de manera que un "genio" hubiera ya colocado todos los números en la recta). Además, este mismo obstáculo sería válido para el caso de los Números Reales. Nuestra interpretación es que *la propia formulación de la pregunta, en términos de números llenando o completando la recta, era mucho más compleja de lo que habíamos supuesto. Los argumentos expresados por los niños ponen de manifiesto que la cuestión, así formulada, hace aflorar sus intuiciones más primitivas sobre la estructura del continuo lineal, sobre la correspondencia entre esta estructura y sus nociones acerca de los números, sobre el cardinal de los conjuntos infinitos y la correspondencia entre ellos y, en especial, sobre la no existencia de un final para los procesos infinitos.* Estos son puntos clave para la comprensión del concepto de Número Real y de su estructura topológica; sin embargo, el trabajo al respecto con alumnos de este nivel resulta uno de los puntos más abiertos y problemáticos de nuestra investigación, ya que supone el manejo de instrumentos matemáticos basados en el uso riguroso de los procesos infinitos, y por tanto, con un gran nivel de sofisticación.

Nuestra decisión con respecto al tratamiento de este punto consiste en avanzar en la línea de establecer unas bases sólidas de la correspondencia números-puntos de la recta, prestando especial interés a los problemas, matices e intuiciones en torno al continuo lineal y a la correspondencia con el modelo de los Números Reales que puedan surgir en el transcurso de nuestro proceso.

9. Comprensión de los alumnos del concepto de Número Real sobre la base de la tipología establecida para las expresiones decimales, de las características que otorgan estatus de número a dichas expresiones decimales, y de su comparación y clasificación tanto en el ámbito numérico como en el geométrico.

Los alumnos tienen más dificultades en clasificar y hacer una estructuración de la tipología de decimales infinitos aparecidos en el proceso didáctico, que en recordar diversos tipos y suministrar ejemplos de ellos, lo cual es lógico por otra parte, puesto que supone un paso más en el nivel de abstracción. Sólo un 15% de los alumnos discrimina todos los tipos de decimales infinitos y los estructura tal como están especificados en nuestras unidades de análisis del contenido

Sorprende que, después de haber hecho varias veces clasificaciones de los decimales infinitos en la pizarra bajo la dirección de la profesora-investigadora, a los alumnos les resulte muy difícil discriminar entre clasificaciones que, a nuestro juicio, tienen calidades claramente distintas en cuanto a estructura, y tiendan a elegir las menos complicadas y de mejor caligrafía. Este es un aspecto significativo, a nuestro juicio, ya que da idea de que la capacidad de clasificación de los alumnos no se desarrolla demasiado cuando es el profesor quien organiza las estructuraciones, aunque se apoye en las indicaciones de varios de ellos.

En cuanto a la discriminación de los distintos tipos de decimales infinitos, una proporción más bien escasa de alumnos (alrededor del 25%) discrimina correctamente, tanto en el ámbito de la notación numérica como en el ámbito de la representación gráfica, y el resto hace discriminaciones más primitivas, principalmente entre racionales e irracionales.

10. Conflicto entre la finitud actual de la longitud irracional y la infinitud potencial de su expresión decimal.

El conflicto se presenta ya con los *decimales periódicos.* En efecto, a partir de la representación en la recta de los números racionales expresados en distintas notaciones, planteada en el Cuestionario de Repaso, hubo alumnos que manifestaron su dificultad para aceptar que un decimal periódico pueda representarse exactamente en la recta a través de una fracción, puesto que al tener infinitas cifras nunca podría llegar a representarse exactamente.

Por otra parte, los alumnos encuentran muy difícil aceptar el que el lado de un cuadrado de área 3 tenga una longitud finita y su expresión numérica sea infinita no periódica. Para ellos, el lado del cuadrado no puede medir "exactamente" $\sqrt{3}$ por este motivo. La cuestión de la exactitud de la medida de los lados de los cuadrados es realmente interesante. Se llega a que la medida de un lado es un número que multiplicado por sí mismo da 3, y ese número no tiene una expresión decimal exacta ni controlable. Entonces la exactitud de la medida del lado de un cuadrado no puede establecerse en el terreno numérico, sino que se refiere en última instancia a que un lado multiplicado por sí mismo da como resultado el área; es decir, entramos en el terreno del razonamiento puramente geométrico. Este punto es realmente sutil y queda totalmente fuera del alcance de nuestro trabajo a este nivel.

En definitiva, por lo que se refiere al conflicto que se plantea a los alumnos ante la expresión decimal infinita de determinadas medidas finitas y delimitadas, creemos que este tiene razón de ser, y es difícil de solucionar porque implica el paso de considerar una expresión decimal infinita como un proceso, a considerarla como un ente, en términos de infinito actual.

11. El concepto de Número Real, en relación con los distintos conjuntos numéricos manejados por los alumnos.

Resulta difícil para los alumnos discriminar entre conjunto numérico y notación numérica, y considerar significativa la diferencia entre ambos conceptos; cuando se habla de números consideran al mismo nivel un número entero, una fracción y un número decimal, por ejemplo, y esto dificulta la comprensión del concepto de número racional. Otro obstáculo que dificulta dicha comprensión es la dicotomía establecida entre entero-fracción y entero-decimal (incluso por el significado coloquial de estas palabras), que lleva a muchos niños a establecer relaciones confusas e incorrectas entre el concepto de número entero y el de número racional. Todo esto dificulta consiguientemente, la adquisición de una buena noción del Número Real por lo que se refiere a los conjuntos numéricos que integra y las relaciones de inclusión entre los mismos.

VI.5 Reflexión final e implicaciones para futuras investigaciones

A lo largo de todo este trabajo de investigación, hemos compartido con Hans Freudenthal algunos de sus Once Problemas Fundamentales de la Educación Matemática. En especial, hemos estado motivados por el segundo: "Aprender a observar los procesos de aprendizaje"; observar trae consigo, según Freudenthal, "analizar, y por analizar no se refiere a promediar o aplicar otros procedimientos estadísticos ni a encajar los datos de la observación a modelos preconcebidos de la psicología evolutiva".

Nuestra observación y nuestro análisis han puesto de manifiesto que es posible realizar avances en este aprender a observar los procesos de aprendizaje de los alumnos. En un tópico como el de Número Real ha sido posible ir más allá de la observación estática de las concepciones de los alumnos sobre determinados puntos en un momento determinado, y realizar una observación de sus *procesos* de aprendizaje, de cómo evoluciona su comprensión sobre determinados aspectos, qué obstáculos y qué potencialidades pueden presentarse para el desarrollo de la comprensión matemática de estos alumnos.

Esto hemos podido llevarlo a cabo gracias al estudio de la historia de las matemáticas, concretamente de la historia del concepto de Número Real, como proceso de esquematización progresiva. Según plantea Freudenthal, en su tercer problema fundamental de la Educación Matemática, "en algún sentido, los jóvenes deberían repetir la historia, aunque no aquella que tuvo lugar en realidad, sino la que habría tenido lugar si nuestros antecesores hubieran sabido lo que nosotros sabemos". La revisión del proceso histórico del concepto de Número Real ha permitido establecer de forma precisa una red conceptual sustentada por los sistemas de representación, digitales y analógicos, del concepto en cuestión, sobre la cual trazar un mapa de conexiones para la comprensión del Número Real. Mediante este mapa ha sido posible explorar, detectar, organizar y tratar deficiencias, problemas y potencialidades que se presentan en la comprensión por parte de los alumnos del concepto que nos ocupa.

Una de las confirmaciones más importantes que aporta este trabajo a estudios precedentes es que los procesos de aprendizaje de los alumnos se ven enormemente condicionados por la interacción que tiene lugar en la comunidad de la clase. En efecto, muchos de los puntos relevantes sobre la comprensión de los alumnos en el tema del Número Real han sido detectados con motivo de las discusiones en grupo sobre ciertos problemas, pero no sólo han sido detectados con motivo de la interacción, sino que los alumnos han llegado hasta los mencionados puntos a través de la misma. En efecto, para poder llegar a muchos de los aspectos tratados, ha sido necesario construir un lenguaje común -que se ha ido revelando cada vez más fino y complejo- sobre la base de experiencias compartidas; este lenguaje nos ha permitido intercambiar significados en torno a cuestiones que no habrían podido llegar a discutirse sin haber articulado todo un camino previo.

Queremos también hacer referencia a un aspecto de nuestro trabajo que nos deja cierta insatisfacción. El hecho de querer abarcar un amplio espectro de puntos relativos a la comprensión de número Real y de pretender obtener el máximo de información posible de los alumnos al respecto, ha llevado a dedicar un tiempo que ahora consideramos excesivo a la discusión con los alumnos y a una verbalización quizás prematura sobre multitud de aspectos, en detrimento del tiempo dedicado al trabajo manipulativo y procedimental (del que además los alumnos sacaron bastante partido cuando tuvieron ocasiones de hacerlo). Somos conscientes de la necesidad del trabajo procedimental, en especial con alumnos de esta edad, y del tiempo que hay que dedicar a la sedimentación del mismo antes de pasar a niveles más elevados, de reificación de los procesos vividos hasta convertirlos en objetos mentales que puedan ser, a su vez, manipulados.

Por último, queremos indicar posibles puntos de avance para un futuro a partir de los resultados de nuestro trabajo:

.Sería interesante, a raíz de la red conceptual establecida para el Número Real y de la información obtenida sobre la comprensión de escolares de 14-15 años en torno al concepto de Número Real, plantearse qué cabida tiene este tópico en el curriculum de la nueva Enseñanza Secundaria Obligatoria y Postobligatoria, qué aspectos sería conveniente tratar, con qué nivel de profundidad, en cuántas etapas, y en qué niveles o cursos.

.Una vez estudiada esta cuestión, podría abordarse el diseño de material de trabajo para los alumnos en los puntos que se consideraran pertinentes; a este efecto pueden encontrarse en el trabajo varias sugerencias y aportaciones para tener en cuenta.

.Podría también estudiarse qué repercusión tiene la información obtenida y qué utilidad pueden presentar los resultados de este trabajo, tanto por lo que se refiere a comprensión del contenido por parte de los alumnos como a estudio de metodología, para la formación de profesores de Secundaria.

.Por último, sería quizás interesante profundizar en el análisis de la interacción didáctica, ampliando quizás, o incluso revisando, el sistema de categorías propuesto y el uso que se ha hecho del mismo.

Esperamos haber contribuido con nuestro trabajo a caracterizar, delimitar, analizar y clarificar el campo conceptual de los Números Reales, y el campo más amplio del Pensamiento Numérico.

BIBLIOGRAFIA

Adler, P.A. y Adler, P. (1994).Observational techniques. En *Handbook of Qualitative Research*. Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.). California: Sage Publications.

Af Ekenstam, A. (1977).On children´s quantitative understanding of numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 317-332.

Aguado Muñoz, R. y Zamarreño, R. (1978). Las calculadoras en el aula. *Revista de Bachillerato y nueva revista de Enseñanzas Medias*, 2, 51-55.

Aguirre, F.J. (1964). Cálculo de una pequeña tabla de logaritmos por alumnos de bachillerato con sólo conocimientos elementales. *Revista de Enseñanza Media*, 137, 339-350.

Allen, E. (1985). Continued radicals. *The Mathematical Gazette,* 69, 261-263.

Anderson, O.D. (1989/90). Recurring decimals. *Mathematical Spectrum*, 22, 7-10.

Anderson, O.D. (1989/90). Correction to the article Recurring Decimals. *Mathematical Spectrum*, 22, 71.

Appleby, J. (1990). Rational approximatios to irrationals via eigenvalues, *The Mathematical Gazette*, 74, 378-379.

Arcavi, A. , Bruckheimer, M. y Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7, 18-23.

Arnal, J., del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología.* Barcelona: Labor.

Arsac, G. (1987). L´origine de la démonstration: Essai d´epistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 8, 267-312.

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur lápprentissage de la démonstration et les phénomenes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9, 247-280.

Arsac, G. (Dir. de publicación) (1990). *Informations on ICME 6:* Epistemological questions concerning the learning and teaching of mathematics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/1, 120-121.

Artigue,M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 241-286.

Ash, C.B.G. (1985). Powerfull sequences. *The Mathematical Gazette*, 69, 249-252.

Austin, K. (1987). A word of warning about proofs by contradiction. *The Mathematical Gazette*, 71, 227-228.

Aussude, T. (1989). Racines carees: conceptions et mises en situations d´éleves de quatrieme et Troisieme. *Petit X*, 20, 5-33.

Ayres, T. (1991). The square root of 2. *The Mathematical Gazette*, 75, 342-343.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Babaki, E. (1989/90). Cyclic numbers. *Mathematical Spectrum*, 22/2, 65-66.

Balbuena Castellano, L. y García Cruz, J. (1993). Tres procedimientos para obtener la fracción generatriz. *Números*, 23, 59-63.

Baroody, A. (1990). How and when should place-value concepts and skills be taught?. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 281-286.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called relity of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 23-41.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction and knowledge: alternatives perspectives for mathematical education. En *Effective mathematics teaching*. Grouws, Cooney & Jones (Eds.). Lawrence Earlbaum Associates & NCTM.

Bauersfled, H. (1994). Theoretical perspectiveson the interaction in the mathematicss classroom. En *Didactic of Mathematics as a scientific discipline*. Biehler, R., Scholz, R. y otros (Eds.). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Beamer, J.E. (1987). Lessons learned while approximating pi. *Mathematics Teacher*, 80, 154-159.

Behr, j. , Wachsmuth, I. , Post, T. y Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: a clinicaal teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 323-341.

Bell, E.T. (1989). *Historia de las Matemáticas*. Méjico: Fondo de Cultura Económica.

Bennett, A. (1989). Fraction patterns. Visual and numerical. *Mathematics Teacher*, 82, 254-259.

Bennett, A.B. (1988). Visualizing the geometric series. *Mathematics Teacher*, 82, 130-136.

Bernardo, F. (1964). Proporcionalidad de magnitudes. *Revista de Ensñanza Media*, 149-150, 2055-2088.

Biehler, R., Scholz, R. y otros (Eds.) (1994). *Didactic of Mathematics as a scientific discipline.* Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A.J. y Mellin-Olsen, S. (Eds.) (1991). *Mathematical knowledge: its grouth through teaching.* Dordrecht: Kluwer A.P.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: Ceac.

Bonotto, C. (1993). Origini concettuali di errori che si riscontrano nel confrontare numeri decimali e frazioni. *L´ensegnamento della matematica e delle scienze integrale*, 16, 9-45.

Borassa, R y Rose, B. (1989). Journal writing and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 347-365.

Borwein J. y Borwein, P. (1990). *A Dictionary of Real Numbers*. California: Wadsworth & Brooks.

Bos, H.J.M. (1984). Mathematics and its social context: a dialogue in the staff room, with historical episodes. *For the Learning of Mathematics*, 4, 2-9.

Boschet, F. (1987). Fonctions du code symbolique dans le discours mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 19-34.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Bright, g. , Behr, M. , Post, T. y Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 215-232.

Brousseau, G. (1983). Les obstales épistémologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 165-198.

Browne, J. (1991). Digits count: significant digits and calculators. *Mathematics Teacher*, 84, 344-346.

Brunschvicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*.. Buenos Aires: Lautaro.

Burn, B. (1990). Filling holes in the real line. *The Mathematical Gazette*, 74, 228-232.

Cajory, F. (1985). *History of Mathematics*. New York: Chelsea Publishing Company. (Primera edición de 1893).

Cantoral, R. y otros (1991). *Cálculo-Análisis. Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Méjico: Universidad Autónoma del Estado de Méjico.

Carton, K. (1990). Sharing teaching ideas. *Mathematics Teacher*, 83, 542-544.

Castro Martínez, E. (1994), *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada: Tesis Doctoral.

Cave, R. (1987). Working with rational exponents. *Mathematics Teacher*, 80, 32-35.

Clarke, D. (1987). The interactive monitoring of children´s learning of mathematics. *For the learning of Mathematics*, 7, 2-6.

Cobb, P. (1985). Mathematical actions, mathematical objects and mathematical symbols. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 127-134.

Cobb, P. y Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 83-94.

Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1991). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 2-33.

Contreras, J. (1990). *Enseñanza, Curriculum y Profesorado*. Madrid: Akal.

Cook, I. (1990). The Euclidean algorithm and Fibonacci. *The Mathematical Gazette*, 74, 47-48.

Cook, T.D. y Reichard, CH.S. (1982). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa"* Madrid: Morata.

Copleston, F. (1969).*Historia de la Filosofía.* Barcelona: Ariel.

Coriat Benarroch, M. y otros (1993). *Numbers and colours. International Journal of Mathematics Education, Science and Tecnology*, 24, 501-510.

Courant, R. y John, F. (1989). *Introduction to Calculus and analysis.* New York: Springer-Verlag.

Crilly, T. (1986). Another shoal of irrtionals. *The Mathematical Gazette*, 70, 218-219.

Crilly, T. (1987). Tile factory. *The Mathematical Gazette*, 71, 255-257.

Crilly, T. (1989). From fixed points to continued fractions. *The Mathematical Gazette*, 73, 16-21.

Crossley, J.N. (1987). *The emergence of number.* Singapore: Word Scientific.

Cuesta Dutari, N. (1981). *La sinfonía del infinito*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Davies, M. (1990/91). An interesting dull real number. *Mathematical Spectrum*, 23, 39-40.

Davis, R. y Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

de Castillo, G. y otros (1990). Algunas inferencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el concepto de límite. *Actas de la IV Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Méjico, 90.

Dedekind, R. (1963). *Essays on the Theory of Numbers.* New York: Dover Publications Inc. (Republicación de la raducción inglesa de 1901 del original del autor).

Dence, J.B. y Dence, T.P. (1993). A rapidly converging approach to Pi. *Mathematics Teacher,* 86, 121-124.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.) (1994). *Handbook of Qualitative Research.* California: Sage Publications.

de Sa, P. (1988/89). Pythagorean triangles and $\sqrt{2}$. *Mathematical Spectrum,* 21, 26-27.

Desanti, J.T. (1967). Une crisis de dévelopement exemplaire: La "découverte" des nombres irrationels. *Logique et connaissance scientifique* (sus la direction de J. Piaget). París: Gallimard.

Devlin, K. (1984/5). Pi and chips. *Mathematical Spectrum,* 17, 9-10.

Devlin, K. (1987/88). Pulling Pi out of the hat. *Mathematical Spectrum,* 20, 43-44.

D´hombres, J.D. (1978). *Nombre, mesure et continu.* París: Cedic / Fernand Nathan.

Dockrell, W.B. (1987). Ethical considerations. En *The International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education.* Dunking, M.J. (Ed.). Oxford: Pergamon Press.

Donahve, R.J. (1988). Estimating Pi by microcomputer. *Mathematics Teacher,* 81, 203-226.

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d´apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11, 77-110.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7, 5-31.

Douady, R. (1991). Tool, object, setting, window: Elements for analysing and constructing didactical situations in Mathematics. Bishop, A.J. y Mellin-Olsen, S. (Eds.), *Mathematical knowledge: its grouth through teaching.* Dordrecht: Kluwer A.P.

Dreyfus, T. , Eisenberg, T. (1986). On the aesthetics of Mathematical Thought. *For the Learning of Mathematics*, 6, 2-9.

Dubinsky, E. (1988). Anatomy of a question. *Journal of Mathematical Behavior*, 6, 363-365.

Dunham, W. (1985). An "ancient/modern" proof of Heron´s formula. *Mathematics Teacher*, 78, 258-259.

Dunkin, M.J. (1987). *The International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education.* Oxford: Pergamon Press.

Duval, R. (1983). L´obstacle du deoublement des objects mathematiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385-414.

Easterday, K. y Smith T. (1991). A Monte-Carlo approximation to Pi. *Mathematics Teacher,* 84, 387-390.

Egsgard, J.C. (1988). An interesting introduction to sequences and series. *Mathematics Teacher*, 81, 108-111.

Eysenck, M. (1990). *The Blackwell Dictionary og Cognitive Psychology.* Oxford: Blackwell.

Elliott, J. (1987). Teachers as researchers. En *The International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education*. Dunkin (Ed.). Oxford: Pergamon Press.

Etayo, J.J. (1963). Lecciones de Matemática Moderna: Cuerpo de los números reales. *Revista de Ensñanza Media*, 131-134, 1405-1408.

Euler, L. (1988). *Introduction to Analisis of the Infinite.* New York: Springer-Verlag.

Falk, R. y otros (1986). How do children cope with the infinity of numbers?. *Proceedigs of the X PME Conference.* London.

Euclides (1991). *Elementos. Libros i-IV.* Madrid: Biblioteca Clásica Gredos.

Fauvel, J. y Gray, J. (1988). *The History of Mathematics: a reader*. Hong-Kong: Macmillan Press-The open University.

Fearnehough, A. (1989/90). Pi from Pascal's triangle. *Mathematical Spectrum*, 22, 62-63.

Feferman, S. (1989). *The number systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea.

Félix, L. (1963). *Matemática Moderna: Enseñanza Elemental*. Madrid: Publicaciones de la "Revista de Enseñanza Media".

Félix, L.(1966). *Exposé moderne des mathématiques elémentaires*. París: Dunod.

Félix, L. (1970). *Notions de mesures et nombres réels*. París: Librairie scientifique Albert Blanchard.

Ferrater, J. (1981). *Diccionario de Filosofía*. Madrid: Alianza.

Filstead, W.J. (1986). Una experiencia necesaria en la investigación evaluativa. En *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Cook y Reichard (Eds.). Madrid: Morata.

Firestone, W. (1993). Alternative arguments for generalizing from data as applied to qualitative research. *Educational Researcher*, 22, 16-23.

Fischbein, E. , Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in Mathematics*, 10, 3-40.

Flanders, N. (1977). *Análisis de la interacción didáctica*. Madrid: Anaya.

Fleg, G. (Ed.) (1989). *Numbers through the ages*. Hong-Kong: MacMillan & The Open University.

Fowler, D.H. (1987). *The mathematics of Plato's Academy*. Oxford: Clarendon Press.

Fox M. (1985). Quick Padé approximations. *The Mathematical Gazette*, 69, 21-25.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics,* 12.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de la estructura matemática (Textos seleccionados). Traducción, introducción y notas de L. Puig.* Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional. Méjico D.F.

Fuhrer, L. (1992). Historical stories in the mathematics classroom. *The Mathematical Gazette*, 76, 127-138.

Furinghetti, F. (1992). The ancients and the approximated calculation: some examples and suggestions for the classroom. *The Mathematical Gazette*, 76, 139-142.

Gage, N. (1989). The paradigm wars and their aftermath. *Educational Researcher*, 18, 4-10.

Galero, G. (1967). Sucesiones racionales. El número real. *Revista de Ensñanza Media,* 175, 45-73.

Gardiner, A. (1982). *Infinite Processes.* New York: Springer-Verlag.

Gardiner, T. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children?. *The mathematical Gazette*, 69, 77-87.

Gentil González, C., Iglesias Blanco, A. y Oliva Martínez, J.M. (1989). Nivel de apropiación de la idea de discontinuidad de la materia en alumnos de Bachillerato. Implicaciones didácticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 126-131.

Giménez, J. (1990). About intuitional Knowledge of density in elementary school. *Proceedigs of the XIV PME Conference*. Méjico.

Gingsburg, H. (1981). The clinical interview in psichological research on mathematical thinking: aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics*, 1, 4-11.

Glaister, P. (1990). Another peek at the golden section. *The Mathematical Gazette*, 74, 45-46.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Gómez-Granell, C. y César Coll, S. (1994). De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo. *Cuadernos de Pedagogía,* 221, 8-10.

González Mari, J.L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Granada: Tesis Doctoral.

González Thompson, A. (1984). The relationship of teachers´conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-147.

González Urbaneja, P.M. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 9, 281-289.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Reserch in Mathematics Education*, 18, 37-45.

Grouws, D.A. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan Publishing Company.

Guttenplan, S. (1994). *A Companion to the Philosophy of Mind* . Oxford: Blackwell.

Hart, K.M. (1981). *Children´s understanding of Mathematics.* Oxford: John Murray.

Haydock, R. (1991/92). All that glisters is not gold: an old story retold as a cautionary tale. *Mathematical Spectrum*, 24, 42-47.

Heink, G. (1986). Children´s understanding of rational numbers - an empirical investigation. *Proceedigs of the X PME Conference*. London.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). *Learning and teaching with understanding.* En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Grouws, D.A. (Ed.). New York: MacMillan Publishing Company.

Ifrah, G. (1987). *Las cifras.* Madrid: Alianza Editorial.

Ilín y Pozniak (1991). *Fundamentos del Análisis Matemático.* Moscú: Mir.

Imeson, K.R. (1989). *The magic of number.* Leicester: The Mathematical Association.

Irem de Strasbourg (1974). Sus l´a acquisition des structures numériques en fin de troisiéme. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 441-459.

Jámblico. *Vida pitagórica.* Traducción, introducción y notas de Ramos Jurado, E. (1991). Madrid: Etnos.

Janesick, V. (1994). The dance of qualitative research design. En *Handbook of Qualitative Research.* Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.). California: Sage Publications.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* London: Lawrence Earlbaum Associated, publishers.

Johnson, S. (1986/87). Approximating √n. *Mathematical Spectrum*, 19, 37-40.

Jones, P. (1956). Irrationals or inconmensurables I: their discovery and a logical scandal. *Mathematics Teacher*, 49, 123-127.

Jones, P. (1956). Irrationals or inconmensurables II: the irrationality of √2 and approximations to it. *Mathematics Teacher,* 49, 187-191.

Jones, P. (1956). Irrationals or inconmensurables III: the Greek solution. *Mathematics Teacher*, 49, 282-285.

Keith, S. Z. (1988). Explorative writing and learning mathematics. *Mathematics Teacher,* 81, 714-719.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

Kieren, T. (1988). A conceptual collage (Review del libro Representation in the teaching and learning of mathematics, ed. by Janvier). *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 86-89.

Kilpatrick, J. (1988). Change and stability in research in mathematics education. *ZDM*, 88; 202-204.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics Education. *Proceedigs of the XI PME Conference*. Montreal.

Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 2, 22-28.

Kilpatrick, J. (1993). Beyond face value: assessing research in Mathematics Education. En *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics*. Nissen, G. y Blomhoj, M. (Eds.). Denmark: Roskilde University.

Kirk, G.S. y Raven J.E. (1970). *Los filósofos presocráticos.* Madrid: Gredos.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antiguedad hasta nuestros días" I,II y III.* Madrid: Alianza Editorial.

Kline, M. (1978). *El fracaso de la matemática moderna.* Madrid: Siglo XXI.

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre.* Madrid: Siglo XXI.

Konold, C y Johnson, D. (1991). Philosophical and psicological aspects of constructivism. En *Epistemological foundations of mathematical experience*. Steffe, L. (Ed.). New York: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation?. En *Didactic of Mathematics as a scientific discipline.* Biehler, R., Scholz, R. y otros (Eds.). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Lavoie, M. , Lepage, E. y Roux, Y. (1984). Un outil d´analyse cognitive de l´apprentissage de concepts complexes intégrés du calcul infinitésimal. *For the Learning of Mathematics*, 4, 22-31.

Legere, A. (1991). Collaboration and writing in the mathematics classroom. *Mathematics Teacher*, 84, 166-171.

Lerman, S. (1989). Construtivism, mathematics and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 211-223.

López Fernández, C. (1985). El surgimiento histórico del número irraciona como instrumento didáctico. *Nueva Revista de Enseñanzas Medias*, 7, 109-116. Madrid: Didáctica de las matemáticas MEC, Dirección General de Enseñanzas Medias.

Lord, N. (1985). The irrationality of e and others. *The Mathematical Gazette*, 69, 213-215.

Lord, N. (1992). Recent calculations of Pi: the Gauss-Salamin algorithm. *The Mathematical Gazette*, 76, 231-240.

Lotspeich, R. (1988). Archimedes'Pi - an introduccion to iteration. *Mathematics Teacher*, 81, 208-210.

Macdivitt, A. y Yanagisawa, Y. (1987). An elementary proof that e is irrational. The Mathematical Gazette, 71, 217.

Mackinnon, N. (1992). Homage to Babylonia. *The Mathematical Gazette*, 76, 158-178.

Mackinnon, N. (1989/90). Interesting real numbers. *Mathematical Spectrum*, 22, 77-78.

Mach, D. (1986). The density of pitagorean rationals. *The Mathematical Gazette*, 70, 292-284.

Mamona-Downs, J. (1990). Pupils'interpretation of the limit concept; a comparison study between Greeks and English. *Proceedigs of the XIV PME Conference*. Méjico.

Mansfield, H. (1985). Points, lines, and their representations. *For the Learning of Mathematics*, 5, 2-6.

Markowsky, G. (1991). Making a golden rectangle by paper folding. *The Mathematical Gazette*, 75, 85-87.

Mason, J. (1980). When is a symbol symbolic? *For the Learning of Mathematics,* 1, 8-12.

McCarthy, D. (1987). Stonehenge and Pi. *The Mathematical Gazette*, 71, 273-274.

Mcdonald, D. (1992). Infinite sequences: a logical extension. *Mathematics Teacher*, 85, 228-229.

Mcintosh, M.E. (1991). No time for writing in your class?. *Mathematics Teacher*, 84, 423-433.

McNiff, J. (1988). *Action Research: Priciples and practice.* London: Macmillan Education Ltd.

Mélich-Sangrá, J.C. (1990). El método fenomenológico y la filosofía de la educación. *Bordón*, 42, 153-157.

Mett, C.L. (1987). Writing as a learning device in Calculus. *Mathematics Teacher*, 80, 534-537.

Meyer, R.A. y Riley, J.E. (1987). Studing decimal fractions with microcomputers. *Mathematics Teacher*, 80, 144-148.

Miller, L.D. (1991). Writing to learn mathematics. *Mathematics Teacher* 84, 516-521.

Mitroff, I. & Killmann, R. (1978). *Methodological Approaches to Social Siences*. San Francisco: Jossey-Bass.

Monaghan, J. (1988). Real mathematics. *The Mathematical Gazette*, 72, 276-281.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics,* 11, 20-24.

Moreno, L. y Waldeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.

Nesher, P. (1985). Changes in decimal reasoning. *Proceedigs of the IX PME Conference.* Noorwijkerhout.

Neugebauer, O. (1957). *The Exact Sciences in Antiquity.* New York: Dover Publications.

Nickson, M. 1992. The culture of the mathematics classroom: an unknown quantity? En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Grouws, D.A. (Ed.). New York: MacMillan Publishing Company.

Nissen, G. y Blomhoj, M. (Eds.) (1993). *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics.* Denmark: Roskilde University.

Niven, I. (1961). *Numbers: rational and irrational.* Washington: The Mathematical Association of America.

Nowac, R.S. (1987). Periodic Pictures. *Mathematics Teacher*, 80, 126-133.

Núñez Espallargas, J.M. y Servat Susagne, J. (1992). Los algoritmos para el cálculo de la raiz cuadrada y sus antecedentes en los textos escolares antiguos. *Enseñanza de las Ciencias*, 10, 69-77.

Núñez, R. (1990). Infinity in mathematics as a scientific subject for cognitive psicology. *Proceedigs of the XIV PME Conference.* Méjico.

Meserve, B. , Booker, G. (1984). Topic area: Relationship between the history and the pedagogy of mathematics. Proceedigs of the V ICME Conference. Adelaide.

Otte, M. (1979). Formación y vida profesional de los profesores de matemáticas ICMI vol. IV, cap. VI.

Pacheco Castelao, J.M. (1978). Algunas reflexiones sobre un tema de Bachillerato: introducción del logaritmo y del número e. *Revista de Bachillerato y Nueva Revista de Enseñanzas Medias*, 2, 49-51.

Papy (1968). *Le premier enseignement de l´analyse.* Bruxelles: Presses universitaires de Bruxelles.

Pérez de Laborda, A. (1983). *¿Salvar lo real?.* Madrid: Ediciones Encuentro.

Pérez de Tudela y Velasco, J. (1981). *El problema del continuo.* Madrid: Copiasol.

Peters, J.M.H. (1984/5). Recurring decimals. *Mathematical Spectrum*, 17, 40-41.

Peterson, P. y Clark, C. (1978). Teachers´report of their cognitive processes during teching. *American Educational Research Teaching,* 15, 555-556.

Post, T. , Waschmuth, I. , Lesh, r. y Behr, M. (1985). Order and equivalence of rational numbers: a cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 18-36.

Rademacher, H. y Toeplitz, O. (1970). *Números y Figuras.* Madrid: Alianza Editorial.

Ratsimba-Rajohn, H. (1982). Eléments d´étude de deux méthodes de mesures rationelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3, 65-113.

Rees, R. y Barr, G. (1985). The development of a national numeracy scheme for students aged sixteen: theory and practice. *Proceedings of the II TME Conference.*

Resnick, L. , Nesher, P. , Leonard,F. , Magone, M. , Omanson, S. y Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the ccase of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 8-27.

Restivo, S. (1992). *"Mathematics in Society and History*, Cp. 5: *Mathematics as Representation ".* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Revuz, A. (1969). *Les premiers pas en analyse. Educational Studies in Mathematics*, 2, 270-278.

Revuz, A. (1972). La notion de contunuité dans lénseignement du second degré. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 281-298.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

Richards, I. (1989/90). Pi from Pascal´s triangle. *Mathematical Spectrum*, 22, 104-105.

Richadson, V. (1994). Conducting research on practice. *Educational Researcher*, 23, 5-10.

Rico y colaboradores (1978). *Matemáticas 8º de E.G.B.*. Madrid: Anaya.

Rico, L. (1990). Diseño Curricular en Educación Matemática. Elementos y Evaluación. En *Teoría y Práctica de la Educación Matemática*. Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.). Sevilla: Alfar.

Rico Romero, L. y otros (1994). *Matemáticas 4º. Opción A. E.S.O. Proyecto 2000.* Sevilla: Algaida.

Robin, A. (1990). Rational approximations. *The Mathematical Gazette,* 74, 11-19.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modéles en ont les élèves?. *Educational Studies in Mathematics,* 17, 359-386.

Rodríguez-Justa Barrantes, J. (1983). El problema de la medida en los programas renovados de la E.G.B. *Bordón*, 284, 337-351.

Romero Albaladejo, I. (1993)."*La introducción del Número Real en Educación secundaria*". Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado de la Universidad de Granada.

Romero i Chesa, C. Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. Pendiente de publicación en *Enseñanza de las Ciencias.*

Rosenblatt, J. (1990/91). Infinity and limits. *Mathematical Spectrum,* 23, 70-74.

Rosenblatt, J. (1990-91). Infinity and enumeration. *Mathematical Spectrum*, 23, 44-54.

Sáez, M.J. y Carretero, A. (1993). El estudio de caso en el aula: una alternativa a la investigación en la acción. *Bordón,* 45, 39-48.

Sambursky, S. (1970). *El mundo físico de los griegos.* Madrid: Alianza Universidad.

Sarkar, A (1988/89). The calculation of Pi. *Mathematical Spectrum*, 21, 27.

Sastry, K.R. S. (1989/90). Self-Altitude or golden triangles. *Mathematical Spectrum*, 22, 88-90.

Sastry, K.R.S. (1992-93). Golden Pentgons. *Mathematical Spectrum*, 25, 113-118.

Schmittau, J. (1993). Connecting mathematical knowledge: a dialectical perspective. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 179-201.

Schroyer, J. (1980). Critical moments in teaching mathematics*. Proceedings of the IV PME. Berkeley.*

Seitz, D.T. (1986). A geometric figure relating the golden ratio and Pi. *Mathematics Teacher,* 79, 340-341.

Serfati, M. (1992). Quadrature du cercle, frations continues et autres contes (sur l´historie des nombres irrationels et trascendants aux XVII et XIX siécles). *Brochure A.P.M.E.P. 86*

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sherzer. L. (1986). Expanding he limits of the calculator display. *Mathematics Teacher*, 79, 20-21.

Sherzer, L. (1989). An arithmetic method for converting repeating decimals to fractions. *Mathematics Teacher*, 82, 574-576.

Shilgalis, T.W. (1989). Archimedes y Pi. *Mathematics Teacher*, 82/3, 204-206.

Short, L. (1993). Continued fractions and rounding errors. *The Mathematical Gazette*, 77, 80-84.

Short, L. y Melville, J.P. (1992-93). An unexpected appearance of Pi. *Mathematical Spectrum*, 25, 65-70.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18/4, 371-397.

Sierpinska, A. y otros (1989). How and when attitudes towards mathematics and infinity become constitued into obstacles in students?. *Proceedigs of the XIII PME Conference. París.*

Simms, A.J. (1987). Repeating decimals into fractions: a microware recipe. *Mathematics Teacher*, 80, 61-62.

Smith, D.E. (1958). *History of Mathematics*. New York: Dover Publications.

Smith, D.E. (1959). *A source book in Mathematics. I. II, III.* New York: Dover Publications.

Solomon, A. (1987). Proportion: Interrlations and meaning in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 7, 14-22.

Solomon, A. (1991). What is a line?. *For the Learning of Mathematics*, 11, 9-12.

Spivak, M. (1984). *Calculus, I, II.* Barcelona: Reverte.

Stake, R. (1994). Case studies. En *Handbook of Qualitative Research.* Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.). California: Sage Publications.

Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: on the Ancient Greek theory of rations and its relation to modern mathematics. Sinthese, 84, 163-211.

Stempien, M., Borasi, R. (1985). Students´writing in Mathematics: some ideas and experiences. *For the Learning of Mathematics*, 5, 14-17.

Stenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza.* Madrid: Morata.

Stenmark, J.K. (Ed.), (1991). *Mathematics Assessment.* NCTM.

Stern, M.D. (1985). A remarcable approximation to Pi. *The Mathematical Gazette*, 69, 218-219.

Stillwell, J. (1989). *Mathematis and its History.* New York: Springer-Verlag.

Straber, R. (1994). Interaction in the classroom. En *Didactic of Mathematics as a scientific discipline.* Biehler, R., Scholz, R. y otros (Eds.).

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. En *Handbook of Qualitative Research.* Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.). California: Sage Publications.

Suarez Fernández, M. (1978). Introducción geométrica de los números reales. *Revista de Bachillerato y Nueva Revista de Enseñanzas Medias*, 2, 41-46.

Suárez Fernández, M. (1986). Justificación geométrica de los números reales. *Números,* 15, 63-74.

Sunderland, J.B. (1986). Another geometric calculation of Pi. *The Mathematical Gazette,* 70, 214-215.

Swanson, D., Schartz, R., Ginsburg, H. y Kossan, N. (1981). The clinical interview: validity, reliability and diagnosis. *For the Learning of Mathematics*, 2, 31-38.

Tahta, D. (1992). Hidden ratios. *The Mathematical Gazette,* 76, 335-344.

Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 271-284.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical thinking.* Canada: Kluwer.

Tall, D. y Mills, J. (1992). Modelling irrtional numbers in analysis using elementary programing. *The Mathematical Gazette,* 76, 243-250.

Tirosh, D. y Fischbein, E. (1985). The teaching of infinity. *Proceedigs of the IX PME Conference. Noorwijkerhout.*

Tirosh, D. y Almog, N. (1989). Conceptual adjustments in progressing from real to complex numbers. *Proceedigs of the XIII PME Conference. París.*

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1992). Student´s awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedigs of the XVI PME Conference. Durham.*

Tyson, G. (1985). Pi by experiment. *The Mathematical Gazette,* 69, 36.

Usiskin, Z. (1974). Some corresponding properties of real numbers and implication for teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 5, 279-290.

Valera, M. y otros (1983). Intuición e historia de las ciencias en la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 205-215.

Van den Brink, J. (1981). Mutual Observation. *For the Learning of Mathematics,* 2, 29-30.

Van den Brink, J. (1990). Classroom research. *For the Learning of Mathematics,* 10, 35-38.

Velázquez Manuel, F. y Fernández Reyes, M. (1986). Hacia un cálculo aproximado de la raiz cuadrada. *Números*, 14, 47-56.

Vergnaud, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-170.

Villers, C. (1993). Les nombres irrationnels: une source de découvertes. *Mathématique et Pédagogie*, 92, 67-83.

Vinner, S. y Kindron, I. (1985). The concept of repeating and non-repeating decimals at the Senior High Level. *Proceedigs of the IX PME Conference. Noorwijkerhout.*

von Glasersfeld, E. (1987). On the concept of interpretation. En *The construction of knowledge*. Intersystems Publicatios.

Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 12, 34-43.

Wearne, D. (1990). Acquiring meaning for decimal fraction symbols: a one year follow-up. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 545-564.

Wearne, D. y Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 371-384.

Webb, N. y Coxford, A. (Eds.) (1993). *Assessment in the Mathematics classroom.* Virginia: NCTM.

Whitesitt, J. (1990). Sharing teaching ideas. *Mathematics Teacher*, 83, 453-454.

Wiebe, J.H. (1986). Manipulating percentages. *Mathematics Teacher*, 79, 23-26.

Williams, S. (1990). The understanding of limits: three perspectives. *Proceedigs of the XIV PME Conference.* Méjico.

Willianson, A. (1986). Errors in estimating Pi by experiment. *The Mathematical Gazette*, 70, 37-38.

Wittrock, M. (1990). *La investigación de la enseñanza, III. Profesores y alumnos.* Madrid: Paidós Educador.

Zellini, P. (1980). *Breve historia del infinito*. Madrid: Siruela.

Zippin, L. (1962). *"Uses of Infinity"*. Washigton: The Mathematical Association of America. New Mathematical Library.

ANEXOS

ANEXOS DEL CAPITULO II

ANEXO II.1

Demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado.

(Gardiner, 1982. *"Infinite processes"*)

*Para esta demostración nos harán falta algunas definiciones y resultados previos:

-LONGITUDES CONMENSURABLES.- Dos longitudes, L y L´, se dicen conmensurables si tienen una unidad de medida común, u. Es decir si existen números enteros, a y b, tales que

$$L:u=a:1 \quad y \quad L':u=b:1$$

En ese caso diremos que la razón de L a L´es expresable mediante la razón entre los números enteros a y b, o lo que es lo mismo , mediante el número racional a/b.

-No es difícil demostrar que no importa de qué longitudes L y L´ se trate, si éstas tienen una medida común u, la longitud en "unidades u" de la mayor medida común de L y L´ viene dada por el máximo común divisor de a y b: m.c.d.(a,b). Así que un método efectivo para hallar el m.c.d.(a,b) podría darnos un procedimiento para encontrar la mayor medida común de L y L´, si es que la hubiera.

-Consideremos el Método de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números, a y b. El primer paso es construir el par (a_1,b_1) tal que

$$a_1=max(a,b)-min(a,b)$$

$$b_1=min(a,b)$$

y entonces, simplemente se repite la operación de sustraer el número más pequeño del mayor. Es decir, si el par construido en el paso i es (a_i,b_i), entonces el par construido en el paso i+1 es

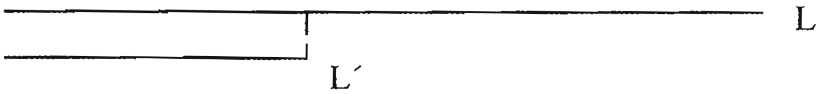
$$a_{i+1}=\max(a_i,b_i)-\min(a_i,b_i)$$

$$b_{i+1}=\min(a_i,b_i)$$

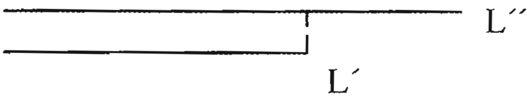
Se demuestra, apelando a las propiedades de los números naturales, que el algoritmo termina en el momento en que $a_j=b_j$, y este valor común es el máximo común divisor de a y b. Esto es así porque la diferencia de dos números preserva sus factores comunes (y por tanto el máximo común divisor), de modo que cuando $a_j=b_j$ tenemos

$$mcd(a,b)=mcd(a_1,b_1)=........=mcd(a_j,b_j)=a_j=b_j$$

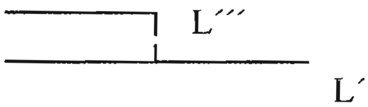
-El mismo procedimiento podemos aplicarlo a las longitudes basándonos en dos hechos muy sencillos:
Dadas dos longitudes, L y L´,



i) Si u mide exactamente a L y a L´, entonces mide exactamente a L´´=L-L´
ii) Si u mide exactamente a L´ y a L´´=L-L´, entonces u mide exactamente a L.



De esto se sigue que las medidas comunes de L y L´ son las mismas que las de L´´y L´. En particular, la mayor medida común de L y L´es precisamente la misma que la mayor medida común de L´´ y L´. Podemos tomar ahora el par de longitudes L´ y L´´´ e imitar el paso anterior; obtendremos entonces que la mayor medida común de L y L´ es la misma que la mayor medida común de L´ y L´´´.



Podemos repetir el proceso una vez más con el nuevo par de segmentos y, en nuestro caso particular, habremos llegado al final ya que L´´´´ mide a L´´´ exactamente.

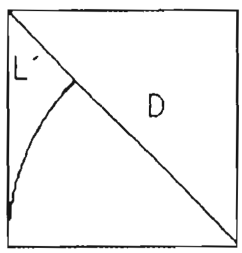
Así que L´´´´´es la mayor medida común de L´´´y L´´ y, puesto que las medidas comunes son las mismas para todas las etapas del proceso, L´´´´ es la mayor medida común del par original de segmentos L y L´.

-TEOREMA.- Si dos segmentos dados L y L´ tienen una medida común (desconocida) el procedimiento anterior producirá siempre la mayor medida común de L y L´ en un número finito de pasos.

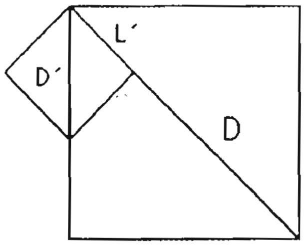
-Este resultado se demuestra por inducción.

Veamos entonces qué ocurre en el caso de las longitudes correspondientes a la diagonal y el lado de un cuadrado. Vayamos por pasos:

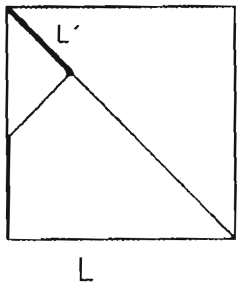
-Según hemos visto antes, la mayor medida común entre L y D es la misma que entre L y L´, en donde L´=D-L



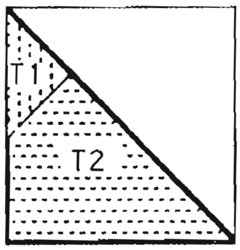
-Veamos ahora que la mayor medida común entre L y L´es la misma que entre L´y D´.

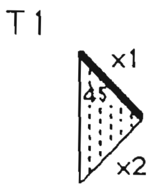


-Para ello, bastará con probar que los segmentos señalados miden igual, con lo que demostraríamos que D´=L-L´.

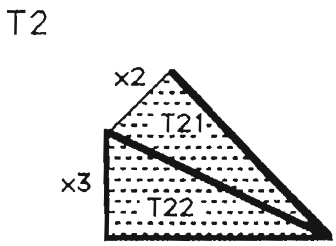


En efecto:





T1 es isósceles,
por tanto x1=x2



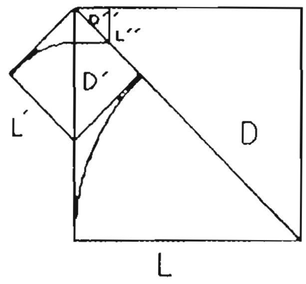
T21 y T22 tienen dos lados y un ángulo iguales, por tanto T21=T22

Entonces x2=x3

y en consecuencia

<u>x1</u>=x2<u>=x3</u>

-Ahora podemos repetir el mismo proceso y continuar así indefinidamente (puesto que el lado de un cuadrado es siempre menor que su diagonal y podremos obtener una diferencia entre ambas longitudes), obteniendo que la razón entre la diagonal D y el lado L de un cuadrado C es la misma que la razón entre la diagonal D´y el lado L´de un cuadrado C´ menor que el anterior y, a su vez, igual a la razón entre la diagonal D´´ y el lado L´´ de otro cuadrado C´´ aún menor, etc...



-Al llegar a este punto podemos concluir la demostración de dos formas:

a/ Hemos visto que cuando aplicamos nuestro proceso general para encontrar la mayor medida común de la diagonal y el lado del cuadrado, el proceso continúa indefinidamente. Sin embargo, el teorema expuesto asegura que si ambas longitudes tuvieran una medida común el proceso concluiría en un número finito de pasos. La contradicción surge entonces porque la diagonal y el lado del cuadrado no tienen medida común, en contra de lo que habíamos supuesto.

b/ Si interpretamos nuestro procedimiento general en el sentido de que si dos longitudes tienen una medida común, mediante el procedimiento podremos construirla, podremos intuir fuertemente que no hay medida común entre la diagonal y el lado del cuadrado, porque vemos que la suposición de que hay tal medida común lleva a la contradicción de que ésta debe ser cero. Sin embargo, una prueba rigurosa requiere la moderna idea de límite o el uso de alguna forma del axioma de Arquímedes. Dicho axioma, que en realidad es anterior a Arquímedes, dice que si de cualquier cantidad quitamos la mitad o más, y del resto quitamos su mitad o más, y seguimos el proceso, podemos alcanzar un resto que sea menor que cualquier cantidad fijada de antemano. (El axioma está estrechamente relacionado con el concepto de límite, que es fundamental en el tratamiento moderno de los irracionales).

-Esta demostración prueba que la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables, es decir, la relación entre ellas no puede expresarse en términos de razón entre enteros.

ANEXO II.2
Concepto de razón
(Stein 1990)

La caracterización euclidiana del concepto de razón está contenida en las definiciones 3, 4 y 5 del libro V de los Elementos. Los contenidos de estas definiciones pueden ser interpretados de la forma siguiente (las claúsulas (a), (b), (c) corresponden a las tres "Definiciones" de Euclides; aunque (b) contiene en realidad más que la Def.4):

(a) Una razón r es una relación binaria, con el siguiente carácter general: si r es una razón, entonces dada una magnitud cualquiera M y un par cualquiera de cantidades de M (a,b), tiene sentido afirmar (o negar) que r "se verifica" entre a y b (en ese orden) -lo que simbolizaremos por "r(a,b,M)": "a y b, tomados en ese orden, como cantidades de M, tienen la razón r".

(b) Puede ser que un par (a,b) de cantidades de M "no tengan una razón" -es decir, que todas las afirmaciones de la forma r(a,b,M) sean falsos para este par (a,b) y esta magnitud M. Si a y b "tienen una razón", ésta es única; y la simbolizaremos mediante "(a,b) " -"la razón de a a b en M". (En realidad, el contexto suele dejar claro quien es M y por ello nos limitaremos a escribir "a:b"). La condición necesaria y suficiente para que a y b tengan una razón en M es que para algún entero positivo m, $ma>b$, y para algún entero positivo n, $nb>a$. (Nótese que esta condición es simétrica,y por lo tanto garantiza la existencia de las dos razones, a:b y b:a).

(c) Si a y b son cantidades de M que tienen una razón r=(a:b) . y si M`es otra magnitud, y c y d dos cantidades cualesquiera de M`, entonces r(c,d,M`) es verdadera si y sólo si se verifica lo siguiente:

Para cada par de enteros m, n:

$na>mb$ y $nc>md$,

ó

$na=mb$ y $nc=md$,

ó

$na<mb$ y $nc<md$.

Bajo estas condiciones, decimos que (a,b) y (c,d) son proporcionales o tienen la misma razón: (a,b) =(c,d)

Esta caracterización del concepto de razón, válida para cantidades no necesariamente conmensurables, llevó al desarrollo de una técnica de "abstracción matemática", cuyo reconocimiento y explotación general no se logró hasta la gran transformación de las matemáticas en el siglo XIX. (Para más información al respecto, consultar Anexo II.2.1.c).

ANEXO II.3

Relación entre la caracterización euclidiana del concepto de razón y la teoría de los Números Reales de Dedekind

(Stein 1990)

1. Primera parte.

La relación entre la explicación de Eudoxo de la noción de razón y la construcción de Dedekind de los números reales es fácil de ver. Sean a y b elementos de una magnitud cualquiera M que "tengan una razón" en el sentido de la definición 4 de Euclides (Ver pag.14). Consideremos todos los pares (m,n) de números naturales para los que mb<na. Para cada uno de esos pares, consideremos el número racional m/n. Es fácil demostrar que si (m',n') es otro par de enteros positivos, y si m/n=m'/n', entonces mb<na implica m'b<n'a; así que podemos hablar de una partición bien definida en el conjunto de todos los números racionales positivos en dos subconjuntos, "superior" e "inferior", S* y S , caracterizados por: m/n pertenece a S en caso de que mb<na; en caso contrario m/n pertenece a S*. Nótese que el apartado (b), o la definición 4 de Euclides, garantiza que si a y b tienen una razón, ni S* ni S son vacíos.

También es fácil ver que -incluso para un par dado de elementos de una magnitud M, (a,b), que tengan una razón- todo número racional de S es más pequeño que todo número racional de S*. Así la partición en conjuntos superiores e inferiores determinada por un par dado de elementos de M que tengan una razón es precisamente un "corte de Dedekind" en el sistema de los números racionales positivos; y por tanto define a su vez un número real positivo en el sentido de Dedekind. (El hecho de que Dedekind considerara cortes en el sistema de todos los números racionales -positivos y negativos- no tiene gran importancia en este caso). Está claro que dos pares de cantidades, tal que cada uno tenga una razón en el sentido de la definición V.4 de Euclides, que además tengan la misma razón en el sentido de la definición V.5 determinan, mediante la construcción anterior, el mismo corte de Dedekind, y por tanto el mismo número real positivo. Así que tenemos una aplicación bien definida del sistema de todas las razones de Eudoxo en el sistema de los números reales positivos.

Sin embargo, la aplicación que hemos construído no tiene por qué ser inyectiva. El criterio de Eudoxo nos da una partición en tres conjuntos de racionales, uno de los cuales (el de enmedio) puede estar vacío, y que contiene como mucho un elemento. Veamos bajo qué condiciones esto puede llevar a la asignación del mismo número real a más de una razón en el sentido de Eudoxo. Sean a y b elementos de una magnitud M que tienen una razón y c y d elementos de la magnitud M` que poseen una razón y determinan el mismo conjunto superior que el par anterior; entonces, para dos números naturales enteros m y n, tenemos: $mb>na$ $md>nc$. ¿Puede ser que, al mismo tiempo, haya dos números naturales j y k, tales que jb y ka no sean iguales pero jd y kc sí lo sean? Para que esto sea así, en vista de la condición anterior, debemos tener $jb<ka$. LLamemos *o* a la diferencia ka-jb. Ahora, como $jd=kc$, para cualquier número natural N tenemos $Njd=Nkc$, entonces $(Nj+1)d>Nkc$, y de aquí que $(Nj+1)b>Nka$; y de esto se sigue que $N(ka-jb)<b$: todo múltiplo de la cantidad *o* es más pequeño que b -podemos decir que *o* es "infinitésimo" en relación à b. En particular, *o* y b no tienen una razón. Recíprocamente, consideremos ahora dos elementos, *o* y a, de la misma magnitud M, el primero infinitesimal en relación al segundo. Sean m y n números naturales tales que $ma>na$, lo cual significa sencillamente que $m>n$. Por la relación infinitésima de *o* à a, tendremos entonces que $(m-n)a>n\,o$, es decir, $ma>n(a+o)$. Cómo, por otra parte, la última desigualdad obviamente implica que $m>n$, vemos que las razones a:a y a+*o* :a determinan la misma clase superior, y por tanto el mismo número real. Pero estas razones no son las mismas en el sentido de Eudoxo, porque tenemos para cualquier número natural n, $na=na$ pero no $n(a+o)=na$.

Hemos visto por tanto que la condición necesaria y suficiente para que la aplicación definida del conjunto de las razones de Eudoxo en el de los números reales sea inyectiva es que todo par de elementos de una magnitud dada tengan una razón. Euclides utiliza tácitamente para probar alguna de sus proposiciones el que todos los pares de elementos de una magnitud dada tienen una razón. Pero la necesidad de esta condición fue señalada (presumiblemente por vez primera) por Arquímedes en relación no con la teoría de las razones, sino con el "método de exhausción", muy relacionado con ella, que es un método de límites creado también por Eudoxo. Este axioma: "dos magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra si se puede encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que supere a la otra", ha pasado a la historia como el Axioma de Arquímedes (aunque Arquímedes mismo lo atribuye a Eudoxo); caracterizaremos entonces como "arquimediana" a cualquier clase de magnitud en la cual todo par de elementos tengan una razón y, a partir de aquí, nos referiremos exclusivamente a este tipo de magnitudes para tratar de la teoría de las proporciones de Eudoxo *.

(En el caso de una magnitud no arquimediana surgen los números hiperreales. Un hiperreal es la clase de todas las cantidades que se diferencian de una dada en un infinitésimo).

---

* Hasta aquí hemos desarrollado la teoría de la proporción de manera uniforme para cualquier tipo de magnitud, tanto discreta como continua; en particular, por tanto, para los números. Sin embargo, Euclides no procede de esta forma. Como los griegos no consentían en partir la unidad, excepto cuando la división entre dos números enteros daba un número entero, a la división de dos números no la consideraban otro número, sino una razón entre ellos. La teoría de las proporciones tiene en Euclides, como ya hemos apuntado, dos vertientes: una la de las proporciones entre magnitudes (tratada en el libro V), otra la de las proporciones entre números (libro VII), aunque ambas son como dos aplicaciones de una única teoría de las proporciones. Sin embargo, se ha señalado a menudo que esta separación lleva a una incoherencia en la exposición de Euclides, cuando habla de la identidad de una razón entre magnitudes y una razón entre números.

2. Segunda parte.

Si consideramos ahora una magnitud arquimediana M, podemos preguntarnos: ¿en qué subconjunto del sistema de los números reales están aplicadas estas razones por la correspondencia que hemos definido? Para contestarla, hemos de hacer primero algunas consideraciones acerca de la continuidad de la recta. En el año 1872 apareció, como hemos visto, el trabajo de Dedekind sobre la continuidad y los números irracionales, y también otro trabajo en el que Cantor hacía un tratamiento del mismo tema. Ambos, Cantor y Dedekind, señalaban la necesidad, (para completar la teoría de la geometría clásica), de introducir el llamado Axioma de la continuidad (V), el cual recordemos que decía que: *"si la recta se divide en dos partes, de las cuales cada punto de una queda a la izquierda de cada punto de la otra, entonces, bien la parte de la izquierda tiene un punto que está más a la derecha que los restantes, o bien la parte de la derecha tiene un punto que está más a la izquierda que los restantes"*. Sin embargo, dicho axioma no es en modo alguno necesario para la geometría contenida en Los Elementos de Euclides -algo que el mismo Dedekind observó en su momento. En realidad, Si E es el subcuerpo más pequeño de los números reales cerrado bajo la operación de extraer la raiz cuadrada de una cantidad positiva, entonces la geometría analítica sobre E admite todas las construcciones euclideas, y en ella son ciertos todos los teoremas de Los Elementos, pero esta geometría no satisface el axioma de la continuidad de Dedekind.

No obstante, se podría objetar que E no sería el conjunto de los reales correspondiente a todo el dominio de las razones de la geometría de Euclides (incluso si se toma ésta como la correspondiente al dominio de las razones de los segmentos), puesto que la razón del área de un círculo a la del cuadrado construído sobre su radio existe según los principios de Euclides, y esta razón no pertenece a E. Si además admitimos la existencia de los segmentos que aparecen en las construcciones de los famosos problemas de la geometría clásica -la existencia de un cubo que dobla el volumen de otro dado; de un ángulo que sea un tercio de otro dado; de un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado (o, lo que es equivalente, una línea de longitud igual a la circunferencia de un círculo dado)- se obtienen en el primer y segundo caso nuevas razones y en el tercero nuevas razones entre segmentos. No está claro dónde podría terminar el proceso. Por otra parte -según autores como Stein- hay razones bastante plausibles para creer que los geómetras griegos habrían aceptado el axioma de Dedekind, tal como hicieron con el de Arquímedes, una vez que hubiera salido a la luz. Por ejemplo, en el tratado "La medida del círculo", Arquímedes admite la existencia de un segmento igual a la circunferencia de un círculo dado; y en el tratado "Sobre las espirales" prueba la existencia de tal línea. Pero esa glínea no existe en la geometría sobre E; así que está claro que Arquímedes debió de usar en su prueba, algún argumento que escapara del marco de los Elementos. Y no es fácil pensar en un principio en el que pueda basarse la prueba de su existencia que no sea equivalente al principio de continuidad de Dedekind.

Así pues, la respuesta a la pregunta sobre la sobreyectividad de nuestra aplicación, no puede basarse más que en conjeturas. Sólo si éstas fueran aceptadas llegaríamos a la concusión de que todo número real corresponde a una razón en el sentido de Eudoxo, en efecto a una razón entre segmentos.

Por otra parte, la dificultad en la descripción de los números reales radica, sobre todo, en describir cómo se realizan las operaciones aritméticas sobre estos números y después, en establecer la completitud de los reales. Dedekind fue la primera persona en dar una solución satisfactoria a ambos problemas.

ANEXOS DEL CAPITULO III

ANEXO III.1

Planificación de la Fase de Acción 1: Números Racionales

En las tablas que se presentan a continuación tenemos la Planificación elaborada para el repaso y estudio de los sistemas numéricos ya conocidos de niveles anteriores, con especial dedicación a los Número Racionales. Hemos denominado Fase de Acción 1 al trabajo realizado sobre estos tópicos, ineludible para realizar una introducción al Número Real, y que se organiza en cuatro bloques: Introducción, Números Naturales, Números Enteros y Números Racionales. Cada uno de los bloques tiene asignado un número de sesiones y su planificación se presenta en una tabla organizada en cinco columnas: Objetivos, Contenidos, Actividades, Metodología y Valoración. En cada tabla se van precisando las decisiones adoptadas y la secuenciación elegida. La columna relativa a Actividades incluye un código que identifica la ficha o fichas elaboradas en cada caso. Algunas de esta fichas, que aparecen en el desarrollo de la Programación, presentan Cuestiones de Investigación específicas, que se enmarcan en negrita, y Cuestiones Complementarias que vienen indicadas en doble línea .

Las Cuestiones de Investigación en esta Fase, esenciales para nuestro estudio, se presentaron en el apartado III.3.2 de este mismo Capítulo, con indicación del momento y modo de su propuesta a los alumnos.

Para esta fase de los Números Racionales, las Cuestiones Complementarias están distribuidas en el Ambito de las Notaciones Numéricas y de las Representaciones Gráficas de la siguiente forma:

-Ambito de las Notaciones Numéricas:

.Ficha 1: preguntas 3 y 4

.Ficha 2: pregunta 1

.Ficha 10

.Ficha 11

-Ambito de las representaciones geométricas:

.Ficha 8

.Ficha 11

.Ficha 13

.Ficha 15

Los puntos sobre los que se quiere arrojar luz a través de cada una de las actividades están descritos en los objetivos que aparecen junto a ellas en la Planificación.

Introducción (3 sesiones + 1 sesión: Pretest)

OBJETIVOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES	METODOLOGIA	VALORACION E INSTRUMENTOS DE OBSERVACION	I
-Tener información sobre: .El CONTENIDO del primer trimestre: Números. .La METODOLOGIA y los planteamientos subyacentes a ésta, con las consignas lo más claras posibles: metas, distintos tipos de actividades, valoración: Portafolio.		-Programa y comentarios. -Información oral y escrita acerca de los puntos más relevantes. -Entrega portafolios.		-Diario.	1
-Empezar a explicitar ACTITUDES y concepciones de partida con respecto a la asignatura.		-Autobiografía matemática (postdiscusión).	-Tarjeta escrita individual.	-Lectura tarjetas	

-Tomar contacto con la metodología de trabajo. -Explicitar conocimientos previos y concepciones sobre los contenidos que se especifican en el apartado contiguo.	-PROCESOS INFINITOS EN EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACION: Para números positivos (los resultados son válidos de forma análoga para los negativos): a) -<u>Existen números tan pequeños como queramos</u> (existen tantos números como queramos entre dos cualesquiera). Los "conseguimos" trabajando en la <u>parte decimal</u>, en última instancia, añadiendo <u>cada vez más cifras decimales.</u> <u>INFINITO POTENCIAL.</u> -Existen números con <u>infinitas cifras decimales</u>. <u>INFINITO ACTUAL.</u>	-F1[20]	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F1 y Puesta en Común. -Pedir la ficha completada para el portfolio al día siguiente.	-Diario. -Lectura de las respuestas de los alumnos, con especial atención a las preguntas 3 y 4. Primer análisis de resultados. -Retroalimentación a los alumnos de las cuestiones de interés general. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	1

20 El contenido de las distintas Fichas de trabajo y otras actividades pueden encontrarse en los anexos **<u>IV.1 y V.1.</u>**

-Explicitar conocimientos previos y concepciones sobre los contenidos que se especifican en el apartado b) del cuadro contiguo. -Discutir expresiones numéricas posibles y su status de número. -Repasar el significado de las cifras en el sistema de numeración decimal (uno de los instrumentos clave para la introducción del número real). -Explicitar conocimientos previos sobre distintos conjuntos numéricos e intentar una primera organización.	b)-<u>Existen números tan grandes como queramos</u>. Los "conseguimos" añadiendo cada vez más cifras enteras. <u>INFINITO POTENCIAL.</u> -<u>NO</u> existen números con <u>infinitas cifras enteras.</u> -Expresiones numéricas que no tienen estatus de número. -Significado de las cifras en el sistema de numeración decimal (uno de los instrumentos clave para la introducción del número real). -Distintos conjuntos numéricos.	-F2 (pregunta 1) -Ej. VOLUNTARIO -F2 (resto de las preguntas) -Voluntario: Trabajo sobre la Historia de los Sistemas de Numeración.	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F2 y Puesta en Común.	-Diario. -Lectura de las respuestas de los alumnos a la pregunta 1. Primer análisis de resultados. -Retroalimentación a los alumnos de las cuestiones de interés general. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	1

Números Naturales (11/2 sesiones)

OBJETIVOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES	METODOLOGIA	VALORACION	T
-Tener un marco de referencia (Ver CONTENIDOS) para la estructuración de los contenidos correspondientes a los distintos conjuntos numéricos sobre los que trabajaremos. -Repasar los conocimientos sobre los Números Naturales y organizarlos según el marco establecido.	Números Naturales: - Origen / definición intuitiva / nombre. - Notación / representaciones -ORDEN -OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones.	-F3	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F3 y Puesta en Común.	-Diario.	1
-Encontrar razones para la ampliación a un nuevo conjunto numérico: los Números Enteros.	-Resolución de ecuaciones con coeficientes naturales. -Razones para la ampliación del conjunto de los naturales.	-F4	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F4 y Puesta en Común.	-Diario.	1/2

Números Enteros (3 sesiones)

OBJETIVOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES	METODOLOGIA	VALORACION	T
-Repasar destrezas operatorias. -Dar significatividad a las propiedades algebraicas por su utilidad (en este caso, justificación para ahorro de trabajo).	-Operaciones con Números Enteros y propiedades algebraicas de la operaciones.	-F5, F5´	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F5, F5´. Distibución de la responsabilidad de corrección de operaciones entre los distintos grupos. Puesta en Común.	-Diario.	2

-Repasar situaciones en las que aparecen números enteros. -Organizar los conocimientos sobre Números Enteros en el marco de referencia establecido.	Números Enteros: - Origen / definición intuitiva / nombre. - Notación / representaciones -ORDEN -OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones -Razones para la ampliación del conjunto de los N. Naturales. -Conjuntos numéricos que incluye el conjunto de los N. Enteros.	-F6	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F6 y Puesta en Común. -Ejercicio Voluntario.	-Diario. -Revisar ejercicio voluntario.	1+

Nota.- Si el ritmo resulta más lento de lo previsto, se podría prescindir de algunos de los contenidos de estos primeros temas (seleccionar según el desarrollo de la acción).

Número Racionales (17 sesiones, con Examen incluido)

OBJETIVOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES	METODOLOGIA	VALORACION	T
-Repasar los conocimientos sobre los contenidos que se especifican en el apartado contiguo.	-Distintos significados y operaciones del N. Racional (cantidad, proporciones, resultado de ecuaciones y transformaciones).	-F7	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F7 y Puesta en Común.	-Diario.	1 1/2

-Ampliar la noción de medida, restringida habitualmente a la medida en el sistema decimal, para preparar el terreno a la conmensuración de longitudes. -Observar que la medida de una longitud depende de la unidad de medida elegida. Sin embargo, el número racional que expresa la proporción entre dos elementos de una magnitud es invariable, sea cual dad elegida para conmensurarlas. -Descubrir la correspondencia entre el modelo gráfico y la expresión numérica, y utilizarla para deducir propiedades, como el mantenimiento del orden y la proporción, cualquiera que sea la unidad de medida.	-El número racional en la expresión de MEDIDAS (relación entre lo que queremos medir y la unidad con que se mide).	-F8	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F8 y Puesta en Común. -Tarjeta?	-Diario. -Copia, archivo y lectura de Tarjeta?. -Revisar fichas. -Primer análisis de resultados. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	1 1/2
-Repasar destrezas operatorias. -Dar significatividad a las propiedades algebraicas por su utilidad (en este caso, justificación para ahorro de trabajo).	-Operaciones con los Números Racionales y propiedades algebraicas de las mismas.	-F9 -Ejercicio Voluntario.	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F9 y Puesta en Común.	-Diario. -Revisar ejercicio voluntario.	2

-Recordar reglas para establecer la correspondencia fracción-dec. periódico y aprender razonadamente el procedimiento por el que se establece la conversión de la expresión decimal en fracción. -Justificar sobre esta base la correspondencia fracciones (equivalentes)-dec. periódicos. -Tomar contacto con distintas expresiones infinitas y explicitar concepciones en torno a sus peculiaridades. Reconocer la ayuda de las regularidades para su control. Poner atención al caso particular de los nueves periódicos: origen, justificación; y a otras notaciones infinitas no periódicas: origen justificación, control.	- La notación decimal de las fracciones y viceversa (atención a las fracciones equivalentes). -La correspondencia fracción-dec. periódico y justificación. -Peculiaridades de distintas expresiones infinitas,y la ayuda de las regularidades para su control. (Ampliación Voluntarias de esta parte). -El caso particular de los nueves periódicos: origen, justificación, y de otras notaciones infinitas no periódicas: origen, justificación control.	-F10 -Trabajo VOLUNTARIO: Hojas de Trabajo 3 y 4 del artículo "Periodical decimals and calculators" del Mathematics Teacher.	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F10 y Puesta en Común. -Tarjeta (correspondecia dec. periódico-fracción) ?	-Diario. -Copia, archivo y lectura de Tarjeta? -Revisar fichas? -Primer análisis de resultados. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	3

-Ordenar números racionales en expresión decimal, como paso previo a establecer a noción de densidad. -Reflexionar en torno al valor posicional en el sistema de numeración decimal. -Establecer que a todo decimal finito o periódico le corresponde un punto de la recta, y en virtud de qué se establece dicha corresponden-cia (a través de la notación fraccionaria, si fuera más fácil o incluso necesario en algunos casos).	-Relación de orden en los racionales en expresión decimal (que servirá de preliminar a la idea de densidad). - Valor posicional en el sistema de numeración decimal. -Representación en la recta de los decimales (a través de la notación fraccionaria, si fuera más fácil o incluso necesario en algunos casos).	-F11	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F11 y Puesta en Común.	-Diario. -Primer análisis de resultados. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	1

-Poner a los alumnos en situación de responder a la pregunta de si la relación entre dos longitudes cualesquiera es siempre expresable en términos de razones de enteros. -Ver qué dificultades se presentan en el planteamiento de esta cuestión a los alumnos, y cuáles son las concepciones al respecto, en la medida en que hayan sido capaces de entenderla. -Para los alumnos que crean en la cconmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera, abrir la puerta, una vez explicitada esta creencia, al conflicto que supone la existencia de longitudes incomnesurables.	-Conmensurabilidad-inconmensurabilidad de segmentos.	-F12	-Trabajo por parejas de la primera parte de la actividad. -Puesta en Común. -Contestación individual de la pregunta correspondiente a la segunda parte de la actividad.	-Diario. -Recogida de los trabajos y archivo de copias. -Primer anáisis de resultados. -Grabación en vídeo de la Puesta en Común.	1 +

-Trabajar con ayuda de un modelo que permite una fácil visualización y que tiene una fácil conexión con el modelo de la recta: .El concepto de equivalencia de fracciones. (Discutir dónde se colocarían en el modelo de la recta las fracciones equivalentes). .La densidad de los racionales. .Manejo de la relación de Orden. .Intuiciones de sucesiones que "tienden hacia" (puede ser importante para la definición de ciertos irracionales, a través de su expresión decimal y los segmentos encajados, primero en el caso de los construibles y luego en el de los no construibles).	-Equivalencia de fracciones. Orden. Densidad. -Regularidades numéricas (Voluntario).	-F13 (-Actividad Voluntaria: en "Fractional patterns-visual and numerical" de Mathematics teacher).	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F13 y Puesta en Común. -Tarjeta sobre la representación gráfica y decimal de fracciones equivalentes.	-Diario. -Copia, archivo y lectura de Tarjeta. -Primer análisis de resultados. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	2

-Establecer un criterio de correspondencia entre los números y los puntos de la recta: la medida del segmento con origen 0 y extremo el punto, con respecto del segmento unidad. -Explicitar si, en base al criterio anterior y a sus concepciones en cuanto a conmensurabilidad (o inconmensurabilidad) de dos longitudes, creen que a todos los puntos de la recta corresponden números racionales. Y, en caso de que así fuera, si los números racionales llenarían la recta.	-Criterio de asignación de números a puntos de la recta.	-F14	-Trabajo en las mismas parejas que la actividad F12 y Puesta en Común.	-Diario. -Recogida de los trabajos, archivo de copias. -Primer anáisis de resultados. -Grabación en vídeo de la Puesta en Común.	1 1/2

-Ubicar distintos tipos de números estudiados en sus conjuntos correspondientes. -Organizar los conocimientos adquiridos, encajándolos en el esquema habitual	Números Racionales: - Origen / definición intuitiva / nombre. - Notación / representaciones. -ORDEN -OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones -Razones para la ampliación del conjunto de los Números Enteros. -Conjuntos numéricos que incluye el conjunto de los N. racionales.	-F15	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F15 y Puesta en Común.	-Diario. -Primer análisis de resultados, sobre la pregunta 2. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	1

-Examen (1 h. + 1/2 h. después para corrección):

.Constará de cuatro ejercicios cerrados sobre los contenidos vistos, para contestar por escrito durante una hora.

.Añadir -con categoría de **pregunta voluntaria** para subir nota- la **Cuestión de Investigación**:

"Un genio ha colocado todos los números racionales en los puntos correspondientes de la recta numérica. ¿Crees que esos puntos llenarían toda la recta o que, por el contrario, habría puntos sin marcar?"

-Puesta en Común y Tarjeta de valoración de la experiencia.

ANEXO III.2

Planificación de la Fase de Acción 2: Números Irracionales. Números Reales

Continuamos con la Planificación realizada para la puesta en práctica de la Fase de Acción 2, cuya estructura y organización general es similar a la que hemos visto en el apartado anterior para la Fase de Acción I.

Las Cuestiones específicas de Investigación para esta Fase ya se plantearon en los apartado III.2.3 y III.3.2, con indicación del lugar y momento de su presentación a los alumnos; en las tablas de la Planificación que aparecen a continuación se presentan estas cuestiones en la columna de actividades.

Para esta fase en la que se trabaja con los Números Irracionales y Reales, las Cuestiones Complementarias están distribuidas en el Ambito de las Notaciones Numéricas y de las Representaciones gráficas de la siguiente forma:

-Ambito de las Notaciones Numéricas:

.Ficha "Raíces Cuadradas" y actividades adjuntas.

.Ficha 18

-Ambito de las Representaciones Gráficas:

.Ficha 16

.Ficha 18

Como en la fase anterior, los puntos sobre los que se quiere arrojar luz están descritos en los objetivos que aparecen junto a dichas actividades en la Planificación.

Números Irracionales. Número Reales. (16 sesiones, hasta el final del trimestre)

OBJETIVOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES	METODOLOGIA	VALORACION	T
-Explicitar el significado que atribuyen a √a situándose para ello en uno o más contextos determinados (algebraico, geométrico...) -Construir un procedimiento de cálculo de raíces cuadradas. -Resolver el conflicto entre el resultado de la calculadora y la definición. -Buscar información, a partir del conflicto mencionado, sobre la expresión decimal de las raices (y buscar además otros números cuya expresión decimal sea también infinita).	-Raíces cuadradas. Su expresión decimal. -Notaciones decimales infinitas no periódicas.	-Ficha "RAICES CUADRADAS" -Buscar la expresión decimal exacta de √2. -Voluntario: ¿Existen otros números cuya expresión decimal sea también infinita? Buscarlos.	-Trabajo por parejas en las Situaciones. Puesta en común. -Búsqueda individual de la expresión decimal de √2. Puesta en Común. -Búsqueda individual o colectiva de la cuestión voluntaria y exposición de los resultados.	-Diario.	1/2 1/2 1/4

-Explicitar los conocimientos previos de distintos tipos de expresiones decimales. Organizar dichos conocimientos. -Explicitar las dificultades para aceptar a los decimales infinitos como números, para sus distintos tipos.	-Distintos tipos de expresiones decimales, origen y ejemplos. Clasificación.	-Ver CUESTIONES de INVESTIGACION: CI 1.	-Contestación individual y por escrito de la CI 1 en Tarjeta. -Puesta en Común. -Nueva Tarjeta. *<u>Nota:</u> Encargar la Actividad de π. (Ver el apartado correspondiente más abajo).	-Diario. -Especial atención a apartado (b) de CI 1 en la Puesta en Común. -Archivo y copia de Tarjetas. -Primer análisis de resultados.	1
-Tomar contacto con irracionales conocidos y trabajar con ellos. -Sentir curiosidad y estímulo intelectual ante la relación entre los números y el mundo real (naturaleza, arte)	-Origen, Significado, Historia, Usos, etc... del Número de Oro. -El Número de Oro es irracional, porque su expresión decimal es infinita no periódica y corresponde a una longitud inconmensurable con la unidad.	-Preparar una Ficha para los alumnos en torno al Número de Oro. -Sugerir actividad voluntaria sobre el Número de Oro.	-Trabajo en grupos de cuatro sobre la actividad del Número de Oro y Puesta en Común. -Revisar actividad Voluntaria.	-Diario.	1 h.

-Explicitar las concepciones en torno a: .la existencia de longitudes irracionales, basándose en la idea de transformación continua. .el problema de la notación decimal infinita correspondiente a dichas longitudes. .el papel que juega la notación habitual ($\sqrt{2}$) como puente entre la posible existencia de una longitud finita y su expresión decimal infinita.	-El continuo lineal y la existencia de medidas irracionales. -Representación numérica de estas medidas y de los puntos del continuo lineal.	-F16	-Trabajo por parejas sobre F16. Puesta en Común.	-Diario. -Grabación audio de la Puesta en Común. -Archivo y copia de Fichas. -Primer análisis de resultados.	1 h.

-Construir medidas irracionales (raíces cuadradas). -Prestar atención al caso de √12, y retomar la discusión sobre su existencia, su loalización en la recta, su expresión decimal y su estatus de número. -Localizar en la recta los puntos correspondientes a números (longitudes) constuibles, tanto racionales como irracionales, a partir de la notación habitual y de la notación decimal para el caso de los racionales (en este caso, la demanda de exactitud obligará a pasar por el puente de la notación fraccionaria). -Diferenciar entre los dos tipos de números aparecidos: racionales e irracionales, en el ámbito numérico y en el geométrico (inconmensurabilidad de longitudes, establecida a través de la expresión decimal infinita no periódica). -Resolver ecuaciones de segundo grado, para tener otro motivo de aceptación como números de los irracionales cuadráticos.	-Construcción de medidas irracionales (raíces cuadradas). -Representación en la recta de números racionales y de algunos irracionales. -Criterios de diferenciación entre racionales e irracionales en base a la expresión decimal y a la manera de representarlos gráficamente (en construcción geométrica y en la recta). -Soluciones de ecuaciones de segundo grado.	-F17	-Trabajo en grupo sobre F17 y Puesta en Común.	-Diario (poner atención a la nueva discusión sobre √12). -Grabación audio de la Puesta en Común. -Tarjeta con pregunta √12 (?) -Tarjeta con pregunta sobre la incommensurabilidad de √2 (?) -Primer análisis de resultados (?)	11/ 2 h.

-Medir con unidades de medida no decimales -Enfrentarse nuevamente con el problema de la inconmensurabilidad.Para ello habrá que distinguir entre la medida en el plano físico y la medida de la figura geométrica ideal, algunos de cuyos lados son inconmensurables esto puede establecerse a partir del teorema de Pitágoras, y la expresión decimal infinita no periódica de las raíces cuadradas no enteras.	-Medidas irracionales. Inconmensura-bilidad.	-Ficha "TANGRAM" -Alguna actividad VOLUNTARIA al respecto.	-Trabajo en grupos. Puesta en Común. -Revisar actividad Voluntaria.	-Diario.	1 h.
-Explicitar concepciones sobre la existencia de puntos de la recta correspondientes a los distintos tipos de números decimales estudiados, y al modo de hallarlos en cada caso. -Diferenciar entre los distintos tipos, tanto a nivel de representación numérica como a nivel de representación gráfica.	-Existencia de puntos de la recta correspondientes a los distintos tipos de números decimales que hemos estudiado. Modo de hallarlos en cada caso. -Diferencias entre los distintos tipos, tanto a nivel de representación numérica como a nivel de representación gráfica. -Conjunto origen en la corespondencia números -recta.	-Ver CUESTIONES de INVESTIGACION: CI 2.	-Trabajo en grupo en torno a la cuestión y respuesta individual en Tarjeta. Puesta en Común.	-Diario. -Grabación vídeo de la Puesta en Común. -Archivo y copia de respuestas de los alumnos. -Primer análisis de resultados.	1 h.+

-Explicitar las concepciones sobre los tipos de números correspondientes a los puntos de la recta (conjunto origen de la correspondencia números-puntos de la recta), remitiéndose a la expresión decimal para clasificar los distintos tipos. -Diferenciar entre el plano factible y el ideal a la hora de realizar la correspondencia (poner atención al caso de los no construibles: pi o expresiones decimales infinitas no periódicas). -Explicitar intuiciones sobre la correponcencia números-recta, con los matices que la consideración del continuo lineal pueda añadir a la correspondencia números-puntos.	-Existencia de distintos tipos de números correspondientes a los puntos de la recta. Representación decimal de los mismos.	-Ver CUESTIONES de INVESTIGACION: CI 3.	-Trabajo en grupo en torno a la cuestión y respuesta individual en Tarjeta. Puesta en Común. -Tarjeta a raiz del conflicto suscitado en la Puesta en común.	-Diario. -Grabación vídeo de la Puesta en Común. -Archivo y copia de respuestas de los alumnos. -Primer análisis de resultados.	1 h.+

-Discutir el significado de la definición de π, tratando el conflicto que se plantea por la creencia de que todas las razones entre longitudes son racionales y la expresión decimal de π, infinita no periódica (según el conocimiento establecido). -Pasar a la práctica tratando de determinar la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro, de manera que se estimule la curiosidad por saber de aproximaciones oficiales y del hecho de que esas dos longitudes son inconmensurables.	-Significado, Historia, Aproximaciones, Usos, etc... del Número π. -El Número π es irracional, porque su expresión decimal es infinita no periódica y corresponde a una longitud inconmensurable con la unidad.	-Ficha "EL NUMERO PI".	-Trabajo en grupos de cuatro sobre la actividad del Número π y Puesta en Común.	-Diario. -Grabación audio de la Puesta en Común.	1 h.
-Explicitar las concepciones en torno a la aceptación de los decimales infinitos como números, para sus distintos tipos, después de las experiencias realizadas.	-Distintos tipos de expresiones decimales infinitas, origen, clasificación, status de número.	-Ver CUESTIONES de INVESTIGACION: CI1´	-Contestación individual y por escrito de la CI 1´ en Tarjeta. -Puesta en Común.	-Diario. -Grabación vídeo de la Puesta en Común (apartado (b) de CI1´). -Archivo y copia de Tarjetas. -Primer análisis de resultados.	1 h.

-Ubicar distintos tipos de números estudiados en sus conjuntos correspondien- tes. Explicitar para cada tipo de su representación decimal y su representación en la recta. -Explicitar la diferencia entre racionales e irracionales y las aportaciones de los Números Reales a los Números Racionales: en el ámbito numérico y en el geométrico. -Establecer una idea de completitud de los N.Reales en los dos ámbitos mencionados.	-Clasificación de distintos tipos de números reales que han aparecido a lo largo del proceso didáctico: conjunto al que pertenecen, notación habitual y decimal, representación en la recta. Ventajas y desventajas de unas notaciones sobre otras. -Diferencia entre racionales e irracionales y aportaoiones de los Números Reales a los Números Racionales: en el ámbito numérico y en el geométrico. Idea de completitud.	-F18 -Tarjeta con CI4 (Ver CUESTIONES de INVESTIGACION: CI4).	-Trabajo en grupo sobre F18 y Puesta en Común.	-Diario.audio de la Puesta en Común. -Lectura y archivo de copia de Tarjetas. -Primer análisis de resultados.	1 h.

-Organizar los conocimientos adquiridos, enncajándolos en el esquema habitual. -Preparar el Examen.	Números Reales: - Origen / definición intuitiva / nombre. - Notación / representaciones. - ORDEN -OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones -Razones para la ampliación del conjunto de los Números Racionales. -Conjuntos numéricos que incluye el conjunto de los N. Reales.	-F19 -Resolución de dudas. -Posibilidad de hacer una "chuleta" para el Examen en el espacio de una cara de un folio.	-Trabajo en grupo sobre F19. Puesta en Común. -"Chuleta" individual.	-Diario. -Lectura de fichas? -Recogida y archivo de "chuleta" y lectura. -Grabación audio de la Puesta en Común?	11/ 2 h.

-Examen (1 h. + 1/2 h. después para corrección):

.Constará de cuatro ejercicios cerrados sobre los contenidos vistos, para contestar por escrito durante una hora.

-Puesta en Común y Tarjeta de valoración de la experiencia.

ANEXO III.3

Material de trabajo de los alumnos: Portafolio, Fichas de Trabajo, Cuestiones de Investigación y Actividades Voluntarias

PORTAFOLIO

El Portafolio es un archivo para tu trabajo en clase de matemáticas. En los distintos apartados se archivarán los diferentes tipos de actividades relizadas con su fecha. El portafolio consta de los siguientes apartados:

-Temario del trimestre, Objetivos del trimestre y Criterios para la valoración de actividades.
-Fichas de trabajo
-Tarjetas (de cuestiones matemáticas y actitudinales)
-Ejercicios y actividades voluntarias
-Exámenes
-Valoración
-Apartado en blanco para recoger "otras cosas" (comentarios, anécdotas, sugerencias...)

Objetivos del Portafolio:

-Facilitar la organización del trabajo adecuada a los distintos tipos de tareas que vamos a desarrollar.
-Hacer partícipes a los alumnos de la organización y el seguimiento de su propio trabajo.
-Facilitar el acceso por parte de los alumnos y del profesor a los distintos tipos de actividades realizadas, para una valoración de las mismas y del progreso realizado a lo largo del tiempo.

PRESENTACION DE LA ASIGNATURA A LOS ALUMNOS

Temas:

-INTRODUCCION
-NUMEROS NATURALES
-NUMEROS ENTEROS
-NUMEROS RACIONALES
-NUMEROS IRRACIONALES. NUMEROS REALES

Objetivos Trimestre:

-OBJETIVOS DE APRENDIZAJE INDIVIDUAL:

.APRENDIZAJE MATEMATICO:

.Manejo de distintas representaciones de los números: numérica y gráfica, y de las relaciones entre ellas.

.Conocimiento y dominio de las relaciones de orden, operaciones y propiedades en cada uno de los conjuntos numéricos estudiados.

.Diferenciación entre los distintos conjuntos numéricos y sus características; conocimiento de las relaciones de inclusión entre ellos.

.APRENDIZAJE EN GENERAL:

.Reflexión sobre la materia trabajada, planteamiento de dudas y preguntas.

.Constancia en la búsqueda de solución a las cuestiones planteadas.

.Iniciativa, autonomía, responsabilidad sobre el propio trabajo.

-OBJETIVOS DE APRENDIZAJE EN GRUPO Y COMUNICACION

.Cooperación con los miembros del grupo de trabajo.

.Participación activa en las discusiones de clase.

Valoración:

-Exámenes:

.30% de la nota de la Evaluación.

.Se harán dos exámenes a lo largo de la Evaluación: uno al finalizar el tema de los Números Racionales y otro al final, que abarcará todo lo estudiado.
.Se hará nota media entre los dos exámenes, y no habrá recuperación.

-Fichas de Trabajo:
.40 % de la nota de la Evaluación.
.Cada alumno presentará tres fichas de su elección (una antes del examen de Racionales), y yo elegiré otras (número a precisar), para su valoración conjunta de acuerdo con los Objetivos del Trimestre propuestos; esto se hará a lo largo de la evaluación para que vayamos mejorando el trabajo a partir de la retroalimentación.
.Las notas seguirán la graduación: suspenso- suficiente-bien -notable -sobresaliente.

-Ejercicios y actividades voluntarios:
.20% de la nota de la Evaluación.
.Cada alumno presentará un mínimo de dos ejercicios "voluntarios" en la Evaluación, uno antes del examen de Racionales y otro antes del final de la Evaluación. Podrán ser individuales o en parejas. Se valorarán de acuerdo con los Objetivos del curso propuestos.

-Elementos restantes del Portafolio:
.El 10% restante de la nota de la Evaluación, provendrá de la valoración del resto de los elementos del portafolio, incluido él mismo. Las Tarjetas, la Autobiografía Matemática etc... serán valorados de acuerdo con el interés y la sinceridad puestos en su elaboración, aunque no tengan calificación específica.

Ficha 1

1/ Escribe en orden creciente tres números decimales menores y tres números decimales mayores que una décima.

2/¿Cuántos números decimales hay entre 0,174 y 0,175?
¿Y entre 0,1742 y 1,743?

3/ Juguemos a decir números pequeños. Ganará el que diga el más pequeño de todos:
a) Sin restricciones
b) mayor que 0 (positivo)

4/ ¿Cuál es el número con más cifras que conoces?
¿Conoces algún número con infinitas cifras?
¿De dónde surgen esos números?

Ficha 2

1/ Escribe el número natural con más cifras que conozcas.

-VOLUNTARIO: Busca números muy grandes y muy pequeños que correspondan a situaciones o cosas reales.

*REPASO:

2/ Escribe los siguientes números decimales:

Treinta milésimas
Ciento cuarenta centésimas
Diez centésimas
Ventidós décimas
Ochocientas siete milésimass

3/ Escribe un número de cuatro cifras y otro de seis. Al escribirlos has usado un sistema de numeración.
¿Cómo se llama este sistema de numeración? ¿Por qué se llama así? ¿Quiénes lo inventaron?

4/ Explica razonadamente cómo se forman los números en este sistema de numeración. (Puedes empezar expicando el significado de un número cualquiera. Por ejemplo, 239 ó 239,23).

5/ ¿Qué conjuntos numéricos más importantes conoces?
¿Qué elementos los forman?
¿Con qué símbolos representas a estos conjuntos?

Ficha 3

Los Números Naturales

1/ ¿Por qué se les llama "naturales" a estos números?
¿Para qué sirven?

2/ Escribe a continuación lo que sepas de los Números Naturales, organizando tus conocimientos de acuerdo con el siguiente guión:
- ORIGEN - DEFINICION INTUITIVA - NOMBRE
- NOTACION- REPRESENTACIONES
- ORDEN
- OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones.

Ficha 4

1/ Resuelve la ecuación de coeficientes naturales: x+9=16
¿Qué es resolver una ecuación?
¿Qué entiendes por solución de una ecuación? ¿Cómo se llama a x en una ecuación? ¿Por qué se llama así?

2/ Señala, indicando por qué, cuáles de las siguientes ecuaciones con coeficientes naturales tienen solución en N:
a) x+9=5 b) 5x=10 c) x+14=34 d) 3x=10 e) y+3=2

3/ Explica las razones por las que crees que los números enteros son útiles.

Ficha 5

1) 3+(-2)=
2)(-2)+(-5)=
3) (-3)+2=
4) (-5)+(-7)=
5) -(-2)+5=
6) (-2)-2=
7) (-3)-(-2)=
8) 2-(-3)=
9) 4-(-5)=
10(-3)-4=
11) 3·(-2)=
12) (-3)·(-5)=
13)-(2·5)=
14) (-2)·5=
15) -(-3)·4=

---

16) (-4)+3=
17) 8·(-3)=
18) -1·6=
19) 5-(-2)=
20) (-7)·(-2)=
21) (-3)+ =-1
22) (-1)+ =-2
23)5+ =-3
24) 3- =-1

---

25) 3+2·5=
26) (3+2)·5=
27) 7·4-1=
28) 7·(4-1)=
29) 2·3+5·2-1=
30) 2-(-3)·7=
31) (2-(-3)·7)=
32) (2-(-3))·7=
33) ((-3)-(-2))·5=
34) (-3)-(-2)·(-5)=

---

35) (-2)·5-3=
36) 3-(-2)·5=
37) (3-(-2))·5=
38) (-4)·(-1)-(-2)=
39) ((-3)-(-5))·(-8)=
40) (-4)·((-1)-(-2))=
41) -(-2)+3·(7-4)=
42) ((-2)+3)·(7-4)=
43) (-3)-2·(5-(-1))=
44) ((-3)-2)·(5-(-1))=

---

45) 4-(-1)·(-5)+8·((-3)-2)=
46) 4-((-1)·(-5)+8)·((-3)-2)=
47) (4-(-1))·(-5)+8·((-3)-2)=
48) (4-(-1))·(-5)+8·(-3)-2=
49) (4-(-1)·(-5)+8)·(-3)-2=
50) 3-(-2)·7-(8+(-3))·(-2)=
51) (-2)·(-(2-4))-2·(-4)=
52) 6+(-3)-(-2)-1+2=
53) (3-(-1)·(-2))·(2-4·(-3))=
54) (2-(-4)·3)·(-5)+7=
55) (3·(-4)+2)·(-5)+7=
56) (2-5·3)·(-2)-4·(3-(-1))=
57) (2+7·3)·(3-5·(-1))+2·3=
58) (8.(-3)-4)·(-5)-3=
59) (3-(-2))·2+3-(-2)·2=
60) (-3)-(-5)·(-8)=

Ficha 6

Los Números Enteros

1/ La temperatura desciende 5 grados a lo largo del día. Si empezó con -7, ¿cuál será la temperatura al final del día?

2/ En Granada hace una temperatura de -6 y en Guadix de 2. ¿Qué diferencia de temperatura hay? Al ir de un sitio a otro, ¿se nota subida o bajada?

3/ Juan es cinco años mayor que Pedro y dos menor que Ana. ¿Es Pedro mayor o menor que Ana? ¿Cuántos años?

4/ Ordena y representa gráficamente los números:

-7 8 15 -6 -9 2 -2

5/ En el IB Albaycín se organiza una excursión a Málaga. Se llenan dos autocares de cuarenta plazas cada uno. En uno van las chicas y en el otro los chicos. En un descuido, diez chicas se cuelan en el autobús de los chicos. Al darse cuenta el profesor acompañante, ordena que diez pasajeros vuelvan al otro autobús. Pero no vuelven todas las chicas a su autobús, aunque los dos autobuses tengan de nuevo cuarenta pasajeros cada uno.

¿Cuántas chicas hay en el autobús de los chicos y viceversa?

6/ Razona si se pueden emplear los números enteros en las situaciones siguientes:

-numerar las páginas de un libro
-medir temperaturas
-medir longitudes
-realizar operaciones comerciales
-resolver ecuaciones de primer grado
-contar

7/Estoy en el sétimo piso y quiero bajar al tercero, pero no directamente sino con tres escalas. Inventa recorridos posibles, y represéntalos a partir de operaciones con números enteros.

8/ Inventa un problema que al resolverlo dé como resultado -3

9/ De los números enteros escribe a continuación lo que sepas, organizando tus conocimientos de acuerdo con el siguiente guión:

- ORIGEN - DEFINICION INTUITIVA - NOMBRE
- NOTACION- REPRESENTACIONES
- ORDEN
- OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones
- Razones para la AMPLIACION de los Números Naturales a los Enteros.
- CONJUNTOS NUMERICOS que incluye el conjunto de los Números Enteros.

-VOLUNTARIO:

Somete a tus amigos a este juego:

1) Indícale que forme un solo número con la fecha de su nacimiento. Así, si nació el 19 de Febrero de 1958, el número que debe formar es 1921958.

2) Debe formar otro número invirtiendo el orden de colocación de las cifas del número anterior: 8591291.

3) Debe calcular la diferencia entre el mayor y el menor de los números hallados en 1) y 2): 8591291-1921958=6669333.

4) Indícale que sume las cifras del número resultante: 6+6+6+9+3+3+3=36.

5) Ha de volver a sumar las cifras del número resultante: 6+3=9

Al final, sin haber visto ningún número de este proceso, le dirás que el resultado es 9 ó 0.

Puedes repretir el juego con fechas de nacimiento o de defunción de personjes famosos, con fechas de acontecimientos...

Explica razonadamente por qué siempre sale 9 ó 0

(Orientación: piensa cuándo un número es divisible por 9).

Ficha 7

1/ Un terreno tiene una superficie de 2.500 m2. ¿Qué superficie tendrán los 3/5 de ese terreno?

2/ Los 2/5 de una herencia se elevan a 2.375.000 pts. Calcula la herencia.

3/ En un hospital han nacido durante 1991 10.750 niños, de los cuales el 52% son hembras. ¿Cuántos niños han nacido durante 1991 en el hospital?

4/ En una clase hay 65 alumnos, de los cuales dos son varones, ¿qué porcentaje de varones hay en la clase?

5/ SOPA DE CEBOLLA

INGREDIENTES (para 8 personas)

8 cebollas

2 litros de agua

4 cubitos de caldo

2 cucharadas de mantequilla

1/2 litro de crema

¿Cuáles serán los ingredientes para preparar sopa para cuatro personas? ¿Y para seis personas?

6/ En una oficina el Sr. Alvarez va a trabajar 2 días a la semana, el Sr. Benítez 4 días y el Sr. Cerezò 6 días. Cada semana se gastan 240 pts. de luz. ¿Cuánto corresponde pagar a cada uno para que sea justo?

7/ a) ¿Cuántos radios de bicicleta de 101/2 cm. de largo se pueden cortar de un trozo de alambre de 40 cm. de largo?

b) ¿Qué longitud de alambre queda?

8/ a) Un australiano convierte en Londres las libras en dólares australiano cuando desea compar algo. Una libra es equivalente a 11/5 dólares australianos. Si paga 45 libras y 50 peniques por un abrigo, ¿cuál es el precio del abrigo en dólares australianos? (1 libra = 100 peniques).

b) Algunas veces él quiere convertir los dólares en libras. El sabe que un traje en Australia cuesta 65 dólares. Para cmbiar esto en libras, ¿qué operación debe hacer?

9/ Para prescindir de la moneda, en una comunidad se establece el cambio siguiente: 5 cuadernos por 3 manzanas; 18 lápices por 5 manzanas; 13 manzanas por 4 reglas. Si tomamos como unidad de valor la manzana, ¿qué fracción representa:

a) el valor de un cuaderno en relación a una manzana?

b) el valor de un lápiz en relación a una manzana?

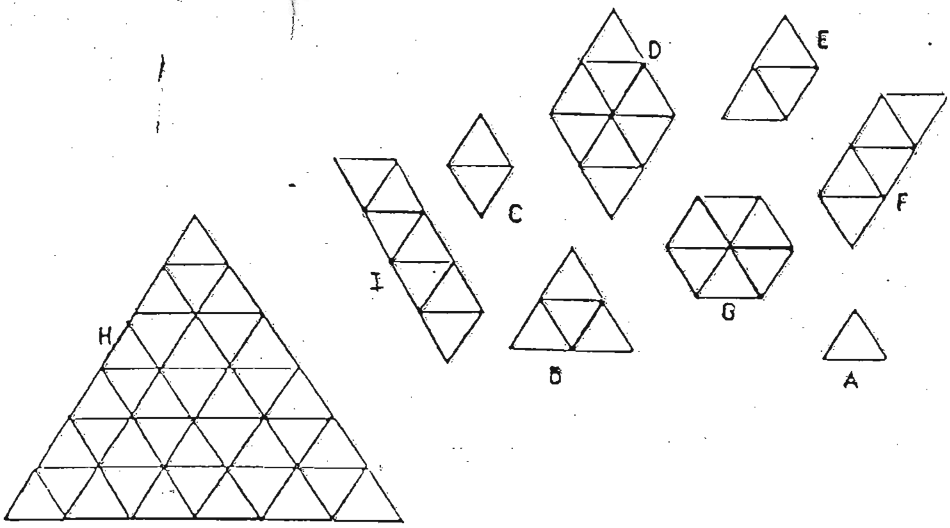
c) el valor de dos reglas en relación a una manzana?

10/ Una tienda tiene el 10% de rebaja. ¿Qué conviene más, que se aplique el IVA (12%) antes o después de hacer el descuento?

11/ Busca en la prensa algún problema que se resuelva mediante números racionales.

12/ ¿Qué tanto por ciento de aumento tengo que poner en una máquina de hacer fotocopias para aumentar el tamaño de un carnet de estudiante a medio folio?

Ficha 8



1/ Ordena las piezas anteriores de menor a mayor.

2/ Mide el área de cada pieza tomando como unidad la pieza A.
Coloca los números por orden.

3/ Mide el área de cada pieza tomando como unidad la pieza H.
Coloca los números por orden.

4/ Mide el área de cada pieza tomando como unidad la pieza B.
Coloca los números por orden.

5/ ¿Qué es lo que se mantiene en las distintas series de medidas? ¿Qué es lo que varía?

6/ Tomando como unidad de medida la pieza A, expresa con un número la relación entre las piezas:

G y F   I y C   D y C   F y C   C y G   A y E   E y G   H y B

7/ Considera como unidad el triángulo a: (pegar dibujo)
Vuelve a expresar la relación entre las anteriores parejas de piezas.

8/ A la vista de los dos ejercicios anteriores, escribe tus conclusiones con respecto al cambio de los números que expresan la relación entre las medidas de cada pareja de superficies cuando varía la unidad.

Ficha 9

1/ Completa la tabla

a	b	c	a-b	(a b) (-a)	(-a) (b a)	a (b+c)
2	2/3	-12/3				
1/3	4/3	7				
11/5	-2/7	-4/9				
0,2	-1,5	2/3				
0	3/20	-2,25				
-2,5	21/3	0				

-b-(-a)	a b+c	b (a c)	b a-c d

(Aviso: Utiliza las propiedades de las operaciones de los números racionales y la distribución del trabajo entre los miembros de grupo y ahorrarás bastante trabajo).

2/ (2-32/5) (-7/3)-0,25 (3-(-1/5)) =

3/ (2-3 2/5) (-7/3)-0,25 (3-(-1/5)) =

4/ -2/7-(-5/7) 2 =

5/ (-2/7-(-5/7) 2 =

6/ Completa los huecos

a) 3/5-   =1/2

b) -3/5-   =1/2

c) 2/3:   =4

d) -3/4:   =3/4

e)   :0=1

7/ Sea un número racional positivo cualquiera,

-si le sumo otro número racional positivo, el resultado ¿aumenta o disminuye?

-¿y si le resto otro número racional positivo?

-¿y si lo multiplico por otro número racional positivo?

-¿y si lo divido por otro número racional positivo?

8/ Seguro que sabes que 2<3, pero qué pasa con

-2	-3
1/2	1/3
-1/2	-1/3

Coloca < ó > según corresponda.

VOLUNTARIO:

Desarrolla todos los casos posibles del ejercicio 7 si los números racionales pueden ser también negativos.

Ficha 10

1/ Un alumno obtiene en selectividad la nota $7,\widehat{9}$=7,9999... Para entrar a la Facultad de Medicina se necesita una nota mínima de un 8. ¿Sería justo que lo dejaran fuera si quiere entrar?

2/ Escribe la expresión decimal de

1/9=
2/9=
3/9=
4/9=
5/9=
6/9=
7/9=
8/9=
9/9=

¿Qué te sugiere el resultado?

3/a) Utiliza el algoritmo tradicional de la división para determinar la representación decimal de cada una de las siguientes fracciones:

12/5   7/2   7/33   9/7   14/4   -241/198   -34/35   21/6

b) Clasifica los resultados obtenidos.

c) El periodo de una fracción es la secuencia de dígitos que se repite en su representación decimal; la longitud del periodo el el número de dígitos en la secuencia que se repite. En esta actividad, usaremos el 0 para el periodo de los decimales finitos y 1 para la longitud de ese periodo. Completa la tabla que sigue a continuación:

Fracción	12/5	7/2	7/33	9/7	241/198	-34/35
Periodo						
Longitud periodo						

d) Observa con cuidado tu división de 9/7. ¿Es posible que la longitud del periodo de cualquier fracción con denominador 7 (2/7, 13/7, etc.) pudiera ser mayor que 6? ¿Por qué?

e) ¿Puede un decimal que provenga de una fracción tener infinitas cifras no periódicas? ¿Por qué?

4/ Escribe en forma de fracción

$1,7=$

$1,\widehat{7}=$

$2,25=$

$2,2\widehat{5}=$

$2,\widehat{25}=$

$3,0\widehat{78}=$

$3,07\widehat{8}=$

$0,8\widehat{9}=$

$0,\widehat{9}=$

0,12345678910111213...=

5/ a) Dada una fracción cualquiera, ¿puedes expresarla en forma decimal? ¿de qué tipo es ese decimal?

b) Dado un decimal periódico, ¿puedes siempre encontrar una fracción que le corresponda?

c) ¿Qué correspondencia hay entre las fracciones y los decimales periódicos?

6/ Usa la calculadora para encontrar el periodo y la longitud del mismo en la siguiente familia de fracciones ("familia del 7"):

Fracción	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7
Periodo						
Longitud periodo						

a) ¿Qué relación hay entre los dígitos de los periodos que acabas de escribir?

b) Estudia el proceso de encontrar los tres primeros dígitos de la representación decimal de la fracción 1/7.

La respuesta, 0,142 es sólo una aproximación de la respuesta correcta, ya que 0142*7 es igual a 0,994 en lugar del dividendo correcto, 1. Por tanto, el error es 1-0,994=0,006. ¿Cómo se relaciona el error con el resto en el proceso de la división?

c) Supón que te dan una calculadora que sólo trabaja con tres cifras decimales. ¿Cómo usarías esta calculadora y la relación del apartado b) para encontrar los dígitos que faltan en el periodo de 1/7?

Aplica tu procedimiento para encontrar la representación decimal de 2/7.

d) Usa tu calculadora y las ideas de los apartados anteriores para hallar la representación decimal de las fracciones de la tabla:

Fracción	Decimal	Fracción	Decimal	Fracción	Decimal
1/11=		1/15=		1/19=	
1/12=		1/16=		1/21=	
1/13=		1/17=		1/23=	
1/14=		1/18=		1/29=	

e) Utiliza tu calculadora para encontrar las representaciones decimales de "la familia del 17". ¿Qué relación hay entre las cifras de éstas?

Ficha 11

1/ ¿Cuál es mayor 1,20 ó 1,2? Justifica tu respuesta.

2/ ¿Cuál es el menor de los siguientes números:

1,02   1,000048   1,013 $1{,}0002000\overline{1}$ 1,1?

3/ ¿Cuál es el mayor de los siguientes números:

0,1   0,20 $0{,}0\overline{34}$ 0,04   0,008?

4/ ¿Cuáles de los siguientes números están entre 0 y 0,01:

0,05   0,5   0,16 $0{,}00\overline{7}$ 0,011?

5/ ¿Cuál de los siguientes números es más próximo a 1,003:

1,01   1,0   1,3   0,003?

6/ ¿Cuál de los siguientes números es más próximo a 1,13:

1,013   1,31   1,10   1,103   1,113?

7/ Escribe dos números comprendidos entre cada una de las siguientes parejas:

0,1 y 0,11   0,23 y 0,33   3,7 Y 3,8   1,103 y 1,113   0,001 y 0,2

8/ Escribe el número racional siguiente a:

0,1   3,7   1,2345   23 $366{,}\overline{5}$ 0

9/ Representa en la recta numérica:

0,5   0,75 $0{,}\overline{3}$ 1,4   0,16

Ficha 12

Nombre y número:

1/ Tomando como unidad de medida la longitud u, expresa, para cada pareja de segmentos, la medida de la longitud **x** en función de **u** con exactitud y sin utilizar ningún instrumento de medida graduado. Anota el proceso que has seguido y organízalo para explicarlo después a los compañeros.

a) x

u

b) x

u

c) x

u

d) x

u

e) x

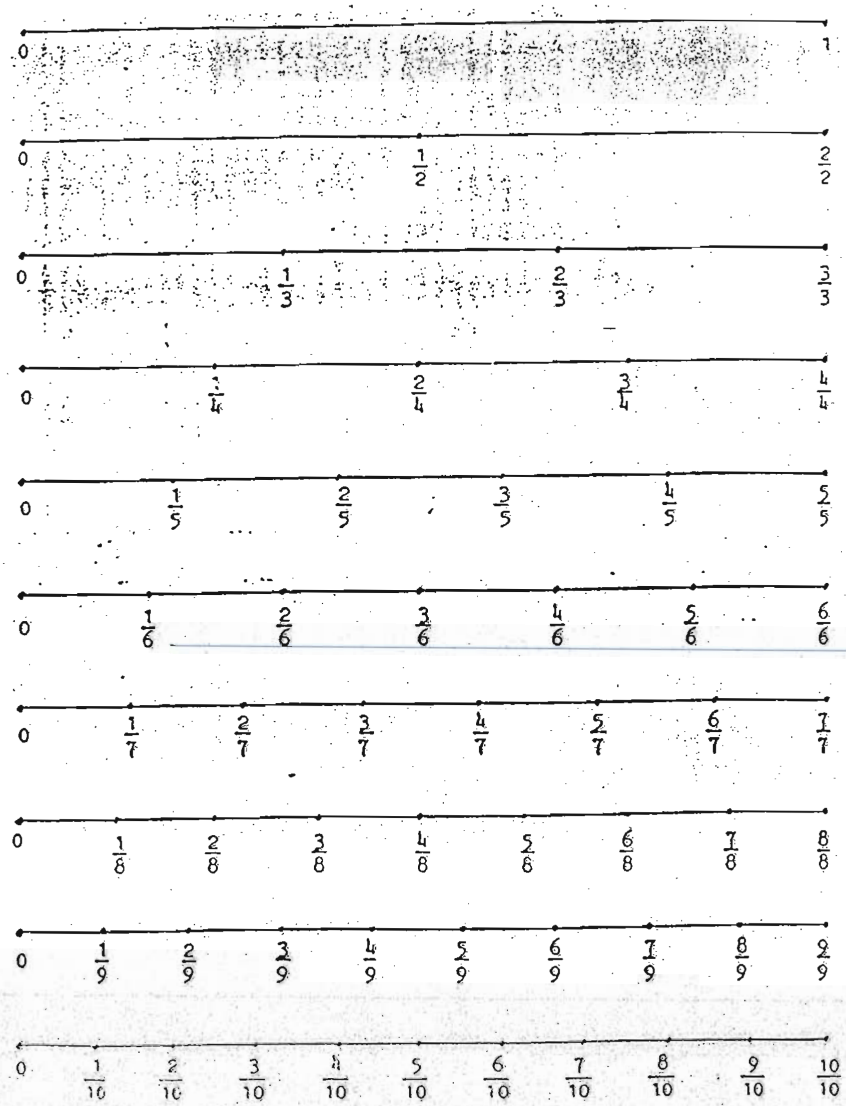
u

Explicación del procedimiento que has utilizado para medir: (Si has cambiado de procedimiento en algún o algunos apartados, explícalo también).

2/ ¿Crees que dadas dos longitudes cualesquiera hay siempre un número que expresa una en función de la otra? En caso afirmativo di de qué tipo será ese número. En cualquier caso, justifica tu respuesta imaginando que tienes que convencer a un compañero de tu opinión.

Ficha 13

-MATERIAL COMPLEMENTARIO: Diagrama Freudenthal.



1/ Con una regla, o con el borde de un folio, marca las divisiones que coincidan en la misma vertical con un color.

¿Qué relación numérica te sugiere? ¿Podrías expresarla de forma general?

2/ Toma otro color y marca las verticales correspondientes a

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6...

-¿Qué comentarios se te ocurren?

-Y si marcas las últimas verticales de cada barra, ¿qué números representan las marcas?, ¿qué relación hay entre ellos?

-Marca las verticales correspondientes a las fracciones 2/n, n=1,2,3,4,5..., y comenta el resultado.

3/ Representa en la recta numérica:

1/2 -2/4 4/8 7/5 -1/2 -8/16 21/15

4/ Contesta a las siguientes preguntas, ayudándote del material complementario:

a) ¿Qué le ocurre a una fracción si

-dejamos fijo el numerador y aumentamos el denominador?,

-dejamos fijo el numerador y disminuimos el denominador?,

-dejamos fijo el denominador y aumentamos el numerador?,

-dejamos fijo el denominador y disminuimos el numerador?

b) -¿Hay algún número racional entre 0 y 1/2?

-¿Y entre 2/7 y 3/7?

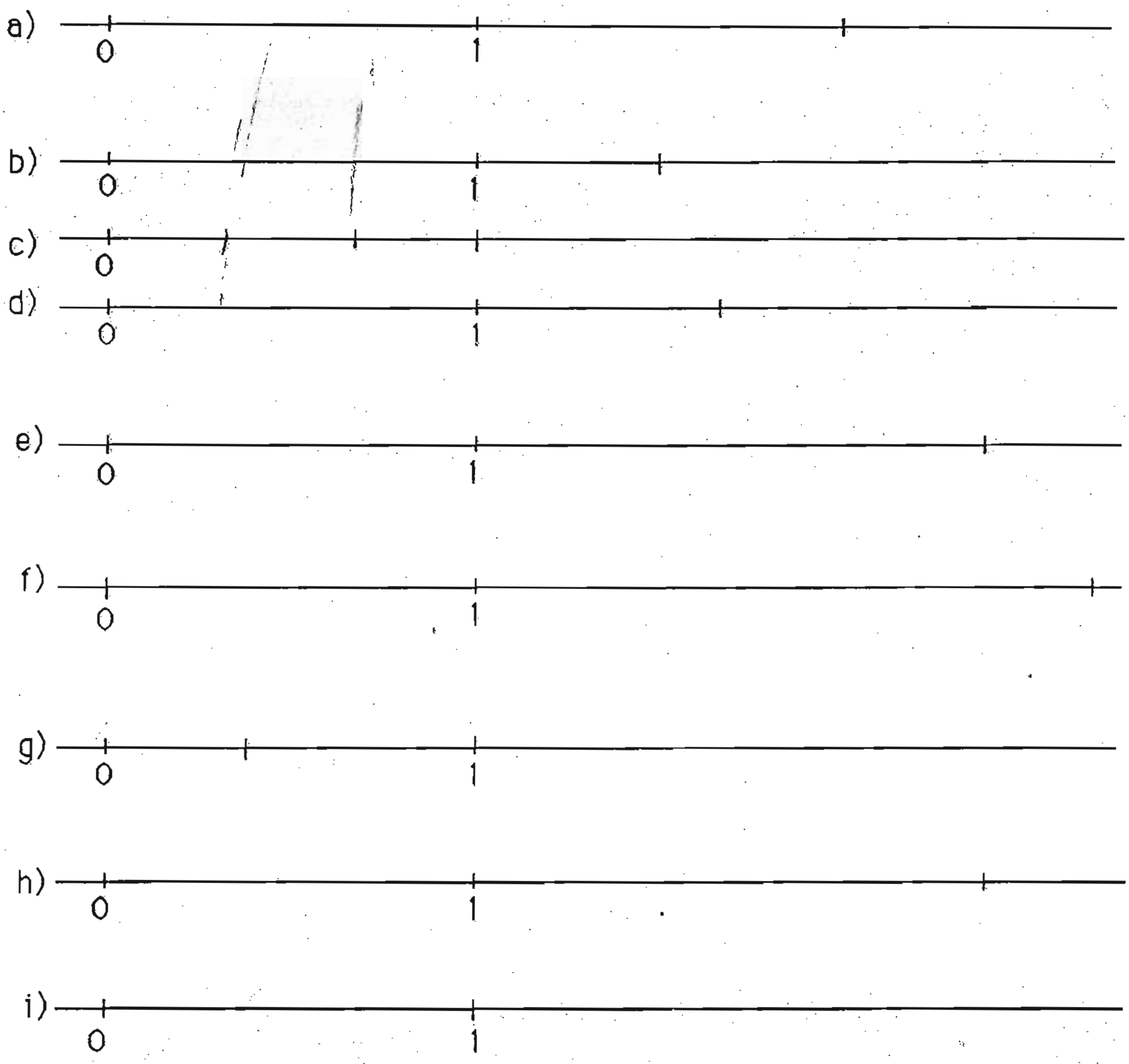
-¿Y entre dos números racionales cualesquiera? Si hay, da algún procedimiento para encontrarlo y di cuántos habrá.

-Escribe el número racional siguiente a 1/3.

Ficha 14

Nombre y número:

1/¿Qué número corresponde (exactamente) al punto marcado en la recta numérica en cada apartado? Anota en cada caso el <u>proceso</u> que has seguido para averiguarlo y organízalo para explicarlo después a los compañeros.



Explicación del procedimiento que has utilizado para asignar un número al punto de la recta señalado en cada apartado:(Si has cambiado de procedimiento en algún o algunos apartados, explícalo también).

2/ Dado un punto cualquiera de la recta, ¿crees que siempre hay un número que le corresponda? ¿De qué tipo puede ser este número? Justifica tu respuesta imaginando que tienes que convencer a un compañero de tu opinión.

Ficha 15

1/ De cada uno de los siguientes números, di <u>todos</u> los conjuntos numéricos estudiados (N, Z, Q) a los que pertenece:

-7; 0; 1,5; -1/2; 2,705; -1; -0,2; 5000001; 6/2; 3/4; -8/4

2/ De los Números Racionales, escribe a continuación lo que sepas, organizando tus conocimientos de acuerdo con el siguiente guión:

- ORIGEN - DEFINICION INTUITIVA - NOMBRE
- NOTACION- REPRESENTACIONES
- ORDEN
- OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones
- Razones para la AMPLIACION de los Números enteros a los Racionales.
- CONJUNTOS NUMERICOS que incluye el conjunto de los Números Racionales.

Nota.- En los decimales de 1/ falta el periodo.

Ficha 16

1/ En una hoja de papel milimetrado dibujar dos ejes de coordenadas tan grandes como sea posible. Dividir cada eje en trece partes iguales y numerar.

2/ Dibujar todos los rectángulos de área 12.

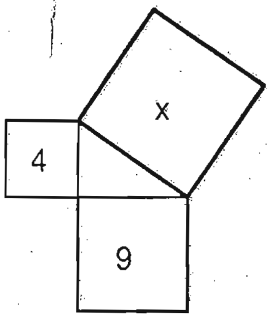
3/ Dado un lado de longitud 2,5 , ¿podríamos elegir el otro lado del rectángulo para que tuviera área 12? ¿Qué tendría que medir este lado?
Idem para el lado 3,7.

4/ Entre todos los rectángulos de área 12, ¿existe un cuadrado de área 12?
¿Qué mediría su lado?

-NOTA.- La actividad está basada en la situación didáctica presentada en el artículo "APPROCHE DES NOMBRES REELS EN SITUATION D' APPRENTISSAGE SCOLAIRE" (Douady, 1980).

Ficha 17

1/



a) ¿Qué mide el área x? ¿Cómo se llama la propiedad que has utilizado para averiguarlo?

b) Utilizando la propiedad anterior, construye un cuadrado de área 2, otro de área 5 y otro de área 10, en un papel cuadriculado.

c) A partir del resultado anterior, construye un cuadrado de área 3 y otro de área 6.

d) ¿Qué miden los lados de los cuadrados anteriores?

2/ a) A partir del ejercicio anterior, construye un cuadrado de área 12. ¿Cuál es la medida de su lado?

b_1) ¿Cuál es la expresión decimal de $\sqrt{12}$? ¿De qué tipo es esa expresión decimal?

b_2) ¿Es $\sqrt{12}$ un número? ¿Por qué?

b_3) ¿Es $\sqrt{12}$ un número racional? ¿Por qué?

3/ a) Marca en la recta numérica los puntos correspondientes a los números:

-1 0 6/7 3 $\sqrt{2}$ $1+\sqrt{3}$ -0,3333.... $\sqrt{5}$

b) ¿Cuáles de estos números no son racionales? ¿Por qué?

c) ¿Conoces otros números que no sean racionales, además de ellos? ¿Puedes dibujarlos?

4/ Resuelve las ecuaciones:

$x^2-12=0$ $x^2-3=-1$ $x^2=5$

a) ¿Son números sus soluciones? ¿Por qué?

b) ¿Son números racionales? ¿Por qué?

*A partir de ahora, a los números que no sean Racionales les llamaremos IRRACIONALES. Señala alguna o algunas características que sirvan para distinguirlos.

Ficha 18

1/ Clasifica todos los distintos tipos de números que conozcas con arreglo a este esquema:

TIPO DE NUMERO	REPRESENTACION DECIMAL	REPRESENTACION EN LA RECTA Y EJEMPLO

2/ ¿Cuáles de los números anteriores son Racionales? ¿cómo se llaman los demás? Señala todas las carecterísticas que sirven para diferenciarlos (en la escritura numérica y en la representación geométrica).

3/¿Qué aportan los Irracionales a los Racionales?

4/ Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los Números Reales. ¿Cuáles son las características de los Números Reales? ¿Qué conjuntos numéricos incluyen?

5/ Di todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen los siguientes números:

$-0{,}255$ $\sqrt{7}$ $1-\sqrt{2}$ $-1/2$ $3{,}14$ 5 π

$-0{,}1234567891011...$ $0{,}5$ $\sqrt{81}$ $1{,}618$ phi

Ficha 19

1/ De los Números Reales, escribe a continuación lo que sepas, organizando tus conocimientos de acuerdo con el siguiente guión:

- ORIGEN - DEFINICION INTUITIVA - NOMBRE
- NOTACION- REPRESENTACIONES
- relación de ORDEN (propiedades)
- OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones.
- "TAMAÑO" del conjunto de los Números Reales
- principales DIFERENCIAS con los Números Racionales. VENTAJAS que aporta el conjunto de los Reales al de los Racionales.

Actividad sobre las Raíces Cuadradas

a) Plantear la siguiente cuestión:

"Una civilización de otro planeta aterriza aquí. Los extraterrestres conocen nuestro lenguaje, y están interesados en saber qué significa $\sqrt{a}$. ¿Cómo se lo explicaríais?"

b) Plantear a cada grupo la siguiente situación:

-Un miembro del grupo será el Calculador. Tendrá una calculadora y podrá con ella sumar, restar, multiplicar y dividir. Obedecerá órdenes de otros dos miembros del grupo, a condición de que sean muy concretas (es decir, de que se puedan realizar en un sólo paso).

-Dos miembros del grupo serán los encargados de calcular, dando órdenes al robot para que ejecute las operaciones concretas que quieran, de calcular $\sqrt{7}$ y $\sqrt{256}$.

-Un miembro del grupo será el seretario, y anotará en una hoja ordenadamente, todas las órdenes de sus compañeros y las respuestas del robot.

c) Plantear la siguiente cuestión:

"En un ejercicio de cálculo, Luis ha calculado $\sqrt{2}$ con su calculadora y ha obtenido como resultado 1,4142136. Lola, utilizando la definición de raiz cuadrada que le han dado en clase de Matemátias, ha multiplicado ese número por sí mismo y le dice a Luis que el número que ha obtenido no es 2. ¿Qué pensáis vosotros de este problema?"

Nota.- Las situaciones 1, 2 y 3 de la experiencia han sido extraídas del artículo "Racines carees: conceptions et mises en situations d´éleves de quatrieme et Troisieme". Petit X, 20, 5-33.

Actividad Complementaria:

Demostración de que √2 no puede escribirse en forma de fracción.

Ultima cifra de un número: a	Ultima cifra correspondiente de a^2	Ultima cifra posible de un número: b	Ultima cifra correspondiente de $2b^2$	COMENTARIOS

Actividad sobre el Tangram

MATERIAL NECESARIO: Un tangram chino por grupo. (No importa que no sea muy perfecto; al contrario, puede servir para diferenciar el modelo físico del ideal).

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACION:

-Repartir el tangram a los grupos y pedir que formen con él un cuadrado.

-Pedirles que midan las longitudes de los lados de cada pieza de forma exacta. Para ello deben elegir la unidad de medida que les parezca más adecuada.

-Formular finalmente la pregunta:"¿podrías elegir una unidad de medida en la que las longitudes pudieran expresarse todas de forma exacta con números racionales?"

CUESTIONES DE INVESTIGACION:

Cuestión de Investigación 1 (CI1):

Nombre y Número:

1/

1) Conoces decimales infinitos. Los decimales infinitos pueden ser de diferente tipo. Escribe ejemplos de cada uno de los tipos de decimales infinitos que conoces, y de algún otro tipo que se te pueda ocurrir. Explica el motivo/causa por el que aparece (Por ejemplo, los decimales periódicos aparecen al expresar algunas fracciones en forma decimal).

EJEMPLO	MOTIVO POR EL QUE APARECE	TIPO DE DECIMAL INFINITO

2) Revisa los decimales anteriores; ¿todas las expresiones decimales que has indicado son números?. Argumenta razonadamente la respuesta, imaginando que tienes que explicarlo a un compañero que no sabe.

TIPO DE DECIMAL INFINITO	¿ES UN NUMERO?	¿POR QUE?

Cuestión de Investigación 2.

Nombre y número:

1/ a) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a 0,6666...?

¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

b) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a $\sqrt{3}=1{,}7320508...$?

¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

c) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a $\pi=3{,}14159...$?

¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

d) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a 0,1234567891011...?

¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

e) ¿Existe un punto en la recta correpondiente a 2,149875936508....?

¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

2/

a) ¿Qué DIFERENCIAS encuentras en la escritura numérica y el origen de las expresiones decimales anteriores?

b) ¿Qué DIFERENCIAS encuentras en la representación en la recta de las expresiones decimales anteriores?

Cuestión de Investigación 3 (CI3)

Nombre y número:

a) Dado un punto cualquiera de la recta
¿siempre le corresponde un numero? En caso de que así sea, ¿de qué tipo? Di todos los tipos de número que pueden corresponderle y qué representación decimal tiene cada uno de ellos.

b) ¿Qué números llenan por completo la recta? (Especificar todos los tipos).

Cuestión de Investigación 1 bis (CI1 bis)

Nombre y número:

1/ a) ¿Corresponde la expresión 9999... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

b) ¿Corresponde la expresión 0,9999... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

c) ¿Corresponde la expresión $\sqrt{2}=1,4142135...$ a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

d) ¿Corresponde la expresión Número de Oro$=(1+\sqrt{5})/2=1,618034...$ a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

e) ¿Corresponde la expresión $\pi=3,14159...$ a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

f) ¿Corresponde la expresión1,0100100010000100... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

2/ a)¿Qué tipos de decimales infinitos conoces? Da ejemplos de cada uno y di de dónde surgen.

TIPO DE DECIMAL INFINITO	EJEMPLO	DE DONDE SURGE

b)¿Cualquier decimal infinito corresponde a un número? En el caso de que algunos lo sean y otros no, decir cuales sí y cuales no, y en todos los casos justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

ANEXO III.4
Exámenes

EXAMEN 1

I.B. Albaycín. Matemáticas, 1ºE
Primera Evaluación, 1

Nombre y número:

1. a) 32/5 (-4/3) - 0,2 (3-(-1/2))=
   b) 3-1/4 + 1-(-3/7) 2 + 3 5= (2 ptos.)

2. a) Ordena de menor a mayor:
   3,32; 3,302; 3,3012; 3,3018; 3,3025; -3,32; -3,302 (1,5 ptos.)

   b) ¿Cuántos números enteros hay entre 0,174 y 0,175? Si hay uno o más, da ejemplos (0,5 ptos,)
   c) ¿Cuántos números racionales hay entre 0,174 y 0,175? Si hay uno o más, da ejemplos. (0,5 ptos.)
   d) ¿Cuántos números racionales hay entre 2/5 y 3/5? Si hay uno o más, da ejemplos. (0,5 ptos.)

3. Los 2/5 de una herencia se elevan a 2.375.000 pts. Calcula la herencia. (1 pto.)

4. Representa en la recta numérica:
   -1; 5/4; 0,4; -0,75; 10/8; 1,25 (2 ptos.)

5. a) ¿Qué son los Números Racionales? (1 pto.)
   b) Escribe todas las notaciones y representaciones que conozcas del número racional 3/4. (1 pto.)

Voluntario: (Siempre sube nota. Más o menos, dependiendo de lo bien argumentada que esté la respuesta).

-Un genio ha colocado todos los números racionales en los puntos correspondientes de la recta numérica. ¿Crees que esos puntos llenarían toda la recta, o que, por el contrario, habría puntos sin marcar?
Argumenta tu respuesta lo mejor que puedas.

Nota.- Los números 3,3012 y 3,3018 del ejercicio 2, tienen la última cifra periódica. Igualmente 0,4 en el ejercicio 4.

EXAMEN 2

I.B. Albaycín. Matemáticas, 1ºE
Segunda Evaluación.

Nombre y número:

1. a) Escribe lo que sepas acerca de las relaciones entre los Números Racionales, su escritura habitual en forma de fracciones y su escritura decimal.
b) Escribe lo que sepas acerca de las relaciones entre los Números Irracionales, su escritura habitual y su escritura decimal.
(2 ptos.)

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números reales:

$-\sqrt{5}$ 5/2 11/3 -5/2 2,237 11/5 $1+\sqrt{3}$ 2,2333...

(2 ptos.)

3. ¿Cuántos números reales hay entre $\sqrt{2}$ y 1,5? En caso de que los haya, da ejemplos.

(1 pto.)

4. Representa en la recta numérica:

√2 0,75 0,333.... -√2 -0,333.... 11/4 2,75 3/4 3√2

(2 ptos.)

5. Rellena la tabla contestando SI o NO en cada cuadro, <u>sin dejar ninguno en blanco.</u>

	Natural	Entero	Racional	Irracional	Real
-2,062					
35.521					
3/5					
π					
-1/2					
0,63					
-√7					
0,123456...					
3,14					
√81					

(2 ptos.)

6. Un alumno dice que a todo punto de la recta le corresponde una fracción, por el siguiente razonamiento:

.Cuando le señalan un punto en la recta numérica, él toma la longitud desde ese punto hasta el cero y la llama L. Considera también la longitud unidad (del cero al uno).

.Divide ambas longitudes hasta encontrar una longitud (aunque sea muy pequeña) que encaje en las dos longitudes exactamente.

.Cuenta el número de veces que la longitud común encaja en la unidad y en la longitud L. Y así obtiene el numerador y el denominador de la fracción correspondiente al punto.

-¿Crees tú que a todo punto de la recta numérica le corresponde una fracción?

-¿Es correcto el razonamiento del alumno? Si no estás de acuerdo con él, explícale porqué no estás de acuerdo con su razonamiento.

(1 pto.)

Voluntario:

-Para repasar el tema de Números Reales has tenido que señalar y explicar varias relaciones entre diversos elementos.

Señala alguna que hayas comprendido especialmente bien, o que hayas descubierto tú al repasar, o incluso alguna duda que te haya surgido y te parezca interesante...; es decir, si estás satisfecho de haber profundizado alguna relación, explícala.

-¿QUIERO QUE ME CUENTE EL REPASO?

NO 1/2 1/3

ANEXO III.5

Pretest 93-94

-PRELIMINARES:

.Aspectos concretos que nos interesa explorar en relación a los Focos de Investigación 1 y 2:

FI1:

1. ¿Tienen los alumnos noción de que algunos racionales tienen representación decimal infinita y de cómo se nota ésta? (o se han quedado a un nivel de aproximación con más o menos cifras del resultado de una división?)
2. ¿Distinguen los alumnos entre infinito actual e infinito potencial en las cifras decimales? ¿Conocen números con infinitas cifras decimales?
3. Correspondencia fracciones-decimales.
4. Manejo de valor posicional y orden en el sistema de notación decimal.

FI2:

5. Correspondencia números racionales-puntos de la recta, a partir de sus distintas notaciones numéricas: fraccionaria (se tendrán en cuenta los casos de las fracciones propias, impropias y equivalentes) y decimal (se tendrán en cuenta las notaciones finitas y periódicas)

FI1 y FI2:

6. Equivalencia de fracciones (representación decimal y representación en la recta). Distinción entre número racional y fracción.
7. Representación en la recta de la notación decimal.

.Selección previa de ítems relacionados con los aspectos anteriormente expuestos:

1.

-¿Cuál o cuáles de las expresiones decimales siguientes correponde(n) a 1/3?

0,3 0,33 0,3333 0,333... 0,3 (periodo)

(Nuestro)

-Calcula la expresión decimal del número 2/3. Saca hasta cuatro decimales. ¿Es exacta esa expresión decimal? ¿Es ese número racional un número racional exacto? Explica por qué. (Matemáticas 8º Anaya).

2.

(¿Cómo se forma un decimal infinito?

o

Un profesor les pidió a sus estudiantes que le dieran un ejemplo de un decimal infinito.

E1.- Buscaré dos números enteros tales que cuando los divida no obtenga un decimal finito; por ejemplo 1 y 3.

E2.- Yo escribiré una secuencia de dígitos que se me ocurra arbitrariamente, por ejemplo: 1,2345678...

E1.- Tal número no existe porque lo que tú escribes no es el resultado de una división de números enteros.

E2.- ¿Quién te dijo que para que un número exista tenga que sero?

¿Quién tiene razón? Explica tu respuesta.

(PME 9, July 85).)

-¿Cuál es el número con más cifras que conoces?

¿Conoces algún número con infinitas cifras?

¿De dónde surgen esos números?

(Nuestro)

-¿Cómo distingues un número racional de otro irracional?

(Prueba D. Gregoro Palomino).

3.

-Un profesor preguntó a sus estudiantes cuál es el quincuagésimo dígito en el desarrollo decimal de 1/7. Un estudiante dijo que es demasiado trabajo hacer cincuenta pasos de una

división. Otro estudiante declaró que es posibe encontrar la respuesta en menos de cincuenta pasos. ¿Quién tiene razón? Explica tu respuesta.
(PME 9, July 85).

-¿Es cierto que toda fracción se puede expresar en forma decimal?

a) sí, todas b) sólo algunas c) ninguna d) No sé

Justifica tu respuesta.
(Nuestro)

-¿Es cierto que a todo número decimal le corresponde una fracción?

a) sí, a todos b) sólo a algunos c) a ninguno d) No sé

Justifica tu respuesta.
(Nuestro)

4.(Preguntas que tengan que ver con las siguientes reglas en cuanto a orden de decimales:
R1.- "El decimal que tenga el mayor número a la derecha de la coma decimal es mayor".
R2.- "El número más corto es mayor". "3,2 es mayor que 3,47 porque el número más corto tiene décimas y el más largo centésimas, y las décimas son mayores que las centésimas".
R3.- los niños que emplean la regla 1, la cambiarán y dirán que el cero en las décimas hace al número siempre más pequeño.)
(PME 9. P. Nesher):

-Ordena de menor a mayor:

0,2 0,13 0,013 0,0131 0,130 0,31

(Nuestro)

-.¿Cuál es el menor de los siguientes números:

1,02 1,000048 1,013 1,00020001 1,1?

.¿Cuál es el mayor de los siguientes números:

0,1 0,20 0,034 0,04 0,008?

.¿Cuáles de los siguientes números están entre 0 y 0,01:

0,05 0,5 0,16 0,007 0,011?

.¿Cuál de los siguientes números es más próximo a 1,003:

1,01 1,0 1,3 0,003?

.¿Cuál de los siguientes números es más próximo a 1,13:

1,013 1,31 1,10 1,103 1,113?

(Educational Studies in Mathematics,8)

-Calcula el resultado de la siguiente operación:

0,3 + 0,005 + 0,23 + 0,79

(Nuestro)

-¿Cuántos números diferentes hay entre 0,41 y 0,42?

(K. Hart. "Children´s understanding of Mathematics: 11-16")

5.

-Representa en la recta numérica:

3/4 -3/2 7/4 -1/3 5/6

(Nuestro)

-Representa en la recta numérica:

0,25 1/4 -3/2 2/8 -6/4 -12/8

(Nuestro)

-Representa en la recta numérica:

0,25 0,250 -0,75 0,184 -1,36 5,6792 0,3 (periodo)

Nota.- Si en algunos casos resulta muy engorroso dibujarlo, o es prácticamente imposible, explica cómo lo harías.

(Nuestro)

-Representa en la recta numérica los siguientes números:

0,25 1/4 -3/2 2/8 -6/4 0,3333... -0,75 2,164 0,250 -1,36 -12/6 0,3

Nota.- Si en algunos casos te resulta engorroso dibujarlo o es prácticaamente imposible, explica cómo lo harías.

Nota.- Se quiere evaluar la representación en la recta de tres grupos de números:

a) 3/2 6/4 -12/6

b) -0,75 0,3333... 0,164 0,3

c) 0,25 1/4 0,250

(Nuestro)

6.

-De las parejas de fracciones siguientes tacha las que sean equivalentes:

3/4 y 6/8 ; 2/3 y 5/2 ; 1/7 y 9/63 ; 3/5 y 6/10 ; 4/1 y 12/3 ; /2 y 1/9

(Matemáticas 8º Anaya)

-Comprueba que todos los siguientes pares de fraciones son equivalentes:

3/2 y 6/4 ; 1/2 y 5/10 ; -5/2 y 15/6 ; 7/-1 y -14/2

(Matemáticas 8º Anaya)

-Escribe cinco fracciones equivalentes a 2/3

¿Qué ocurre con su representación decimal?

(Nuestro)

-De las parejas de fracciones siguientes tacha las que sean equivalentes:

3/4 y 6/8 ; 2/3 y 5/2 ; 1/7 y 9/63 ; 3/5 y 6/10 ; 4/1 y 12/3 ; /2 y 1/9

Comprueba que lo son.

(Nuestro)

-Indica cuáles de las siguientes parejas de fracciones son equivalentes:

2/3 y 3/4   2/5 y 5/2   8/6 y 12/9   4/1 y 12/3   7/3 y 9/5

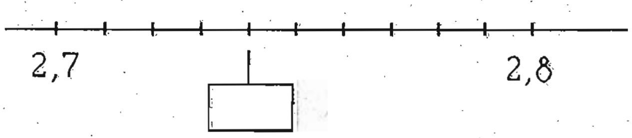
Justifica en cada caso que lo son.

(Nuestro)

-¿Que diferencias hay entre número racional y fracción?

(Prueba D. Gregorio Palomino)

7.



¿Qué número es éste?

(K. Hart. "Children´s understanding of Mathematics: 11-16")).

.Items elegidos definitivamente por apartados:

1.

1. Calcula la expresión decimal de 1/6.

2.

2.¿Cuál es el número decimal con más cifras que conoces? ¿Conoces algún número con infinitas cifras? ¿Por qué motivo aparece?

7.Señala algún criterio para distinguir un número racional de uno irracional.

3.

3. ¿Es cierto que todo decimal se puede expresar en forma de fracción? ¿Sólo agunos? ¿Ninguno? Justifica la respuesta.

4.

8. Ordena de menor a mayor:

0,2 0,13 0,013 0,131 0,130 0,3

9. Calcula el resultado de la siguiente operación:

0,3 + 0,005 + 0,23 + 0,79

10. ¿Cuántos números diferentes hay entre 0,41 y 0,42?

5.

4. Representa en la recta numérica los siguientes números:

0,25 1/4 -3/2 2/8 -6/4 0,3333... -0,75 2,164 0,250 -1,36 -12/6 0,3

Nota.- Si en algunos casos te resulta engorroso dibujarlo o es prácticaamente imposible, explica cómo lo harías.

6.

5. Indica cuáles de las siguientes parejas de fracciones son equivalentes:

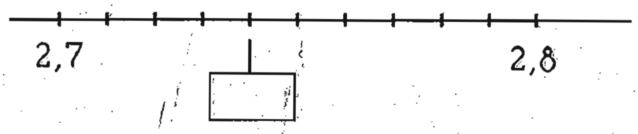
2/3 y 3/4 2/5 y 5/2 8/6 y 12/9 4/1 y 12/3 7/3 y 9/5

Justifica en cada caso que lo son.

6. ¿Qué diferencias hay entre número racional y fracción?

7.

11.



¿Qué número es éste?

4. Representa en la recta numérica los siguientes números:

0,25 1/4 -3/2 2/8 -6/4 0,3333... -0,75 2,164

0,250 -1,36 -12/6 0,3

Nota.- Si en algunos casos te resulta engorroso dibujarlo o es prácticaamente imposible, explica cómo lo harías.

-PRUEBA PASADA A LOS ALUMNOS:

Nombre:

1. Calcula la expresión decimal del número 1/6.

2. ¿Cuál es el número decimal con más cifras que conoces? ¿Conoces algún número con infinitas cifras? ¿Por qué motivo aparece?

3. ¿Es cierto que todo decimal se puede expresar en forma de fracción? ¿Sólo aLgunos? ¿Ninguno? Justifica la respuesta.

4. Representa en la recta numérica los siguientes números:

0,25 1/4 -3/2 2/8 -6/4 0,3333... -0,75 2,164

0,250 -1,36 -12/6 0,3

Nota.- Si en algunos casos te resulta engorroso dibujarlo o es prácticamente imposible, explica cómo lo harías.

5. Indica cuáles de las siguientes parejas de fracciones son equivalentes:

2/3 y 3/4 2/5 y 5/2 8/6 y 12/9 4/1 y 12/3 7/3 y 9/5

Justifica en cada caso que lo son.

6. ¿Qué diferencias hay entre número racional y fracción?

7. Señala algún criterio para distinguir un número racional de uno irracional .

8. Ordena de menor a mayor:

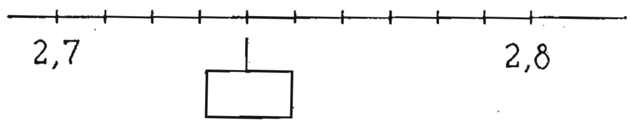
0,2 0,13 0,013 0,131 0,130 0,31

9. Calcula el resultado de la siguiente operación:

0,3 + 0,005 + 0,23 + 0,79

10. ¿Cuántos números diferentes hay entre 0,41 y 0,42?

11.



¿Qué número es éste?

ANEXOS DEL CAPITULO IV

ANEXO IV.1
Resultados generales de las Cuestiones de Investigación del Capítulo IV

Nota: Las siguientes **Observaciones** son **Generales** para todas las tablas que aparecen en lo sucesivo:

A. Ausente,
* Observación interesante o curiosa
E: Error
Cn: Copia del alumno número n
( ): Clasificación dudosa

PRETEST

Tabla 1: Resultados generales del Pretest.

A	I1	I2a	I2b	I2c	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11
1	2	3	2	3	3d	(4)	2	4	6	2	1	6	1
2	2	6	6	6	5	6	5	(4)	6	5	1	5	3
3	4	4	4	4	4	6	3	2	3	4	1	1	6
4	4	6	6	6	4	6	5	6	3	6	6	6	6
5	5	(5)	6	6	6	4	2	6	6	5	1	6	3
6	1	6	6	6	6	6	2	(4)	3	3	1	4	1
7	(5)	6	6	6	(4)	(6)	5	6	6	4	1	2	1
8	6	6	6	6	6	4	5	6	6	4	(3)	4	1
9	6	2	1	6	4	(6)	2	6	6	5	1	2	3
10	1	5	5	5	3c	6	3	2	6	2	1	1	1
11	4	(5)	1	4	4	4	3	1	3	1	1	1	1
12	6	6	6	6	4	5	5	5	6	4	2	6	6
13	6	6	6	6	4	6	5	6	6	3	1	6	6
14	3	(3)	1	5	4	5*	5	(3)	(2)	4	1	6	6
15	1	3	1	3	2	4	2	1	3	3	1	6	1
16	6	(3)	(1)	6	4	6	5	2	6	5	2	2	6
17	4	6	6	6	3c	(3a)	1	6	6	(5)	1	2	1
18	4	6	6	6	6	6	2	6	6	4	1	2	1
19	4	3	1	5	3b	4	2	(2)	6	5	1	1	1
20	2	3	1	4	3d	(3a c)*	1	5	3	2	1	1	1
21	1*	5	5	4	5	4	5	(4)	6	4	1	2	6
22	1	3	1	3	3c)	4	2	2	6	5	1	4	1
23	1	6	6	6	(2)	2	5	6	6	5	1	4	1
24	1	3	1	6	4	4	2	6	6	1	1	1	1
25	3	3	1	4	6	6	3	6	6	4*	1	5	1
26	4	5	5	6	4	(6)	2	6	6	2	1	2	1
27	3	3	1	6	2	4	2	2	6	5	1	2	1
28	6	5	5	6	3a	5*	5	5	6	5	1	4	1
29	4	3	3	5	6	(2)	5	(1)	6	1	1	1	1
30	(5)	5	5	6	(4)	6	3	(4)	6	4	3	2	3
31	(6)	2	1	5	4	3c	3	(4)	6	2	1	6	1
32	1	5	5	6	4	4	5	2	2	5	1	2	1

-Comparación entre los resultados del Pretest entre nuestro grupo de alumnos y el grupo contraste:

Tabla 2: Resultados comparados entre nuestro grupo de alumnos y el grupo contraste en el Pretest.

C	A	I1	I2a	I2b	I2c	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11
1ºE	1	2	3	2	3	3d	(4)	2	4	6	2	1	6	1
1ºE	2	2	6	6	6	5	6	5	(4)	6	5	1	5	3
1ºE	3	4	4	4	4	4	6	3	2	3	4	1	1	6
1ºE	4	4	6	6	6	4	6	5	6	3	6	6	6	6
1ºE	5	5	(5)	6	6	6	4	2	6	6	5	1	6	3
1ºE	6	1	6	6	6	6	6	2	(4)	3	3	1	4	1
1ºE	7	(5)	6	6	6	(4)	(6)	5	6	6	4	1	2	1
1ºE	8	6	6	6	6	6	4	5	6	6	4	(3)	4	1
1ºE	9	6	2	1	6	4	(6)	2	6	6	5	1	2	3
1ºE	10	1	5	5	5	3c	6	3	2	6	2	1	1	1
1ºE	11	4	(5)	1	4	4	4	3	1	3	1	1	1	1
1ºE	12	6	6	6	6	4	5	5	5	6	4	2	6	6
1ºE	13	6	6	6	6	4	6	5	6	6	3	1	6	6
1ºE	14	3	(3)	1	5	4	5*	5	(3)	(2)	4	1	6	6
1ºE	15	1	3	1	3	2	4	2	1	3	3	1	6	1
1ºE	16	6	(3)	(1)	6	4	6	5	2	6	5	2	2	6
1ºE	17	4	6	6	6	3c	(3a)	1	6	6	(5)	1	2	1
1ºE	18	4	6	6	6	6	6	2	6	6	4	1	2	1
1ºE	19	4	3	1	5	3b	4	2	(2)	6	5	1	1	1
1ºE	20	2	3	1	4	3d	(3a c)*	1	5	3	2	1	1	1
1ºE	21	1*	5	5	4	5	4	5	(4)	6	4	1	2	6
1ºE	22	1	3	1	3	3c)	4	2	2	6	5	1	4	1
1ºE	23	1	6	6	6	(2)	2	5	6	6	5	1	4	1
1ºE	24	1	3	1	6	4	4	2	6	6	1	1	1	1
1ºE	25	3	3	1	4	6	6	3	6	6	4*	1	5	1
1ºE	26	4	5	5	6	4	(6)	2	6	6	2	1	2	1
1ºE	27	3	3	1	6	2	4	2	2	6	5	1	2	1
1ºE	28	6	5	5	6	3a	5*	5	5	6	5	1	4	1
1ºE	29	4	3	3	5	6	(2)	5	(1)	6	1	1	1	1
1ºE	30	(5)	5	5	6	(4)	6	3	(4)	6	4	3	2	3
1ºE	31	(6)	2	1	5	4	3c	3	(4)	6	2	1	6	1
1ºE	32	1	5	5	6	4	4	5	2	2	5	1	2	1
1ºG	1	1	6	6	6	3a	3a	3	2	6	5	1	6	1
1ºG	2	4	6	6	6	4	5	2	6	6	4	1	4	2
1ºG	3	6	4	4	4	6	(6)	2	6	6	3	3	6	6
1ºG	4	5	3	2	5	(4)	2	3	6	6	1	1	2	1
1ºG	5	1	3	2	4	2	2	5	2	6	1	1	3	1
1ºG	6	4	5	1	5	3d	(4)	2	(3)	6	1	1	2	1
1ºG	7	4	5	2	5	1	5	2	4	3	3	1	5	3
1ºG	8	4	3	1	5	4	6	5	6	6	3	1	3	6
1ºG	9	1	3	1	2	2	6	5	4	2	4	2	2	1
1ºG	10	1	3	2	4	3a	5	5	6	6	3	1	2	3
1ºG	11	3	2	(2)	4	4	(2)	5	4	6	5	1	4	1
1ºG	12	5	6	6	6	4	6	2	6	3	3	1	4	3
1ºG	13	1	3	2	2	2	(1)	2	1	3	1	1	1	1
1ºG	14	2	3	1	2	4	6	5	2	(6)	5	1	1	1
1ºG	15	1	6	5	6	4	3a	5	4	6	4	1	6	1
1ºG	16	1	3	2	5	(1)	4	3	1	6	1	1	1	1
1ºG	17	4	3	3	4	5	(6)	(1)	6	6	3	1	2	3

1ºG	18	4	6	6	6	5	6	5	6	6	4	1	2	3
1ºG	19	1	3	1	5	3d	6	2	6	6	(6)	1	6	6
1ºG	20	1	3	1	5	3d	6	2	1	6	4	1	2	6
1ºG	21	4	5	1	2	3d	3a	2	1	6	1	3	1	1
1ºG	22	5	6	6	6	6	5	2	6	6	(5)	1	6	3
1ºG	23	4	3	2	4	5	5	5	6	6	3*	2	2	1
1ºG	24	4	6	6	6	4	5	4	(6)	6	4	2	2	3
1ºG	25	1	5/	5	4	4	5	3	2	6	(1)	1	1	1
1ºG	26	1	6	5	5	3a)	5	3	6	6	(5)	1	2	1
1ºG	27	3	5	5	5	4	5	5	(5)	3	1	1	2	1
1ºG	28	2	5	2	5	2	6	3	2	3	3	1	4	3
1ºG	29	1	3	1	5	5	3a	1	(6)	6	1	2	1	1
1ºG	30	1	5	2	2	4	5	5	2	3	5	1	1	3
1ºG	31	4	6	6	6	4	5	2	5	6	4	1	2	3
1ºG	32	(1)	5	5	6	3d	5	1	6	6	1	1	2	1
1ºG	33	4	3	2	(2)	5	5	2	4	3	(5)	3	4	6
1ºG	34	4	6	6	6	3a	5	2	6	6	5	1	2	1
1ºG	35	1	5	4	1	(4)	(3a)	2	6	6	2	1	2	3
1ºG	36	1	5,2	2	3	(1)	5	2	6	6	5	6	1	1

-Resultados:

Presentamos a continuación la comparación de resultados de ambos grupos ítem a ítem. Para cada uno de estos ítems, daremos la frecuencia para cada valor de la escala en los dos cursos.

Item 1: Calcula la expresión decimal del número 1/6.

Tabla 3.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1ºE	7+1*	3	3	8	1+(2)	6+(1)
1ºG	15+(1)	2	2	12	3	1

1/4 de los alumnos de 1º E distingue entre notación decimal finita e infinita recurrente como resultado de la operación de dividir, mientras que en 1ºG la proporción de alumnos que hacen esta distinción se aproxima a la mitad.

Item 2a: ¿Cuál es el número decimal con más cifras que conoces?

Tabla 4.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1ºE	0	2	9+2	1	6+2	10
1ºG	0	1+(1=)	14	1	9+(=1)	10

Para este item las proporciones son bastante similares en ambos cursos. En los dos, son bastantes los alumnos que no contestan verbalmente a la pregunta, sino que dan algún o algunos ejemplos. Tanto en 1ºE como en 1ºG algo menos de la mitad de los alumnoscontestan con los decimales periódicos; 2 alumnos en cada curso contestan con irracionales como pi o √2; un alumno de cada curso dice no conocerdecimales infinitos no periódicos. En ambos grupos, algo menos de 1/3 de los alumnos no contesta la pregunta.

Iitem 2b: ¿Conoces algún número con infinitas cifras?

Tabla 5.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	11+(1)	1	1	1	6	11
1ºG	8	11+(1)	1	2	5	8

Algo más de 1/3 de los alumnos de 1ºE afirma conocer números infinitos: los decimales. En 1ºG, más de la mitad de los alumnos afirman conocer números infinitos, pero la mayoría de ellos no especifica de qué tipo. En ambos cursos 1 alumno dice conocer números enteros con infinitas cifras. En ambos cursos se detecta confusión entre los conceptos infinitas cifras-infinitos números-infinito-indefinido.... El resto de los alumnos de ambos cursos no conoce números con infinitas cifras, o no contesta a la pregunta o dan respuestas más confusas.

Item 2c: ¿Por qué motivo aparece?

Tabla 6.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	0	0	3	5	5	19
1ºG	1	5+(1)	1	8	11	9

La proporción de alumnos que atribuye a los decimales infinitos una procedencia concreta (en su mayoría fracciones o divisiones) es mayor en 1ºG (casi 1/4) que en 1ºE (aproximadamente 1/10). En ambos cursos hay varios alumnos que afirman que las infinitas cifras vienen "del periodo", lo cual puede denotar cierta ambiguedad en la pregunta. El resto de los alumnos de los dos cursos dan respuestas más difusas o no contestan.

Item 3: ¿Es cierto que todo decimal se puede expresar en forma de fracción? ¿Sólo aLgunos? ¿Ninguno? Justifica la respuesta.

Tabla 7.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	0	2+1	1a / 1b 3c / 2d	12+(2)	2	6
1ºG	1+(2)	4	3a / 5d	11+(2)	5	2

Para este item las proporciones son bastante similares en ambos grupos. La proporción de respuestas correctas y argumentadas es bastante escasa en ambos casos. Varios niños piensan que todos los decimales pueden expresarse en forma de fracción, pero se basan en argumentos falaces; por otra parte, bastantes alumnos se limitan a dar su opinión simplemente, sin ningún tipo de argumento.

Una observación importante es que en ambos cursos hay niños que dicen que todos los decimales se pueden expresar en forma de fracción excepto los números enteros o el cero. También es interesante notar que hay un alumno (en 1ºE) que afirma que ningún decimal se puede expresar en forma de fracción porque "No se le puede quitar el valor de ese número para expresarlo en fracción".

Item 4: Representa en la recta numérica los siguientes números:

0,25 1/4 -3/2 2/8 -6/4 0,3333... -0,75 2,164 0,250 -1,36 -12/6 0,3

Nota.- Si en algunos casos te resulta engorroso dibujarlo o es prácticamente imposible, explica cómo lo harías.

Tabla 8.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	0	1+(1)	1a+ (1=) 1c+(=1)	10+(1)	1+2*	10+(3)
1ºG	(1)	2+(1)	3a+(2a)	1+(1)	15	8+(2)

La proporción de respuestas corectas, o correctas salvo el caso del decimal periódico es muy escasa en ambos cursos. Algunos alumnos de ambos cursos tienen fallos correspondientes a la un tipo de representación determinado, pero la gran mayoría no manifiesta noción de correspondencia entre los números y los puntos de la recta aparte de la de ordenación de menor a mayor- izquierda a derecha (mayormente en el grupo de 1ºG) o tienen varios errores en dicha correspondencia (mayormente en el grupo de 1º E. Bastantes alumnos de ambos grupos no contestan a esta pregunta.

Por lo que respecta a las observaciones, en el grupo de 1ºE, hay alumnos qeu representan los distintos númeors en distintas rectas y otros que pasan todos los números a su representación fraccionaria o, al contrario, pasa todos los números a su representación decimal. En 1ºG se observa que bastantes alumnos tienen problema de lateralidad cambiada, y ponen los neggativos en la parte derecha de la recta y al contratio con los positivos; algunos alumnos de los que se limitan a ordenar los números en la recta, sí hacen coresponder a las fracciones equivalentes el mismo lugar (corespondiente a su representación decimal).

Item 5: Indica cuáles de las siguientes parejas de fracciones son equivalentes:

2/3 y 3/4 2/5 y 5/2 8/6 y 12/9 4/1 y 12/3 7/3 y 9/5

Justifica en cada caso que lo son.

Tabla 9.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	2	11	6	0	13	0
1ºG	2+(1)	15	6	1	11	0

También en este item las proporciones son bastante similares en los dos grupos, salvo quizás en la categoría 2, en donde la prporción de alumnos es ligeramente superior en 1ºG; es pprecisamente en dicha categoría (en la que los alumnos averiguan qué parejas de fracciones son equivalentes mediante el empleo de una técnica en la que no se tienen en cuenta los valores de ambos números) en la que se sitúa la mayor porporción de alumnos con respuesta correcta (alrededor de u1/3 de cada grupo). La proporción de alumnos que asignan a las fracciones equivalentes un mismo valor numérico es muy escasa en ambos cursos. El resto de los alumnos han dado en su gran mayoría respuestas incorrectas. ESte item ha sido contestado por la totalidad de los alumnos.

Item 6: ¿Qué diferencias hay entre número racional y fracción?

Tabla 10.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	2+(1)	6+(1)	(1)	1+(5)	3	12
1ºG	4	6	(1)	5	1+(1)	16+(2)

También aquí las proporciones son similares para los dos cursos. Al go menos de la mitad de los alumnos no contestan a la pregunta. De los alumnos que contestan, sólo un número bastante escaso en ambos grupos define correctamente el número racional como un conjunto de fracciones equivalentes entre sí, relacionando correctamente los dos conceptos en cuestión; el resto, o bien los asimila o bien hacen distinciones incorrectas.
En el grupo de 1ºE es interesante observar que hay dos alumnos que identifican los númeors racionales con los positivos y negativos.

Item 7: Señala algún criterio para distinguir un número racional de uno irracional.

Tabla 11.

	1	2	3	6
1ºE	0	1+(1)	6	24
1ºG	0	1	7	27+(1)

Otra vez vuelve a haber similitud en las proporciones de respuestas en ambos cursos. La gran mayoría de los alumnos dejan esta pregunta sin contestar, y aquellos que aventuran alguna distinción entre números racionales e irracionales dan respuestas incorectas o señalan algún rasgo no incorrecto pero irrelevante al respecto (uno o dos alumnos de cada grupo).
En cuanto a las observaciones, resulta curioso el que varios alumnos de ambos grupos asimilen la distinción racional-irracional a la distinción positivos-negativos. Un alumno de 1ºE piensa que lo irracionales son aquellos números a los que no se les puede hacer la raiz cuadrada, como $\sqrt{-3}$, mientras que a $\sqrt{3}$ lo clasifica como racional.

Item 8: Ordena de menor a mayor:

0,2 0,13 0,013 0,131 0,130 0,31

Tabla 12.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	3	5	3	8+1*	10+(1)	1
1ºG	9+(1)	1	7+1*	7	6+(3)	(1)

La proporción de alumnos que ordena bien los números presentados es mayor en 1º G (algo menos de 1/3 de los alumnos) que en 1º E (1/10 parte de los alumnos); también es mayor la proporción de alumnos de 1ºG que ordenan mal los números pero lo hacen siguiendo unos ciertos criterios lógicos. En total la proporción de alumnos que ordena mal los números, sin atender aparentemente a ningún tipo de criterio lógico es de aproximadamente 1/3 en 1ºE y algo menor en 1ºG.

Item 9: Calcula el resultado de la siguiente operación:

0,3 + 0,005 + 0,23 + 0,79

Tabla 13.

	1	2	3	6
1ºE	27	2	1+(1)	1
1ºG	28	4	3	1

La gran mayoría de los alumnos de ambos grupos contesta bien esta pregunta.

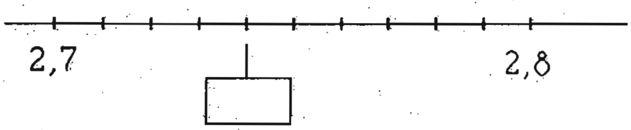
Iitem 10: ¿Cuántos números diferentes hay entre 0,41 y 0,42?

Tabla 14.

	1	2	3	4	5	6
1ºE	7	10	0	5	2	8
1ºG	8	15	2	5	1	5

Las proporciones no difieren sustancialmente para este item en los dos grupos. Uno buena parte (menos de la mitad) de los alumnos se inclina a creer que entre 0,41 y 0,42 hay nueve o diez números; algo menos de 1/4 de los alumnos dan una respuesta correcta. (El resto de las respuestas se distribuye entre las otras opciones).

Item 11:



¿Qué número es éste?

Tabla 15.

	1	2	3	6
1ºE	21	0	4	7
1ºG	19	1	11	5

La proporción de alunos que contesta correctamente a este item en 1º E es de 2/3 y el resto de respuestas spn incorrectas o nulas. En el grupo de 1ºG, la proporción de respuestas corectas es menor (algo más de la mitad) y en cambio aumenta considerablemente el número de respuestas incorrectas (algo menos de 1/3 de los alumnos).

-Reflexión General:

En los dos grupos de alumnos se obtienen resultados bastante similares para la mayoría de los items, más precisamente, en ocho de los 11 items propuestos.
En los items en los que se aprecian diferencias en los resultadoslos resultados del grupo 1ºG, es decir, el grupo de contraste, son algo superiores a los del grupo 1º E, con el que vamos a trabajar. Por ejemplo, hay más alumnos en 1ºG que distinguen entre notación decimal infinita y finita, que atribuyen a los decimales infinitos una procedencia concreta (en su mayoría fracciones o divisiones) y que ordenan bien una serie de números decimales. Sin embargo, en el último ítem son superiores los resultados del grupo 1ºE, en el que hay que asociar un número a un punto de la recta (en esta cuestión de la corespondencia entre números y puntos de la recta, los alumnos de este grupo presentan en general unos resultados algo mejores, aunque bastante pobres de todas formas).
En general, podemos decir que el grupo con el que vamos a trabajar no presenta diferencias notorias con respecto a otro grupo de alumnos escogido al azar en el mismo centro, aunque podemos matizar que en algunas cuestiones los resultados son ligeramente inferiores a los del grupo contraste.

CUESTIÓN DE INVESTIGACION FICHA 12

Tabla 16: Resultados generales de la actividad F12.

A	1a						OI	1b					OII	OG
	1			2		3.		1	2		3	4		
	1.EV	2.RG	3.CG	1.TP	2.MP	PM			1.E	2.TN				
1	1	2	2	2.3	1a	2		1	1	0	1a	3		
2	3	2	3	4	/	/		1	1	0	1a	2		
3	3	2	2	1	2a	1		1	1	2	3	/		
4	1	3	3	4	/	/		1	1	0	1a	2		
5	2	3	3	4	/	/		1	1	0	1a	2		
6	2	1	1	2.3	1a	1		1	1	0	1a	3		
7	1	2	1	1	1a	1		1	1	2	1a	2		
8	2	2	2	2.3	1a	2		1	2	0	2	2		
9	2	1	1	2.2	1b	2		2	2	0	1b	2	*SD	
10	3	1	3	4	/	/		2	2	0	2	3		
11	1	2	1	2.3	1a	2	*SD	2	1	0	1a	3		
12	3	2	3	4	/	/		1	2	0	2	2	*SD	
13	3	2	2	1	2a	2		2	1	0	1a	2		
14	3	2	2	1	2b	2		1	1	0	1a	2		
15	1	1	1	1	1a	1		1	1	1	1a	(1)	*SD	
16							C20						C20	C20
17	3	2	2	2.3	1a	2		1	1	0	1a	2		
18	2	1	1	1	1a	1		1	1	0	1a	2		
19	3	2	3	4	/	/		1	1	2	3	/		
20	2	2	2	1	1a	2		2	1	0	1a	3	*	
21	3	2	3	4	/	/		1	1	2	3	/		
22	2	2	2	2.3	1a	2		1	1	2/3	1a	3		

23	3	3	3	4	/	/		1	1	0	1a	2	*SD	
24	1	1	1	1	1a	1		1	1	0	1a	3		
25	3	2	3	4	/	/		1	1	0	1a	2		
26	3	2	3	4	/	/		2	1	0	1a	2		
27	3	2	2	3	1a	2		1	1	0	1a	3		
28	1	2	1	2.3	1a	2	*E	1	1	0	1a	3		
29	2	2	2	2.3	1a	2		1	1	0	1a	2		
30	3	2	3	4	/	/		1	1	0	1a	2		
31	3	1	3	4	/	/		1	1	0	1a	2		
32	3	1	2	2.3	1b	2	*	2	1	0	3	/		

Observaciones Particulares:

Para distinguir las observaciones relativas a la Pregunta I, las relativas a la Pregunta II y las Observaciones generales en esta Cuestión de Investigación, utilizaremos los códigos OI, OII y O, respectivamente.

Específicamente en esta pregunta codificaremos con *SD las respuestas de aquellos alumnos que aludan en sus razonamientos sobre conmensuración de longitudes al sistema decimal.

ANEXO IV.2

Transcripciones de la interacción didáctica sobre las cuestiones correspondientes a la Fase de Acción 1

F12: Conmensurabilidad de segmentos

Fecha: 11-11-93

Duración Total: 57 minutos

Encuadre en la sesión: Toda la clase.

1.1--t: 0:00

La clase ha comenzado cuando se conecta el vídeo (acaba de empezar).

-Murmullo de alumnos.

1.PA/r	P: ¿Queréis callaros los demás?
3.AAI/ai	A: 3x=U
3.PVI/as	P: Puede ser 3x=U. Vale,/
3.PVI/rr	pero yo quiero que me midas x en función de U./
3.PIS/i	Tú me has dicho que 3x es una U, pero ¿qué es x, de U?
3.AAI/ai	A: 1/3 de U
3.PVI/as	P: x es 1/3 de U./
3.PIS/cl	¿Alguien no entiende lo que quiere decir medir x en función de la unidad U, de la longitud U?/
1.PO/d	Bueno pues entonces, coged las parejas que tenéis ahí./
3.POC/d	Ojo, no quiero instrumentos graduados; no me podéis decir 3 cm. ni 4 cm.; la unidad no es el centímetro; es la U que os pongo ahí.
3.AIS/a	A: ¿La U?
3.POC/d	P: Esa es la unidad con la que tenéis que medir, no con centímetros ni con decímetros, ni con nada parecido.
CA/i	A: ...
1.PE/d	P: En las observaciones, vosotros no ponéis nada. Ponéis en el Proceso de Cálculo las cuentas que hagáis, y luego, cómo lo vais a explicar en clase, a los demás.

CA/i	A: ...
1.PE/d	P: Eso mismo que has dicho, pero ordenado para explicarlo a los demás.
CA/i	A: ...
1.PE/d	P: Eso se hace todo aquí, por si acaso ... /
3.POC/d	Ahora, el método que uséis vosotros para medir uno o medir otro,/ eso ya lo ideáis vosotros./
1.PO/d	A las 2,10 tienen que estar medidos todos, ¿eh?
3.AIS/a	A: Seño, yo no lo entiendo.
3.AIS/a	A: No lo entiendo.
1.AP/d	A: Lo hacemos en la ficha misma, ¿no?
1.PO/s	P: Un momento,
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Un momentico...
CA/r	A: ...
2.PO/p	P: Vamos a ver, Angel no entiende, a ver qué es lo que no entiende,/
3.PIS/i	¿qué no entiendes?
3.AAI/nc	A: Yo no entiendo cómo se hace esto.
3.POC/e	P: El cómo lo tienes que ver tú. Vamos a hacer el ejercicio 1./ 1.PO/s Pero atentos todos/
3.PDC/ll	¿Veis es 1?
3.AAI/os	A: Sí
3.PDC/ll	P: ¿veis la U y la x?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/nc	A: No entiendo lo que habría que poner.
3.AAI/ai	A: Ahí sería x=2U
3.PIS/cl	P: Dicen por ahí ¿x=2U?
3.AVI/rs	A: No
3.AMC/ie	A: U es igual a 2x.
3.PIS/p	P: ¿Cómo sabéis que es 2?
3.AMC/ie	A: Porque es la mitad.
3.PDC/ll	P: Dice ... que lo ha medido con el compás./
3.PIS/p	Es la mitad, pero ¿cómo sabéis que es la mitad?
3.AMC/ie	A: Cojo el compás...
3.PVI/as	P: Esa es una manera de saberlo./
3.POC/d	Vosotros tenéis que idear maneras de saber si es la mitad, o es 1/3, o es ...lo que sea.
3.AMC/ie	A: Con la regla, con la regla..

3.PVI/as	P: Con la regla/
3.POC/d	o como queráis, pero no quiero que uséis la parte graduada.
3.AIS/c	A: Entonces 2x=U...
CA/i	A: ...
2.PO/d	P: Que cojas la parte que no está graduada.
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: Pues ya está, pues ya está.
3.AIS/a	A: ¿Hay que explicar lo que hemos hecho con el compás?
1.PE/d	P: Aquí me ponéis...,/
3.PDC/c	en este caso sería x=1/2U. /
3.PVI/as	En este caso Angel dice que él ha puesto el compás...
3.AIS/c	A: ¿Cuántos trozos tenemos que poner?
3.PDC/p	P: Los que os salgan./
3.PDC/c	El proceso quiere decir cómo lo hacéis, cómo lo hacéis, cómo habéis llegado a esa conclusión./
3.POC/d	Eso ordenado, porque una cosa es cómo nosotros hacemos el problema, y otra cómo lo explicamos./
1.PO/d	Y ya está.
	Y ahora el que tenga dudas, que vaya levantando la mano.

1.2---t: 0:04

.Los alumnos se ponen a trabajar. Hay murmullo entre ellos. Una pareja me hace una pregunta. Me acerco a ellas y se la explico. Parece que hay una duda que puede ser general.

1.PE/a	P: A ver, los dos recuadros estos.../
1.PO/s	¡Un momento!/
1.PE/a	Los dos recuadros esos es para que lo entreguéis, digamos, en sucio y en limpio. Hay que explicar cosas distintas: hay el de la derecha es para que lo pongáis en limpio, digamos como si lo tuviérais que explicar en público, o para presentarlo ya, terminado. Es para que no uséis otra hoja; digamos que es para que las cuentas en sucio las hacéis en el recuadrillo de la izquierda, y en la derecha ponéis todo en limpio.
1.AV/a	A: ¡Ah!

.Otra pareja llama a la profesora, que se acerca para aclararles las dudas. Se oye murmullo de cambio de impresiones entre los alumnos. Yo paso por varias parejas, que lo van solicitando.

1.PO/d	P: las Observaciones son mías. En las Observaciones no pongáis nada, que son mías.

Carmen (Ver sesión correspondiente a la fecha 9-11-93, en el apartado IV.I.3 de la memoria) también pasa por las mesas, aclarando dudas a los niños.

CA/r	Algo pasa (que no ha cogido la cámara): Parece que no es más que que está subiendo el volumen del "murmullo". Doy dos palmadas para llamar la atención de la clase.

1.PO/s	P: Un momento, por favor./
3.PVI/c	Es que no es tan difícil, estáis complicando las cosas más de la cuenta.
CA/r	A: ...
1.PA/r	P: Los trabajos son en parejas, no en cuatro, ¿eh?
CA/i	A: ...

t: 0:10

1.PO/s	P: Atención aquí todos./
3.PVI/c	No es más difícil de lo que es./
3.PDC/c	Acabáis de poner ahí 2x, 1/2..., todo eso.¿Cómo lo habéis hecho? Vosotros tenéis que decir cómo lo habéis hecho./
3.POC/d	Tenéis que explicarle a alguien que no supiera, pues, para que supiera hacerlo. ... lo mismo que vosotros./
3.PVI/c	Y no tiene más complicación, no compliquéis las cosas, si no son más complicadas./
3.POC/d	No hace falta el compás, podéis hacerlo de otras maneras, cada uno como se le ocurra.

.De nuevo trabajan en parejas. La profesora va controlando el ritmo de trabajo de los alumnos.

1.PO/a	P: No os eternicéis en el primero, que hay cinco. Hay cinco, ¿eh?

t: 0:12

.Se oye a la profesora con una pareja:

3.PIS/i	P: U es 2 de x, y x, ¿qué es de U?/
CA/i	...
3.POC/d	Míralo tú/
CA/i	.../
3.PIS/p	¿Y ahí ahora qué has hecho?/
CA/i	.../
3.PVI/as	Pues ya está.

.La profesora y Carmen siguen pasando por las mesas.

1.PO/d	P: En las Observaciones no pongáis nada./
1.PA/r	Ramón, no se puede uno levantar.
CA/i	A: ...
1.PO/d	P: Pues usa el del compañero, pero no se puede uno levantar.

.Los niños siguen trabajando, y la profesora y Carmen, atendiendo a sus dudas. Asímismo, la profesora controla el ritmo de la clase.

t: 0:18

1.PO/a	P: Hay gente que va por el tercero o el cuarto, ¿eh?, y otros por el primero; yo no me lo explico.

.Se oye a la profesora con una pareja:

2.PE/a	P: Pero un número,/
3.PIS/i	una vez y media ¿cómo se pone con un número?
3.POC/d	P: No uséis los centímetros, por favor, ni los milímetros. Yanira, no se puede usar centímetros ni milímetros.
3.AMC/ie	A: Esto es 1/3 de esto, es 1/3; entonces serían 2/3. Claro esto lo dividimos en ...

.Los alumnos siguen trabajando en parejas, y la profesora y Carmen, atendiéndoles.

.Se oye a la profesora con una pareja:

3.PDC/c	P: Pero si es que no hacen falta los milímetros,/
3.POC/d	ni quiero que los uses./

3.POC/e A ver, ¿cómo podríais medir eso?...

.Parece que sube el nivel de inquietud, y algunos alumnos se levantan.

1.PO/d P: No se levanta nadie, ¿eh?

1.PO/d P: Pues se lo preguntas a tu pareja, que sí lo sabe; estáis trabajando en parejas.

3.POC/d P: Que no podéis usar los milímetros, Javi (curiosamente, Javi es el que había dicho lo del 1/3 y los 2/3).

.Los alumnos siguen trabajando

CA/i A: ...
2.PE/a P: No hombre, no podéis cambiar de unidad.
(Los alumnos no consideran suficiente la información de la profesora y llaman a Carmen).

.Se ven imágenes de niños usando la regla por la parte graduada.

2.1--t: 0:38

.La profesora borra la pizarra y empieza la <u>Puesta en Común</u>:

2.PO/ce P: El primero, ¿quién lo tiene hecho?
2.AS/i A: Yo, Yooo
3.PIS/cl P: ¿Y hay algún problema con el primero?
3.AAI/os A: Nooooo...
3.PIS/p P: A ver, ¿cómo lo habéis hecho?
3.AMC/ie A: Pues cogiendo el compás y tomando como medida x, te das cuenta de que x es la mitad de U, o U el doble de x.
3.PVI/as P: Vale./
2.PC/ce El segundo ejercicio, ¿quién lo ha hecho?
CA/i A: ...
1.PO/p P: Sal

CA/i .El alumno comenta a la profesora cosas sobre cómo lo ha hecho, pero no se distingue la voz. La profesora
1.PO/d le indica que lo haga en la pizarra para todos.

3.AAI/ai	A: x con respecto a U...
1.PO/s	P: Oye, callaos, que ya estamos corrigiendo.
3.PDC/c	Estamos en el segundo, en la segunda pareja.
3.AAI/ai	A: U es 3/4 de x
3.PIS/cl	P: U es 3/4 de x. ¿Os da eso o no os da eso?
3.AVI/rs	A: No, no
3.AVI/rs	A: Que ya
3.PIS/p	P: A ti, ¿cómo te da 3/4 de x?
3.AMC/ie	A: Sería con el compás. He tomado de abertura, he medido U, y después la he superpuesto sobre x, y me da/
CA/i	...
3.AAI/ai	A: Da 2/3 de x
3.AAI/ai	A: 2/3 de x

(Son comentarios de alumnos cercanos a la pizarra).

1.PO/p	Alguien al fondo ha levantado la mano, y la profesora le da la palabra y dirige la atención hacia ese alumno.

1.PO/p	P: Javier
3.AVI/rs	A: Que no sale 3/4
3.PIS/p	P: ¿Qué sale?
3.AAI/ai	A: 2/3
CA/r	Varios alumnos se suman a éste : 2/3, 2/3 de x..... Se organiza un murmullo.
1.PO/s	P: Un momento
CA/r	A: Ruido, y "2/3, 2/3..."
3.PIS/i	P: Hay quien dice que x es 3/2 de U. Y otros dicen que x es 2/3 de U.

La profesora apunta estos resultados en la pizarra (y dejo el 3/4, que ya estaba).

3.AAI/ai	A: Es lo mismo
3.AMC/ie	A: Si x es igual a 2/3 de U, U es igual a 3/2 de x.
3.PIS/i	P: ¿3/2 de U es mayor que U, o menor que U?
3.AAI/os	A: Mayor
3.PIS/i	P: ¿Es mayor o menor?
3.AAI/os	A: Menor, es menor.
3.PIS/i	P: Mirad los segmentos, ¿x es menor que U?
CA/i	A: ...
3.PIS/c	P: Bueno, pero yo digo x en función de U, no U en función de x.

3.AAI/os	A: 3/2
3.PVI/as	P: 3/2, x es 3/2 de U
CA/i	A: ...
3.POC/e	P: Alguien que no lo haya medido con centímetros, que explique cómo lo ha hecho./
1.PO/p	Nuria, sal y explica cómo lo has hecho.

t: 0:43

2.AI	A: Seño, pero U...
2.PI/i	
1.PO/p	P: Venga Nuria
CA/b	A: Nuria, mira la cámara.
CA/i	
3.AMC/ie	A: Con un compás mido la medida de U, y después, tienes que ver cuántas veces está contenida U en la x. Entonces ves que te sobra un poco, de la unidad.(No se le escucha bien, porque parece que lo está explicando a los niños que tiene más cerca) Te das cuenta que es la unidad; entonces sería x contiene una U +1/2 de U. Lo sumas ...
3.PIS/cl	P: ¿Lo ha entendido todo el mundo?
3.AAI/nc	A: No, No.
2.AS/i	A: ¿lo vuelvo a explicar?
1.PV/a	P: Dice ... que si lo puedes escribir.
3.AMC/ie	A: Tú miras x, ¿no? Luego mides U. Ves que x contiene una U. Después, coges el trozo. Y ese trozo tiene que estar contenido en U. Mides U y ves que tiene dos veces ese trozo. Sería U + 1/2 de U después ya lo sumas 2+1, te da 3.
3.PIS/i	P: ¿Alguien lo ha hecho de otra manera? ¿Le sale igual pero lo ha hecho de otra manera?
1.PO/s	P: Un momento,/
1.PO/p	Marisa va a explicar cómo lo ha hecho ella.

t: 0:45

3.AIS/i	A: Yo es que he medido desde que acabara U hasta que acabara x ...
1.PO/d	P: Sal, sal y hazlo.
CA/s	A: Esta es la x, y ésta es la U
2.AI	.Otro alumno intenta explicar

1.PO/p	P: Está ella. Venga.
3.AMC/ie	A: Yo primero he medido con el compás, ¿no? la distancia que hay desde donde acaba U hasta donde acaba x. Y después esta distancia la he, con el compás también la he medido, y he visto que era, esto era 1/2 de U. Entonces ya pues...
CA/i	/
3.AAI/nc	A: No lo entiendo,/
3.AVI/v	es que no lo explicas bien.
3.PIS/cl	P: ¿Alguien más lo ha hecho de otra forma? Todos lo han hecho igual.

2.2--**t: 0:48**

2.PO/p	P: Bueno, el siguiente./
3.PIS/cl	El siguiente, ¿quién lo ha hecho?, ¿quién lo ha llegado a hacer?
1.AS/i	A: Yo, yo..
1.PO/p	P: Lo ha hecho Nieto, lo ha hecho Pablo, y ¿qué os da?
3.AAI/ai	A: 3x igual a 7 U
3.AAI/ai	A: x es 3/8 de U
3.AAI/ai	A: 3/7 de U
3.PVI/as	P: Repito estos resultados mientras los apunto en la pizarra. Otro dice que 3/7 de U./
1.PO/p	Nieto, ¿a ti qué te da?
3.AAI/ai	A: ¡Buenooo...!. Es que, he cambiado hasta la unidad.
3.PVI/rr	P: La unidad no la puedes cambiar.
3.AAI/ai	A: A mí me sale 4/9
3.AAI/nc	A: No la puedo cambiar; por eso. Es que me está doliendo la cabeza ahora.
3.PIS/p	P: Pero, ¿qué has hecho?
(2.AI.)	
3AAI/ai	A: A mí me da 4/9
1.PO/p	P: Un momento, ahora va Nieto
3.AMC/ie	A: Primero mido el segmento x
3.PIS/p	P: ¿Cómo?
3.AMC/ie	A: Con el compás. Y luego, con la medida de x, la he puesto. Luego veo que sobra un trozo; con ese trozo, con la unidad ese trozo, he intentado medir con ese trozo x y también te sobra; y con ese pequeño que sobra de x, con ese sí lo he podido medir exactamente.

CA/r	(No se entiende, porque también hay otro alumno de por medio).
1.PA/r	P: Angel, están hablando. Es una falta de respeto. Luego dirás que no te enteras.
3.AAI/ai	A: A mí me sale...
3.PIS/p	P: Entonces, ¿qué te da de ahí? ¿qué número te da?
3.AMC/ie	A: Bueno, a ese número pequeño lo he llamado i, y entonces, x es igual a 7i.
3.PVI/ad	P: x es igual a 7i, que es la partecilla chica esa que te ha dado;/ 3.PIS/p ¿y U?
3.AAI/ai	A: U es igual a 18i.
3.PVI/as	P: U es 18i
3.AVI/ad	A: Bueno, la i es y.
3.PIS/p	P: Entonces ¿cómo podemos medir x en función de U. ¿De ahí tú puedes poner x en función de U?
3.AAI/os	A: Sí, me parece que sí.
3.PDC/ll	P: Dice Pablo que según esto sería, según esto sería 7/18
3.AVI/rs	A: No
3.PVI/v	P: Total, que no os ponéis de acuerdo ninguno.
CA/s	A: A mí me sale
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: A mí me sale 4/9, profesora

t: 0:52

CA/i	A: ...
3.PVI/v	P: ¡Ya estamos con lo de arriba y lo de abajo! /
3.PIS/e	¿Quién es más grande, x ó U?
3.AAI/ai	A: U, U
3.PIS/i	P: Entonces, ¿es así o es al revés?
3.AIS/i	A: ¿Y no puede ser 4/9?
CA/m	P: ¿Cómo?
CA/m	A: ¿No puede ser 4/9?
3.PVI/as	P: Pues a lo mejor es 4/9,/
3.PIS/cl	¿a cada uno os da uno distinto?
3.PVI/as	x=4/9 U.
2.PC/p	Vamos a ver una cosa,/
3.PIS/i	las fracciones, prescindiendo de que estén bien los números, ¿están bien el numerador y el denominador, o es al revés?
3.AAI/os	A: Está bien, está bien.

3.AAI/os	A: Es al revés.
3.PIS/i	P: ¿está bien o es al revés?
3.AAI/os	A: al revés
3.PDC/r	P: Según esto, ¿x es más grande que U o más pequeño?
3.ASC/os	A: Más pequeño.
3.PDC/r	P: 3/8 es más pequeño que la unidad, ¿y x es más pequeño que la unidad?
3.AAI/os	A: Sí
3.PDC/p	P: Entonces está bien; está bien si están bien las medidas; pero el más pequeño va arriba. Bueno entonces, 3/8, 3/7, 7/18, 4/9, 3/7,/
3.PIS/cl	¿hay alguno que le dé igual que a otro?

t: 0:53

3.AAI/ai	A: A mí me da igual que ...
3.PVI/v	P: 3/8 ya tiene dos votos.
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: Yo también 4/9.
3.PVI/v	P: 4/9, también tiene dos votos.
CA/r	A: ...
3.POC/e	P: ¿Queréis dividir con la calculadora, a ver si estáis aproximando...
3.AMC/ie	A: 4 lo divides , lo haces en 4 partes iguales, ¿no?, y te sale, pues te sale 4, y luego U lo divides en esas partes iguales y sale 9; te da 4/9.
1.PO/p	P: A ver cómo lo ha hecho Juan, sal aquí y explícalo. Luego sale Marta y explica cómo lo ha hecho ella. Venga, ¿cómo lo has hecho tú?
1.AS/i	A: Y después salimos nosotros y lo explicamos.
3.AMC/ie	A: Bueno, pues para que salga exacto, divido x entre 4, luego hago la U...

En ese momento, un grupo de alumnos está distraído y hablando. La profesora pregunta a uno de ellos sobre lo que está explicando el compañero de la pizarra, con matiz de reprensión:

2.PI/i	
3.PIS/e	P: Sergio, ¿cómo ha hecho Juan para hacer eso?

3.AAI/ai	A: Divide entre 4.
3.PIS/e	P: ¿Por qué entre 4 lo ha dividido?
CA/i	A: ... /
3.PVI/r	P: No/

Ahora el tono recriminatorio se dirige a la clase en general, qeu no parece estar interesada el lo que hace el compañero de la pizarra.

3.PIS/cl	¿Quién sabe porqué Juan ha hecho lo que ha hecho? ¿Nadie?
1.AR	A: Porque no ha terminado de explicarlo.
3.PVI/rr	P: Pero yo ya lo sé cómo lo ha hecho y no ha terminado de explicarlo.
2.PO/p	P: Venga, cuéntanos cómo lo has hecho.
3.AAI/ai	A: Que yo x lo he dividido entre 4
3.PIS/p	P: Por que, ¿qué has pensado antes?
3.AMC/ie	A: Porque al dividirlo entre 2 no me sale, al dividirlo en 2 partes iguales, no me sale, y entre 3 tampoco. Luego, lo he hecho con 4, lo he dividido, y al dividir 9 partes entre éste me sale igual.
3.AIS/r	A: ¿cómo?
3.PIS/cl	P: ¿Entendéis lo que ha hecho?
CA/r	Ruido.
1.PO/s	Llamo la atención con dos palmadas.
1.PO/s	P: un momento,/
CA/m	¿qué?
3.AAI/ai	A: Que ahí lo ha dividido entre 3
3.PVI/ad	P: Bueno ahí lo ha dividido entre 3 porque se ha equivocado en el dibujo./
3.PIS/cl	Pero, ¿entendéis qué procedimiento ha seguido?
CA/i	A: ...
CA/i	P: .../
3.PIS/i	el mismo procedimiento que éste?
(3.AIS/a)	A: ¿Otro?

.Toca el timbre

CA/r	A: ...
1.PO/d	P: La ficha 10 hay que entregarla./
2.PO/d	Y esto os lo lleváis a casa y me lo medís exactamente.

t: 0:57

ANEXO IV.3

Fase intermedia entre las Fases de Investigación 1 y 2: Espiral adyacente en nuestra Investigación-Acción.

Objetivos

Mejorar la dinámica de trabajo en el curso y la disposición actitudinal de los alumnos y la profesora, de forma que sea viable el trabajo conceptual sobre los contenidos previstos en la Segunda Fase de Investigación.

Estrategia

Cambio de programa consistente en la interrupción del tratamiento de los contenidos previstos para abordar el tratamiento de un tópico nuevo para los alumnos: la Combinatoria. La interrupción duraría aproximadamente un més lectivo, al cabo del cual se reconsideró la situación, y se valoraría la pertinencia de continuar con nuestra línea principal de investigación con este grupo de alumnos.

Se esperaba que el tema estimulara el interés de los alumnos y permitiera a la profesora trabajar las cuestiones actitudinales en condiciones más favorables, por una parte, y por otra, dedicar sus esfuerzos en esta dirección sin estar sometida a la presión de las condiciones de la investigación sobre los aspectos conceptuales.

Instrumentos para la recogida de datos

Por tratarse de una espiral adyacente a la principal de nuestra investigación-Acción, y debido a que uno de los problemas que se habían planteado al llegar a este punto era la tensión de la profesora-investigadora por la imposibilidad de llevar a cabo el plan previsto a pesar de sus esfuerzos por implementar las previsiones, se consideró que sería conveniente disminuir el grado de tensión, preocupación y gasto de energías por parte de la profesora-investigadora. Por este motivo, los únicos registros relativos a esta fase corresponden al Diario de clase; dicho Diario no se llevó exaustivamente para cada sesión, como estaba previsto para la espiral principal de investigación, sino para registrar aquellos puntos de la evolución del problema actitudinal de los alumnos que la profesora-investigadora consideró relevantes.

Implementación

A partir de esos datos, informaremos a continuación de la evolución de la espiral adyacente a nuestra línea principal de investigación:

30 Noviembre 93:

La clase ha estado dedicada a una asamblea de la profesora y los alumnos para tratar cuestiones de reflexión y valoración sobre el trabajo realizado hasta el momento y los problemas en la dinámica del grupo.

En esta asamblea se ha constatado que tenemos un problema con el rendimiento cuya causa principal es la mala dinámica; entre los alumnos han prevalecido opiniones de responsabilidad personal y compromiso, e incluso se ha apuntado que es posible sustituir un círculo vicioso por un círculo virtuoso si cada uno pone de su parte, en la concienciación de cada persona. Aunque se han apuntado soluciones de control externo, muchos se han expresado en términos de autocontrol; también es interesante que los mismos alumnos hayan pedido una redistribución de grupos y que hayan pedido que se mezcle gente de distinto nivel en lo que a rendimiento se refiere, así como chicos y chicas, puesto que estas últimas parecían "dar calma a los chicos" (en palabras de uno de ellos). Los alumnos querían que fuera la profesora la que hiciera la nueva redistribución de los grupos, ésta ha delegado en ellos la responsabilidad.
Una cosa que no ha quedado del todo clara es el hecho de si es mejor que la profesora explique antes de realizar las tareas (como sostienen varios alumnos) o se mantenga el procedimiento seguido hasta el momento (como sostiene la profesora).*

<u>1 Diciembre 93:</u>
Los alumnos han vuelto a retomar la discusión sobre el punto señalado con * en la sesión anterior. La profesora ha argumentado el porqué de su postura, dejando claro que ese principio no se modificará por el momento (por lo menos hasta que se lleve bastante rodaje con él).

<u>5 Dic. 93:</u>
Los acontecimientos ocurridos en esta sesión han sido desencadenantes de un punto de inflexión en la actiud de la profesora y en su percepción de la situación.
Debido a la fuerte carga emocional a través de la cual se produce el cambio, creemos ilustrativo transcribir el tecto del Diario tal como fue redactado en el momento:

"Después de dos días con el nuevo tema, que parecía que habían empezado con gusto, y de haberse "comprometido" a mantener una actitud positiva de actividad y colaboración en la casi totalidad de los alumnos, me doy cuenta hasta qué punto hay mecanismos más sutiles puestos en juego. Yo sigo estando tensa cuando descubro que tardan bastante más de la cuenta en sentarse y disponerse a trabajar (y además percibo cierta provocación, y no precisamente de los elementos dados por conflictivos), y lo mismo ocurre con otros detalles como no hacer el trabajo que se había mandado y seguir sin interesarles demasiado el avanzar.
Además, la cuestión de enfrantarme con Sergio ante la tutora y el jefe de estudios me hace darme cuenta de que tengo mucho menos dominio de mí misma y seguridad ante un alumno que el que manifiestan esos dos profesores; me doy cuenta de que me siento como una víctima de ese niño que intenta defenderse como si él pudiera dejarme mal delante de otros profesores, padres etc... Me siento muy mal y más cuando veo que esta sensación es extensible a la clase como bloque; me siento como victimizada por unos críos impertinentes e inconscientes en su gran mayoría y como si tuviera que pedirles por favor que les gustara mi

material, que les estimulara, que fueran mis "cómplices" en la tarea de aprender y ahora me siento más bien ridícula, porqué veo que lo que ocurre es que me tienen como en sus manos y que subliminalmente ejercen de pequeños tiranos en muchos casos y se quedan tan a gusto; me vuelven a la memoria ciertas frases de alumnos en torno a la falta de respeto y de hacer caso a "la señorita", que ya me habían perturbado en su momento. En resumen, veo ahora claramente después de bastante tiempo (no sólo este año, sino todos los anteriores, en los que yo lo había ido dejando porque no estaba tan metida en esto) que por mi afán de gustar a una mayoría y tenerlos contentos he estado haciendo poco menos que la idiota, poniéndome en manos de su irresponsabilidad, sus caprichos y su apatía, como la madre tiranizada por un niño consentido. (Los críos que se dan cuenta de lo que pasa y ponen de su parte y me doy cuenta de que incluso "apelo" a ellos para que vean como los demás no me respetan; está claro que ellos no pueden hacer nada, más que a pelar como yo a la buena voluntad de los tiranillos, y que con esta actitud de esperanza ingenua de que alguna vez estos tiranillos, que son bastantes, se den cuenta, se ilumninen y cambien no estoy beneficiando ni a mí ni a la gente más sensible y mejor intencionada).

Me ha costado varios ratos asimilar lo que he espuesto anteriormente y avanzar una actitud de no tener que tratar de "estimularlos" a costa hasta de mi buen humor por sus impertinencias de adolescentes, de no tener que gustarles y tenerlos encantados. Mi material es bueno (es probablemente mejor y más estimulante que la mayoría del material que manejan y han manejado) y mi deber no es "vendérselo" ni menos suplicarles que lo "compren". Su derecho como alumnos es aprender y el material es estupendo para eso, y mi actitud, ante unos adolescentes, no es de dorarles la píldora para que aprendan (porque no sólo no se dejan sino que me tiranizan), sino marcar la pauta e ir dándoles autonomía conforme vayan madurando y siendo capaces de asumirla, no antes pare que se forme el caos que, lógicamente, se ha venido formando. Hay que obligarles a meterse en la nueva dinámica metodológica, y exigirles responsabilidades, no pedírselo como favor porque no lo concederán nunca (al contrario), y mientras se perderá el año en una situación desordenada, muy desagradable para mí y poco eficaz, no sólo en cuanto a contenidos sino en cuanto a su educación.

En suma, cambio de actitud general por mi parte que tengo que ir actualizando con mucha atención al principio hasta que se convierta en nueva norma.

Empezaré con objetivos concrertos en cuestiones que he percibido como importantes: controlando el tiempo de puesta en marcha para trabajar, estableciendo un límite en el tiempo y registrando los alumnos que se pasan para bajarles nota (ver cuadernilo naranja) y haciendo un minuto de silencio (que utilizaré para relajarme y reforzarme en mi dominio de la situación) cada vez que el nivel de ruido se eleve más de lo tolerable cuando hablo o habla a la clase un alumno; esto vendrá reforzado con un control más estrecho (de un número de alumnos al azar para ser operativos) sobre los contenidos y precedimientos aprendidos, con metas fijadas por mí en el tiempo. Además, seré tajante en la valoración de acuerdo con las

metas propuestas en Portafolio a principio de curso, no "levantaré la mano" para fingir un "la cosa va pasando".
(Quizás las medidas no hubieran tenido que ser tan tajantes en principio si hubiera sabido lo suficiente como para que la situación no se me hubiera ido de las manos, pero considero que ahora hay conductas más viciadas de la cuenta que conviene atajar con firmeza).
Por último, y muy importante, hacer todo esto con serenidad y buen humor porque lo fundamental es romper el sentimiento de rivalidad con ellos y temor por mi parte y actualizar mi dominio de la situación."

10 Diciembre 93:
-Carmen ha vuelto después de un montón de días (casi dos semanas) que ha estado enferma y se ha quedado sorprendidísima del cambio que ha dado la clase. No sólo por la disciplina (que se nota bastante sobre todo en el comienzo de las clases), sino en la participación y atención en clase y en la colaboración que ha observado entre los grupos; aunque hemos dedicado el tiempo a Puesta en Común, cuando la profesora ha pedido inventar ejercicios de distintos tipos, se han puesto ha hacerlo todos en grupo de verdad, discutiendo y colaborando entre ellos.
-Otro logro positivo muy interesante es como algunos alumnos están desarrollando tendencia a hacer generalizaciones, a buscar patrones y a percibir estructuras en los ejercicios, sobre todo en el caso de una alumna concreta: Rocío. Esto es muy estimulante para la profesora y para la propia alumna (que en principio no era nada brillante y se distraía bastante), la cual es consciente de sus progresos y de sus capacidades y se crece por días en interés, esfuerzo y confianza en sí misma.

15 Diciembre:
La prfesora se muestra contenta por los rendimientos de los alumnos en un primer examen sobre el tópico Combinatoria.

16 Diciembre 93:
La sesión ha sido bastante interesante para la profesora-investigadora. Esta ha propuesto a Carmen el examen y Carmen ha aceptado. Al mezclarse entre los alumnos para observar el proceso, la profesora ha tenido ocasión para percibir lo molesto que es el ruido y el ritmo tan lento que se genera entre las dificultades de comprensión de tantas personas y la distracción de todo el resto; es cansino.
La impresión que ha tenido al respecto es que con alumnos de esta edad hay que procurar que trabajen en pequeños grupos resolviendo cosas durante más tiempo para que la dinámica sea más acorde con su momento, y también hay que prestar atención a este aspecto durante las Puestas en común y marcar un ritmo que los mantenga más ocupados.

20 Diciembre 93:
En la sesión de Evaluación están presentes el delegado y el subdelegado del curso.

Cuando los profesores preguntan a estos dos alumnos la opinión general de la clase con respecto a la marcha de las clases con los distintos profesores, éstos ponen de manifiesto la falta de conexión con algunos profesores en concreto y el desnivel entre las expectativas y exigencias de los profesores con respecto a la realidad de los alumnos. Sin embargo, los alumnos destacaron el caso de la asignatura de Matemáticas, endonde había sido posible un diálogo con la profesora y una adaptación entre las pretensiones de ésta y las de los alumnos de la que estaban especialmente satisfechos.
Esto, por supuesto, resultó estimulante para los investigadores y al mismo tiempo permitió a la profesora-investigadora tomar perspectiva sobre la situación y relativizar el incumplimiento de sus expectativas.

20 Enero 94:
-Los niños llegaron de Navidad no demasiado inquietos según la percepción de la profesora; un poco más revueltos de lo que se fueron según Carmen.
-Ya al final de la primera semana la profesora advirtió falta de disciplina en la entrega de trabajos, tanto de Navidad como del problema individual del concurso. Pero también observó que ella no establecía límites claros de la forma y el tiempo en que tenía; y determinó que había que prestar atención a este punto porque era una costumbre peligrosa, que podía luego entorpecer bastante la parte de investigación.
-En la sesión correspondiente a este día se produjeron numerosas dificultades con la dinámica del trabajo en la clase. La profesora determinó los siguientes problemas:
1. Por una parte, en el comienzo de la clase no quedaba clara la distribución del tiempo y cuándo había que entregar los trabajos y qué trabajos.
2. Tampoco ella era rigurosa en la exigencia de los plazos y ofrecía alternativas a cosas que ya había establecido, con lo cual, a unos alumnos tan dispersos y con tanta dificultad de atención y sistematización, los confundía aún más.
3. En otro orden de cosas, cuando había que decir cosas en gran grupo salía a la luz el problema de siempre (hasta ahora no hemos tenido Puestas en Común). La falta de atención y consideración de los demás, y el entorpecimiento del trabajo generalcon el problema individual de cada uno.

Y determinó adoptar las siguientes medidas para atajarlos:
1. Cada día: Poner orden en la clase con el método de la bajar nota (que estaba siendo efectivo, a pesar de las reticencias y la insatisfacción de la profesora por tener que recurrir a medidas coercitivas), clarificar muy bien las consignas, los plazos y el modo de entrega, y exigir absoluto silencio, de modo que nadien pueda decir que "no se enteró". Hacer lo mismo cada vez que tenga que dar una consigna de interés general.
2. Contener la tendencia a ofrecer alternativas posibles, que en niños con esta inmadurez, los confunde más que ayudarlos. Ofrecer alternativas sólo cuando sea necesario, y pararte a pensar en todas las variables evaluar su utilidad. Llevar mucho orden en corregir los trabajos que estén dentro de los límites indicados y devolver los que no lo estén con sus razones.

3. Esto ya era más complicado. Las pausas de un minuto ideadas son una medida que se queda corta. A la profesora se le ocurrió que el tiempo de la pausa debía aprovecharlo para:
-pensar qué estaba ocurriendo, quienes eran más responsables y de qué forma afecta la situación a los objetivos que se querían conseguir.
-en el caso de la Puesta en Común, intentar aclarar el significado de dicha actividad y la importancia para salir del nivel de pensamiento individual con la ventaja de un profesor y otros compañeros. Esta es una parte fundamental del aprendizaje; con el trabajo individual sólo se hace medio camino (y sólo se calificará medio camino).
-los niños que quieran hacer el camino entero tienen derecho, y la profesora era responsable de garantizarlo, de modo que controlaría a los más protagonistas en cada pausa y sumaría avisos hasta un número en que avisarría a la tutora (y a los padres); también eso se reflejaría en la calificación. La inconsciencia no sería excusa; si el alumno inconsciente perjudicaba, habría que tomar medidas para que sea fuera consciente.
4. Poner en práctica todo esto con calma y seguridad.

Reflexión, Valoración y Toma de decisiones

Al finalizar el plazo previsto para nuestra espiral adyacente a la principal de investigación, se observó la siguiente evolución:
-La profesora experimentó una evolución en su manera de afrontar las cuestiones referidas a la dinámica del grupo: fue siendo más capaz progresivamente de percibir y aislar motivos concretos causantes de disrrupciones, y al mismo tiempo de idear y poner en práctica medidas determinadas para atajarlos.
Se puso de manifiesto un avance progresivo en su control de la situación y en la confianza en sí misma para dominar los problemas que se van presentando.
-Los alumnos también parecieron responder favorablemente a esta evolución y, a pesar que el avance no resulta espectacular, las mejoras resultaban estimulantes para ellos y se encuentraban bastante más cómodos que al principio.

Aunque los problemas de dinámica de grupo no estaban totalmente solucionados, tal como se pone de manifiesto en las últimas sesiones, se produjo un considerable avance por parte de la profesora en su capacidad de control de la situación y por parte de los alumnos en cuanto a mejora de actitud y grado de satisfacción.

Este avance nos permitió perseverar en el intento de llevar a cabo nuestra investigación con este grupo de alumnos (y de esperar incluso una buena evolución del proceso). Así pues, retomamos en este punto nuestra espiral principal de investigación en la fase donde la dejamos: al comienzo de la Fase de Acción 2, previo recordatorio de los aspectos más importantes tratados en la Fase de Ación 1 (con repercusiones para la continuación con la nueva etapa).

ANEXO IV.4
Planificación de las actividades incorporadas a la Fase de acción 2, a partir de la revisión del plan primitivo una vez finalizada la Fase de Acción 1

Tabla 17: Planificación de las actividades incorporadas a la Fase de acción 2, a partir de la revisión del plan primitivo una vez finalizada la Fase de Acción 1.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES	METODOLOGIA	VALORACION E INSTRUMENTOS DE OBSERVACION	T
-Repasar los puntos fundamentales sobre los Números Racionales que hay que dominar para avanzar hacia la construcción de los conceptos de Número Irracional y Número Real, y aclarar aquellos aspectos que se registraron como problemáticos en la Fase de Acción 1. -Reconocer esos puntos como importantes para avanzar en la comprensión de los contenidos correspondientes a la Fase de Acción 2 y hacer un esfuerzo por fijarlos.	-La idea de infinito en el sistema de notación decimal. -Orden en el sistema de notación decimal. -Correspondencia entre la notación fraccionaria y decimal de los números racionales -Densidad en los números racionales expresados a través de notación fraccionaria. -Representación en la recta de números racionales en distintas notaciones* -Construcción del concepto de Número Racional a través de sus distintas representaciones y la interrelación entre ellas.	-Cuestionario de Repaso	-Trabajo individual de los alumnos durante las vacaciones sobre el Cuestionario y Puesta en Común en clase.	-Diario. -Recogida de los trabajos, archivo de copias. -Primer anáisis de resultados. -Grabación en vídeo de la Puesta en Común.	1 1/2 h

-Establecer un criterio de correspondencia entre los números y los puntos de la recta: la medida del segmento con origen 0 y extremo el punto, con respecto del segmento unidad. -Explicitar si, en base al criterio anterior y a sus concepciones en cuanto a conmensurabilidad (o inconmensurabilidad) de dos longitudes, creen que a todos los puntos de la recta corresponden números racionales. Y, en caso de que así fuera, si los números racionales llenarían la recta. -Explicitar cómo influye el contacto con los números irracionales en la contestación a esta cuestión.	-Criterio de asignación de números a puntos de la recta.	-F14	-Trabajo en parejas y Puesta en Común.	-Diario. -Recogida de los trabajos, archivo de copias. -Primer anáisis de resultados. -Grabación en vídeo de la Puesta en Común.	1 1/2 h

-Ubicar distintos tipos de números estudiados en sus conjuntos correspondientes. -Organizar los conocimientos adquiridos, encajándolos en el esquema habitual	Números Racionales: - Origen / definición intuitiva / nombre. - Notación / representaciones. -ORDEN -OPERACIONES (principales, secundarias, no permitidas) - propiedades de las operaciones -Razones para la ampliación del conjunto de los Números Enteros. -Conjuntos numéricos que incluye el conjunto de los N. racionales.	-F15	-Trabajo en grupos de cuatro sobre F15 y Puesta en Común.	-Diario. -Primer análisis de resultados, sobre la pregunta 2. -Grabación en audio de la Puesta en Común.	1

-Examen (1 h. + 1/2 h. después para corrección):
.Constará de cuatro ejercicios cerrados sobre los contenidos vistos, para contestar por escrito durante una hora.
.Añadir -con categoría de **pregunta voluntaria** para subir nota- la **Cuestión de Investigación**:
"Un genio ha colocado todos los números racionales en los puntos correspondientes de la recta numérica. ¿Crees que esos puntos llenarían toda la recta o que, por el contrario, habría puntos sin marcar?"

-Puesta en Común y Tarjeta de valoración de la experiencia.

ANEXO IV.5

Resultados comparados de la 2ª y 3ª evaluación en los distintos grupos de 1º de B.U.P. del Instituto Albaycín. Curso 1993-94.

NFORME DE EVALUACION
.B. ALBAYZIN
RANADA (GRANADA)
IVEL: BUP CURSO: 1
NFORME DE SEGUNDA EVALUACION FECHA: 21 de Marzo de 1.994
ORCENTAJES DE SUSPENSOS POR GRUPOS EN NOTAS DE CONOCIMIENTOS .

ASIGNATURAS / GRUPOS	1 A	1 B	1 C	1 D	1 E	1 F	MEDIA
LENGUA	48,5	41,1	57,5	76,4	81,2	47,2	58,3
INGLES	42,8	47,0	51,5	73,5	~~68,7~~	51,6	55,7
FRANCES	-----	-----	-----	-----	-----	40,0	40,0
DIBUJO	25,7	35,2	15,1	47,0	6,2	16,6	24,5
MUSICA	14,2	2,9	6,0	29,4	28,1	11,1	15,1
HISTORIA	40,0	47,0	36,3	17,6	50,0	36,1	37,7
ETICA	-----	-----	-----	2,9	0,0	14,2	4,3
RELIGION	0,0	2,9	15,1	-----	0,0	4,5	5,1
MATEMATICAS	45,7	44,1	33,3	47,0	31,2	41,6	40,6
CIENCIAS NATURALES	28,5	23,5	27,2	23,5	40,6	47,2	31,8
EDUCACION FISICA	2,8	2,9	9,0	5,8	6,2	13,8	6,8
SEGUNDO IDIOMA	0,0	0,0	0,0	0,0	20,0	0,0	3,1

NFORME DE EVALUACION
.B. ALBAYZIN
RANADA (GRANADA)
IVEL: BUP CURSO: 1
NFORME DE SEGUNDA EVALUACION FECHA: 21 de Marzo de 1.994
UM. DE ALUM. CON 'N' ASIG. SUSP. POR GRUPO EN NOTAS DE CONOCIMIENTOS

GRUPO/AS SUSP	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TO
BUP1 A	13	3	5	3	0	4	4	3	0	0	
BUP1 B	11	3	4	4	5	4	2	0	0	1	
BUP1 C	9	4	5	5	3	3	3	0	0	1	
BUP1 D	6	3	5	3	6	6	3	1	0	1	
BUP1 E	5	1	7	6	2	7	3	1	0	0	
BUP1 F	11	6	3	4	1	3	5	1	0	2	

INFORME DE EVALUACION
I.B. ALBAYZIN
GRANADA (GRANADA)
NIVEL: BUP CURSO: 1
INFORME DE TERCERA EVALUACION FECHA: 03 de Junio de 1.993
PORCENTAJES DE SUSPENSOS POR GRUPOS EN NOTAS DE CONOCIMIENTOS

ASIGNATURAS / GRUPOS	1 A	1 B	1 C	1 D	1 E	1 F	MEDIA
LENGUA	54,2	44,1	39,3	55,8	65,6	42,8	50,2
INGLES	34,2	50,0	54,5	70,5	75,0	56,6	56,5
FRANCES	-----	-----	-----	-----	-----	20,0	20,0
DIBUJO	28,5	29,4	9,0	23,5	3,1	11,4	17,7
MUSICA	17,1	8,8	6,0	11,7	6,2	11,4	10,3
HISTORIA	34,2	29,4	24,2	17,6	28,1	28,5	27,0
ETICA	-----	-----	-----	0,0	0,0	0,0	0,0
RELIGION	2,8	2,9	0,0	-----	0,0	0,0	1,4
MATEMATICAS	45,7	41,1	30,3	44,1	37,5	28,5	37,9
CIENCIAS NATURALES	34,2	23,5	27,2	26,4	37,5	42,8	32,0
EDUCACION FISICA	8,5	8,8	3,0	5,8	0,0	2,8	4,9
SEGUNDO IDIOMA	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

INFORME DE EVALUACION
I.B. ALBAYZIN
GRANADA (GRANADA)
NIVEL: BUP CURSO: 1
INFORME DE TERCERA EVALUACION FECHA: 03 de Junio de 1.993
NUM. DE ALUM. CON 'N' ASIG. SUSP. POR GRUPO EN NOTAS DE CONOCIMIENTOS

GRUPO/AS SUSP	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
BUP1 A	16	3	2	1	1	2	5	4	0	1	0	35
BUP1 B	16	1	2	4	1	5	3	0	1	1	0	34
BUP1 C	14	5	3	2	3	3	2	0	1	0	0	33
BUP1 D	8	3	9	5	3	1	2	2	1	0	0	34
BUP1 E	7	3	9	3	2	6	1	1	0	0	0	32
BUP1 F	13	6	3	2	2	5	2	2	0	0	0	35

ANEXOS DEL CAPITULO V

ANEXO V.1
Actividades incorporadas a la Fase de acción 2.

Cuestionario de Repaso

1) A la pregunta "¿Conoces algún número con infinitas cifras?" algunos alumnos de 1ºE y de 1ºG del Instituto Albayzín responden que "Hay muchos números con infinitas cifras porque puede haber infinitos números".
¿Sabrías explicarle la diferencia entre que haya infinitos números y que haya números con infinitas cifras? Puedes dar ejemplos para que lo entienda mejor.

2) a)¿Cuál es el número <u>positivo</u> más grande que conoces? ¿Y el número <u>positivo</u> más pequeño?
b) ¿Cuál es el número más grande que conoces? ¿Y el más pequeño?

3) Ordena de menor a mayor:
4,573; 4,56979; 4,55888....; -4,5597; -4,573; -4,56979; -4,55888....; -4,5597

4) Escribe en forma de fracción

$1,7=$

$1,\overset{\frown}{7}=$

$2,25=$

$2,\overset{\frown}{25}=$

$2,2\overset{\frown}{5}=$

$3,0\overset{\frown}{78}=$

$3,07\overset{\frown}{8}=$

VOLUNTARIOS:

$0,7\overset{\frown}{9}=$

$0,\overset{\frown}{9}=$

0,12345678910111213 ... =

5) Señala la respuesta correcta en cada apartado Y JUSTIFICA POR QUE LA HAS ELEGIDO

a) Una fracción cualquiera

1. Siempre se puede expresar en forma decimal, y el decimal puede ser de cualquier tipo: finito, periódico (puro o mixto) o infinito no periódico.
2. Siempre se puede expresar en forma decimal, salvo si es de la forma 8/4, 6/3, 35/5, etc...
3. Siempre se puede expresar en forma decimal, y el decimal puede ser finito o periódico (puro o mixto).
4. No siempre se puede expresar en forma decimal.

b) Dado un decimal finito o periódico
1. Siempre se puede expresar en forma de fracción.
2. Sólo se puede expresar en forma de fración si es finito.
3. Sólo se puede expresar en forma de fracción si es periódico.
4. Sólo algunos de ellos se pueden expresar en forma de fracción.

-VOLUNTARIO: ¿Qué ocurre en el caso de 4,9999...?

6) Explica qué relaciones hay entre las fracciones y los decimales periódicos.

7) a)¿Cuántos numeros racionales hay entre 6/8 y 7/8?
b) Si es posible, escribe números racionales que estén entre 6/8 y 7/8.
c) Si puedes, da uno o más procedimientos para obtener números racionales que estén entre 6/8 y 7/8.

8) ¿Qué diferencia hay entre Número Racional y Fracción?

9) Considera los siguientes números racionales:
5/6; -1/4; 2/4; 6/5; 0,25; 0,75; 1,2; 36,87; 4,555....; 12/16; 11/8; 6/8; 4/8; 2,36666...; 0,750

A cada uno de ellos,
-¿le corresponde un punto de la recta?
-¿puedes hallarlo?
-¿puedes explicar el procedimiento que has empleado en cada caso?

-Tarjeta 1 sobre el Cuestionario de Repaso:

Imagina que tienes que explicar a alguien, de la forma más correcta y completa posible, qué son los números racionales y cuáles son sus representaciones. ¿Cuál de estas explicaciones elegirías?:

a) Los números racionales son lo mismo que las fracciones

b) El número racional es un conjunto de fracciones equivalentes entre sí.

c) Todas las fracciones equivalentes entre sí tienen una misma representación decimal, que puede ser finita o infinita periódica. Un número racional es aquel que se representa mediante un decimal finito o periódico y mediante todas las fracciones equivalentes que corresponden a ese decimal. (Los números enteros también son racionales porque se representarían mediante fracciones de denominador 1, y todas sus equivalentes, y mediante una expresión deicmal con ceros a partir de la coma).

d) Los números racionales son los que se pueden representar en forma de fracción y en forma decimal (el decimal puede ser finito, infinito periódico o infinito no periódico).

e) Los números racionales son las fracciones y los enteros, y también los decimales finitos o periódicos.

Explica por qué las otras explicaciones son incorrectas o incompletas.

-Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Repaso:

Representa en la recta numérica:

a) 0,75; 12/16; 0,750; 6/5; 11/8; 6/8; 2/4; 4/8

b) -1/4; -6/5; 0,25; 1,2; 36,87; 4,555....; 2,36666...; 1,200

En los casos en que no esté claro qué procedimiento has utilizado para dibujarlos, explícalo.

ANEXO V.2

Resultados generales de las cuestiones de investigación de la Fase de acción 2.

Nota: Las siguientes **Observaciones** son **Generales** para todas las tablas que aparecen en lo sucesivo:

A. Ausente
* Observación interesante o curiosa
E: Error
Cn: Copia del alumno número n
( ): Clasificación dudosa

Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Repaso

Tabla 18: Resultados de la Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Investigación.

A	1.FP	1.FI	1.DF	1.DP	2.FE	2.RD	2.RR	2.RN	O
1	1*	1*	5	5	1	1	1	1	*
2	5E	6E	5	2	2	1	2	2	E
3									A
4	5E	6	7	6	4	4	4	3	E
5	2	3	6	6	4	4	4	3	
6	1	5	5	1	1	1	1	1	
7	4	5	(3)	2	1	1	1	1	
8	5	4	5	2	1	3	1	1*	*
9	5E	6E	4	2	2*	1	2	2*	E*
10	1	1	7	4	1	4	1	2	
11	1	1	2	1	1	1	1	1	
12	1	1	7	6	4	4	4	3	
13	5E	6E	5	5E	2	1	2	2	E
14	4	5	5	2	2	2	2	2	
15	1	4	1	1	1	1	1	1	
16	5E	6E	5	6	2	2	2	3	E
17	1	1	3	6	1	3	(1)	1	
18	5E	6E	1	1	2	2	2	2	E
19	5E	6E	5	2	2	1	2	2*	E
20	1	3	1	1	1	1	1	1	
21	2	3	3	6	1	2	1	2	
22	1	1	(3)	1	1	1	1	1	
23	1	1	5	1	1	2	1	1	
24	1	1	(1)	1	1	1	1	1	
25	1	3	1	1	1	3	1	(2)	
26	2	3	1	1	1	1	1	2	
27									A
28	1	1	5	2	1	(2)	1	2*	*
29									A
30	4	3	5	6	1	3	1	3	
31	1	1	(1)	6	1	3	2	1	
32	1*	1	1	5	1	1	2	2	*

Los alumnos señalados con la marca * volvieron a hacer el ejercicio en casa, a iniciativa propia. En esta tabla se constatan los nuevos resultados:

Tabla 19: Resultados de los alumnos que repitieron en casa la Tarjeta 2

A	1.FP	2.FI	3.DF	4.DP	5.FE	6.RD	7.RR	8.RN	O
2	1	4	5	2	1	1	1	2	
3	2	2	5*	(3)	1	2	1	2	* C21
17	1	1	1	5	1	1	1	1	
19	1	1	(2)	1	1	1	1	(1)	
21	2	2	5*	(3)	1	2	1	2	*
30	1	4	1	2	1	1	1	1	
31	1	1	1	1	1	1	1	1	

Como puede ovservarse en la tabla precedente, algo menos de 1/4 de los alumnos volvió a repetir el ejercicio en casa a iniciativa propia, para constatar su aprendizaje en esta cuestión.

Los resultados mejoraron en todos los casos, pero volvieron a plantearse problemas con los decimales finitos y periódicos, y con los racionales negativos (quizá en este último caso la razón se deba a que el tema no fue abordado con detenimiento en clase).

Cuestión de Investigación 1

Tabla 20: Resultados generales de la Cuestión de Investigación 1.

A	1. Decimales Infinitos		2. Procedencia			3. Criterios empleados				O
	1.1. TIPOS	1.2. EJEMPLOS	2.1. D. Periódicos	2.2. D. No Periódicos		Aceptar		Rechazar		
				a)	b)	Periódicos	N.P.	Periód.	N.P.	
1	1bc / 2a1	1bc / 2b1		1*		1cd / 3	1c/2a1/3			*
2	1bc	1bc	1			4				
3	1bc	1bc				4				
4		1b	2			4				
5	1bc	1a/2a1/2b1	(2)	1						DS
6	1bc / 2	1bc/2a1/2b1	1	1 / 3E		4			1c	DS/E
7	1 / 2	1b / 2b2	1	1*	b					DS*
8										A
9	1bc / (2)	1bc / 2a2	(1)	3		2a1	2a12*			DS*
10	1 /1c	1bc	1			1c				
11	1bc / 2	1bc /2a2/2b1	1	NS	b	1e / 2c	1d / 2c			
12	1abc	1abc	1			1d				DS
13	1 / 1c	1bc	1			3				
14	1	1c	2			1e				
15	1bc / 2	1bc / 2b2	1		2	1d	1d			
16	1 / 2	1b / 2b1	1		NS	1d				
17	1 / 1c / 2	1bc / 2b1	1		NS	1c			1c	
18	1 / 1c / 2	1bc / 2b1	1		NS	1d	1d			
19										A
20	1bc / 2	1bc / 2a1	1	1		1d / 2a1	1d / 2a1			
21	1bc	1bc								
22	1b / 2	1b/2a1/2b2	1	1	b	2a1	2a1*			DS*
23	1bc / (2)	1bc / 2a2	(1)	3		2a1	4			(C9)
24	1bc	1bc	1			1de				
25	1bc / 0 / 2	1bc / 0 / 2b2	1		b			1a	1c	
26	1 / 1c	1bc	1			1d				
27	1abc	1abc	1			1d				

28	1abc	1abc	1/2			2				
29	1bc/2	1bc/2a12/2b12	1	1	b	4			1a	DS
30	1bc	1bc	1							
31	1bc	1b*c	1			1d/3				*
32	1bc	1bc	1*							*

Observaciones Particulares:

DS: No estuvieron el primer día (8-2-94) y contestaron la cuestión al principio de la clase siguiente (9-2-94)

(Todos los alumnos que contestan a la cuestión el segundo día, excepto una alumna, en total 5, mencionan decimales infinitos no periódicos de distinto tipo; este es un dato importante para tener en cuenta en el recuento de las frecuencias).

Ficha 14

Tabla 21: Resultados generales de la cuestión de investigación F14.

A	I							II					OII	OG
	1			2		3.	OI	1	2		3	4		
	1.EV	2.RG	3.CG	1.TP	2.MP	PM			1.E	2.TN				
1	3	1	2	2.3	2a	1	1a	1	1	9	5	/		
2	2	3	(3)		(3)	(2)		1	1	2/4	3	3		
3							C2	1	1	2/4	5	/		

4	2	3	(3)					1	1	7	3	3		
5	3	3	2	2.3	1a	2	1a´	1	1	9	1a	3		
6	1	3	(2)	(2.1)	1b	1	1a	1	1	2/3*	1a	2	*	
7	2	1	2	2.3	1a	2		1	1	7	5	/		
8	2	3	3			(2)		1	1	NC	1a/3	2/3		
9	2	2	2	2.3	1a	(1)	1a´	1	1	7	5	/		
10	2	1	2		(3)	(1)		1	1	7	1a*	2	*	
11	1	(3)	2	2.2	1a	1	1a/E	1	1	8	(3)	3		
12	1	2	1	1	1a	1	1a´	1	1	7	3	3		
13	2	3	(2)		(3)	(2)							C12	
14														A
15	1	2	1	1	1a	(2)		1	1	7	(3)/2	3		
16	2	3	(3)				C?	1	1	7	1a	3		
17	2	1	1	1	2a	1		1	2		3	3		
18	1	2	1	1	1a	(2)		1	2		4	2		
19	3	2	(1)		3	2	C?	1	1	5	5	/		
20							C26	1	1	5	1a	2		
21	2	3	3				1a C?	1	1	6	5	/	*SD	
22	1	2	1	2.3	1a	2		2	1	1	1a/6	2		
23	2	3	3					(2)	1	5	6	3		
24	1	3	3					1	1	9E	1a/(3)	2	E	
25	2	1	2	2.3	1a	2		1	1	7	2	3		
26	2	2	2	2.3	1a	2	1b	2	(1)	1/5	5	/		
27	1	3	3			(2)	1a´	1	1	1=2/4	1a	2		
28	3	2	3			2	1a/E	2	1	7	6	3	E	
29														A
30														A
31	3	2	2	2.2	1a	1		1	1	7	(2)	3		
32	2	3	(3)				C?	1	1	1	5	/	C?	

Observaciones Particulares:

Para distinguir las observaciones relativas a la Pregunta I, las relativas a la Pregunta II y las Observaciones generales en esta Cuestión de Investigación, utilizaremos los códigos OI, OII y O, respectivamente.

En la columna correspondiente a OI, los nuevos códigos se refieren a :

1. Asigna números decimales:
   - 1a. En algunos casos (si es sólo en el caso de 1,5 se registrará como 1a´)
   - 1b. En todos los casos.

(En la asignación de números decimales a puntos de la recta, los alumnospueden hacerlo directamente o asignando una fracción y luego pasando a su representación decimal. Sólo registraremos en las Observaciones (con el código *SD), aquellos casos en que los alumnos hayan asignado números decimales en primera instancia, por suponer que tiene relación con el procedimiento de asignación. Si bien podría pensarse que esto podría deberse a una tendencia a transformar las fracciones en su expresión decimal (proveniente quizás de la etapa anterior de EGB), en la actividad F12 los alumnos sólo asignan fracciones a la conmensuración de parejas de longitudes (una niña nada más pasa la fracción a expresión decimal en uno de los casos).

PF: El alumno atribuye a pi la procedencia de una fracción (Longitud/Diámetro).

<u>-Nota.</u>- Las alusiones de los alumnos sobre el origen de Pi son siempre dudosas e imprecisas. Ninguno alude a la expresión decimal de una proporción inconmensurable.

Cuestión de Investigación 2

Tabla 22: Resultados generales de la Cuestión de Investigación 2. Pregunta 1.

A	a) E	a) R	a) D	b) E	b) R	b) D	c) E	c) R	c) D	d) E	d) R	d) D	e) E	e) R	e) D	O
1	1	4	1	1	4	1	2	4	(4)	2	5	3/(5)	2	5	3/(5)	
2	1	4	1´	3	/	/	3	/	/	3	/	/	3	/	/	
3	1	4	1´	3	/	/	3	/	/	3	/	/	3	/	/	
4																C17
5	1	4	1´	1	4	(1u´)	2	2	/	2	1´	/	2	2	/	
6	2	4	4	2	4	5	2	1/2	/	2	1	2	2	5	2	
7	1	4	1	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
8	1	4	1´	2	3	2	2	4	/	2	5	/	2	5	/	
9	1	4	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	
10	1	4	1	1	4	1	1	2	4	1	2	4	1	2	4	
11	1	4	1	1	4	1u	1	2	2*	1	2	2	1	2	2	*
12	1	4	1	1	4	1	2	2	2/(4)	2	2	2/(4)	2	2	2/(4)	
13																A
14	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	5	2	1	5	2	
15	1	4	1	1	4	1	1	4	1	2	2	/	2	2	/	
16	3	4	4	1	4	1	1	2	4	1	2	4	1	2	4	(C11)
17	1	4	1	1	4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
18	1	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2	5	2	2	/	
19	1	1	1	1	4	1u	2	4	/	2	1/2	/	2	3	/	
20	1	4	1	2	3	/	2	3	2	2	5	/	2	5	/	
21	1	4	1´				3	/	/	3	/	/	3	/	/	
22	1	4	1	1	4	1	2	1/2	/	2	5	3	2	2	2/3	
23	1	3	1	1	4	1	2	3	/	2	5	3	2	5	3	
24	1	1	1	1	4	1	2	1/1´	/	2	5	3	2	4	/	
25	1	4	1	1	4	3	2	2	2	2	2	/	2	2	2	
26	1	4	2	2	2	/	2	2	/	2	2	/	2		/	
27	1	4	1´	1	4	1	2	1/1´	/	2	1	/	2	1	/	
28																A
29	1	4	1	1	4	(1u)	2	4	/	2	1/1´	/	2	4	/	
30	1	(2)	2	1	(2)	2	1	(2)	2	1	(2)	2	1	(2)	2	
31	1	4	1	1	4	1	3	/	/	2	1/2	/	2	1/2	/	
32	1	4	1	1	4	1u	2	1/1´	/	2	5	3	2	5	3	C24

Tabla 23: Resultados generales de la Cuestión de Investigación 2. Pregunta 2.

Alumno	Diferencias Escritura	Diferencias Representación	Observaciones
1	(3)	2´	
2	9	8	
3	9	8	
4	9	8	
5	9	8	
6	9	4	
7	3´	7	
8	9	8	
9	9	8	
10	6	6	
11	3´	5	PF
12	1´	2´	
13	9	8	
14	7	6	
15	3*	1´*	*
16	6	(5)	
17	1´	7	
18	9	8	
19	9	8	
20	(3)	(3)*	*
21	9	8	
22	3	2´	
23	9	8	
24	4´	1´	
25	5	2	
26	9	8	
27	9	8	
28	9	8	
29	6	4E	E
30	5	7	
31	9	2	
32	9	5	

Tabla 5.63: Resultados generales de la Cuestión de Investigación 3.

A	1						2									O
	E			NP			NR				A					
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	
1	X				X´				X				X			
2																A
3																A
4																C1
5	X					X´			X						X	ND
6	X				X´				(X´)					X		
7	X				X´		X								X	
8																A
9	X					X´			X´						X	
10	X					X			X			b				ND
11	X				(X)			X			X					ND
12	X				X´		/	/	/	/				X		
13	X					X´			X´						X	
14																A
15	X					X			X			a				ND
16	X					X			X			b/c				
17	X					X			X						X	ND
18	X				X´				X				X			
19	X					X			X						X	
20	X			X			(X)				X					
21																A
22	X				X			X				c				
23	X					X´				X		d				
24	X					X			X				X			ND
25	X					(X)			(X)			a/b				
26	X					X			X						X	
27	X					X			X			b/c				ND
28	X			X´						X				X		
29	X				X			(X)							X	ND
30																A
31	X				X´*					X		d				*
32																A
T	24	0	0	1+ 1´	2+ 6´+ (1)+ 1*	8+ 4´+ (1)	1+ (1)	1+ 1´+ (1)	11+ 3´+ (1)	3	2	2a 1ab 1b 2bc 1c 1d	3	3	8	24^

Nota: Ver Anexo V.2 para interpretar los códigos del apartado O: Observaciones. (Salvo el código ND, que aparece interpretado en el apartado anterior).

Cuestión de Investigación 1 (bis)

Tabla 24: Resultados generales de la Cuestión de Investigación 1 (bis). Pregunta I.

A	a	a sí	ano	b	b sí	bno	c	c sí	cno	d	d sí	dno	e	e sí	eno	f	f sí	fno	O
1	2	/	1bE 2b 3	1	1c 2a1E 2b 3 4	/	1	1c 2a1 2b1 3 5	/	1	1b 2b1 3	/	1	1c 2b1	/	3	1c	(1b) (2a) 3	E
2	2	/	2b	1	2b1	/	1	2a1 2b1	/	1	2b1	/	1	2b1	/	2	1a	3	
3																			C2
4																			C17
5	2	/	2b	1	1b	/	1	2b1 3	/	1	1b 3	/	1	2a2 2b1	/	2	/	2c 3	
6	2	/	2b	1	2a1E 2b	/	1	2a1 2b1 3	/	1	2a1 2b1 3	/	3	/	2a 2c 3	3	/	2a 2c 3	E
7	2	/	1a	1	1b	/	1	2a2	/	1	2a2	/	1	2a2	/	1	4	/	
8	2	/	1a 2b	1	2b1 3	/	1	2a2 2b1	/	1	1b 2b1 3	/	2	2a	/	1	2b1	/	
9																			A
10	2	1a	/	1	2a1E	/	1	2a1 3E	/	1	2a1 3E	/	2	2a	/	1	1a	/	
11	2	/	1a 2b	1	1b 2a1E 3	/	1	2b2 3	/	1	2a2 2b2	/	1	2a2	/	1	1c	/	
12	1	1c*	/	1	1c	/	2	/	5	2	/	5	1	1b	/	1	1c	/	*
13																			C17

14	2	/	2b	1	2a1E 2b	/	1	2b1R	/	1	2b1R	/	1	1b 2a1´	/	2	/	2a	R
15	2	/	1a 2b	1	2a1E 2b* 3	/	1	1c 2b1 3	/	1	2a1 2a2 2b1	/	1	1b 2b1 3*	/	1	5*	/	*
16	2	/	1a2 1b 3	1	1b 2b 3	/	1	2a1 3	/	3	/	/	1	2a1	/	3	/	/	
17	2	/	5*	1	1c 2a1E 2b 3	/	1	1c 2a1 2b1 3	/	1	2a2 3	/	1	1c 2a1 3	/	2	/	1a 2a 2c 3	*
18	2	/	2b 3	1	1b (4)	/	1	1c 2b1 3	/	1	1b 2b1 3	/	1	2a1 2b1	3	3	1c	2a 3	
19																			A
20	2	/	2b	1	1b 2b	/	1	2a1 2b1R	/	1	2a1 2b1R	/	1	2a1 2b1R	/	2	/	2a 2c	R
21																			C2
22	2	/	2b 3	1	1b 2b 3	/	1	2b1R 3	/	1	2a2 3	/	2	/	5*	1	(4)	/	*
23	2	/	1a	2	/	1bE	(1)	2b1R	/	1	2b1	/	1	2b1	/	1	1a	/	E
24	2	/	2a1 2b	1	1c 2a1E 2bR 3	/	1	1c 2a1 2b1 3	/	1	2a1 2b2	/	1	1c 2a1 2b1 3	/	2	/	2a 3	E R
25																			C20
26																			C20
27	2	/	2b	1	2b 3R*	/	1	1c 2a1 2b1 3*	/	1	1c 2b1 3	/	1	2a1 2b1	/	2	/	2c 3	R*
28	2	/	2b 3 5*	1	1b 2a1E 3	/	1	2a1 2b1	/	1	1b 2a1 2b1	/	3	2a1 5	/	3	1a	2a	E

29	2	/	1a	1	5	/	1	2a1 2b1	/	1	2b1 5	/	1	2b1 5	/	1	4	2c	
30	2	/	1a	2	/	1a	2	/	1a	2	/	1a	2	/	1a	2	/	1a	
31	2	/	2b	1	1b 2a1E 2b 3	/	1	2b1 3	/	1	1c 2a1 2b2 3	/	1	1c 2a1 2b1	/	2	/	2a 2c 3	
32	2	/	1a 2b	1	1b 2b 5	/	1	1c 2a1 2b1 3	/	1	1c 2a1 2b1 3	/	1	2a1 2b1	/	2	/	3	

Observaciones Particulares:

R: El alumno explicita que la representación exzacta de estos números en la recta no se realiza a través de la expresión decimal, sino a través de la fracción, raíz cuadrada o método de construcción que corresponda, según el caso.

Tabla 25: Resultados generales de la Cuestión de Investigación 1 (bis). Pregunta II.

A	Tipos	Ejemplos	Proced. R	Proded. I	T/E	D	O
1	1bc 2	1bc 2a1.2a2	1	2a1.2a2. 2a3´ 2b	1	2a	
2	1 2	1b.(1a)	2	1E	1	7	E
3	1 2	1b.(1a)	2	2a1	1	7	
4							C17
5	2a2	2a2	3	2a2	1	7	
6	1bc 2	1bc 2a12.2b1	1	2a1	1	2a	
7	1 2	1b 2a2.2b2	1.2	2a2.2a3´ 2b.2b3	2	4	
8	1 2.2a1.2b	1bc 2a12.2b1	1	2a1.2a2. 2b	2	2a	
9							A
10	1bc 2.2a1	1bc 2a12	1"	2a1.2a3E	5	5a	E
11	1 2.2b	1bc 2a2.2b12	1"	2a2 2b.2b3E	2	2´b	E
12	1 2	1b 2a12.2b1	1"	2a1.2a3´ 2b	2	2´a	
13							C17
14	1bc 2a12	1bc 2a1.2a2E	1	2a2	5	5a	E
15	1bc 2a12 2b12	1bc 2a12.2b12	1	2a1.2a2. 2a3´ 2b1.2b2	1	1	
16	1.1bc 2	1bc 2a2	1	2a3´	5	6a	
17	1 2.2a12	1b 2b1.2a12	1	2a1.2a2. 2a3´ 2b	5	2a	
18	1 2.2a12.2b	1b 2a1.2b1	1"	2a1.2a3. 2a3´ 2b	5	2´a	
19							A
20	1bc 2a12.2b12	1bc 2a12.2b12	1	2a1.2a2* 2b	5	1	*
21	1 2	1bE	1	1E	1	7	E
22	1bc 2.2b	1bc 2a12.2b1	1	2a1.2a2 2b	5	2a	
23	1 2	1b 2a2.2b	1"	2a3.2a3´ 2b.2b3E	5	4	
24	1bc 2.2b12	1bc 2a12.2b1	1	2a1.2a3´ 2b	5	2	
25							C20
26	1bc 2.2a12	1bc 2a12.2b1	1"	2a2* 2b	5	1	*
27	1bc 2.2a2	1bc 2a12.2b2	1"	2a1 2b	5	2a	
28	0* 1b (2)*	0* 1b 2a2	1	2a1.2a2 2a3´ 2b	2	4	*

29	1bc 2	1bc 2a12.2b12	1	2a1.2a2. 2a3´ 2b	5	1	
30	1bc 2	1bc, 1cE	1"	4	4	7	E
31	1bc 2a1 2b2	1bc 2a12.2b2	1	2a1.2a2 2b	2	2a	
32	1bc 2.2b2	1bc 2a2.2b1.	1"	2a3´ 2b	2	4	

Examen 2 (Preguntas 1, 4 y 6)

Tabla 26 : Resultados de las Preguntas 1 y 4 del Examen 2.

A	1a	1b	O1	4a FP	4bF I	4c DF	4d DP	4e FD	4f RC	4g NR C	4h RN	4i IN	O2
1	3	4		2	3	1	1	1	1	1	1	1	
2	8	7		5	6	5	4	2	4	4	3	1	*
3	8	7		1	1	7	7	4	7	7	3	3	
4	4	5		2	3	6	6	1	2	7	3	1	
5	2	1		1	4	5	5	1	5	5	1	1	
6	2	1		1	1	2	1	1	1	2	1	1	*
7			A										A
8	8	7		2	3	1	2	1	3	7	1	1	
9	2	2		1	1	2	2	1	2	7	1	1	
10	6	6		4	4	5	1	1	7	7	1	1	*
11	1	2		1	1	2	1	1	1	2	1	1	*
12	5	(1)		1	6	1*/6	2	3	6	7	1	1	*
13	4	3		5*	5*	1	2	3	7	7	3	1	
14	7	6		1	1	2	2	1	5	(1)	2	3	
15	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	
16	5	6		4	4	5	2	2	5	(1)	1	1	
17	7	4		1	1	1	1	1	1	1	1	1	*
18	1	1		5*	6	1	1	3	5	(1)	1	1	
19	8	7		1	1	1	2	1	6	5	1	1	
20	1	1		2	3	1	1	1	2	2	1	1	
21	8	7		4	4	5	2	1	5	5	1	1	
22	2	1		1	1	5	1	1	1	1	1	1	
23	4	5		1	1	2	1	1	1	6	1	1	
24	1	4		1	1	2	1	1	1	1	1	1	
25	3	3		1	1	2	1	1	1	7	1	1	*
26	4	4		2	3	1	2	1	(1)	7	3	3*	*
27	1	2		2	4	1*	1	1	5	7	1	1	*
28	5	2		2	3	1	2	1	2	2	1	1	
29	7	5		1	1	2	1	1	1	1	1	1	
30	5	6		2	3	1	2	1	5	7	1	1	
31	1	1		1	3	5	1	1	1	1	1	1	
32	5	4		4	6	6	6	3	5	7	1	1	

Tabla 27: Resultados de la Pregunta 6 del Examen 2.

A	1	2	A	O
1	1	1	8	4
2	1	1	6	(4)
3	1	1	10	(4)
4	1	1	6	
5	3	3	10	
6	1	1	6	
7				A
8	2	(2)	5	
9	2	2	2'/4	
10	2	2	2	
11	2	2	1b/2*	*
12	2	2	1c/2	
13	2	2	7	
14	1	1	6	4
15	2	2	1a/2	
16	1	3	8	
17	2	2	2	
18	1	1	8	
19	(2)*	1	2	2*
20	2	2	1c	3
21	1	3	8*	4*
22	2	2	1/2/4	
23	2	2	2'	
24	2	2	2/3/5	
25	(1)	1	7/8*	2*
26	2	2	2/3	
27	2	1	1a	(4)
28	1	1	8*	*
29	2	2	4	
30	2	2	1/3	
31	1	1	6	
32	2	2	1a	

ANEXO V.3
Transcripciones de la interacción didáctica sobre las cuestiones correspondientes a la Fase de Acción 2

Dudas Cuestionario de Repaso

Fecha: 2-2-94
Duración Total: 45 minutos
Encuadre en la sesión: Toda la clase (pero cuando comienza la grabación, ya está el primer alumno que interviene escribiendo en la pizarra su respuesta a la primera pregunta del Cuestionario)

1---t: 0:58

Juan escribiendo en la pizarra.

3.AVI/rs	A: Está mal, está mal....
3.AIS/e	A: ¿Dónde está mal?
3.AVI/rs	A: Esta mal, ¡está mal!.
3.PDC/ll	P: Juan, dicen que está mal.
3.AVI/rs	A: Está mal
CA/i	A: ...
3.PIS/p	P: ¿Cómo lo has hecho tú?, el 17/9, ¿cómo lo has hecho?
3.AMC/e	A: No, porque decíamos que siempre que había un periodo ....un 9 ...
3.AMC/e	.Parece que los compañeros le están haciendo indicaciones sobre la regla de conversión de los decimales periódicos,/
3.AVI/as	y él lo corrije.

1.1---t: 1:00

3.PIS/e	P: ¿Alguien lo sabe hacer deduciéndolo con la resta aquella de.... ¿Quien lo sabe en vez de con la reglilla de a ... le quito tanto y le divido en tantos 9... ¿quén lo sabe hacer deduciendo la regla?/
3.PIS/cl	¿Sólo Nuria?
CA/i	A: ...
3.PDC/c	P: Aquello que le quitabas 10 al número para quitarle los periodos, después lo restabas...
3.AMC/e	A: Viene en el libro
3.PVI/as	P: Viene en el libro/
3.PIS/cl	¿Quien lo entiende?/
3.PVI/v	Pues el que lo entienda mejor para él pero quien no lo entienda, como se la olvide la regla está perdido.
CA/i	A: ...
3.PDC/ll	P: El que no, puede pasarle dentro de un mes como, como a este hombre, y se le olvide que hay que restarle la parte entera,/
3.PVI/c	y lo tenga mal./
3.PDC/p	Si lo deduces de la resta, no lo vas a tener mal nunca, porque sabes lo que estás haciendo.
CA/i	A: ...
3.POC/e	P: Está en el libro perfectamente, a quien le interese puede verla./
3.PIS/cl	¿Os van dando lo mismo?
3.AAI/os	A: Sí, sí.

1.2---t: 1:02

3.POC/e	P: ¿Quién ha hecho la parte voluntaria? ¿Quién quiere salir?/

.Un alumno: Javi, levanta la mano.

1.PO/p	Venga Javi.

	Marta, si tienes dudas, luego te lo explico yo a ti, porque la mayoría lo entiende y hay más problemas (...) Bueno, luego te lo explico yo.
1.PO/p	Venga Javi , sal al voluntario.

.Sale Javi y empieza a escribir en la pizarra. Llega a 0,72/90

3.AVI/rs	A: Eso está mal. Está mal. Está mal....
3.AVI/rs	A: No es así
3.PIS/e	P: Un número racional, ¿puede tener arriba una coma, y abajo...? ¿Cómo son, como son las fraciones?
3.AMC/e	A: Sin decimales, sin decimales.
3.PDC/e	P: Arriba un entero y abajo otro entero.
CA/i	A: ... (Comentarios a Javi, que está en la pizarra un poco desconcertado).
(1.PP/t	P: ¿Ya está, Javi?/
3.PIS/cl	¿72/90?, ¿os da a todos?
3.AAI/os	A: Sí
CA/r	A: ...
3.AAI/os	A: No.
3.AAI/ai	A: Sí, pero no te da igual.
CA/m	P: ¿Qué?
3.AAI/ai	A: Que eso no sale.
3.PIS/p	P: ¿Cómo que no sale?
3.AAI/ai	A: Si divides 72/90...
3.AMC/e	A: Te sale 0,80
3.PIS/e	P: Si divides 72 entre 90, ¿qué te pasa?
CA/i	A: ...
3.POC/d	P: Sigue haciendo el 0,9999.....
3.POC/d	P: Ahora lo discutimos también cuando veamos el 0,9999...
3.PIS/e	P: ¿Eso qué es Javi? ¿9/9 qué es?
3.AMC/e	A: Es igual a 1, igual a 1
3.POC/d	P: Vamos a discutir estos dos./
3.PIS/i	¿Qué pasa aquí?
3.AAI/ai	A: Que cuando es periódico, pues como es aproximado, pues el número más próximo, se pone.
3.PIS/i	P: ¿Que se pone el número más próximo?/
3.PIS/cl	Unas veces no se pone el número más próximo y otras veces sí?
3.AAI/ai	A: No, en todas las que da 999...
3.AMC/e	A: Es que cuando es el mismo número en el numerador y en el denominador, te da siempre 1.
CA/s	A: No, pero ...
1.PO/d	P: A ver, quita un momentillo de la pizarra.
3.AAI/ai	A: No, pero no sólo pasa en esos casos, sólo cuando el 9 es periódico.
3.PIS/II	P: Siempre que es 9 periódico, ¿os habéis fijado en lo que pasa?

t: 1:08

3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/ai	A: Se pone uno más
3.PDC/r	P: el 0,999.. era 1; el 0,799999..... era 0,8; el 0,5649999..., ¿cuál va a ser?
3.AAI/ai	A: 565, 565
3.AAI/ai	A: 50
CA/m	P: ¿45?
CA/m	A: 50
3.PVI/as	P: 50. Vale./
3.PIS/i	Y ahora, ¿esto es verdad? ¿o resulta que cuando tiene 9 periodo aproxima, resulta que aproxima?
3.AAI/os	A: Aproximado
3.CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: Lo haces con la regla.
3.PDC/II	P: 0,9999.... La intríngulis está en que 0,9999... es 1; /

3.PDC/p	o sea, por la misma regla salen los demás. Y la intríngulis está en que 0,9999...., como dice Javi, si tú le haces la regla y sale 1, pues 0,999...es 1,/
3.PIS/i	o si no, ¿aquí es que resulta que la regla aproxima y en los demás no?
CA/i	A: ...
3.PDC/a	P: Sí, en 0,4444...la regla no aproxima nada, pone lo que es; y en los 0,999... pues siempre....
2.AI.	
3.AAI/ai	A: Pero sólo en los casos que hay 9 periodo.
3.PIS/e	P: ¿Y por qué?
CA/i	A: ...
3.PIS/i	P: ¿Y por qué 0,999... ... sí los pones?
3.AAI/ai	A: Porque los otros, al hacer la regla siempre va a dar normal.)
3.PIS/i	P: Y éstos, ¿cuando haces la regla no da exacto?
CA/i	A: ...

1.3--t: 1:10

2.PO/ce	P: Vale. Ahora, este número de abajo;/
3.PVI/c	este número tiene mucho problema.
2.PO/ce	Venga, a ver el número de abajo, ¿cuál es?
CA/i	A: ...
2.PE/r	P: Por eso lo pongo voluntario./
3.POC/e	Venga, ¿ese cómo es?
CA/i	A: ...
3.POC/e	P: A ver, ponla./
3.PIS/e	¿Eso es una fracción?
3.AAI/os	A: No, no
3.AMC/e	A: No, no es una fracción,/
3.AMC/ie	pero eso es lo que me sale.
3.AVI/rs	A: No
3.PDC/c	P: Bueno, pero cuando yo digo que pongáis una fracción, lo tenéis que escribir en forma de fracción./
3.PIS/e	Eso, ¿por qué no es una fracción?
3.AMC/e	A: Porque no se sabe el final de cada una.
3.AMC/e	A: Porque una fracción tiene números enteros, y esto no es un número entero.
3.PVI/ad	P: O sea, una fracción tiene que tener en el numerador y en el denominador números enteros, y ya hemos visto que los números enteros no pueden tener infinitas cifras. Luego esto no es una fracción.
(3.PIS/i	¿Y entonces cómo lo apañamos? ¿se puede apañar? ¿Este número viene de una fracción o no viene de una fracción?

t: 1:11

3.AAI/os	A: No
3.PIS/i	P: ¿Puede venir de una división este número?
CA/s	A: No, no porque ... No.
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: A ver, callad./
3.PDC/c	A ver qué ... Nosotros nos encontramos. Parece que la fracción que podía ser no existe. Pero puede ser que haya alguna fracción y nosotros no la sepamos encontrar.
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: No se puede
3.POC/e	P: Porque mira que para encontrar las otras...
3.PDC/I	P: Entonces dice Yanira "¿pero este número puede venir de una fracción?"
3.AAI/os	A: No
3.AMC/c	A: las cifras van aumentando...
CA/r	A: ...

3.AMC/e	A: El resto sólo puede llegar hasta algún ...
CA/r	A: ...
1.PO/p	P: Nuria y después los demás.
3.AMC/e	A: El resto siempre tiene que ser un número menor que el divisor; entonces habrá un momento que el resto se repita, y a partir de ahí, pues se van a formar los periódicos; que se repita un número después que ya haya salido anteriormente ...
3.PVI/as	P: O sea que de una fracción,/
3.PIS/cl	¿está todo el mundo de acuerdo en que de una fracción el decimal que sale, siempre, o es finito, porque se acaba, o es periódico.
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/p	P: Y eso ¿sabéis por qué es?/
3.PIS/i	¿O de una fracción puede salir un decimal que no tenga periodo, que empiece a hacer cosas raras, y nunca tenga periodo?

t: 1:14

CA/r	A: .../
3.AAI/ai	El número pi.
3.PIS/e	P: ¿El número pi viene de una fracción?
3.AAI/os	A: No
CA/s	A: No, pero...
3.PDC/ll	P: Dice Asenjo "El número pi"
3.AAI/ai	A: No, yo no digo que venga de una fracción, yo lo que digo es que el número pi no tiene periodo.
3.PDC/c	P: Bueno, pero lo que estamos diciendo es que si un número infinito que no tiene ningún periodo puede venir de una división.
3.AAI/ai	A: Podría haber una división que diera lugar a ese número.
3.PIS/p	P: ¿Puede haber una división que dé lugar a este número?/
3.PDC/ll	Eso es lo que estaba diciendo Nuria, que no puede haber.
3.AAI/nc	A: No lo sé
3.AAI/os	A: No se puede
3.AIS/e	A: Pues ¿por qué no?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Eso es poner números a la tonta....
CA/r	A: ...
3.PDC/ll	P: Nuria está diciendo antes.../
3.PDC/e	¿Por qué no, Nuria? ¿Por qué cuando tú haces una división no te puede salir un número así, con las cifras de esa manera?
2.AI	
3.AAI/ai	A: Bueno sí, ya creo que sé por qué , porque quizá en un momento dado se va a repetir.
3.PIS/p	P: Pero ¿quizá pueda repetirse o se va a repetir seguro?
3.AMC/e	A: Se va a repetir por narices
3.PIS/p	P: Y una vez que se repita por narices...
3.AMC/e	A: Empiezan a repetirse los demás.
3.PVI/as	P: Empiezan a repetirse todos.)
3.AMC/e	A: Saldría periódico, o puro o mixto.
3.PVI/ad	P: Sale un periódico o puro o mixto; entonces estos números no corresponden a fracciones,/
3.PIS/cl	¿o sí les corresponden?
3.AIS/i	A: Entonces, ya tengo una duda. En el ejercicio de ordenar cuál era mayor, 4,55; usted ponía 888...., ese sería el mismo caso que ese, luego ese sería mayor, porque después del 8 podría haber un 3, un 9, un...
3.PDC/c	P: No, pero es que eso es por el ordenador. Es que en el ordenador no tiene periodo, pero ese es ,888...
3.AIS/c	A: Anda, ¿el 8 es periodo?
3.PDC/c	P: Sí
CA/i	A: ...
1.PO/s	P: Un momento,/

3.PDC/c	es que el ordenador mío no tiene periodo; entonces, cuando yo pongo 8888...así os quiero decir 8 periodo. No quiero decir que luego pueda hacer otra cosa; si pudiera hacer otra cosa yo ya os lo advertiría.
3.AIS/c	A: ¿Todo es periodo?
3.PDC/c	P: El de arriba sí. Este no. Este ya sabéis cómo va.
3.AIS/r	A: Entonces por qué sale un número más cuando tenía el 9 periodo, ¿eso qué es?
3.POC/d	P: ¡Ah! Eso también lo explico aparte,/
2.PE/r	porque ese también lo he puesto como voluntario./
3.PVI/c	Porque esos son más difíciles./
3.PIS/cl	Vale, entonces, estos números que tienen infinitas cifras no periódicas, ¿vienen de las fracciones? ¿se corresponden con las fraciones, o no?
3.AAI/os	A: No
3.PVI/as	P: No se corresponden./
2.PO/ce	Bueno, el (ejercicio) 5./
1.PO/d	Javi, siéntate./
CA/i	.../

.La profesora lee el ejercicio 5

2.PO/ce	expresar en forma decimal, y el decimal puede ser o finito o periódico, puro o es mixto, ¿o hay otras que puedan ser?

2---t: 1:18

3.AAI/ai	A: Yo lo que he hecho ir una por una, e ir explicando ...
3.PVI/ar	P: Muy bien, eso está muy bien./
3.PIS/cl	Entonces, ¿alguien tienen alguna que no sabe por qué no puede ser?
3.AAI/os	A: No
3.AIS/a	A: pero, ¿cuál?
3.AAI/ai	A: Yo he puesto el 2 (la opción 2 del ejercicio 5).
3.PDC/ll	P: Rocío dice que ha puesto el 2, no el 3
3.AAI/ai	A: Yo el 1
3.AVI/as	P: Y otro el 1.
3.POC/d	Venga, pues vamos a ir una por una./
3.PIS/p	¿El 1 por qué no puede ser?
CA/s	A: Porque un...
CA/s	A: Un infinito no periódico...
CA/i	A: ...
3.PDC/a	P: El 1 no es porque acabamos de discutir que los infinitos no periódicos no vienen de fracciones, no se corresponden con ellas.
CA/i	A: ...
CA/m	¿Qué?

2.1--

3.AMC/ie	A: Yo he puesto la 4 porque yo creo que no todas las fracciones se pueden expresar en forma decimal, porque 5/5 es 1.
3.PVI/as	P: Vale,/
2.PO/p	entonces ahora vamos por el 2, (discutiendo la opción 2)/
3.PIS/p	¿puede ser o no puede ser?
2.AI.	
3.AIS/i	A: Pero, ¿cómo lo vas a expresar en forma decimal si sale 2?... Pero a lo mejor sería 2,0
3.PDC/p	P: Pues 2,0 ya está en forma decimal./
3.PIS/e	Y quién sabe la forma decimal más sofisticada?
3.AAI/ai	A: 2,0 periodo
3.POC/e	P: Y otra. Y otra, más sofisticada.
3.AAI/ai	A: 2,19999... No, no, no...
3.PIS/cl	P: ¿2,1999...?
3.AMC/e	A: 1,9999...

3.AMC/e	A: Sería 2
3.PIS/e	P: ¿Eso no es 2?
3.AMC/e	A: Sí, sí es 2
3.PDC/a	P: Eso es 2; lo hemos hecho con la regla; es 2./
3.PSC/c	O sea que, o bien de la forma tonta, o bien de la forma más elegante ya más sofisticada, los enteros también son decimales, digamos son decimales "tontos" ... 9 periodo, por ejemplo, ó 1,0, ó 0,999... ya sí. ¿Vale? Es que hay que saber que a los enteros, nosotros los vamos a considerar decimales. Decimales con ceros decimales, o con el 9999.../
3.PDC/c	Y ahora , la otra cara de la moneda,/

.La profesora plantea la siguiente cuestión escrita:

2.PO/ce	¿un decimal siempre se puede poner en forma de fracción, o no siempre?

2.2---t: 1:21

3.AAI/os	A: Sí, sí
(3.AIS/c	A: Sí, pero ¿cuál sería?
3.AIS/c	A: ¿Cuál sería entonces?
3.PIS/cl	P: ¿Cuál es?
3.AIS/i	A: La 3, ¿no?
3.AAI/os	A: la 3
3.AAI/os	A: la 1
3.AAI/os	A: La 3, la 3
3.AAI/os	A: la 1
3.PIS/i	P: ¿La 1 y la 3 son lo mismo?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/p	P: ¿En qué se diferencian?
3.AAI/ai	A: Pues con las cifras.
CA/s	A: ... Que la 1...
3.PIS/p	P: ¿En qué se diferencian?
CA/s	A: ... Que la 3...
CA/r	A: ...
3.PDC/c	P: No, no es lo mismo. El 1 tiene una forma/
CA/l	...
CA/r	A: ...
1.PA/r	P: A ver si nos callamos, ¿eh?/
3.PDC/ll	El 1 tiene una posibilidad más. Puede ser o puros o mixtos, o no periódicos./
3.PIS/e	¿Una fracción puede expresarse en forma decimal y puede ser un decimal infinito no periódico?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/e	P: Una fración, ¿puede salirle un decimal infinito no periódico?
3.AAI/os	A: No
3.AIS/a	A: ¿Cómo?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: ¿Puede salir un decimal infinito no periódico? ¿sí o no?
3.AAI/os	A: La 3
3.PIS/cl	P: ¿Hay alguna duda ya de la 1?
CA/m	A: ¿Qué?
3.PDC/ll	P: Que decía Nieto , por ejemplo, que él creía que la 1 también podía ser.
3.AIS/c	A: ¿Y no es?
3.PIS/cl	P: ¿La 1, es o no es?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: Una fracción cualquiera, ¿se puede expresar en forma decimal, y el decimal puede ser de cualquier tipo? ¿o sólo puede ser puros o mixtos?
CA/i	A: ...

3.AMC/e	A: Hay una forma que sí. Periódico puro y mixto, sí. Infinito no periódico, no.
3.PSC/c	P: Pues la correcta es la 3.
3.AAI/nc	A: ¡Yo no sé por dónde vamos!
3.PDC/c	P: Estamos todavía en el a) (en el apartado a) de la pregunta 5).
3.AMC/c	A: ¡Ah!
3.PIS/cl	P: ¿Hay alguna duda del a)?
CA/i	A: ...
3.POC/e	P: Vosotros sabréis.
3.AMC/ie	A: Es que infinito no periódico no se puede
3.PVI/ar	P: Pues ya está.
3.AEC	A: Por eso no es el 1.)

2.PO/ce	P: Venga, el b)./

.La profesora considera que la cuestión no ha quedado del todo clara, pero considera que es conveniente pasar a discutir el apartado siguiente por motivos de tiempo.

2.PO/p	Luego el que tenga dudas, que lo pregunte, que es ya muy tarde./
2.PO/ce	¿El b) cuál es?
3.AAI/ai	A: El 1 (la opción 1).
3.PIS/cl	P: ¿El 1? ¿Hay alguna duda de lo que no es? ¿Alguien ha elegido otra?
3.AIS/a	A: ¿La de cuál?
3.AAI/os	A: El 1

2.3--t: 1:25

2.PO/ce	P: A ver, el (ejercicio) 6./
3.POC/e	¿Quién sale a explicar la relación? ¿Qué relación hay, entre las fracciones y los decimales?
1.AS	A: Yo
1.PO/p	P: ¿Sales tú, Asenjo? Venga, sal. Venga Asenjo.

.Asenjo escribe en la pizarra 0,333... y 0,0333...

3.AAI/ai	A: ... Que la única relación que tienen es que esto puede convertirse en fración, y la fracción puede convertirse en esto.
3.AVI/rs	A: Según
3.AVI/v	A: Calla
3.AMC/ri	A: El otro también en otro y salen iguales; es como si este número fuera lo mismo que una fracción, sólo que de distinta manera./
3.AIS/i	¿O no?
3.AVI/as	A: Eso es
3.AAI/nc	A: Pues yo no lo entiendo
3.AAI/ai	A: Que es la misma cosa
3.PVI/ad	P: Es la misma cosa, escrita de distinta manera.
3.AVI/as	A: Exacto
3.PSCc	P: Y entonces, las fracciones, ¿qué decimales pueden tener? O puros o mixtos, y los puros o mixtos tienen su fracción. O sea que cada oveja con su pareja. Y los infinitos no periódicos quedan aparte. Las fracciones ... decimal finito o periódico./ 3.PIS/cl ¿Eso está claro?/
3.PSC/c	Las fracciónes y los decimales periódicos están tal para cual, van cada oveja con su pareja, y los puedes pasar del uno al otro y del otro al uno./
3.PIS/cl	¿Vale?/
2.PO/ce	Venga, el (ejercicio) 7, ¿cuál era?
CA/r	A: ...
1.PO/p	P: Rocío Valenzuela ha dicho que lo quiere decir
CA/s	A: Los números racionales...

3.AAI/ai	A: Que las fracciones... están entre los números dec..., racionales, junto con los números enteros, y un número racional es el cociente entre una fracción.
CA/i	A: ...

3.1--t: 1:28

3.AAI/c	A: En el libro lo pone.
3.PDC/a	P: A ver/los números racionales, los números racionales veíamos que incluían a los enteros, porque si un número es entero, también es racional.
3.AVI/s	A: ¡Hala!,¿sí?
3.AIS/a	A: ¿Cuál racional?
3.PIS/P	P: ¿Cuál era el qué?/
3.PDC/p	¿Cuáles eran los números racionales?
3.AAI/ai	A: Los enteros y los decimales
3.PDC/a	P: Los enteros y los fraccionarios/
3.PIS/e	¿Y qúe diferencia hay entre las fracciones? ¿Cuándo yo hablo de número racional, ¿es lo mismo que si hablo fracciones?, ¿o ahí hay un matiz de diferencia?
3.AAI/ai	A: Porque no siempre todos los números racionales son fracciones.
3.PDC/a	P: Hay algunos números racionales...Bueno si pongo 7/1.../
3.PIS/e	¿todos los números racionales se pueden expresar en forma de fracción? ¿todos, todos se pueden expresar en forma de fracción?
3.AIS/a	A: ¿Todos los decimales?
3.PDC/c	P: Todos los racionales;/
3.PIS/i	¿se pueden expresar en forma de fracción?
CA/i	A: ...
3.PDC/a	P: Y los enteros son 7/1, o 14/2, o 28/3
CA/s	A: Y los enteros
3.PIS/cl	P: ¿Vale?, entonces, ¿los números racionales siempre tienen una expresión en forma de fracción? ¿o no?
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/i	P: Y entonces, por la correspondencia que hemos visto, en decimal, o bien finito o bien periódico. ¿Y qué matiz de diferencia hay entre un número racional y las fracciones?/ 3.PIS/e ¿Qué pasa con las fracciones que son equivalentes?

3.2 y 3.3--t: 1:30

3.AMC/e	A Que las fracciones pueden ser números enteros, y es exacto.
3.PVI/as	P: Bueno pero eso son fracciones, porque 6/1./
3.PIS/e	¿Y qué les pasa a todas las fracciones que son equivalentes?
3.AMC/e	A: Que expresan lo mismo pero de diferente forma.
3.AMC/e	A: Que representan al mismo número racional.
CA/m	P:¿Qué?
CA/m	A: Que representan al mismo número racional
3.PVI/ar	P: Que representan al mismo número racional.
CA/s	A: Sí, pero...
3.PIS/e	P: ¿Todas las fracciones equivalentes tienen el mismo número decimal?, ¿o no? ¿el mismo decimal? ¿Todas las fracciones equivalentes tienen el mismo número decimal o no?
3.AAI/no	A: ...
3.PIS/cl	P: ¿Sí o no?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: Si son equivalentes...
3.PSC/c	P: Son equivalentes: tienen el mismo número decimal son <u>el mismo número</u> racional. Entonces ¿qué diferencia hay entre número racional y fracciones?. Cuando yo hablo de número racional hablo de fracciones, pero teniendo en cuenta que

	todas las fracciones que son equivalentes no son números racionales distintos./
3.PIS/cl	¿Queda claro eso?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/nc	A: No
3.PIS/cl	P: ¿Quién lo ha entendido?
CA/m	A: Que quién lo ha entendido
3.PSC/c	P: Digo, que los números racionales son las fracciones: se escriben en forma de fracción y, por la correspondencia, también en forma decimal, o bien finita o bien periódica. Pero, hay que tener en cuenta que todas las fracciones que son equivalentes no son números racionales distintos./
3.PIS/cl	El 7 y el 21/3, ¿son números racionales distintos?
3.AMC/e	A: No, son iguales
3.AMC/e	A: No
3.PVI/ad	P: Son el mismo, vestido de distinta manera. Otra manera de decirlo.
CA/i	A: ...
CA/i	P: ... ó 7,0.
CA/m	A: ¿Cómo?
3.PSC/c	P: O sea, o se visten de decimales, o se visten de fraciones. Y todas las fracciones equivalentes son el vestido del mismo./ 3.PIS/cl ¿Eso está claro? /
3.PSC/c	Claro, si no tiene más ciencia: que los números racionales son esos, pero con el matiz de que las fracciones equivalentes son el mismo número racional.

4--t: 1:34

.Parece que he pasado a la siguiente pregunta, correspondiente a la representación en la recta de números racionales expresados en distintas notaciones.

CA/s	P: Si tengo la unidad...
3.AMC/e	A: Hay una manera, que es pasar... (parece que se refiere a que para representar 5/6 en la recta se puede pasar la fracción a expresión decimal).
2.PI/i	
3.POC/d	P: Vamos por orden, el 5/6.
3.AMC/e	A: Divides la unidad en 6 partes y coges 5
3.PVI/as	P: Una manera: divido la unidad en 6 partes y cojo 5. Aquí./
3.PDC/p	Otra manera: lo paso a decimales/
3.PIS/e	y ¿qué me sale?
3.AMC/e	A: Pues 0,8333....
3.PIS/i	P: ¿Esto lo podéis representar exactamente?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Exactamente es difícil
3.PDC/p	P: No, porque el 3; pones 3333....
3.AIS/r	A: Es que la que tú has hecho, de 6 partes tomo 5 es la misma que la de 0,83333..., entonces...
3.PVI/as	P: Ya
3.AEC	A: Si uno no se puede el otro tampoco.
3.AEC	A: Da igual
3.PDC/p	P: Pero, Asenjo, espérate un momento. Estoy representando lo mismo, pero si yo no cojo 5 partes, sino que empiezo a dividir entre 10, luego entre 100, luego entre 1000..., y venga, y 3, y 3, y 3...¿Pues no es más fácil ponerlo así que ponerlo de la otra manera? Como son el mismo número...
3.AVI/as	A: Es que esa manera, de dividir en 6 partes es mucho más fácil.
3.PDC/p	P: Es que así me da el exacto y de la otra manera no puedo. Entonces los números hay que vestirlos para lo que nos convenga, y aquí nos conviene así.
2.PO/ce	P: El -1/4
3.AMC/ai	A: Divides la unidad-1
2.PO/ce	P: El -1/4/

3.PVI/ad	Divido en 4,/
3.PIS/e	¿Y cuántas cojo?
CA/i	A: ...
3.PDC/a	P: Divido la unidad./
3.PDC/ll	Esta, ésta vais a tener dudas.
3.AAI/os	A: No
2.PO/ce	P: 6/5
3.AAI/ai	A: Es más de la unidad
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: Dice Juan que vamos a dividirlo, a ver lo que nos sale, y nos ahorramos de... /
3.PVI/c	Porque éste es más complicado./
3.PIS/e	Y ¿qué sale? ¿Qué sale dividiéndolo?
3.AMC/e	A: 1,2
3.PDC/p	P: Pues éste no es, porque divido la siguiente al 1, divido la unidad en 10 partes.../
3.PDC/ll	Pero, como dice Nuria, cojo la siguiente unidad, y otras 5 partes.
3.AMC/e	A: Y coges de esas...
3.PVI/as	P: Y ya puedo coger 6/5./
3.PIS/cl	¿Vale?
2.PO/ce	P: 0,25
CA/i	A: ...
3.PDC/p	P: 1/4, ó divido la unidad en 100 partes y cojo25.

.Toca el timbre.

t: 1:38

1.PO/d	P: Esperaros que acabemos./
1.PE/d	Esperaros que acabemos, porque os interesa a todos./
2.PO/ce	0,75, <u>0,75</u>
CA/i	A: ... 3/4
3.PVI/as	P: Lo mismo que 3/4./
2.PO/ce	1,2
CA/i	A: ...
3.PDC/p	P: Donde estaba 6/5. 6/5 y1,2 en el mismo, porque son el mismo número.
2.PO/ce	P: 36,87. ¿Cómo lo haríais, aunque no lo hagáis?
3.AIS/a	A: ¿Qué?
CA/s	A: Se divide...
3.AAI/ai	A: Se pasa a fracción
3.PVI/as	P: Se pasa a fracción,/
3.PIS/e	y ¿cuánto es?/
3.PIS/i	Entonces, si no podéis partir la unidad en 100 partes, me decís... ¿cuántas unidades cojo yo para esto? ¿cuántas unidades tengo que coger aquí?
CA/i	A: ... Cinco....
3.PDC/p	P: 37. Y de la ultima unidad, divido la unidad en 100 partes y cojo 87 de ellas./
3.PIS/cl	¿Eso está claro o no está claro?/
3.POC/e	Pues el que no entienda algo, que me pregunte luego./
2.PO/ce	4,5555...
CA/i	A: ... (Parece que dicen de pasarlo a fracción).
3.PIS/cl	P: ¿Y eso sabéis representarlo?
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/e	P: ¿Cuántas unidades hay que coger para representarlo?
3.AAI/ai	A: 5
3.AAI/ai	A: 9
CA/i	A: ...
2.PO/ce	P: 12/16./
3.POC/e	Lo simplificáis y lo miráis./
2.PO/ce	.../11./

3.PIS/e	¿cuántas unidades tengo que coger?
3.AAI/ai	A: Se simplifica.
2.PO/ce	P: 11/8./
3.PIS/e	¿Cuántas unidades tengo que coger?
3.AMC/e	A: Dos, dos
3.PVI/ad	P: Una, y la siguiente la divido en 3/8/
3.PIS/e	y ¿cuántos cojo?
3.AMC/e	A: La siguiente 3
3.PDC/c	P: 16,68 y 4/8, ya está./
2.PO/ce	A ver, 2,3, sin periodo./
3.PDC/p	Se pasa a fracción./
2.PO/ce	¿El 0,750, dónde está?
CA/i	A: ...
3.AMC/e	A: Está en el 0,75
3.PIS/cl	P: ¿Está en el 0,75 o no?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/ai	A: Es lo mismo que 3/4
CA/r	A: ...
3.PSC/c	P: 3/4, en el 3/4 está. El 0,75 y el 0,750 es lo mismo;/
3.PDC/II	es que hay gente que dice: como 0,750 es más gordo, lo pongo más para atrás, que eso me lo ponen muchos. Ponen el 0,75 aquí y el 0,750 atras, porque es más gordo. No es verdad, ¿eh?
3.POC/e	Bueno, pues si tenéis alguna duda, ahora en el recreo la vemos.

t: 1: 43

Cuestión de Investigación 1

Fecha: 8-2-94
Duración Total: 34 minutos
Encuadre en la sesión: Los niños llegan unos minutos más tarde, debido a que vienen de una conferencia. Faltan varios alumnos: nueve en total, pero opto por la planificación de la clase tal como estaba prevista. Al principio también hay algunas dificultades con la conexión del vídeo, pero se solucionan.

1.1 -- **t:0:00**
La profesora está repartiendo la Cuestión Escrita a los alumnos, que están colocados en grupos, de la forma habitual:

1.AP/p	A: ¿Dónde ponemos el nombre?
1.PE/a	P: Donde queráis. Poned el nombre arriba, o abajo, donde queráis, y lo más rápido que podáis.

t: 0:06

Luego, da indicaciones sobre la Cuestión propuesta:

2.PO/ce	P: Lo leo: Conoces decimales infinitos -Sí los conocéis-, que pueden ser de diferentes tipos. Escribe ejemplos de cada uno de los tipos de decimales infinitos que conoces, y de algún otro tipo que se te pueda ocurrir./
2.PE/a	Es decir, que si a ti se te ocurre un decimal infinito, el que se te ocurra, todos los que se os puedan ocurrir, los ponéis. /
2.PO/ce	Y luego decís de dónde aparecen;/
2.PE/a	por ejemplo, los decimales periódicos aparecen al expresar fracciones en forma decimal./

2.PE/s	Y alguno puede aparecer de vuestra cabeza, "porque me lo he inventao",/
2.PE/s	y otros los conoceréis de otros sitios, o del colegio o del año pasado, salió un decimal infinito./
2.PO/ce	Todos los que conozcáis, me ponéis el ejemplo,/
2.PE/a	el ejemplo quiere decir el número, por ejemplo, el 0,3333.... aparece de las fracciones y es un decimal infinito periódico. /
2.PP/g	¿Está claro?/
2.PE/s	Ejemplo: pues me ponéis un número, por ejemplo el 0,7777.... aparece, ¿de qué? de la fracción tal, y es infinito periódico.
2.AP/p	A: Ah, por la fracción que aparece, ¿no? O sea, decir la fracción que aparece...
2.PE/a	P: Decir de dónde sale, es decir, si sale de una fracción, o sale de que me lo he inventado, o de dónde sale. Pero lo que quiero es que distingáis entre el ejemplo y el tipo./
2.PE/s	Por ejemplo, este decimal [escribo en la pizarra], éste es infinito;/
3.PIS/e	¿éste de qué tipo es?
3.AMC/e	A: Periódico, periódico
3.AMC/e	A: Periódico mixto
2.PE/a	P: Entonces, éste es un ejemplo de periódico mixto./
2.PO/ce	Quiero ejemplos y luego quiero que me digáis el tipo.
2.PE/a	Todos los que sepáis, ¿eh? Cuántos más me pongáis mejor.

1.2 -- t: 0:13

La profesora se pasea por la clase observando cómo va el trabajo de los alumnos y atendiendo a algunas preguntas individuales que éstos le plantean mientran contestan la Cuestión Escrita. Al hilo, aprovecha para hacer aclaraciones que le parecen significativas o estimular a los demás alunos en voz alta.

CA/i	A: ...
2.PE/a	P: Bueno, pero... de distintos tipos.
CA/i	A: ...
2.PE/a	P: ¿Que? Pues el que no sepa, que no ponga./
3.POC/e	Pero yo creo que conocéis decimales infinitos.
3.PDC/a	P: Los que conozcáis, los os hayan salido del año pasado, los que os podáis inventar, todos los que vosotros manejéis. Y aquí han salido ya. Os recuerdo que aquí han salido, además de periódicos, han salido otros decimales infinitos./
1.PO/a	Así que haced memoria, porque aquí, incluso aquí han salido.

.Los niños siguen trabajando en la Cuestión.

1.PO/a	P: Venga, que no cuesta tanto.
CA/i	A: ...
1.PE/a	P: A ver, no pongo nota. Pongo nota a que me contestéis. Hombre, si me contestáis con desgana o no me contestáis, pues pongo nota negativa
1.PA/r	P: Liñán, la tuya, no la del vecino
1.AR	A: Ya, si es que le estaba diciendo...
1.PO/d	P: Hasta y cuarto
1.AP/d	A: ¿Cuánto queda?
1.PE/a	P: Cinco minutos más.
1AP/d	A: ¿Cuánto tenemos más?
1.PE/a	P: Cinco minutos más./
1.PO/d	La 2 también la contestáis.
1.PE/a	P: Pones la pregunta ahí, y luego la discutimos.
1.PO/d	P: El que vaya terminando que levante la mano
1.PO/a	P: Venga Bárbara, hija, ¿no sabes nada, nada? Haz memoria. Si te quedas mirando a las musarañas, no te va a salir nada.

.Preparo la pizarra para hacerla Puesta en Común.

1.PA/r	P: Liñán, hijo.

.Pongo en la pizarra los encabezamientos de la CI1.

1.PO/d	P: Bueno, quedá un minuto y lo recojo.

.Parece que algunos alumnos quieren darme sus cuestiones

1.PO/d	P: Bueno, quedároslo ahí, y ahora, cuando yo diga, uno de vosotros recoge los trabajos del grupo y me los da.
1.PO/d	P: Oye, los nombres...Ponedme los nombres todos, ¿eh? Uno del grupo que los recoja todos y me los dé.

2.1 -- t: 0:22

1.PO/d	P: Venga, vamos a la Puesta en Común./
2.PO/ce	Un ejemplo, que diga alguien un ejemplo
3.AAI/ai	A: 3,8888....
2.PO/ce	P: Este, ¿de dónde sale? (Pregunta textual).
3.AMC/e	A: De una fracción
3.AMC/e	A: De una fracción
3.PVI/as	P: De una fracción./
2.PO/ce	¿Qué tipo de decimal es? (Pregunta textual).
3.AMC/e	A: Infinito
3.AMC/e	A: Periódico puro, periódico puro...
3.PVI/as	P: Infinito, periódico puro./
3.PDC/c	Todos son infinitos; le ponemos periódico puro, y ya está. Periódico puro.
1.PO/d	Id copiando todo esto todos, ¿eh?
1.AP/p	A: ¿Todos?
1.AP/e	A: ¿Para qué?
1.AV/r	A: Pero si lo hemos copiado ya
CA/i	P: ... /
1.PO/d	Copiadlo todo.
3.AMC/e	A: ... decimal exacto
3.PVI/rr	P: No, pero hemos dicho decimal infinito./
2.PO/ce	¿Esto es un número? (Pregunta textual).
3.AAI/os	A:Sí
3.PIS/p	P: ¿Es un número?
3.AAI/os	A: Sí, sí
3.PIS/p	P: ¿Por qué?
3.AAI/ai	A: Porque se puede calcular y se puede contar
CA/r	A: ...
1.PO/p	P: A ver, uno a uno, que vaya dando razones/
1.PO/p	Javi
3.AMC/ai	A: Se puede calcular
3.PVI/as	P: Se puede operar./
3.PIS/p	¿Tú puedes operar con 3,888...?
	.La profesora escribe dos números en la pizarra, se supone que periódicos, pero no se ven.
3.AAI/os	A: Multiplicando
3.AAI/ai	A: Como 1,5
CA/r	A: ...
2.AI	A: Un momento,/
3.AAI/ai	esos dos números se pueden restar.
3.PIS/p	P: ¿Se pueden restar?
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/p	P: ¿Y por dónde empiezas?
3.AAI/ai	A: Pones 3,8888 (cuatro ochos) y 4,7777 (cuatro sietes)...
3.AMC/e	A: Seño, puedes pasarlo a fracción
3.PVI/ar	P: ¡Puedes pasarlo a fracción!
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: A ver, son el resultado.../

2.PO/p	Bueno, espérate, "se puede operar con ellos". Pero hay que ver bien si se puede operar o no,/
3.PIS/cl	¿se puede operar?
3.AAI/os	A: Sí, sí
3.AMC/e	A: Cuando lo pasas a fracción...
3.PVI/as	P: Cuando lo pasas a fracción, sí/

.Un alumno ha avanzado que los decimales periódicos vienen de una operación, pero no se ha oído porque estábamos hablando. La profesora retoma esta intervención.

1.PO/p	Pablo, ¿qué?/
(3.PVI/as)	¿Vienen de una operación?
3.AVI/as	A: Sí
3.PVI/ad	P: Vienen de una operación. En este caso de la división.
3.AAI/ai	A: Tiene una representación en la recta numérica.
3.PVI/as	P: Viene de una operación, en este caso, de la división./
3.PVI/as	Se puede representar. Tiene una representación en la recta numérica./
3.POC/e	¿Qué más? Algunas razones más por las que esto sea número
3.AAI/ai	A: Está compuesto por cifras.
3.PVI/as	P: Está compuesto por cifras./
3.POC/e	¿Y por qué más?
3.AAI/ai	A: Por eso, porque se sabe
3.PVI/as	P: Y porque se sabe.
3.AVI/v	A: ¡Qué explicación!
3.AMC/e	A: Viene de una operación...
3.AMC/e	A: Se puede operar...

2.2 --- t: 0:24

(PO/ce	P: Bueno, venga, vamos poniendo más números infinitos
3.AAI/ai	A´: Eh, mira éste: 3,1234..../
2.AS	Ponlo.
3.AVI/rs	A: Ese no es
3.AIS/e	A´: ¿Por qué no?
3.AMC/e	A: No te da un número decimal...
3.AIS/a	A: Pero ¿estamos en los racionales? ¿estamos hablando de números racionales?
3.PDC/c	P: No, estamos hablando de números con infinitas cifras.
3.AMC/e	A: Pero, es que, Jose, tú mismo has dicho antes que siempre al dividirse se tiene que repetir el resto de la división
3.AVI/rr:	A: ¿Quién te ha dicho que eso venga de una división? Puede venir de una raiz cuadrada.
CA/i	A: ... raiz cuadrada
3.AAI/ai	A´: Puede venir de una raiz cuadrada
3.AVI/rr	A: Es que si no sabes el final, no puedes multiplicarlo por sí mismo para que dé la raiz cuadrada
CA/m	A´: ¿Qué?
CA/m	A: Lo tienes que multiplicar por sí mismo para...
2.AI	.Un compañero le interrumpe.
3.AAI/ai	A´: ¿Te acuerdas de la raiz cuadrada de 2?
2.PI/i	.La profesora aprovecha la ocasión para intervenir y enfocar la atención en la raiz de 2.
3.PDC/ll	P: Vamos a poner la raiz cuadrada de 2./
3.PIS/e	La raiz cuadrada de 2, ¿qué expresión tenía?
3.AMC/e	A: 1,4142...
3.PDC/r	P: Y veíamos que daría infinita.
3.AVI/as	A´: Por eso
2.PO/p	P: Bueno, entonces, vamos por partes./
3.PIS/i	¿Este de dónde viene, Asenjo? ¿Por qué motivo aparece?
3.AAI/ai	A´: Es que no lo he sacado de una raiz cuadrada concreta.
3.PDC/ll	P: Atentos aquí, ¿eh? Que este es nuestro caballo de batalla.
3.AAI/ai	A: No lo he sacado de una raiz cuadrada concreta; pero lo he puesto como ejemplo.

3.PIS/p	P: ¿Pero de dónde lo has sacado?
3.AAI/ai	A: De invención.
3.PVI/ar	P: De invención, dice Katerina. Que se lo ha inventado./
3.PVI/ar	También vale inventárselo.
3.AVI/as	A´: ¿Por qué no?
3.AIS/e	A: Y eso, ¿por qué va a ser un número?
3.POC/d	P: Ahora lo veremos, si es o no es.
3.AVI/ad	A: Pero yo, inventando ... eso viene de una raiz cuadrada.
3.PVI/rr	P: Entonces, te buscas una raiz cuadrada, y pones su expresión.
3.AVI/as	A´: Bueno, bueno, vale, vale,/
2.AS	sigue.
2.PP	P: Pero entonces, ¿cuál quieres?
2.AS	A´: Espera, vamos a hacer los dos
2.PV/a	P: Vamos a hacer los dos, venga.
3.AIS/r	A: ... de una raiz cuadrada?
3.PDC/c	P: Vamos a ver, vamos por partes. Asenjo ha dado un ejemplo de decimal infinito, y dice que se lo ha inventado./
3.PVI/ar	Como vosotros podéis poner los que se os ocurran, pues éste se lo ha inventado./
3.PDC/c	Que sea un número o no sea un número, eso es lo que vamos a discutir. Esto en principio existe porque él se lo ha inventado; ya veremos lo que pasa./)
2.PO/ce	¿De qué tipo es? (Pregunta textual).

Los niños están copiando lo que la profesora escribe en la pizarra, y a veces participan en la discusión.

3.AMC/e	A: Infinito no periódico
CA/i	A: ...
3.PVI/ar	P: Arbitrario, las cifras son, como diría Katerina, a la tonta. Infinito, con cifras arbitrarias./
3.PIS/cl	¿Alguien sabe lo que es arbitrario?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: No
3.AAI/ai	A: Inventadas
CA/i	A: ...
3.AIS/c	A´: ¿Es un número?
3.PIS/i	P: Bueno, ¿y esto es un número o no es un número?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí es un número
3.AAI/os	A: No
CA/i	A: ...
3.AAI/ai	A: Todo lo que tiene infinitas cifras...
3.AIS/i	A: Yo pregunto, yo pregunto...
1.PO/d	P: Por partes, por partes
3.AMC/ri	A: Bueno, aunque me salga un poquillo, mirad el número de √2. √2 es un número, sin embargo es infinito; ¿porqué el otro no puede serlo?
3.AAI/ai	A: Por que ahí van ordenadas. Ahí van ordenadamente y...
3.AVI/rs	A´: Eso no tiene nada que ver
1.PO/s	P: Un momento, un momento./
1.PO/p	Javi, ¿qué?
CA/i	J: ...
3.AVI/rs	A: Eso no tiene nada que ver./
3.AAI/os	Sin embargo sigue siendo un número.
3.PIS/p	P: ¿Por qué crees tú que es un número?
3.AAI/ai	A: Una razón, porque proviene de una operación
3.PIS/p	P: ¿Este proviene de una operación?
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A´: Es de invención. Pero, ¿puede provenir de una operación? Sí.
2.PVI/rs	P: No, en principio, no.
3.AIS/e	A: ¿De que operación?
3.AAI/ai	A´: De una raiz cuadrada, de una raiz cuadrada puede venir.

3.PVI/rr	P: Pero ese es el caso de las raices cuadradas.
3.AVI/as	A´: Vale./
2.AS	pon la raiz cuadrada; es que yo quería meterme...
2.PO/p	P: Bueno, pero vamos a éste primero, y luego veremos el de la raiz cuadrada./
3.PDC/c	Este nos lo hemos inventado. Y podemos inventárnoslo./
3.PDC/c	Ahora, vamos a ver los criterios que habíais dicho vosotros, a ver si unos ... y otros no.
3.PIS/i	¿Se puede operar? ¿Con este número se pueden hacer operaciones?
3.AAI/os	A: No, no
3.PIS/p	P: ¿No?
CA/r	A: .../
3.AAI/os	No, no..
3.AMC/ie	A: No porque si no se sabe el final, ni lo puedes pasar a fracción, ni puedes...
2.AI	A´: Un momento./
3.AVI/rr	Vamos a ver, no se sabe el final, pero se puede operar con ellos, ¿por qué no?. Ahí hay, serían números infinitos, sin embargo, vamos a poner el caso de la calculadora, sale un número limitado de veces.
3.AVI/rr	A: Pero lo limita.
3.AVI/rr	A: Ya está limitado, eso sí sería un número.
1.PO/s	P: Un momento,/
2.PO/p	no podemos hablar de raíces ahora; ahora estamos hablando de este número. Las raíces luego./
3.PIS/i	¿Viene de una operación? ¿este número viene de una operación?, ¿o viene de inventármelo?
3.AAI/os	A: Viene de inventárselo.
3.AAI/os	A: Viene de una operación.
3.AAI/os	A: Puede venir de una operación.
CA/r	A: ...
3.AAI/os	A: Pero, vamos a poner que fuera...
2.PI/i	P: Vamos a aclarar eso./
3.PDC/e	Vienen de una operación los que vengan de una operación, los que me invento, no.
3.AVI/as	A: Vale
3.PIS/cl	P: ¿Está claro? Que hay decimales infinitos...
2.AI	.El alumno interrumpe para expresar de nuevo su duda.
3.AAI/ai	A: Pero ten en cuenta que puede provenir de una operación
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: El 1,4142....
2.PI/s	.Ante la insistencia de los alumnos, la profesora decide aplazar la discusión sobre los decimales infinitos no periódicos y pasar a tratar el caso de $\sqrt{2}$.
2.PO/p	P: ¡Vamos a éste!/
2.PV/a	Si estáis empeñados en la raiz cuadrada, pues vamos a la raiz cuadrada./
2.PO/p	Este lo dejamos aparcado.

2.3 -- t: 0:28

2.AV/a	A´: Sí, vamos al de la raiz
2.PO/p	P: Vamos a la raiz cuadrada./
2.PO/ce	Motivo por el que aparece./
3.PDC/p	Este decimal, que es 1,4142... y vosotros sabéis cómo van las cifras. Y podéis sacar hasta la que queráis. Que queréis 100.000, pues lo metéis en una máquina, que queréis 200.000, todos los que queráis podéis sacar./
2.PO/ce	Bueno, ¿éste proviene de dónde? (Pregunta textual).
3.AMC/e	A: Ese proviene de una raiz cuadrada.
3.PVI/as	P: De una raiz, de una raiz cuadrada.
2.AI	.Un alumno interviene adelantándose a la formulación de la pregunta escrita.
3.AMC/e	A´: Tipo de decimal: infinito no periódico
3.PVI/as	P: Infinito no periódico./

3.PIS/p	Pero ¿tiene las cifras arbitrarias o no?
3.AMC/ie	A´: No porque no son de mi invención. Esas salen de una operación.
3.PVI/ad	P: Pero las cifras, pero las cifras, no son arbitrarias. Son las que son. Y/yo puedo ir hallándolas./
2.PO/ce	¿Esto es un número (la expresión decimal de r2=1,4142...)?
CA/r	A: ...
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/nc	A: (Silencio)
3.PIS/i	P: ¿Quién dice que sí?
3.AAI/os	A: Yo
3.PIS/i	P: Que esto, el 1,4142.... infinitas cifras...
3.AAI/ai	A: Es una operación
CA/r	A: ...
3.PIS/i	P: ¿Y quién dice que no es un número?
3.AIS/e	A: ¿Por qué es un número?
3.PIS/i	P: Bueno, los que dicen que sí. ¿Por qué eso es un número?
3.AAI/ai	A´: Yo. Porque está formado por cifras
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: ¡Un módulo!? (No se sabe qué significado atribuye el alumno a esta palabra).
3.AAI/os	A: No sé, no se puede contar exactamente porque es infinito...pero es un número.
3.POC/e	P: Más razones por las que sea número.
3.AAI/ai	A: Viene de una operación
3.PVI/ad	P: Viene de una operación, que es la raiz cuadrada
3.AAI/ai	A: Puede representarse en forma de raiz cuadrada
3.PIS/p	P: ¿Puede representarse? ¿Cómo?
CA/r	A: ...
3.AVI/rr	A: ¡Pero es que es la respuesta de una raiz cuadrada!
3.AIS/e	A: ... representar una raiz cuadrada, venga.
3.AAI/nc	A: ¿Qué? ¿Que cómo puedo representar una raiz cuadrada? Pues...
3.PDC/p	P: Quizás lo que quiere decir Asenjo es que lo puedes nombrar. Este se llama raiz de 2
3.AMC/ri	A: Exactamente; ese número, es que ese número; espérate, ese número, al igual que un periódico puro puede "disfrazarse" con una división, este resultado de infinito no periódico puede disfrazarse en forma de radical, ¿eh?
3.AAI/os	A: No
3.PDC/a	P: Es decir, se puede representar como radical. Tú cuando dices √2 estás diciendo lo mismo que cuando dices esto.
3.AMC/e	A: Eso es, lo mismo que cuando dices 3,8888... dices 9...
3.PVI/as	P: Bueno, se puede nombrar o representar con un radical, con una raiz./
3.POC/e	Más razones ¿Hay más razones?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/ai	A: Nada más que con esas ya es un número.

t: 0:30

3.AAI/ai	A: Entre otras cosas, porque cualquier conjunto de cifras es un número. Nadie ha puesto reglas para decir que un número es lo que se puede...
2.PI/i	
3.PDC/r	P: Esto es lo que dice aquí. Está formado por cifras.
3.AMC/ri	A: Pero entonces, no tiene sentido decir si es un número. Todo lo que está formado por cifras, lo es.
3.PDC/r	Parece que pongo en la pizarra un "entero de infinitas cifras" P: ¿Está formado por cifras?
3.AMC/e	A: Infinito infinito no es un número.
CA/r	A: ...
3.AAI/os	A: No es un número

3.AMC/e	A: No. Que no es un número, que no puede haber infinitos si no son decimales.
CA/r	A: ...
3.POC/e	P: Bueno, más razones por las que sea un número.
CA/r	A: ...

t: 0:31

3.AIS/i	A: ... periódico, se puede representar en una línea, ¿no?
3.PIS/i	P: ¿El raiz de 2 se puede representar en una línea?
3.AAI/os	A: no
CA/r	A: ...
3.PIS/i	P: ¿Se puede representar en una línea?
CA/r	A: ...
3.PDC/c	P: Raiz de 2, digo raiz de 2, no 3,888.../
3.PIS/i	¿Este se puede representar en una línea?
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Por favor
3.AAI/ai	A: Un periódico puro tampoco es exacto
3.AVI/rr	A: Pero lo puedes representar en una línea
3.AVI/rr	A: Pero lo puedes pasar a fracción
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Oye, un momentico, un momento. Vale, ya os habéis peleado. Ahora un momento./
3.PIS/e	Decíamos que un periódico puro se podía representar en la recta, exactamente, ¿cómo?
3.AMC/e	A: Porque se pasa a fracción.
3.PVI/as	P: Se pasa a fracción./
3.PDC/r	Y ahora, ¿raiz de 2 se puede representar en una línea exactamente?
3.AAI/os	A: No
CA/i	A: ...
3.AAI/ai	A: Siempre tienenes que seguir dividiendo..
3.PDC/r	P: ¿cuál el 3,8888... ? No, el 3,888..., cojo su fracción... ¿Cuál es la fracción de 3,888...? Y esa sí la puedo representar exactamente.
3.AVI/rr	A: Pero ese número no
3.PDC/a	P: Pero, vamos a ver, es que ese número, lo puedes vestir de 3,8888.... o lo puedes vestir como fracción, y es el mismo número. Y este número sí se puede representar en la recta./
3.PDC/p	Si tú vas al monte, te quitas los tacones y te pones las botas. Para representarlo en la recta le quitas este vestido y le pones otro, pero es el mismo número.
3.AIS/r	A: Pues lo que no entiendo yo es como va a ser igual una fracción que su número, porque en una línea eso no se puede representar, sin embargo su fracción sí. Ahora ya no entiendo por qué son los dos iguales.
3.PIS/p	P: ¿Tú no entiendes porque estos dos son el mismo número?
3.AIS/r	A: Son el mismo, pero es que en realidad ese número en una línea recta no se puede representar y el otro sí. Ahora no entiendo por qué son los dos iguales.
3.PDC/p	P: Eso es lo que decíamos. Este es un vestido del mismo número, y su fracción es otro vestido./
3.PIS/e	Cuando quiero representarlo en la recta, ¿qué vestido le pongo?
3.AMC/e	A: El de la fracción
3.PVI/as	P: El de la fracción,/
3.PDC/a	pero estás representando, son representaciones de la misma cosa. Es la misma cosa.
3.AIS/i	A: Seño, el 3,8888.... lo puedes representar en la recta porque sabes cuál es su periodo. Sin embargo el otro no sabes cuales son las cifras que vienen.
CA/i	A: ...

t: 0:33

.La profesora dibuja en la pizarra un cuadrado de área 2.

3.PIS/e	P: Os acordáis de lo que yo dije el primer día, que dije que lo apuntárais.
3.AAI/nc	A: No
3.PIS/e	P: ¿Qué mide el lado de esto?
3.AMC/e	A: La raíz de 2.
3.PDC/r	P: Y si yo esto lo cojo, aquí está el 0, y me pongo esto, me lo traslado y me lo pongo aquí./
3.PIS/i	¿Este punto qué es?
CA/i	A: ...
3.AAI/ai	A: La raiz de 2, pero no sabes la medida exacta.
CA/r	A: ...
3.PDC/p	P: La medida exacta: esto. Esa es la medida exacta. Exacta.
3.AVI/rr	A: Pero eso es una operación, pero no sabes el final
3. AMC/ri	A: Y de un periódico puro, ¿sabes exactamente el punto?
CA/i	A: ...
2.PO/p	P: No, déjala hablar. Asenjo, déjala hablar. Nuria
CA/m	N: ¿Qué?
1.PO/d	P: Cuenta
3.AVI/rs	N: Que no, que yo eso no lo veo.
3.PIS/p	P: Que no ves ¿el qué?
3.AAI/os	N: Lo que dice él.
3.PIS/p	P: ¿Que dice él?
CA/s	N: No, que dice...
CA/i	A: ...
3.AVI/rr	N: Que la raiz cuadrada no tiene final, que tú puedes saber... Si la trasladas, sí va a ser la raiz cuadrada de 2, pero, que no sabes el número exacto.
3.AVI/rs	A: Vale Nuria. (El tono es de rechazo; parece decir "lo que tú quieras", pero sin estar de acuerdo con ello).
CA/r	.Se ponen los dos a discutir y no se pueden oir.
CA/i	P: ... normas./
1.PO/d	Nadie empieza a hablar hasta que el otro no haya acabado./
1.PA/r	Ya se le ha olvidado. (La profesora reprende al alumno que ha interrumpido a Nuria).
1.AS	A: ¿Puedo hablar yo?
1.PV/r	P: No puedes hablar tú./
1.PO/p	Ahora tiene la palabra Nuria y tú te vas a callar./
1.PO/d	Venga Nuria, acuérdate.
3.AVI/rr	N: Pues eso, que tú la raiz de 2, no sabes el final. Sin embargo, el 3,888... sí lo pasas a fracción, pues sí..., sí lo sabes.

.Toca el timbre.

t: 0:34

CA/r	Asenjo, que se encuentra hoy en todo lo suyo, quiere seguir discutiendo.
1.PO/d	Pero la profesora da por terminada la clase.

Fecha: 9-2-94
Duración Total: 23 minutos
Encuadre en la sesión: En la primera parte de la clase los niños que faltaron a la sesión anterior contestan a la Cuestión Escrita. Al resto les reparto una ficha de trabajo para que puedan empezar a trabajarla en casa.

t: 1:31

.Los niños están colocados en las mesas. La profesora ha puesto los encabezamientos en la pizarra, y parece que está pasando una cuestión.

3.1--t: 1:32

.Retomo la Puesta en Común del día anterior.

1.PO/d	P: Bueno empezamos./
2.PO/p	Vamos a ver los ejemplos, los distintos tipos de ejemplos que han salido. Ayer salió 3,8888... Vamos a ir llevando un poco de orden./
3.PIS/e	Después de los periódicos mixtos y puros, ¿cuáles conocemos también?
CA/s	A: Pues...
3.AMC/e	A: 3,8; 3,123456...
3.AMC/e	A: La raiz cuadrada...
2.PO/p	P: Vamos primero apuntando los periódicos que conozcamos./
3.PIS/e	Los periódicos, ¿son así o son cómo? Otro ejemplo.
CA/i	A: 3,....
3.AMC/e	A: 4,25
3.AMC/e	A: 3,05555...
3.PVI/as	P: Un periódico mixto./
3.PSC/c	Teníamos los puros y los mixtos. ¿Vale? Estos son los periódicos./
3.PIS/e	¿Por qué motivo aparece esto? ¿De dónde sale?
3.AMC/e	A: De una fracción.
3.PVI/as	P: De una fracción./
1.PO/d	Id apuntando todo lo que vayamos haciendo./
3.PIS/e	¿Y éste? ¿y el periódico mixto?
CA/i	A: ... una fracción.
3.PVI/as	P: También./
3.PIS/e	¿Y qué tipo de decimales son?/
3.PDC/a	Pues, periódico puro...
3.AMC/e	A: Infinitos...
3.AMC/e	A: Periódico puro
3.PDC/c	P: Ya hablamos siempre de decimales infinitos, porque lo dice la pregunta. Periódico mixto.

Los alumnos van copiando lo que escribe la profesora en la pizarra y contestando a sus preguntas.

3.PDC/a	P: Vale, y a partir de aquí, además de los periódicos, hubo gente que sacó otros decimales./
3.PDC/c	Por ejemplo, otros decimales infinitos que no eran periódicos.
3.AMC/e	A: La raiz cuadrada
3.AMC/e	A: 0,123456...
3.PIS/p	P: ¿La raiz cuadrada de quién?
CA/i	A: La raiz cuadrada de ...
3.PIS/p	P: ¿La raiz cuadrada de quién?
3.AAI/ai	A: La raiz cuadrada del que sea.
3.PDC/r	P: ¿La raiz cuadrada de 4 también?/
CA/i	No porque...
3.AAI/os	A: No, no, no
3.AAI/ai	A: Raiz cuadrada de 7
3.AAI/ai	A: La de 7
3.AAI/ai	A: La de 11
3.PVI/as	P: La raiz cuadrada de 7./
3.PIS/e	¿Qué te salía la de 7?
3.AAI/ai	A: 3,
3.PVI/rs	P: No
3.AVI/rs	A: Sí
3.PIS/p	P: ¿3 coma qué?
3.AVI/rr	A: No puede dar 3, no puede dar3, porque 3 por 3 son 9
3.AVI/rr	A: Y cuatro por cuatro son ocho.
3.AVI/rr	A: No. Cuatro por cuatro son 16.
1.PO/d	P: Id hablando cuando yo os pregunte, por favor,/
1.PE/r	que si no no nos entendemos.
3.AMC/e	A: 2,645...

3.PVI/as P: Vale,/
3.PDC/a infinitas cifras. Estas son de las raíces que tenían infinitas cifras. Y hemos dicho que podían ser.../

(3.PIS/cl ¿Estaba claro que eran infinitas?
3.AAI/os A: Sí
3.PDC/a P: Que esto no podía recortarse, porque si se cortaba, al multiplicarlo por sí mismo no daba ni 2 ni 7. (Estamos considerando dos ejemplos a la vez: √2 y √7)/
3.PIS/cl ¿Y Estaba claro que no podían ser periódicas? ¿O no?

*--t: 1:34

3.AAI/os A: Sí
3.PIS/i P: ¿Esto puede tener periodo alguna vez?
3.AAI/nc A: (Parece que se quedan desconcertados, y no saben qué contestar).
3.PIS/i P: Esta expresión, conforme vayáis obteniendo los números, ¿puede tener periodo alguna vez?
3.AAI/os A: Sí
3.AAI/os A: No
3.PIS/cl P: ¿Sí o no? ¿Quién dice que sí y quién dice que no?
CA/r A: ...
3.AIS/a A: ¿Podría repetir la pregunta?
3.AIS/e A: ¿Por qué no?
3.PDC/c P: La pregunta es: nosotros sabemos que esto no puede ser finito,/
3.PDC/a porque si en algún momento yo cortara aquí en un número, al multiplicarlo por sí mismo, hemos visto que no daba ni 2 ni 7./
3.PDC/c ¿Vale? Entonces lo que sabemos es que es infinito. Pero nosotros vamos sacando cifras, o bien con la calculadora, o bien con una máquina muy grande que tengamos, o bien a mano, nos tiramos años sacándole cifras./
3.PIS/i Digo, ¿alguna vez nos va a salir periodo? ¿o no?
3.AAI/os A: No
3.AAI/os A: Sí
3.AAI/os A: No, nunca
3.AAI/ai A: Multiplica un periodo por sí mismo, a ver si es igual a la raiz.
3.PVI/as P: Multiplico este número por sí mismo./
3.PIS/e ¿Cómo puedo multiplicar números periódicos por sí mismos?
3.AMC/e A: Tienes que pasarlo a fracción.
3.AVI/ad A: Exactamente, esa es una de las razones.
3.PDC/ll P: Dice Sonia que pasándolo a fracción.
3.AIS/r A: ¿Cómo?
3.PDC/a P: O sea yo cojo un decimal periódico, por ejemplo: 2,6457777... lo multiplico por sí mismo. Entonces dice Sonia que no sabemos multiplicar decimales infinitos, pero lo puedo pasar a su fracción./
3.PIS/i ¿Y qué me daría? Una fracción por sí misma, ¿qué me daría?
3.AMC/ie A: Que no se puede multiplicar
3.AIS/i A: Y entonces, el resultado de esa fracción se supone que sería el número de la raiz.,.
3.PIS/cl P: Mirad, si esto tuviera periodo alguna vez, si lo tuviera. No sabemos si lo tiene. Si lo tuviera, ¿qué pasaría? Que √2 se podría poner , ¿cómo?
CA/r A: ...
3.AAI/ai A: √4
3.PDC/a P: Si esto diera √2, √2 sería igual a una fracción; yo no sé cuál es pero sería igual a una fracción./
3.PIS/i ¿√2 puede ser igual a una fración?
3.AAI/os A: No
3.PIS/p P: No. ¿por qué?
CA/i A: Porque √2...
3.AAI/ai A: Porque tú haces √2, y te sale un decimal, y ¿cómo vas a pasar ese decimal a fracción?
3.PVI/rr P: Bueno, pero si me sale un decimal periódico lo puedo pasar a fracción. /
3.PDC/c Si es que ahí estamos, si esto es un decimal periódico o no.

3.AMC/e	A: Pero hemos dicho que no sale periódico.
3.PIS/p	P: ¿Quién ha dicho que no sale periódico?
3.AMC/e	A: Usted.)

t: 1:36

(3.POC/e	P: ¿Lo habéis mirado en los libros? ¿En el libro habéis mirado si sale periódico o no?
CA/i	A: ... /
3.AAI/os	A: Si tú multiplicas un periódico por sí mismo no te puede salir 2.
3.AIS/e	A: ¿Porqué no?
3.PIS/p	P: Si tú multiplicas una fracción por sí misma, ¿te puede salir 2?
3.AAI/ai	A: Vamos a ver, tú has dicho que 3,8888.... es el mismo número que su fracción.
2.AI	A: Seño
2.PO/p	P: ¿En el libro qué dice?
3.AAI/l	A: Si √2 fuera un número racional, podría escribirse en forma de fracción, siendo además a y b primos entre sí
3.AIS/a	A: Pero como √2...
1.PO/p	P: Déjalo hablar
3.AAI/l	A: Siendo una fración irreducible
CA/m	P: ¿Qué?
3.AAI/l	A: Siendo una fracción irreducible
3.POC/e	P: Sí, ¿y qué dice?
3.AAI/nc	A: ¿Qué?
3.PDC/e	P: Que si √2 fuera una fracción, o sea fuera racional, se podría escribir...
3.AMC/e	A: Que podría escribirse en forma de fracción
3.POC/e	P: ¿Y te dice si eso es verdad o no es verdad? ¿No te lo dice?, ¿no te dice si va a ser infinita periódica o no periódica?
3.AVI/v	A: Si lo pone ahí no va a ser mentira.
CA/m	P: ¿Qué?
3.AVI/v	A: Que si lo pone ahí no va a ser mentira.
3.PVI/rr	P: No, pero el libro no dice que no va a ser una fracción; dice que si lo fuera, se podría escribir como una fracción irreducible,/
3.POC/e	¿y no dice nada màs? ¿Tenéis por ahí los libros?
2.AV/a	A: Sí
2.AV/r	A: No
3.POC/e	P: Mirad a ver si lo tenéis por ahí.
3.AVI/c	A: Aquí pone una cosa muy rara.
3.POC/e	P: A ver, que pone una cosa muy rara, ¿que pone?
3.AAI/l	A: El tipo de demostración que vamos a hacer se llama Reducción al Absurdo, por partir de que √2=a/b, siendo a/b una fracción irreducible, Vamos a llegar a una contradicción: √2=a/b; /
3.AAI/nc	o sea, b√2=a... (Lo lee con una entonación de no entender nada, y cada vez va bajando más el tono).
3.PDC/a	P: Lo que está haciendo el libro... ¿os acordáis que os di una hoja para quien quisiera comprobar que √2 nunca se va a poder poner así?/
3.PDC/c	Lo que hace el libro es la misma prueba, es probar que √2 nunca se va a poder poner así./
3.PVI/c	Esta prueba no es fácil de entender./
3.PSC/c	Se puede probar,/
3.POC/e	y el que quiera intentar entenderlo, yo me quedo con ellos y vemos si entendéis por qué raiz de 2 no puede ponerse como a/b, la demostración ¿vale?/
3.PSC/c	En el libro, te lo demuestra, y una vez que te lo demuestra, te dice: efectivamente, √2 no se puede poner nunca así./
3.PSC/c	El libro lo demuestra,/
3.POC/e	el que esté interesado en entenderlo, luego me quedo con ellos y lo vemos.
3.AIS/c	A: No se va a poner ninguna raiz en fracción, ¿no?
3.PDC/p	P: Ninguna raiz./

3.PDC/a	Bueno, la √4 sí. Las que son exactas, sí./
3.PIS/i	¿Pero qué pasa si no es exacta?
3.AAI/ai	A: Pues pones lo que salga de √2 partido por 1.
3.PIS/p	P: Pero el número que te sale de la raiz de 2, ¿cuál es?
3.AAI/ai	A: Ninguno.
3.AAI/ai	A: Infinitos.
3.PVI/as	P: Tiene infinitas cifras, ¿no?/
3.PDC/a	Pero si fuera una fracción, no puede ser una fración porque las fraciones eran un entero partido de un entero./
3.PIS/cl	¿Hasta aquí estamos?/
3.PDC/c	√2 no se puede poner como una fracción./
3.PIS/cl	Y entonces ¿qué le pasa a su representación decimal? ¿puede ser periódica o no?
CA/i	

t: 1:38

3.PIS/p	P: No ¿por qué?, Sonia
3.AMC/e	A: Porque si fuera periódica se podría poner como una fracción.
3.PVI/ad	P: Porque si tuviera una expresión decimal periódica lo podría pasar a fracción, y el libro dice que eso no puede pasar nunca./ 3.POC/e Y a quien esté interesado en saber por qué, luego lo vemos,/
3.PVI/c	porque no es fácil de entender./)
3.PSC/c	Luego ya sabemos que estas expresiones son infinitas no periódicas./
2.PO/ce	¿de dónde salen? ¿de dónde aparecen? (Pregunta textual).
3.AMC/e	A: De una raiz cuadrada.
3.AMC/e	A: De una raiz cuadrada.
3.PVI/as	P: De una raiz cuadrada./
3.PSC/c	¿Y qué tipo de decimales son? (La profesora formula esta pregunta para sí misma). Pues no periódicos. Infinitos no periódicos./
3.POC/e	Más, más decimales infinitos, que no sean del tipo raiz. ¿Alguien sabía más? Yanira sabía uno.

3.2

3.AAI/ai	A: El número pi.
3.PIS/i	P: ¿El número pi tiene infinitas cifras no periódicas?
3.AAI/os	A: No/
3.AAI/nc	(indecisos).
3.PIS/i	P: ¿Pi qué número es?
3.AMC/e	A: 3,14
3.AMC/e	A: 3,1416
3.AMC/e	A: 3,14159
3.AMC/e	A: 3,14
CA/r	A: ...
3.PIS/i	P: Bueno, ¿cuántas cifras tiene?
3.AMC/e	A: 96
3.AMC/e	A: 92
3.PIS/e	P: ¿96 ó 92?
CA/r	.Los alumnos establecen un clima de ruído, dictándome las cifras
3.PIS/i	P: Bueno ¿Cuántas tiene?
3.AAI/ai	A: Yo tengo aquí un montón.
3.PIS/p	P: ¿Pero esa es la expresión exacta?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/ai	A: Infinitas
3.PIS/cl	P: ¿Tiene infinitas?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/p	P: ¿Y de dónde sabéis vosotros que tiene infinitas?
CA/i	A: Por que...
CA/i	A: Por que.../
(3.AMC/e)	(Parece que aluden a los libros)

CA/r	A: ...
3.PDC/p	P: Hombre, lo que dicen los libros es verdad.
CA/s	A: No, pero...
CA/i	A: ...
3.AAI/os	A: No
3.PDC/p	P: Lo están pensando desde los egipcios, o antes.
2.AI	A: Seño, que yo tengo aquí una cosa.
2.PO/p	P: A ver,
3.AAI/l	A: Se ha calculado este número hasta con1410 decimales. Es posible demostrar que pi no es ningún número racional, es decir que no puede ser puesto ni expresado como cociente de dos números enteros, por grandes que sean/
CA/i	...
1.PO/d	P: A ver, dilo alto.
3.AAI/l	A: Se ha calculado este número hasta 1410 decimales. Es posible demostrar que pi no es ningún número racional, es decir, que no puede ser expresado como cociente de dos números enteros, por grandes que sean.
3.PSC/c	P: O sea, pi no es racional, no se puede expresar como una fracción, y por tanto con un decimal ni finito ni periódico.
CA/i	A: ...

t: 1:41

3.PDC/ll	P: Dice Asenjo que si pi puede venir de un radical./
3.PVI/v	Una buena pregunta.
3.AAI/os	A: No, no, no
CA/r	A: ...
3.AIS/c	A: ¿Por qué se inventó ese número?
3.AIS/c	A: ¿Qué significa pi?
CA/s	A: El área de la....
CA/r	A: ...
3.PIS/i	P: ¿De dónde viene pi?
CA/r	A: ...
3.PIS/i	P: ¿Pi de dónde viene? ¿Alguien sabe lo que significa pi?
3.CA/r	A: ...
1.PO/d	P: Por orden./
1.PO/p	Va Pablo y luego Marisa.
3.AMC/e	A: La división entre la superficie de la circunferencia...
3.AMC/e	A: Entre el radio al cuadrado.
CA/r	A: ...
3.AMC/e	A: El cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.
3.PIS/i	P: Pi es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. ¿De cualquier circunferencia? ¿O de una sola?
3.AAI/ai	A: De cualquiera
3.PIS/p	P: ¿De cualquiera? O sea,/
3.PDC/ll	¿y a vosotros no os parece una cosa curiosa que cualquier circunferencia tenga la misma relación entre su longitud y su diámetro, siempre?
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: Claro, y entonces, esa longitud y ese diámetro son los que están relacionados por esa razón, por pi.
CA/i	A: ...
3.AIS/r	A: ¿Puede repetir?
3.AIS/c	A: ¿Pero de dónde viene?
3.AIS/c	A: ¿Y qué significa pi?
CA/i	

t: 1:42

3.PDC/ll	P: ¿Y por qué...? Dice Pablo que por qué de una división no me salen infinitos periódicos. ¿Qué por qué en una división...?/
3.PIS/i	¿Tú cómo mides la longitud de una circunferencia?
3.AMC/e	A: Con el pi

3.AMC/e	A: Con el pi por R al cuadrado
3.AMC/e	A: 2 por pi por R
3.PVI/rr	P: Pero eso cuando te dan la medida,/
3.PIS/i	¿pero cuando no te la dan?, ¿si tú tienes una circunferencia y la tienes que medir?
3.AAI/ai	A: Pues mides el radio, lo multiplicas por pi.
3.PVI/as	P: Mides el radio, lo multiplicas por pi...
3.AMC/e	A: Y por 2
3.PVI/as	P: Y por 2./
3.PDC/r	No, pero vosotros imaginaros que nosotros pi no lo sabemos estamos buscando, estamos buscando pi, y que es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. O sea que tendremos que medir esas dos cosas para hallar pi./
3.PIS/cl	¿Sí o no?
3.AIS/i	A: Pero una circunferencia cualquiera, ¿no? ¿Eso cómo se mide? Cada circunferencia tendrá una longitud.
3.PDC/p	P: ¡Y un radio! Claro, ahí está la cosa.
CA/i	A: ...
1.PO/d	P: Bueno pues, yo esto os lo voy a dejar propuesto.

t: 1:43

1.AV/a	A: Vale.
1.PP/g	P: Yo iba a dedicar un día a ver, de dónde venía pi y cómo se hallaba su relación. Hay un trabajo, yo había pensado proponeros un trabajo. Rocío Valenzuela me dijo en una ficha, que a mí me gustó mucho además, dijo que a ella se le había ocurrido una manera de poner también nota, aparte de la evaluación, y era que se trabajaran cosas en parejas, sobre números por ejemplo, si ahora estamos trabajando números, se dejaba un día, o un rato para que la gente expusiera lo que había trabajado, lo que había buscado, y entonces vosotros dábais, la clase daba la mitad de la nota y yo la otra mitad
1.AV/r	A: Eso no
CA/r	A: ...
1.PV/r	P: A mí me parece buena idea./
1.PO/d	La propuesta es que yo dejo hasta principio de Marzo a las parejas que quieran investigar de dónde viene pi y cómo se halla.
1.AV/a	A: Yo sé dónde buscar.
1.PO/a	P: Fijaos que os dejo mucho tiempo, hasta principios de Marzo, yo tengo un montón de información.
CA/sl	
1.PA/r	P: Angel. ¿Ahora qué?
CA/sl	
1.PO/d	P: Digo, que si hay alguien interesado parejas, en que la clase de pi la exponen ellos, la preparan ellos./
1.PO/a	Yo lo que puedo hacer es preparar con ellos el trabajo, darles información, decirles dónde pueden buscar... Yo tengo artículos, tengo cosas,/
1.PO/d	pues luego viene a hablar conmigo y me lo dice; cada uno que se busque su pareja, la que quiera./
1.PP/g	Entonces la opción es que si la nota que le damos es mayor que la del examen, pues yo no le cuento la nota del examen, le cuento esa.
1.AP/p	A: ¿Cómo?
1.AV/a	A: ¡Ya está!
CA/i	A: ...
1.PP/g	P: ¿Vale?/
1.PO/d	Bueno entonces, cada uno que se busque su pareja y venga a hablar conmigo fuera de clase, que yo ya...
CA/i	A: ...
1.PO/d	P: Eso para principio de Marzo; o tendría que ser antes, para dentro de dos semanas, dos semanas o así.

CA/r	A: ...
2.PO/p	P: Bueno entonces pi no sabemos de dónde viene todavía.
CA/c	A: ...

.La profesora se pone a apuntar en su cuaderno de notas, para llamar la atención y avisar específicamente a algunos niños porque hay mucho jaleo.

CA/sl	
1.PA/s	P: Angel Vera y Ana tienen un aviso./
1.PA/r	No se puede aprovechar cuando enpiezo a hablar para poneros a hablar vosotros, porque si no la clase se para a cada momento./
2.PO/p	Vale, habíamos quedado en que pi, tenía una expresión decimal,/
3.PIS/e	¿cómo? Infinita...
3.AMC/e	A: No periódica
3.PSC/c	P: Infinita sin periodo porque no se puede poner como fracción./
3.POC/e	Más tipos de decimales infinitos.

3.3---t: 1:46

3.AAI/ai	A: Uno de mi invención.
3.PVI/as	P: Uno de la invención de este hombre./
3.PIS/p	Venga invéntatelo.
3.AAI/ai	A:1,23
3.PIS/p	P: ¿Cómo va más?
3.AAI/ai	A: Pues así
3.PVI/ad	P: 456...../
3.PDC/a	Este, ¿de dónde aparece? De la invención.
3.AVI/rr	A: No, de una raiz cuadrada que no se sabe.
3.PDC/p	P: O de la cabeza de alguno./
3.PIS/e	¿Qué tipo es? ¿Infinito no periódico?
3.AMC/e	A: Infinito con cifras arbitrarias.
3.PIS/i	P: O sea, ¿qué diferencia hay entre estos números? Entre raiz de 2 y el pi, y estos. Todos son infinitos no periódicos, ¿pero hay algún matiz que diferencie éstos?
CA/i	A: Que ...

CA/sl

.Se rompe la cinta. Luego además hay un accidente, al pasarla a cinta VHS como no nos enterábamos muy bien, pues de pronto aparece que nos estamos grabando nosotros mismos. Sobre el trozo que estaba roto y no se grabó la clase, aparece además un trozo con una grabación accidental. De pronto, cuando eso se corta, aparece otra vez la clase en grabación normal. **t: 1:47 al 1:51 (empieza durante este minuto)**

3.4---1:51

3.PIS/e	P: ¿Cómo se opera con números periódicos?
3.AMC/e	A: Pasas los dos a fracción.
3.AMC/e	A: Pasas a fracción
3.AMC/e	A: Al pasarlo a fracción...
3.PDC/c	P: Estamos con los decimales periódicos, ¿eh? Luego borraremos y pasaremos a/
CA/i	...
3.AMC/e	A: Vienen de una operación.
3.PVI/as	P: Se pueden operar. Vienen de una operación.
3.AMC/e	A: Tienen una representación en la recta.
3.PDC/ll	P: Ahí os quería yo ver.
3.AMC/e	A: Sí, lo pasas a fracción y ya está.
3. AMC/e	A: Vienen de una fracción.
3.PVI/as	P: Bueno, vienen de una operación. Se pueden representar en la recta.
3.AMC/e	A: Están formados por cifras
3.PDC/c	P: Ahora estamos con los periódicos, luego iremos a los no periódicos, pero ahora estamos en los periódicos./
3.PVI/as	Se pueden representar, en este caso como fracción.

3.AAI/ai	A: Y se pueden representar en forma de radical.
3.PDC/c	P: Ahora estamos en los periódicos.
CA/i	...
3.PIS/cl	Se pueden representar en la recta, ¿cómo?
3.AMC/e	A: Pues pasándolo a fracción.
3.PDC/a	P: Pasándolo a fracción lo represento exactamente, y si lo represento en forma decimal, empiezo a poner cifras decimales, y cifras decimales./
3.POC/e	¿Alguna razón más?
3.AMC/e	A: Y por qué es un número.
CA/r	A: ...
3.PIS/i	P: ¿Hay alguna razón en contra de que lo sean?/
3.PDC/p	Estos parece que son números.
2.PO/p	Bueno, y ahora vamos con éstos, con las raíces./
3.PDC/c	Estos son los periódicos, ¿eh? Estos son los periódicos./
2.PO/p	Y ahora vamos con los infinitos no periódicos. Empezamos. √2 por ejemplo./
2.PP	Vamos a elegir un número, ¿√2 ó √7?

3.5--t: 1:53

2.AS	A: √2
2.PV/a	P: Vamos a √2./
3.PIS/i	¿√2 es un número o no es un número?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí, sí es un número.
3.PIS/p	P: Alguien que dice que sí, ¿por qué es un número?/
1.PO/d	Por orden./
3.POC/d	Razones a favor.

.Se interrumpe la grabación apenas un instante.

3.AMC/e	A: Viene de una operación
3.PVI/as	P: Viene de una operación./
3.POC/e	Más razones.
3.AMC/e	A: Se puede representar con un radical.
3.PVI/as	P: Se puede representar con un radical./
3.PIS/p	Eso qué quiere decir, Pablo? ¿Qué quieres decir con eso?
CA/i	A: ...
3.PVI/ad	P: Con un radical, con una raiz. O sea que tú quieres decir que yo cojo √2, y con √2 yo sé lo que quiero decir, sé todo, sé todo el número./
3.POC/e	¿Qué más? ¿Hay más razones?
3.AIS/c	A: Nos quedamos ayer que no sabíamos si tenía una representación en la recta.

t: 1:54

3.AAI/os	A: No se puede.
3.PIS/i	P: ¿Tiene una representación en la recta?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí, sí
3.AAI/os	A: Sí se puede, claro que se puede.
3.AAI/ai	A: La √4
3.AMC/ri	A: Son dos números infinitos. ¿por qué un periódico sí y el resultado de una raiz no, siendo infinitos los dos?
CA/s	A: Las raíces
3.PIS/e	P: Bueno, vamos a ver, los periódicos puros, ¿cómo se representan en la recta?
3.AMC/e	A: Pasándolo a fracción.
3.AMC/e	A: Se puede pasar a fracción.
3.AAI/ai	A: Pero una raiz no se puede pasar a fracción.

3.PDC/a	P: El 3,666..., ¿dónde estará, más o menos? Por aquí. Eso es más o menos, porque está ¿entre qué dos números está? Entre 3,6 y 3,7, y luego pudo ir afinando más, ¿verdad? que es lo que hacéis vosotros: pegaros todo lo que podéis. Pero lo puedo poner exactamente/ en un sitio.
3.AVI/as	A: Sí
3.AVI/as	A) Sí, exactamente/
3.PIS/e	P: ¿Qué fracción es 3,666...?
3.AMC/e	A: 33/9 /
3.AMC/e	A: 33,9 /
3.AMC/e	A: 33/9 /
3.PIS/e	P: ¿Y cómo lo represento 33/9?
3.AMC/e	A: Pues dividiendo.
3.PDC/a	P: Dividiendo entre 9. 9 por 3, 27. Y ahora, divido esto entre 9./
3.PDC/ll	Esto no lo sabéis hacer vosotros ... que esto no sabéis hacerlo.
3.PIS/e	9 aquí, ¿y 9?
3.AMC/e	A: 18
3.PIS/e	P: ¿y 9?
3.AMC/e	A: 27
3.PDC/p	P: 27, 28, 29, 30, 31, 32 y 33.
3.AAI/ai	A: Ahí está.
3.PDC/a	P: Exactamente, y luego ... aproximaciones, que se acercaban cada vez más a ese número./
3.POC/e	Y ahora, ¿quién representa en la recta numérica $\sqrt{2}$?
CA/r	A: ...
CA/s	P: Si lo acercamos...
CA/r	A: ...

.Toca el timbre.

CA/r	A: ...
2.PO/p	P: Para mañana, ... la representación en la recta de esto.

t: 1:55

Fecha: 10-2-94
Duración Total: 26 minutos
Encuadre en la sesión: La primera mitad de la clase.

4---t: 1:43
.Los alumnos están colocándose en sus sitios, y la profesora está poniendo los titulares en la pizarra de la Cl1 de nuevo. Parece que los alumnos andan algo revueltos.

t: 1:45

1.PO/d	P: A ver si acabamos hoy ya de una vez la Puesta en Común y luego al final, me lo entregáis; o sea, que tenéis que terminar de tomar las notas de lo de ayer, que luego lo recojo. Todas las notas de los tipos de decimales, de si son números... , todo lo que habéis estado haciendo lo recojo ahora. Pero vamos a ver si acabamos ya.
CA/I	A: ...
1.PO/d	P: Pues mañana lo traes/
1.PO/a	Bueno, venga.
1.PA/r	.Los alumnos están muy revolucionados. La profesora saca su libreta de notas, para apuntar.

5.1---t: 1:47

1.PP/g	P: ¿Empezamos ya?/
2.PO/p	Venga, los tipos de decimales infinitos que vimos ayer. Me decís los tipos, y me decís un ejemplo de cada uno.
1.AS	A: Yo
1.PO/d	P: Uno a uno.
CA/i	A: ...
1.PV/a	P: Vamos a poner los tipos. No vamos a empezar de nuevo, vamos a acabarlo. Vamos a poner todos los tipos.
CA/i	A: ... /
1.PV/r	P: Para que lo recordéis otra vez./
1.PO/p	Sergio, Sergio
3.AMC/e	A: Periódico puro.
3.PVI/as	P: Periódico puro. Periódico
1.AV/r	A: ¿Otra vez?
3.AAI/ai	A: Y divídelo con una llave en puro y mixto
3.PVI/as	P: Periódico puro. Una llave. Puro y mixto.
3.AMC/e	A: No periódicos.
3.AMC/e	A: Y luego los infinitos no periódicos.
3.PVI/as	P: Ahora los infinitos no periódicos.
3.AMC/e	A: Que pueden ser las raí.., los radicales, o....
CA/r	A: ...
3.AMC/e	A: Radicales...
1.PO/d	P: Uno solamente, y los demás atentos.
1.AS	A: Seño, ahí no se ve.
3.PDC/a	P: Estamos con los tipos de decimales, son los periódicos, puros o mixtos.... Sólo tenéis que mirar lo que tenéis, porque lo que vamos a discutir está aquí./
3.PIS/e	¿Y los infinitos no periódicos cuáles eran?
CA/r	A: ...
3.AMC/e	A: Raíces
1.PO/d	P: Uno y por orden./
1.PO/p	David.
3.AMC/e	A: Cifras arbitrarias
3.PVI/as	P: Cifras arbitrarias
CA/i	A: ...
3.AMC/e	A: Radicales
3.AMC/e	A: Con regularidad y sin regularidad
CA/r	A: ...
3.PVI/as	P: Con regularidad y sin regularidad/
3.POC/e	¿Qué más?/
3.PDC/a	En los infinitos no periódicos estaban los de cifras arbitrarias, con regularidad y sin regularidad,/
3.POC/e	¿y cuáles más?
CA/i	A: ...
3.AMC/e	A: Y los radicales
3.PVI/ad	P: Y los que venían de una operación. Proceden de una operación.
3.AMC/e	A: Y el número pi
3.PVI/as	P: Y el número pi,/
3.PIS/e	que ¿de dónde venía?
CA/i	A: ...
3.AMC/e	A: De dividir la longitud de la circunferencia
3.PIS/i	P: Pi, ¿es cómo éstos, o es aparte, o cómo es?
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: No, porque procede de una operación
3.AAI/ai	A: Pi es un número que procede de una operación.
3.AIS/e	A: ¿Por qué?
3.AVI/as	A: Sí, claro
3.PIS/cl	P: ¿A pi dónde lo ponemos? ¿en que procede de una operación? ¿aquí ponemos a pi?
3.AAI/os	A: Sí, si
3.PVI/as	P: Y pi./

2.PI/s	Luego ya veremos de dónde procede pi. Que eso quedamos pendientes con el trabajo./
3.PSC/e	Bueno, entonces las clases son: periódicos e infinitos no periódicos. Y dentro de los infinitos no periódicos había de varios tipos: principalmente los que procedían de algo y sus cifras, aunque sean infinitas no periódicas, están determinadas, y luego los que eran arbitrarios, o bien siguiendo un patrón, o bien que yo me las invento "con un bombo de lotería"/
3.PIS/cl	¿Vale? /
3.AVI/as	A: Vale
CA/r	A: ...

5.2--t: 1:52

2.PI/i	P: Un momento./
3.PIS/e	Estos números, ¿a qué conjunto de los que hemos visto pertenecen?
3.AMC/e	A: A los números racionales.
3.PIS/e	P: Estos, los periódicos, los decimales periódicos.
CA/i	A: ...
3.PVI/ar	P: Como dice Nieto, son una representación de los racionales./
3.PIS/i	¿Y éstos?
3.AAI/ai	A: Radicales
3.AAI/ai	A: Esos dos números representan a uno. Sin embargo, unos son radicales, otro proviene de una ... de dónde proviene, y otros provienen de nuestra mente. No provienen los tres de una sola cosa.
3.PIS/e	P: ¿Estos son racionales?
3.AAI/os	A: No, no
3.PIS/e	P: ¿Estos pueden ser racionales?
3.AAI/os	A: No, no
3.PIS/p	P: ¿Por qué?
3.AMC/e	A: Porque son infinitos no periódicos.
3.PIS/cl	P: ¿Hay alguien que tenga duda, de si éstos pueden ser racionales o no? ¿Quién tiene duda de que puedan ser racionales?
3.AAI/ai	A: Se puede partir por 1
CA/r	A: ...
3.POC/e	P: A ver uno, pero uno, que lo tenga claro y que lo explique por qué éstos no pueden ser racionales, ¿quién lo quiere explicar? Asenjo.
CA/i	A: ...
3.POC/e	P: ¿Alguien quiere explicar por qué éstos no son racionales, o creéis que no son racionales?/
1.PO/p	¿Asenjo nada más? Venga
1.AS	A: Pues explícate bien.
3.AEC	A: Que un radical nunca puede ser un número racional porque, además infinito no periódico, y ya sabemos que los racionales están formados por infinitos periódicos, puros o mixtos, que provienen de divisiones. Bueno , además de que los infinitos no periódicos no tienen repetición, sino que provienen de un radical, además, las cifras no se van a repetir, por lo tanto nunca van a formar parte unos de otros, porque son realmente distintos.
CA/r	A: ...
1.AS	A: Repítelo
1.AS	A: Que lo repita más lento
1.AS	A: Repítelo más despacio

t: 1:55

3.POC/e	P: ¿Hay alguien que lo quiera explicar a lo mejor no tan liado? ¿o no?
CA/r	A: ...
3.AVI/v	A: Seño, a lo mejor lo explica bien, pero lo que pasa es que va muy rápido.
3.PVI/v	P: Sí, a lo mejor lo explica bien, y a lo mejor hay otro que lo explica más claro, o él lo explica más claro la segunda vez.
CA/m	A: Seño, ¿qué pone ahí?

3.POC/e	P: ¿Quién lo quiere explicar?/
1.PO/p	¿Nieto? Venga.
3.AMC/e	A: Son infinitos pero no son periódicos; los únicos infinitos que se pueden expresar en forma de fracción son los periódicos, porque tenemos la regla esa para representarlos, pero cómo son infinitos no periódicos y no sabemos donde acaban y no hay una regla para representarlos, pues...
3.AAI/nc	A: Ahora sí que me has liado.
3.AAI/nc	A: Pues me ha liado más de lo que tenía.
1.PO/p	P: Pablo./
1.PO/d	Oye estamos intentando enterarnos, ¿eh? Así que poned atención.
3.AMC/e	A: Que los periódicos podemos saber las cifras que van a salir siempre, ¿no? Y ahí no sabemos las cifras que van a salir, y entonces no sabemos representarlo en fración. Ahí sí podemos saberlo, porque vamos a saber las cifras que van a salir siempre. Y ahí como no lo sabemos, no se puede rerpesentar en forma de fracción.
3.PIS/cl	P: Alguien de los que no lo había entendido, ¿lo tiene claro ahora? ¿Tú lo tienes claro, Marta? ¿Por qué éstos no pueden ser racionales?
3.AMC/e	A: Porque los racionales son números que se pueden representar en fracción, y como en los infinitos no periódicos están incluidos los radicales, que no son periódicos, entonces los infinitos no periódicos son los que no se pueden representar con fracciones, porque no tienen regla. Entonces, si no se pueden representar como fraciones no son números racionales.
3.AVI/as	A: Claro
CA/i	A: ...
3.PIS/cl	P: ¿A alguien sigue sin quedarle claro la división?/
3.PSC/c	Los racionales eran los que se podían representar como fracción. Y habíamos visto que las fracciones y los decimales periódicos estaban tal para cual tenía su decimal, que era finito o periódico, y viceversa, todos los decimales finitos o periódicos tienen su fracción. Entonces, los racionales se pueden representar o como fracciones o como decimales finitos o periódicos. Y esos están el uno para el otro y el otro para el uno. Luego éstos que son infinitos no periódicos se salen de este conjunto.
CA/i	A: ...
3.PIS/cl	P: ¿Vale? Estos no se pueden representar en fracción...?
3.AIS/r	A: ¿Por qué no?
3.AIS/r	A: ¿No?
3.PIS/e	P: ¿Por qué no se pueden representar en fracción?
3.AAI/os	A: Porque como son infinitos.
3.AAI/os	A: Como son infinitos.
2.PI/s	P: Bueno, venga. A ver si acabamos ya./
2.PO/p	Ahora ya, ya para terminar, porque esto seguiremos con ello, pero para darle un fin ahora...

5.3---t: 1:59

2.AI.	
3.AIS/r	A: Nos quedamos si $\sqrt{2}$ tenía representación en la recta. Eso no quedó claro.
3.PVI/as	P: No quedó claro si $\sqrt{2}$ tenía representación en la recta./
3.POC/d	Y de momento no va a quedar claro, ya lo haremos.
CA/i	A: ...
3.POC/d	P: Vamos a ver, ayer dimos una serie de razones por las que $\sqrt{2}$ era un número. Ahora las de en contra./
3.POC/d	Y terminamos donde terminemos. Como esto lo seguiremos viendo, pues conforme vayáis teniendo razones, vosotros lo apuntáis en vuestra libreta, que luego ya lo volveremos a la pregunta.

CA/s	A: Eso hay que poner ... común.
3.POC/d	P: Ayer dijimos las razones a favor, y hoy vamos a ver las de en contra de que estos números./
3.PDC/p	...¡Bueno! de que éstos decimales sean números, o no lo sean .../ 3.PDC/a Había gente que pensaba que √2, la expresión decimal ..., y tenían razones en contra de que eso fuera un número./
3.POC/e	¿Quién dice? ¿Quién piensa que eso no es un número, o que puede no ser un número?
3.AIS/a	A: Pero ¿cuál? ¿el de la raiz cuadrada?
3.PDC/c	P: La √2./
3.PIS/i	Tú dices que no es un número, ¿por qué?
3.AAI/ai	A: Porque no se puede representar en la recta.
CA/i	P: ...
3.AAI/ai	A: ... el resultado que te da de una raiz cuadrada no puede ser una fracción; no es un número racional, entonces no puedes ponerlo.
3.PVI/ad	P: No era un número racional.
3.AAI/ai	A: No tiene final.
CA/i	A: ...
3.POC/e	P: ¿Alguna razón más?
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: Que no acaba, que es una expresión que no acaba.
3.POC/e	P: ¿Alguna razón más en contra?

*--t: 2:02

3.AAI/ai	A: Que no se puede operar con ellos
CA/m	A: ...
CA/m	P: Dicen que no se puede operar con ellos
3.AVI/rs	A: Eso es mentira. Eso no es verdad. Sí que se puede operar con ellos.
CA/s	A: Yo he visto en el libro...
3.AIS/e	A: ¿Cómo operas con ellos?
1.AS	A: Callaros todos
3.AAI/l	A: Yo en el libro. Estuve ayer viendo en el libro cómo los radicales se podían sumar y se podían muliplicar.
3.AIS/e	A: Si es un número infinito, ¿cómo vas a operar con él?
3.AIS/r	A: Si no tiene fin...
3.AIS/e	A: ¿Cómo vas a operar con él?
3.AAI/l	A: Se puede operar con raíces y eso está en el libro
3.AIS/e	A: ¿Pero cómo se puede operar con raíces?
CA/r	A: ...
1.AS	A: Shsss...
1.PO/s	P: Oye por favor.
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Un momentico./
1.PA/r	Esto no puede convertirse en un gallinero cada vez que alguien quiera decir algo/
3.PDC/ll	... ha dicho que se puede sumar, multiplicar y dividir.
CA/r	A: ...
2.PI/s	.La profesora intenta suspender la discusión y estimular a los alumnos a que busquen más información para poder continuarla productivamente.
3.POC/e	P: En el libro dice que sí. Lo miráis
3.AIS/e	A: ¿Pero cómo se va a poder multiplicar?
3.POC/e	P: En el libro dice que sí se puede hacer.
CA/r	A: ...
3.AMC/e	A: Yo he visto cómo se pasan a común índice algunos radicales para operar con ellos. Yo he visto cómo se suman.
2.PI/s	.La profesora intenta de nuevo aplazarla discusión.
3.POC/e	P: A quien le interese, que lo mire en el libro, que para eso está.
3.AIS/i	A: Pero entonces 2 no tiene raiz, porque si está en forma decimal, yo creo que no tiene raiz.
3.PVI/ad	P: Sí, esa es una razón de que esta expresión no sea un número.
3.AIS/i	A: Pues entonces, 2 no tiene una raiz, ¿cómo localizas √2?

CA/s	A: Es que un número racional ...

t: 2:05

3.PDC/I	P: Sonia dice que no es un número racional.
3.AVI/rr:	A: Eso no tiene nada que ver, es que hay números racionales, números radicales. ¿Por qué un número raciónal no es un número? Porque no es un número radical. ¡Ah!

.Una alumna, Sonia, pide la palabra.

1.PO/p	P: Vale, Sonia. ¿Sonia qué?
3.AMC/ie	A: Claro que no es un un número racional porque la √2 no tiene fin...
3.AVI/v	A: ¡La Virgen! /
3.AAI/os	Y puede ser un número.
1.PO/d	P: Shsss...
3.AMC/e	A: pero como no tiene un número final, no puedes pasarlo a...
2.PI/i	P: Pero Sonia,/
3.PVI/rr	lo que te está diciendo él es que no es un número racional, pero que no sea un número racional...
CA/i	A: ...
1.PO/p	P: Asenjo, no hables hasta que yo no te diga que hables./
3.PDC/c	Sonia, está de acuerdo en que no es un número racional. En eso estamos de acuerdo todos. Pero lo que dice es que que no sea un número racional, que puede haber números que no sean racionales.
3.AIS/e	A: ¿Y por qué es un número?
3.AAI/nc	A: Eso yo no lo entiendo.
3.PDC/c	P: Ahí estamos, que por qué es un número. Una de las razones en contra es porque (lo escribo)./
2.PI/s	Bueno, como hoy no vamos a acabar esto, hasta aquí hemos llegado. Hasta aquí hemos llegado. Volveremos a retomar el tema cuando tengamos más datos.

t: 2:07

3.AAI/os	A: No se puede operar con ellos
3.AIS/e	A: ¿Cómo se va a poder operar con una raiz cuadrada?
2.PI/s	.La profesora insiste en suspender la discusión para que los alumnos busquen información que les permita tener opiniones más fundamentadas.
3.POC/e	P: Que te ha dicho que está en el libro, que lo mires.
CA/r	A: ...
3.PDC/I	P: Mira lo que dice Katerina.
3.AMC/ri	A: Que con los periódicos puros no se puede operar, se opera con las fracciones; lo mismo pasa con los radicales. No se opera con el número infinito, se opera con el radical.
3.AVI/as	A: Exactamente. Exactamente.
3.AVI/rr	A: Es que la fracción es lo mismo que el decimal. Es lo mismo...
3.AAI/ai	A: Y el radical también es lo mismo...
3.AMC/ri	A: Entonces, si tú utilizas la fracción, es lo mismo que si estás operando con el decimal.
3.AVI/rs	A: Y con eso ¿que es lo qué tú me quieres decir?, ¿que no se puede operar con números radicales? Pues ya está.
1.PA/r	P: No, tú no dices nada. ¡Asenjo! Ya está bien, eh. Tú no dices nada hasta que yo te diga. Por que hay gente que estaba diciendo cosas importantes, y ahora se le ha olvidado. ¿Está claro?/
2.PO/p	Decía Katerina...
3.AMC/ri	A: ¡Ah! que la fracción ha dicho que es igual que su número decimal . Digo que un radical es igual al número que resulta, aunque sea infinito, pero es igual a eso.
3.AVI/as	A: Pues entonces sí se puede...

2.PI/s P: Bueno, hasta aquí hemos llegado. Hasta aquí hemos llegado, pues ahora es lo que conocemos del tema./
1.PO/d Y luego cuando yo os lo pida me entregáis todas las notas que habéis tomado.

t: 2:09

Ficha 14

Fecha: 15-2-94
Duración Total: 46 minutos
Encuadre en la sesión: Toda la clase (aunque ya está el primer alumno en la pizarra cuando empieza la grabación).

1---t: 0:00

La clase está empezada cuando comienza la grabación en vídeo. hay un alumno en la pizarra y yo estoy preguntando:

3.PIS/i P: ¿Cómo son los puntos de una recta? ¿Tienen anchura o no tienen anchura?
3.AAI/os A: No
3.AAI/os A: Sí
3.AAI/ai A: Tú puedes hacer un punto más grande que otro.
3.PIS/p P: ¿Tú puedes hacer un punto más grande que otro?
3.AAI/ai A: Sí, aunque sean décimas de milímetro te puede salir un punto más grande que otro.
1.PO/p P: Sergio, ¿qué?
3.AVI/rr A: Que no, porque si tienen anchura cogería más de un número.
3.AIS/r A: ¿Cómo?
3.AMC/ie A: Pero es que aquí, a lo mejor, hay puntos tan pequeños que a lo mejor sí podrían ...
3.PDC/p P: Si hablamos de una recta ideal, con puntos ideales, los que nos imaginamos./
3.PIS/i Los puntos ideales, ¿tienen dimensiones?
3.AAI/os A: No, no
CA/i A: No, pero pueden tener distinta...
3.PIS/cl P: Distinta anchura, ¿podrían tener distinta anchura?
3.AAI/os A: No, no
3.AAI/os A: No
3.AAI/os A: Si son ideales
3.AAI/os A: Que pueden tener distinta anchura/
CA/i ... /
3.AAI/ai Pero puede ocurrir que un punto ocupe toda la pizarra ....
3.PIS/p P: ¿Sí?
CA/i A: ...
3.AVI/rr A: Si el punto ocupa toda la pizarra sería un conjunto de puntos, o sea que no sería uno.
3.AIS/i A: Es que mira, del 0 al 1, ¿por qué no puede ser otro más pequeño?
3.PDC/p P: Esto es un segmento; del 0 al 1 es un segmento; y éste otro segmento./
3.PDC/r Los puntos, si yo los pinto físicamente tienen un segmentillo, pero si me lo imagino...
3.AVI/s A: ¡ah!
3.PIS/cl P: ¿Entendéis esa diferencia?
3.AIS/a A: ¿Cómo?
3.AAI/nc A: No
3.PDC/p P: Yo pinto un punto, pues depende de lo que sea de gorda la punta de mi lápiz tendrá un segmentillo.

3.AVI/as	A: Claro
3.PIS/i	P: Pero si y me lo imagino con la cabeza, ¿pueden ser más gordos o menos gordos?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: ¿Tienen anchura los puntos? ¿Pueden ser más gordos o menos gordos?
3.AAI/os	A: No
3.PSC/c	P: No; son "puntos".

.La grabación se interrumpe hasta que hemos empezado la Puesta en Común.

2.1 y 2.2--t: 0:02

3.PIS/cl	P: 8/3. ¿Os da 8/3 o qué os da?
3.AVI/as	A: Sí, sí
3.AVI/ as	A: 8/3
3.AVI/as	A: Igual
3.PDC/ll	P: 2,7 pone ahí.
3.AVI/as	A: 2,75
3.PIS/i	P: Oye, y para medir así, con decimales, ¿utilizáis también este procedimiento de ir midiendo los segmentillos?
3.AIS/i	A: ¿Y no se puede hacer también así?
2.PO/p	P: Bueno, ahora lo explicáis. Venga, el siguiente./
3.PIS/cl	A ver, ¿Alguien no comprende cómo con el procedimiento de David ha llegado a esa solución?
CA/i	A: ...
3.PDC/e	P: David, ¿cómo has llegado a esa solución con el procedimiento?
3.AIS/a	A: ¿De ésta?/
3.AMC/ie	Pues como hemos hecho en el apartado c), la abertura...(no se entiende). Hemos dividido la unidad en tres partes y nos da exacta, y esta parte...
3.AIS/c	A: La medida del punto hasta la unidad, ¿no?
3.AVI/as	A: Hasta la unidad./
3.AMC/ie	Entonces la prolongamos sobre la recta y nos da exacta.
3.AIS/r	A: Pero, ¿y si no da exacto?
3.PIS/p	P: ¿Qué pasa si no da exacto David? Si tú tienes un procedimiento debes de saber lo que pasa.
CA/i	A: ...
3.AAI/nc	A: Pues que...
1.PO/s	P: Shsss.../
1.PO/p	David
3.AAI/ai	A: Que no se puede utilizar con esa abertura, tienes que hacerlo...
2.PI/i	
3.PIS/p	P: ¿Y cómo lo haces?
3.AAI/ai	A: ... el apartado c)
3.PVI/as	P: Venga, pues ahora cuando lleguemos al apartado c),/
3.PDC/ll	Marta atiende. Marta dice que todavía no se había enterado de qué pasa con un punto cualquiera que no coincida la parte.
3.AAI/ai	A: Entonces esto no podemos utilizar la abertura 1/3 porque no sale exacto./
3.AMC/c	Entonces yo lo que he hecho es dividir.../
CA/s	(Se va de la pizarra, parece que a buscar algo a su mesa)
3.AIS/c	A: ¿Cuánto te ha salido?
3.AMC/ie	A: Con la calculadora yo hago esta división y...
2.AI	A: Isabel
2.PO/p	P: Un momento. ¿Y qué?
3.AAI/os	A: Pero ya entonces no ...
CA/i	A: ...
3.PDC/c	P: Que has cambiado de procedimiento. A ver, aquí David ha cambiado de procedimiento./
3.PIS/p	¿Qué has hecho?

t: 0:06

3.AAI/ai	A: Pues he cogido esta parte y he dividido 2 entre 3, y da 2/3. He cogido la unidad 2/3.
3.AIS/r	A: ¿Cómo? ¿Puedes repetirlo por favor?
3.PDC/e	P: ¿Qué has hecho?, David.
3.AMC/ie	A: Como antes he cogido la unidad 2/3, ¿no? Pues con esa no es exacto. Antes cogíamos la unidad esta ¿no? la de 2/3. Entonces yo divido 2 entre 3, y 1 entre 3, porque aquí ésta era la otra parte, ¿no? entonces yo he dividido 2/3 y me da decimal./
3.AIS/c	A:¿Cuánto es 2 entre 3, Ramón?
3.PIS/e	P: ¿Cuánto es 2 entre 3?
3.AMC/e	A: 0,6666....
3.PVI/as	P: 0,6666.....
3.AIS/r	A: ¿Qué hace 2/3?
3.AIS/i	A: Da 2,40, ¿no?
3.AAI/ai	A: He calculado una fracción que me dé más o menos entre 3 periodo y 6 periodo.
3.PDC/p	P: O sea, que tú ya ahí ya has aproximado.
3.AAI/nc	A: Yo eso no lo entiendo.
3.AAI/nc	A: Yo no lo entiendo.
3.PDC/p	P: David, como no sabía hacer este procedimiento para éste, pues entonces ha ido tanteando un número que le pudiera ir a esta parte. Entre los decimales que podría estar, ha ido tanteando uno y lo ha convertido en fracción; eso es lo que ha hecho.
3.AIS/c	A: ¿Pero entonces lo ha hecho exacto o no?
3.PVI/ad	P: Entonces dice que no lo has hecho exacto.
3.AIS/c	A: ¿2/3 te sale en el c)?
3.AAI/ai	A: Te sale 2,40
3.AAI/ai	A: Pero si en el c) sale también 2/3.
3.PIS/i	P: Yanira, ¿tú has utilizado ese procedimiento para ése también?
CA/r	A: ...
1.PO//p	P: Yanira

2.3--t: 0:08

3.AAI/ai	A: Yo he hecho la mediatriz del 0 al1 y después me salía, desde la rayita que he calculado hasta la mediatriz, la mitad, me salía un trocito y ese trocito ya me da exacto
3.PVI/as	P: O sea, lo ha hecho pero con la mediatriz.
CA/r	A: ...
1.AS	A: ¿Lo hago ahí en la pizarra?
CA/i	A: ...
1.AS	A: ¿Lo hago?

Sale Yanira a la pizarra. Va haciendo y explicando lo mismo que acaba de decir, pero como está en la pizarra, y hay algún que otro alumno hablando, sólo se oyen palabras sueltas.

3.PIS/p	P: Yanira, ¿y ese procedimiento lo has podido utilizar para todos?
3.AAI/ai	A: Sí
3.PIS/p	P: Con la mediatriz y el trocillo ese ¿has hallado todos?
3.AAI/os	A: Sí
3.AIS/e	A: ¿Qué has puesto ahí?
3.AIS/c	A: ¿Qué te da?
3.AAI/ai	A: 3/8
3.AVI/as	A: Igual que a mí
3.PIS/i	P: ¿Y a ti te ha salido con ese procedimiento o con otro?
3.AAI/ai	A: Con otro.

2.4--t: 0:11

3.AAI/ai	A: Con otro procedimiento da 3/8 también.

3.PIS/p	P: ¿Con qué procedimiento?
CA/i	A: ...
1.PO/p	P: A ver, sal Rocío y explícalo.
CA/r	A: ...
3.AAI/no	A: Yo no sé hacerlo
3.PDC/e	P: Ahora te lo va a explicar Rocío.
1.AP/p	A: Seño
1.PO/p	P: ¿Qué?
3.AIS/i	A: ¿No podría ser y dividirlo, de 0 a 1, y entonces lo que sobrase de esa medida hasta que nos salga exacto?
3.PVI/as	P: Sí,/
1.PO/p	ahora lo explicas./
3.PDC/I	A ver si es lo que dice Rocío.
CA/r	A: ...
3.AMC/ie	A: Bueno, pues pongo el papel de 0 al punto que hay que averiguar, lo marco. Después ese punto lo, o sea la distancia que hay de aquí a aquí, la pongo aquí detrás. Este trozo lo divido en 3 partes y sale. Y después aquí igual, 3 partes, porque este espacio es lo mismo que aquí, y aquí cabe a 2.
3.PIS/p	P: Y esas 3 partes, ¿cómo las has averiguado? ¿a ojo?
CA/i	A: No (no se entiende, pero dice algo de la regla)
3.PVI/ar	P: Ah, entonces lo has medido con la regla. Claro.
CA/i	A: ...
CA/i	P: ...
3.AIS/i	A: O sea, que ese trozo que le ha sobrado, lo ha utilizado para medir los otros.
3.PVI/ad	P: Sí, este trozo que le ha sobrado lo ha utilizado para medir, y cuando ha llegado a un trocillo así ha dicho, pues aquí me caben 2 partes y aquí 3. Ha estimado.
3.AIS/r	A: ¿Cómo, cómo?
3.PDC/p	P: Lo que hecho ha sido coger el trozo, lo vuelve a poner y ahora le sobra un trocillo así; dice pues yo creo que aquí caben dos partes más o menos y aquí caben tres de lo mismo./
CA/i	Rocío ...
3.AMC/c	A: El segmento ese lo puedes dividir en dos partes exactas, y esas dos partes...
2.PI/i.	
3.PDC/p	P: Encajan aquí. Va tanteando y ve las que encajan.
3.AAI/os	A: Pues a mí me da...

.La profesora se dirige a l alumno que acaba de intervenir.

3.PIS/p	P: ¿Tú cómo lo has hecho?

2.5---t: 0:15

CA/i	A: (No se entiende, dice algo de la mediatriz)
3.PIS/i	P: Y con el de la mediatriz, ¿vale para los demás o no vale para los demás?
3.AAI/os	A: Sí
3.POC/e	P: Bueno, ¿alguien tiene otro procedimiento o no?
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: El de hoja
3.AAI/ai	A: El de la hoja
CA/i	A: ...
3.PDC/p	P: ... de David, pero llevado a sus últimas consecuencias.
3.AAI/ai	A: El de la hoja, el de la hoja.
CA/i	A: ...
3.PIS/p	P: ¿Cómo que ése nunca falla? ¿Qué quiere decir que nunca falla?
3.AAI/ai	A: Que siempre va a salir la medida exacta.
3.PIS/i	P: El método del compás, ¿por el método del compás siempre va a salir la medida exacta?
3.AAI/os	A: No

3.AAI/ai	A: Se puede mover
3.PIS/p	P: ¿Cuál es el método del compás?
3.AAI/os	A: El de David
3.PDC/r	P: Pero el de David, llega un momento en que ya no lo puede aplicar.
CA/i	A: ...
3.PIS/cl	P: ¿Cuál es el método de David? Si yo tengo un punto cualquiera, el que sea, ¿cuál es el método de David, o del compás, que decíais vosotros?/
3.PDC/a	Cojo esto...
CA/i	A: ...
3.PDC/a	P: Y aquí corto.
CA/r	A: ...
3.PDC/a	P: Lo pongo aquí, y aquí , y me sobra otro trozo
CA/r	A: ...
P:	(La profesora termina de explicar el proceso, pero hay mucho jaleo y no se entiende).

2.6, 2.7 y 2.8--t: 0:18

.Hay un jaleo excesivo. Los alumnos han subido mucho el tono y están muy revueltos. La profesora la clase, se dirige a la mesa, y todos se callan. Al cabo de un momento dice:

1.PA/s:	
3.PIS/e	P: Ya podéis ir pensando el método del compás, porque se lo puedo preguntar a cualquiera.
1.PO/p	P: Alejandro,/
3.PIS/e	sal ahí y haz el método del compás.
3.AMC/e	A: Cojo el compás, pincho en la unidad y lo divido en partes, si no sale exacta, pues cojo otra unidad ...
3.PIS/p	P: ¿Qué unidad?
CA/i	A: ...
3.POC/d	P: No. Píntate una recta, y el 0 y el 1 y empieza a ver lo que
CA/i	...
3.POC/d	Un 0, un 1, y un punto que es el que tienes que.../
3.PIS/p	Venga y ahora ¿qué haces?
3.AMC/e	A: Cojo el compás y cojo la ...
2.PI/i	
3.PIS/p	P: ¿Quién cojes? ¿Dónde pinchas? ¿Pincha en el en el 0 y luego dónde?
CA/s	A: No
3.AMC/ie	A: ... y lo divido, y si me sale exacto...
3.PIS/p	P: ¿Qué unidad cojes?
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: Del punto x al punto exacto./
3.POC/e	Venga.
3.AMC/ie	A: Y después lo divido en partes. Si no me sale, cojo lo que me ha sobrado y vuelvo a dividir.
3.PVI/ad	P: Por ejemplo, ahí. Tú coges esto y dices: cojo esto y si no me sale exacto, pues lo pongo aquí. Si me encaja, bien,/
3.PIS/p	pero si no me encaja, cojo este trozo y ¿qué hago?
3.AMC/ie	A: Pues sigo dividiendo.
3.PIS/e	P: ¿Cómo?
3.AMC/ie	A: Pues cojo esa medida y empiezo a dividir.
3.PIS/p	P: Cojo aquí, y entonces ésta ¿qué haces?
3.AMC/ie	A: Pues que sigo, si no me...
2.PI/i	
3.PVI/ad	P: Sigues encajándola aquí
3.AVI/as	A: Claro
3.PSC/c	P: Y ya te sale./
3.PIS/i	¿Va a llegar un momento en que me encaje siempre? Por pequeñito que sea va a llegar un momento en que me encaje?
3.AAI/os	A: Sí, claro.
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/p	P: Aunque sea muy chiquitín. ¿O puedo estar toda la vida haciendo, haciendo y nunca llego?

3.AAI/os	A: Sí llega
3.AAI/os	A: Sí llega, tiene que llegar alguna vez.
3.PIS/cl	P: ¿Ha habido algún procedimiento más, aparte de éste?
3.AAI/os	A: No

t: 0:22

2.PO/p	P: Bueno, la segunda pregunta es esa./
1.PO/d	Tenéis cinco minutos para contestarla o para completar lo que hayáis contestado.
1.AP/d	A: ¿Qué?
1.AP/d	A: ¿Cómo, cómo?
2.PE/a	P: La segunda pregunta dice que si cuando yo cojo una recta, donde tengo en la recta un 0 y un1, y cojo un punto cualquiera, el que sea: aquí, o aquí, va a haber siempre un número que le corresponda a ese punto.
2.AV/r	A: Sí, Isabel, si ya lo hicimos antes de Navidad.
2.PV/r	P: Pero si todavía no me habéis contestado.
2.AV/r	A: Sí,/
3.AAI/os	eso, que sí
3.POC/d	P: Bueno, pues quiero sí y quiero por qué. Por qué hay un número que le corresponde a ese punto. Cómo lo hallo. Tenéis que argumentar por qué decís que sí, no decir que sí porque se me antoja. Y decir que sí, o que no, o que puede que no lo haya.
2.AS	A: ¿Y el h) es que no lo hacemos?

2.9--t: 0:24

2.PP/g	P: ¿El h) se ha quedado sin hacer?/
2.PO/ce	¿Qué os da?
3.AAI/ai	A: 12/5
3.AAI/ai	A: 2,35
3.AAI/ai	A: 12/5
3.PIS/cl	P: ¿El último? ¿El último os da eso?
3.AAI/ai	A: 12/5
3.AAI/ai	A: 2,35
3.AAI/ai	A: 33/14
3.AAI/ai	A: 2,6
3.AAI/ai	A: 73/14, no33
3.AAI/ai	A: 33
CA/s	A: ah
3.AAI/ai	A: 2,35 aproximadamente.
3.AAI/ai	A: 12/5
2.PI/s	P: Bueno, ya os lo miraré yo .../
2.PO/p	La segunda pregunta./
2.PE/a	Tenéis que contestarme si, o que no o lo que penséis, pero tenéis que contestarme por qué. ¿Por qué para cualquier punto....
CA/i	A: ...
2.PE/a	P: La pregunta 2

3.1--t: 0:25

1.AP/d	A: ¿Eso se te va a entregar después?
1.PE/d	P: La ficha 14 la pido mañana. Esto lo pido mañana.
1.AP/d	A: ¿Y la 16?
1.PE/d	P: También. Mañana las dos.
CA/r	A: ...
1.PO/d	P: Tenéis cinco minutos para contestar la pregunta.
1.AE/t	A: Yo ya la he contestado.
1.PP/t	P: ¿Y has contestado por qué?
1.AE/t	A: Sí
1.PP/t	P: ¿Y has contestado al tipo de número?/
3.POC/d	Que no se os olvide contestar qué tipo de números serán.

CA/i	A: ...
3.POC/d	P: Contestad que tipo de números serán.
3.AAI/ai	A: Todos menos los infinitos no periódicos.
3.POC/d	P: No se os olvide contestar al tipo de números
CA/r	A: ...

.Hay algunas preguntas particulares, y yo me voy pasando por las mesas mientras los alumnos responden.

1.PO/d	P: Tenéis dos minutillos, ¿eh? Para terminar de contestarla.
1.PP/t	P: ¿Quién falta por acabar?
1.AE/t	A: Yo, yo, yo

.Sigo pasándo por las mesas y contestando preguntas de los alumnos.

1.PO/a	P: Venga, que empezamos/
1.PP/t	¿Quién queda por terminar?
CA/r	A: ...
1.PV/a	P: Bueno.

(Los alumnos están muy revueltos)

CA/i	P: ...

.Parece que la profesora se enfada.

3.2--t: 0:32

1.PA/s	P: Sergio, y Emilia, tenéis 0,25 menos./
1.PA/r	Porque además, se va a quedar la gente por vosotros y por otros más. Y a ver ahora quién empieza a hablar. Sergio y Emilia ya tienen 0,25 menos. Y los que sigan tienen 0,25 menos, porque nos vamos a tener que quedar todos./
1.PO/d	De aquí no se sale hasta que no se acabe./
1.PA/r	Ya somos mayorcicos./

.La profesora plantea la segunda de las cuestiones escritas.

2.PO/ce	¿Quién piensa que si yo marco un punto cualquiera en la recta cuando me dan la unidad, me dan el 0 y el 1; cuando me dan el 0 y el 1, cualquier punto que me den en la recta, quién piensa que tiene un número?
3.AAI/os	A: Yo
3.PIS/p	P: ¿Por qué?/
3.POC/e	Uno que diga por qué. Uno cualquiera.
1.AS	A: Yo
1.PO/p	P: Jose. ¿Por qué?
3.AMC/ie	A: Porque tú puedes a dividir la unidad esa en tantas partes hasta que te dé exacto.
3.PIS/p	P: Tú empiezas a dividir la unidad, por el procedimiento que cada uno quiera, ¿y llega un momento en que te da exacta?
3.AAI/os	A: Sí, sí
2.PO/ce	P: Y entonces, cuando hay una parte que te encaja exactamente, ¿qué número pones? (Pregunta textual).
CA/s	A: Pues...
3.PIS/i	P: ¿Cómo pones el número?
3.AMC/ie	A: Pues cuentas las partes y cuentas las que...
2.AI.	
3.AAI/ai	A: Las que tiene la unidad.
3.PVI/ad	P: Cuentas las partes en las que está dividida la unidad y eso lo pones aquí abajo.
CA/s	A: Y las que...
2.PI/i.	

3.PVI/ad	P: Y las que siguen, o sea todas éstas y las que siguen .../
1.PO/p	Rocío, ¿qué?
3.AMC/ie	A: Que sí, porque al igual que todos los números tienen una representación en la recta, todos los puntos que marques es la recta tienen una representación numérica,/
3.AEC	y esa es una de las razones por las que los números son números, porque tienen una representación en la recta.
1.AS	A: Pero deja hablar a Ramón.
1.PO/p	P: Ramón
3.AMC/ie	A: Aunque sean en forma de fracción lo puedes representar, a menos de que sean infinitos no periódicos, que no sabes dónde está.
1.PO/p	P: Sonia, ¿qué?

t: 0:36

3.AAI/ai	A: Que yo creo que no porque si es un número (racional) puede que no sea...
3.PIS/p	P: ¿A este punto puede que no le corresponda un número?
3.AAI/ai	A: Si da la casualidad que es un número (racional) no coincide.
3.PDC/II	P: Dice Sonia que si da la casualidad de que aquí hay un número irracional..
3.AIS/r	A: ¿Irracional?
3.PIS/p	P: ¿O racional?
3.AVI/as	A: Irracional
3.AIS/c	A: ¿Y cuáles son los números irracionales?
3.AMC/e	A: Son los números reales que no pueden expresarse en forma de ...
3.PDC/a	P: Por ejemplo, los que no pueden expresarse en forma de fracción.
3.AMC/e	A: La raiz cuadrada...
3.AIS/c	A: ¿Los infinitos no periódicos?
3.AMC/e	A: La raiz cuadrada
3.PDC/a	P: Por ejemplo los infinitos no periódicos.
CA/r	A: ...
3.AMC/ie	A: Tienes que tener un número finito para poder representarlo.

t: 0:37

3.AMC/ie	A: Claro que sí, hay números infinitos y puntos infinitos, pues cada número corresponde a un punto.
3.AVI/as	A: Claro
3.AVI/as	A: Eso sí
3.AMC/ie	A: Es que como no sabes el número, no puedes saber el punto.
3.AAI/ai	A: Pero si eso dijimos (no se entiende, algo de raiz)
3.PDC/a	P: Sí, aquí con $\sqrt{2}$, puede haber aquí un número
CA/i	A: ...
3.AMC/ie	A: Si te dan un número irracional y te dicen que lo represente en la recta, a lo mejor no puedes, pero un punto sí que lo puedes/
CA/i	...
CA/i	A: ...
3.PIS/p	P: O sea, que puede haber un punto que no le podamos averiguar el número, digamos así a mano...
3.AAI/os	A: No, no
3.AAI/os	A: Sí
1.PO/s	P: Entonces. A ver, un momentico,/
2.PE/a	y si alguien ha contestado otra cosa, que no lo tache; que conteste luego: yo creía esto pero ahora pienso lo otro. Quiero ver todo lo que habéis pensado, no si está mal ni bien./
2.PO/ce	Este punto de aquí... La pregunta era si a todo punto le corresponde un número y de qué tipo. ¿De qué tipo son esos números que están aquí puestos? Los números que tienen puntos en la recta, ¿de qué tipo son? (Pregunta textual).

3.3--t: 0:39

3.AAI/ai	A: Racionales
3.AAI/ai	A: Todos, menos los infinitos no periódicos.
3.PDC/ll	P: Dice Rocío que todos menos los infinitos no periódicos.
CA/i	A: ...
3.PIS/e	P: ¿Y cuáles son todos menos los infinitos no periódicos?
3.AMC/ie	A: Los enteros, naturales, enteros , naturales, racionales...
3.PIS/p	P: Los enteros, naturales. ¿Y qué más?
3.AMC/e	A: Los decimales
3.AMC/e	A: finitos
3.AMC/e	A: fraccionarios
CA/m	P: ¿Qué?
3.AMC/e	A: Los periódicos
3.PIS/e	P: Los periódicos ¿porque? porque tienen, porque son...
3.AMC/e	A: Porque se pueden pasar a fracción.
3.PVI/as	P: Porque son fracciones./
3.PIS/e	Oye, ¿y estos números cuáles son? A estas alturas ya de la vida. Estos, todos estos, ¿cuáles son?
3.AMC/e	A: Los racionales, los racionales.
3.PSC/c	P: O sea, que si yo doy un punto en la recta le corresponde un número siempre./
3.PIS/cl	¿Hasta ahí estamos?
3.AAI/os	A: Sí
2.PO/ce	P: ¿Y de qué tipo pueden ser ese número? (Pregunta textual).
3.AAI/ai	A: De todos esos.
3.AAI/ai	A: Todos menos los infinitos no periódicos
3.PIS/cl	P: ¿De todos éstos? ¿Y de éstos no?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: ¿De éstos no?/
3.PDC/ll	Sergio dice que sí, que de éstos también.

t: 0:41

3.AMC/ie	A: No, porque/
CA/i	...
3.AMC/ie	A: Pero si no sabes el final del número no sabes el sitio donde lo tienes que poner.
3.POC/e	P: Bueno, y tú Sergio por qué piensas que sí.
CA/s	A: Porque...
2.AI	A: Por eso.
3.AMC/ie	A: A lo mejor si se pudieran pasar a fracción sí se podría, pero como no se pueden pasar a fracción...
3.PDC/e	P: Pero los infinitos no periódicos...
3.AMC/ie	A: Por eso. No se pueden pasar a fracción.
3.PIS/e	P: ¿Por qué no se pueden pasar a fracción los infinitos no periódicos?
3.AMC/ie	A: Porque no se pueden, no tienen fin.
3.AIS/e	A: ¿Y qué?
3.AMC/ie	A: No tienen fin
3.AIS/e	A: ¿Y qué?/
CA/i	...
3.AMC/ie	A: ¡Pero no tienen fin!
3.PIS/p	P: Bueno, Sergio, ¿..., y yo puedo dar en un punto donde, vaya por Dios, sea uno de éstos?
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/p	P: ¿Por qué?
3.AAI/nc	A: No sé, porque...
3.POC/e	P: No, no sabes, no.
3.AMC/ie	A: Porque esos números tienen que estar en la recta.
CA/i	A: ...
3.AVI/as	A: Claro que sí
3.AVI/rs	A: No

3.AMC/ri	A: Ponle un ejemplo y que intente representarlo, y ya verá que no se puede.
CA/c	A: Que tengo hambre.
3.PDC/ll	P: Dice Rocío, que ponga un punto y que sea de uno de éstos y que .../
3.PIS/i	Físicamente, si lo tenemos que hacer, ¿nos va a salir alguna vez infinito no periódico?/
3.PIS/p	¿o llegará un momento en que los intrumentos de precisión ya no nos dé el ojo...
3.AMC/ie	A: Llegará un momento que todas líneas se junten tanto...

t: 0:43

2.PI/i.	
3.PDC/p	P: Que ya no vea./
3.POC/d	Entonces, si nos trasladamos a una recta ideal, que no tenga las limitaciones que yo ya no veo; o si pudiera aumentarlo con una lupa ideal. Dado un punto, el que fuera, a ese sí que hemos visto que le corresponde un número./
3.PIS/cl	¿Podría ser de este tipo?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: Vosotros creéis que no. ¿Hay alguien que piense que sí?
3.AIS/a	A: ¿Infinito no periódico?
3.AIS/a	A: ¿Puede repetir la pregunta?
3.PDC/c	P: Que si a un punto de la recta le puede corresponder un infinito no periódico
3.AAI/os	A: Ah. Yo pienso que sí.
3.PIS/p	P: ¿Por qué?
3.AIS/e	A: Pon un ejemplo.
3.AMC/ri	A: ... si hubiéramos hecho aquello, lo sabríamos. ¿Os acordáis? Estamos en el mismo caso que √2.
3.AAI/ai	A: Pero no se puede representar.
3.AIS/c	A: ¿Se puede representar √2 en la recta?
3.AAI/ai	A: Pero es que no se sabe.
3.AAI/ai	A: Pero no se trata de √2, se trata de un punto, no de √2.
1.PO/p	P: ¿Qué, Sergio?
3.AAI/ai	A: √2 sí se puede representar.
3.AMC/ie	A: Por ejemplo, representa1,4, y un poquillo más a la derecha estaría el 1,41 y un poquillo más a la derecha estaría el 1,451 y un poquillo más a la derecha, y así podríamos estar...
3.AVI/rr	A: Y así no acabamos.
3.AVI/rr	A: Y así nunca se acabaría.
3.AVI/rr	A: 1,41, pues ya es finito porque acaba, y si sigues añadiendo también ...
3.PDC/ll	P: Pero lo que dice Sergio es que si sigo encajando sucesivamente está entre el 1,41 y el 1,42; entre el/
CA/i	...
CA/r	
3.POC/d	P: Vale, pues cada uno que piense lo que quiera y que lo ponga;/
1.PO/d	y yo mañana recojo esa ficha y la 16, que es la que ...

t: 0:46

Exposición de los trabajos de los alumnos sobre el número Pi y el Número de Oro[1]

1 Como hemos señalado anteriormente, estas sesiones estaban dedicadas a que los alumnos que tuvieran interés expusieran al resto de la clase sus trabajos sobre el número Pi y el Número de Oro. En el transcurso de las mismas, debido a su nuevo papel, se produjo una ampliación en el espectro de rasgos en las actuaciones de los alumnos, motivado por el aumento de su iniciativa y responsabilidad. Damos cuenta a continuación de los rasgos que han sido ampliados en diversas categorías:

Fecha: 24-2-94
Duración Total: 33´26´´
Encuadre en la sesión: Toda la clase.

1---t: 0:00

3.PDC/a	P: La longitud de la circunferencia con respecto a la unidad; la longitud era pi por diámetro, luego pi era la longitud partido del diámetro./
3.PIS/i	Y la longitud, cuando el diámetro es una unidad, ¿la longitud se puede medir con una fracción o no?
3.AIS/e	A: ¿Y por qué no?
3.PIS/i	P: ¿O con un número entero?
3.AAI/os	A: No (tímido)
3.AAI/nc	A: No se oye bien (parece que expresan duda).
3.POC/e	P: Bueno, pues a ver si ahora estamos al loro y sale por alguna parte./

---t: 0:45

3.PIS/cl	Estas longitudes, las de los lados de los cuadrados, que tenían √12, √2, que no eran racionales, ¿tenían una parte común que encajara en una y en la otra, o no podían tenerla? ¿Tenían una partecilla pequeña que encajara en la unidad y en ésa, o no?
3.AAI/os	A: No (tímido)
3.AAI/nc	A: (Parece que están perplejos)
3.PVI/c	P: Pues si no os enteráis de esto, no os vais a enterar de nada./ 3.PIS/cl ¿Quién sabe lo que estoy preguntando?
3.AAI/nc	A: (Risas)
3.AVI/v	A: Son muchas cosas a la vez.
3.PDC/c	P: Ayer salieron, en la F17 salieron longitudes que eran las raíces./
3.PIS/e	¿Esas longitudes se pueden expresar como fracciones o no?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/cl	P: ¿Sí o no?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/p	P: No, ¿por qué?

2.AE:
-AE/ r
-AE/d: Los alumnos dan explicaciones sobre las decisiones que han tomado para realizar el trabajo o su exposición.
3.AIS:
-AIS/ a
-AIS/ e
-AIS/ r
-AIS/ c
-AIS/ i
-AIS/cl: Los alumnos interrogan para hacerse una idea de hasta qué punto una cuestión ha sido comprendida o un resultado es compartido en la clase (dirigiéndose a la clase en general o a alumnos determinados).
3.AMC:
-AMC/ c
-AMC/ ie
-AMC/ e
-AMC/ ri
-AMC/ ip: Los alumnos explican una ideaen términos de la perspectiva adquirida en la realización del trabajo sobre el número π o el Número de Oro.

Las intervenciones de los alumnos que exponen irán precedidas de la letra E (en lugar de la A habitual). Dado que los grupos de alumnos que exponen están normalmente compuestos por más de un miembro, utilizaremos la notación E1, E2, E3... para distinguirlos.

3.AAI/ai A: Porque las medidas no eran exactas.
3.PIS/p P: ¿Cómo que las medidas no eran exactas?
3.AAI/ai A: Que algunas daban la raiz cuadrada de un número que no da exacto.
3.PIS/e P: Dada la √2 ¿qué le pasa? ¿la √2 se puede expresar esa medida como una fracción?
3.AAI/os A: No /
3.AMC/ie A: No, porque no es exacta.
3.AMC/ie A: No, porque... no es exacta.
3.PVI/ad P: Porque es un decimal infinito no periódico./
3.PDC/a ¿Y si se pudiera expresar con una fración qué daría? Pues uno finito o uno periódico./
3.PDC/r Entonces, lo mismo que veíamos que los naturales nos servían para contar, los racionales nos servían para contar y para medir, y éstos ¿nos sirven para algo?/
3.PIS/i ¿Para medir todas las longitudes son suficientes los racionales o no?
3.AAI/os A: No, no
3.PSC/c P: Porque hay longitudes, como éstas, que no se pueden medir con los racionales.

--t: 2:40

3.AAI/ai A: Pero eso no lo sabemos ... si no sabemos que viene de una cuadrado pues lo medimos siempre con los racionales.
3.PIS/i P: Pero si sabes que viene de un cuadrado...
3.AVI/as A: Ah, entonces sí.
3.PVI/ad P: Sabes que exactamente, a ti te fallarán los medios físicos, y llegará un momento en que la precisión se te pierda y puedas dar otra solución, aunque se aproxime mucho.
3.AAI/ai A: Entonces, todas las líneas vienen de un cuadrado.
CA/m P: ¿Qué?
3.AAI/ai A: Que todas las líneas vienen de un cuadrado, entonces ninguna línea así se puede...
CA/r A: ...
3.PDC/r P: La diagonal del cuadrado de área 4, sí. Mide 2.
3.AVI/as A: Bueno, sí, mide 2.
3.PDC/r P: Si tiene de área 4/9, ¿qué mide? Mide 2/3./
3.PDC/II Bueno, que sobre eso quería llamar la atención./

2--t: 3:35

1.PO/d Y ahora, para pi. Aquí no trabajan sólo los que exponen, trabajan también los que escuchan./
1.PP/g Entonces, Rocío propuso que la nota no la diera yo sola, sino que también intervinierais vosotros. ¿Queréis que la nota la dé yo sola?
1.AS A: Sí
CA/r A: ...
1.PP/g P: ¿O queréis ponerla también vosotros?
1.AS A: Tú sola.
1.AS A: Sóla/
1.AE/r porque hay gente por hacer una gracia le va a bajar la nota.
1.AV/a A: Eso es verdad.
1.PP/g P: ¿Quién no quiere dar nota? ¿Quién no quiere ayudar a dar nota?
1.AS A: Yo
1.AP/d A: ¿Cómo?
CA/i A: ...
1.PP/g P: ¿Quién no quiere, quién quiere que la nota la ponga yo sola y ya está?
CA/r A: ...
1.PP/g P: ¿La pongo yo sola entonces?
1.AS A: Sí, sí.
CA/r A: ...
1.PO/d P: Bueno, vamos a hacer una cosa: el que quiera, el que quiera dar nota. El que no quiera que no la dé, y el que quiera...

1.AS	A: Que la dé.
1.PV/a	P: Vamos a hacer lo que decía Rocío./
1.PO/d	Vosotros le dais del 1 al 5, ponéis "un 3", como en la televisión, del 1 al 5 le dais; y yo también le doy del 1 al 5; y luego pues sumamos.
CA/i	A: ...
1.PE/a	P: Y si vosotros le dais un 3 y yo un 4, tiene un 7, ¿vale?
1. AP/d	A: ¿Pero eso es quién quiera?
1.PE/a	P: Eso es quien quiera. Entonces, a todos les dais del 1 al 5 el número que queráis./
1.PO/d	Y, para que a ellos también les sirva, si no queréis hacerlo con todos los grupos, por lo menos con alguno, decís por qué le habéis dado eso, para que a ellos les sirva, para si ellos lo tuvieran que hacer otra vez, saber que cosas pueden mejorar; yo también lo haré. Vale, aparte del número alguna indicación que les pueda servir a ellos; yo también se lo daré./
1.PP/g	¿Vale?/
1.PO/d	Pues con esas indicaciones ya podemos empezar. Tenéis como 12 minutos o así.
1.AP/d	A: ¿Hay que tomar apuntes?
1.PO/d	P: Ah, otra cosa. Lo que salga aquí es como si lo explicara yo. Eso es lo que se ha dado en clase.
1.AP/e	A: Pero si no lo entendemos.
1.PE/d	P: Si no lo entendéis, preguntáis; que para eso están para preguntar.

3.1---t: 5:47

3.AMC/e	E1: Vamos a ver, lo primero que preguntaba era el significado de pi. Pi es la abreviatura de la voz griega P, y se pone la P porque es abreviatura de la palabra Peripheria, que quiere decir circunferencia. Luego si buscáis por ahí en las enciclopedias... utilizado para representar la relación constante que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, luego, la longitud de la circunferencia (y el diámetro); así que pi será, esto.
1.AS	A: Habla más alto.
CA/i	A: ...
1.AS	A: Que hable más alto.
3.AIS/cl	E1: ¿Alguna duda de lo que hemos explicado hasta ahí?
2.PI/i	P: Un momento, a ver./
1.PO/d	Nieto, y todos los demás: estáis explicando, vosotros estáis explicando cosas; y lo que se explique tiene que entenderse, porque de hecho no vamos a perder una hora en que habléis a las paredes, o en que digáis una cosa sin interés de que lo entiendan. O sea, hay que esforzarse, vosotros porque lo entiendan y ellos por entender, y eso para todo el mundo que salga. Porque lo que no tiene sentido es perder aquí un par de horas en que no se entienda nada de lo que decimos, eso sería una tontería.
1.AS	A: Hablad más alto.

3.2---t: 7:05

3.AAI/ai	E2: Bueno, después hicimos unos cálculos aproximados con un portalápices, medimos su longitud y nos daba 20, ... daba la longitud de la circunferencia, y el diámetro 6,6. Y eso partido de..., la longitud partido del diámetro nos daba una aproximación: 3 ...
3.AIS/a	A: ¿Y lo hicisteis vosotros?
CA/i	A: ...
3.AIS/r	A: ¿De qué circunferencia?
3.AMC/ip	E1: Una circunferencia relativa, la que quieras. Tú coges un portalápices, por ejemplo y le mides ... Donde se meten los bolis.
3.AIS/r	A: Eh, pero si pi es 3,1416.
3.AAI/ai	E2: Sí, hombre, pero no podemos hallar nosotros una aproximación...

CA/i	A: ...
2.AS	A: Eh, Orozco, Orozco, haced los pasos que hicísteis.
CA/i	A: ...
3.AAI/ai	E2: Mira, cogimos
2.AI.	
3.AAI/ai	E1: Un portalápices o un lapicero.
2.AI.	
3.AAI/ai	E2: Entonces. Cogimos, cogíamos un hilo y le dábamos la vuelta, intentando que fuera totalmente recto, o también cogíamos un metro de estos de costura, y le dábamos vuelta
3.AIS/r	A: ¿A qué le dábais la vuelta?
CA/i	E1: ...
1.PO/s	P: Shsss... Un momento.
3.AAI/ai	E2: Le dábamos vuelta al ...; y después el trozo de hilo que habíamos utilizado lo medíamos con la regla y ...
2.AI.	
3.AAI/ai	E1: Y luego el diámetro.
2.AI.	
3.AAI/ai	E2: Y bueno, y luego el diámetro y ya está, lo medíamos con la regla y ya está.
3.PIS/p	P: ¿Y valdría con cualquier circunferencia?
3.AAI/os	E1: Hombre, si ha valido con ésta yo creo que valdría con cualquiera.
3.AVI/as	A: Claro.
CA/i	A: ...
3.AMC/ie	A: Entonces si lo coge otra persona y te da dos resultados distintos, pues entonces pi no...
3.AMC/c	E1: Pero te da dos resultados distintos porque es una aproximación.
CA/r	A: ...
2.PI/i	P: Una cosa./
3.PDC/II	Vosotros habéis leído en la definición una cosa que es importante.
3.AMC/c	E1: Que es una constante.
3.PSC/c	P: Que para todas las circunferenias la relación entre la longitud y el diámetro es constante, es siempre pi. Te podrás aproximar más o menos, pero para cualquier circunferencia, sea grande o sea chica, la relación que hay entre su longitud y su diámetro es constante, y es pi./
2.PO/p	Venga, ¿qué más?
CA/s	E2: Bueno, para saber...
2.AS/p	E1: Espera, espérate.
3.AIS/r	A: ¿Que eso qué es, un cono lo que cogísteis?
3.AMC/ip	E3: Eso no es un cono, es un lapicero.
3.AMC/ip	E1: Lo que pasa es que aquí lo puedes confundir porque ésta es una medida de capacidad, y lo que nosotros cogimos es la parte ésta, la parte de arriba, la circunferencia.
3.AMC/ip	E2: Es como si le hiciéramos un corte.
3.AMC/ip	E1: La parte de arriba es así, como si le hiciéramos un corte a esto y cogemos una de las secciones.
3.AAI/ai	E2: Y después también tenemos otro ejemplo, con un bote normal y corriente, la longitud era...
CA/i	A: ...
3.AAI/ai	E2: Y el diámetro era 4
3.AIS/a	A: ¿Eso con otra circunferencia?
3.AAI/ai	E2: Eso con un bote cualquiera, normal y corriente, de los de plástico...
2.AI.	
3.AMC/c	E3: ... hagas lo que hagas siempre va a salir más o menos...
2.AI.	
3.AMC/ie	E1: Siempre te sale más o menos, lo que pasa es que en éste nos habremos equivocado más al medirlo.
CA/i	A: ...
3.AVI/v	E2: Es que como los medios son un poco burdos.
CA/b	A: ¡Oh!, son un poco "burdos".
3.AIS/r	A: ¿Y por qué al hacer un problema siempre coges 3,14 y no coges?
3.AMC/c	E1 y E2: Porque esa es la medida que tenemos...

3.AIS/c	E2: ¿Cómo se sabe que el pi que han hallado es el correcto y el exacto, y no ése?
3.AIS/a	A: ¿Cómo, cómo?
3.AIS/a	A: ¿Qué, qué , qué?
3.AMC/c	E: Sí, que cómo sabemos que ...
3.AAI/ai	A: Porque ése lo inventó Pitágoras y el ese se lo han inventado ellos.
3.AVI/rs	A: ¿Qué tiene que ver Pitágoras?
2.PI/i.	/
3.PIS/p	P: A ver, ¿tenéis más cosas? ¿tenéis algo de Historia?
3.AAI/os	E1: Sí
3.PIS/e	P: ¿Habéis buscado en la Historia si daban distintos valores o todos daban 3,14?
3.AMC/e	E1: Todos daban aproximaciones. Cuanto más civilizados eran, daban unas aproximaciones más cercanas, porque por ejemplo los babilónicos, los mesopotámicos cogieron una aproximación que era 3,3; y luego los griegos diero otra aproximación que era ...
CA/r	A: ...
1.PA/s	P: Liñán, tienes tu tercer aviso, así que voy a hablar con la tutora y van a venir tus padres.
1.AR	L: ¿Yo?
1.PA/s	P: Sí
1.AR	L: ¿Porqué?
3.AMC/e	E2: Y así ahora mismo se han llegado a sacar ... cifras, y se seguirán sacando.
1.PA/r	P: Y Juan (no se entiende, parece que le estoy regañando, porque hay falta de atención en la clase y ruido)/
2.PO/p	Venga, lo que estábais explicando.
3.AMC/e	E2: Que nada, que digo que así actualmente se han llegado a sacar hasta 10 millones de cifras decimales.
2.PO/p	P: Bueno, y lo que preguntábais vosotros,/
3.PIS/p	¿cómo se sabe cuál es la verdadera?/
3.PIS/e	¿Cuándo empiezan así a converger? Por ejemplo, los mesopotámicos tenían el 3,2. ¿Cuándo empiezan a dar el 3,14 ó 3,1415?
3.AMC/e	E3: Los mismos mesopotámicos empezaron a dar valores muy exactos. Empezaron a dar el 3,1418, y 3,16
3.PIS/p	P: ¿Y no habéis encontrado en ningún sitio cómo se sabe que esas aproximaciones eran falsas y las otras ...
2.AE/d	E1: Es que no nos ha dado tiempo, no hemos podido ir a la biblioteca.
2.AE/d	E2: Es que como dijo usted que mañana...
3.PVI/v	P: No, no, si yo no digo que es que lo hayáis hecho mal./
3.PDC/c	Digo que si no habéis, que esa pregunta os la habéis heho vosotros, que si no habéis buscado...
CA/s	E2: Si
3.AIS/a	E3: ¿Qué hacían para averiguar ese número?
3.AVI/rr	E1: No, que cómo saben que es el exacto 3,1415...
3.AIS/a	E3: ¿Tú qué preguntas, que de dónde lo sacamos los números?
3.AVI/rr	E1 y E2: No. Que cómo se sabe cuál el exacto.
3.PIS/p	P: Que la pregunta que me habéis preguntado a mí, ¿se os ha ocurrido últimamente o habéis intentado buscarla?
2.AE/d	E2: No. Fue cuando lo estuvimos preparando, entonces no nos dio tiempo.
3.AMC/ie	E1: Porque como nos estábamos equivocando cada dos por tres cada vez que lo medíamos, decíamos y ¿cómo sabemos no es el exacto, que el bueno es el nuestro, y no el de...?
2.PI/i.	
3.PVI/ad	P: El de Arquímedes, o el de...
3.AAI/ai	E2: Ah, una cosa que... También otro procedimiento para encontrar pi podría ser...
CA/r	A: ...
2.PI/s	P: Esa pregunta queda pendiente, ¿eh?/

3.POC/e	A ver si la vais buscando.
3.AIS/c	A: ¿Por qué es cierta la de Arquímedes y no ésta?
3.PDC/p	P: La de Arquímedes no es cierta.
3.AMC/e	E3: ... que dice que hasta la Biblia, hasta la Biblia da una definición de pi.
2.AI	A: Seño, seño, Isabel./
3.AAI/ai	Es que la verdadera es esa, porque 3,14 es el valor que tiene que tener.
3.AMC/e	E3: Se ha encontrado un papiro que se escribió en Egipto, el valor/de pi es 3,16. Y el valor babilónico y bíblico fue de 3,0.
3.PVI/ar	P: De 3, fijaros.
3.AMC/ri	E1: Tendríamos que buscar también cómo se las apañaron, o sea qué midieron para que les diera 3.
3.PVI/as	P: Para que les diera 3.
3.AMC/e	E3: Los egipcios también dieron un valor muy aproximado, que fue 3,1605.

3.3---t: 12:48

3.AMC/e	E2: Una forma de asegurar una aproximación más exacta de pi es en una circunferencia se inscribe dentro un polígono.
3.AMC/e	E1: Un polígono regular.
3.AMC/e	E2: Bueno, un polígono regular, que Arquímedes pudo conseguir que fuera de 16 lados y entonces.
3.AMC/e	E1: Primero lo inscribió con un hexágono. Arquímedes cogió un hexágono. Esto es una recta. Aquí los vértices, aquí ponemos P, y lo hacemos girar así. Os imagináis que esto sigue rodando por allá hasta que la P vuelve a tocar otra vez la recta ésta de aquí; esto es la longitud de la circunferencia. Y se puede, también lo calcularon haciendo, ¿cómo se llama el problema?, lo de la cuadratura del círculo. El problema de la cuadratura del círculo. Para calcular la superficie del círculo querían convertirlo en un cuadrado.
2.AE/d	E2: Ese es que no lo hemos copiado.
(2.PO/p	P: Bueno, vamos a detenernos un poco en lo de Arquímedes./ 3.PDC/p Arquímedes empezó con uno de 6, y acabó con uno de 96 lados./
3.PIS/i	¿Qué ventajas tiene el ir inscribiendo polígonos y luego medir el perímetro del polígono, que es muy aproximado al de la circunferencia?/
3.PDC/ll	Fijaros que cuantos más lados vaya teniendo el polígono.../
3.PIS/i	Bueno, entonces, ¿qué ventaja tiene hallarlo con ese método y no midiendo la longitud con centímetros o con milímetros? ¿Tiene alguna ventaja?
3.AAI/ai	E2: ... más exacto.
3.AAI/os	E1: Tiene más ventaja medirlo con (parece que señala el método de Arquímedes).
3.AAI/os	E2: No, no, no.
3.PIS/i	P: ¿Tiene más ventaja medirlo con polígonos cada vez más próximos, más próximos, más próximos, o partir la circunferencia y medirla con centímetros o con milímetros?
CA/i	A: ...
3.PIS/i	P: ¿Eso tiene más ventaja?
3.AMC/ie	E1: Sí porque así mides la circunferencia; si mides lo que, si mides por ejemplo un polígono de 96 lados siempre sus lados van a ser rectos, entonces va a haber un sector de la circunferencia que se va a quedar en blanco; porque eso nunca va a ser círculo.
3.PDC/r	P: Pero cuando tú mides la longitud con decímetros o con centímetros, pues digamos que la estás midiendo con trozos, que son un centímetro, o un decímetro, o un milímetro. Mientras que si tú pones un polígono de mil lados, Arquímedes desde luego no podía pero con los ordenadores sí se puede, entonces los lados con los que tú mides los puedes hacer tan chicos como tú puedas.

3.AVI/rr	E1: Podría llegar a confundirse pero mientras sea polígono no va a ser circunferencia. Mientras sea cuadrádo nunca va a llegar a ser círculo.
3.PVI/as	P: Claro.
3.AAI/nc	A: Yo no he comprendido lo de la circunferencia y el hexágono.
3.AMC/e	E2: Inscribes dentro de la circunferencia un polígono regular, que en este caso es un hexágono; y entonces tú marcas aquí, ... la circunferencia y empiezas a darle vueltas a la circunferencia, y justamente cuando este punto haya dado la vuelta completa y haya vuelto a llegar al mismo punto aquí tú mides eso y esa es la longitud de la circunferencia.
3.PDC/p	P: Si lo mides con un metro, o con decímetros o con milímetros, estás midiendo la longitud con milímetros, y si mides el perímetro del polígono, estás midiendo el polígono./
3.PIS/i	Entonces entre... lo que yo preguntaba era cuál era más exacto y por qué.
CA/s	A: (Silencio)
3.PIS/i	P: ¿Es más exacto estirar la circunferencia y medirla con milímetros?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: Sí, claro.
3.PIS/i	P: ¿O ir inscribiéndole polígonos muy chiquitines y medir el perímetro de ese polígono?
CA/i	A: ...
3.AAI/os	A: Es más exacto el de la otra.
3.AAI/os	A: El primero
3.PIS/cl	P: ¿El de los milímetros?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: Coger la circunferencia y medirla con milímetros.
3.PVI/rs	P: ¿Sí? No sé, yo no lo veo así
CA/r	A: ...
3.PDC/r	P: Yo no lo veo así. Yo creo, fijaros, los centímetros, por pequeño que sea el trozo es un trocillo, pero si yo puedo hacer el polígono tan pequeño como yo quiera, llegará un momento que el trozo es más chico que el milímetro.)
CA/i	A: Pero entonces ...
CA/i	A: ...
CA/m	E1: ¿El qué?
CA/m	A: Eso. Lo que has hecho en la pizarra.
3.AVI/c	E1: Ah, ¿Esto? ¿El hexágono? Si eso no es complicado,/
2.AS	¿lo explico otra vez?/
2.AS/p	E3: Explícaselo.
3.AMC/ip	E2: Venga. Inscribes un polígono regular en una circunferencia, y cuanto más grande sea el polígono, o sea de cuantos más lados sea, más exato te va a medir. Entonces, en la parte donde toca a la línea haces un punto, empiezas a dar vueltas, y cuando la circunferencia haya dado la vuelta completa, y haya llegado otra vez al punto...
2.AI.	
3.AMC/c	E3: Esa es la longitud de la circunferencia.
3.AMC/c	E2: Esa es la longitud de la circunferencia, y después el diámetro es igual a pi.
3.AEC	A: De ahí sale, de esa forma, pues la tercera circunferencia será igual que la primera.
3.AVI/ad	E1: Claro, si es que estás midiendo la longitud de la circunferencia.
3.AMC/c	A: Pero hasta ahora no lo veía.
1.PPA	P: Bueno, ¿tenéis otra cosa? ...
2.AE/d	E3: Bueno, es que ya sobre las aproximaciones de pi, de las que ya hemos hablado.
1.PO/d	P: Tenéis muy poco tiempo ya, eh.

2.AE/d	E3: Sobre las de Diofanto, las de los egipcios, sobre ... Y después habla de sobre otro personaje pero que no tiene nada que ver con esto. Bueno, no tiene mucho que ver.

4--t: 19:57

2.PO/p	P: Bueno, pues entonces, si ya no es sobre pi, ¿quién va a salir?,/
1.PP/g	¿el siguiente grupo quién era?
1.AS	A: Eras tú, Vera.
1.AV/a	A: Sí, era Vera
1.PO/s	P: Un momento,/
1.PO//p	Vera dice hoy que se encuentra mal. Y había más gente para hoy.
1.AS	A: Estaba Javi
1.PP/g	P: ¿Quién había para hoy Jueves?
1.AS	A: No sea dura, señorita.
1.AS	A: Nadie
1.PO/a	P: Bueno, ¿quién va a salir a exponer? ¿Quién quiere salir a exponer?
CA/r	A: ...
1.PO/a	P: Aparte de Vera, ¿quién quiere salir a exponer? ¿Nadie más?/
1.PO/d	Javi, sal.
1.AV/r	A: No, pero ahora no
1.PV/r	P: No, que ya es el último día hoy.
1.AV/r	A: Pues entonces yo no lo expongo./
2.AS	Expongo el del número de oro. Hago el número de oro
1.AV/r	A: No
1.PV/r	P: Vamos a ver, estábais apuntados para exponer el Jueves. Lo tengo aquí apuntado.
1.AV/r	A: Sí, seño, pero ya no va a dar tiempo.
1.PV/r	P: Javi, Pablo y Juan; y Vera, que le duele la cabeza.
CA/m	A: ¿Qué?
1.PO/d	P: Que si Javi, Pablo y Juan no exponen hoy, no exponen.
CA/r	A y P: Discutimos sobre el tema de quién expone y cuándo (No se entiende)
1.PV/r	P: Vamos a ver. Y no discutimos más porque estamos perdiendo un montón de tiempo./
1.PO/d	Hoy había tres personas para el Jueves, que si no lo hacen hoy pues ya no lo hacen, y punto.
1.AP/e	A: ¿Por qué?
1.PE/r	P: Porque ya no hay más tiempo.
1.AS	A: Mañana.
1.AP/d	A: ¿Mañana lo va a hacer Vera?
1.PV/r	P: No,/
1.PE/r	mañana lo va a hacer Vera porque como había que dejar uno para mañana, y como él ha dicho que le dolía la cabeza, he decidido dejarlo a él para mañana. Porque me lo ha dicho antes de la clase./
1.PO/d	Los demás si no lo tienen preparado pues no lo exponen y ahora seguimos con lo que les quede a ellos
1.AP/d	A: ¿No lo podemos entregar?
1.PE/d	P: ¡Sí! Claro que me lo podéis entregar; pero ya no lo exponéis.
1.AP/d	A: ... los del número de oro ...

5--t: 22:02

2.PO/p 3.PIS/i	P: Vamos a ver. ¿Qué relación tiene lo que hemos visto de pi con lo de clase?
3.AAI/os	A: Pues nada.
3.PIS/p	P: ¿Nada?
3.AAI/os	E3: Sí, si tiene mucha relación.
CA/r	A: ...

3.PIS/e	P: ¿Alguien ha encontrado cuándo se supo que pi tenía infinitos decimales no periódicos?
3.AAI/os	A: Los griegos...
CA/i	A: ...
1.PE/d	P: En principio, en principio lo que digamos de pi es lo que se ha dicho.
1.AP/d	A: ¿Y luego va a caer en el examen?
1.PE/d	P: ¡Hombre, claro que va a caer!
CA/i	A: ...
3.PIS/e	P: Bueno habíamos visto que en la Biblia daban el valor 3. Los mesopotámicos daban el valor ¿cuál?
3.AMC/e	A: El número de la Biblia
3.PVI/as	P: El mismo de la Biblia/
3.PIS/e	¿Y Arquímedes cuál dio?
CA/s	E3: Arquímedes...
2.AI.	
3.AMC/e	E2: 3,12
CA/m	P: ¿3,12?
3.PIS/e	P: Bueno, ¿y cuándo empiezan a dar muchos decimales, muchísimos decimales?/
3.PIS/e	¿Los egipcios, cuántos calcularon? ¿Qué habéis dicho que calularon los egipcios? ¿3,14?
3.AMC/e	E2 y E3: 3,15. 3,1518
3.PIS/p	P: ¿Cuándo se dieron cuenta de que eran infinitas cifras no periódicas?
3.AAI/nc	E3: Pues...
3.PDC/p	P: Estuvieron buscando fracciones y estuvieron buscando todos decimales finitos,/
3.PIS/e	¿hasta qué siglo?
CA/i	E1: ...
3.PIS/e	P: ¿Hasta el siglo XVII? ¿Qué pasó en el siglo XVII?
3.AMC/e	E1: Que demostraron que pi era trascendente.
3.PVI/ad	P: Que demostraron que pi era irracional.
3.AIS/c	E2: ¿Pi no era racional?
3.PDC/p	P: O sea, que lo demostraron.
3.AIS/r	A: Entonces, si pi no es racional...
CA/i	A: ....
CA/m	P: ¿Que tenía infinitas cifras no periódicas?
CA/i	A: ...
3.PDC/c	P: Un número trascendente ... lo que es.
3.PDC/p	P: Qué tenía infinitas cifras no periódicas,/
3.PIS/e	y además entonces, se sabían unas cuantas, ¿no? Sabían ¿como cuántas?
3.AAI/nc	E2: (Duda; parece que lo están buscando)
1.PA/r	P: Bueno, Juan con ésta ya van tres veces
1.AR	A: Y ¿qué he hecho? Si no estoy hablando yo.

---t: 24:58

3.AMC/e	E1: Cuando empezaron a calcularlo con máquinas. En 1949 se sacaron ya a pi 2.037 decimales.
3.PVI/as	P: En 1949 ya pi se sacó con 2000 y pico decimales.
CA/i	E2: ...
3.PDC/a	P: Más de 2000 decimales. Pero ya se sabía que era infinito no periódico./

---t: 25:27

3.PDC/r	Entonces, pi se puede, la longitud de la circunferencia, ¿se puede medir con fracción?
3.AAI/os	A: No, no.
3.AMC/ie	E3: Si es un número infinito e irracional, ¿cómo va a ser un número racional?
3.PVI/ar	P: Claro. O sea, que esta longitud es irracional,/
3.PDC/p	es inconmensurable, no se puede medir con ninguna fracción.

3.AAI/ai	A: Pero ¿cómo con una fracción? Mides con una regla./
3.AIS/r	¿Cómo vas a medir con una fracción una longitud?
3.PDC/a	P: Como la habéis medido, con relación a una unidad. tú coges una unidad. Haces una circunferencia que tenga de diámetro esa unidad, y ahora quieres medir la longitud. O sea, la longitud, tienes que calcular el diámetro si el diámetro lo tomas como unidad, la longitud mediría pi./
3.PIS/i	Si lo mides con una regla, ¿qué medida te da?
3.AAI/ai	A: Pi
3.PDC/p	P: Un decimal./
3.PIS/i	¿Finito o infinito?
3.AAI/os	A: Finito.
3.PIS/p	P: ¿Y entonces qué pasa?
3.AAI/ai	A: Pues que no es. Es una aproximación.
3.PVI/as	P: Que es una aproximación./
3.PIS/cl	¿Lo entendéis o no, eso?
3.AAI/os	A: Sí (con la boca pequeña)
3.PDC/a	P: Si tú coges una circunferencia que tenga de diámetro la unidad, la longitud del diámetro. La longitud mide pi partido de su diámetro, que es pi. La longitud mide pi./
3.PIS/e	Y ese pi, ¿es un decimal finito o es una fracción?
3.AMC/e	A: Es un decimal infinito.
3.PSC/c	P: O sea, que hay medidas, como la longitud de la circunferencia de diámetro unidad, además de las de los cuadrados, que no se pueden medir con números racionales.
3.AIS/i	A: En la enciclopedia pone algo de qué es un ... , ¿puede ser?
3.PDC/p	P: Inconmensurable. Igual, pondría. Inconmensurable quiere decir que no se puede medir mediante una fracción. Es decir, que no hay una parte pequeñita que encaje y encaje aquí, de manera que tú puedas poner aquí "87/4".

--t: 27:47

3.AAI/l	A: Pero en la enciclopedia, dice que no estaba seguro de que fuera irracional, sino que se seguían sacando muchos decimales y no estaban seguros.
3.PDC/ll	P: En la enciclopedia dice Katerina que se habían sacado muchos decimales, pero no se estaba seguro, se seguían sacando decimales pero no se estaba seguro de que alguna vez fuera a acabar.
3.AVI/as	A: Eso, eso es lo que yo vi, eso es lo que yo vi, seño.
CA/m	P: ¿Qué?
CA/m	A: Que no se sabía si se podía acabar o no.
3.AVI/rr	E3: No, aquí dice que sí era era un número que nunca acaba. Eso venía, espera.
3.PDC/c	P: Una cosa es que no se sepa si puede acabar y otra cosa es que se sepa que no acabe.
1.AS	E3: Mira... (Uno de los alumnos que exponen encuentra una información interesante en sus papeles).
3.AMC/e	E1: En el siglo XVII...
CA/i	
3.AIS/c	A: ¿Y cómo se sabe, si acaba o no acaba?
CA/i	A: ...
3.AMC/e	E3: Dice que nadie sabe su valor exacto, ni lo sabrá nunca
3.AIS/e	A: ¿Por qué?
3.AMC/e	E3: Y sin embargo lo usamos,...
2.AI.	
3.AIS/c	A: ¿Pero cómo se sabe que no va a acabar nunca?
CA/i	A: ...
3.AIS/c	A: Pero, Jose, ¿cómo sabes que no se va a acabar nunca?
2.PI/i.	
3.PDC/ll	P: Eso es lo que dice Nieto/

3.PSC/c	que se demostró en el siglo XVII. Que no se iba a acabar nunca. En el siglo XVII se demostró que ese decimal era infinito, y no le va a salir periodo jamás.
3.AMC/e	E1: Y antes del siglo XVII se tiraban sacando un montón de decimales ... con la esperanza de que en algún momento de los decimales diera un periodo ...
CA/r	A: ...
3.PDC/a	P: Antes del siglo XVII, la gente, muchos que se entretuvieron en eso, pues se pasaban la vida sacando decimales, a ver si alguna vez se acababa o alguna vez salía un periodo./
3.PDC/ll	Y este hombre que dice Ignacio se tiró toda su vida para sacar 35 decimales.
3.AVI/s	A: ¿Sí?
3.AVI/s	A: ¿35?
3.PVI/v	P: Pobre hombre.
CA/i	A: ...
CA/m	P: 35
CA/m	A: ...
3.PDC/c	P: ¡Que hasta el siglo XVII! que hasta el siglo XVII se estuvieron empeñando en lo que os empeñáis vosotros. En ver si acababa, o en ver si tenía un periodo, y venga a sacarle decimales a ver si alguna vez salía el periodo.
3.AIS/c	A: ¿Y cómo demostraron que no puede salirle un periodo y no va a acabar nunca?
3.AAI/ai	A: Eso no puede
3.PVI/c	P: ¿Qué cómo lo demostraron? Es muy difícil, se tiraron más de 20 siglos para demostrarlo.
3.AIS/e	A: ¿Y no nos lo puede contar aunque sea más sencillo?
3.PVI/c	P: Hombre, yo os lo puedo contar, pero no lo vais a entender./
3.PDC/r	Porque fijaros, es mucho más fácil demostrar que el lado del cuadrado de área 2 tiene infinitos decimales y no le va a salir periodo nunca, y no se va a acabar nunca; es mucho más fácil demostrarlo, eso ya lo sabían los griegos, y vosotros no lo entendéis, que ya os he intentado yo demostrarlo y no lo entendéis.
CA/r	A: ...

--t: 31:12

3.PDC/ll	P: Fijaros bien./
3.PDC/p	Si yo necesito una aproximación de pi para hacer una carretera, o una noria... Pues la aproximación de pi no va a ser tan fina como para medir un anillo, o una célula que sea redonda. Es decir, que depende de las situaciones para las que yo quiera pi, pues cojo más o menos ... Como han sacado muchísimos decimales, pues tienen todos los que quieran.
CA/r	(El nivel de ruido de los alumnos es bastante elevado. Parece que preguntan por los exámenes).
1.PO/s	P: A ver, a ver si se aclara un momento una cosa./
1.PA/r	Estoy harta de daros notas malas, porque a vosotros sólo os interesa saber las notas malas, y no aprender para sacarlas buenas./
2.PO/p	Así que yo prefiero que prestéis más atención a esto, que a las notas malas que habéis sacado, porque no habéis prestado atención a lo de antes./
3.PIS/cl	¿Ha quedado zanjado el tema de pi?
3.AAI/os	E1: Más o menos.
CA/i	A: ...
1.PE/d	P: No, sobre pi ya no va a salir nadie a explicar nada.
1.AP/d	A: ¿Ni yo?
1.PE/d	P: Bueno, Vera. Mañana.
1.AP/d	A: Seño, ¿y lo del número de oro?

1.PO/d P: Y lo del número de oro, a mí me gustaría que lo hiciérais mañana con lo que tengáis, porque en un cuarto de hora podéis explicar muchas cosas./

1.PE/r.

CA/i Es que si no .../

1.AV/a A: Entonces, mañana.

3.POC/e P: Bueno, y a ver si alguien encuentra cómo se sabe que el valor de pi es 3,14159... con todos esos decimales, y no el que han dado éstos o el que dieron los griegos...

t: 33:26

Fecha: 25-2-94
Duración Total: 35´56´´
Encuadre en la sesión: Gran parte de la clase.

1---t: 0:00

Los dos alumnos que van a hacer la primera exposición están anotando cosas en la pizarra.

3.AMC/e E1: Pi es una abreviatura de la palabra Periferia, que significa la circunferencia. Básicamente es el símbolo de la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro, que se expresa con (escribe en la pizarra, no se ve).
La longitud ... entre la longitud de la circunferencia y pi es constante. No, perdón, entre la longitud de la cirunferencia y el diámetro; es constante, y se llama pi./

3.AAI/ai Es siempre, bueno, algunas veces varía./

3.AMC/e Para medir la longitud de la circunferencia se puede hacer por varios métodos, como coger una cinta métrica y rodear el círculo, y luego pues la medida, hallarla. Y coger una cuerda y rodear el círculo y luego medirla. Luego hay otras más complicadas, que podría ser haciendo la inscripción de polígonos en una circunferencia, pero eso, no sé, es más complicado. Bueno, luego, la historia. Esta tabla pues indica el avance que ha habido en las distintas civilizaciones con respecto a pi. Entonces pues. Bueno, pi se ha llegado a calcular actualmente hasta 800 cifras decimales, aunque se sabe que nunca se acaba y que no es periódico.

CA/i A: ...

1.2---t: 2:08

3.AMC/e E1: Es infinito, pero se ha llegado a calcular hasta 800 cifras, se sabe con seguridad que nunca se va a llegar a calcular.

2.PI/i

3.POC/e P: ¿No os traje yo una noticia que venía ... de la NASA?

3.AMC/e A: Sí, 10 millones de cifras decimales.

3.PIS/e P: ¿10.000 ó cuántos?

3.AMC/e A: 10 millones, 10 millones.

CA/i A: ...

3.PIS/e P: ¿10.000 ó 10 millones?

3.AMC/e A: 10 millomes.

3.AAI/ai.

CA/i A: En el mío daba

2.PI/i.

3.PDC/II P: De 800 a 10 millones...

3.AVI/ad A: Son muchos millones, son muchos millones.

3.POC/e P: ¿Y no lo tenéis aquí?

1.AS A: Yo no lo tengo. Lo tenías tú, Nieto.

3.AMC/e A: 10 millones.

3.AMC/e	E1: Bueno, es posible demostrar que pi no es un número racional.
CA/i	A: ...
3.AMC/e	E1: Porque no puede ser expresado como cociente de dos números enteros, no puede ... Los egipcios en el año ... , el papiro de Ames, cuando calculó pi, le salía esto. Luego Arquímedes le salía ésta.
3.PIS/e	P: ¿Y eso como cuánto es, en decimal, cómo cuánto es?
3.AIS/a	E1: ¿Esto?
3.PDC/c	P: Sí, para ver lo que se diferencian lo de Arquímedes de lo de Pi.
CA/s	E1: Ah, pues...
3.PDC/e	P: Bueno vosotros seguid explicando, que ahora ellos con la calculadora..../
1.PO/d	Seguid explicando.
3.AMC/e	E1: Bueno después, Arquímedes luego, en el mismo año, bueno en el año 50 a.C., pues hizo esta aproximación de Pi ... la anterior. ... en el año d.C., pues ya hizo una aproximación más exacta pi. Y más tarde, Vieta d.C., en el año ... pues ya hizo la exacta.
2.PI/i.	P: (Parece que los alumnos le han pasado la información acerca del calculo de las cifras decimales). A ver, aquí pone...
3.AMC/e	A: Cien, cien
3.AMC/e	A: Cien millones
3.AMC/e	A: Cien millones de ceros
3.PSC/c	P: O sea, que se ha calculado hasta ahora, que se sepa, con 100 millones de cifras decimales./
3.PIS/e	¿Quién? ¿dónde?
3.AMC/e	A: En la NASA.
CA/i	A: ...
3.PIS/e	P: ¿Es un japonés, o es con un ordenador de la NASA, o...
3.AMC/e	A: Un japonés
3.AMC/e	A: Un ordenador de la NASA
3.AMC/e	A: La NASA
3.AMC/e	A: Un ordenador
3.PDC/ll	P: Pues de 800 cifras a 100 millones.../
3.PDC/p	Es que cuando hay máquinas, se dispara; ya lo que al pobre hombre le costó toda su vida sacar 35 cifras decimales, en cuando hay máquinas ya, ya va rapidísimo.
3.AAI/al	E1: O sea, se puede decir que se han escrito estas cifras de pi, de decimal, pero nunca se han escrito todas las cifras que hay...
3.PVI/rr	P: No, no, que se han llegado a escribir 10 millones./

1.3---t: 6:45

(3.PDC/ll	Dice este hombre que si al final no saldrá un periodo por algún lado.
3.AIS/a	A: ¿Cuál?
3.AMC/e	E1: Los libros dicen que no.
CA/i	A: ...
3.AIS/r	A: ¿Por qué no?/
3.AIS/i	Si es un decimal infinito, ¿quién sabe?
3.AMC/e	E1: Se sabe, se sabe.
3.PDC/a	P: Ramón, que ayer dijo Nieto que en el siglo XVII demostraron...
2.AI.	
3.AMC/e	A: Que es infinito.
3.PVI/ad	P: Que es infinito y que no le va a salir periodo nunca.
3.AIS/e	A: ¿Y cómo?
CA/r	A: ...
3.PDC/a	P: Es que eso ya está demostrado, a pi no le va a salir periodo jamás.
3.AMC/e	E1: ... decimales, antes se sabían 35 y ahora se saben 1.000 millones.
3.PDC/a	P: Pero se sabe que no le va a salir nunca un periodo; eso se sabe.
3.AIS/e	A: ¿Cómo lo han podido demostrar? A: Si no nunca...
CA/r	A: ...

1.PO/p	P: Un momentico. ¿Qué, Rocío?
3.AIS/e	R: ¿Que cómo han demostrado que no le sale periodo al final?
3.PVI/c	P: Pues que decía ayer que la demostración es muy sofisticada, y muy difícil de entender;/
3.PDC/r	que es mucho más fácil demostrar que a √2 no le va a salir nunca un periodo, y yo intenté verlo con vosotros y no lo entendíais, porque ya es muy difícil y eso se demostró pues 20 siglos antes o más, pues imaginaros, si ha costado 20 siglos demostrar lo otro, es mucho más difícil./
2.PI/s	Lo entenderéis cuando seáis mayores, alguna vez, si os interesa, si no tampoco pasa nada.
CA/i	A: ...
2.PV/r	P: Que no,/
3.PVI/c	porque √2 es más fácil y no lo entendéis./
3.PDC/r	Si queréis que veamos el más fácil, vemos el más fácil, que es √2. √2 nunca va a tener periodo.
CA/s	E1: ...10. 000 millones de decimales, pero nunca llegará a hacerse periodo; entonces, pues....
3.AIS/e	A: Pero, ¿tú cómo sabes que no se va a repetir?
3.AAI/ai	E1: Porque lo ha dicho Isabel.
3.PVI/rr	P: No, porque lo he dicho yo no, porque se ha demostrado, que pi nunca va a tener periodo.
3.AIS/e	A: ¿Cómo?
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: Porque hasta donde se sabe no le ha salido periodo...
1.PO/s	P: Bueno, un momento./
3.PDC/r	Es mucho más fácil demostrar que r2 no va a salirle periodo nunca; yo he intentado que viérais eso, a ver si lo entendíais.)
3.AAI/ai	A: Pero ya lo demostró.
2.PI/s.	
1.PO/d	P: Sigue.
2.AE/d	E1: No, ya está.

1.4---t: 9:10

2.PO/p	P: Entonces, vuelvo a retomar lo de ayer./
3.PIS/cl	La medida del circ., de la circunferencia con respecto al diámetro, si mide 1, ¿se va a poder poner como una fracción, o no? ¿la medida de la circunferencia con respecto al diámetro se va a poner como una fracción?
3.AMC/e	E1: No, nunca se va a llegar a poner como cociente de dos números enteros, porque pi es infinito, y no se puede llegar a plasmar, ¿no? Si fuera finito...
3.PIS/cl	P: Si fuera una fracción, si se pudiera poner como una fracción, ¿qué pasaría?
3.AMC/e	A: Que no sería infinito.
CA/i	A: ...
3.PVI/ad	P: O daría finito, o daría periódico, y eso no puede ser.
3.AVI/as	A: Claro.
3.PVI/v	P: Vale. Muy bien.

5---t: 10:00

3.AIS/e	E1: Entonces ... lo que decíamos ayer, ¿cómo se sabe..?
3.PDC/ll	P: Ah, ¿cómo se sabe que esas cifras, las que decían los egipcios, por ejemplo...?/
3.PDC/ll	¿Os habéis dado cuenta del mérito? ¿A qué año estamos? A 1994 d.C. O sea, que 2000 años antes de Cristo, o sea, más de lo que llevamos después de Cristo, ya sabían eso.
3.AAI/ai	E1: Hace 3.000...
3.AVI/rr	A: 4.000...
3.PVI/as	P: Hace casi 4.000 años./

2.PO/p	Bueno entonces...
2.Al.	
3.AIS/e	E1: ¿Que cómo sabemos...
3.PDC/ll.	
3.PIS/p	P: ¿Que cómo se sabe que lo de los egipcios no era verdad y ésta sí? Que estas cifras son correctas hasta donde se ha llegado.
3.AAI/ai	E1: Es que a lo mejor, dentro de 500 años, haya otra.
3.PIS/i	P: ¿Puede cambiarle las primeras..., ese 3,1415 le van a cambiar alguna vez, o no, o esas ya son?
CA/r	A: ...
3.AIS/r	E1: Seño, entonces lo que yo digo es una cosa. Si éste por ejemplo es el exacto (señalando a la expresión de Vieta), y éste tampoco ... , entonces puede ocurrir que no sea exacto ...
CA/r	A: ...
1.PO/d	P: Uno a uno.
CA/r	A: ...
3.POC/e	P: Bueno, que esa pregunta queda en el aire, a ver si alguno trae algún día la respuesta.
2.AE/d	E1: Ya está.

1.6--t: 12:29

3.PDC/ll	P: Eh, me pregunta Crespo que vosotros siempre habéis visto pi como 3,14.
3.AVI/as	A: Eso.
3.AVI/ad	A: Siempre.
3.PIS/i	P: Siempre, ¿por qué?
CA/r	A: ...
3.PIS/e	P: Porque si digo, si le quiero coger cuatro cifras decimales, si cojo 3,1415 y si cojo 3,1416, ¿con cuál me equivoco más?
3.AMC/e	A: 3,1415
3.AMC/e	A: Con 3,1415
3.PVI/ad	P: Si sólo quiero coger 4 cifras. Si cojo éstas 4 estoy más lejos del valor de pi que si cojo éstas 4.
3.AVI/as	A: Exactamente
3.PDC/a	P: Cuando el número siguiente es más grande que 5, se coje el 6 en este caso, porque te equivocas menos cogiendo 6 que cogiendo 5. (Este razonamiento ya se había explicado en clase en otras ocasiones).
3.AAI/nc	A: No entiendo yo eso
CA/s	A: Es como lo que pasa muchas veces...

2.1--t: 13:55

-Las dos niñas de la exposición siguiente borran la pizarra.

3.AAI/ai	E1: El Número de Oro./
3.AIS/cl	Muchos no lo conocéis, ¿no?.
2.AE/d	E2: El trabajo lo hemos hecho del número de oro,/
3.AMC/e	que también se llama número áureo y phi, y se escribe así.
CA/m	A: ¿Número áureo?
3.AMC/e	E1: Que se dio en honor a Fidias, que es un escultor que utilizó estas proporciones en sus figuras. También es infinito. Leonardo da Vinci lo llamó sección áurea, y Fray Luca di...Paccioli, o no sé qué, la divina proporción./
3.AMC/e	¿Cómo surge? Pues se ha buscado esta proporción porque se quería dividir un segmento en dos partes desiguales, o sea, de la forma más directa y general./
2.AE/d	Hemos hecho un ejemplo, que es lo que nos ha parecido a nosotros más sencillo, así para que lo entendiérais.

(Ponen en la pizarra un poster que han hecho ellas con el dibujo de la estrella de cinco puntas y los segmentos en escala que forman las distintas proporciones)

3.AMC/e	E2: Esto es lo que hizo Pitágoras para representar las proporciones. Utilizó la estrella de cinco puntas./
3.AMC/ip	Esto lo hemos hecho a partir de un pentágono, de cinco lados
3.AMC/ip	E1: Y de aquí hemos sacado las proporciones./
3.AMC/ip	La proporción es que, ésta parte de aquí más ésta es igual a ésta.
3.AIS/r	A: ¿Cómo?
3.AMC/e	E1: Y ésta más ésta, a ésta.
3.AIS/e	A: ¿Cómo va a ser igual?, ¿cómo va a ser igual?
3.AVI/rs	A: No es lo mismo.
3.AVI/rs	A: No es igual
3.AVI/rr	E2: No. Esta parte, o sea, si son así, ésta más ésta es igual a ésta.
3.AVI/rs	A: Pues entonces está mal hecho.
3.AVI/rs	A: No, no
3.AVI/rs	E2: Sí, sí es.
3.PVI/as	P: Sí es, caramba.
3.AVI/rr	E2: Lo hemos hecho un poco casero, pero sí da.
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Shsss...
3.AMC/e	E2: En todo lo que tiene las proporciones del número áureo la propiedad se cumple, ¿no? Y esto más esto es igual a esto.
3.AMC/e	E1: La primera más la segunda, lo podéis ver aquí, da la tercera. Y la segunda más la tercera, da la cuarta.
3.AVI/as	A: A ver
3.AVI/as	A: Sí
3.AIS/r	A: ¿Y eso qué tienen que ver con el pentágono?
3.AMC/ip	E2: Porque es que Pitágoras las sacó las proporciones a partir del pentágono, y construyó una estrella de cinco puntas. Y, o sea, este eje de aquí,/
3.AIS/cl	¿lo veis?
3.AAI/os	A: Sí
3.AMC/ip	E2: Este eje de la estrella corresponde a éste, el amarillo a éste, el morado a éste, y el verde a éste.
3.AVI/v	A: Muy bien
3.AMC/ip	E1: Bueno, es esta recta, lo que nosotros hemos cogido, lo que pasa es que lo hemos puesto en diferentes colores en la estrella para que se vea bien. Esto es esto más esto ¿lo ves? La recta azul es igual a la amarilla más la morada, y la amarilla es igual a la morada más la verde, ... así?
3.AMC/c	A: Ah
3.AIS/r	A: ¿Y la morada qué?
3.AMC/ ip	E2: Nada, eso son ejes de la estrella, o sea, partes de la estrella, que tiene las proporciones del número áureo.
2.AE/d	E1: Después, el número áureo en la naturaleza; eso lo hemos tratado más porque nos parecía más bonito./
3.AMC/e	El número áureo se encuentra en casi todo lo de la naturaleza, empezando por el cuerpo humano...

---t: 17:34

3.AIS/r	A: ¿El número?
3.AMC/e	E1: Empezando por el cuerpo humano.
3.AIS/r	A: ¿Pero dónde?
3.AIS/c	E1: ¿Dónde?
3.AIS/r	A: Un número, ¿cómo se llama?
3.AIS/r	A: ¿Cuánto?
3.PIS/p	P: ¿Habéis sacado el número cuál es, exactamente ese número?
2.AE/d	E2: El número no lo hemos encontrado en ningún sitio que hemos buscado.
3.PVI/s	P: ¿No?

2.AE/d	E1: Es que nosotros ...
3.AMC/e	E2: ... las proporciones, y las aplicaciones que tiene. Bueno, a partir de esta estrella se pueden hacer rectángulos (Han puesto en la pizarra otro poster, de la estrella de cinco puntas con un desarrollo en las puntas y el dibujo de un sobre)
2.PI/i	P: Un momentico,/
3.PDC/II	dice Yanira.../
1.PO/s	Un momento,/
1.PE/r	es que es para que se entienda un poquito más./
3.PDC/a	Mirad, sí... la proporción que hay entre esto es el número de oro, dice Yanira que es (1+r5)/2./
3.PIS/p	¿Tú sabes de dónde se saca esto, Yanira?
CA/s	A: Pues...
3.PDC/c	P: ¿De dónde sale que el número de oro es precisamente éste; que la proporción es precisamente ésta?
3.AAI/nc	A: Es que no lo sé bien.
3.PDC/p	P: Bueno, la proporción es la que tienen entre éste y éste, por ejemplo. O sea, que si tú mides esto con esta unidad, te sale este número, que es el número de oro. Y podéis ver con la calculadora algunas cifras decimales.
3.AMC/ip	E2: El rectángulo que tienen las proporciones áureas lo hemos sacado de la estrella. O sea, a partir de estas relaciones...
1.AS	A: No se ve.
3.AMC/ip	E2: El rectángulo que tiene las proporciones áureas lo hemos sacado de esta parte de la estrella, que como veis aquí, y al abrir sus lados, o sea, sale un retángulo que tiene las proporciones áureas. También en la estrella de cinco puntas hay distintos rectángulos con las proporciones áureas.
3.AMC/ip	E1: Infinitos rectángulos, o sea, siempre se puede sacar rectágulo, porque mira, de la estrella se ... con triángulos; de los triángulos, esta parte de los triángulos, los dos lados se abren, y entonces, y entonces forma otro rectángulo con las proporciones de oro. Entonces, ¿cómo se puede saber que es infinita? Pues vemos que en el pentágono puede caber otra estrella. Sería así.
3.PIS/p	P: ¿Sabéis como se dibuja una estrella dentro del pentágono?
3.AAI/os	A: Sí, sí.
3.PDC/a	P: Y eso guarda también las proporciones...
2.AI.	
3.AVI/ad	E1: Y ése vuelve a tener otra vez así. O sea, esta estrella vuelve a tener en los lados otra vez las proporciones.
3.AMC/ip	E2: Incluso en la estrella que hemos hecho antes también se pueden abrir los, de distintas formas los lados de la estrella ... también salen rectángulos, más grandes o más pequeños, con las dimensiones de, de oro.
3.AMC/ip	E1: Entonces, esto vuelve a abrirse así.
3.AMC/ip	E2: Y otra vez ... para que salga el rectángulo con las proporciones.
3.AMC/ip	E1: Bueno, más o menos así, pones el lápiz así ...
3.PVI/ad	P: Y además , dentro de ese pentágono se puede poner la estrella ...
CA/i	E1: ...
3.PDC/p	P: Haces otra estrella...
3.AMC/ri	E2: Por eso este número es un número infinito no periódico.
CA/i	A: ...

-- t: 21:20

2.PI/i.	
3.PDC/II	P: Ah, mira lo que pregunta Pablo./
3.PIS/i	Si sale..., ¿cómo que el número no es el mismo?
3.AIS/i.	A: Es el mismo, ¿no?, pero ...
3.AMC/c	E2: Tiene las mismas proporciones

3.PIS/i	P: Porque ¿qué quiere decir proporción?/
3.PDC/II	Dice Pablo que si es más pequeño, ¿cómo va a salir el mismo número?
3.AMC/c	E2: Porque es que no es que salga el mismo número, sino que salen las proporciones de ese número, o sea ...
3.AIS/i	A: ¿Números equivalentes a ése?
3.PVI/rs	P: No, números equivalentes no.
3.AMC/c	E2: Que guardan las mismas proporciones.
3.PIS/p	P: Fijaros, en el sobre, si yo mido el lado grande con respecto al lado..., tomo el lado chico como unidad y mido el grande, me sale eso.
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: Claro,/
3.PIS/i	entonces ¿qué pasa con los distintos pentágonos, con los distintos rectángulos...?
3.AMC/c	E1: En los distintos rectángulos, si haces lo mismo con esto, sale
CA/i	...
3.PDC/p	P: ... figura chica, guarda las proporciones del lado grande al lado chico.
3.AVI/as	A: Ah
3.AMC/ri	E1: Es como pi, o sea, siempre la división de esto siempre sale lo mismo. Pues lo mismo es esto.
3.PIS/e	P: ¿Os acordáis del tangram, del cuadrado que hicimos, que yo os dejé en la hoja un cuadrado que era más chico?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.PDC/a	P: Era igual pero más pequeño,/
3.PDC/r	¿y por qué conservaba las medidas? Porque lo que conservaba..., si lo mides en centímetros no conservaba las medidas, pero si lo mides con respecto a la unidad, como la unidad se ha reducido igual.../
3.PIS/cl	¿Entendéis lo que os digo?/
3.PIS/r	Como se ha reducido, también se ha reducido la unidad y entonces lo que se conserva es la proporción; la medida con respecto a la unidad es la misma, porque la unidad se ha reducido y lo otro también, en la misma proporción. Y entonces esto también se aumenta y se reduce en la misma proporción, por eso sale el mismo número, por que cambian de unidad.
3.AIS/cl	E1: ¿Lo habéis entendido?
CA/i	A: ...

2.2---t: 22:58

2.AE/d	E1: Pues ya está. Vamos a ver esto en la naturaleza./
3.AMC/e	El número áureo se encuentra en el cuerpo humano.
CA/i	A: ...
3.AIS/e	A: ¿En cuál?
3.AMC/ip	E1: Lo encontramos en el cuerpo humano porque, porque si se pone un hombre ahí, bien proporcionado.
CA/b	A: Ja, ja, ja
3.AMC/ip	E2: Con las proporciones ideales, o sea un hombre ideal que ...
3.AIS/r	A: Tengo una duda, porque no me ha quedado muy claro lo que es el número de oro entonces.
3.AMC/ip	E1: El número de oro es el número, es el número que sale siempre en todos los rectángulos qe tengan esa proporción./
3.AIS/cl	¿Entiendes?/
CA/i	Es...
CA/i	A: ...
3.PDC/a	P: A ver, si un rectángulo tiene las proporciones áureas, si yo cojo como unidad el lado chico, el lado grande me mide el número de oro.
3.AIS/i	A: No, no era....
2.PI/i.	

3.PDC/a	P: ¿Qué, el rectangulito ese chico que hay dentro de la estrella? Pues ese, si cogéis como unidad el lado pequeño, el grande tiene con respecto a esa unidad el número de oro...
2.Al.	
3.AMC/e	A: El mismo número
3.PDC/a	P: ... está proporcionado. Y el lado grande medido con la unidad del lado chico../
3.AIS/c	A: ¿Y cuál es el número de oro?
3.AMC/c	E1: Es éste
3.PDC/a	P: Ese.
3.AMC/c	E2: Es un número infinito no periódico.
3.PDC/a	P: Es otro número infinito no periódico.
3.AMC/ri	A: Igual que pi.
3.AIS/cl	E1: ¿Lo entiendes ya, Orozco?
3.AAI/os	A: Sí, si lo entiendo.
3.AIS/r	A: Entonces, ¿en el cuerpo humano....
3.AMC/ip	E2: No todos, el que tenga las proporciones ideales tiene las proporciones del número áureo, y no sólo en las personas...
2.AS	A: Dibuja un monigote con los brazos en cruz.
CA/r	A: ...
3.AIS/i	E2: Isabel, ¿lo hizo Pitágoras, no?
3.PDC/p	P: Leonardo da Vinci,„¿quién conoce el dibujo de Leonardo da Vinci?
CA/b	A: ... (no se entiende; parece que quieren que le pongan al muñeco una "tercera pierna", y las de la pizarra no terminan de enterarse , pero al final acaban poniéndosela)
1.PO/a	P: Venga, que se acaba el tiempo, eh./
1.PO/	A las 11 acabáis.
3.AMC/ip	E1: Bueno mira, si se coloca la punta del compás en el ombligo...
CA/b	A: Ja
3.AMC/ip	E1: La distancia entre el ombligo y los pies, y entonces/
3.AAI/nc	(no se entiende, y parece que ella tampoco se aclara muy bien)/
3.AMC/e	Vitruvio encontró otras proporciones en el cuerpo humano, como que la cabeza es 8 partes del cuerpo humano; la cara 10, la longitud del pie la sexta parte, la anchura del pecho la cuarta parte.
3.AMC/e	E2: Los primeros que se dieron cuenta de cuáles proporciones tenía el cuerpo ideal humano fueron los griegos, que crearon el canon griego, que es una persona con las proporciones ideales; y después más gente ...
CA/i	A: ...
3.AMC/ ip	E2: Canon, las proporciones ideales.
CA/i	A: ...

---t: 27:52

3.AIS/c	A: Eh, ¿y se conoce alguna persona con las proporciones ideales?
3.AMC/e	E1: Bueno, el pentágono ... en flores, en semillas y diversas flores, una son las flor del té, la petunia, el jazmín estrellado .... . Y en un animal también lo sigue (de la esfera). Después, el rectángulo dorado también tiene una propiedad, que al hacer un rectángulo que se haga dentro de él, sigue teniendo esas proporciones. Si se hace bien, los rectángulos siempre van teniendo esas proporciones.
3.PIS/p	P: Pero ¿cómo hacéis el rectángulo?
3.AVI/as	E1: ¿El rectángulo?
3.PIS/p	P: Sí./
3.PDC/p	Si vosotros cogéis el rectángulo de oro. Si vosotros cogéis un rectángulo de oro y lo torcéis desde la esquina y hacéis un cuadrado, el rectángulo que queda es de oro. Y si dobláis por aquí la esquina y hacéis un cuadrado el rectángulo que queda es de oro. Y de ahí es donde se saca eso, de ahí es dónde se saca la expresión [decimal], poniendo una ecuación la relación de un lado a otro, se saca el número de oro.

3.AMC/e E1: Pues éste, ¿de este rectángulo qué sale? Una espiral, que también se contiene ... . Bueno, y así hasta el infinito. Uniendo así la espiral hay conchas...
3.AMC/e E1: Sí. La podemos ver la espiral en las conchas de mar, en las conchas marinas. Lo tengo aquí el nombre; bueno, esto es muy complicado, un nombre de esos. En las plantas de enredadera...
3.AIS/a A: ¿Plantas?
3.AAI/ai E1: De enredadera.
3.AMC/ip E2: Las que se rizan.
3.AMC/ip E1: Van así, ¿no? Van haciendo las hojas, haciendo la espiral esa.
CA/i A: ...
CA/b A: Ja, ja, ja
CA/i P: ...
3.AMC/e E1: En las semillas de los girasoles, y en del hombre también./ 2.AE/d Bueno ahora Rocío va a explicar en el arte.

2.3--t: 30:41

3.AMC/e E2: Los grigos fueron los primeros que, que se dieron cuenta de que muchísimas cosas que tenía la tierra, ¿no? seguían las proporciones del número áureo, y lo utilizaron en edificios como el que ya conocéis que es el Partenón.
3.AIS/a A: ¿El qué?
3.AAI/ai E1: Partenón.
3.AMC/e E2: El Partenón. Que tiene muchísimas veces las proporciones del retángulo de oro. ... hay rectángulos que siguen las proporciones. Luego en el friso también hay muchísimos rectángulos con las proporciones áureas. Incluso en las esculturas de personas también utilizaron el canon para,/
3.AAI/nc para no sé./
3.AMC/e Pero ya antes los egipcios habían utilizado las proporciones, pero con relación a la tierra, en las pirámides.
3.AMC/e E1: En la pirámide de Keops.
3.AMC/e E2: En la pirámide de Keops. O sea aquí también siguen una proporción, pero no...., sino con respecto a la tierra. Se traza un eje y tienes.../
3.AMC/nc No lo entendemos muy bien pero que...
3.PDC/p P: Que las proporciones no estaban dentro del edificio, sino que habían medido las medidas de la Tierra, y la pirámide la habían hecho para que guardara las proporciones áureas con la tierra.
3.AMC/e E2: Después más tarde, los pintores del Renacimiento, como Leonardo da Vinci, que en cuadros como la Gioconda, sabéis cuál es ¿no? Que pintores del Renacimiento, como Leonardo da Vinci también sabían el secreto de las proporciones áureas, y en el cuadro de la Gioconda, sigue las proporciones áureas.
CA/r A: ...
1.PA/r P: David.
3.AMC/e E2: También actualmente se han construido edificios con las proporciones del rectángulo áureo, como el edificio de las Naciones Unidas de Nueva York, que tiene la forma de un rectángulo áureo. Y también ...

.Aquí la profesora toma la iniciativa de preguntar al compañero que está encargado de la filmación, también profesor de matemáticas.

2.PI/i.
3.PIS/i P: Gregorio, ¿y en el Patio de los Leones también?
3.PDC/p G: En el Patio de los Leones, y en la cúpula de la Sala de las Dos Hermanas y de Abencerrajes.
3.AIS/a A: ¿Qué?

3.PDC/p	P: Están también los rectángulos...
3.PDC/p	G: En las cúpulas, habría que dibujarlo para verlo mejor, pero un poco la división del radio de la circunferencia de la base, entre la altura de la cúpula, ahí aparece también el número áureo.
CA/i	A
CA/m	G: ¿Qué?
CA/i	A: ...
2.PI/s	G: Ahora después, después./
3.PDC/p	Y también había, creo que en algún edificio de la Expo, también sacaron me parece..., en algún sitio las proporciones del número áureo. Creo que en el pabellón de España, en la estructura. Pero ya, yo lo oí pero no tenía seguridad plena. Pero aquí es seguro.
CA/i	P: ...

3.AIS/cl	E1: ¿Habéis tenido alguna duda?
CA/r	A: ...

--t: 34:36

3.PDC/ll	P: Espera, que Yanira ha leído una cosa muy graciosa.
1.AS/i	A: A ver calla, shss....
3.AMC/ip	E2: Que a partir de Grecia, fueron los griegos los que se dieron cuenta, Pitágoras y todos ésos fueron los que se dieron cuenta de que todas las cosas de la tierra tenían las proporciones, o sea las mismas proporciones; y a partir de ahí, pues crearon todo eso; y después de ahí en adelante, como ya hemos visto, pintores que han seguido...
3.PDC/ll	P: Yanira quiere contar una cosa
2.AS/i	A: A ver
3.AAI/ai	A: Que digo que le han puesto a la gente, que le han puesto varios rectángulos para elegir, y que siempre a la gente le ha llamado más la atención el rectángulo áureo, y que no sé, que tiene como..., llama la atención de la gente, más proporcionada.
3.PDC/p	P: Hay quién sostiene que como en la Naturaleza lo vemos mucho porque está esa proporción, la gente porque inconscientemente nos recuerda esas proporciones. Y por eso muchos artistas han creado conscientemente con esas proporciones para que luego produzca buen efecto.
3.PVI/v	P: Vale, muy bien.
3.AVI/v	A: Aplauden, medio no atreviéndose. Pero parece que les ha gustado.

t: 35:56

Cuestión de Investigación 2

Fecha: 1-3-94
Duración Total: 58 minutos
Encuadre en la sesión: Toda la clase.

--t: 0:00

2.PO/ce	P: Bueno, la primera pregunta./
3.PIS/cl	¿De la primera alguien tenía duda?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: ¿De si hay un punto de la recta correspondiente a 0,666...?

3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: ¿Alguien tenía alguna duda? ¿Alguien ha contestado que no?
3.AAI/os	A: Yo he contestado que no
2.PO/ce	P: ¿Hay un punto de la recta correspondiente a 0,666..., y cómo lo habéis pintado?
CA/i	A: ...
3.PIS/e	P: ¿Qué fración es?/
3.AMC/e	A: 6/9, 6/9
3.PVI/as	P: 6/9./
3.PIS/p	Y habéis pintado 6/9.
3.AMC/c	A: Claro. Nueve partes...
2.PI/i	
3.PDC/a	P: Lo divides en 9 partes, y coges 6./
3.PIS/cl	¿Alguien lo ha hecho de otra manera?
CA/i	A: ...
3.PVI/rr	P: 6/10 porque te has equivocado./
3.PIS/p	¿O por qué?
CA/i	A: ...
3.AAI/ai	A: Por que lo ha hecho por el otro método, de dividir entre 10...
3.PIS/a	P: Pero el 0,6 periodo, ¿es 6/10?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/e	P: ¿6/10 qué es?
3.AMC/C	A: 0,6
3.PVI/as	P: 0,6./
3.PSC/c	No es lo mismo que 0,6 periodo, es que son cosas distintas./

2.1---t: 0:02

2.PO/p	El siguiente. El siguiente./
2.PO/ce	El siguiente es el punto en la recta, si existe, a $\sqrt{3}$, que es este decimal...,/
3.PIS/e	y así, ¿cuántas cifras?
3.AMC/e	A: Infinitas
3.PIS/e	P: Infinitas ¿periódicas o no periódicas?
3.AMC/e	A: No periódicas
2.PO/ce	P: Bueno, ¿hay un punto en la recta que le corresponda a esto?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: Claro
3.AAI/os	A: Claro que hay uno.
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/cl	P: ¿Hay uno o no hay uno?
3.AAI/os	A: Sí, sí hay uno.

2.2---t: 0:03

2.PO/ce	P: Y ahora, ¿cuál es?
CA/i	A: ...
3.PIS/e	P: ¿Os acordáis que hacíamos un cuadrado de área 3? 3 ¿qué? ¿centímetros? (Esta cuestión se había tratado previamente).
3.AMC/e	A: 3 unidades
3.PIS/p	P: ¿3 unidades de cuáles?
3.AAI/ai	A: De las que quieras
CA/r	A: ...
3.PIS/cl	P: ¿De las que quieras?
CA/r	A: ...
1.PA/s	P: Fran, tienes 0,25 menos
1.AR	A: Seño, si es que ...
3.PDC/a	P: Habíais visto que por el teorema de Pitágoras construía un cuadrado de área 3;/
3.PIS/a	¿3 qué?
3.AMC/e	A: 3 unidades
3.PIS/i	P: Pero 3 unidades, ¿qué unidades? ¿3 palmos?
3.AMC/e	A: 3 unidades cuadradas.
3.PVI/as	P: Sí, 3 unidades cuadradas./

3.PIS/i	Pero ésta, la unidad. La unidad, lo mismo que los centímetros cuadrados la unidad es el centímetro, de estas unidades cuadradas, la unidad del lado, ¿cuál es? (En el contexto de la recta, esta cuestión aún no había sido tratada).
3.AAI/ai	A: La de la recta.
3.AMC/e	A: Pues hay que coger un cuadrado de área 2 y otro de área 1; para hacer un cuadrado de área 2, dos de área 1
3.PVI/as	P: Venga/
3.PIS/i	y el de área 1, tiene una unidad cuadrada, y ésto (el lado), ¿qué mide?
3.AMC/e	A: Una unidad
3.PVI/as	P: Una unidad,/
3.PIS/p	¿de cuáles? ¿de las que yo quiera?
3.AAI/ai	A: Un centímetro por ejemplo.
3.PIS/cl	P: ¿Un centímetro, por ejemplo?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí, puede ser.
3.AAI/ai	A: O un metro.
1.PO/s	P: Oye, pero entonces, Shsss./
3.PDC/r	Si uno me pinta un cuadrado de 3 centímetros cuadrados y otro me lo ha pintado de 3 milímetros cuadrados, pues entonces, pues a uno le queda la raiz de 3 por aquí, y a otro le queda por allá.
3.AAI/os	A: No
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: ... la misma unidad de la recta.
3.AMC/c	A: Que cojas de unidad para hacer el cuadrado, en lugar del centímetro, la unidad de la recta, y coges ...
3.PIS/cl	P: ¿Eso se entiende o no?
3.AAI/os	A: Sí
3.PSC/c	P: Que la misma unidad que tenga el lado, éste de aquí abajo, con el que luego construyo el de área 3 es la unidad que tengo que coger en la recta. O viceversa, si me fijan la unidad de la recta, entonces yo construyo con esa unidad./
3.PIS/cl	¿Hay alguien que no entienda eso?/
3.PVI/v	Eso es muy importante./
3.PIS/cl	¿Hay alguien que no se entere de por qué eso tiene que ser así? ¿O de qué es lo que estamos diciendo? Marta, ¿tú te enteras?/
3.PDC/c	O sea, que yo construyo un cuadrado de área 1...
2.AI	
3.AIS/i	A: ¿Con esa medida, no?
3.PDC/a	P: Con éste hago uno de área 2, con el otro.../
3.PIS/i	¿Y por donde quedaría la de 3?
3.AAI/ai	A: Por el 1,7
3.AAI/ai	A: 1,7 más o menos.
3.AAI/ai	A: Por ahí, por ahí.
CA/r	A: ...
3.PSC/c	P: O sea, que si la raiz de 3 la construís con su cuadrado, si la construís con su cuadrado y trasladáis la longitud, pues queda por aquí./
3.PIS/e	¿Y qué le pasa a la expresión decimal?
3.AMC/e	A: Que es infinita
3.AAI/ai	A: Que es la que vamos a poner en la recta.
CA/s	P: La unidad
3.AAI/ai	A: Se puede representar $\sqrt{3}$ como $\sqrt{3}$: en forma de radical.

2.3---t: 0:08

3.PIS/i	P: ¿Y qué le pasa a la expresión decimal con respecto de este radical? ¿Está cerca? ¿Sería la misma, o cómo?/
3.PDC/r	Pues pasa lo mismo que con los periódicos puros y las fracciones./
3.PIS/i	¿Qué pasa?
3.AMC/ri	A: Que sí esa fracción representa a ese periódico puro exactamente, pues ese radical representa a ese decimal exactamente.
3.PIS/p	P: ¿A todo el decimal?

3.AMC/c	A: Exacto. Aunque sea infinito.
3.PIS/cl	P: ¿Esto se entiende o no?
3.AAI/nc	A: No, no
3.AAI/nc	A: Yo no lo entiendo, yo no lo entiendo.
3.PIS/p	P: ¿Qué no entiendes, Javi?
CA/m	A: ¿Quién lo entiende?
3.PIS/p	P: ¿Qué no entiendes tú, Ramón?
3.AIS/r	A: Yo, que por qué √3 se puede representar exacto.
3.PDC/ll	P: ¿Que por qué podemos representar √3 exactamente cuando tiene una expresión infinita, que no acaba?
3.AAI/nc	A: Pues...
3.PDC/r	P: ¿Y por qué podemos representar 6/9 exactamente cuando 0,666... tampoco acaba?
3.AVI/as	A: Pues lo mismo.
3.AVI/as	A: Es lo mismo
3.AVI/as	A: Es igual
3.AVI/rs	A: No es igual
3.PDC/p	P: Si tú no lo pasas a fracción. Representas su raiz.
3.AVI/rs	A: Pero no es igual
CA/r	A: ....
3.PIS/p	P: Pero ¿cuál es la duda?
3.AAI/ai	A: ... infinito. Cómo que infinito, cómo que infinito, siendo un cuadro con esa medida, te da; siendo un decimal infinito no te puede dar.
CA/r	A: ...
3.PDC/r	P: También 0,6666... es infinito...
CA/r	A: ...
3.PDC/ll	P: Dice Ramón que el cuadrado de área 3 nunca te va a salir exacto.
3.AAI/ai	A: Un periódico tampoco es tan exacto.
CA/r	A: ...
1.PO/d	P: Por orden,/
1.PO/s	un momento, a ver./
3.PDC/ll	Javier y Ramón dicen que es que el cuadrado de área 3 nunca no lo puedo pintar exacto.
3.AVI/as	A: No, no lo puedes pintar exacto
(1.AS)	A: Seño, sí, mira
1.PO/d	P: Uno por uno
3.AMC/ri	A: Resulta que ese número infinito periódico, que es 0,6666...; Vale, ese número tiene la tira de 6, no se sabe cuantos. El 6 es una cifra, como lo son el 732058. Pasa lo mismo, si se puede representar como fracción, ese radical pasa lo mismo, ese decimal infinito no periódico también se puede representar exactamente en la recta./
3.AAI/I	¿Cómo? Pues en el libro viene.
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Un momento, un momentico./
3.PDC/p	El método del libro es el mismo que hemos visto, que es trasladar la longitud del lado del cuadrado de área 3. Traslado la longitud y la pongo.
3.AAI/ai	A: Para trasladar el punto exacto, el cuadrado tiene que ser exacto.
3.AAI/ai	A: Pues ya está, lo mismo pasa con las fracciones.
3.PIS/i	P: El cuadrado ¿es exacto? ¿Yo puedo construir exactamente un cuadrado de área 3?
3.AAI/os	A: No, no
3.PIS/i	P: ¿Yo puedo pintar exactamente un cuadrado de área 3?
3.AAI/os	A: No, no, no
3.PIS/cl	P: ¿No?
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Un momentico./
1.PA/r	Bueno, al próximo que hable, aunque sea de lo que estamos diciendo, le bajo 0,25, a ver si así entendéis, que todo el mundo a la vez no podemos hablar.
3.PDC/c	La cuestión es si podemos dibujar un cuadrado de área 3 exactamente, porque entonces mediría exactamente √3./

3.PIS/i	¿Podemos dibujar exactamente un cuadrado de área 3?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/cl	P: ¿Quién piensa que no?
3.AIS/a	A: Qué no se puede dibujar?
3.PDC/c	P: Que no se puede dibujar exactamente un cuadrado de área 3./
3.PIS/cl	¿Y quién piensa que sí? ¿Hay alguien que piense que sí?/
3.PIS/i	Bueno, pues entonces, uno que piense que no, uno nada más, que diga por qué no se puede dibujar exactamente un cuadrado de área 3.
1.AS	A: Díselo, Pablo.
3.PIS/i	P: ¿Por qué, Pablo, tú crees que no se puede dibujar?
3.AMC/ie	A: Porque como no es exacto, no es exacto lo que mide, siempre va a haber una desigualdad entre sus lados, aunque sea muy pequeña.
3.PIS/p	P: ¿Cómo que no es exacto...
3.AAI/ai	A: En realidad no es exacto.
3.PIS/p	P: ¿Por qué no? La del lado...
3.AMC/ie	A: Pero es que no es exacto, no sabemos las unidades que siguen.
3.PDC/a	P: Pero es que, si os acordáis de cómo lo hemos construido.../
1.PO/p	A ver Nuria.
3.AMC/ie	A: Siempre sería una aproximación. El final de la recta quedaría, no quedaría justo, sería siempre una aproximación, aunque sería muy poca la variación que hay pero...
3.PVI/ad	P: O sea, como si al filo no llegáramos nunca.
CA/i	A: ...
1.PO/s	P: Un momento,/
3.PIS/p	¿por qué?
3.AMC/ie	A: Si hay infinitos decimales en la recta no lo puedes representar porque si hay infinitos...
3.PVI/ad	P: No paras y no paras que cada vez te acercas más aquí al filillo, pero ese punto nunca terminas de ponerlo.
3.AVI/as	A: Claro.
3.AMC/ri	A: Seño, si ese radical es una aproximación, las fracciones también son aproximación.
3.AVI/as	A: Claro, si eso estamos diciendo.
3.PIS/cl	P: Ah, ¿las fracciones también son aproximación?
3.AVI/os	A: No
3.AIS/c	A: Yo creía que la fracción era el punto justo de la recta.
3.PIS/cl	P: A ver, un momento. 0,6666...., cuando yo ... 6/9, ¿eso también es una aproximación?
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: No, eso da exacto.
(3.AMC/c	A: Pues el mismo caso es la fracción que el radical.
3.AAI/os	A: No
3.AVI/rr	A: Que el periodo, tú sabes que es 6. Después de ese número, tú no sabes cuál va a venir.
3.AVI/ad	A: Hay tantos 6, infinitos 6, el 6 es una cifra.
3.AVI/as	A: Pero sabes que es 6.
3.AVI/as	A: Pero sabes que es 6; sabes cuál va a venir.
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: A ver, a ver un momento./
3.PIS/cl	¿0,6666..., cuando yo lo pongo como 6/9 es una aproximación?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: No, eso da exacto.
3.AAI/ai	A: Pues el mismo caso es la fracción que el radical
3.AVI/rr	A: Tú sabes que el periódo sólo va a haber 6. Tú ese número no sabes cuál va a venir.
3.AVI/ad	A: Hay tantos 6, hay tantos 6, infinitos 6.

CA/r A: ...
1.PO/s P: Un momento, un momento./
3.PDC/r Sí, se que me va a salir 6, pero si aquí está el 6/9, y yo empiezo a pintar 0,6... 0,6 está aquí; 0,66 más cerca; 0,666, más cerca. ¿Pero yo acabaré alguna vez de pintar...?
3.AAI/os A: No
3.PDC/p P: Entonces, le pasa igual
3.AVI/rr A: Pero ahí 0,6, ... sin embargo en el otro no sabes ni que cifra es ... no se puede saber ni las cifras que tiene.
3.AVI/rr A: Ni cuando termina.
3.AVI/rr A: Entonces con el 0,6 te puedes aproximar mucho más que el otro.
3.PVI/rr P: No, te puedes aproximar igual: todos lo que tú quieras, porque a √3 yo le puedo sacar todas las cifras que quiera, las que quiera, si quiero 20.000 millones se las saco. Todas las que yo quiera se las puedo sacar.
3.AVI/rr A: Pero sin embargo en el 6/9 sabes que.... Sabes que... Sabes que siempre va a ser un 6.
3.AVI/rr A: Es que eso no es una aproximación, el 6/9.
3.PIS/i P: Y el √3 también es perfecto, ¿no?
3.AAI/os A: No
3.AMC/c A: El resultado de √3 no es exacto, pero √3 sí.
3.AAI/ai A: Es distinto
3.PIS/p P: ¿Es distinto, por qué?

*---t: 0:19

3.AAI/ai A: Si haces un cuadrado, se te puede ir un poquillo, y si haces otro, se va sumando, y siempre te va a dar un error mayor.
3.AVI/rs A: Pero eso no es lo mismo.
CA/r A: ...
3.PDC/ll P: A ver si desligamos dos cosas. A ver si desligamos dos cosas porque aquí está el quid de la cuestión.
2.AV/a A: Venga sí
3.PIS/e P: ¿Vosotros os acordáis de cómo construíamos un cuadrado de área 3?
3.AAI/os A: Sí
3.PDC/p P: Yo cojo una unidad, una unidad. La cojo exacta,/
3.PIS/i ¿una unidad la puedo coger exacta?
3.AAI/os A: Sí
3.AAI/os A: Sí, claro.
3.PDC/p P: Y ahora hago la perpendicular, y aquí otra unidad; esto es un cuadrado./
3.PIS/i ¿Este cuadrado mide uno exactamente? ¿Una unidad cuadrada exactamente?
3.AAI/os A: Sí
3.AAI/os A: Exacta
3.PIS/e P: Y ahora si yo cojo otro cuadrado de área uno que mida exactamente uno, también mide uno exactamente, ¿no?
3.AAI/os A: Sí
3.PIS/e P: Y ahora el cuadrado que yo construyo aquí, ¿éste, que mide exactamente?
3.AMC/c A: 2, 2
3.PIS/i P: ¿Exactamente?
3.AAI/os A: Sí
3.AAI/os A: No
3.AAI/os A: Exactamente no
3.AIS/e A: ¿cómo que no?
3.AAI/os A: Sí
3.AAI/ai A: Ahora estamos con el 2
CA/r A: ...
3.PDC/a P: A ver, éste me habéis dicho que mide 1 exactamente su lado y 1 su área.
3.AVI/as A: Sí
3.PIS/e P: ¿Y éste qué mide?

3.AMC/c	A: 2
3.PIS/cl	P: ¿Pero exactamente o no?
CA/r	A: ...
1.PO/s	P: Shsss.../
1.PO/d	Uno por uno, uno por uno./
1.PO/p	Katerina./
3.AMC/ie	A: Que a lo mejor puede equivocarse de que eso sea la √3. El lado sería infinito, luego no puede medir, ese lado es una aproximación aunque aparentemente, visualmente, lo veamos exacto, pero no existirá un cuadrado exacto con área 2
3.AAI/ai	A: Seño, en nuestra mente sí es exacto, pero ahí es posible que falle.
1.PO/s	P: A ver un momento,/
1.PO/p	a ver lo que dice Pablo./
3.PVI/ad	¿Esto mide 3 exactamente? En el papel nunca mide 3 exactamente. Quiero decir, que estamos viendo una figura que es nuestro apoyo para imaginar un cuadrado que mida 1 exactamente./
3.PIS/cl	¿Eso está claro?/
3.PDC/p	Que en una pizarra, en cuando yo coja un metro y ponga la marca pues, lo físico siempre me limita. Vamos a desligar los dos planos, el plano físico en el que con la tiza o el lápiz o lo que sea la perfección no existe, y el plano de que nosotros hemos estado hablando de estos cuadrados como si tuvieran área 1 exactamente./
3.PIS/cl	¿Eso lo veis o no? Que no nos hemos parado si la tiza, yo pongo este lado más así o más asao./
3.PDC/a	Si yo tengo tengo una unidad, construyo un cuadrado de área 1; y si a mí se me tuerce la mano, pues vosotros os lo imagináis como un cuadrado, aunque esté aquí más torcidillo, ¿no?
3.AAI/os	A: Sí
3.PDC/c	P: Entonces, imaginándonos que, a pesar de las imperfecciones del papel, o del dibujo, o de la tiza, este cuadrado lo he construido así,/
3.PIS/i	¿este cuadrado tiene área 2 exactamente o no?
3.AAI/os	A: Sí, sí
3.PIS/cl	P: ¿Sí o no?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: En la mente sí.
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Ahí no, pero aquí sí ... (señala su cabeza).
3.AVI/as	P: Ahí sí./
3.PIS/p	¿Y aquí que mide ese lado? (señala el dibujo de la pizarra).
3.AMC/e	A: √2
3.PIS/p	P: ¿Y eso es exacto, mide exactamente √2?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: No
3.PIS/i	P: ... mide exactamente √2?
3.AAI/os	A: No mide.
3.PIS/cl	P: ¿Alguien cree que esto mide exactamente √2? ¿Alguien lo cree?
3.AAI/os	A: Sí
CA/r	A: ...
3.AAI/ai	A: Ahí no, pero en tu mente sí.
3.PVI/ad	P: En tu mente sí. Hombre es que esto tampoco mide 2 (señalando las unidades de la recta)./
3.PDC/c	A ver, a ver si separamos ya las dos cosas /
3.PIS/e	¿Vosotros habéis visto una recta donde esto mida 1 y esto mida 1/3 exactamente?
3.AAI/os	A: No
3.PVI/ad	P: No, pero en vuestra cabeza sí lo mide, esta es la tercera parte, y ya está/
3.PIS/i	¿Entonces por qué lo ponéis tantas pegas a éste, y a éste no lo ponéis pegas?

3.AAI/ai	A: Por que ese es exacto,/
3.AAI/ai	y por lo menos se puede dibujar más seguro.
3.AAI/os	A: Que es lo mismo.
3.PIS/i	P: ¿Esto es 1/3? ¿Esto es exactamente 1/3?
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/i	P: O sea que 1/3 sí. ¿Y raiz de 2 no?
3.AAI/os	A: Hombre, es que $\sqrt{2}$...
3.AMC/ie	A: Pues sí, porque 1/3 es exacto.
3.AAI/os	A: Es lo mismo.
3.PIS/p	P: O sea, ¿que 1/3 sí lo podéis dibujar exactamente ahí, y la $\sqrt{2}$ no?
3.AAI/ai	A: Si 1/3 se pone, la raiz de 2 también.
3.AVI/rs	A: No
3.AMC/ie	A: Pero si es que estamos hablando de un infinito y de un exacto, ¿cómo va a ser lo mismo? Si es que a la fuerza tiene que ser diferente. Si estamos hablando de un infinito y de un exacto...
3.PIS/cl	P: Bueno, ¿alguien pensaba que esto mide exactamente $\sqrt{2}$?/ 3.PDC/c Prescindiendo de las limitaciones físicas. De las limitaciones físicas prescindimos./
3.POC/e	¿Por qué esto mide $\sqrt{2}$ exactamente?
3.AAI/c	A: Por ejemplo, si tomamos el teorema de Pitágoras. La hipotenusa igual a la raiz cuadrada de no se qué, y sale $\sqrt{2}$.
3.AAI/ai	A: Puede que ... aproximación.
3.PDC/ll	P: Dice Rocío ...
3.AVI/rs	A: No
3.PDC/a	P: Si estos dos cuadrados son perfectos, pues aquí se pondría un cuadrado perfecto, donde el lado mide $\sqrt{2}$ exactamente, porque la hipotenusa mide la raiz de un cateto al cuadrado más el otro cateto al cuadrado.
3.AVI/v	A: Pero eso es un teorema que ...
CA/r	A: ...
3.AMC/ie	A: Yo digo que todo lo que tú quieras, pero si una fracción se representa exactamente un radical también.
3.PIS/p	P: Venga Katerina, o cualquiera de los demás ¿qué le pasa a esta $\sqrt{2}$? ¿tú que pegas tienes con ella?
1.AP/d	A: ¿Yo?
3.PDC/c	P: Esta que te han dicho del teorema de Pitágoras, que sale ahí $\sqrt{2}$, y tú dices que no, que eso no puede medir 2, que Pitágoras nos decía que eso mide exactamente raiz de 2, o sea que este área ...,/
3.PIS/i	y tú tienes alguna pega. ¿Que la fórmula aproximaba o no?
3.AIS/r	A: Porque si ese lado tiene un número infinito, pues cómo va a ser exacto. Eso es lo que yo digo.
3.AAI/os	A: Claro que mide exacto.
CA/i	A: ...
3.PDC/a	P: No, la fórmula no aproxima. La fórmula te dice cuáles son las proporciones exactas entre dos cuadrados y el que construyes así. Y el teorema de Pitágoras lo que dice es que este cuadrado, si a esto le llamas h, la hipotenusa es un cateto al cuadrado más el otro cateto al cuadrado. Esto es lo que dice.
CA/i	A: ...
3.PVI/c	P: Esto sí se ha demostrado.
3.AVI/s	A: ¿Que se ha demostrado? (!)
3.PVI/ar	P: ¿El teorema de Pitágoras? Claro.
3.AIS/c	A: ¿Y cuál es la demostración?
3.AAI/ai	A: Mira, ahí la tienes.
3.PVI/rr	P: No, esto es un teorema. La demostración es otra. Pero se ha demostrado, que sí./
3.PIS/cl	Bueno, de modo que hay gente que piensa que esto mide la $\sqrt{2}$ exactamente, y gente que no.
CA/r	A: ...
3.PIS/cl	P: ¿Quién piensa que se puede dibujar exactamente 1/3...? ¿Quién piensa que es más exacto esto del 6/9=0,6666....? O sea, que 0,666... se puede dibujar más exacto a través de su fracción que...

3.AAl/os	A: No, no, no
3.AAl/os	A: Sí es lo mismo
3.AAl/os	A: Es igual
3.AAl/os	A: Es lo mismo.
3.AAl/ai	A: Es lo mismo, pero te cuesta más trabajo.
3.AAl/ai	A: Es lo mismo, pero ahí sabes las cifras.
3.PIS/p	P: Pero ¿es más exacto un método que otro? Quiero decir, si yo dibujo 0,666... a través de su fracción, ¿lo dibujo más exactamente que este número a través de su radical?
3.AAl/os	A: Sí
CA/r	A: ...
2.Al/s	P: Bueno, vamos a pasar al siguiente.
CA/i	A: Seño ...
CA/i	A: (Parece que están discutiendo sobre si con las raíces se puede operar).
1.PO/s	P: Un momentico. Un momento,/
3.PIS/cl	¿habéis operado en 8º con las raíces?
3.AAl/os	A: Sí
3.AAl/os	A: No
3.PDC/a	P: Por ejemplo, √3+√3 era 2√3.
3.AAl/os	A: No
3.AAl/os	A: Sí
CA/r	A: ...
3.AMC/e	A: ... pasar a común índice.
3.PDC/r	P: ¿Y no se os ha ocurrido pensar por qué ponéis aquí una cosa que es una raiz? Porque según vosotros me dijísteis, esto era una operación, esto no era un número. ¿Porque trabajáis con raíces, y no las ponéis así?
3.AAl/ai	A: Porque es más exacto.
3.AAl/ai	A: Porque es más exacto.
3.PVI/ad	P: Este es el número que es exactamente √3, pero su expresión decimal es infinita.
3.AMC/ri	A: Lo mismo pasa con los números ...
3.AMC/ri	A: Lo mismo pasa con los periódicos.
2.PO/p	P: Bueno, pasamos al siguiente./
3.PSC/c	Vamos a ver, vamos a ver si zanjamos un poco esto. Yo lo único que os puedo decir; lo único que os puedo decir es que hemos construido un cuadrado de área 3, que el teorema de Pitágoras dice que mide exactamente 3 unidades cuadradas, y su lado mide exactamente √3 unidades. Sí. Y entonces, yo este número lo puedo dibujar exactamente aquí, pero si lo dibujo decimal nunca llego. Sí lo dibujo mediante el decimal siempre estoy dibujando aproximaciones decimales./)

3.1--t: 0:36

2.PO/ce	Bueno, ¿con pi qué pasa? ¿Existe un punto en la recta que corresponda a pi?
3.AAl/os	A: Sí
3.AAl/os	A: No
3.AAl/os	A: Sí
3.AAl/os	A: No
3.AAl/os	A: No, no
3.AAl/os	A: Sí
3.AAl/ai	A: Aproximaciones.
3.POC/e	P: A ver, alguien que diga que un punto que le corresponda a pi... Que no existe un punto que le corresponda exactamente a pi.
3.AIS/a	A: ¿Que qué?
3.POC/e	P: ¿Que no existe un punto que le corresponda exactamente a pi? ¿Alguien dice que sí?
3.AIS/a	A: ¿El qué?
3.PDC/c	P: Que sí hay un punto en la recta que le corresponde a pi.
CA/r	A: ...
3.AAl/ai	A: Aproximaciones.

3.PVI/rr P: No, la aproximación no. Un punto que le corresponde a pi.
CA/s A: Es que...
3.PIS/p P: ¿Tú porque piensas que sí?
3.AMC/ie A: Porque si dividimos, por ejemplo, los centímetros en milímetros, los milímetros en otros, y así, siempre llegará.
3.AVI/rs A: No, no
CA/r A: ...
1.PO/s P: Por favor, un momentico, que podamos aclararnos./
3.PDC/II Lo que ha dicho Javi es que si vamos dividiendo y dividiendo.../
3.PIS/e Si existiera un punto, ¿dónde estaría? Entre el 3...
3.AMC/c A: Y el 4
3.PIS/e P: ¿Dónde está pi?
3.AAI/ai A: Entre el 3,1 y el 3,2
3.PVI/as P: Entre el 3,1 y el 3,2
3.AAI/ai A: Entre el 3,14 y el 3,15
CA/r A: ...
1.PO/s P: Un momento./
3.PIS/ci ¿Está claro que aquí podemos ir encajando...
CA/i A: Sí, pero ...
3.PIS/p P: Pero cada encaje de aquí. Este número ¿es pi?
3.AMC/c A: No
3.AMC/e A: Es una aproximación.
3.PIS/p P: Y éste, ¿es pi?
3.AMC/e A: No
3.PIS/p P: Y si tiene 20.000 cifras ¿es pi?
3.AAI/os A: No
CA/s A: Pero no...
2.PI/i.
3.PDC/c P: Entonces esas aproximaciones van encajando cada vez más;/ 3.PIS/i pero ¿existe un punto que corresponda exactamente a pi?
3.AAI/os A: No, no
3.AAI/ai A: Como la raiz. Por ejemplo, mides la circunferencia con un portalápiz y pones la medida, y eso ya sería pi según el teorema.
3.PVI/as P: A ver, mido la circunferencia.(Dibujo circunferencias de distinto tamaño en la pizarra)/
3.PIS/e ¿Esta, o ésta, o cuál?
3.AAI/ai A: La que te dé la gana.
CA/r A: ...
3.PDC/a P: A ver, si yo quiero dibujar pi partiendo del método que ha dicho Katerina... Sí yo quiero pintarlo. Yo me cojo una circunferencia, parto aquí, y traslado.
3.AVI/s A: ¿Sí?
CA/i A: ...

3.2--t: 0:40

3.AIS/i A: Pi, Pi se puede representar con una fracción, ¿no?
3.PIS/p P: ¿Pero eso es pi? ¿pi tiene una fracción que le represente?
3.AMC/ri A: Que represente a Pi, pero de otra manera.
3.AAI/ai A: Pero no es exacto.
3.AIS/i A: Pi se podía representar con una fracción, ¿no?
3.PIS/i P: ¿Pi tiene una fracción?
3.AAI/os A: No, no
CA/r A: ...
3.AAI/ai A: Pero no sería exacta.
3.PDC/p P: Si es una fracción ... Pablo, Pi es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.
3.AVI/as A: Entonces es una fracción.
3.PDC/a P: Es una fracción siempre que aquí hay un número entero y aquí otro número entero.
3.AAI/c A: ah
3.PIS/e P: Si yo puedo poner esto como un número entero aquí arriba y un número entero aquí abajo, ¿qué le pasa a su expresión decimal?

3.AMC/e A: Que será periódica.
3.PVI/ad P: No es infinita (no periódica). Luego entonces... Es que hay razones... Razón quiere decir la relación entre esta longitud y ésta. Las hay que se pueden expresar por medio de una fracción, y las hay que no.
3.AIS/r A: Entonces, ¿eso no es nada?
Acabas de decir tú que si eso es una fracción entonces tiene que salir uno periódico, entonces...
3.AMC/c A: No se puede representar en la recta.
1.AS A: Seño, seño,...
1.AS A: Mira, Isabel,/
3.AAI/ai los radicales...
2.PO/p P: Esperad un momentico, vamos con lo de la fracción./
3.PDC/r La definición de pi. Si la habéis leído en los libros dice que es una constante que es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.
3.AVI/as A: Sí
3.PDC/a P: Vosotros, al principio supusísteis: si a mi me dan dos longitudes, poníais la relación entre la una y la otra como un fracción, ¿os acordáis de eso? que yo os daba un longitud y os daba otra, y la relación entre una y otra la poníais con una fracción.
2.AI A: Isabel, digo yo,/
3.AIS/i ¿y los radicales...?
3.PDC/r P: Si todas las relaciones entre longitudes se pueden poner mediante fracciones, con la longitud del lado del cuadrado y ésta, también se puede poner como una fracción,/
3.PIS/i ¿o no? Voy dividiendo y llega un momento en que me encaja una parte y lo pongo como una fracción.
3.AAI/os A: Sí
3.PIS/cl P: ¿Sí, o no?
¿Esto qué quiere decir?
3.AIS/a A: ¿Esa diagonal?
3.AAI/ai A: Esa es la diagonal del cuadrado...
3.AMC/e A: Mide $\sqrt{2}$
3.PVI/as P: Esto mide r2./
3.PIS/e ¿Y esa longitud y ésta se pueden expresar mediante una fracción? Si ésta tiene infinitas cifras.
CA/r A: ...
3.PDC/a P: A ver, pi es la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro, pero estáis cansados de leer que esa relación no es una fracción, porque tiene infinitas cifras no periódicas.
3.AIS/c A: Pero entonces ¿cuál es?
CA/i A: ...

3.3---t: 0:46

3.AIS/c A: Isabel, ¿hay una representación exacta para pi?
3.PDC/a P: Sí, fijaros en lo que había dicho antes./
3.PIS/e Si cojo una circunferencia, la longitud ¿qué mide?
3.AIS/a A: ¿La longitud?, ¿la longitud?
3.PDC/a P: Mide pi por el diámetro,/
3.PIS/cl ¿no?
3.AAI/os A: Sí
3.PIS/cl P: Si yo cojo la circunferencia, la longitud de la circunferencia mide pi por su diámetro, ¿sí o no?
3.AVI/as A: Sí
3.PDC/a P: Bueno, pues entonces, decía Katerina: yo me parto la circunferencia y me la traslado ahí./
3.PIS/i ¿Cualquier circunferencia? ¿Una chica?/
3.PDC/ll Porque una chica no tiene la misma longitud que una grande./
3.PIS/i ¿Cuál es la que cojo?
3.AMC/c A: El radio tendría que ser la misma unidad de esa, ¿no?

3.PIS/p	P: ¿Qué es lo que tendría que ser la misma unidad que esa? El radio o el diámetro?, ¿cuál?
3.AMC/e	A: Sería el diámetro.
3.PDC/a	P: Si el diámetro es una unidad, pues la longitud de la circunferencia mide pi unidades, y yo cojo y me la traslado. La corto por aquí y me la traslado.
CA/i	A: Murmullo.
3.PIS/cl	P: ¿Eso lo entendéis o no?
3.AAI/nc	A: (Creo que están perplejos)
3.PIS/cl	P: Katerina, tú lo entiendes, que eres la que lo había propuesto, ¿o no?
3.AAI/os	A: Sí
3.PDC/a	P: La longitud de la circunferencia mide..., pi es la longitud partido de lo que mide el diámetro. La longitud de la circunferencia va a medir pi por lo que mida el diámetro.
3.AVI/as	A: Sí
3.PDC/r	P: Si yo cojo un unidad, una unidad de esas, ¿que va a medir la longitud?
CA/i	A: ...
3.PDC/ll	P: Ahora dice Marta que un número no se puede multiplicar por pi, porque pi como tiene infinitas cifras no periódicas, pues pi no se puede multiplicar por un número.
CA/i	A: ...
3.AAI/ai	A: Es que una aproximación es 3,14, pero lo que es/
CA/i	...
3.AVI/as	A: ... no se puede multiplicar.
3.PDC/r	P: ¿Y vosotros no habéis visto nunca 4pi?/
3.PIS/i	¿Esto qué quiere decir?
3.AAI/ai	A: 4 veces pi, pero nunca pondré el resultado..
3.AAI/ai	A: Lo simplificamos.
3.PDC/p	P: Porque el resultado, fijaros que en Matemáticas... En Física sí cortan el pi, ponen 3,14, pero en Matemáticas ponen 4pi. Porque la expresión de pi, la podéis poner a mano, la decimal.
3.AVI/ad	A: Por ejemplo, 2pir.
CA/r	A: ...
2.PO/p	P: Bueno, venga. Vamos a terminar./
2.PO/ce	¿Pi tiene un punto en la recta?
3.AAI/os	A: No, no, no
3.AIS/e	A: ¿Por qué?
3.PIS/cl	P: ¿Pi no tiene su punto?
3.AAI/os	A: No, no, no
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: ¡No!
CA/r	A: ...
3.PIS/cl	P: ¿Alguien piensa que pi tiene su punto aquí en la recta?
3.AAI/os	A: No
3.PIS/cl	P: ¿Nadie piensa que pi tiene su punto aquí?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Yo no
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: Sí, sí, yo
3.PDC/a	P: Bueno, está claro que aquí lo puedo aproximar cada vez más, o sea, que aproximaciones puedo poner cada vez más.
3.AVI/as	A: Sí
CA/i	A: ...

4---t: 0:51

2.PO/ce	P: ¿Y qué le pasa a los dos decimales siguientes? ¿Lo mismo que a pi? Los dos decimales siguientes.
3.AMC/ie	A: Los dos decimales siguientes, que no se puede porque no se sabe ni la operación.

3.AAI/ai	A: Son números puestos a boleo.
3.PDC/c	P: Sí, los dos decimales siguientes, que yo me los he inventado./
2.PO/ce	¿Estos tienen su punto en la recta o no? (Pregunta textual).
3.AAI/os	A: No
3.AAI/ai	A: Si diera la casualidad que viene de una raiz...
3.AVI/as	P: Si diera la casualidad de que sale de una raiz, sí,/
3.PIS/i	pero ¿y si no da la casualidad?
3.AAI/os	A: Pues no.
3.PIS/cl	P: ¿Entonces no tiene su punto en la recta?
3.AAI/ai	A: No, se puede ir aproximando como antes.
3.PIS/p	P: ¿Pero me puedo ir aproximando cada vez más?
3.AMC/e	A: Sí
CA/r	A: ...
3.PIS/cl	P: Vamos a ver, este número me decís que no tiene un punto exacto.
3.AAI/os	A: No.
3.PIS/i	P: Pero ¿... lo puedo representar de alguna manera?
CA/i	A: .../
3.AAI/ai	decimales.
3.PIS/e	P: ¿Y donde van los decimales? ¿A dónde van? ¿Qué hacen? ¿Cada uno para un lado?
3.AAI/ai	A: Entre 0,1...
3.PVI/ad	P: Entre 0,1 y 0,2. Entre 0,12 y 0,13.
3.AMC/c	A: 0,13
3.PDC/r	P: Y ahora cogemos una lupa, y vamos encajando. Y esto, ¿hacia dónde va?
3.AAI/ai	A: Aproximando
CA/r	A: ...
3.PIS/i	P: ¿A qué me aproximo? ¿A qué?
3.AAI/ai	A: Nunca llega
3.PIS/i	P: ¿A este número?
3.AAI/ai	A: Sí, pero nunca llega.
3.AIS/r	A: Pero ¿qué número es ese?
3.AAI/ai	A: Si no lo sabemos, si no sabemos su representación; eso no viene del pi ni de las raíces cuadradas, no sabemos nada.
3.PDC/p	P: ¿Cómo que no sabemos? Sabemos que si yo corto... (la profesora empieza un argumento que no concluye)/
3.PIS/cl	¿Las cifras las sabéis cuáles son: 6,7,8...?
3.AAI/ai	A: Sí: 9, 10, 11, 12, 13
3.AAI/ai	A: Luego empieza 011 ...
CA/i	A: ...
3.AVI/as	P: No, no acaba,/
3.PDC/p	pero tú sabes sus cifras cuáles son.
3.AVI/rr	A: Pero no viene de ninguna operación Y el otro sí venía de una operación, y lo puedes pasar a fracción.
3.PIS/p	P: Pero ¿tú conoces sus cifras?
CA/i	A: ...
3.PDC/ll	P: Sí, conoces.
CA/i	A: ...
3.PVI/as	P: Bueno
3.AIS/i	A: Pero entonces a partir de 0 debería empezar otra vez 12345 así porque el 11, 12 y el 13 no se cuentan como cifras...
3.PVI/rr	P: No, pero éste me lo he inventado yo, un número que haga esto.
CA/i	A: ...
3.PIS/cl	P: Entonces, ¿puedo representarlo en la recta?
3.AAI/os	A: No
3.PVI/ad	P: Exactamente no,/
3.PIS/i	pero ¿puedo...
2.AI.	
3.AAI/al	A: Aproximar
3.PIS/i	P: Pero ¿puedo ir localizándolo?

(La profesora pretende centrar la atención de los alumnos en que la regularidad que siguen las cifras del número permiten un cierto control sobre el mismo y sobre su representación, que podría llevar más adelante a establecer la existencia de un punto correspondiente a dicho número como aquel al que convergen todas las aproximaciones, o el que pertenece a todos los intervalos encajados formados por las aproximaciones por exceso y por defecto. Sin embargo, los niños parecen dar muestras de estar convencidos de que los decimales infnitos no periódicos no construibles no tienen un punto en la recta que les corresponda).

CA/r	A: ...
3.PIS/cl	P: O sea, que éste no tiene ni punto ni nada.
3.AAI/os	A: Sí tiene
3.PIS/i	P: ¿Esto es un número?
3.AAI/os	A: No
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: Sí
3.AAI/os	A: No
3.PIS/i	P: ¿Quién es más número, pi o éste?
3.AMC/os	A: Pi
3.AAI/ai	A: Ninguno de los dos.
3.PIS/i	P: ¿Pi es más número?
3.AAI/ai	A: Es más importante.
3.AAI/ai	A: Pi viene de una operación.
3.AAI/ai	A: Tiene más importancia.
3.AMC/ie	A: Pi es más importante porque viene de una operación.
2.PO/p	P: Bueno, lo de las diferencias,/
1.PO/d	eso no lo habíais podido contestar; pues, me lo contestáis para mañana.
1.AV/a	A: Vale
1.AS	A: Seño, podemos...
1.PA/r	P: Seño, os podéis tranquilizar, que todavía no es la hora de la salida./
1.PO/d	Y además, de aquí no sale nadie hasta que yo diga...

t: 0:58

Cuestión de Investigación 1 (bis)

Fecha: -2-94
Duración Total: 17 minutos
Encuadre en la sesión: Los niños han trabajado por escrito la CI1 (bis) y lo que recoge la grabación es la exposición de las clasificaciones de cuatro alumnos y el intento de discusión sobre ellas.

t: 0:01
Los niños están trabajando en la contestación de la CI1 (bis). Están trabajando en los grupos, cada uno en su propia cuestión, pero hay flexibilidad para que se comenten alguna cosa entre ellos.
Se corta el vídeo y cuando se vuelve a conectar están cuatro niños en la pizarra, poniendo cada uno de ellos su clasificación.
No se registra en el vídeo, pero la intención es pasar de discutir la primera pregunta, porque está ya muy traída y llevada, y los alumnos están cansados de ella, a mi parecer. Pasamos entonces a la segunda pregunta, donde puede haber más variedad (para mí también), y podemos discutir sobre aspectos nuevos, aunque sea del mismo tema; cuatro alumnos salen a la pizarra para poner sus respectivas clasificaciones, que luego pretendo que discutamos.

t: 0:04

De vez en cuando, alguno de los que están sentados hace sugerencias a alguno de los niños de la pizarra.

3.POC/e	P: Id mirando, vamos a ver una cosa, para tener una que sea la nuestra, id mirando si hay una (clasificaión) que sea la más completa de todas, y si esa la podemos completar con otra. Y esa es la que vamos a copiar ya todos. Con otras, o con lo que vosotros hayáis pensado.

Las clasificaciones no se ven desde el vídeo. Un detalle curioso es que tres de los cuatro niños las están haciendo sin papel.
Los demás alumnos están completamente distraídos, y no analizando o prestando atención a las clasificaciones, como yo les he indicado.

t: 0:14

3.PIS/i	P: Bueno, ¿habéis decidido ya si hay alguna que sea la más completa, o no?
3.AAI/os	A: Sí, esa, esa, la de Rocío.
3.AAI/os	A: La de Juan
3.PDC/c	P: ¿Estáis mirando las cuatro?
3.AAI/os	A: Sí
3.PIS/i	P: ¿Hay alguna que sea la más completa?
3.AAI/os	A: Sí, la de Juan de Frutos.
3.AAI/os	A: La de Juan de Frutos.
3.AAI/os	A: La de Juan
3.AAI/os	A: Seño, la primera
3.AAI/os	A: La de Rocío
CA/r	Hablan varios a la vez y no se entiende.
3.PDC/p	P: A ver una cosa, vamos a valorar dos cosas: una cosa es que falte alguno, que lo mismo falta en todas, y otra cosa esa la organización, la estructura.
3.AAI/os	A: Juan
3.AAI/os	A: La de Frutos.
3.PDC/p	P: La estructura es muy importante porque puedo añadirle los ejemplos, mientras que si yo doy sólo ejemplos, lo que falta ahí es .... el armazón/.
3.PIS/i	¿Cuál es la mejor organizada?
3.AAI/os	A: Juan
3.AAI/os	A: La de Kati
3.AVI/r	A: La de Kati es demasiado...
2.PI/i	
3.PDC/p	P: Que esté mejor no quiere decir que sea la más ..., sino que tenéis que elegir una que sea a la que nos agarremos.
3.AAI/os	A: La de Kati.
3.POC/d	P: Bueno, hay que coger una de estas tablas de base, para ir añadiéndole lo que falta./
3.PDC/p	Que no se trata de que ..., me guste más ésta o me guste más otro niño; eso da igual; lo que estamos intentando trabajar es que, si hay cuatro tablas, a nosotros nos conviene ... coger la que más nos convenga, y a partir de ahí vamos rellenándola con las demás.
3.AVI/as	A: Vale.
3.PVI/v	P: ¿Vale? Que no se trata de elegir a Juan o a Pepe; eso es lo de menos./
3.PIS/i	Entonces, ¿cuál es la tabla que cada uno elegiría de base para ir añadiéndole las cosas que faltaran?
3.AAI/os	A: Yo cogería la de Rocío.
3.PDC/p	P: Una cosa que tenemos que ver es que la estructura la tenga buena, porque para ir añadiéndole...
3.AIS/a	A: Pero qué es, ¿que esté más completa o mejor estructurada?
3.PVI/ad	P: Que esté más completa y mejor estructurada.
3.AAI/ai	A: Mejor estructurada la de Juan, y más completa la de Kati.

Toca el timbre.

t: 0:18

1.PO/s	P: Shsss.../
1.PO/d	Como no queda tiempo ... el proximo día empezaré de nuevo, y empezaré con ...