DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

# SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN

TESIS DOCTORAL

**José María Gairín Sallán**

ZARAGOZA, 1998

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

# SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS
# UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN

Tesis Doctoral que presenta
**José María Gairín Sallán**

Realizada bajo la dirección del doctor
**Luis Rico Romero**

ZARAGOZA, 1998

**A Tere, Ramiro y Ana**

En el largo camino recorrido hasta culminar la elaboración de esta Tesis Doctoral he recibido ayuda señalada de instituciones, de profesores y de otras personas a quienes deseo agradecer su inestimable colaboración.

De manera especial, quiero manifestar mi más sincero reconocimiento al director de esta Tesis, Dr. D. Luis Rico Romero, quien ha sabido conjugar la sabiduría y el conocimiento del maestro, con la animosidad del amigo.

Igualmente, manifiesto mi más profundo agradecimiento al Dr. D. Bienvenido Cuartero Ruiz por aceptar la tutorización de esta tesis, por su predisposición a ayudarme en todas las fases del trabajo, y por el apoyo permanente al pleno desarrollo de la Didáctica de la Matemática, como área científica integrada, en el Departamento de Matemáticas.

Mi sincero reconocimiento al profesor D. Rafael escolano Vizcarra por su implicación plena y desinteresada en el equipo investigador, por la calidad de su crítica científica, y por compartir amistosamente las alegrías y sinsabores del trabajo.

Agradezco muy sinceramente a la profesora Dª. Eva Cid Castro su dilatada y constante lucha para consolidar la naciente Área de Didáctica de la Matemática en esta Universidad, su permanente disposición al debate científico, y su presencia amiga para animarme a finalizar el trabajo.

Y, finalmente, me siento deudor con los estudiantes de 2º curso de la Diplomatura de Maestro en la especialidad de Educación Primaria, que prestaron todo su interés y colaboración para que este trabajo se llevase a cabo. A ellos dedico los resultados del mismo.

# INDICE

# CAPITULO I

# ENCUADRE DEL PROBLEMA

## I.1. Presentación

Este trabajo surge inicialmente de nuestra preocupación como docentes, de nuestra experiencia como formadores de Profesores de Primaria en Matemáticas y Didáctica de la Matemática. Son muchas las carencias que se detectan en el conocimiento que sobre matemáticas y enseñanza de las matemáticas tienen los estudiantes para profesor de Primaria y, de ahí, que sean también muchas las necesidades formativas que tienen estos estudiantes. Es por ello que consideramos necesarios estudios e investigaciones dedicados a profundizar y mejorar nuestra información sobre el conocimiento del profesor en formación y orientados hacia su perfeccionamiento y cualificación.

En este trabajo nos centramos sobre un campo conceptual en el cual es preocupante el desconocimiento que muestran los estudiantes para profesor. Nos referimos al campo de los números racionales. Desde la observación de las producciones matemáticas de los estudiantes para maestros de Educación Primaria surgen dos preguntas generales a las que se pretende contestar con este trabajo de investigación:

- ¿cómo incrementar la comprensión que tienen estos estudiantes sobre los números racionales, en el sentido de establecer conexiones consistentes entre las notaciones fraccionaria y decimal?
- ¿de qué forma influye la posible modificación de los conocimientos personales de estos estudiantes en la realización de tareas docentes?

Consecuentemente, esta Tesis Doctoral toma como punto programático la consideración de que los planteamientos teóricos sobre temas educativos han de orientarse a la resolución de problemas en el sistema escolar y que la investigación debe estar conectada con la reflexión crítica sobre lo que ocurre en las aulas. Esta posición resulta adecuada por cuanto constituye un campo propio de indagación para el investigador en educación matemática (Kilpatrick, 1993), y porque tanto los expertos (Kilpatrick, 1992; Nickson, 1992), como las instituciones y sociedades (Comisión Internacional de Educación Matemática, 1977, I.C.M.I. ) recomiendan la conexión entre teoría y práctica para fortalecer la coherencia interna de la disciplina.

Desde esta posición, abordamos el trabajo de diseño e implementación de una propuesta curricular para estudiantes de maestros de Educación Primaria; la observación e interpretación de los fenómenos que se produzcan, así como el análisis de datos obtenidos, permitirán elaborar las conclusiones del trabajo.

Las herramientas conceptuales más importantes que utilizamos son las nociones de: comprensión del conocimiento matemático (Wittrock, 1990; Hiebert y Carpenter, 1992); modelos matemáticos para el aprendizaje (Castro,1994, Gagatsis y Patronis , 1990; Lesh et al., 1987); y sistemas de representación (Castro, Rico y Romero, 1997; Duval, 1993, 1995; Kaput, 1992).

El método de investigación que se adopta en esta Tesis Doctoral es el denominado de Investigación- Acción (Elliot, 1990; Kemis y McTaggart, 1988; Mcniff, 1991) y se va centrar en un problema específico sobre un escenario específico (Cohen y Manion, 1990).

Quedan así presentados los datos globales de un trabajo de investigación cuya parte experimental se llevará a cabo con un grupo natural de estudiantes matriculados en la asignatura "El currículum de Matemáticas en Educación Primaria", que tiene carácter de asignatura obligatoria de la Diplomatura de Maestro en la especialidad de Educación Primaria, y que se imparte en la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Zaragoza. El profesor responsable de la asignatura en dicho grupo de alumnos es el propio investigador.

## I.2. Area problemática

Este trabajo se sitúa en un campo general que denominamos Pensamiento Numérico, que constituye una de las líneas de investigación que articulan el desarrollo de la investigación en Didáctica de la Matemática en España, y que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social. La línea de investigación Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y Castro, 1995; pág. 167).

El marco conceptual en que se sitúa esta línea de investigación tiene unas bases diversificadas: asume que la construcción del conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural y que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; centra su objeto de reflexión en el campo de las matemáticas que comienza con la aritmética escolar, avanza por los sistemas numéricos superiores y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas; tiene una orientación esencialmente curricular; el estudio de los errores y dificultades en la compresión de los escolares sobre los campos conceptuales reseñados es parte esencial de la tarea de análisis e interpretación que se lleva a cabo en esta línea de investigación. (Castro, Rico y Romero, 1997).

El Pensamiento Numérico realiza una aproximación analítica al estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales sobre la base de un esquema funcional con tres componentes (Castro, 1994; pág.1):

- unas herramientas, donde destacan la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica;
- unas competencias, donde resaltan la organización, sistematización y

desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica;

- un campo de problemas, en donde se consideran los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos y cuestiones que admiten ser analizados mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de una determinada estructura numérica.

El objeto de estudio de esta memoria se centra sobre una estructura numérica concreta denominada Campo Conceptual de los Números Racionales, según el sentido establecido por González (1995; pág. 226-228). Siguiendo la terna analítica que acabamos de presentar, el estudio de este Campo Conceptual se emprende desde tres vertientes: una primera que aborda el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura matemática de los Números Racionales; una segunda que hace referencia a las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios de ese sistema numérico; y una tercera que se ocupa del campo de los fenómenos y situaciones que admiten ser analizados mediante ese sistema numérico y de los problemas que con el mismo pueden abordarse y resolverse.

Una historia de más de 7.000 años y un proceso dialéctico de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones, han llevado a la configuración actual del concepto matemático de Número Racional (Benoit et al., 1992); concepto sin duda complejo puesto que recoge y sintetiza todos los aspectos considerados a lo largo de su proceso constructivo (Feferman, 1989).

Ahora bien, en los procesos habituales de enseñanza las ideas y conceptos numéricos se justifican y presentan en orden deductivo, sin que ello signifique que el alumno los organice y estructure cognitivamente de esta forma (Tall, 1991). Una construcción del concepto de número racional cognitivamente efectiva exige de un proceso lento de dominio e integración de nuevos significados, que se articulen con los dominios del campo numérico de los números naturales y de los números enteros. También supone la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación, que hay que acomodar a una variedad de nuevos significados; igualmente hay que profundizar sobre las relaciones que se presentan entre los distintos sistemas de representación considerados. Además, se precisa de la comprensión en profundidad de una estructura algebraica diferente, la estructura de grupo multiplicativo, lo que implica dotar de significado al inverso de un número; también es necesario comprender la noción topológica de densidad respecto del orden.

Quedan así enunciados la variedad de problemas que se presentan en el proceso de enseñanza -aprendizaje del conjunto de los números racionales, las dificultades para su comprensión provenientes de la complejidad que subyace en sus estructuras topológica y algebraíca, y las cuestiones derivadas de los diferentes significados para estos entes numéricos que se simbolizan mediante distintos sistemas de representación. Como se ha indicado, el estudio de algunos de estos problemas durante el proceso de formación inicial de profesores de Primaria lo abordamos dentro de la línea de investigación que denominamos Pensamiento Numérico

## I.3 Números Racionales y curriculo de enseñanza obligatoria

Entre los años 1970 y 1992 el Sistema Educativo en España organizaba la Educación Obligatoria en 8 niveles escolares, que comprendía a los alumnos desde los 6 a los 14 años. Estas enseñanzas se impartían en los Colegios Nacionales o Concertados de Educación General Básica, y los currícula de las diferentes materias venían determinados por documentos ministeriales prescriptivos, de orientación centralista, comunes para todos los centros del sistema escolar. Los libros de texto obligatorios que se han utilizado durante estos años han necesitado la aprobación de una comisión ministerial de expertos, y se han ajustado a unos programas y unas orientaciones explícitas.

Por estas razones no resulta difícil caracterizar las líneas generales que han orientado durante estos años la práctica educativa sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en general, y de los Números Racionales, en particular. Llevar a cabo esta caracterización es pertinente dado que los sujetos de nuestro estudio han recibido su formación inicial con este sistema y durante los años mencionados; tanto sus conocimientos como sus desconocimientos tienen sus origen en este plan de formación.

Hemos tomado como referencia los textos de una de las colecciones publicadas por la editorial Anaya[1], una de las editoriales con más presencia en nuestro sistema educativo tras la aparición de los Programas Renovados del año 1982. Siguiendo estos manuales nos proponemos delimitar la secuencia instructiva que sobre el Número Racional recibieron los estudiantes para maestro en su etapa como estudiantes de enseñanza obligatoria.

Según los Programas Renovados establecidos por el Ministerio de Educación y Ciencia, los primeros contactos de los escolares con el Número Racional se realizan a partir del concepto intuitivo de fracción en 4º curso (9-10 años). Modelizando una situación con objetos discretos, la idea que se transmite a dichos escolares es la de la fracción como relación parte-todo (pág. 59):

> *Como un par de números escritos uno sobre otro y separados por una línea horizontal*
>
> *El denominador indica el número de partes en que hemos fraccionado. El numerador indica las partes que cogemos*

Posteriormente se presenta la idea de fracción como división (pág. 62), aun cuando la intención no es la de destacar otro significado de las fracciones,

[1] Gómez, M. y Muñoz, J. A., (1985).

sino la de presentar a los escolares las fracciones impropias: *si el numerador es mayor que el denominador la fracción es mayor que 1 e indica que hemos cogido más de la unidad*

En este mismo curso se introduce la notación decimal mediante la presentación previa de las fracciones decimales o fracciones cuyo denominador es *la unidad seguida de ceros*. Los números decimales surgen como *otra forma* de escribir las fracciones decimales. Así, y de manera secuenciada, los escolares observan con caracteres tipográficos destacados que:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \ ; \ \frac{1}{100} = 0{,}01 \ \text{ y } \ \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Seguidamente se adiestra a estos escolares en la escritura de las fracciones decimales como números decimales: *escribimos el numerador y separamos, con una coma, tantas cifras contando desde la derecha, como ceros tenga el denominador* (pág 68); y a escribir los números decimales como fracciones decimales: *el numerador es el número decimal sin la coma, y el denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenía el número decimal* (pág. 69)

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números decimales se conceptualizan mediante la presentación de situaciones problemáticas asociadas a la medida de magnitudes, aun cuando la resolución de tales situaciones no se justifica: *para sumar los números decimales 1,7, 3,5 y 2,4, colocamos uno debajo de otro poniendo las unidades debajo de las unidades y las décimas debajo de las décimas. De esta forma las comas quedan alineadas en columna. Hacemos la suma como si fueran números naturales, poniendo, en el resultado, una coma alineada con las de los sumandos*. (pág. 73)

A modo de síntesis podemos indicar que la secuencia instructiva recibida por los escolares de 4º curso (9-10 años), se inicia con la noción de fracción como relación parte-todo en contextos discretos o continuos (como también ocurre en el caso de la Editorial Santillana[2], de amplia implantación); que la noción de número decimal está asociada a la noción de fracción y surge como consecuencia, no justificada, de un cambio de sistema de representación; que las nociones sobre fracciones están asociadas a modelos en los que se utilizan objetos distinguibles o figuras geométricas regulares; y que los números decimales no se asocian a modelos sino a técnicas operatorias que permiten transitar entre distintas representaciones simbólicas entre las que se establece una relación formal más que conceptual.

En el curso 5º (10-11 años) los textos escolares analizados reiteran el esquema del curso anterior: comenzar por las fracciones a partir de modelos y presentar los números decimales como resultado de convenciones simbólicas. Las diferencias con el curso anterior estriban en la aparición de operaciones con fracciones, que se modelizan con figuras regulares, generalmente rectángulos o

[2] Gil, J. y García, P. (1988).

círculos, y con el significado predominante de la fracción como relación parte todo, salvo en el caso de la división de fracciones que se presenta como producto de una primera fracción por la fracción inversa de la segunda, pero sin proporcionar más justificaciones que la mera comprobación de que el producto de una fracción por su inversa da la unidad.

En el curso 6º (11-12 años) se revisan las nociones sobre fracciones de los cursos precedentes; pero esta revisión se realiza desde la intencionalidad de avanzar en la construcción formal de los Números Racionales positivos: se define la equivalencia de fracciones y se presentan las clases de equivalencia como elementos del conjunto $Q^+$; sobre los elementos de este conjunto se revisan las relaciones y operaciones conocidas utilizando fracciones equivalentes. También se amplía la relación operatoria entre las notaciones fraccionaria y decimal mediante una extensión del algoritmo de la división entera, lo que permite la aparición de números periódicos.

En el curso 7º (12-13 años), no se ubican temas específicos de fracciones o de números escritos con notación decimal. Los intereses de la instrucción se focalizan en el estudio de la proporcionalidad aritmética, que se presenta desconectada de las ideas sobre fracciones estudiadas en cursos precedentes. El contenido aritmético se completa con la introducción de una nueva estructura numérica: el conjunto de los Números Enteros.

El Sistema Escolar contemplaba que en el curso 8º (13-14 años) se finalizara la instrucción sobre el conjunto de los Números Racionales. Siguiendo un proceso instructivo más cercano al desarrollo histórico que a la construcción formal de las matemáticas, en este curso se reformulaba la construcción completa de la estructura de los Números Racionales con la inclusión de las fracciones negativas. Además, los conocimientos algebraicos de los escolares permitían la búsqueda de fracciones generatrices de los números periódicos, con lo que se completaban las relaciones numéricas entre las notaciones fraccionaria y decimal que quedaron inconclusas en 6º curso.

Este recorrido por 5 cursos escolares resume la secuencia instructiva que el currículo vigente entre 1970 a 1992 diseñaba para la construcción del conjunto de los Números Racionales. En este proceso instructivo el escolar ha de observar cómo las ideas sobre fracciones se asientan inicialmente en la utilización de modelos; cómo estos modelos dan paso a un tratamiento progresivamente formalizado para la construcción de Q; cómo surgen los números decimales a partir de las fracciones decimales; y cómo las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal están basadas sobre criterios de tipo operatorio y no conceptuales.

### I.3.1. La formación de los estudiantes para profesor.

El proceso de construcción del conjunto de los Números Racionales, tal y como se ha caracterizado en el apartado anterior, viene a perfilar los conocimientos personales de los estudiantes para maestro que participan en este trabajo. Estos estudiantes finalizaron su etapa de escolarización obligatoria en el curso 91-92 y, al igual que otros escolares que continuaron con los estudios de Bachillerato, su currículo contempló la construcción del conjunto de los Números Reales; sin embargo, durante el Bachillerato no hicieron ninguna revisión del conjunto de los Números Racionales.

De este modo encontramos que para estos estudiantes, posiblemente como consecuencia del proceso seguido para la construcción de Q, se acentúa la disociación de los conceptos fraccion-decimal. Este hecho se constata en los resultados de una prueba inicial que se pasó al grupo de futuros maestros con el que hemos trabajado al inicio del curso 97-98 y que se comenta con más amplitud en el Capítulo III; de las respuestas dadas por estos estudiantes se deduce que la idea predominante que tienen sobre las fracciones está centrada en la relación parte-todo y, además, esta idea aparece asociada a un modelo; mientras que las expresiones decimales no tienen más significado que la mera descripción en términos de elementos del sistema de numeración decimal. Es más, estos estudiantes no formularon relaciones de las expresiones decimales con las fracciones, ni con situaciones de medida de magnitudes, lo que induce a pensar que sus conocimientos personales sobre el significado de las notaciones decimales no van más allá del reconocimiento de sus relaciones internas tanto aditivas como multiplicativas.

El trabajo de estos futuros maestros como especialistas en Educación Primaria les va a exigir que instruyan a los escolares en el tópico de los Números Racionales, entre otros tópicos matemáticos. De aquí que nuestro interés se centre en habilitar vías para fortalecer los nexos de unión entre las dos representaciones simbólicas más habituales en la conceptualización del Número Racional, en utilizar herramientas que permitan integrar las dos representaciones a través de la explicitación de la estructura polinómica subyacente; en ampliar, en suma, los conocimientos previos de los futuros profesores poniendo de manifiesto que una fracción no sólo hay que concebirla como una entidad global, sino con una estructura polinómica similar a la que subyace en la notación decimal.

## I.4. Componentes generales que caracterizan el problema.

Nuestro trabajo evalúa una propuesta curricular para la formación de Profesores de Primaria, centrada sobre dos sistemas de representación de los números racionales positivos que permiten profundizar en el análisis estructural de este tipo de números y justificar la relación entre ambos sistemas. Estos sistemas, que se estudian detalladamente en el Capítulo III, los denominamos representación polinómica unitaria y representación polinómica decimal. La oportunidad de este trabajo viene determinada, de una parte, por hacer referencia a una parte importante del currículo de las matemáticas escolares y, de otra parte, porque posibilita una mayor comprensión del conjunto numérico considerado.

La presencia de los números racionales en el currículo de matemáticas es una constante que podemos detectar, ininterrumpidamente, en la historia de la enseñanza de las matemáticas en España de los últimos 200 años (Vallejo, 1821; Avendaño, 1859; Llinares y Sánchez, 1988). La importancia de los números racionales dentro del currículo de matemáticas de la Educación Obligatoria es debida a su interés fenomenológico y conceptual (Giménez, 1991; Sowder, 1995). El estudio de los números racionales en Educación Obligatoria permite desarrollar una diversidad de competencias cognitivas en los sujetos en edad escolar (Streefland, 1991; Thompson, 1995); como todo objeto de conocimiento, también plantea problemas de comprensión y aprendizaje (Rico y Saenz, 1982; Kerslake, 1986; Bezuck y Bieck, 1993; Mack, 1993; Kieren, 1993).

El cuerpo ordenado de los números racionales, resultado de la simetrización para la ley producto del dominio de integridad de los números enteros, se presenta en los textos de matemáticas como un conocimiento explícito y bien delimitado, formalmente estructurado, coherente en su fundamentación lógica y necesario para dar solución a determinados problemas numéricos, geométricos y algebraicos (Feferman, 1989, cap. 6). Esta construcción formal sintetiza las diversas conceptualizaciones que, a lo largo del proceso histórico, han surgido sobre los números racionales (Cajori, 1985; Flegg, 1989; Kieren, 1993).

Los diferentes constructos y sus correspondientes sistemas de representación dan expresión a la complejidad que encierra el concepto de número racional (Giménez, 1991; Streefland, 1991; Behr, Harel, Post y Lesh, 1993), así como de la multiplicidad de fenómenos, problemas y situaciones de la vida real que se modelizan mediante este campo numérico (Freudenthal, 1983; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Rico y otros, 1984).

El interés de nuestro trabajo, en cuanto a organización conceptual reside, en primer lugar, en delimitar la potencialidad de los dos sistemas simbólicos considerados para expresar determinados aspectos conceptuales y procedimentales de los números racionales positivos. En segundo lugar, en explicitar aquellos aspectos relevantes de las relaciones y operaciones en el conjunto de dichos números racionales, que se ponen de manifiesto al utilizar los dos sistemas simbólicos propuestos y entre los que cabe citar la manifestación de una estructura polinómica para las fracciones (que facilita la conexión entre las representaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos), o una nueva perspectiva de las relaciones de orden y de la densidad de los números racionales respecto al orden establecido.

### I.4.1. Delimitación curricular.

Resultados de investigaciones recientes han puesto de manifiesto que muchos de los problemas de comprensión sobre números racionales no se superan durante el periodo de la educación obligatoria; de hecho, se localizan igualmente en los profesores de primaria durante el periodo de su formación como docentes (Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Llinares y Sánchez, 1991; Post, Harel, Behr y Lesh, 1988; Sánchez y Llinares, 1992; Sowder, Bezuk y Sowder, 1993)

Como formadores de Maestros de Educación Primaria estamos interesados, con carácter general, en estudiar las dificultades de comprensión que tienen los profesores en formación sobre los distintos constructos que componen el concepto de número racional y también sobre su estructura como sistema, es decir, como conjunto de entes, relaciones y operaciones (Hiebert, 1993). Igualmente, estamos interesados en estudiar alternativas didácticas que sirvan para poner de manifiesto las dificultades detectadas y para ayudar a los profesores en formación a su superación. Con este objetivo se trata de evitar el riesgo de retroalimentar los errores de los escolares como consecuencia de las dificultades de comprensión de sus profesores. Superado este primer nivel se podrá continuar con la formación didáctica de los estudiantes para profesor sobre estas mismas cuestiones (Brown, 1993; Sowder, Philipp, Flores, Schappelle, 1995).

Nuestro problema, por tanto, tiene una delimitación curricular precisa cual es la formación en matemáticas y en educación matemática de los Profesores de Primaria sobre un campo numérico concreto: el conjunto de los Números Racionales. Para abordar este problema nos situamos en la línea de investigación denominada Pensamiento Numérico, que estudia las estructuras numéricas y los sistemas de representación con los que se expresan los conceptos y relaciones de cada una de ellas en el sistema educativo (Castro, 1994; González, 1995; Rico, 1995), y nos proponemos profundizar en los procesos de aprendizaje y comprensión de la estructura de los Números racionales, así cómo de los modos en que los futuros maestros abordan fenómenos, cuestiones y problemas desde su conocimiento de esta estructura numérica.

### I.4.2. Herramientas conceptuales

Situados en esta perspectiva, son herramientas conceptuales importantes las nociones de sistema de representación (Kaput, 1987; Duval, 1993; Rico, Castro y Romero, 1996) y de comprensión del conocimiento matemático (Wittrock, 1990; Hiebert y Carpenter, 1992). Hipótesis importante en los estudios basados sobre la noción de representación es que, para alcanzar la comprensión del concepto que se considera, es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Romero, 1995). Las dificultades de comprensión se detectan en la falta de coordinación entre diferentes sistemas, cuando tratan de expresar los mismos conceptos (Castro, 1994; Duval, 1995).

Los sistemas de representación se han utilizado en el estudio del número racional (Lesh, Post y Behr, 1987) e, igualmente, se ha estudiado la comprensión de los conceptos implicados, en el sentido de incrementar la variedad y consistencia de las redes de conexión entre diversos sistemas de representación (Kaput, 1992). La complejidad de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones también ha recibido la atención de los especialistas en Educación Matemática (Hiebert, 1993). Sin embargo, no conocemos ningún estudio que trate de explorar la complejidad de relaciones entre la notación fraccionaria y la decimal, profundizando en la estructura polinómica de las fracciones.

Y este constituye uno de nuestros centros de interés: construir un modelo de trabajo que permita la caracterización, sintáctica y semántica, de dos sistemas de representación para los Números Racionales positivos, que tienen una estructura polinómica similar a la del sistema de numeración decimal. Desde estos sistemas de representación se revisan las relaciones y operaciones en dicho conjunto numérico y se persigue incrementar la comprensión de las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal.

### I.4.3. Metodología de trabajo

La idea que perseguimos con nuestro trabajo surge de la reflexión sobre la práctica educativa que forma parte de nuestras obligaciones profesionales y con la intencionalidad de mejorar la calidad de la formación de los futuros maestros. Es desde estos parámetros que adoptamos la metodología de trabajo denominada Investigación-Acción como la más adecuada a nuestras necesidades; metodología que se enmarca en el paradigma cualitativo, puesto que acentúa la consideración de la naturaleza socialmente construida de la realidad, la íntima relación entre el investigador y el problema investigado y los condicionantes situacionales que dan forma a la investigación (Denzin y Lincoln, 1994, pág. 4). El estudio con esta metodología se complementa con una entrevista estructurada, realizada con un grupo reducido de sujetos de la investigación. Es así que, metodológicamente, nuestro trabajo se estructura en dos etapas.

En la primera etapa del estudio, la Investigación-Acción nos permite profundizar en la interpretación de los significados que construyen los futuros maestros ante una propuesta curricular, atendiendo a los fenómenos que aparezcan, a su descripción y a la formulación de conjeturas; para ello es esencial arbitrar los medios necesarios para la recogida y análisis de los datos, puesto que las teorías, conceptos y categorías que sugieren los propios datos son las averiguaciones del investigador. (Filstead, 1986).

En nuestro trabajo utilizaremos el carácter recursivo de esta metodología. En esta primera etapa delimitaremos una propuesta curricular sobre los Números Racionales destinada a los estudiantes de maestros y en la que cubriremos las fases de planificación, acción, observación y reflexión.

En una segunda etapa trataremos de profundizar en algunas de las dificultades surgidas durante el desarrollo de la propuesta curricular. Para ello trabajaremos con tres de los estudiantes, con los que llevaremos a cabo una entrevista diseñada para completar la información obtenida en la etapa anterior y confirmar algunos de los resultados en orden a delimitar la proyección que tienen los conocimientos personales de los estudiantes para profesor en la instrucción con escolares.

### I.4.4. Objetivo general

Al conocimiento sobre el conjunto de los Números Racionales se le concede gran importancia en los currícula españoles para las matemáticas escolares; buena parte de la responsabilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje recae en los maestros de Educación Primaria. Por tanto, en la formación de los futuros maestros, es tarea esencial fortalecer sus conocimientos personales sobre este tópico incrementando la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal que, como se ha señalado, son más formales que conceptuales. Por otro lado, la reflexión personal desde sus experiencias como aprendices, permitirá a los estudiantes para maestro revisar sus conocimientos personales sobre la naturaleza de la ciencia matemática, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje; también sobre la comprensión del conocimiento matemático y el papel que juegan en el mismo los modelos y los sistemas de representación.

En la formación de los futuros maestros hay que atender al desarrollo de tareas profesionales relacionadas con la transmisión y aprendizaje de los conocimientos matemáticos. Ahora bien, esta dimensión profesional no es independiente de los conocimientos personales que sobre la materia tenga el estudiante para maestro, por lo que un incremento en la compresión de estos estudiantes sobre los Números Racionales puede proyectarse sobre la práctica docente introduciendo variaciones en sus trabajos profesionales.

Pasamos a enunciar, con carácter global, las metas que se pretenden alcanzar en este trabajo y que hacen referencia a una doble dimensión: la formación personal de los futuros maestros y su proyección en las tareas profesionales:

1. Experimentar con estudiantes de la Diplomatura de Maestro de Educación Primaria una propuesta curricular innovadora que contemple el análisis sintáctico y semántico de dos sistemas simbólicos de representación para los números racionales positivos.
2. Analizar los modos en que un nuevo dominio de los conocimientos sobre Números Racionales afecta a los futuros profesores en las tareas de planificación del proceso de enseñanza para escolares del sistema educativo y sobre el tópico mencionado.

## I.5. Representación y comprensión

Una vez que hemos indicado, de modo general, las intenciones de nuestro trabajo, interesa precisar aquellos términos y conceptos en que se sustenta y fundamenta esta investigación.

### I.5.1. La noción de comprensión y el conocimiento personal.

En los diseños curriculares, y reflejando la inquietud manifestada por la comunidad de estudiosos de la Educación Matemática, se viene manifestando la necesidad de promover el aprendizaje comprensivo de las matemáticas (M.E.C.: 1984, 1985, 1986, 1987; Decreto curricular de Primaria, 1990).

En una aproximación general al término comprensión utilizamos la caracterización que hace Wittrock (1990):

> "*una representación estructural o conceptualmente ordenada, de las relaciones entre las partes de información que se deben aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencias*".

Esta representación estructural de un concepto o constructo teórico perteneciente al conocimiento formal es el producto de un largo proceso temporal (Tall y Winer, 1981). A lo largo de este proceso las experiencias de cada individuo determinan diferentes tipos de estructuraciones a las que denominamos comprensión o conocimiento personal sobre el concepto.

Desde la perspectiva particular de la Educación Matemática asumimos la idea de comprensión de Hiebert y Carpenter (1992):

> "*Las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes*"
> (pág. 67).

En esta caracterización aparecen ideas similares a las de Wittrock, como las de la comprensión como estado mental en evolución o la de conectar la información de que dispone el individuo con la información que recibe. Sin embargo, en la idea de comprensión matemática aparece el término **representación**, que constituye una herramienta de gran utilidad en el terreno cognitivo dentro de la educación matemática,

### I.5.2. Los sistemas de representación

La noción básica de representación expresa que una cosa significa, trata de o se refiere a otra; de modo que en el concepto de representación hay dos entidades relacionadas: el objeto representante (o representación) y el objeto representado. Sobre el uso que vamos a hacer de esta noción en nuestro trabajo hacemos algunas acotaciones:

- Bajo el término representación tienen cabida dos ideas diferenciadas: la representación interna de ideas matemáticas que se ubican en la mente del individuo, por lo que resultan inobservables; y la representación externa que con la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos permite expresar las nociones que el individuo comunica o recibe del exterior.
- Nuestro interés se centra en el estudio de las representaciones externas de los sujetos. Nos proponemos analizar los modos de representación empleados por los estudiantes y los significados que asignan a estas representaciones; de este modo, interpretaremos la comprensión que alcanzan sobre los números racionales.
- Por otra parte la comunidad matemática, en la comunicación y transmisión de ideas, suele identificar cada concepto con una de sus representaciones prioritarias y simplificar las conexiones entre los diversos sistemas de representación, dificultando así la comprensión de los aprendices. De este proceso no suelen ser conscientes los profesores noveles que consideran los modos estandarizados de comunicación matemática como transparentes.
- Enfrentar a los estudiantes para profesor, mediante una serie de tareas, con la complejidad subyacente a los sistemas de representación de los números racionales y de sus conexiones facilita la captación de las dificultades que subyacen al proceso formal de conceptualización y que muestran las representaciones convencionales, así como de las dificultades que surgen en los procesos de aprendizaje y que muestran las representaciones que producen los estudiantes.

Sobre el papel que juegan y la utilidad que tienen las representaciones en la educación matemática se ha creado una abundante documentación, cuya revisión escapa a los propósitos de este trabajo. Pero si que consideramos importante destacar algunos resultados que tienen especial incidencia en esta investigación:

- Los objetos matemáticos no deben confundirse con la representación que se hace de ellos. Aunque las representaciones son indispensables y no pueden suprimirse, lo que importa conceptualmente es el objeto matemático y no sus representaciones, (Duval, 1993, 1995)
- Las representaciones de algo por algo no se presentan de forma aislada, sino que tienen un carácter sistémico (Gunttenplan, 1994, pág. 536). En el caso más concreto de las matemáticas la noción de sistema de representación se hace equivalente con la de un sistema simbólico o sistema de símbolos que se caracterizan por un conjunto de relaciones semánticas y sintácticas.
- No hay representaciones de las ideas matemáticas que tengan carácter universal; cualquiera de ellas destaca algunos aspectos mientras que oscurece otros (Figueras, 1988; Ball, 1993).
- Para alcanzar la comprensión del concepto que se considera, es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Duval, 1993; Romero, 1995).

- Las dificultades de comprensión se detectan en la falta de coordinación entre diferentes sistemas, cuando tratan de expresar los mismos conceptos (Castro, 1994; Duval, 1995).

A la vista de las consideraciones anteriores, nuestra intención de mejorar la comprensión de los futuros profesores sobre el campo de los números racionales -sin la cual se producirán deficiencias en la preparación de sus clases (Brown, 1993)-, se debe orientar en una doble dirección: en la de proporcionar un mejor conocimiento de los diferentes sistemas de representación de estos números (Kieren, 1993; Marshall, 1993), y en la de fortalecer las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal (Owens y Super, 1993).

Es por ello que nuestra investigación se propone instruir a los estudiantes para profesor en dos sistemas simbólicos no utilizados en la práctica escolar, que llamamos *polinómico unitario y polinómico decimal,* puesto que contienen elementos conceptuales y procedimentales de interés para nuestros fines:

- Un mismo sistema simbólico de representación admite diferentes significados del objeto representado. Así, con la notación fraccionaria habitual, a/b, se puede simbolizar una relación entre la parte y el todo, o el cociente de dos números enteros, o una relación funcional, ...
- Desde un significado concreto se potencian o dificultan determinados aspectos del concepto matemático; por ejemplo, el significado de la fracción como relación parte-todo dificulta la comprensión de las fracciones mayores que la unidad, mientras que el significado de la fracción como razón dificulta la comprensión de la suma de fracciones.
- Un sistema de representación destaca u oscurece aspectos de un mismo concepto: interpretadas con significado de cociente, la comparación de las fracciones 3/5 y 4/7 no es inmediato; mientras que sus expresiones polinómicas unitarias 1/2+1/10 y 1/2+ 1/14, son fácilmente comparables.

## I.6. Noción de modelo

La naturaleza de la mente humana permite que pensemos mejor con lo familiar, perceptible y manipulable, que con lo abstracto, no representable y desconocido (Castro, 1994, pág. 13). Resulta, por tanto, justificable que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, y sobre todo en los primeros niveles educativos, los conceptos se presenten asociados a situaciones de la vida real:

> *Es preciso, por tanto, que el currículo refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su proceso histórico como en su apropiación por el individuo. La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad.* (M.E.C., 1990, pág. 31).

En este sentido, la instrucción sobre los conceptos matemáticos está ligada a la noción de **modelo**; noción que, con el significado genérico de "*Réplica a pequeña escala de un determinado sistema*" , está definido en el Vocabulario Científico y Técnico (Real Academia de Ciencias, 1990, pág: 470).

Adaptando esta idea a nuestros intereses, en lo sucesivo nos referiremos al término modelo para designar un material tangible o un conjunto de relaciones en un entorno físico con los cuales se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior, y que permite las acciones de los sujetos. En esta noción de modelo tienen cabida ideas similares que reciben distintas denominaciones: así ocurre, por ejemplo, con los Modelos Concretos de Gagatsis y Patronis (1990), por cuanto sirven para representar ideas matemáticas mediante objetos tridimensionales; o en el caso de las Experiencias Básicas de Lesh et al. (1987, pág 34), puesto que en la noción de modelo se incluyen las manipulaciones de hechos reales y sucesos que sirven como contexto general para resolver situaciones problemáticas.

Desde la posición del escolar, el empleo de modelos tienen gran utilidad en la construcción del conocimiento matemático, por cuanto que:

- permiten la aprehensión sensorial de hechos y relaciones matemáticas mediante la manipulación de objetos físicos o la simulación de acciones;
- facilitan la construcción o interpretación de los sistemas de representación que comunican los resultados producidos al actuar sobre los objetos;
- facilitan la comprensión de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación empleados;
- sirven como apoyo y contraste de la certeza o falsedad de las relaciones simbólicas que se establecen a través de los sistemas de representación;
- facilitan la resolución de situaciones problemáticas cuando éstas se formulan en términos de los objetos del modelo.

De este modo el concepto queda fuertemente vinculado al modelo en que se concibió y persistirá en este forma mientras el estudiante no sustituya la modelización del concepto por otra nueva. De hecho, la mayoría de nuestros estudiantes de Maestros de Educación Primaria, que llevan 12 o más años en el sistema escolar, siguen mencionando las tartas o las barras de helado cuando expresan sus conocimientos personales sobre las fracciones.

Desde la posición del profesor el modelo constituye una herramienta que se proporciona al estudiante con una clara intencionalidad educativa: dotarle de un material concreto y un entorno físico sobre los que pueda actuar y reflexionar para que, mediante esta interacción, avance en la construcción del conocimiento cuyo aprendizaje se promueve.

En consecuencia, la propia intencionalidad del recurso didáctico obliga al profesor a diseñar y establecer el modelo de manera que permita hacer explícitos aquellos aspectos relevantes del concepto matemático que se quieren enseñar;

por lo tanto, el modelo viene condicionado por los conocimientos personales del profesor sobre el concepto matemático objeto de la instrucción.

Esta aseveración puede constatarse en los textos escolares. Los autores de estos textos utilizan distintos modelos para presentar las fracciones con un determinado significado; así hay un modelo para presentar la fracción con significado de partes de la unidad (Gil, Vázquez y Mascaró, 1983), mientras que un modelo distinto permite introducir la fracción con significado de operador producto de operadores (Jiménez y González, 1977), o recurrir a otro modelo para que la fracción aparezca como solución de una ecuación de primer grado con coeficientes naturales (Martínez et al., 1983).

En consecuencia, corresponde al profesor tomar, cuando menos, dos cautelas en la elección del modelo: de una parte, cuáles son los aspectos del concepto que explicita el modelo y cuáles son los que oculta u obstaculiza; y, de otra parte, cómo transmitir al alumno una caracterización correcta del modelo, que destaque los aspectos relevantes de los objetos, la acciones que se pueden realizar y las características del resultado que se han de considerar.

Nos encontramos, por tanto, con un proceso instructivo en el que el modelo juega un papel esencial, tanto para el que enseña como para el que aprende. En consecuencia, para llevar a efecto nuestro trabajo de investigación conviene que analicemos en detalle algunas ideas sobre modelos para la conceptualización de las fracciones.

### 1.6.1. Modelos para dotar de significado a las fracciones.

Dar significado a las fracciones en el mundo físico significa, en primer lugar, dotar de significado a pares de números naturales, lo que exige el trabajo con magnitudes medibles. En consecuencia, los modelos útiles para la instrucción sobre fracciones admiten tres componentes diferenciadas:

- **una magnitud medible**, para que cualquier cantidad de la misma se exprese de forma numérica,
- **unos objetos** en los que resulta perceptible la cantidad considerada de esa magnitud,
- **unas acciones**, que provoquen alteraciones en la cantidad de magnitud expresada en los objetos.

Estos tres elementos caracterizan los modelos para el aprendizaje de los números racionales: es esencial que el modelo exprese alguna magnitud medible puesto que con la instrucción se persigue representar unas relaciones entre cantidades de esa magnitud en términos de una acción. Los objetos resultan imprescindibles por cuanto permiten que, de forma tangible, se disponga de cantidades de magnitud susceptibles de transformaciones. La aparición de los conceptos se producirá como consecuencia de las relaciones que surgen de las acciones que realice el alumno sobre los objetos y que provoquen modificaciones de las cantidades.

En una revisión de manuales escolares de Educación General Básica, hemos detectado los valores preponderantes que se otorgan a cada una de estas tres componentes del modelo. Así, observamos que las magnitudes con las que, de manera más habitual, se trabaja son las de superficie, longitud, masa, volumen, capacidad, tiempo, dinero y cardinalidad (colecciones de objetos de igual forma e "indivisibles" para que sean medibles con la medida de contar).

Las acciones que se proponen son muy variadas, por lo que consideramos conveniente proceder a clasificarlas para todas las situaciones que aparecen asociadas a diferentes significados de la fracción:

Medir: todas las acciones en las que hay que comparar una cierta cantidad de magnitud con una unidad.

Fraccionar: acciones en las que un objeto se divide en partes iguales, y aparece asociada a verbos como doblar, llevar, separar, sombrear, señalar, destacar, ...

Transformar: acciones necesarias para que una cantidad de magnitud se convierta en otra diferente.

Comparar: acciones que permitan relacionar dos cantidades de una misma magnitud y que pueden presentarse haciendo mezclas, trueques, lecturas de planos o mapas, ...

Repartir: acciones necesarias para separar una cantidad de magnitud en distintas partes.

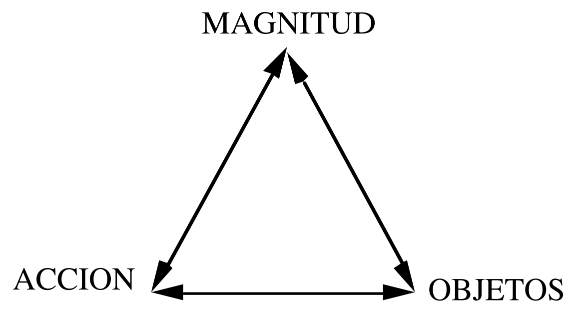
Además de estas acciones que aparecen en la introducción del concepto de fracción, estos manuales escolares utilizan otras acciones como ordenar, comparar, unir, multiplicar, .., con las que se conceptualizan las relaciones y operaciones entre fracciones.

En cuanto a los objetos que se utilizan en los manuales escolares la gama es muy amplia, pero todos son cercanos al mundo del alumno y contienen una cantidad de magnitud reconocible; entre ellos, tienen mayor presencia las figuras regulares planas y las colecciones de objetos discretos.

Hemos de hacer notar que aunque venimos utilizando en exclusiva el término modelo, en el proceso instructivo cabría hacer una distinción entre **modelo físico** o modelo conformado en el mundo de los objetos reales y **modelo útil**, que se corresponderia con el sentido que Lesh et al. (1987) otorgan a los que llaman Modelos Manipulativos. El modelo útil es aquel que se configura a partir del modelo físico, sustituyendo los objetos de la realidad por otros objetos de más sencilla manipulación y en los son reconocibles las características esenciales del modelo original. Por ejemplo, entendemos como modelo útil el que los objetos son círculos de papel (o dibujos de círculos) que sustituyen a los objetos reales llamados tartas. Mientras que no se mencione explícitamente lo contrario debe entenderse que nuestras reflexiones están centradas sobre distintas variantes del modelo útil.

### I.6.2. Relación entre el modelo y el significado de la fracción.

Nuestra idea de modelo para la noción de fracción queda esquematizada mediante un triángulo equilátero, en cuyos vértices se ubican cada una de las componentes del modelo. Este esquema expresa que las tres componentes del modelo tienen la misma importancia. Para indicar que estas componentes no se consideran aisladas sino que cada una influye y está condicionada por las otras dos hemos señalado los lados con una doble flecha. En tanto que hemos visto que cada componente admite valores diferentes asumimos que el modelo para dotar de significado al concepto de fracción es un sistema de tres variables interrelacionadas.




Dando valores a los vértices del triángulo se pueden construir una multiplicidad de triángulos o modelos particulares. Ahora bien, desde un modelo concreto se favorece la conceptualización de un determinado significado de fracción (o puede que no se produzca ningún significado). Los siguientes ejemplos son ilustrativos en este sentido; a través de los mismos puede observarse cómo las variaciones en una sola de las componentes produce resultados muy dispares.

En estos ejemplos usaremos una terna: (magnitud, acción, objetos) para referirnos a un modelo particular:

1. Modelos que se diferencian en la magnitud
   a) En el modelo (superficie, fraccionar, tartas) la fracción 2/5 se contextualizaria indicando que hay que cortar 2/5 de la tarta, lo que daría significado a la fracción como relación entre la unidad y una parte de ella.
   En el modelo (peso, fraccionar, tartas) se contextualizaría indicando que hay que tomar 2/5 del peso de la tarta; da significado a la fracción como relación entre una unidad y una parte de ella, pero la percepción de la relación se sostiene sobre un instrumento auxiliar de medida, la balanza.
   b) El modelo (superficie, fraccionar, tartas) se ha visto en el apartado anterior que posibilita una concepción de la fracción como relación parte-todo, sin embargo el modelo (peso, fraccionar, tartas) obstaculiza la comprensión de la fracción por las dificultades de medir cantidades de dicha magnitud.

2. Modelos que se diferencian en la acción
   a) El modelo (superficie, fraccionar, tartas) facilita el significado de fracción como relación parte-todo; mientras que en el modelo (superficie, repartir, tartas) la fracción a/b indica la cantidad de magnitud que corresponde a cada una de las partes que resultan de repartir a tartas en b grupos iguales,

la fracción tiene el significado de cociente.

b) Si las acciones admiten diferentes técnicas para llevarlas a cabo también se producen diferentes significados de la fracción. Por ejemplo, desde el modelo (superficie, repartir, tartas) se alcanzan resultados como los siguientes:

   i. Hacer el reparto de forma igualitaria en una sola fase produce que la fracción se conceptualice como recuento de unidades fraccionarias de igual cantidad de magnitud $a/b = 1/b + 1/b + .... = a \times 1/b$

   ii. Si el reparto es igualitario pero se realiza en distintas fases la fracción, como ocurre con las fracciones egipcias, se convierte en suma de partes alícuotas de la unidad de tamaños diferentes $a/b = 1/n + 1/m + ..1/p$

   iii. Si el reparto no es igualitario y, por ejemplo, se exigen diferencias multiplicativas, resultará que a partir de los números enteros a y b aparecen dos fracciones diferentes, y no una sola, como en el caso del reparto igualitario: $\frac{a}{a+b}$ y $\frac{b}{a+b}$

3. Modelos que se diferencian en los objetos

   a) En el modelo (superficie, fraccionar, tartas) se modifica la variable objetos y se crea el modelo (superficie, fraccionar, bicicletas). El alumno encontrará obstáculos para atender a la igualdad de partes en que se sustenta el fraccionamiento.

4. Modelos que se diferencian en la magnitud, la acción y los objetos

   El modelo (dinero, calcular, precios) la fracción 2/5 nos llevaría a conocer el coste de 2/5 del precio de un objeto, es decir la fracción actuaría como función racional sobre el precio de un objeto, por ejemplo el precio de los 2/5 de un tarta; la fracción tiene aquí significado de operador.

Sirvan estos ejemplos para poner de manifiesto que existe una relación entre el modelo utilizado y la noción de fracción que se promueve en quien lo utiliza. El modelo propuesto en la instrucción refleja los conocimientos personales de quien lo propone y delimita los resultados instruccionales que se alcanzarán. Ahora bien, ninguno de los modelos abarca la totalidad de significados, relaciones y propiedades del concepto; en consecuencia, deberemos establecer, para cada uno de los modelos utilizados, aquellos aspectos del concepto que se recogen, así como aquellos otros aspectos del concepto que son ignorados u obstaculizados por el propio modelo.

### 1.6.3. Modelos utilizados en los manuales escolares

En orden a delimitar los modelos de aprendizaje sobre los que han forjado, presumiblemente, sus conocimientos de los Números Racionales los futuros profesores que son objeto de la experimentación de este trabajo, hemos revisado manuales escolares de dos lineas editoriales de muy amplia difusión[3].

En los textos de ambas lineas editoriales, correspondientes a los cursos 4º y 5º de E.G.B. (9-11 años), observamos una misma organización del contenido: lecciones cortas sobre el concepto de fracción, sobre el concepto de número decimal, y sobre operaciones con números decimales. A su vez, cada lección se subdivide en pequeños apartados, que contemplan un aspecto parcial del enunciado de la lección, y se organiza de manera que aparezcan tanto aspectos teóricos como prácticos. Las lecciones finalizan con una propuesta de ejercicios y problemas similares a los que se han propuesto en los distintos apartados.

También hay coincidencia en la secuenciación de los contenidos: concepto de fracción, operaciones con fracciones (en 5º curso), fracciones decimales, números decimales y operaciones con números decimales.

Sin embargo, la presentación de los contenidos ofrece diferencias significativas en las dos líneas editoriales:

• Los textos del Equipo Signo se pueden caracterizar por la presencia de un modelo en cada uno de los diferentes apartados de cada lección. Estos modelos justifican el discurso que conduce a la simbolización de una cantidad o al establecimiento de relaciones entre símbolos. Los modelos utilizados en cada uno de los apartados tiene entidad propia y no guardan relación con los apartados que le preceden o los que le siguen, de modo que cada pequeña parcela del conocimiento surge en un modelo particular, diferente de los modelos utilizados en otros apartados; los modelos difieren en la magnitud, o en la acción o en los objetos.

En consecuencia el alumno no dispone de un modelo estable para la conceptualización de los números racionales, sino que que cada pequeña parcela de conocimiento se construye a partir de un modelo diferente y sin que se establezcan conexiones entre modelos.

• En los textos de Ramos et al. se hace una referencia a un modelo al inicio de cada lección y sobre el mismo ya no se vuelve en ninguno de los apartados; los modelos introductorios hacen referencia a objetos reales y usan la acción de comparar (sugieren la noción de fracción como razón), mientras que en los diferentes apartados los objetos son figuras regulares, generalmente rectángulos o círculos, las acciones utilizadas son de fraccionar (sugieren la noción de fracción como relación parte-todo) y la magnitud es la superficie, aunque no se menciona explícitamente. Por ostensión se muestran al alumno los resultados, escritos de forma simbólica, que corresponden al título del apartado, seguidamente se destacan mediante un cuadro los aspectos conceptuales que son importantes y, por último, se proponen algunos ejercicios de consolidación.

Como resultado de la instrucción cabe suponer que el alumno construye su conocimiento sobre un modelo principal: (superficie, fraccionar, figuras

[3] Los textos que se han consultado son los siguientes:
Gómez, M. A. y Muñoz, J. A., (1987); Gil , J. y García, P. (1988); Muñoz, J. A. y Palomares, D.,(1987); Ramos, A. (director), Gil , J. y García, P., (1988); Lamadrid, C. Et al. (1987); Ramos, A. (director), Gil, J.; Vázquez, C. y Mascaró, J.,(1987).

regulares), aunque este modelo difiera sustancialmente del que sirvió para introducir todos los conceptos de cada lección.

En los manuales, de ambas lineas editoriales, correspondientes a 6º curso de E.G.B. (11-12 años), hay una preocupación por formalizar la estructura algebraica de $Q^+$, que se traduce en una presentación más abstracta de los conocimientos, aunque la secuenciación de los mismos no varía con respecto a los cursos cuarto y quinto de E.G.B. También se introducen nuevos significados de la fracción (medida y operador), así como la potenciación de fracciones.

• En los textos del Equipo Signo hay una pequeña historia introductoria a cada lección y que sirve para anticipar al alumno las técnicas que podrá aplicar al término de dicha lección. Esta historia no introduce modelo alguno, ni se toma en consideración a lo largo de la lección; simplemente algunos de los enunciados de los problemas del final de la lección hacen referencia a dicha historia. En el desarrollo de la lección aparece un texto que se justifica, en algunos casos, con figuras geométricas sombreadas, y que desaparecen al avanzar en la formalización. En las lecciones sobre los números decimales no se menciona ningún modelo y desaparecen los apoyos gráficos.

Puesto que en este curso se prima el razonamiento abstracto, el estudiante que necesite trabajar con algún modelo deberá construirlo en las condiciones en las que lo hizo en los dos cursos anteriores.

• En los textos de Ramos et al. desaparecen los modelos introductorios de cada lección y se mantienen las representaciones gráficas en cada uno de los apartados de las lecciones.

Este curso se siguen utilizando los modelos de cursos anteriores: figuras geométricas planas como objetos, la superficie como magnitud y la acción de fraccionar.

El estudio de los números racionales se completa en 8º de E.G.B. (13-14 años). Los textos de estas editoriales centran el contenido de este tópico en la construcción del cuerpo Q, ampliando los contenidos de 6º curso con la presencia de los números negativos. El tratamiento formalizado de los contenidos provoca la ausencia de modelos y acentúa la escasa presencia de apoyos gráficos.

Del análisis de estos textos escolares podemos caracterizar un proceso instructivo de los números racionales en E.G.B. con las siguientes peculiaridades:

- No hay un modelo estable en el que se sustenten las dos representaciones simbólicas de los números racionales: las notaciones fraccionaria y decimal
- Los modelos utilizados sirven para la formación de conceptos, pero no se emplean para fomentar el trabajo exploratorio o confirmatorio, puesto que los conocimientos se presentan por ostensión.
- El uso de modelos cuyos objetos son figuras regulares planas, la magnitud la superficie y la acción el fraccionamiento, potencia en los alumnos que el

significado dominante de la noción de fracción sea la relación parte-todo.

- Aun cuando aparecen modelos para presentar otros significados de la fracción, como el de operador o el de cociente, no se establecen relaciones de éstos significados con el significado dominante de relación parte-todo.
- Hay una escasa preocupación por presentar modelos que sostengan la noción de número decimal. La intencionalidad educativa parece centrarse en la consolidación de la técnica de extensión del sistema de numeración decimal y en establecer similitudes con las técnicas algorítmicas estudiadas para números naturales.
- En el trabajo con fracciones no es usual considerar el proceso de medida, aunque sí se hacen referencias y se utiliza en la instrucción sobre la notación decimal.

### I.6.4. Modelos y sistemas de representación

Las matemáticas son el estudio de las estructuras y, en particular, el estudio de estructuras numéricas, entendiendo éstas como conjunto de entes numéricos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones y de unas relaciones.

Las ideas que determinan estas estructuras numéricas surgen del trabajo con modelos, para dar respuesta a situaciones problemáticas cotidianas; situaciones que el escolar resuelve manipulando los objetos, observando el resultado de su acción y describiendo lo acontecido. De este modo, las ideas que aparecen, y que ya no se refieren a los propios objetos, se conforman como entidades abstractas sostenidas por un sistema simbólico con el que se formulan enunciados y demostraciones. Por tanto, y de acuerdo con Lesh (1997), el aprendizaje de las estructuras matemáticas no solamente consiste en la manipulación de símbolos, implica además interpretar situaciones matemáticamente; también implica cuantificar, visualizar o coordinar sistemas estructuralmente interesantes; y, por supuesto, implica utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas, gráficos u otros sistemas de representación para desarrollar descripciones.

En tanto en cuanto las actuaciones sobre un modelo van asociadas a la descripción de lo observado, entendemos que los medios de expresión que se utilizan están, al menos en sus inicios, fuertemente vinculados al modelo en que se trabaja. Y en la medida en que esos medios de expresión adquieren características de generalidad y universalidad tienden a un mayor nivel de abstracción, a la vez que definen unas relaciones sintácticas y semánticas más exigentes, como se pone de manifiesto en los trabajos de Ifrah (1987) sobre la evolución histórica de los sistemas de numeración.

Surge así la noción de sistema de representación como el modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados (Castro, Rico, Romero, 1997). Es más, entendemos que el uso y gestión de sistemas de representación desempeña un papel central en la comprensión de las ideas matemáticas, puesto que un análisis profundo de las características sintácticas y semánticas que subyacen en el sistema de representación utilizado permitirá la comprensión de las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos.

Tanto las ideas matemáticas del individuo como los sistemas de representación asociados interactuan, son inestables y evolucionan constantemente (Lesh, 1997), y esto permite que los conocimientos personales del individuo incrementen su comprensión del concepto. Puesto que la complejidad de cada concepto matemático no se agota en uno sólo de los sistemas de representación, interesa conocer qué propiedades se ponen de manifiesto con uno determinado de esos sistemas, así como qué propiedades se oscurecen o se dificultan con dicho sistema. El uso coordinado de dos a más sistemas de representación facilitará al alumno la plena compresión de las ideas matemáticas.

## I.7. Revisión bibliográfica y antecedentes

Nuestro trabajo se orienta hacia el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los número racionales entre alumnos universitarios matriculados en la Diplomatura de Maestro.

Una primera tarea era la de disponer de documentación que nos diese a conocer el estado de la cuestión y nos informase sobre los resultados de trabajos con características similares al que nos ocupa. Para ello, se hizo una revisión de artículos publicados en las siguientes revistas:

Journal for Research in Mathematics Education (desde 1984),
Recherches en Didactiques des Mathématiques (desde 1990);
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (desde 1988);
Educational Studies in Mathematics (desde 1988);
Arithmetic Teacher (desde 1986);
Mathematics Teacher (desde 1986);
Teaching Children Mathematics (completa);
Mathematics Teaching in the Middle School (completa);
Enseñanza de las Ciencias (completa);
Revista Interuniversitaria (completa); Suma (completa)
Uno (completa).

Esta revisión se cerró el 1 de febrero de 1.998.

También realizamos una búsqueda en distintas bases de datos para completar nuestra información de los antecedentes sobre el tema. En concreto se consultaron las bases internacionales ERIC, YCIT y MATHDI, además de la española ISOC. Realizamos dos indagaciones diferentes:

En la primera se localizaron publicaciones que contuviesen los descriptores: *aprendizaje, enseñanza, concepciones, errores, fracciones ordinarias, fracciones decimales, enseñanza primaria y enseñanza secundaria*. Además, se puso la limitación de que dichas publicaciones no fuesen anteriores al año 1987. Se obtuvieron 134 reseñas.

La segunda búsqueda se centró en aquellas publicaciones en las que figurasen los descriptores: *concepciones, creencias, estudiantes para profesores, profesores en ejercicio, enseñanza primaria y enseñanza secundaria*. La limitación temporal también se fijo en los últimos 10 años. Las reseñas obtenidas fueron 83.

En los apartados siguientes reseñamos aquellos contenidos de los documentos que aportan información relevante para nuestro trabajo.

**I.7.1. Sobre concepciones y errores de los escolares**

Las documentos analizados en torno a las concepciones y errores sobre los Números Racionales proporcionan, fundamentalmente, información sobre trabajos con escolares de enseñanza primaria, lo que indica que las preocupaciones de los investigadores se centran en analizar los fenómenos de enseñanza-aprendizaje en el entorno en el que se produce la instrucción. Seguidamente sintetizamos los resultados encontrados que interesan a nuestro trabajo:

- Existe desconexión entre los distintos significados de fracción; esta desconexión se aprecia tanto en intervenciones individuales como en trabajos colectivos. El significado de la fracción depende de la clase de problema y de la forma de presentación del mismo; esta diversidad no crea conflictos en la mente del alumno pues asignan a los problemas un estatus genérico de "matemáticas". (Haseman, 1987)
- Entre los escolares no hay un significado predominante de fracción; así para un grupo de investigadores el sentido prioritario de la fracción es el de la relación parte-todo, en contextos discretos y continuos; mientras que otro grupo de investigadores identificó ideas de razón y proporción como constructos de fracción prioritarios en los jóvenes (Pitkethly y Hunting, 1996).
- Las fracciones decimales tienen aspecto discreto al considerar numerador y denominador como entes numéricos diferenciados, pero tienen aspecto continuo al considerar la fracción como un solo ente numérico, y es este aspecto continuo de los decimales el que resulta de difícil comprensión para los escolares (Wearne, Hiebert y Taber, 1991).
- Las notaciones fraccionaria y decimal son sistemas simbólicos paralelos que representan los mismos conceptos; para el alumno es una idea difícil de asimilar el que cualquier concepto, especialmente un número, pueda tener más de un símbolo (Owens y Super, 1993).
- La mayoría de los estudiantes no establecen conexiones entre el conocimiento conceptual que tienen de los números racionales y los procedimientos que utilizan en la manipulación de símbolos, sobre todo con las expresiones decimales (Hiebert y Wearne, 1986).

- Los alumnos generalizan el significado de las representaciones simbólicas para números naturales a fracciones, y viceversa (Marck, 1995).
- El orden de los números naturales interfiere el orden de las fracciones decimales, (Resnick, et al, 1989).
- Los errores en el orden de las expresiones decimales están asociados a la aparente simetría alrededor de la coma decimal y las dificultades de distinción de los nombres de los números naturales y decimales; estas dificultades provocan la alta tendencia de los niños a aplicar reglas de los números naturales para comparar las fracciones decimales, dando lugar a técnicas de comparación como la regla del número entero, la regla de la fracción o la regla del cero, (Owens y Super, 1993)

Estos resultados reflejan las principales dificultades que los escolares encuentran en el aprendizaje de los números racionales; muchas de estas dificultades tienen un origen epistemológico, pero también los conocimientos personales de los estudiantes obstaculizan la comprensión de algunos aspectos de los números racionales.

**I.7.2. Sobre las propuestas de enseñanza.**

Desde la perspectiva docente se constata que la instrucción tradicional sobre fracciones es altamente vulnerable a la crítica bajo distintos ángulos (Groff, 1996), y esto provoca una multiplicidad de propuestas instruccionales que ofrecen diferentes perspectivas para abordar el proceso instructivo:

- Hay documentos que contienen recomendaciones justificadas para el diseño de la secuencia instructiva, como las de prestar atención al conocimiento informal de los niños (Kieren, 1993; Marck, 1993), o las de potenciar las experiencias concretas para adquirir y representar los conceptos abstractos (Ott, et al. 1991).
- Existen discrepancias sobre el tipo de magnitudes con las que mejor introducir las fracciones: mientras que en la escuela elemental el conocimiento de fracciones basado en cantidades discretas puede tener ciertas ventajas sobre el conocimiento de fracciones basado en cantidades continuas (Hunting y Korbosky, 1990), lo cierto es que los textos escolares presentan las fracciones, de forma mayoritaria, utilizando representaciones pictóricas sobre cantidades continuas (Dorgan, 1994).
- En las propuestas didácticas de carácter general se potencian aspectos estructurales muy diferenciados del conjunto de los Números Racionales. Así, por ejemplo, en las propuestas de Brousseau y Brousseau (1987), Centeno (1988), Brousseau (1993), se priorizan los aspectos algebraicos, mientras que en los trabajos de Giménez (1991) se consideran prioritarios los aspectos topológicos.
- En las propuestas didácticas parciales los autores priorizan uno de los distintos significados de la fracción o de las expresiones decimales. Así, para el caso de la fracción, la propuesta de Streefland (1991) potencia el significado de la fracción como cociente y en los trabajos de Dienes (1972) se prioriza el

significado de la fracción como operador. En el caso de las expresiones decimales observamos que en la propuesta de Maurin y Johsua (1993) se introducen los decimales como medidas de una misma cantidad de medida expresadas respecto a diferentes unidades; en la propuesta de Brousseau y Brousseau (1987) se prioriza del número decimal a partir de la estructura polinómica subyacente en el sistema de numeración.

- Hay otras propuestas que abordan distintos aspectos del conjunto de los Números Racionales y los modelizan con diferentes soportes materiales: establecer conexiones entre lenguaje oral, escrito, pictórico y simbólico utilizando modelos de bloques (Caldwell, 1995); conectar los conceptos decimales y fraccionarios utilizando la recta numérica, (Thompson y Walker, 1996); conceptualizar la multiplicación de fracciones con el modelo de área (extendiendo al concepto de multiplicación de números naturales), a partir del doblado de papel (Sinicrope, 1992); utilizar cuentas de supermercado para afrontar la estructura multiplicativa de los decimales y la razón entre cantidades numéricas (Basso y Bonotto,1996); ....
- Finalmente, dejamos constancia de aquellos documentos que ofrecen perspectivas no convencionales sobre aspectos parciales del conjunto de los Números Racionales: propuestas de trabajo para los escolares a partir de ideas matemáticas del antiguo Egipto contenidas en el Papiro de Rind (Michalowicz, 1996); ejemplos para poner de manifiesto -desde una aproximación intuitiva como razón, concentración y distancia- de las condiciones en que es aplicable la regla de "sumar los numeradores y sumar los denominadores" (Howard, 1991); y algunos otros.

De la lectura de los documentos mencionados se deduce que el tópico de los Números Racionales también presenta grandes dificultades desde una perspectiva docente. Todo ello se traduce en la existencia de una multiplicidad de enfoques para abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los Números Racionales, cuya propia existencia da muestras de que ninguna de ellos resulta plenamente eficaz para la instrucción.

Resaltamos algunos hechos que se constatan en estos trabajos: la preocupación que tienen los autores por ofrecer modelos físicos no está acompaña de un análisis previo sobre las posibilidades y obstáculos de dicho modelo; los sistemas de representación se presentan desligados del modelo en el que surgen y sin que sobre los mismos se analicen sus características sintácticas y semánticas

### I.7.3. Conocimientos, creencias y concepciones de los profesores en ejercicio y en formación.

La documentación que se ha estudiado puede agruparse en cuatro apartados:

1. Estudios acerca de las creencias y concepciones de los estudiantes para

profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, cuyos resultados más sobresalientes se reseñan a continuación:

- La calidad de la enseñanza de las matemáticas está relacionada con el éxito de los estudiantes, con los métodos de enseñanza y con las creencias del estudiante sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje (Flores y Godino, 1995; Flores, 1995; Blanco, 1992; Rico, 1994).
- La visión de las matemáticas como ciencia aplicada a la resolución de problemas es menos adecuada para la enseñanza que la visión de las matemáticas como un proceso de construcción del conocimiento mediante la resolución de problemas. (Erikson, 1993).

2. Estudios sobre el conocimiento personal de los futuros maestros sobre los Números Racionales.

A partir de uno de los capítulos que conforman el excelente trabajo de revisión bibliográfica elaborado por García Blanco (1997), reseñamos los resultados de mayor interés para nuestra investigación:

- muchos de los futuros maestros tienen dificultades en resolver las cuestiones y problemas planteados sobre números racionales y, en algunos casos, aunque las respuestas eran correctas, las justificaciones sobre el procedimiento empleado eran difícilmente aceptables;
- los conocimientos personales sobre los números racionales de los futuros profesores, (construidos a través de sus experiencias como alumnos universitarios y preuniversitarios), tienden a estar limitadas al uso de reglas;
- entre los futuros maestros existe una fuerte preponderancia de la noción de fracción como relación parte-todo;
- los estudiantes para maestro tienen mayores dificultades en las tareas con fracciones mayores que la unidad y en tareas que exijan la identificación de la unidad;
- los futuros profesores tienen un conocimiento simbólico y algorítmico de las fracciones bastante apropiado, sin embargo no parecen tener conexiones entre ellos.

3.- Documentos sobre las opiniones de profesionales en ejercicio acerca de su experiencia en las aulas. De los trabajos de Gairín (1987), I.C.M.I. (1987), Llinares-Sánchez (1990), Vidal-Gigante (1989) y Llinares (1990) entresacamos aquellos aspectos que nos parecen más relevantes:

- las creencias de los profesores sobre el papel de las matemáticas condicionan la enseñanza de las mismas;
- el género de los profesores y la importancia que conceden al aprendizaje de las matemáticas marcan la preferencia por la enseñanza de esta materia;
- los profesores de matemáticas españoles conceden a las matemáticas un carácter fundamentalmente formativo;
- en opinión de los profesores, la utilidad de las matemáticas y la exigencia de razonamiento lógico son las características primordiales que conceden sus

alumnos a esta disciplina;
- no parece que exista una dependencia entre la metodología utilizada y las actitudes hacia las matemáticas promovidas en los escolares;
- la formación de los escolares ya no demanda que se conceda tanta importancia a las destrezas específicas (básicamente aritméticas), ahora se precisa más la percepción de ideas y conceptos matemáticos más generalizados.

4. Incluimos en este apartado aquellos documentos que contienen recomendaciones para la elaboración de programas de formación inicial del profesorado. Aun cuando no es un aspecto que incida directamente en el tema de nuestro trabajo, sí que ofrecen ideas útiles para elaborar nuestra propuesta didáctica. Las principales ideas detectadas son:
- reflexionar sobre la coherencia de los programas, incorporando los resultados de investigaciones recientes y atendiendo a la presencia de nuevas tecnológicas (Llinares, 1993; Sánchez, 1995; Howson y Wilson, 1991);
- proponer tareas profesionales como evaluación de pruebas, preparación de actividades, selección de textos, elección de materiales, diseño de unidades, detección de errores y concepciones, .... (Chappell y Thompson, 1994);
- prestar atención a estrategias metodológicas sobre gestión de la clase, sobre relaciones interpersonales, sobre motivación para el aprendizaje y sobre la comunicación en matemáticas (Day, 1996).

### I.7.4. Conclusiones de la revisión de documentos

La revisión de los documentos reseñados nos lleva a formular una pregunta mas precisa acerca de los conocimientos personales de los maestros en formación: *¿de qué modo los futuros maestros pueden alcanzar un mayor grado de comprensión sobre el conjunto de los Números Racionales?* La respuesta será útil para tomar una serie de decisiones que garanticen la sólida formación inicial de los profesores puesto que el conocimiento de la materia es uno de los factores de mayor influencia sobre lo que hacen en las clases y, a la larga, sobre lo que los escolares aprenden (Fennema y Franke, 1992).

Un primer avance de respuesta permite considerar que los estudiantes para maestros no son legos en la materia sino que, como consecuencia de su dilatada trayectoria escolar, disponen de unos conocimientos personales sobre este tópico matemático que están firmemente asentados. Por tanto, reformulamos la pregunta: *¿de qué modo se pueden modificar los conocimientos personales de los estudiantes para profesores?*

Pensamos que tal modificación (cuando sea necesaria) no se consigue desde una presentación formal de la materia, ni desde el trabajo algorítmico con números, pues ello no anima a los estudiantes a preocuparse de la reconstrucción de su conocimientos personales (Pinto y Tall, citado por García Blanco, 1997). Hay que reconstruir el conocimiento personal desde nuevas experiencias (Watson,1995); experiencias que han de contemplar la exploración sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos que se han adquirido y la reflexión posterior sobre la planificación de la instrucción (Simon, 1992).

Este trabajo quiere aproximar una respuesta en este sentido ofreciendo una secuencia de enseñanza para maestros de Educación Primaria que incremente su comprensión de los Números Racionales. Desde la reflexión sobre los conocimientos adquiridos, estos estudiantes estarán en disposición de aplicar los resultados observados al aprendizaje de los escolares, de reflexionar sobre la planificación de la instrucción en matemáticas y de analizar los aspectos de la enseñanza relacionados con la interacción individual y en grupo.

## I.8. El contexto de la investigación y sus agentes.

En este trabajo estamos interesados en hacer indagaciones con estudiantes para Maestro de Educación Primaria en una doble vertiente: una, de tipo formativo, es la de observar si la implementación de una propuesta didáctica les permite fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal del Número Racional y otra, de tipo profesional, es la de observar cómo estos futuros maestros proyectan en sus actuaciones como profesionales la reelaboración de su conocimiento personal. El resultado de esta investigación será útil para diseñar un plan de formación de maestros que promueva el incremento de sus conocimientos personales sobre matemáticas y, en consecuencia, mejore la formación de los escolares -una comprensión débil de las matemáticas por parte de los profesores puede producir una enseñanza ineficaz (Boyd, 1992),

Para la consecución de nuestros propósitos esta investigación, que enfoca la comprensión de unos determinados estudiantes, se debe diseñar de manera que proporcione un análisis detallado de cómo interaccionan los elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje (Hiebert y Carpenter, 1992). Consecuentemente, en este trabajo indagatorio se aborda la elaboración de una propuesta didáctica, su posterior implementación en un grupo natural de estudiantes para Maestro de Educación Primaria, el análisis posterior de la información obtenida y una evaluación final de la propuesta implementada. Así se completa una Primera Etapa de formación matemática de los futuros maestros.

Con ese fin se contempla, en primer lugar, una revisión bibliográfica. La documentación estudiada ha permitido que el investigador elabore esta propuesta desde una perspectiva multidimensional: las características matemáticas del conjunto de los Números Racionales; los obstáculos y dificultades que condicionan el aprendizaje de este tópico; las peculiaridades de la instrucción que sobre el tópico mencionado recibieron los estudiantes para maestros en su etapa de enseñanza obligatoria; los conocimientos personales que tienen los futuros maestros acerca de este conjunto numérico; y las concepciones y errores más frecuentes que se han detectado, tanto entre escolares como entre los futuros profesores.

Asimismo se contempla, desde el punto de vista de la investigación, que es ineludible observar la construcción del conocimiento en los entornos en que se produce y a los que tiene acceso el investigador (Resnick et al., 1989, pág 11). Por ello, en esta Primera Etapa de nuestro trabajo concedemos prioridad al aula como espacio natural en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el que se contempla toda la riqueza y multiplicidad de las variables que lo conforman. Queda así marcado como objetivo prioritario estudiar el proceso constructivo de unos estudiantes para maestros a través de dos sistemas de representación simbólicos de los Números Racionales en la situación escolar que dicho proceso tiene lugar. Pensamos que este enfoque permite, desde una dimensión social, una mayor aproximación e integración entre la teoría y la práctica (Bauersfeld, 1994, pág. 134); aunque somos también conscientes de que abordar el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el contexto en que se producen es compleja y problemática.

En tercer lugar, y atendiendo a las recientes investigaciones sobre psicología del aprendizaje, se contempla situar al estudiante para maestro como agente principal en la construcción de sus conocimientos. Esto supone utilizar estrategias metodológicas en las que se prioricen los trabajos de estos estudiantes: "*Las presentaciones claras por si mismas son inadecuadas para sustituir los errores por ideas claras. Lo que los estudiantes construyen por si mismos, aunque pueda ser inadecuado, está con frecuencia lo suficientemente arraigado como para no ser erradicado con una explicación seguida de unos pocos ejercicios*" (National Research Council, 1989, pág. 60).

Estas producciones de los futuros maestros, junto a otras informaciones, nos permitirán observar cómo los estudiantes adquieren y organizan los conocimientos y cómo esa organización se modifica con el tiempo y con las experiencias del que aprende (Resnick y Ford, 1991; Coob, 1987; Brousseau et al., 1986); y también nos permitirán caracterizar sus concepciones y afrontar la superación de sus errores (Radatz, 1980; Blando et al. 1989; Movshovitz-Hardar et al, 1987).

Igualmente, en esta Primera Etapa, se contempla la posición del investigador a lo largo del proceso. En este trabajo el investigador se sitúa como miembro pleno de la situación que estudia, pues es el investigador el que asume el trabajo de campo como profesor responsable de la asignatura *El currículum de matemáticas en Educación Primaria*, que tiene carácter de asignatura obligatoria para los estudiantes de la Diplomatura de Maestro, en la especialidad de Educación Primaria, en la Escuela Universitaria de Formación de Profesorado de E.G.B. de Zaragoza.

Esta posición del investigador, que aparece caracterizada en la tipología de Adler y Adler (1994), se ha adoptado por los motivos que a continuación se señalan:

- Nuestro interés investigador se centra en indagar las posibilidades y dificultades que concurren al introducir variaciones en el tratamiento curricular habitual sobre los Números Racionales. Esta indagación se realiza sobre el grupo natural de estudiantes matriculados en la mencionada asignatura y de la que es responsable el investigador; por tanto, la organización docente plantea dificultades para que la docencia sea asumida por otro profesor.

En consecuencia, debemos adoptar la posición de investigador como miembro pleno de la situación estudiada, y no podemos adoptar ni el papel de investigador como participante activo, ni el del investigador como miembro periférico, que son las otras posibilidades que aparecen en la tipología de Adler y Adler.

- Venimos manifestando la importancia que concedemos al estudio de la actividad constructiva del conocimiento de los estudiantes para maestros en el contexto en que ésta se produce. Es por ello que consideramos necesaria nuestra presencia en el aula o espacio natural de la investigación que realizamos.
- La puesta en práctica y desarrollo de nuestra propuesta instruccional en relación directa con los alumnos presenta múltiples ventajas, puesto que a través de la interacción personal resulta más fácil y enriquecedor el proceso de recogida de información y, en consecuencia, disponer de datos más significativos para la evaluación de los resultados. Además, estaremos en posiciones ventajosas para observar qué avances y transformaciones se producen en los conocimientos personales de los futuros maestros, y cómo se produce este proceso evolutivo.

Por tanto, y en una primera aproximación, podemos señalar que en este trabajo el investigador y el profesor se identifican en una misma persona. Pero señalar que se asume el doble papel de investigador y profesor no es suficiente, existen tres interpretaciones diferentes (Richardson, 1994):

- Enseñar implica investigar: el profesor hace un diseño de la actividad, toma datos de su puesta en práctica y toma decisiones sobre la base de esos datos para evaluar su funcionamiento.
- El profesor es un práctico reflexivo, es un trabajador preocupado por la mejora de la calidad de la docencia.
- El profesor o profesores, considerados como núcleo investigador, sistematizan la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje, obtienen datos al poner en práctica la planificación, analizan los datos obtenidos, reflexionan sobre los resultados e introducen modificaciones en la planificación; el profesor se sitúa en el método de Investigación-Acción

Con estas precisiones, resulta más acertado señalar que en este trabajo el investigador ocupa la posición de profesor integrado en un grupo de trabajo que adopta el método de Investigación-Acción (Elliot, 1990; Kemis y McTaggart, 1988; Mcniff, 1991). Desde esta posición hay que entender que las preocupaciones del investigador tienen el propósito de mejorar el trabajo diario, de encontrar soluciones inmediatas a los problemas que aparecen en la realidad cotidiana; los resultados de la investigación tienen un sentido personal de validación y de mejora de la tarea profesional; el investigador realiza una indagación de tipo práctico (Romero, 1995).

Una vez realizadas estas consideraciones, podemos señalar con precisión que el autor de esta tesis asume el papel de investigador experto en Didáctica de las Matemáticas y el de profesor de un grupo natural de estudiantes en la Diplomatura de Maestros, en la especialidad de Educación Primaria. Esta posición del investigador nos ha exigido tomar las cautelas necesarias para garantizar la fiabilidad y validez de la investigación. En tal sentido, y como se detalla el el Capítulo IV, se han cuidado con especial atención aspectos tales como los métodos de recogida y análisis de los datos, la selección de los informantes, la autovigilancia del investigador; la descripción rica, detallada y completa del proceso; de este modo hemos tratado de atender a las exigencias de fiabilidad y validez del proceso.

En una Segunda Etapa de nuestro trabajo, utilizamos la metodología de entrevistas de Cohen y Manion (1990), para hacer indagaciones sobre el modo en que los estudiantes para maestros afrontan tareas profesionales de revisión de trabajos producidos por escolares. En esta Etapa nos preocupamos de determinar si existe relación entre las producciones previas de estos maestros, ya estudiadas en la Primera Etapa, y su comportamiento antes las tareas de detectar y diagnosticar los errores que aparecen en producciones de escolares; así como en el modo en que ofrecen ayuda a los escolares para que superen los errores previamente detectados, y el modo en que organizan la secuencia instructiva de los escolares que no cometen errores.

## I.9. Objetivos de nuestra investigación

Recientes trabajos de investigación en didáctica de la matemáticas (Carpenter et al., 1993; Behr et al., 1993) han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión de los números racionales. En este sentido, y situados en el campo del Pensamiento Numérico, abordamos el estudio sobre la preparación de los futuros profesores, en su dimensión formativa, desde distintas reflexiones:

• Para incrementar la comprensión de los números racionales, los maestros en formación deben fortalecer sus conocimientos personales sobre los diferentes significados de la fracción y establecer conexiones entre los mismos: "*Si los estudiantes aprenden solamente la interpretación de la fracción como relación parte-todo, tienen serias limitaciones para una sólida comprensión de las fracciones*" (Kerslake,1986). Por ello, se pretende lograr que estos estudiantes doten de significado a la fracción como cociente.

- También debe incrementarse esta comprensión de los números racionales fortaleciendo las conexiones conceptuales entre las notaciones fraccionaria y decimal: "*Enseñar fracciones y decimales como tópicos separados sin proporcionar a los estudiantes oportunidades para establecer conexiones, empequeñece su desarrollo para la plena comprensión de los números racionales*" (Sowder, 1995). Para ello, este trabajo articula estrategias de aprendizaje basadas en la utilización de nuevos sistemas de representación que faciliten la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal.

- Para que el proceso de construcción del conocimiento sea efectivo es preciso disponer de un medio físico y natural, utilizado como escenario idóneo para la formación de conceptos y, además, como área de aplicación de los mismos. Así, a partir de la imagen y combinando pensamiento con experiencia, la formación de ideas sobre los números racionales positivos aparece conectada.

- Ahora bien, para que los estudiantes incrementen sus conocimientos es necesario que los esfuerzos se centren en la resolución de situaciones problemáticas: *"es a través de la resolución de problemas como un concepto cualquiera adquiere sentido para un alumno. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como es esencial para la historia de las ciencias"* (Vergnaud, 1990, pág. 135). Estas situaciones problemáticas deben tener sentido para dichos estudiantes y ser generadoras de conflictos que favorezcan el sentido del número y no habilidades rutinarias y reglas para su aplicación.

- Por otra parte,, y para que esos estudiantes reflexionen sobre la adquisición de sus conocimientos, es necesario fomentar un "aprendizaje intencionado" (Scardamalia et al., 1989), o aprendizaje en el que la construcción del conocimiento sea un proceso abierto y que los estudiantes tomen responsabilidades sobre el mismo. Para ello, se favorece un clima de trabajo en el que los estudiantes puedan examinar sus propios errores, que tengan oportunidades para el diálogo, que el clima de la clase esté libre de presiones externas y que los estudiantes acepten que la comprensión de los Números Racionales exige de un esfuerzo personal importante y de un tiempo amplio para la acomodación de los nuevos conocimientos con los que ya tenían (Hatano e Inagaki, citados por Sowder et al, 1993, pág. 258).

Además, este trabajo contempla el estudio de la preparación de los futuros maestros para el desempeño de tareas profesionales. Nuestro propósito es el de hacer indagaciones sobre el modo en que estos profesores en formación proyectan sus conocimientos personales en procesos instructivos con escolares, procesos que vienen determinados por la detección de errores, su origen e importancia en el aprendizaje, por los modos de abordar la superación de dichos errores y por el diseño de actividades para proseguir el proceso instructivo.

En base a todas las consideraciones anteriores desglosamos el objetivo general que orienta nuestra investigación en objetivos parciales:

**OBJETIVOS PARCIALES:**

En relación al primer objetivo general: "*Experimentar con estudiantes de la Diplomatura de Maestro de Primaria una propuesta curricular innovadora que contemple el análisis sintáctico y semántico de dos sistemas simbólicos de representación para los números racionales positivos*", señalamos los siguientes objetivos parciales:

**1.a. Caracterizar un modelo para el aprendizaje de los números racionales positivos basado en la acción de repartir en partes iguales.**

**1.b. Articular una secuencia de actividades sobre el modelo anterior en la que se dé prioridad a la fracción como cociente de números naturales.**

**1.c. Mostrar los dos sistemas de representación que surgen al cuantificar el resultado del reparto igualitario realizado por fases y aplicando el criterio de la mayor parte (representación polinómica unitaria y representación polinómica decimal)**

**1.d. Explicitar las características sintácticas y semánticas, específicas y diferenciadas, que tienen los dos sistemas de representación anteriores.**

**1.e. Evaluar el mapa conceptual que sobre el concepto de número racional positivo han reelaborado los profesores de primaria en formación al integrar los dos sistemas de representación considerados.**

En relación al segundo objetivo general: "*Analizar los modos en que un nuevo dominio de los conocimientos sobre Números Racionales afecta a los futuros profesores en las tareas de planificación del proceso de enseñanza para escolares del sistema educativo y sobre el tópico mencionado*", señalamos los siguientes objetivos parciales:

**2.a. Analizar cómo el nuevo dominio en los conocimientos de los futuros profesores condiciona la detección y valoración de los errores cometidos por los escolares.**

**2.b. Estudiar si el nuevo dominio en los conocimientos influye en las explicaciones que los futuros profesores ofrecen a los escolares para que superen los errores previamente detectados.**

**2.c. Analizar cómo el nuevo dominio en los conocimientos se proyecta cuando los futuros profesores elaboran tareas para el aprendizaje destinadas a los escolares.**

# CAPITULO II

# ELECCIÓN DE UN MODELO PARA EL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES POSITIVAS

En el Capítulo I quedaron establecidas el área problemática en que se sitúa este trabajo y también el problema general de investigación, enunciado en términos de explorar nuevas vías para la instrucción sobre el número racional positivo en la formación de estudiantes para Maestros en Educación Primaria, y en indagar acerca de la proyección de los conocimientos personales de éstos en tareas profesionales.

Para delimitar, articular y concretar este problema hacemos, en primer lugar, un acercamiento a los sistemas de representación utilizados históricamente para simbolizar cantidades no enteras de magnitud. Dicha simbolización está estrechamente ligada a los sistemas de representación de cantidades enteras de magnitud; por tanto, para los intereses de nuestro trabajo es suficiente indagar sobre el modo en que se representaban las cantidades no enteras de magnitud en algunas de las culturas que utilizaron sistemas de numeración de características diferenciadas.

En segundo lugar, nos interesa indagar sobre las características de cada uno de los significados de fracción, sobre las exigencias conceptuales en la aprehensión de dichos significados y sobre las dificultades que encierra la construcción del conocimiento personal sobre tales significados.

La posterior reflexión sobre lo estudiado nos permitirá tomar decisiones justificadas sobre el significado de fracción como cociente que vamos a utilizar en nuestra investigación.

En la segunda parte de este capítulo (apartado II.3) se describen y analizan las potencialidades y deficiencias de un modelo físico sobre el que los futuros maestros puedan conceptualizar, confirmar y explorar aspectos esenciales del campo numérico de los Números Racionales. Desde dicho modelo, y a partir de las manipulaciones de objetos, es nuestra intención que los futuros profesores fortalezcan las conexiones conceptuales entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales.

## II.1. Aspectos históricos del concepto de fracción

Los diferentes significados de la fracción se sintetizan en el concepto matemático de número racional. Desde una perspectiva didáctica la comprensión de este concepto por los escolares exige un largo aprendizaje, que comienza por conceptualizar un significado para la fracción sostenido por un modelo físico; posteriormente, los escolares debe ampliar sus conocimientos a otros significados de la fracción y relacionar entre sí todos los significados; finalmente, un proceso de abstracción debe conducir a la conceptualización formal del número racional.

Nuestro primer objetivo es hacer una revisión histórica y epistemológica general de los significados de fracción, con objeto de analizar los momentos relevantes de su evolución; la intención es buscar puntos de anclaje sobre los que apoyar un plan de acción en el terreno didáctico que facilite la comprensión de esta estructura formal para los estudiantes.

Esta aproximación histórica se limita a las grandes culturas que hicieron aportaciones relevantes y son representativas de los sistemas de numeración, pues la simbolización de los números fraccionarios está íntimamente ligada a la representación de los números enteros. Nuestro interés prioritario está en conocer los significados de las fracciones en estas culturas a través de las funciones que les asignaron y de los contextos en que las utilizaron. De este modo queremos determinar los conflictos y dificultades a las que los matemáticos, y la comunidad científica de la que formaban parte, tuvieron que hacer frente. El estudio de los usos de las fracciones y de las dificultades que surgieron son de gran interés para nuestro trabajo, por cuanto pueden señalar los obstáculos para la comprensión por parte de los estudiantes para maestros de los significados correspondientes.

No tratamos de hacer una revisión exhaustiva de los conflictos conceptuales a lo largo de la historia para enfrentar a los estudiantes con todos ellos. Como indica Kline (1978), la historia se puede comprimir y sirve para evitar muchos esfuerzos y trampas inútiles. Para nosotros la historia constituye una fuente de información; parte de esa información se podrá utilizar para la elaboración de situaciones didácticas, mediante las cuales explorar la comprensión de nuestros estudiantes.

### II.1.1. El sistema de representación del antiguo Egipto.

Existe una abundante literatura acerca de la manera en que los egipcios representaban cantidades no enteras con el empleo, casi exclusivo, de sumas de fracciones unitarias (Grattan-Guinnes, (1993); Neugebauer, (1969); Fauvel-Gray, (1987); Collette, (1985); Boyer, (1986); Guillings, (1972); Kline (1992); Smith, (1953); Argüelles, (1989); N.C.T.M., (1989)). En estos documentos encontramos una presentación y un análisis, más o menos detallados, de la notacion y los usos de las fracciones que nos han llegado de los egipcios. En algunos de estos documentos hay una preocupación por entender y explicar los algoritmos aritméticos que sostienen estas representaciones de las fracciones.

Existe un acuerdo general en aceptar que los egipcios utilizaban, de forma casi exclusiva, fracciones unitarias; que estas fracciones se escribían con los mismos símbolos que los números enteros pero acompañados por un punto o una raya por encima del mismo; y que cualquier cantidad se representaba por una o varias fracciones unitarias consecutivas, esta escritura consecutiva de fracciones unitarias indicaba la suma de las cantidades representadas por ellas, al igual que ocurría con los números enteros.

De este modo, el número que estamos habituados a escribir por 2/7, los egipcios lo anotaban como $\bar{7}\ \overline{28}$ que en nuestra simbología actual significa 1/7 + 1/28.

Hay diferentes interpretaciones sobre el significado de estas expresiones numéricas. Para Gardiner (1992), la fracción egipcia tiene un significado ordinal que lleva a la no existencia de fracciones generales, como las que conocemos actualmente, sino que las limita a la existencia de las fracciones unitarias; para Ritter (1992), la fracción aparece en contextos de medida, aunque no hay pruebas claras de ello; mientras que para Smith (1953, pág 210) la fracción egipcia está asociada a la noción de razón entre las cantidades del numerador y del denominador. A nuestro juicio, estas interpretaciones son cuestionables por insuficientes e inadecuadas. Así: en el caso de Gardiner sus razones no son aplicables a la fracción 2/3 que era de amplio uso entre los egipcios; Ritter no ofrece evidencias claras de su interpretación; y en el caso de Smith cabe señalar que en muchos de los problemas resueltos del Papiro de Rind se plantean situaciones de reparto, no de razón.

Nuestra interpretación coincide con aquellos autores que consideran que las matemáticas egipcias surgen en el entorno de la resolución de problemas prácticos de la vida cotidiana; con posterioridad, el espíritu recopilador e indagador de los escribas les lleva a guardar y sistematizar los resultados que han aparecido en problemas ya resueltos, y a adelantar la solución de problemas que se deban afrontar en el futuro. En este sentido cabe recordar que las fracciones egipcias se presentan en dos contextos: en la resoluciones de problemas sobre la vida real (Fauvel-Gray, 1987, pág 23) y en la presentación de resultados de cálculos aritméticos (Grattan-Guinnes, 1993, pág 38). En consecuencia, consideramos que:

- las fracciones egipcias surgen en el contexto de la resolución de problemas de reparto, es decir, aparecen con un claro significado de cociente;
- las fracciones egipcias son una adaptación del sistema de numeración a la representación de cantidades no enteras, se estructuran según un peculiar sistema de numeración para fracciones;
- el trabajo de los escribas se centra en resolver los problemas con las herramientas de que disponen, no es su preocupación la de mejorar el sistema de representación de esas fracciones.

Con estas premisas hacemos una reconstrucción actualizada del concepto de reparto en el Egipto antiguo, y obtenemos así explicaciones a un proceder aferrado a una necesidad real, muy distante de la potencialidad matemática actualmente disponible. Con nuestra interpretación tratamos de dar respuesta a algunas reservas expresadas por distintos autores:

*No nos parece nada claro por qué la descomposición 2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/2.3.n es mejor que la 1/n + 1/n. Quizá uno de los objetos de la descomposición de 2/n era el de llegar a fracciones unitarias menores que 1/n salvo una de ellas. (Boyer, 1986, pág. 35)*

Interpretamos la noción de fracción de los egipcios asociada a la acción del reparto igualitario de cantidades extensivas de magnitud y a la creación de un sistema de representación para cantidades no enteras basado en el que utilizaban para cantidades enteras. Esta interpretación permite considerar la fracción como adición de cantidades de magnitud que son particiones enteras de la unidad, como suma de partes alícuotas de la unidad. Aunque desde nuestra perspectiva actual este sistema de representación resulta poco adecuado, es comprensible que en dicha cultura se opte por adaptar el sistema de numeración aditivo del que ya disponen a nuevas necesidades numéricas.

Finalmente cabe destacar que el significado de las fracciones egipcias como cociente es conceptualmente potente; de hecho, y a pesar de que las operaciones son muy complejas, las fracciones unitarias se siguen empleando hasta el renacimiento (aunque sin la misma forma en que las utilizó el escriba Ahmés), encontrándose en el siglo XVII manuscritos rusos que hablan de medio-medio-medio-medio-medio-tercio referido a la fracción 1/96 (Smith, 1953, pág. 211-212). Incluso el propio Fibonacci da una regla para separar fracciones en fracciones parciales, de las que las fracciones unitarias son un caso especial.

### II.1.2. Los babilonios y las fracciones sexagesimales.

A diferencia de los egipcios, los babilonios utilizan un sistema de numeración posicional (de base sexagesimal) de mayor potencia operativa que el sistema aditivo de los egipcios; aunque no es un sistema perfecto pues encuentra dificultades de interpretación por carecer de un símbolo que tenga el significado del 0 en nuestro sistema de numeración, lo que permite hacer dos o más lecturas de un mismo número.

El origen de este sistema de numeración parece encontrarse en la utilización de un sistema de pesos y medidas en el que una unidad equivale a 60 veces la unidad inmediatamente inferior (Boyer, 1968; Harold, 1989). Para realizar una medida los babilonios disponen de una unidad y de múltiplos y submúltiplos sexagesimales de la misma, por lo que dicho resultado se expresará mediante cantidades enteras y fracciones sexagesimales. Como disponen de un sistema posicional sexagesimal para cantidades enteras, una extensión del mismo les permite representar cualquier cantidad no entera. Así aparece un sistema de escritura de números muy similar a la actual notación decimal, aunque presenta alguna laguna ya que no disponen de signo de separación entre la parte entera y la parte no entera.

La civilización babilonia, ante la necesidad de representar la medida de cantidades de magnitud no enteras, adopta un mecanismo diferente al de los egipcios. Este mecanismo se asienta en el sistema de numeración que utilizan es decir, la simbolización de cantidades no enteras se hace con una extensión de su sistema de numeración posicional. Este sistema de representación, con los conocimientos de que disponemos en la actualidad, parece confuso pues carecía de un símbolo para nombrar las posiciones vacías (nuestro actual cero) y para señalar la separación entre las partes enteras y no enteras (la actual coma decimal). Sin embargo su utilidad fue considerable y se ha mantenido en nuestros sistemas actuales de medidas horarias y de medidas de ángulos.

**II.1.3. Las fracciones en la antigua Grecia.**

Los pitagóricos denominaban número a los entes que en la actualidad llamamos números enteros positivos y una razón entre dos números no era una fracción, no era otro tipo de número, no tenía la entidad del moderno número racional; se interpretaba como *una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo* (Euclides, libro V, 1991). Este punto de vista que prioriza la conexión entre pares de números tiende a poner el énfasis en los aspectos racionales o teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida (Boyer, 1986, pág. 83). La escritura de estos entes no fue uniforme, hay quienes escribían la correspondiente palabra para el numerador y un número para el denominador; otros escribían el numerador y duplicaban el denominador (2´5´´5´´ para 2/5); otras veces se escribía el numerador seguido de la palabra "en parte" y después el denominador. Posteriormente, los propios pitagóricos se vieron desagradablemente sorprendidos por el descubrimiento de que había razones que no se podían expresar por números enteros, lo que significa que las dos cantidades no se podían medir con una unidad común; son las razones inconmensurables que los pitagóricos denominaron inexpresable o que no tiene razón; constituyen los números irracionales en nuestra denominación actual.

Por su parte, los astrónomos griegos utilizaron el sistema sexagesimal para sus cálculos, posiblemente importado de Babilonia. El uso de las fracciones sexagesimales les permitía hacer divisiones más fácilmente que con las fracciones unitarias; así Ptolomeo subdividía sus grados en 60 "partes minutae primae" y cada una de ellas en 60 "partes minutae secundae", etc... (Boyer, 1986, pág 221).

Esos usos de las expresiones no enteras en terrenos científicos no tenía significado para el hombre práctico; éste tiene la necesidad de usar las fracciones en actividades de la vida cotidiana, sobre todo de tipo comercial; situaciones que contemplan la expresión de partes de la unidad monetaria o de una medida (Kline, 1992; pág. 58). De este modo encontramos escritos de Herón en los que recurre a las fracciones unitarias para representar las fracciones comunes, así 15/16 lo escribía como 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16.

Observamos, por tanto, cómo en la Grecia Clásica (que utiliza un sistema de numeración de tipo alfabético), conviven entidades numéricas con significados diferentes y representadas de forma distinta; estos entes numéricos representan cantidades que resultan de medir o de comparar magnitudes, pero que en la matemática actual están unificadas bajo la denominación de números racionales. Cada una está asociada a significados distintos, significados que se derivan de actividades que no tienen nexos de unión puesto que en cada una de ellas se utiliza la medida de magnitudes con intenciones distintas.

### II.1.4. Las fracciones comunes actuales.

Es probable que nuestro actual método de escritura de las fracciones comunes provenga de los hindúes (Smith, 1953, pág 215), aunque ellos no usaban la barra, que fue introducida por los árabes. En los árabes aparece el significado de fracción como razón, pero no con el sentido geométrico de los griegos, sino como relación o proporción de cambio entre valores de monedas diferentes: "2 monedas A equivalen o se cambian por 3 monedas B" (Benoit, 1992). La barra de fracción era utilizada regularmente por Fibonacci, pero su uso no se generaliza hasta finales del XVI (la barra oblicua la introdujo de Morgan en 1845).

En la actualidad, la herencia cultural y científica de otras culturas, ha culminado con una práctica que permite simbolizar las fracciones de formas diferentes; las notaciones más frecuentes son a/b o $\frac{a}{b}$, pero también se utiliza el signo de porcentaje, %, o los dos puntos para las escalas de planos o mapas.

Y también son reconocibles distintos significados de la fracción; en efecto, en el lenguaje cotidiano son habituales expresiones cuyos enunciados son similares, aunque tengan significados diferentes:

- Como resultado de una medida: compra tres cuartos de kilo de carne; nos faltan por recorrer dos tercios del camino; ...
- Como razón: la probabilidad de que salga es tres quintos; la relación entre chicos y chicas es dos tercios; la escala del plano es de tres a cinco; ...
- Como cociente: tocamos a dos quintos de pizza; ...
- Como operador: te lo vendo por los cuatro quintos de su valor; equivale a dos tercios de su peso; ...
- Como relación parte-todo: eso son dos quintos del total;

### II.1.5. Las fracciones decimales.

Lo mismo que en Mesopotamia un sistema de medidas básicamente sexagesimal condujo a la numeración sexagesimal así, también en China, la adopción de una idea directriz decimal en los pesos y medidas dio como resultado el que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones, que puede rastrearse hasta el siglo XIV a. C. (Boyer, 1986, pág. 264).

Sin embargo, las fracciones decimales no fueron admitidas de inmediato a pesar de que el sistema de numeración decimal, el sistema árabe-hindú, ofrecía ventajas incuestionables para su utilización en las fracciones. Y así pasaron más de 1000 años hasta incorporarlas para sustituir a las fracciones unitarias o a las fracciones sexagesimales; evento que no es de extrañar si tenemos en cuenta las necesidades de la época, pues antes del descubrimiento de la imprenta las operaciones con fracciones no eran muy complejas, así en aspectos comerciales el manuscrito de Rollandus no contempla sumas de fracciones más complejas que 207/220 y 197/280, y en multiplicaciones no se utilizan factores más complejos que 29/36; además, los cálculos astronómicos se realizaban con facilidad recurriendo al sistema sexagesimal.

El astrónomo y matemático árabe Al-Kasi reivindica la invención de las fracciones decimales, posiblemente por desconocer trabajos de la época como los de Al-Uglidisi (siglo X). En su libro "La llave de la aritmética" introduce fracciones compuestas de las potencias sucesivas de 1/10, de modo similar a como se hace con las fracciones sexagesimales. A estas potencias las denomina décimas, segundos decimales, terceros decimales, ... ; y señala que todas las operaciones se efectuarán exactamente igual que como se hace con los números enteros (Centeno, 1988, pág. 46).

Las primeras apariciones de las fracciones decimales en Europa se encuentran en el siglo XIV en trabajos como los de Jean de Meurs que las utilizó para la extracción de raíces de números, utilizando la equivalencia

$$\sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot 10^{kn}}}{10^{k}}$$

También aparecen las fracciones decimales en la regla de la división de números de la forma $a.10^n$ atribuida por Cardan a Regiomontanus; así figuran en varios manuscritos del siglo XV resultados como 470:10=47 ;; 503:10 = 50 $\frac{3}{10}$. (Smitj, 1953, pág. 238)

### II.1.6. La notación decimal.

Las primeras nociones sobre fracciones decimales se pueden encontrar en el siglo X en las obras del matemático árabe Al-Uglidisi; en estas obras se encuentran expresiones del tipo $\overline{2'\,35}$ que se leen como "dos unidades y 35 de cien" (Centeno, 1988, pág 46). Además en estas obras el autor se muestra como un experto en la realización de cálculos.

En 1530 aparece una obra de Christoff Rudolff, Exempel-Büchlin, en la que utiliza la barra de fracción en la misma forma que actualmente colocamos la coma o punto decimal; y pone de manifiesto cómo operar con esta forma de escritura y cómo escribir los resultados. A él atribuye Smith (1953) la invención de las fracciones decimales, aunque su obra no fue apreciada en su momento.

No obstante, el reconocimiento más generalizado acerca de la invención de la notación decimal es hacia el científico neerlandés Simón Stevin, que publicó en 1585 un librito titulado *De Thiende*, que se tradujo ese mismo año al francés como *La disme* (La décima) y que alcanzó gran popularidad. En esta obra hay dos partes diferenciadas: una primera en la que se incluyen definiciones sobre décima, primera, segunda, número decimal, ...; y una segunda en la que que se incluyen reglas prácticas para la realización de las cuatro operaciones aritméticas con números decimales, suma, resta, multiplicación y división, así como la llamada regla de oro.

Según señala Boyer (1986, pág 402) es claro que Stevin no fue ni el inventor ni el primero que utilizó las fracciones decimales, que tenían una larga historia en la antigua China, en la Arabia medieval y en la Europa renacentista. Stevin era un científico de tipo práctico, ingeniero, que pretendió que la aceptación de la notación decimal no se quedase en los investigadores matemáticos, que atendieron a las proclamas de Viete en 1579, sino que llegase a los matemáticos que se ocupaban de asuntos prácticos y a toda la población. A pesar del interés de Stevin porque los gobiernos usasen este sistema de representación numérica (anticipándose al S.M.D.), es también reconocido que su plena expansión sólo se alcanza con el surgimiento de los logaritmos, de modo que son éstos los que realmente introducen el uso extensivo de la notación decimal.

Stevin no escribía las expresiones decimales en forma de fracción con potencias de 10 en el denominador, sino que escribía en un círculo, colocado encima o a continuación de cada dígito, la correspondiente potencia de 10, el exponente de la potencia de 10 que debería llevar el correspondiente divisor. Esta notación, con claras influencias del álgebra, desaparecen cuando Napier (1619) utiliza un punto decimal para separar la parte entera de la fraccionaria, punto decimal que se mantuvo en Inglaterra, pero que en otros muchos paises se sustituyó por una coma. De todos modos, la extensión de la notación decimal no alcanzó su plena aceptación hasta que el sistema métrico se generalizó, pues incluso en el siglo XVIII los comerciantes despreciaban el cálculo con decimales dada su escasa utilidad en un sistema de medidas muy arbitrario.

Debajo de la notación decimal se esconden conceptos relacionados con el sistema de numeración decimal y con el significado de las fracciones que han tardado muchos siglos en ser entendidos e interpretados por la comunidad matemática. El trabajo de Stevin se puede considerar como un simple recurso técnico para la escritura de números racionales y es así como continúa en la actualidad; de hecho, los manuales actuales de matemáticas no contienen un tratamiento específico de los números decimales o de las expresiones decimales, si acaso hacen referencia a las expresiones decimales en términos de series convergentes. El matemático tiene la posibilidad de utilizar la notación decimal, pero no se preocupa de su fundamentación puesto que trabaja en términos de elementos de conjuntos concretos, Q o R, en los que utiliza entes genéricos de los que solamente le preocupan las propiedades que se deduzcan de la estructura del conjunto al que pertenecen.

### II.1.7. Significados de las fracciones

Las consideraciones históricas reseñadas sobre los conceptos y sobre los sistemas de representación de los números racionales, aportan informaciones que serán de gran utilidad para afrontar el proceso de construcción del conocimiento sobre este tópico matemático.

A lo largo de la historia se han forjado diferentes significados sobre las fracciones ordinarias y sobre las fracciones decimales, significados que algunos autores denominan constructos, entendiendo como tales a las distintas interpretaciones de las aprehensiones de objetos del mundo real a objetos mentales, incluyendo también las creaciones mentales y actos físicos que están implicados en su génesis (Kieren, 1993, pág 57). Los diferentes significados de la fracción que citan Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993, pág. 14) son los de parte-todo, cociente, razón, operador y medida; sin embargo, Kieren (1993, pág. 57) no considera el constructo parte-todo puesto que lo incluye en los constructos cociente y medida.

Pasamos a revisar seguidamente cada uno de estos significados, de los que indicamos sus características más destacadas, los elementos básicos que necesita el estudiante para la construcción de su conocimiento personal y las dificultades que puede encontrar en dicha construcción. Los significados aparecen en el orden en que han sido recogidos en las reseñas históricas del punto anterior.

## II.2. La fracción como medida

Como se ha puesto de manifiesto en el apartado anterior la primera aproximación a la noción de número racional se encuentra asociada con la representación de la medida de cantidades de magnitudes extensivas. Y teniendo en cuenta la finalidad de la medida pueden presentarse dos situaciones diferenciadas:

### II.2.1. Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad

En la medida de cantidades de magnitud aparece la noción de número complejo que es cuando una cantidad ( por ejemplo, de longitud) se expresa en función de la unidad básica (el metro), sus múltiplos (decámetro, hectómetro y kilómetro) y sus divisores (decímetro, centímetro, milímetro), siendo entera la medida para cada una de estas unidades (por ejemplo: 7 km, 3 hm, 2 dam, 5m, 3 dm, 7 cm 9 mm).

En estos casos, al querer expresar la misma cantidad sólo mediante la unidad básica, se simboliza con una suma de números enteros y fracciones decimales (con el mismo ejemplo: 7000+300+20+5+3/10+7/100+9/1000 de metro); también puede simbolizarse como una extensión de un sistema de numeración posicional cuya base sea igual a la relación entre dos órdenes consecutivos de unidades de medida (con el mismo ejemplo: 7325,379 metros). Históricamente encontramos estas notaciones en las culturas babilonia (sistema sexagesimal) y china (sistema decimal).

Esta idea se ha utilizado frecuentemente para introducir el número decimal a partir de nuestro sistema métrico, como una forma "más económica" de codificar la medida. De hecho, sabemos que la justificación para introducir los números decimales en el currículo de la enseñanza obligatoria ha sido, históricamente, la necesidad social de implantar el Sistema Métrico Decimal. El primer currículo de matemáticas que hace esta presentación es debido a Condorcet (Sierra, Rico y Gómez), y en España lo encontramos desde mediados del siglo XIX (Escolano, 1997); en forma muy parecida lo seguimos encontrando en los textos de Rey Pastor y Puig Adam (citado por Centeno, 1988, pág. 86-87). La idea central consiste en utilizar un código para pasar una cantidad expresada por un número complejo a la misma cantidad de magnitud expresada por una sola unidad.

Ahora bien, si al alumno se le presenta una técnica para expresar con un sólo número una medida compleja, una medida formada por la suma de unidades de distintos tamaños, podemos inducir al alumno a la construcción de conocimientos personales erróneos, como sugerir que los números decimales no son necesarios si se hace un cambio de unidad adecuado, o interpretar que los números decimales indican otra manera de simbolizar los números enteros y, en consecuencia, trasladar significados de los números enteros y aplicarlos por duplicado: unos para la parte entera y otros para la parte decimal.

Sin embargo, no hemos encontrado textos escolares que introduzcan las fracciones decimales en el contexto de simbolizar medidas expresadas con diferentes unidades; las fracciones decimales aparecen sólo como paso intermedio entre la fracción ordinaria y la notación decimal. La elección de esta secuencia instructiva puede justificarse por una organización de los currícula en la que se separan los conocimientos aritméticos de los de la medida, y en los que la intencionalidad última de la instrucción sobre la medida es que los alumnos aprendan el manejo del sistema métrico decimal.

### II.2.2. Comparación con la unidad

La noción de fracción ordinaria aparece asociada a la medida de magnitudes, esencialmente la magnitud longitud, utilizando una única unidad de medida: medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de un segundo segmento CD de mayor longitud. De este modo la fracción a/b indica que el segmento AB tiene de longitud a veces la unidad de medida que resulta de dividir el segmento CD en b partes iguales.

La noción de fracción asociada a esta actividad de medir ya la encontramos en textos del siglo XIX que hemos consultado; aquí recogemos un texto en que el significado de la fracción hace referencia a una medida específica, la medida de contar:

> *Hasta ahora solo hemos considerado números en que la unidad está contenida exactamente; pero si en vez de comparar la pluralidad o muchedumbre con la unidad, comparásemos la unidad con la muchedumbre, o a una muchedumbre con otra muchedumbre mayor, entonces resulta otra clase de números, que se llaman números quebrados, o simplemente quebrados. Por ejemplo: cuando veo cuatro árboles y quiero comparar un árbol con los cuatro, advertiré que éste árbol no equivale ninguna vez a*

*cuatro árboles, sino que solo es una parte de aquellas que la cantidad con que comparo tiene cuatro, y así digo que un árbol es la cuarta parte de una vez cuatro árboles. .... Y pues que ya hemos dado a conocer este número, haremos otra división del número en entero, quebrado, misto, fraccionario y quebrado de quebrado.*
(Vallejo, J.M., 1821, pág. 11-12)

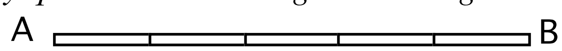
En el texto siguiente, se presentan las fracciones desde una medida cualquiera:

Origen de los quebrados.
*145.- Cuando se trata de apreciar cantidades menores que aquella que se toma por unidad, nos vemos en la necesidad de dividir dicha unidad en cierto número de partes iguales, y referir la cantidad que se va a medir a una de estas partes, dando origen de este modo a las fracciones o quebrados ordinarios, a las fracciones decimales o a los números complejos,...*
*Vemos, pues, que las fracciones o quebrados tienen su origen o resultan de la medición de una cantidad con una unidad mayor que aquella; lo cual se consigue dividiendo la unidad en un cierto número de partes iguales, y viendo las veces que una de estas partes está contenida en la cantidad que se quiere medir.*
(Sánchez Vidal, B., 1866, pág. 122-123)

Pero con independencia de la magnitud medible que se utilice, el proceso instructivo que permite introducir el concepto de fracción por esta vía presenta las siguientes características:

a) Buena parte del conocimiento se percibe a través de representaciones gráficas, puesto que el concepto de fracción surge al resolver tareas del siguiente tipo, Marshall (1993, pág. 271):

*1.- Hay que obtener la longitud del segmento AB*

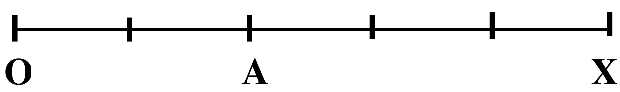



*utilizando la siguiente*

UNIDAD

*¿Cuánto mide el segmento AB?*

*2.- Calcular la distancia entre A y X conociendo la distancia entre O y X*




Las tareas hay que presentarlas a los alumnos con las divisiones de los segmentos ya señalizadas, por cuanto la medida de objetos reales exigiría tomar en consideración la continuidad de la magnitud longitud y, por tanto, la idea de medida aproximada. En consecuencia, el estudiante no realiza una medida real, sino que debe resolver visualmente el recuento de segmentos diferenciados que aparecen en la unidad y en el segmento a medir.

b) El alumno debe hacer traducciones entre dos números dados y las correspondientes representaciones gráficas y simbólicas.

c) En la representación gráfica el alumno debe saber interpretar aquellos aspectos que representan el segmento a medir, la unidad de medida, las partes que deben hacerse tanto en la unidad de medida como en el segmento a medir y las relaciones que hay entre ambos.

d) La expresión a/b indica que el fraccionamiento hay que hacerlo tanto en el segmento a medir como en la unidad de medida.

### II.2.3. Elementos para construir el conocimiento personal de los escolares

Atendiendo a estas características, el conocimiento personal del alumno debe construirse a partir de los elementos siguientes:

<u>A. El significado de la medida.</u>

La representación del resultado de la medida de magnitudes continuas exigiría la utilización de los números reales. Los procesos de medida que se presentan conllevan la idea de medida aproximada de una magnitud continua. En el caso de utilizar la medida de contar en conjuntos discretos se puede provocar en el estudiante la sensación de que la medida se convierte en la razón entre cardinales.

<u>B.- La elección de la unidad de medida</u>

Un aspecto esencial del conocimiento es que existe una transformación de la unidad de medida. La necesidad de medir un segmento con una unidad de medida de menor longitud de la que inicialmente se dispone hace que el estudiante deba considerar a 1/b [unidad] como la unidad de medida más apropiada, entendiendo como unidad apropiada la que permite dividir al segmento inicial y la unidad inicial en un número entero de partes de igual longitud. En este supuesto, será la representación gráfica la que sustituya al proceso real de medida, pues lo esencial del proceso no es determinar la medida de un segmento con respecto al sistema métrico decimal, sino que hay que hacerlo respecto a un segmento unidad del que se desconoce su longitud en términos de unidades del sistema convencional y que, en consecuencia, hay un proceso de subdivisión de la unidad en un número de partes iguales que depende de la longitud del segmento a medir.

<u>C.- La técnica de la medida</u>

La medida de longitudes exige de una técnica que contempla la elección de la unidad, hacer coincidir uno de los extremos del segmento a medir con un extremo de la unidad, determinar el lugar del segmento a medir que coincide con el extremo del segmento unidad, trasladar el inicio de la unidad de medida al lugar señalado anteriormente, contar las veces que está contenido el segmento unidad y escribir el resultado de la medida en términos de la unidad inicialmente propuesta. Es necesario, por tanto, una práctica de la técnica puesto que los errores en el proceso de medida dificultarán la comprensión de la representación del resultado como fracción.

Las fuertes exigencias para la construcción del concepto de fracción como resultado de una medida de una cantidad de magnitud, han provocado que este significado ocupe un lugar secundario en los manuales escolares. Y en el caso de que se haga mención al mismo se presenta después de otros significados, y se muestra al estudiante como un acto ya finalizado; de este modo el trabajo del alumno se limita al de mero observador que debe realizar dos recuentos y relacionar sus resultados de acuerdo con unas normas predeterminadas.

## II.3. La fracción como cociente

La representación de la cantidad de magnitud resultado de un reparto igualitario de a unidades en b partes (siendo a < b), puede hacerse con el empleo de dos técnicas distintas.

### II.3.1. Técnicas de reparto

i) Reparto en varias fases: a cada individuo se le da una parte de unidad, la que se considere oportuno; si queda alguna cantidad por repartir se reitera el proceso, y así sucesivamente hasta que se agote la cantidad disponible. Por ejemplo al repartir 3 tartas entre 4 personas se puede dar a cada persona 1/2 de tarta, y sobrará una tarta; se vuelve a dar a cada persona 1/4 de tarta y se completa el reparto. Esta forma de reparto es frecuente observarla entre niños (y también entre adultos), cuando se reparte un número cualquiera de objetos indistinguibles: primero 5 para ti, 5 para ti, ...y 5 para mí; ahora 2 para ti, 2 para ti , ... y 2 para mí; ahora ....

Por tanto, si el reparto se hace en varias fases surge la representación de las cantidades correspondientes a cada individuo como una suma de partes alícuotas de la unidad de tamaños diferentes, como una suma de fracciones unitarias distintas. Este sistema de representación, utilizado hasta el Renacimiento, no tiene reflejo en los textos escolares puesto que no tiene uso social debido a las dificultades operatorias que encierra.

ii) Reparto en una sola fase: cada una de las a unidades se fracciona en b partes iguales y cada individuo recibe una parte de cada una de las a unidades; es decir, a cada participante le corresponden a partes de tamaño 1/b de unidad.

Si el reparto se hace en una sola fase la fracción aparece asociada a la noción de cociente del numerador entre el denominador, cuando dicho cociente no es entero. La idea que prevalece es la de utilizar el concepto de división entera después de transformar el numerador en un número de partes alícuotas de la unidad que sea múltiplo del denominador; de este modo, en cada reparto aparecen diferentes medidas de la unidad que no se corresponden con un sistema métrico preestablecido.

Esta idea de fracción la encontramos plenamente desarrollada en un manual escolar del siglo pasado:

> *147.- No sólo la comparación de una cantidad con su unidad puede darnos el quebrado, sino que también puede provenir de una división que no se puede efectuar con números enteros, como, por ejemplo, 4 dividido entre 9. En efecto, el cociente de 4 entre 9 tiene que ser evidentemente menor que la unidad y por lo tanto una fracción o quebrado, que se determinará dividiendo cada una de las unidades del dividendo en tantas partes como unidades tiene el divisor, lo cual dará un número de partes igual al producto del divisor por el dividendo: efectuando en seguida la división del número resultante por el divisor, encontramos por cociente exacto un número igual al dividendo; pero este cociente no expresará unidades, sino partes de la unidad cuya denominación marcará el divisor. Así, el cociente que resulta de dividir 4 entre 9 será 4/9, el cual se obtiene dividiendo cada unidad del dividendo 4 en 9 partes, que son las unidades que tiene el divisor, lo que da el número 36; de modo que dividiendo 36 por 9 resultará por cociente otra vez el número 4, con la diferencia de que no serán 4 unidades, sino 4 novenas partes, o lo que es lo mismo 4/9.*
>
> *148. De aquí se deduce que podemos considerar los quebrados bajo dos aspectos: o como tal número quebrado que nos expresa una o varias partes de la unidad, o como la división indicada del numerador por el denominador, cuyo cociente es el quebrado.*
>
> (Sánchez Vidal, B., 1866, pág. 124-125).

Se pone de manifiesto que, como cociente, el significado de fracción a/b está asociado a una situación de reparto, a problemas de conocer el tamaño de cada una de las partes que resultan al distribuir a unidades en b partes iguales. Por tanto, el proceso instructivo para introducir la fracción con el significado de cociente, presenta las siguientes características:

a) Parte del conocimiento se percibe por medio de representaciones gráficas. Puesto que la realización del reparto con objetos reales se hace inviable, se sustituyen éstos por representaciones iconográficas sobre las que actúa el sujeto.
   Otra parte del conocimiento se percibe mediante reflexiones mentales efectuadas sobre la acción que se realiza.
b) El alumno debe hacer traducciones entre dos números (las unidades a repartir y las partes que debe hacer) y las correspondientes representaciones gráficas y simbólicas.
c) En la representación gráfica el alumno debe saber interpretar aquellos aspectos que representan las unidades a repartir, las partes que deben hacerse, las relaciones que hay entre ambas y el resultado del reparto.
d) En la fracción a/b el fraccionamiento se produce en a, mientras que b

indica el número de partes que hay que hacer.

e) En a/b no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b.

f) El alumno debe actuar, tiene una participación activa sobre el proceso, ya que es él el que decide la técnica a aplicar y el que obtiene los resultados.

### II.3.2. Elementos para construir el conocimiento personal de los escolares

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del alumno son las siguientes:

A. La igualdad de las partes.

Se exige que las b particiones que se han hecho de las a unidades tienen que ser exactamente iguales. En el caso de trabajar con magnitudes continuas hay que tener presente que esta exigencia se concreta en que las partes finales sean iguales, lo que no se traduce en que inicialmente cada figura se haya fraccionado en partes iguales. Por tanto, en magnitudes continuas los alumnos tienen problemas para establecer la igualdad entre las partes del resultado final; por ejemplo Streefland (1991), indica para la fracción 3/4 las siguientes respuestas de niños: a) cada niño recibe 1/4 (pizza) + 1/4 (pizza) + 1/4 (pizza) ; b) cada niño recibe 1/2 (pizza) + 1/4 (pizza); y c) dos niños reciben (1-1/4) (pizza) y los otros dos niños reciben (1/2 + 1/4) (pizza).

Si el trabajo se realiza con cantidades discretas, la igualdad de las partes se traducirá en la igualdad de conjuntos con igual número de objetos, tarea que se resuelve por cardinalidad. En cuanto a la construcción de las partes la tarea no presenta dificultades si a es múltiplo de b, es decir, las construcción de las partes se resuelve por división entera. Sin embargo, hay dificultades añadidas en el supuesto de que a no sea múltiplo de b, pues en este caso hay que hacer particiones de algunos objetos del conjunto, lo que daría lugar a la necesidad de igualdad entre las partes de figuras geométricas por las que se han representado los objetos. Además hay que señalar que hay una dificultad añadida si los objetos a repartir son distinguibles, es decir, no son idénticos, pues el reparto no admite la formación de subconjuntos, sino el fraccionamiento de los objetos. Así, en el caso de repartir tres frutas (p.e. una manzana, una pera y una naranja) entre 3 niños la respuesta que se sugiere la vida real es la de hacer corresponder a cada niño una de las frutas; sin embargo, en el constructo cociente la exigencia es la fraccionar cada una de las frutas en 3 partes iguales y hacer corresponder a cada niño una parte de cada una de las frutas.

Todas estas exigencias sobre los conocimientos necesarios para la adquisición del significado de la fracción como cociente determinan que no tenga cabida un tratamiento exhaustivo en los textos escolares; pero dichos manuales sí que lo mencionan, como otro significado de la fracción, puesto que lo necesitan para justificar la notación decimal de las fracciones ordinarias.

## II.4. La fracción como razón

Otro significado diferente de fracción aparece con la idea de razón entre dos cantidades de una misma magnitud medidas con la misma unidad; de este modo la razón se expresa mediante una relación de números naturales, que son las medidas de las cantidades correspondientes. Un caso usual es la relación entre segmentos conmensurables.

### II.4.1. Tratamiento curricular de la razón aritmética y geométrica.

En los manuales escolares consultados la razón no se considera con significado de fracción, sino que se desliga de la aritmética y se estudia como parte del álgebra elemental: razones aritméticas y geométricas y proporcionalidad. Es más, en su presentación las razones se escriben inicialmente con puntos (6 : 2), lo que indica su no integración con la noción de fracción (aunque posteriormente se escriben como fracciones para facilitar el manejo de las proporciones). En estas condiciones los autores no necesitan establecer conexiones entre diferentes significados de fracción, ni justificar la notación decimal para la representación de las razones consideradas como fracciones.

> *Se da el nombre de razón a la comparación de dos cantidades; ... Con dos miras diferentes se puede hacer la comparación de dos cantidades ó con la mira de averiguar la diferencia que hai entre ellas, ó con la de averiguar las veces que la una contiene a la otra.*
> (Sánchez Vidal, B., 1866, pág. 284).

Al considerar con este significado a la fracción a/b lo que se refleja es la relación existente entre dos cantidades, o la comparación entre algún número de un objeto y algún número de un segundo objeto; no se quiere representar la partición de ningún objeto o cantidad. Son situaciones que vienen reflejadas en las dos formas que señala Marshall (1993, pág. 272):

*1.- En su receta, Susie añade una taza de azúcar por cada 3 tazas de agua. ¿Cuánta azúcar debe añadir por 6 tazas de agua?*

*2.- Aquí hay 4 bolas. Tres de ellas son rojas y una es amarilla ¿Cuál es la razón entre las bolas rojas y amarillas?*

Como características propias de este concepto de fracción a/b podemos citar:

a) Las representaciones gráficas no son esenciales, pueden ser fácilmente sustituidas por representaciones mentales.

b) El alumno debe hacer traducciones entre dos números y representaciones simbólicas.

c) En la representación simbólica el alumno debe saber interpretar aquellos aspectos que representan los conjuntos a relacionar, las cantidades de cada conjunto que se comparan y el orden en que se establecen las relaciones entre ambos.

d) En la fracción a/b no existe fraccionamiento.
e) En a/b no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b.

**II.4.2. Elementos para construir el conocimiento personal de los escolares**

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del alumno son las siguientes:

<u>A. El orden de los números.</u>

En este caso la fracción a/b hace referencia a un par de números que mantienen un orden determinado de modo que un cambio en el mismo produce una profunda transformación en el significado de la fracción.

<u>B.- La noción de razón</u>

El estudiante ha de trabajar con la idea de que si existe una determinada relación entre a y b, cualquier cambio en a producirá un cambio en b. Estas situaciones que tienen una frecuencia muy alta en el mundo real, llevan implícitas la consideración de que a y b hacen referencia a objetos distintos. Item más, a no tiene por qué formar parte de b, como se muestra en el primero de los ejemplos citados anteriormente puesto que a y b representan la relación entre azúcar y agua y dan lugar a la fracción 1/3, mientras que la fracción 1/4 haría referencia a la relación entre la cantidad de azúcar y la cantidad de mezcla.

Además, la noción de razón está asociada en muchos casos a percepciones más cualitativas que comparativas: las intuiciones de los estudiantes en las que hay mezclas de ingredientes les permiten experimentar variaciones de sabor en términos comparativos (sabor más fuerte o más débil que otro), pero que en ningún modo son cuantificables.

<u>C.- La comprensión de la equivalencia</u>

La idea de razón lleva aparejada la de que el mantenimiento de la proporción afecta a la cantidad pero no a la relación. En consecuencia, el estudiante debe considerar la equivalencia de fracciones como invariante de la relación entre las cantidades.

<u>D.- La relación entre áreas</u>

No es frecuente encontrar en los libros de texto referencias al concepto razón empleado con figuras geométricas. Ello se justificaría por el hecho de que la razón entre la superficies de una figura geométrica y la figura que resulta de modificar sus dimensiones lineales en una razón determinada produce como resultado una relación entre las áreas que no se corresponde con la razón utilizada, sino con su cuadrado. Pero este resultado, la relación cuadrática entre las razones lineales y de superficie, no es directamente observable, sino que se produce como resultado de una reflexión puramente formal y limitada a este supuesto.

<u>E.- El significado de la suma</u>

En el estudio sobre la idea de fracción nos limitamos a indagar el significado de la fracción y, por tanto, no analizamos las operaciones. En este caso hacemos una excepción, por cuanto este significado de la fracción puede influir en una inadecuada conceptualización de la suma; en efecto, una traslación del significado de la suma de números naturales proporciona al alumno argumentos "sólidos" que justifiquen que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Estos argumentos se encuentran con relativa facilidad a partir de situaciones problemáticas de este tipo: en el primer tiempo las estadísticas de un jugador de baloncesto indican 2/5 para los tiros de 3 puntos; en el segundo tiempo indican 3/5 ¿cuál es la estadística final?

En este significado de fracción la idea de suma como unión de conjuntos, que se puede utilizar en otros significados, no es válida, pero esa no validez de la operación ha de percibirla el estudiante como consecuencia de las cantidades que relacionan cada uno de los sumandos y, en consecuencia, de la imposibilidad de agruparlos. Ello conlleva la distinción previa entre magnitudes intensivas y extensivas y la posterior reflexión sobre el significado su suma.

Son estas exigencias las que justificarían la ausencia en los manuales escolares de la fracción con este significado de razón; además, las propias demandas curriculares de la instrucción sobre la proporcionalidad han permitido alejar a la razón de las fracciones y otorgarles un tratamiento diferenciado. A pesar de que la razón y la proporción son tópicos adecuados para aplicar las fracciones a la resolución de problemas, desde el primer cuarto de siglo los manuales escolares presentan un estudio separado de las fracciones y de las razones y proporciones. Esta realidad no responde al desarrollo histórico, ni está justificada didácticamente; más bien responde a la idea de mantener la tradición de quienes, a principios de siglo, decidieron tratar separadamente teoría y práctica y, en consecuencia, las razones y proporciones se alejaron de las fracciones.

## II.5. La fracción como operador

En este concepto de fracción se parte de un número o figura dadas y mediante tratamientos operativos se transforma en un segundo número o figura. Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio (Behr et al., 1993, pág 13). El trabajo con operadores conecta las fracciones con propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones.

### II.5.1. Tratamiento curricular

Aunque esta noción de operador puede construirse a partir de los números considerados como entes abstractos disociados de la medida de magnitudes, en los manuales del siglo pasado se presenta asociado a magnitudes:

> *Se dice que se valúa un quebrado cuando se espresa en unidades de especie inferior á aquella á que se refiere el quebrado.*
>
> *Para valuar un quebrado: se multiplica el numerador por el número que espresa las veces que la unidad, en que se quiere*

*valuar el quebrado, está contenida en aquella á que se refiere el quebrado, y esto se parte por el denominador.*
(Vallejo, J.M., 1821, pág. 121)

El significado de fracción como operador puede presentarse con números o con cantidades de magnitud; en todo caso, el proceso instructivo que permite introducir este concepto de fracción presenta características como las siguientes:

a) Si se utilizan números sin medida el conocimiento se percibe a través de manipulaciones simbólicas; pero si se utilizan magnitudes, el conocimiento puede percibirse mediante representaciones gráficas, puesto que el concepto de fracción surge al resolver tareas del siguiente tipo, Marshall (1993, pág. 278):
*¿Cómo puedo transformar un segmento en otro que sea tres cuartas veces más largo que el original?*
b) La fracción a/b actúa como función transformadora de un número o una figura, lo que implica que hay que considerarla como una única entidad más que como un par de números naturales.
c) En la fracción a/b cada uno de los valores tiene distintas implicaciones en el resultado final: multiplicar por a y dividir por b.
d) En a/b no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b.
e) El escolar tiene que hacer traducciones entre los términos de la fracción, un número o una cantidad iniciales y otro número o cantidad finales.
f) En la representación simbólica el alumno tiene que saber interpretar aquellos aspectos que representan los conjuntos a relacionar, los elementos que se relacionan y la relación que se establece entre ellos.
g) En la fracción a/b no existe el fraccionamiento de la unidad

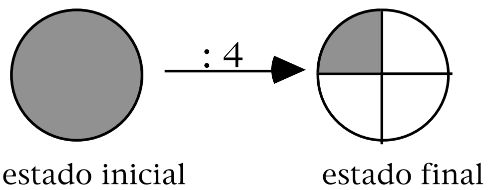
### II.5.2. Elementos para construir el conocimiento personal de los escolares

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del alumno son las siguientes:

<u>A. Magnitudes continuas.</u>

La fracción a/b actúa como reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica, como ocurre en el siguiente texto escolar[1]:

*1. Carlos halla la cuarta parte. Explica cómo lo hace*




La idea de operador que aquí se utiliza implica una proporcionalidad de figuras respecto a la magnitud superficie, mientras en el

[1] Oehl, W.; Palzkill, L., (1985) **El mundo del número. Ciclo Medio. E.G.B. 5**. Didascalia, Madrid, pág 55.

ejemplo de Marshall que se ha citado con anterioridad hay una proporcionalidad de longitudes; pero las relaciones entre los dos tipos de magnitudes no tienen la misma representación numérica.

Por otra parte, la existencia de infinitos valores que producen el mismo resultado que la fracción a/b exige del alumno la utilización de la igualdad de áreas al utilizar fracciones equivalentes.

Además, el operador a/b conecta con la idea de transformaciones espaciales de tamaño (Kieren, 1993, pág. 59), por cuanto su actuación produce una dilatación y una contracción de la figura inicial, aun cuando el orden en que se produzcan estos fenómenos conlleve diferentes modificaciones del proceso de unitización (Behr et al., 1993, pág 32).

B.- Objetos discretos

En este caso, la fracción a/b actúa sobre un conjunto de objetos para transformarlo en otro conjunto de objetos iguales pero con a/b veces elementos; así en esta situación: Luis tiene una bolsa con 18 canicas de las que 2/3 son azules, ¿cuántas son azules?, el conjunto de 18 objetos se ha transformado en 12 objetos. Por tanto, la noción de dilatación/contracción es fundamental en este constructo.

El trabajo con cantidades discretas introduce dos interpretaciones distintas del constructo operador (Behr et al, 1993, pág. 19-46), que no se presentan en el caso de actuar sobre cantidades continuas: interpretación como duplicador/partición-reductor y la interpretación como dilatador/contractor.

La interpretación como duplicador/partición-reductor en el caso de hallar los 3/4 de 24 consiste en partir el conjunto inicial en 4 conjuntos (cada uno de los cuales contiene 6 objetos); los 4 conjuntos se cambian por 3 conjuntos (de 6 objetos cada uno), con lo que se obtiene como respuesta un conjunto de 18 elementos. El constructo de fracción como operador en la interpretación duplicador/partición-reductor puede concebirse como una función que cambia el número de conjuntos (unidades), aunque mantiene el tamaño de los mismos, es decir, hay una transformación del número de unidades. En consecuencia para dar esta interpretación al constructo operador los alumnos necesitan tener habilidad en la partición de conjuntos, así como la comprensión de la división partitiva.

En la interpretación de dilatador/contractor la tarea de obtener 3/4 de 24 se resuelve del siguiente modo: el conjunto de 24 objetos se divide en conjuntos de 4 objetos (hay 6 conjuntos de este tipo); cada uno de los conjuntos de 4 objetos se cambia por un conjunto de 3 objetos (el número de estos conjuntos sigue siendo 6); el conjunto resultante al agrupar estos 6 conjuntos da como resultado un conjunto de 18 objetos. En este ejemplo se observan diferencias con la interpretación anterior, por cuanto la fracción como operador se presenta también como una función de cambio pero que afecta a la composición de las unidades, no a su cantidad; hay una dilatación o contracción de las unidades. Para su trabajo con esta interpretación del operador los alumnos necesitan entender conceptos de medida y de división cuotitiva, además de tener habilidad con las particiones.

C.- Números

Con la formalización de la ciencia matemática de finales del siglo XIX, se consolida la noción de cuerpo (Kronecher, Dedekind) como estructura abstracta de la que un ejemplo es el conjunto de los números racionales. Este paso a la formalización exige que estos entes numéricos se desliguen de las magnitudes de las que surgieron: "*La condición para construir una aritmética universal es por tanto la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles*" (Boyer, 1986, pág. 693). Desde esta posición intelectual será posible justificar la construcción formal del cuerpo conmutativo de los números racionales, puesto que así se elude tener que evidenciar la existencia del opuesto y del inverso de cada número desde la manipulación de magnitudes extensivas.

Fiel a ese espíritu de enseñar una matemática formal, la reforma educativa de los años 70 en España potenció una enseñanza de los números racionales en la que predomina la construcción de una estructura de cuerpo sobre entes numéricos abstractos. Y en este contexto pasó a ocupar un lugar predominante en los currícula la noción de fracción con significado de función racional, tal y como se recoge en el siguiente texto escolar:

> *Una fracción es un operador que actúa sobre los números o sobre las cantidades y hace dos cosas: multiplica por el numerador y divide por el denominador.*
> (Seminario Didáctico "Bruño" de Matemáticas, 1978, pág. 48)

En la presentación de las nociones de fracción como operador se utilizaron recursos variados, entre los que cabe destacar las máquinas operadoras (Dienes, 1972). También hubo controversias entre profesionales que defendían la presentación tradicional de la fracción como relación parte-todo frente a la presentación como operador; en este sentido, el trabajo de Oliveras (1976) pone de manifiesto que los conocimientos personales de los escolares no presentan diferencias significativas al potenciar uno u otro de los significados mencionados, aunque la complejidad y dificultad es mayor en el caso del operador.

Finalmente, la reforma curricular recogida en los Programas Renovados de 1982 provocó que los textos escolares diesen prioridad al significado de la fracción como relación parte-todo, y que, por necesidad, presentasen el significado de fracción como operador bajo títulos muy significativos: *Cómo se calcula la fracción de un número* (Gil, J. y García,P. 1988).

## II.6. La fracción como relación parte-todo

La reforma de los currícula españoles de la Ley General de Educación, comenzada a principios de los años 80 con la publicación de los llamados Planes Renovados, pretendía disminuir la presentación abstracta de los conceptos matemáticos, lo que potenció la introducción de los números racionales mediante la relación parte-todo. Nos servimos del texto de Llinares y Sánchez,

(1988) para interpretar la noción de fracción como relación parte-todo: *Se presenta esta situación cuando un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que pueden estar formado por varios "todos"). El todo recibe el nombre de unidad.*

**II.6.1. Tratamiento curricular**

Esta idea de fracciones aparece en manuales del siglos pasado en términos similares a los que podemos encontrar en textos escolares actuales; en dichos manuales, que carecen de recursos gráficos, se recalcan las ideas de unidad y de partes iguales de la unidad:

> *El quebrado expresa dos relaciones: una con la unidad entera, y otra con la unidad fraccionaria, ó bien expresa el número de partes en que está dividida la unidad, y el número de estas partes que se toma. Así, su expresión tiene que ser también doble y consta de dos números que se llaman términos del quebrado.*
>
> *Llámase DENOMINADOR el que expresa la relación que tiene el quebrado con la unidad entera, ó sea, el número de partes en que ésta se halla dividida.*
>
> *NUMERADOR, el que expresa la relación que tiene el quebrado con la unidad fraccionaria elegida, ó sea, el número de partes iguales de la unidad entera que contiene.*
>
> (Gavilán, M. 1986, pág. 64-65)

El significado de fracción como relación parte-todo se introduce mediante un proceso instructivo que presenta características como las siguientes:

a) Buena parte del conocimiento se adquiere de forma visual, pues los escolares deben realizar tareas como las que señala (1993, pág. 270) :

*1.- Sombrear 1/2 del rectángulo dado.*

*2.- Aquí hay cuatro bolas. Tres de ellas son rojas y una es amarilla. ¿Qué parte o fracción de las bolas son rojas?*

En estos ejemplos aparecen dos tipos de cantidades sobre las que se trabaja: cantidades continuas (generalmente una región geométrica) o un conjunto discreto de objetos que son idénticos. En general, se recurre a la presentación de las fracciones como superficies destacadas (mediante sombreados o coloreados), incluidas en una superficie representada por una figura geométrica (generalmente círculos o rectángulos). Y en algunos casos se presenta la fracción mediante conjuntos de objetos indistinguibles, de los que unos se presentan de manera destacada (con sombras o colores), y otros aparecen en blanco o dejando constancia de su ausencia. .

b) Puesto que la tarea encomendada al alumno es la de relacionar la parte distinguible de la parte total, éste debe hacer traducciones entre representaciones gráficas y simbólicas.

c) En la representación gráfica el alumno debe saber interpretar aquellos aspectos que representan el todo, los que representan las partes y determinar las relaciones que hay entre ambos.

d) Las representaciones gráficas que se hacen de objetos reales no son siempre reconocibles por el alumno puesto que se tiende a la simplificación de esos objetos mediante figuras rectangulares o circulares (en cantidades continuas) o bien simples círculos (en cantidades discretas)

### II.6.2. Elementos para construir el conocimiento personal de los escolares

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del alumno son las siguientes:

A.- La definición del "todo"

No es sencillo transmitir al alumno la idea que subyace en el término "todo" puesto que en realidad se hace referencia a un proceso de medida pero que no se ha explicitado, por lo que se omite citar la unidad de medida: "*Cuando una unidad, objeto o figura, la partimos en trozos iguales y nos referimos a uno o varios de esos trozos utilizamos las fracciones*"[2].

La noción de "todo" sustituye a la de unidad, lo que lleva asociada la tarea de medir. La no explicitación de la noción de unidad exige que sea el propio alumno el que la construya, lo que puede producir una carencia en un aspecto del conocimiento considerado básico por autores como Piaget. El siguiente protocolo[3] ilustra sobre las dificultades de la gestión de una clase en la que la noción de unidad no queda explicitada dando lugar a interpretaciones arbitrarias:

*Profesora: Nada más empezar con las fracciones vosotros tenéis una pregunta en vuestro libro que se llama "La fracción y sus términos". Para empezar a hablar de fracción tenemos que saber qué es una unidad. Y todos sabéis qué es una unidad. A ver* Javi, ¿qué es una unidad?

*Javi: Un objeto, una cosa que la podemos fraccionar.*

*Profesora: Un objeto, una cosa. Eso es lo que es una unidad, lo ha dicho Javi. A ver, ¿qué unidades tengo sobre la mesa?*

*Javi: Una tableta de chocolate.*

*Profesora: Tengo una, ¿no?*

*Un alumno: Sí*

*Profesora: Por lo tanto, eso es una unidad. ¿Qué más Silvia?*

*Silvia: Un quesito.*

---

[2] Lamadrid, C. et al, (1987)

[3] Este protocolo nos fue proporcionado por Julia Centeno (1992) y no ha sido publicado

*Profesora:* *No. Uno sólo no.*
*Silvia:* *Una caja de quesitos.*
*Profesora:* *Es una unidad.*

Además, la propia indefinición del "todo" provoca errores entre los estudiantes a quienes se les presentan tareas de comparación de áreas utilizando 'todos' del mismo tamaño. Esto produce que los alumnos desatiendan el tamaño de los 'todos' de los que provienen las partes (Armstrong-Novillis, 1995, pág 16) y que, en consecuencia, se limiten a la comparación de partes que proceden de divisiones de unidades de distinto tamaño.

La ocultación de la unidad de medida obstaculiza la identificación de las fracciones del tipo a/a con la unidad, pues lo estudiantes tienden a señalar que ese tipo de fracciones representa el todo, o que han cogido a elementos, pero no pueden indicar que vale la unidad puesto que no se les ha presentado como tal.

B.- La igualdad de las partes

En cantidades continuas el alumno se encuentra con la necesidad de identificar la igualdad de dos regiones planas, lo que conlleva la igualdad de dos áreas. Pero esta igualdad es visual puesto que lo que se requiere del estudiante es que identifique las partes destacadas de un determinado gráfico, y no que compruebe la igualdad real del tamaño de las partes. Es por ello que se suele presentar al alumno figuras claramente diferenciadas, en las que su trabajo de traducción de la representación gráfica a la simbólica se haga por técnicas de recuento. Es más, el alumno puede no identificar como una fracción a partes de un gráfico, si la parte destacada no llega a ser fácilmente identificable como resultado de una división del "todo" en partes iguales a una dada. Además, en este juego de delimitar la presentación de las fracciones en forma de gráficos, el trabajo escolar llega a utilizar determinadas figuras geométricas para cada tipo de fracción, lo que conlleva dificultades para la instrucción sobre el orden.

Si el trabajo de los alumnos se realiza con cantidades discretas la igualdad de las partes no tiene dificultades por cuanto cada uno de los objetos constituye una parte. Sin embargo, como indica Marshall (1993, pág. 272) las dificultades aparecen cuando los objetos no son idénticos, como es el caso de formar un conjunto de frutas con peras, manzanas y naranjas. En este supuesto, la fracción del conjunto de frutas que representan las manzanas no se ajusta a la idea de partición en partes iguales, por cuanto los objetos que forman el conjunto de frutas son claramente distinguibles. Item más, esta situación de reparto de frutas que puede parecer artificiosa ante los estudiantes, adquiere pleno sentido si se cambian los objetos a repartir, por ejemplo a los alumnos sí que les parece coherente que se repartan tres pizzas de distinta composición (o tres tartas, o tres helados de distintos sabores) entre 3 chicos, de modo que cada uno de ellos reciba una parte de cada uno de los objetos a repartir.

C.- Las fracciones impropias

La propia instrucción provoca obstáculos de interpretación de las llamadas fracciones impropias, por cuanto al ocultar la unidad en las tareas de medida se crea en el alumno el significado exclusivo de la fracción con el numerador menor o igual que el denominador, como ocurre en otra parte del protocolo anterior:

*Profesora:* *Alguien llegó a su casa y vio las dos cajas de quesitos y se comió los ocho de aquí y alguno más de la otra caja: uno. Se habría comido nueve. ¿Qué fracción se habrá comido?*

*Un alumno:* *Nueve octavos.*

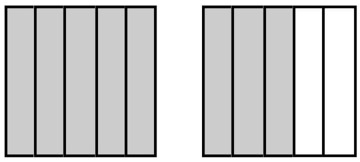
*José Luis:* *Pero yo creía que es que se sumaban las partes que habías dividido*

*Profesora:* *Pero sigue estando dividida en ocho.*

*José Luis:* *Pero si coges de ahí ocho y de la otra, tú coges de las dos cajas, coges de las dos a la vez*

*Profesora:* *Pero la unidad sigue dividida en ocho. Aunque tú hayas cogido una de aquí y ocho de la otra has cogido en realidad nueve, pero las dos unidades siguen divididas en ocho.*

Esta situación viene provocada porque al conceptualizar la fracción se señala que el todo se divide en partes iguales, de las que se toman tantas partes como indica el numerador. Por tanto, el alumno se crea la idea de que el número de partes que se cogen debe ser menor o igual que las que se han hecho. Esta situación se agrava porque el proceso de medida sigue oculto y, en consecuencia, no se interpreta la fracción como medida de una cantidad de magnitud que puede ser mayor que la unidad. En este sentido, venimos constatando que al formular la pregunta: ¿qué fracción hay representada en este gráfico?



durante los últimos años, aproximadamente la mitad de los estudiantes para maestro responden 8/5 y el resto 8/10. La discusión entre ellos no se termina hasta que no se hace referencia a la unidad que se considera

D.- Las expresiones fraccionarias que contienen algún cero

Los estudiantes encuentran dificultades para interpretar expresiones de cualquiera de la formas a/0, y 0/0. Estas dificultades provienen de la forma en que interpretan el significado de la fracción como relación parte-todo. Así, algunos estudiantes para maestro responden que, en el primer caso dicha fracción equivale a 0 porque no se han hecho partes; mientras que en el segundo caso suelen dar respuestas provenientes de su experiencia con los límites: para unos es infinito, para otros es indeterminado y para otros es 0. Lo cierto es que son muy pocos los estudiantes que niegan la existencia de tales expresiones.

Tampoco es unánime la respuesta en el caso de interpretar el significado de 0/a, pues para muchos estudiantes no tiene sentido el realizar el fraccionamiento de la unidad para después no elegir algunas partes.

En los textos escolares que hemos revisado, tanto de E.G.B. como de E.S.O., es casi unánime el presentar a los escolares la fracción con el significado de relación parte-todo. Es más la mayor parte de los contenidos sobre relaciones y operaciones entre fracciones se ejemplifica o justifica con ese significado de la fracción.

Además de este significado los textos escolares suelen introducir los significados de cociente y operador, pero su presencia parece determinada por necesidades de secuenciación de los contenidos. En efecto, el significado de cociente se utilizará posteriormente para conectar las fracciones y las expresiones decimales; mientras que el significado de operador permitirá la resolución de problemas. La instrucción sobre las fracciones sería más adecuada si desde estos textos también se fortaleciesen las conexiones entre los distintos significados de fracción, puesto que *si los estudiantes aprenden solamente la interpretación de la fracción como relación parte-todo, tienen serias limitaciones para una sólida comprensión de las fracciones* (Kerslake, 1986).

## II.7. La notación decimal

La construcción formal del conjunto de los números decimales positivos se puede hacer como extensión de N añadiendo un elemento d, tal que 10d = 1, obteniendo un conjunto engendrado por todas las potencias de d, por sus productos y por sus sumas. También se puede construir el conjunto de los números decimales positivos como extensión de Z, buscando las soluciones de la ecuación $10^n . x = a$, siendo a un número entero y n un número natural. (Brousseau, 1993)

### II.7.1. Tratamiento curricular de la notación decimal

La tendencia mayoritaria de los manuales escolares consultados es la de construir las fracciones decimales positivas como una restricción de Q, considerando solamente aquellos números racionales que pueden expresarse mediante una fracción decimal. Y una vez construido el conjunto de las fracciones decimales se introduce el convenio que permite pasar de las fracciones decimales a la notación decimal. Ahora bien, bajo esta técnica se oculta una relación entre fracciones ordinarias y fracciones decimales que, históricamente, no fue sencilla de establecer y que tuvo dificultades de aceptación. En el siguiente texto escolar se ven reflejadas algunas de ellas, y cómo se soslaya el debate profundo sobre la aparición de números periódicos

> *182. ... El número de partes en que se divide la unidad para obtener el quebrado no tiene que satisfacer a más condición que a la de estar contenida exactamente una de esas partes en la cantidad que se mide, pero si en vez de dividir la unidad en un número cualquiera de partes, la dividiésemos en 10, 100, 1000, ...,*

*entonces los quebrados que nos expresan exacta o aproximadamente el valor de la cantidad, toman el nombre de quebrados o fracciones decimales.*
*Desde luego se comprende que empleando la ley decimal en las divisiones y subdivisiones de la unidad, no siempre se podrá expresar exactamente el valor de las cantidades que apreciadas por quebrados ordinarios podría hacerse con exactitud; ...*
*183. ....Observando que cada unidad de un orden decimal se forma de 10 del inmediato inferior, podremos escribir las fracciones decimales sin necesidad de ponerles denominador, haciendo uso del valor relativo de las cifras; así, la primera que está a la derecha de las unidades expresará décimas, la segunda centésimas, la tercera milésimas , ...*
(Sánchez Vidal, B., 1866, pág. 158-159).

En la actualidad, aunque los autores disponen de la posibilidad de optar por introducir algún concepto concreto de las fracciones, los currícula oficiales obligan a la instrucción sobre la escritura decimal de las fracciones. Pero ante las dificultades de esta tarea no es de extrañar que haya textos escolares en los que se manifiesta una cierta tendencia a soslayar la conceptualización de las fracciones decimales y a potenciar los aspectos más normativos:

***Fracciones decimales*** *son aquellas cuyo denominador es la unidad seguida de ceros; v.g.: 3/10, 5/100, 12/1000*
*Las unidades decimales se llaman décimas, centésimas, milésimas, ... según sean de primero, segundo, tercer ... orden después de la unidad fundamental.*
***Escritura de las fracciones decimales.-*** *Para representar números decimales, se escribe, primero, la parte entera, y, si no la hay, se pone un cero (llamado cero de enteros); a continuación se coloca una coma, y después se escriben las cifras decimales, haciendo que cada una ocupe el lugar correspondiente a su orden.*
***Reducción de fracciones ordinarias a decimales.-*** *Una fracción puede considerarse como un cociente indicado. Así que; para reducir una fracción ordinaria a decimal se divide el numerador por el denominador y se prolonga la división hasta el orden que se desea.*
*Las fracciones decimales que resultan de esta operación son de dos clases: exactas y periódicas. Son exactas cuando alguno de los restos es cero. Son periódicas cuando ningún resto es cero.*
( Editorial Luis Vives, 1947, pág. 66-71)

Como características de este tópico podemos citar:

a) Buena parte del conocimiento se percibe por medio de representaciones gráficas, puesto que la división de la unidad en décimas, centésimas y milésimas son presentadas directamente a los estudiantes.

b) El alumno debe hacer traducciones entre números enteros y decimales, representaciones gráficas y notaciones decimales.
c) En la representación gráfica el alumno debe saber interpretar aquellos aspectos que representan las unidades fraccionarias decimales, las relaciones de estas partes con la unidad y las normas de escritura de la notación decimal.
d) En la notación decimal el alumno debe agrupar partes decimales fraccionadas de la unidad que le son presentadas.
e) Aunque teóricamente no hay limitaciones en la cantidad de unidades y fracciones decimales, existen limitaciones técnicas que exigen la generalización del proceso a partir de unos pocos casos particulares.

### II.7.2. Elementos para construir el conocimiento personal de los escolares

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del alumno son las siguientes:

<u>A. Las divisiones en 10 partes iguales.</u>

En el trabajo con fracciones el alumno ha dividido unidades en partes iguales en una sola acción, aunque el número de partes varíe con los distintos ejemplos. No le resultará familiar la exigencia de dividir la unidad exclusivamente en 10 partes iguales, ni que se deban hacer sucesivas subdivisiones (siempre en 10 partes) de las unidades fraccionarias decimales.

<u>B. Las características del sistema de numeración decimal.</u>

Elementos esenciales de este conocimiento son el valor relativo de las cifras según la posición que ocupan y la suma de las cifras de cada posición. La extensión de este principio para cantidades no enteras exige de una comprobación operatoria con ayuda de las fracciones, pero que encierra dificultades conceptuales por cuanto implica la interpretación de las potencias negativas de la base del sistema de numeración, las potencias negativas de 10.

<u>C.- La división no entera</u>

La escritura decimal de las fracciones se hace a través de la extensión del algoritmo de la división entera. Ello exige una interpretación de la fracción como cociente y justificar la extensión del algoritmo de la división entera. Además, la aparición de cocientes periódicos encuentra dificultades de justificación para estudiantes que están habituados a concebir la escritura de las fracciones con un número finito de símbolos.

En los apartados anteriores se han analizado los diferentes significados de las fracciones y de las expresiones decimales; en cada uno de dichos apartados se ha definido uno de los significados estudiados, se han explicitado las características de dicho significado y se han detallado las exigencias de la construcción del conocimiento personal del alumno; además, se ha comentado su presencia en los textos escolares. Esta información será de gran utilidad para tomar decisiones en el sentido de sustentar nuestra propuesta didáctica sobre uno de los significados de fracción analizados,

## II.8. Significado de la fracción como cociente y notación decimal

Uno de los propósitos de esta investigación es proporcionar a los estudiantes para maestro unas herramientas que les permitan incrementar su comprensión de los Números Racionales y, en particular, que fortalezcan las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal.

Para alcanzar este propósito hemos diseñado una secuencia didáctica que vamos a implementar en un grupo natural de estudiantes para maestros. Las lineas generales de esta propuesta, que se detallan en el Anexo III.1, consisten en introducir la fracción con un significado de cociente y, posteriormente, establecer conexiones entre este significado y el de las expresiones decimales.

De los reflexiones anteriores sobre los distintos significados de la fracción, extraemos algunas consideraciones que señalan lo inadecuado de conectar las notaciones fraccionaria y decimal sobre la base de otros significados distintos del cociente.

Veamos las más importantes:

- Los estudiantes para maestro conocen la relación parte-todo como significado prioritario de las fracciones, pero desde este significado son débiles las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, por cuanto el estudiante asocia la fracción a una parte de la unidad compuesta por partes alícuotas de la misma, mientras que las expresiones decimales exigen interpretar la fracción como agregación de partes de unidad de diferentes tamaños.
- Desde el significado de la fracción como resultado de la medida de magnitudes se puede abordar la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal, pero se encuentran las dificultades técnicas inherentes a la continuidad de la medida, salvo que la instrucción se cimentase en la participación pasiva de los estudiantes (limitando su trabajo a la observación de representaciones gráficas), supuesto que se aleja de nuestras intenciones educativas.
- Si la conexión entre notaciones fraccionaria y decimal se aborda desde el significado de razón encontramos dificultades para utilizar un mismo modelo en el que asentar el significado de la fracción y el significado de las expresiones decimales, y tanto si se trabaja en contextos discretos como si se hace en contextos continuos. En efecto, hay dificultades para justificar la transformación de dos cantidades de magnitud en una sola; además, el resultado implica un fraccionamiento que tampoco se justifica con facilidad.
- Desechamos utilizar el significado de operador de la fracción por cuanto se presentan dificultades si se utiliza un modelo en el que hay objetos discretos puesto que las exigencias del operador llevaría al fraccionamiento de los objetos; si el modelo utiliza magnitudes continuas las dificultades aparecerían asociadas a la continuidad de la medida; y si se utiliza números sin medida el operador exige la operatividad con expresiones decimales, situación que no es aconsejable por cuanto no se produce una conexión

entre los significados de la fracción y de la expresión decimal.

La decisión de utilizar la fracción con el significado de cociente viene determinada por ser dicho significado el que facilita las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. La decisión queda justificada por los argumentos que se exponen a continuación, argumentos que vienen avalados por el estudio que se ha hecho anteriormente sobre los significados de las fracciones y de las expresiones decimales:

- La fracción con significado de cociente no ha sido objeto prioritario de enseñanza en los currícula de E.G.B. Los estudiantes objeto de este estudio cursaron dichas enseñanzas y, por tanto, es un significado de la fracción que se reforzará con nuestra propuesta didáctica.
- El utilizar el significado de cociente facilita la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal por cuanto, mediante una acción de reparto en varias fases, la fracción puede presentarse como agregación de cantidades de magnitud de diferentes tamaños, tal y como se detalla en el Capítulo III.
- Al utilizar el cociente con el sentido de reparto igualitario se puede construir un modelo físico que sea estable para dotar de significado tanto a la fracción como a las expresiones decimales,
- El uso de la fracción con significado de cociente permite al estudiante para maestro construir su conocimiento personal a través de representaciones gráficas y también por medio de reflexiones mentales.

## II.9. Definición de un modelo para conceptualizar el significado de reparto de la fracción positiva.

En este apartado nos proponemos delimitar las componentes de un modelo basado en el significado de reparto y estable para la enseñanza de las fracciones positivas y de sus propiedades; analizaremos las posibilidades que ofrece y los inconvenientes o limitaciones que encierra su utilización. Este mismo modelo lo utilizaremos posteriormente para la instrucción sobre las expresiones decimales.

### II.9.1. La acción de repartir una cantidad

Las viejas tareas humanas de contar, ordenar, identificar, ... dan lugar a la aparición de sistemas de representación para los números naturales. Además, al realizar las acciones de juntar, comparar, etc, se abstraen las operaciones y relaciones numéricas, que dan lugar a nuevos símbolos +, :, >, ... con los que se representan estas relaciones y operaciones.

Ahora nos planteamos la revisión de otras tareas humanas tradicionales, como son distribuir herencias, repartir botines, repartir alimentos o bebidas, ...., en suma, repartir cantidades de magnitud entre un número de personas, o hacer distintos grupos con la cantidad inicial.

En lo sucesivo, indicamos con la expresión **a : b** que se distribuyen **a** unidades de magnitud en **b** grupos, o que se reparten a unidades de magnitud entre b personas. En resultado del reparto, lo que corresponde a cada persona, será una cantidad de magnitud expresada por un número; para indicar lo que corresponde a la primera persona o grupo escribiremos $c_1$, para la segunda persona $c_2$, y así hasta $c_b$ que indica lo que recibe la persona de orden b. De este modo, el resultado del reparto a: b se puede escribir de forma ordenada mediante la expresión $a : b = c_1, c_2, c_3, ...., c_b$.

Con esta simbología estudiamos las distintas formas que puede adoptar la tarea de repartir y el resultado que produce tal reparto.

### II.9.2. Tipos de reparto

Consideramos dos tipos de reparto:

a) Reparto no igualitario:

a.1) Heredero universal: uno de los individuos recibe toda la cantidad y, en consecuencia, los demás no reciben cantidad alguna a:b = a, 0, 0 , ..., 0

a.2) Repartos desiguales:

- Desigualdades aditivas: un individuo recibe n unidades más que el otro. En el caso de 2 individuos, esta situación conduce al resultado
  a : 2 = n + (a-n):2, (a-n):2
- Repartos directamente proporcionales: si se reparten a unidades entre b individuos directamente proporcional a los números n, m, ....p, el resultado del reparto sería:

$$a : b = \frac{a}{n+m+...+p} \text{ x } n, \quad \frac{a}{n+m+...+p} \text{ x } m, ..., \quad \frac{a}{n+m+...+p} \text{ x } p$$

- Repartos inversamente proporcionales: si se reparten a unidades entre b individuos inversamente proporcional a los números n, m, ....p, el resultado del reparto sería:

$$a : b = \frac{a}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+...+\frac{1}{p}} \text{ x } \frac{1}{n}, \quad \frac{a}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+...+\frac{1}{p}} \text{ x } \frac{1}{m}, ..., \quad \frac{a}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+...+\frac{1}{p}} \text{ x } \frac{1}{p}$$

b) Reparto igualitario

Este tipo de reparto es el que vamos a utilizar en nuestra propuesta didáctica; por tanto, vamos a hacer un análisis más detallado sobre las formas de hacerlo y sobre los resultados que se producen.

En el reparto igualitario se exige que cada uno de los entes o individuos participantes reciba igual cantidad de magnitud y, en consecuencia, para indicar el resultado del reparto basta con especificar la cantidad de magnitud que corresponde a uno cualquiera de los participantes. Para obtener este resultado, hay que repartir la cantidad de magnitud total de que se dispone en tantos grupos iguales como el número de participantes; pero dicho resultado es una cantidad de magnitud que debe expresarse con una unidad de medida, unidad de medida que ya es conocida: aquella con la que se indica la cantidad de magnitud total.

Por tanto, en la realización del reparto hay que tener en cuenta las peculiaridades de la unidad de medida utilizada, y esto da lugar a distintas situaciones de reparto y a diferentes formas de expresar el resultado:

SITUACIÓN I. *Las unidades no admiten fraccionamientos.*

Estamos en la situación de repartir un conjunto de objetos indistinguibles entre varias personas o grupos, a cada uno de los cuales les corresponderá un número igual de objetos. Este reparto de puede efectuar de dos formas o procedimientos diferentes:

Procedimiento a: reparto en una sola fase

Se hace el recuento de la totalidad de los objetos del conjunto y el número resultante se divide por el número de participantes; el resultado de dicha división indica el número de unidades que recibe cada participante.

Con el sistema de representación de los números naturales el reparto se simbolizaría como a : b = c, entendiendo que hay a unidades para repartir entre b individuos y que cada uno de ellos recibe el mismo número de unidades, c. En el supuesto de que a no sea múltiplo de b quedará un resto, r, que no corresponde a ninguno de los participantes.

En este proceso se ha utilizado el concepto de división entera con sentido partitivo; la medida de contar nos proporciona en una sola fase, o acto de medir, el resultado del reparto.

Procedimiento b: reparto en varias fases:

No hay un recuento inicial del número de unidades a repartir, sino que se hace una estimación sobre el número de unidades que puede darse a cada participantes, de modo que todos reciban el mismo número. Con las unidades que resten proceder de forma similar hasta agotar la cantidad a repartir o hasta que no se pueda proseguir el reparto porque hay menos unidades que individuos.

Con el sistema de simbolización utilizado podemos escribir el resultado del reparto en la forma $a : b = c_1 + c_2 + ....c_p$. Donde $c_i$ indica el número de unidades que recibe el individuo en la fase i, siendo p el número total de fases que se han cubierto en el reparto.

Este proceso de reparto también conlleva la utilización de la división partitiva; la nueva perspectiva produce variaciones en la manera de obtener el resultado que, en este caso, se hace con el siguiente pseudoalgoritmo:

Fase 1: se dan $c_1$ unidades a cada individuo, $a > c_1b$, por lo que se consumen $c_1.b$ unidades y restan por repartir $a - c_1.b$ unidades.

Fase 2: a cada uno de los individuos se les dan $c_2$ unidades, $a-c_1b > c_2b$, se consumen $c_2.b$ unidades y quedan por repartir $(a-c_1.b) - c_2.b$ unidades.

.......

Fase p: se dan a cada individuo $c_p$ unidades, se consumen $c_p.b$ unidades, quedan r unidades por repartir, $b > r$, y el proceso ha concluido.

De esta forma, cada individuo recibe la suma de las unidades recibidas en cada fase y podemos escribir $a : b = c_1 + c_2 + ... + c_p$, resultado que se puede esquematizar en la forma:

| **a** | **b** |
|---:|:---|
| $-\underline{\ \ c_1b}$ | $c_1$ |
| $a-c_1b$ | |
| $-\underline{\ \ c_2b}$ | $c_2$ |
| $(a-c_1b)-c_2b$ | |
| ... | ... |
| $-\underline{\ \ c_pb}$ | $c_p$ |
| **r** | $\mathbf{c_1 + c_2 + .... + c_p}$ |

En cada una de las fases de este proceso los valores de $c_i$ son arbitrarios (es un pseudoalgoritmo), pero la suma final, el resultado del reparto es único.

SITUACIÓN II. *Las unidades a repartir admiten el fraccionamiento.*

El proceso de reparto de unidades enteras sería similar a los utilizados en las situación I, por lo que nos vamos a centrar en el proceso de repartir a unidades fraccionables entre b individuos, siendo b > a. Este reparto también puede hacerse por dos procedimientos diferentes:

Procedimiento a: reparto en una sola fase.

Fraccionar cada unidad en tantas partes iguales como individuos haya y dar a cada uno de los individuos una parte de cada unidad. El resultado del reparto, lo que recibe cada individuos es a partes de tamaño 1/b de unidad.

Lo que se hace es formar un conjunto de elementos iguales de tamaño 1/b de la unidad; el cardinal de este conjunto es a.b, y con ese número se hacen b grupos iguales. Por tanto, cada participante recibe igual cantidad de magnitud, a x 1/b unidades, que se obtiene como agregación de partes iguales de unidad.

Procedimiento b: reparto en varias fases.

De forma similar a como se expuso para el caso de unidades no fraccionables, podemos concluir que cada uno de los individuos recibe la cantidad de magnitud que resulta de la agregación de las partes de unidad recibidas en cada una de las fases del proceso de reparto. Estas partes pueden ser de tamaños diferentes.

**II.9.3. Componentes del modelo.**

En lo sucesivo nos centraremos en la SITUACIÓN II, en el estudio de un problema que no se resuelve con números naturales, pues el hecho de que las unidades sean fraccionables obliga a proseguir el reparto aunque el número de unidades sea menor que el de participantes. De este modo, los individuos pueden recibir partes de la unidad, y esta cantidad de magnitud no es representable con números naturales.

Es este contexto, vamos a explicitar un entorno físico, un modelo, desde el que construir el significado de la fracción como cociente. Este modelo viene caracterizado por las siguientes componentes:

- los objetos son de forma circular, como es el caso de las tortillas españolas;
- la magnitud que se considera es la superficie, más concretamente se hará referencia a la superficie del círculo que resulta de la proyección de los objetos sobre el plano;
- la acción a realizar es la de repartir en partes iguales.

La elección de este modelo queda justificada por las siguientes consideraciones:
- Los objetos de este tipo admiten fraccionamientos diferentes, aunque la exigencia de la igualdad de las partes en que se divide la unidad, o las partes de la unidad, hace que las divisiones se hagan por medio de sectores circulares. De este modo, se evita la aparición de distintas formas de representar una misma cantidad de magnitud. Además, estos objetos están presentes en la vida de los estudiantes y su fraccionamiento es habitual en los hogares y establecimientos comerciales.
- La magnitud elegida es la superficie por cuanto es sencilla su representación en el plano. La igualdad de cantidades de superficie se plasma en la igualdad de los ángulos de los sectores, y que puede comprobarse por percepción visual o con el transportador de ángulos.
- La acción de repartir se ha elegido porque muestra una visión de las fracciones hasta ahora poco utilizada por los futuros profesores, y porque permite establecer unos nuevos sistemas de representación que ponen de manifiesto unas estructuras polinómicas subyacente a las fracciones que, a nuestro juicio, facilitan las conexiones entre la notación habitual de las fracciones y su escritura con la notación decimal. Además, y desde la perspectiva educativa, esta elección nos permite mostrar a los futuros maestros la construcción de sistemas de representación que van a exigir controlar las relaciones sintácticas y semánticas que los caracterizan.

### II.9.4. Relaciones y operaciones en el modelo

Una vez concretado el modelo, interesa indagar sobre los significados y caracterización de las relaciones y operaciones que se pueden establecer como resultado de las acciones realizadas.

**1.-** Para indicar que se reparten de forma igualitaria a unidades entre b individuos se utiliza la expresión **a : b**, ya que esa misma escritura se utiliza para los repartos entre números naturales y también en este caso lo entendemos como la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los participantes en el reparto, como el resultado del reparto.

Consecuencias

$a : b \neq b : a$

$0 : b = 0$

$a : a = 1$

$a : 0$ no tiene sentido

**2.-** Repartos equivalentes: dos repartos igualitarios a:b y c:d son equivalentes si en ambos repartos los individuos reciben igual cantidad de magnitud.

Debe verificarse que c=na y d=nb (1), puesto que así el reparto c:d se transforma en n repartos de la forma a:b, lo que garantiza que todos los participantes reciben la misma cantidad de magnitud.

De las igualdades (1) se tiene ncb=nad, multiplicando miembro a miembro c=na y nb=d, de donde, cb = ad.

**3.-** Un reparto a:b es mayor que otro reparto c:d si a los participantes en el reparto primero les corresponde mayor cantidad de magnitud.

Para verificar cuál de dos repartos es mayor, habrá que establecer condiciones de comparación a través de repartos equivalentes. De este modo se comparan fácilmente los repartos si:

a) las unidades a repartir son iguales

Dados los repartos a:b y c:d, se buscan repartos equivalentes con igual número de unidades a repartir ac:bc y ca:da. Cuanto menor sea el número de participantes, mayor será la cantidad de magnitud que les corresponda, por tanto, $a : b > c : d$ sii $bc < ad$

b) el número de participantes es el mismo

De a:b y c:d, se buscan repartos equivalentes con igual número de participantes, ad:bd y cb:db. Será mayor el reparto en el que haya más unidades a repartir entre un mismo número de participantes. Por tanto, $a:b > c:d$ sii $ad > bc$.

**4.-** Suma de repartos. Se conceptualiza como suma de cantidades de magnitud que corresponde a un individuo que participa en los repartos a : b y c : d.

Para determinar la suma (a : b) + (c : d) hay que recurrir a repartos equivalentes en los que haya un mismo número de participantes

$(a : b) + (c : d) = (ad : bd) + (cb : db)$

Y, puesto que el número de participantes en ambos repartos es el mismo, se puede obtener el resultado en un solo reparto (ad + cb) : bd.

**5.-** Producto de un natural por un reparto n x (a : b)

Es la reiteración de n repartos iguales, por lo que, de acuerdo con el resultado de 4, n x (a : b) = (n x a) : b

**6.-** División de un reparto en m partes iguales (a : b) / m

Si lo que recibe un participante se divide en m partes iguales equivale a decir que el resultado es el mismo que el que se logra si en vez de repartir a unidades entre b individuos se hace de a unidades entre bxm individuos, puesto que cada uno de los b individuos iniciales ha de repartir su parte con otros m individuos.

El resultado anterior es equivalente al que se expresa en la forma (a

: b) / m = a : (bxm), entendiendo que la división como aplicación, como transformación de una cantidad en su emésima parte

**7.-** La fracción de un reparto $\frac{n}{m}$ x (a : b)

Se debe entender como una transformación, como una composición de aplicaciones: una multiplicación, n, y otra división, m. Teniendo en cuenta los puntos 5 y 6,

$$\frac{n}{m} \text{ x } (a : b) = \{n \text{ x } (a : b)\} / m = na : bm$$

**8.-** Reparto inverso de a : b

No se puede dar significado en el modelo. Tomando la concepción matemática se puede comprobar que hay una transformación del reparto que produce la unidad y que a esa transformación se le podría denominar inversa del reparto

$$\frac{b}{a} \text{ x } (a : b) = (bxa) : (axb) = 1$$

**9.-** Relaciones de orden notables.

*I. Si a : b < c : d entonces a : b < (a + c) : (b + d) < c : d*

Si un reparto es mayor que otro lo que indica es que los individuos que participan en ese reparto reciben mayor cantidad de magnitud que los que participan en el otro reparto. Al hacer un reparto de todas las unidades entre todas las personas se igualará la situación; es decir, el nuevo reparto está situado entre los dos dados inicialmente, porque los que recibían más cantidad pasan a recibir menos, mientras que los individuos que recibían menor cantidad pasan a recibir una cantidad mayor.

Justifiquemos la doble desigualdad:

De la desigualdad a : b < c : d se deduce que los d individuos que participan en el reparto del segundo miembro están recibiendo una mayor cantidad de magnitud, más exactamente reciben una cantidad mayor que los b individuos que participan en el otro reparto; luego, están recibiendo (c : d) - (a : b)

Si todos los individuos que participan en los repartos, b+d, han de recibir igual cantidad, se deberá repartir la cantidad que reciben de más d individuos, es decir, hay que repartir d[(c:d)-(a:b)] entre los b+d individuos.

Cada uno de los participantes recibe, por tanto,

(a : b) + [d[(c:d)-(a:b)] : (b+d)]= (a+c) : (b+d) (1)

De (1) se tiene que , a : b < (a+c) : (b+d) puesto que, por hipótesis, a : b< c : d

Además, (a+c) : (b+d) < c : d En efecto,

(c:d) – [(a+c):b+d)]= (c:d) - (a:b) –[d:(b+d)] [(c:d)-(a:b)] =

= [(c:d)-(a:b)] [1 – d:b+d)] > 0

Lo que se pone de manifiesto es una idea que afecta a todo el colectivo, a todos los individuos que participan en el reparto; es, en suma, una distribución igualitaria entre los dos colectivos participantes en los dos repartos, una unión conjuntista.

*II. Si a : b < c : d, entonces a:b < 1/2 [(a:b)+(c:d)] < c:d*

La justificación es sencilla: si dos individuos, que han recibido diferentes cantidades de magnitud, reparten equitativamente los que han recibido entre ambos, la cantidad de magnitud ahora recibida estará comprendida entre las cantidades iniciales.

Nótese que este resultado es diferente del obtenido en I. Mientras que el resultado I se refiere a unas nuevas condiciones de un reparto en el que todos los participantes reciben una nueva cantidad de magnitud, en el supuesto contemplado en este caso el reparto solamente afecta a los dos individuos que participan en este reparto particular, no es para toda la colectividad sino la relación entre dos individuos determinados.

De estas dos relaciones pueden deducirse resultados sobre relaciones de orden entre repartos, como son las siguientes:

a) Hay infinitos repartos mayores que uno dado.

En efecto, dado el reparto a : b siempre es posible encontrar infinitos repartos mayores que él: basta aumentar el número de unidades a repartir para que en los nuevos repartos cada uno de los participantes reciba una mayor cantidad de magnitud. Por tanto se cumplen las desigualdades

a : b < (a+1) : b < (a+2) : b < (a+3) : b < ..... < (a+p) : b < .........

b) Hay infinitos repartos menores que uno dado.

En efecto, dado el reparto a : b siempre es posible encontrar infinitos repartos menores que él aumentando el número de individuos participantes; de este modo en los nuevos repartos cada uno de los participantes recibe una cantidad menor de magnitud, pues hay más participantes. Por tanto se cumplen las desigualdades

a : b > a : (b+1) > a : (b+2) > a : (b+3) > ..... > a : (b+q) > ....

c) Hay infinitos repartos entre dos dados.

Dados los repartos a : b y c : d, siendo a : b < c : d siempre es posible obtener infinitos repartos comprendidos entre ellos y que podemos encontrar de modos distintos:

- Teniendo en cuenta el resultado del punto I anterior se cumple que

a : b < (a + c) : (b + d) < c : d y reiterando el proceso tendremos

a : b < (2a + c) : (2b + d) < (a + c) : (b + d) < (a + 2c) : (b + 2d) < c : d

Una nueva reiteración proporciona a:b < (3a+c):(3b+d) < (2a+c):(2b+d) < (3a+2c):(3b+2d) < (a+c):(b+d) < (2a+3c):(2b+3d) < (a+2c):(b + 2d) < (a+3c):(b+3d) < c:d

Y aplicando la propiedad anterior a cada desigualdad se irán generando infinitos repartos comprendidos entre los dos dados.

- A partir del resultado del apartado II se generan infinitos repartos aplicando de forma reiterada dicha propiedad. Así aparecen desigualdades como estas

$a{:}b < 1/2\,[(a{:}b) + 1/2[(a{:}b)+(c{:}d)]] < 1/2\,[(a{:}b)+(c{:}d)] <$
$< 1/2\,[1/2\,[(a{:}b)+(c{:}d)] + (c{:}d)] < c{:}d$

- Recurriendo a la equivalencia de repartos a:b= ad:bd < cb:db = c:d > ad < cb Por tanto, cualquier número natural n que cumpla ad < n < cb nos permite asegurar que a:b= ad:bd < n:bd < cb:db = c:d.
En consecuencia, la búsqueda de repartos comprendidos entre los dos dados se hace buscando números intermedios entre repartos equivalentes, lo que proporcionará infinitos resultados:

• si $2ad < n_i < 2cb$ ;; $a{:}b= 2ad{:}2bd < n_i{:}2bd < 2cb{:}2db = c{:}d$ ;; (i=1,2..k)
• si $3ad < m_i < 3cb$ ;; $a{:}b= 3ad{:}3bd < m_i{:}3bd < 3cb{:}3db = c{:}d$ ;; (i=1,..s)
...
• si $pad < r_i < pcb$ ;; $a{:}b= pad{:}pbd < r_i{:}pbd < pcb{:}pdb = c{:}d$ ;; (i=1,..t)

Por lo expuesto con anterioridad, el modelo nos permite definir un conjunto cociente, obtenido a partir de la equivalencia de repartos, $Q = \{a : b \,,, a, b \in N, b \neq 0\}$. Y teniendo en cuenta las relaciones y operaciones del conjunto N, estamos en condiciones de establecer que (Q,, +) tiene estructura de semigrupo abeliano con elemento neutro (0 : 1), que es denso respecto del orden y que está totalmente ordenado.

Además, podemos establecer operaciones externas:
a) multiplicación por naturales N x Q ---→ Q ;; (n, a:b)---→ n x (a:b) = na : b
b) división por naturales N x Q ---→ Q ;; (m, a:b) -----→ (a:b) / m = a : bm

Todas las características del modelo que se han reseñado serán tenidas en cuenta al trabajar con los dos sistemas de representación polinómicas, unitaria y decimal, que trataremos posteriormente, en el Capítulo III. Hay que hacer notar que al caracterizar el modelo en el que vamos a trabajar se ha utilizado un sistema simbólico de representación que nos parece muy intuitivo y, en buena parte, familiar al estudiante.

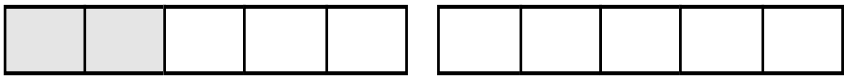
### II.9.5. Sobre la utilización del modelo.

El trabajo que se recoge en esta memoria de doctorado tiene una finalidad claramente educativa y en ese sentido hay que hacer algunas matizaciones sobre las decisiones que se han tomado al utilizar este modelo:
1.- Se pretende que el estudiante para maestro al dar significado al reparto de unidades fraccionables lo haga como resultado de disgregar una cantidad, no con el sentido de totalidad que subyacen en las operaciones de suma y multiplicación de naturales. Por tanto, el trabajo con repartos igualitarios se hace para poner de manifiesto que la división partitiva proporciona información sobre una de las cantidades parciales en que se ha disgregado la cantidad inicial.

2.- Hemos optado por simbolizar el reparto con dos puntos. No se nos escapa la posibilidad de haberlo hecho con la conocida barra de fracciones, con lo que el futuro profesor podría fortalecer el significado de la fracción como resultado de un reparto igualitario; y esa es una de las intenciones de nuestro trabajo.

Sin embargo, la experiencia docente nos ha puesto de manifiesto que entre los estudiantes para maestro el predominio del significado de fracción como relación parte-todo parece obstaculizarles para dotar de otros significados al símbolo a/b.

De hecho, pudimos observar, en varios alumnos, que la tarea de repartir igualitariamente 2 bizcochos entre 5 personas les resultaba de imposible realización: estos alumnos mostraban este dibujo



y argumentaban del siguiente modo:

*He dibujado los dos bizcochos. Después he dibujado la fracción 2/5. Y, ahora, ya no entiendo qué es lo que debo hacer.*
*No sé cuál es el trabajo, pues ya está dibujada la fracción*

3.- Nuestra propuesta de enseñanza persigue dar significado a la noción de reparto, evitando el obstáculo que representa el símbolo de fracción, para establecer posteriormente que el resultado del reparto se puede simbolizar con la notación fraccionaria y con la notación decimal.

4.- Hemos decidido ofrecer un modelo a los estudiantes para que construyan sus conocimientos personales desde la percepción sensorial. Cierto es que los estudiantes para maestros deberían tener desarrollada una gran capacidad de abstracción, pero nuestra experiencia como docentes indica que esta situación no es generalizable, de hecho es importante el número de estos estudiantes que tienen dificultades en el manejo e interpretación de expresiones algebraicas. En todo caso, aquellos alumnos que no necesiten trabajar sobre el modelo pueden prescindir del mismo.

5.- No olvidamos la dimensión profesional en la formación de los futuros profesores, por tanto nuestra propuesta contempla la formación matemática de dichos profesores y también contempla una reflexión de estos estudiantes sobre el modo en que se construye el conocimiento matemático. Desde esta perspectiva, es importante que los estudiantes para maestro perciban el papel que juegan los modelos como medios de formación de conceptos y como recursos para contrastar la veracidad o falsedad de las relaciones simbólicas.

En los siguientes capítulos se recogen observaciones sobre el uso que han hecho estos estudiantes del modelo propuesto, así como las potencialidades y dificultades que se han encontrado en el desarrollo del proceso instructivo.

# CAPITULO III

# REPRESENTACIONES POLINOMICAS UNITARIA Y DECIMAL DE LAS FRACCIONES

El Capítulo II sirvió para presentar un modelo, adecuado para dar significado a las fracciones positivas a partir de la noción de reparto igualitario, con el que los futuros maestros pueden realizar las manipulaciones necesarias de los objetos, físicas y mentales. Como consecuencia de la simbolización de los resultados de las acciones realizadas veremos que aparecen dos sistemas de representación de las fracciones diferentes de los habituales.

Los dos primeros apartados de este capítulo (III.1 y III.2) recogen un estudio en profundidad de esos dos sistemas de representación de las fracciones (a los que denominamos representación polinómico unitario y representación polinómico decimal), y que constituyen las herramientas que se utilizan en el proceso instructivo objeto de este trabajo. A través de estos sistemas se quiere profundizar en la estructura polinómica de las fracciones, con la intencionalidad de fortalecer la comprensión de los Números Racionales, haciendo que se destaquen e intensifiquen las conexiones, que ya conocen los futuros profesores, entre los dos sistemas de representación simbólicos habituales en el sistema escolar: la notación fraccionaria y la notación decimal.

Con la caracterización de estos dos sistemas simbólicos se completa el análisis de las componentes que estructuran el marco teórico del problema de investigación; así que dedicaremos los restantes apartados de este capítulo a enunciar el tipo de estudio que se quiere realizar, la racionalidad del mismo, las conjeturas que se quieren contrastar y, finalmente, las hipótesis de investigación.

## III.1. Sistema de representación polinómico unitario.

Dispuesto ya el modelo interesa, cuantificar el resultado de la acción; es decir, determinar la cantidad de magnitud que corresponde a cada individuo después de hacer el reparto igualitario, medir, en suma, una de las partes en que se han disgregado las unidades de magnitud de las que se disponía inicialmente.

Ahora bien, determinar esas cantidades de magnitud exige establecer una técnica de reparto, optar por alguno de los procedimientos que se indicaron para el reparto igualitario. Además, hay que adoptar un criterio de simbolización del resultado de la acción, un sistema de representación de la cantidad resultante del reparto.

Si tenemos en cuenta que la simbolización se construye como descripción del proceso manipulativo que se realiza en el modelo, será importante fijar la técnica de reparto que se va a seguir, puesto que los resultados serán diferentes. Así, pueden darse distintas posibilidades:

a) La técnica es la de hacer el reparto en una sola fase

El trabajo será el de dividir cada una de las a unidades en b partes iguales.

De este modo se dispondrá de axb nuevas unidades (de tamaño 1/b de la unidad inicial) y el reparto se finaliza como un reparto de unidades no fraccionables. Cada uno de los individuos recibe a de esas partes, resultado que se obtiene al hacer una división entre números naturales

$$a : b \dashrightarrow a \times b : b = a \Rightarrow a : b = a \times 1/b$$

b) La técnica es la de hacer el reparto en varias fases

Este trabajo exige tener en cuenta, en cada fase del reparto,

- el número unidades que se reparten y la medida de las mismas respecto a la unidad inicial;
- el número de individuos que participan;
- la parte de unidad que se otorga a cada individuo;
- la cantidad de unidad que queda por repartir;
- el momento en que concluye el reparto; y
- la cuantificación de lo que corresponde a cada individuo.

De este modo, el proceso de reparto ya no es factible hacerlo con unidades enteras sino que ha de hacerse con partes de unidad de tamaños diferentes. Con este técnica se pondrá de manifiesto una estructura polinómica de los repartos que no aparece con la técnica del apartado a) anterior.

Ahora bien, el reparto en fases admite diferentes formas posibles de hacerlo, tantas como cantidades distintas se puedan dar a los participantes en cada una de las fases del reparto. En este trabajo adoptamos la técnica que denominamos **"de la mayor parte"**, que consiste en que, en cada fase del reparto, se da a cada individuo la mayor parte de unidad posible; de este modo se consigue la formulación del resultado de forma única y, por tanto, que la técnica sea algoritmizable.

### III.1.1. Características de este sistema de representación.

Los resultados que aquí se presentan vienen justificados por dos vías paralelas: usando argumentos justificados sobre acciones realizadas sobre el modelo y realizando manipulaciones simbólicas sobre entes numéricos

1.- En este sistema de representación todo par de números naturales (a,b), $b \neq 0$, admite una representación de la forma:

$$\mathbf{0} \qquad \text{si } a = 0;$$

$$\mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n_1 n_2}} + \ldots + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n_1 n_2 \ldots n_p}} \qquad (n_i \in N \text{ y } n_i \neq 0) \quad \text{si } a \neq 0$$

2.- El modelo que sustenta este resultado está constituido por objetos de forma circular, por ejemplo tortillas españolas; la magnitud superficie; y la acción de repartir de forma igualitaria por fases y utilizando el procedimiento de la mayor parte.

En este sistema de representación, cada par de números naturales viene simbolizado por una suma de fracciones unitarias; históricamente es un sistema de notación de fracciones similar al empleado por los egipcios (ampliamente estudiado por historiadores de la matemática), si bien presenta diferencias significativas al aplicar el procedimiento de la mayor parte.

3.- La técnica del reparto viene caracterizada porque se hace en fases sucesivas y porque en cada una de esas fases los individuos reciben la mayor parte alícuota de unidad. Este procedimiento lo denominamos **de la mayor parte** y se caracteriza en el apartado III.1.2. 4.- En la primera fase del reparto el resultado se simboliza como

$$a : b = \frac{1}{n} + \{na - b : b\} \left[\frac{1}{n}\right] \quad ;; \quad na \geq b > (n-1)a$$

# a unidades a repartir;
# b individuos entre los que se reparten;
# 1/n la parte de unidad que corresponde a cada uno de los individuos en la primera fase del reparto;
# na-b las partes que han sobrado en la primera fase del reparto y que hay que repartir igualitariamente entre los b individuos;
# $\left[\frac{1}{n}\right]$ indica el tamaño, respecto a la unidad inicial, que tienen las partes sobrantes en la primera fase del reparto.

5.- Si las unidades a repartir (na-b) son mayores que 1, hay que hacer un nuevo reparto de esas unidades entre los b individuos, siguiendo el procedimiento de la mayor parte y teniendo en cuenta que esas unidades a repartir son de tamaño $\left[\frac{1}{n}\right]$ de la unidad inicial. El proceso continúa de forma similar hasta que ya no queda ninguna cantidad por repartir

6.- Hay una serie de relaciones sintácticas y semánticas que deben ser explicitadas puesto que su utilización puede provenir de resultados operatorios con números fraccionarios y que, sin embargo, su significado no es evidente ni soslayable por cuanto incrementa la comprensión de este sistema numérico:

i.- En la expresión $a : b = \frac{1}{n} + \{na - b : b\} \left[\frac{1}{n}\right]$ conviven 2 objetos diferentes que tiene igual notación: $\frac{1}{n}$ indica el tamaño de una parte de unidad, el resultante de dividir la unidad en n partes iguales que corresponde a cada individuo en esa fase del reparto; mientras que [1/n] indica el tamaño, respecto de la unidad inicial, que tienen las partes sobrantes.

ii.- $1 : n = \frac{1}{n} = 1 \left[\frac{1}{n}\right]$

Tiene el sentido de que al dividir una unidad entre n individuos cada uno de ellos recibe una parte de unidad de tamaño $\left[\frac{1}{n}\right]$

iii.- $\{(1:b)\}\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{bn} = 1\left[\frac{1}{bn}\right]$

Al repartir una unidad, de tamaño [1/n], entre b individuos se produce como resultado que cada uno de ellos recibe una parte de tamaño $\frac{1}{bn}$, puesto que ese es el resultado de dividir una parte de tamaño [1/n] en b partes iguales y expresar el resultado de la medida referido a la unidad inicial.

iv.- $\left\{1\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{np}\right]$ ( $= \frac{1}{np}$ )

- Al considerar a $\left[\frac{1}{n}\right]$ y $\left[\frac{1}{p}\right]$ como números-medida, como cantidades de una misma magnitud medidas con la misma unidad, resulta que su producto debe expresarse como unidades cuadradas, como resultado de la medida de una cantidad de magnitud que pertenece a otro espacio de medida distinto al que se viene utilizando. Por tanto, en este camino no se encuentra sentido a ese producto.
- Si tenemos en cuenta la igualdad establecida en el apartado ii, $\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}$ el producto se transforma en $\frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right]$, cuyo resultado y significado se mencionaron en el apartado iii. Por tanto, el producto de dos partes de unidad produce una parte de esa unidad, lo que nos lleva a dotar de significado al producto como **parte de parte**, de la multiplicación como operador.

v.- $\left\{1\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = \left\{1\left[\frac{1}{p}\right]\right\}\left[\frac{1}{n}\right]$

Por iv), $\left\{1\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{np}\right]$ y $\left\{1\left[\frac{1}{p}\right]\right\}\left[\frac{1}{n}\right] = 1\left[\frac{1}{pn}\right]$

Ahora bien, ambos resultados son iguales puesto que al ser np=pn (conmutatividad del producto de números naturales), en ambos casos se indica una misma cantidad de unidad inicial.

De otro modo: si una cantidad de tamaño [1/p] se divide en n partes iguales, se obtiene el mismo resultado que el dividir una cantidad de tamaño [1/n] en p partes iguales.

vi.- $\left\{1\left(\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{1}{p}\right]\right)\right\}\left[\frac{1}{q}\right] = \left(1\left[\frac{1}{n}\right]\right)\left\{\left[\frac{1}{p}\right]\left[\frac{1}{q}\right]\right\}$ ( $= 1\left[\frac{1}{npq}\right]$ )

Por iv), $\left\{1\left(\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{1}{p}\right]\right)\right\}\left[\frac{1}{q}\right] = \left\{1\left[\frac{1}{np}\right]\right\}\left[\frac{1}{q}\right] = 1\left[\frac{1}{np(q)}\right]$

$$1\left(\left[\frac{1}{n}\right]\right)\left\{\left[\frac{1}{p}\right]\left[\frac{1}{q}\right]\right\} = \left(1\left[\frac{1}{n}\right]\right)\left[\frac{1}{pq}\right] = \left[\frac{1}{n(pq)}\right]$$

De la asociatividad del producto de números naturales se llega a la conclusión de que ambos resultados indican la misma cantidad de magnitud medida con la unidad inicial.

vii.- $a\left[\frac{1}{n}\right] = a : n$

Justificar esta igualdad como números naturales que operan sobre fracciones medida, equivale a decir que a unidades de tamaño [1/n] es lo que reciben cada uno de los n individuos entre los que se reparten a unidades. Y ello es cierto por cuanto el proceso de reparto se puede hacer dividiendo cada una de las a unidades en n partes iguales y otorgar a cada uno de los individuos una parte de cada una de las a unidades, con lo que finalmente recibe una cantidad de unidad de la forma

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \overset{a}{+ \cdots\cdots +} \frac{1}{n} = \frac{a}{n}$$

De otro modo: para repartir a unidades entre n individuos se divide cada unidad en n partes iguales, de modo que se dispone de *na* unidades de tamaño [1/n] de la unidad inicial.

viii.- $\{(a : b)\}\left[\frac{1}{n}\right] = a : bn$

Esta igualdad, entendida como aplicaciones lineales racionales, queda justificada al considerar que repartir a unidades, de tamaño [1/n] entre b individuos equivale a repartir a unidades del tamaño inicial entre b×n individuos. Y ello es cierto por cuanto repartir a unidades de tamaño [1/n] equivale a decir que se reparten a unidades iniciales entre n individuos, por lo que cada uno de ellos recibe a/n de unidad inicial.

Ahora bien, cada una de esas cantidades hay que volverla a repartir entre b individuos, lo que significará que cada uno de los resultados anteriores hay que repartirlo entre b individuos más, por lo que hay a unidades iniciales y un total de b×n individuos.

Con los resultados anteriores se puede trabajar a nivel simbólico del siguiente modo:

$$\{(a : b)\}\left[\frac{1}{n}\right] \overset{(vii)}{=} \left\{a\left[\frac{1}{b}\right]\right\}\left[\frac{1}{n}\right] \overset{(iv)}{=} a\left[\frac{1}{bn}\right] \overset{(vii)}{=} \frac{a}{bn}$$

ix.- $a\left[\frac{1}{an}\right] = 1\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}$

En el primer miembro se indica que el tamaño de las partes [1/an] se ha obtenido dividiendo la unidad inicial en n partes iguales y cada una de esas partes se ha vuelto a dividir en a partes iguales. Por tanto, si se toman a de esas partes se habrá tomado una de las partes resultantes de la primera división, es decir, se habrá tomado una parte que representa la n-sima parte de la unidad inicial.

De otro modo: $a\left[\frac{1}{an}\right] \overset{(vii)}{=} \frac{a}{an} \overset{(vi)}{=} (a:a)\left[\frac{1}{n}\right] = 1\left[\frac{1}{n}\right]$

puesto que (a : a) = 1

### III.1.2. La técnica de "la mayor parte"

La técnica del reparto se puede estructurar en fases, de modo que en cada una de ellas se aplique el procedimiento que denominamos de la mayor parte y que caracterizamos seguidamente:

Definición: **llamamos "la parte mayor" en el reparto a : b; a > 0; b > 0; a la fracción unitaria 1/n; siendo n.a ≥ b > (n-1).a.**

Esta definición en el contexto de las fracciones como reparto indica que "la parte mayor" es la mayor parte alícuota de unidad que puede darse a cada uno de los b individuos entre los que hay que repartir igualitariamente a unidades.

El reparto de a unidades entre b individuos siguiendo el procedimiento de dar a cada individuo "la parte mayor" en cada una de las fases del proceso, se puede algoritmizar en los términos siguientes:

1.- Observar si cada uno de los individuos puede recibir unidades completas; es decir, encontrar el cociente de la división entera a : b
  - Si cb = a el reparto ha concluido y a : b = c
  - Si cb ≠ a, haciendo $a\text{-}cb = a_1 \neq 0$ ($a_1 \in N$), puede ocurrir que
    - si $a_1 = 1$, el reparto ha concluido y $a : b = c + \frac{1}{b}$
    - si $a_1 \neq 1 \Rightarrow a : b = c + a_1 : b$ y hay que proseguir el reparto.

2.- Encontrar $n \in N$ tal que $n.a_1 \geq b > (n\text{-}1).a_1$ (n > 0, pues b > 0)
  - Si $n.a_1 = b$ el reparto ha concluido y $a : b = c + \frac{1}{n}$
  - Si $n.a_1 \neq b$, llamando $n.a_1 - b = a_2 \neq 0$ ($a_2 \in N$), puede ocurrir que
    - $a_2 = 1$, el reparto ha concluido $a : b = c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nb}$
    - $a_2 \neq 1 \Rightarrow a : b = c + \frac{1}{n} + (a_2 : b)\left[\frac{1}{n}\right]$ y sigue el reparto

3.- Hacer $(a_2 : b) \Rightarrow$ buscar $n_1$ tal que $n_1.a_2 \geq b > (n_1\text{-}1).a_2$
  - Si $n_1.a_2 = b$ fin del reparto; y siendo $a_2 : b = \frac{1}{n_1}$

$$a : b = c + \frac{1}{n} + (a_2 : b)\left[\frac{1}{n}\right] = c + \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\left[\frac{1}{n}\right] = c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1}$$

- Si $n_1.a_2 \neq b$, hacemos $n_1.a_2 - b = a_3 \neq 0$ ($a_3 \in N$), puede que:

• $a_3 = 1 \Rightarrow (a_2 : b) = \frac{1}{n_1} + (1 : b)\left[\frac{1}{n_1}\right]$ el reparto ha concluido,

$$a : b = c + \frac{1}{n} + \left\{\frac{1}{n_1} + (1 : b)\left[\frac{1}{n_1}\right]\right\}\left[\frac{1}{n}\right] =$$

$$= c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1 b}$$

• $a_3 \neq 1 \Rightarrow a : b = c + \frac{1}{n} + \left\{\frac{1}{n_1} + (a_3 : b)\left[\frac{1}{n_1}\right]\right\}\left[\frac{1}{n}\right] =$

$= c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + (a_3 : b)\left[\frac{1}{nn_1}\right]$ y el reparto debe proseguir

4.- Con un proceso similar, siendo $n_2.a_3 \geq b > (n_2 - 1).a_3$ en una nueva fase, aparecen las siguientes posibilidades,

- Si $n_2.a_3 = b$ siendo $a_3 : b = \frac{1}{n_2}$ se llegará a

$$a : b = c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + (a_3 : b)\left[\frac{1}{nn_1}\right] = c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1 n_2}$$

- Si $n_2.a_3 \neq b$, se hace $n_2.a_3 - b = a_4 \neq 0$ ($a_4 \in N$)

• $a_4 = 1 \Rightarrow (a_3 : b) = \frac{1}{n_2} + (1 : b)\left[\frac{1}{n_2}\right]$ de donde

$$a : b = c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1 n_2} + \frac{1}{nn_1 n_2 b}$$

• $a_4 \neq 1$, $a : b = c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1 n_2} + (a_4 : b)\left[\frac{1}{nn_1 n_2}\right]$

y el reparto debe proseguir

5.- El proceso continúa hasta que en el reparto ($a_p$:b) el número de unidades a repartir sea 1, $a_p = 1$, en cuyo caso se completa la simbolización de las formas:

$c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1 n_2} + .... + \frac{1}{nn_1 n_2 ... n_p}$ si $n_{p-1}\, a_p = b$

$c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1 n_2} + .... + \frac{1}{nn_1 n_2 ... n_p b}$ si $n_{p-1}\, a_p \neq b$

PROPIEDADES

P1.- Para cada par de números naturales a, b, existe una **única** representación polinómica unitaria, puesto que los valores de $n_i$ se han encontrado con la condición de cumplir una doble desigualdad que determina un único valor.

P2.- Cualquier representación polinómica unitaria está formada por la suma de un número **finito** de fracciones unitarias.

Para probarlo basta verificar que se cumplen las desigualdades $a > a_1 > a_2 > ... > a_p$ sabiendo que $a_i \neq 0$ y que $a_i \in N$

En efecto, por construcción de los valores de $a_i$ se tienen las relaciones:

(1) $n_{i-1}\, a_i \geq b > (n_{i-1}) - 1)\, a_i$ (2) $n_{i-1}\, a_i - b = a_{i+1}$

De (1) $b > (n_{i-1} - 1)\, a_i$ que llevándolo a (2) tenemos

$$a_{i+1} = n_{i-1}\, a_i - b < n_{i-1}\, a_i - [(n_{i-1} - 1)\, a_i] = a_i$$

Además, todos los valores de $a_i$ son naturales y distintos de 0, por lo que el proceso concluirá cuando alguno de los valores $a_i$ sea 1.

P3.- En cualquier representación polinómica unitaria se cumple que el denominador de una fracción unitaria es múltiplo del denominador de la fracción que le precede, puesto que cada sumando es una parte del anterior sumando

P4.- En $c + \frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1n_2} + .... + \frac{1}{nn_1n_2...n_{p-1}}$

se verifica que $n \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_{p-1}$

Basta probar la primera desigualdad $n \leq n_1$

Tal y como se ha realizado el proceso, se cumplen las siguientes relaciones:

(1) $a : b = \frac{1}{n} + \{(na - b) : b\}\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n} + (a_1 : b)\left[\frac{1}{n}\right]$ ;; $n.a \geq b > (n-1)a$

(2) $a_1 : b = \frac{1}{n_1} + \{(n_1a_1 - b) : b\}\left[\frac{1}{n_1}\right]$ ;; $n_1a_1 \geq b > (n_1 - 1)a_1$

$na = na - b + b = a_1 + b$ ; $\Rightarrow$ (2) $b \leq n_1a_1 \Rightarrow na \leq a_1 + n_1a_1 = a_1\ (1+n_1)$

Esa desigualdad conduce a que $\frac{1+n_1}{n} \geq \frac{a}{a_1}$; y, como se probó en el punto 2 anterior, $a > a_1$ se tiene $\frac{1+n_1}{n} > 1 \Rightarrow n_1 > n-1$ .

Y por tratarse de números naturales, $n_1 \geq n$

P5.- A la vista de las características anteriores, resulta que no toda suma de fracciones unitarias es una representación polinómica unitaria

### III.1.3. Propiedad fundamental del orden

En cualquier representación se cumple que uno cualquiera de los sumandos es mayor que todos los que le siguen.

De otro modo: en una representación cualquiera

$$c + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + ... + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_i} + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_i n_{i+1}} + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_p}$$

se verifica que $\forall\, i\ (p \geq i \geq 1)$ ;; $\dfrac{1}{n_1 n_2 ... n_i} > \sum_{k=i+1}^{p} \dfrac{1}{n_1 n_2 ... n_k}$

Conceptualmente la desigualdad queda justificada porque se ha utilizado el procedimiento de la mayor parte, lo que significa que en cualquier fase del reparto cada individuo recibe la mayor cantidad de unidad posible y, por tanto, en las restantes fases del reparto ha de recibir una cantidad menor, de lo contrario el procedimiento no se aplicaría correctamente.

Para justificar la desigualdad recordamos que en la fase i-1, hay que efectuar el reparto $(a_{i-1} : b) \left[\dfrac{1}{n_1 n_2 ... n_{i-1}}\right] = \left\{\dfrac{1}{n_i} + (a_i : b)\left[\dfrac{1}{n_i}\right]\right\}\left[\dfrac{1}{n_1 n_2 ... n_{i-1}}\right]$

siendo las partes sobrantes $a_i = a_{i-1}\, n_i - b$ y $n_i\, a_{i-1} \geq b > (n_i - 1)\, a_{i-1}$

Por lo que se cumple que $\dfrac{1}{n_i} > (a_i : b)\left[\dfrac{1}{n_i}\right]$

### III.1.4. Repartos equivalentes

Ya se comentó en el Capítulo II, apartado II.9.4, que hay infinitos repartos equivalentes a uno dado, entendiendo por repartos equivalentes aquellos que producen el mismo resultado; es decir, aquellos repartos en los que los participantes reciben la misma cantidad de magnitud. En dicho capítulo quedó establecido que los repartos a:b y ap:bp son equivalentes, siendo p cualquier número natural.

Los ejemplos de representación de repartos equivalentes llevan a la constatación de que las correspondientes representaciones polinómicas unitarias tienen iguales todos los sumandos, es decir son iguales. En el Anexo I.1 se demuestra este resultado

Y este proceso nos muestra que las fracciones unitarias de la representación de pa : pb son iguales que las de a : b. Por tanto, podemos enunciar que dos repartos equivalentes tienen la misma representación polinómica unitaria.

### III.1.5. Modificar el tamaño de las partes

En el proceso de reparto hay que tener en cuenta las unidades a repartir, el tamaño de las mismas y el número de individuos que participan. Ahora bien, hay situaciones en que la consideración conjunta del número de las partes y el tamaño de las mismas no produce modificaciones: 3 partes de tamaño 1/3 es lo mismo que una 1 parte de tamaño la unidad.

Cabe preguntarse, por tanto, qué modificaciones se producen en la representación polinómica de un reparto si, cuando sea posible, se modifica el tamaño de las partes. En otras palabras, ¿qué diferencia hay entre las expresiones polinómicas unitarias de los repartos $(pa : b)\left[\dfrac{1}{pn}\right]$ y $(a : b)\left[\dfrac{1}{n}\right]$ ?

En el Anexo I.2 se demuestran que si se modifica el tamaño de las partes se producen los siguientes resultados:

- Aumenta el tamaño de las partes concedidas en la primera fase
- Disminuye el número de fracciones unitarias (el número de fases).

Vemos, por tanto, que la representación polinómica unitaria sufre modificaciones importantes si se modifica el tamaño de las partes. En este trabajo no se harán modificaciones de las partes, pues interesa consolidar una técnica de reparto que se pueda trasladar para obtener la representación polinómica decimal; si se permitiese la modificación de las partes en dicha representación no aparecerían tamaños de partes que fuesen exclusivamente potencias de 1/10, y con ello no conseguiríamos conectar las notaciones fraccionaria y decimal,

### III.1.6. De la representación polinómica unitaria a la notación fraccionaria

Debido a las características estructurales de $Q^+$ cualquier suma finita de fracciones unitarias es igual a la fracción ordinaria que se obtendría como resultado de la mencionada suma. Pero nuestra intención es la de reconstruir las condiciones del reparto a partir de su representación polinómica unitaria, pues con ello se refuerza la comprensión del proceso del reparto.

Por tanto, nuestro propósito, desde el significado de la fracción como reparto, la técnica que nos ocupa es la de encontrar las unidades, **a**, que hay que repartir y los individuos, **b**, entre los que se reparte conociendo lo que cada individuo recibió en dicho reparto. Para alcanzar este propósito recordemos que el resultado del reparto se obtiene en distintas fases y, por tanto, hay que conocer lo que ocurrió en cada una de ellas; hay que reconstruir el reparto.

Esta reconstrucción se puede hacer de dos formas distintas, utilizar dos procedimientos diferentes, que describimos seguidamente:

PROCEDIMIENTO I: **reconstruir el proceso desde el final**.

Estudiaremos distintas situaciones:

i) Lo que recibe cada individuo viene dado por UNA fracción unitaria, $\frac{1}{n}$

Es evidente que si cada individuo recibe una parte de unidad de la forma $\frac{1}{n}$ había 1 unidad a repartir entre n individuos, o cualquier otra situación equivalente: 2 unidades entre 2n individuos (2:2n); 3 unidades entre 3n individuos (3:3n); ...

ii) Cada individuo recibe la suma de DOS fracciones unitarias: $\frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1}$

Para resolver la tarea propuesta es necesario revisar las condiciones en que se desarrollan los repartos, es decir, que la reconstrucción de la fracción inicial precisa tener en cuenta la forma en que se hacen los repartos, lo que equivale a revisar el significado de los símbolos que aparecen en la expresión que venimos utilizando:

$$a : b = \frac{1}{n} + \{(na - b) : b\} \left[\frac{1}{n}\right] \qquad (1)$$

Así que el trabajo puede organizarse del siguiente modo:

* Tener en cuenta la parte inicial del reparto, las partes que sobran y el tamaño de las mismas: $\frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\left[\frac{1}{n}\right]$ (1)

* Comparar la expresión resultante con la que aparece en (1); así se tendrá:

- $n_1$ son los individuos que intervienen (observar la similitud entre $n_1$ y b, y téngase en cuenta el significado de b en la igualdad (1)),
- cada uno de los individuos recibe una parte de tamaño 1/n y queda por repartir 1 unidad de ese tamaño.
- si a es el número de unidades a repartir y que cada unidad se divide en n partes iguales (de las que dan dado 1 a cada uno de los $n_1$ individuos y sobra una); tenemos $na = n_1 + 1$ (2)

* Calcular el valor de a teniendo en cuenta que ha de ser un número natural (como también ha de serlo $n_1$), lo que proporciona dos situaciones diferenciadas:

1) $n_1 +1$ es múltiplo de n; $n_1 + 1 = pn$.
En este caso, a = p, lo que supone que hay $n_1$ individuos entre los que se reparten p unidades.

2) $n_1+1$ no es múltiplo de n, $n_1 +1 \neq pn$.
Siempre será posible encontrar el reparto que ha dado lugar a esa descomposición haciendo:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n} + \frac{n}{nn_1}\left[\frac{1}{n}\right]$$

Y por (2); $na = nn_1 + n = n(n_1 +1) \Rightarrow a = n_1+1$

Por tanto, el reparto buscado es $(n_1 +1) : nn_1$

iii) Cada individuo recibe la suma de TRES fracciones: $\frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1n_2}$

Para controlar las condiciones del reparto se hace la igualdad:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{nn_1n_2} = \frac{1}{n} + \left\{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1n_2}\right\}\left[\frac{1}{n}\right]$$

La tarea inmediata es la de encontrar la fracción que se oculta tras la suma de fracciones unitarias que hay entre las llaves (ya se indicó cómo efectuarla).

Una vez resuelta esa tarea se llega a: $\frac{1}{n} + (a : n_1n_2)\left[\frac{1}{n}\right]$

Teniendo en cuenta lo comentado en el apartado anterior, se trata de encontrar el reparto $x : n_1n_2 \Rightarrow x.n = n_1n_2 + a$. Si tiene solución entera se obtiene de inmediato la fracción buscada. En caso contrario hay que recurrir a la equivalencia de repartos $x : n_1n_2 = nx : nn_1n_2$

Luego la solución buscada es $(n_1n_2+a) : nn_1n_2$

Y el mismo proceso se seguiría para aquellas representaciones polinómicas formadas por la suma de cuatro o más fracciones unitarias.

NOTA: Si la expresión fuese de la forma $c + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + ... + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_p}$

se procederá a obtener el reparto a:b que corresponde a las fracciones unitarias, con lo que quedará por realizar c + (a:b). Esto significa que el reparto inicial es de la forma: x : b = c + (x-bc) : b, de donde, x = bc+a.

Por tanto, las condiciones iniciales del reparto son (bc+a) : b

PROCEDIMIENTO II: **reconstruir el proceso en orden secuencial**.

Dada la expresión polinómica unitaria $c + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + ... + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_p}$

buscamos las condiciones del reparto para la suma de fracciones unitarias, puesto que una vez encontrada, hallaremos la fracción inicial, fracción generatriz, utilizando lo comentado en la NOTA que precede a este apartado

Supuesto que las condiciones iniciales del reparto, para la suma de fracciones unitarias, son a : b, en este procedimiento lo que se hace es recorrer las distintas fases que lo completan, atendiendo a las diferentes fracciones unitarias producidas en cada fase del reparto, es decir, tener en cuenta la igualdad:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + ... + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_p} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\left[\frac{1}{n_1}\right] + ... + \frac{1}{n_p}\left[\frac{1}{n_1 n_2 ... n_{p-1}}\right]$$

Basta ir reconstruyendo todas las fases del reparto a : b

1). $a : b = \frac{1}{n_1} + \left\{(n_1 a_1 - b) : b\right\}\left[\frac{1}{n_1}\right]$

2). $(an_1 - b) : b = \frac{1}{n_2} + \left\{(an_1 n_2 - bn_2 - b) : b\right\}\left[\frac{1}{n_2}\right]$

3). $(an_1 n_2 - bn_2 - b) : b = \frac{1}{n_3} + \left\{(an_1 n_2 n_3 - bn_2 n_3 - bn_3 - b) : b\right\}\left[\frac{1}{n_3}\right]$

4).$(an_1 n_2 n_3 - bn_2 n_3 - bn_3 - b) : b =$

$$= \frac{1}{n_4} + \left\{(an_1 n_2 n_3 n_4 - bn_2 n_3 n_4 - bn_3 n_4 - bn_4 - b) : b\right\}\left[\frac{1}{n_4}\right]$$

..................

p-1). $(an_1 n_2 ... n_{p-2} - bn_2 ... n_{p-2} - bn_3 ... n_{p-2} - ... - bn_{p-2} - b) : b =$

$$= \frac{1}{n_{p-1}} + \left\{(an_1 n_2 ... n_{p-1} - bn_2 ... n_{p-1} - ... - bn_{p-1} - b) : b\right\}\left[\frac{1}{n_{p-1}}\right]$$

p). $(an_1 n_2 ... n_{p-1} - bn_2 ... n_{p-1} - bn_3 ... n_{p-1} - ... - bn_{p-1} - b) : b =$

$$= \frac{1}{n_p} + \left\{(an_1 n_2 ... n_p - bn_2 ... n_p - ... - bn_p - b) : b\right\}\left[\frac{1}{n_p}\right]$$

Puesto que el paso p es el último, no hay más fracciones unitarias, no quedan restos por repartir, el numerador de la última fracción es igual a cero. Por tanto de la igualdad $an_1n_2...n_{p-1} - bn_2...n_{p-1} - bn_3...n_{p-1} - ... - bn_{p-1} - b = 0$ se deduce que las condiciones iniciales del reparto, *o reparto equivalente*, serán

$a : b = (n_2...n_p + n_3...n_p + n_p + 1) : (n_1n_2...n_p)$

**III.1.7. La relación de orden en la representación polinómica unitaria.**

A partir de dos repartos $a : b$ y $c : d$ se trata de establecer relaciones de orden; es decir, determinar en cuál de los dos repartos los individuos salen más beneficiados, en cuál reciben mayor cantidad de magnitud.

La representación polinómica unitaria permite establecer ese resultado en base a la propiedad fundamental del orden. Para ello, basta comparar, de forma ordenada, las fracciones unitarias que corresponden a cada una de las fracciones; siendo mayor la que contenga la mayor fracción unitaria que ocupe el mismo lugar.

Para comparar las representaciones polinómicas siguientes:

$$a : b = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + ... + \frac{1}{n_p}$$

$$c : d = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + ... + \frac{1}{m_p}$$

se procede del siguiente modo

- Si $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{m_1} \Rightarrow a : b > c : d$ ( si $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{m_1}$ entonces $a : b < c : d$ )
- Si $\frac{1}{n_1} = \frac{1}{m_1}$, comparar las siguientes fracciones unitarias. Entonces
  - Si $\frac{1}{n_2} > \frac{1}{m_2} \Rightarrow a : b > c : d$ ( si $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{m_2}$ entonces $a : b < c : d$ )
  - Si $\frac{1}{n_2} = \frac{1}{m_2}$, comparar las siguientes fracciones unitarias.

Y así siguiendo el proceso se concluirá que una de las representaciones polinómicas unitarias es la mayor de las dos o que ambas son iguales, como queda demostrado en el Anexo I.3.

**III.1.8. La densidad, respecto del orden, en la representación polinómica unitaria.**

A partir de resultados anteriores vamos a probar que entre dos representaciones polinómicas unitarias siempre es posible encontrar otra. Y esto nos permite aseverar que entre dos representaciones polinómicas unitarias existen otras infinitas, puesto que basta con reiterar el proceso de intercalar una nueva representación polinómica unitaria entre cada dos dadas. De este modo, queda patente que no se puede hablar de la representación polinómica unitaria anterior o siguiente a una dada.

Veamos diferentes maneras de hallar otras representaciones polinómicas unitarias intermedias a otras dos dadas:

I. Disminuir el tamaño de la expresión polinómica unitaria mayor (aumentar el de la fracción menor), modificando los sumandos

Así, si a:b $>$ c:d, supongamos que $a:b = \frac{1}{n} + \frac{1}{nm} + \frac{1}{nmp} + ... + \frac{1}{nmp...s}$ y

$$c:d = \frac{1}{n} + \frac{1}{nm} + \frac{1}{nm(p+q)} + ... + \frac{1}{nm(p+q)...t} \qquad \text{siendo } q > 1$$

Teniendo en cuenta la propiedad fundamental del orden, bastará localizar aquellos sumandos de las dos representaciones polinómicas unitarias que son distintos y se obtendrán desigualdades como:

$$a:b > \frac{1}{n} + \frac{1}{nm} + \frac{1}{nm(p+1)} + ... + \frac{1}{nm(p+1)...r} > c:d$$

$$a:b > \frac{1}{n} + \frac{1}{nm} + \frac{1}{nm(p+2)} + ... + \frac{1}{nm(p+2)...v} > c:d$$

........

$$a:b > \frac{1}{n} + \frac{1}{nm} + \frac{1}{nm(p+q-1)} + ... + \frac{1}{nm(p+q-1)...w} > c:d$$

En el supuesto de ser q=1, todas las expresiones obtenidas añadiendo un sumando, o un número finito de sumandos a la expresión polinómica unitaria del reparto c:d serán mayores que ésta y menores que la del reparto a:b

II. Expresadas las representaciones polinómicas unitarias como resultantes de repartos modificar los individuos que intervienen en el mismo.

$$\text{Si } a:b < c:d \text{ y } a:b = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{p}\left[\frac{1}{nm}\right] + ... + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{nmp...r'}\right]$$

$$c:d = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{q}\left[\frac{1}{nm}\right] + ... + \frac{1}{s}\left[\frac{1}{nmq...s'}\right] \quad \text{con } p > q+1,$$

se encuentran desigualdades como

$$a:b < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{q+1}\left[\frac{1}{nm}\right] + ... + \frac{1}{u}\left[\frac{1}{nm(q+1)...u'}\right] < c:d$$

$$a:b < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{q+2}\left[\frac{1}{nm}\right] + ... + \frac{1}{t}\left[\frac{1}{nm(q+2)...t'}\right] < c:d$$

$$a:b < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{nm}\right] + ... + \frac{1}{v}\left[\frac{1}{nm(p-1)...v'}\right] < c:d$$

En el supuesto de ser p=q+1, todas las expresiones obtenidas añadiendo un sumando, o un número finito de sumandos, a la expresión polinómica unitaria del reparto c:d serán mayores que ésta y menores que la del reparto a:b

III.- Aumentar el número de sumandos

Si a:b $<$ c:d siendo

$$a:b = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{p}\left[\frac{1}{nm}\right] + ... + \frac{1}{t}\left[\frac{1}{nmp...t'}\right]$$

$$c:d = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{q}\left[\frac{1}{nm}\right] + \ldots + \frac{1}{s}\left[\frac{1}{nmq\ldots s'}\right] \quad \text{con } p > q,$$

hay que aumentar el tamaño del reparto a:b sin que se sobrepase la cantidad de magnitud del reparto c:d; y teniendo en cuenta la propiedad fundamental del orden, bastará añadir un sumando, o un número finito de sumandos a la expresión polinómica unitaria del reparto a:b, y teniendo en cuenta que los sumandos añadidos han de cumplir las normas sintácticas:

$$a:b < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{p}\left[\frac{1}{nm}\right] + \ldots + \frac{1}{t}\left[\frac{1}{nmp\ldots t'}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{nmp\ldots t'\,t}\right] < c:d$$

$$r \geq t \geq t' \geq \ldots \geq p \geq m \geq n$$

### III.1.9. Operaciones entre expresiones polinómicas unitarias

A) Suma de expresiones polinómicas unitarias.

La suma queda conceptualizada como suma de cantidades de magnitud expresadas por dos expresiones polinómicas unitarias, como agregación de las cantidades de magnitud que recibe un individuo que participa en dos repartos distintos. El mecanismo de cálculo que permita obtener simbólicamente la expresión polinómica unitaria suma directa de otras dos no lo hemos obtenido. En el Anexo I.4 se recogen algunas de las reflexiones que hemos hecho al respecto. En consecuencia, abandonamos la búsqueda de procedimientos para efectuar la suma de expresiones polinómicas unitarias a partir de las fracciones unitarias y nos volvemos al modelo: para sumar dos expresiones polinómicas unitarias deben obtenerse los repartos de las que provienen, hacer la suma de dichos repartos y el reparto resultante expresarlo mediante una expresión polinómica unitaria. El proceso puede considerarse como costoso, pero se muestra eficaz y, por lo señalado anteriormente, es el único que permite darle carácter de generalidad. Por tanto, apúntese en el debe de las representaciones polinómicas unitarias la dificultad operatoria que encierran.

B) Resta de expresiones polinómicas unitarias.

El significado de esta resta puede obtenerse al comparar las cantidades de magnitud que reciben dos individuos que participan en dos repartos diferentes. Esta comparación hay que medirla, hay que expresarla con una representación polinómica unitaria. Por lo señalado para la suma, existen notables dificultades operatorias con expresiones polinómicas unitarias que no hemos resuelto. De aquí que, al igual que para la suma, se utilice el procedimiento de trabajar con repartos y no con sus expresiones polinómicas unitarias.

C) Multiplicación de expresiones polinómicas unitarias.

Conceptualmente no tiene significado el producto de dos expresiones polinómicas unitarias por cuanto carece de significado el producto de magnitudes en el modelo que venimos utilizando.En cuanto a las técnicas operatorias, y aplicando las propiedad distributiva del producto respecto de la suma de fracciones unitarias (se trata de números racionales), aparecen dificultades similares a las encontradas en la suma, por cuanto hay que expresar como representación polinómica unitaria una suma de fracciones unitarias. En consecuencia, la conceptualización del producto y su obtención hay que tratarlo desde la noción de aplicación, como operador natural y como operador racional.

C.1) Multiplicación de un número natural por una expresión polinómica unitaria

La conceptualización debe entenderse como la reiteración de repartos iguales, como el resultado de la agregación de las cantidades que corresponden a un individuo que ha participado en n repartos iguales. La obtención del resultado no es viable con la utilización de representaciones polinómicas unitarias, por todo lo señalado para la suma. En consecuencia, hay que trabajar con repartos.

D) División de una expresión polinómica unitaria por un número natural.

Se conceptualiza a partir del reparto del reparto, de que cada uno de los participantes en un reparto vuelve a repartir su parte entre un número de individuos. En cuanto a su obtención hemos de hacer notar que pueden producirse errores si se recurre a las expresiones polinómicas unitarias, como ponemos de manifiesto seguidamente

Sea $a{:}b = \frac{1}{n} + \{(na - b) : b\}\left[\frac{1}{n}\right]$ ;; $n.a \geq b > (n\text{-}1)a$ (1)

Para obtener el resultado del reparto a:bc no es posible multiplicar los denominadores de las fracciones unitarias por c (se podría pensar en que cada una de las partes se ha dividido en c partes iguales), puesto que no se cumple

$a{:}bc = \frac{1}{nc} + \{(na - b) : b\}\left[\frac{1}{nc}\right]$ ;; $n.a \geq b > (n\text{-}1)a$ (2)

En efecto, sea $a{:}bc = \frac{1}{m} + \{(ma - bc) : b\}\left[\frac{1}{m}\right]$ ;; $m.a \geq b > (m\text{-}1)a$ (3)

Si las expresiones (2) y (3) fuesen iguales, debe cumplirse que m=nc, pero de la desigualdad que aparece en (1) y siendo c un número natural se tiene $n.a \geq b > (n\text{-}1)a \Rightarrow n.a.c \geq b.c > (n\text{-}1)ac = n.a.c - a.c \Rightarrow m.a \geq bc > ma - ac$ lo que significa que no se cumple la desigualdad que aparece en la expresión (3), puesto que $ma - ac \neq (m\text{-}1)a$, salvo que c sea 1, es decir que se divida por 1.

E) La fracción de una expresión polinómica unitaria.

La fracción debe entenderse como un operador compuesto de los operadores multiplicar por el numerador y dividir por el denominador. Por tanto, se debe presentar como la representación de un reparto inicial que se reitera n veces y que una vez concluido cada uno de los participantes vuelve a repartir su parte entre un número n de individuos.

De todo lo expuesto anteriormente se desprende que, ante las dificultades de operar con expresiones polinómicas unitarias, lo que se propone es encontrar los repartos de que proceden, operar con dichos repartos, y el resultado escribirlo como expresión polinómica unitaria.

### III.1.10. Representación polinómica unitaria y fracción.

Cada expresión polinómica unitaria procede de un reparto

$$a : b = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + ... + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_p} + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_p b}$$

Puesto que la suma de fracciones es una operación en el cuerpo de los números racionales, se pueden sumar las fracciones unitarias y obtener la expresión

$$a : b = \frac{n_2 n_3 ... n_p b + n_3 ... n_p b + ... + b + 1}{n_1 n_2 n_3 ... n_p b} =$$

$$= \frac{n_2 n_3 ... n_p b + n_3 ... n_p b + ... + b + a n_1 n_2 ... n_p - b n_2 n_3 ... n_p - ... - b n_p - b}{n_1 n_2 n_3 ... n_p b} =$$

$$= \frac{a n_1 n_2 ... n_p}{n_1 n_2 n_3 ... n_p b} = \frac{a}{b}$$ puesto que, por III.4.6.,

$$a n_1 n_2 ... n_p - b n_2 n_3 ... n_p - ... - b n_p - b = 1$$

En consecuencia, cualquier fracción se puede identificar con el reparto igualitario de a unidades (numerador) entre b individuos (denominador). Además, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos, el sistema de representación polinómica unitaria utilizado permite establecer nuevas perspectivas de la concepción de la fracción como relación parte-todo en contextos continuos o discretos.

### III.1.11. Resumen de hallazgos y análisis de significados

Todo el trabajo expuesto sobre representaciones polinómicas unitarias nos lleva a las siguientes consideraciones:

- Hay un modelo claramente definido en el que la representación de las tareas del reparto exige la creación de un código diferente al que conocían los estudiantes para maestros y en el que se pueden establecer relaciones y operaciones.
- El futuro maestro se enfrenta a la necesidad de crear un sistema de representación para comunicar los resultados de las acciones realizadas. El sistema de representación polinómica unitaria se percibe, por tanto, como el resultado de una necesidad de unificar y generalizar los sistemas de representación creados individualmente.
- Los sistemas de representación demandan un estricto control de sus exigencias sintácticas y semánticas; de lo contrario, se producen interferencias en la comunicación; los estudiantes para maestro se hacen conscientes de ello en cuanto tienen que codificar o interpretar mensajes para sus compañeros.
- La fracción se constituye como suma de fracciones unitarias, cada una de las cuales es una parte de parte de unidad de magnitud, es decir aparece la fracción con una estructura polinómica (suma de productos), que no se manifestaba al contemplar la fracción como relación parte-todo donde la fracción representa una totalidad, una suma de partes iguales de una unidad factible de ser fraccionada.
- El papel de la partición es, como indican Carpenter et al (1993), similar al que juega el recuento en la construcción del número natural. Con la representación

polinómica unitaria es el propio estudiante el que tiene que tomar decisiones acerca de los fraccionamientos de la unidad en las distintas fases del reparto.

- Hay una exigencia permanente de componer, descomponer y convertir unidades, lo que constituye un elemento unificador de las distintas interpretaciones de la fracción (Behr et al., 1993). En cada fase del reparto el estudiante necesita controlar las particiones que hace de la unidad (o de partes de la misma) y la relación existente entre estas partes y la unidad inicial.
- La concepción de la fracción como relación parte-todo puede potenciar conocimientos personales de la fracción en los que se mantienen esquemas de recuento que justificarían la transferencia de significados propios de los números naturales a los números racionales. En este sistema de representación se pone de manifiesto que la simbología utilizada hace referencia a cantidades de magnitud con características distintas a las que se representaban con los números naturales.
- No es necesaria la tradicional diferenciación escolar entre fracciones propias e impropias por cuanto el contexto del reparto admite que las unidades y los individuos que participan pueden tomar cualquier valor (exceptuando el caso en que el número de individuos participantes sea 0)
- La suma aparece de forma natural como agregación de las distintas cantidades que recibe un individuo en las diferentes fases de que consta el reparto. Y de igual forma la cantidad de unidad que recibe un individuo que participa en dos repartos diferentes puede ser fácilmente asociada a la noción de suma de fracciones. Sin embargo, aparecen notables dificultades para transformar la suma de fracciones unitarias en una representación polinómica unitaria.
- A lo largo del proceso se establece el resultado del producto de dos fracciones unitarias como aplicación racional, como parte de parte. Sin embargo, la multiplicación de dos representaciones unitarias no tiene significado pues el modelo utilizado no admite el producto de cantidades de magnitud. Es más, aunque se dotase de algún significado al producto de representaciones polinómicas unitarias, existen notables dificultades para expresar el resultado como representación polinómica unitaria, por las razones expuestas en la suma.
- Sí que se puede dotar de sentido a la multiplicación de un número natural por una representación polinómica unitaria, entendiendo como tal el resultado de la participación en un número natural de repartos iguales o equivalentes. Es de hacer notar que la representación de esta acción conlleva enormes dificultades.
- También puede darse a la división de una representación polinómica unitaria por un número natural el significado de reparto reiterado, de repartir la cantidad de magnitud resultante en un reparto. Su simbolización entraña notables dificultades y puede provocar errores.
- La multiplicación de dos fracciones ha de entenderse, por tanto, como un operador aplicado a un reparto, como una aplicación racional de un reparto. No obstante, su escritura como representación polinómica unitaria resultaría

excesivamente compleja.

- La división de dos representaciones polinómicas unitarias carece de sentido en el modelo por cuanto no tiene significado el inverso de una cantidad de magnitud.
- La comparación de fracciones (o de repartos) se establece en términos de comparación de los correspondientes sumandos que conforman cada una de las representaciones polinómicas unitarias de las fracciones. Su justificación viene claramente establecida en términos de la técnica de la mayor parte utilizada en el modelo. Y esta misma técnica permite justificar la densidad de las fracciones.
- La equivalencia de fracciones se establece en términos de equivalencia de repartos, de igualdad entre las cantidades recibidas en dos repartos que se mantienen una relación multiplicativa tanto en las unidades a repartir como en el número de individuos que participan.

## III.2.- Sistema de representación polinómico decimal.

El sistema de representación que hemos denominado representación polinómica unitaria se sustenta en un modelo concreto y permite mostrar una visión diferente de la que emana de la representación fraccionaria habitual.

Ahora bien, desde la puesta en práctica de la acción podemos plantearnos que la realización concreta de un reparto conlleva la dificultad de hacer diferentes fraccionamientos de la unidad (o partes de la unidad); parece conveniente, por lo tanto, plantear la posibilidad de que los fraccionamientos, en cualquier reparto o en las distintas fases del reparto, se hiciese siempre en el mismo número de partes.

En este apartado analizaremos un nuevo sistema de representación que consiste en hacer repartos igualitarios por fases y con el procedimiento de la mayor parte, pero teniendo en cuenta que las unidades se fraccionarán siempre en 10 partes iguales.

Hay dos razones que nos impulsan a tomar esta decisión. Una primera tiene en cuenta que la finalidad de nuestro trabajo es la de relacionar las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, por lo que pretendemos mostrar que cualquier fracción admite una escritura como suma de productos de naturales por fracciones de denominadores las sucesivas potencias de 10, escritura que rememora ciertas similitudes con la de los polinomios. La otra razón está sustentada en el hecho de que los repartos conllevan un proceso de medida de magnitudes del S.M.D., y que en este sistema las unidades y sus múltiplos o submúltiplos están relacionados mediante potencias de 10.

En realidad, lo que aquí se pone de manifiesto es que el paso de la notación fraccionaria a la notación decimal no es más que el tránsito de un sistema de medida "endógeno" a un sistema de medida convencional, de trasladar el resultado de la medida expresado en fracciones (3/4 de metro, 1/3 de litro;.. ) a un sistema convencional expresado con unidades universales (cm, dal, ...), o a un sistema cuyas unidades se midan por divisiones en 10 partes iguales de la unidad o sus divisores (3/4 de rectángulo; 0,75 de rectángulo).

Exponemos seguidamente las características de este sistema de representación:

1.- En este sistema de representación a todo par de números naturales (a,b), b ≠ 0, se le asocia una de estas dos representaciones:

$$c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right]; \qquad a_i \in N,, 0 \le a_1 ..,a_s \le 9$$

$$c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] + (d:e)\left[\frac{1}{10^s}\right] \qquad a_i \in N ,, 0 \le a_1 ..,a_s \le 9$$

Con la expresión (d:e) $\left[\frac{1}{10^s}\right]$ se quiere indicar que el reparto (d:e) ya ha aparecido en alguna de las fases anteriores del reparto y que, en consecuencia, volverá a aparecer indefinidamente a lo largo del proceso del reparto; por tanto, el reparto no concluye en un número finito de fases.

2- Se observa que en este sistema de representación los repartos se simbolizan mediante una expresión polinómica de productos de números naturales por fracciones decimales unitarias, expresando tal representación la cantidad de unidad que corresponde a cada uno de los **b** individuos entre los que se han repartido, de forma igualitaria, **a** unidades de una determinada magnitud.

3.- El procedimiento del reparto viene caracterizado porque se hace en fases sucesivas y porque en cada una de esas fases los individuos reciben la mayor cantidad posible de unidad, pero con la exigencia de que la unidad, o cualquier parte de ella solo puede ser dividida o fraccionada en 10 partes iguales.

4.- Si a < b, en la primera fase del reparto el resultado se simboliza como

$$a : b = a_1\left[\frac{1}{10}\right] + \left\{(10a - ba_1) : b\right\}\left[\frac{1}{10}\right];; \qquad b(a_1 + 1) > 10a \ge ba_1 \;;;\; 0 \le a_1 \le 9$$

# a unidades a repartir

# b individuos entre los que se reparten

# $a_1$ partes de unidad (de tamaño 1/10 de unidad) que corresponde a cada uno de los individuos en la primera fase del reparto.

# $10a-ba_1$ las partes que han sobrado en la primera fase del reparto y que hay que repartir igualitariamente entre los b individuos.

# $\left[\frac{1}{10}\right]$ indica el tamaño, respecto a la unidad inicial, que tienen las partes que reciben cada uno de los individuos y las sobrantes en la primera fase del reparto.

5.- Se hace un nuevo reparto de las unidades sobrantes, $(10a-ba_1)$, entre los b individuos, teniendo en cuenta que esas unidades a repartir son de tamaño $\left[\frac{1}{10}\right]$ de la unidad inicial.

- La reiteración de los repartos finaliza si el reparto $(10a-ba_1)$:b se puede realizar en una sola fase

• Si en el proceso de reiteración se alcanza la situación dada por alguna igualdad como

$$a : b = c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] + (d : e)\left[\frac{1}{10^s}\right]$$

la representación polinómica decimal tiene infinitos sumandos, en los que se repiten ordenadamente el número de partes, aunque varíe su tamaño.

6.- Relaciones sintácticas y semánticas

i.- En la representación polinómica decimal los números que multiplican a las partes que corresponden en cada fase han de ser menores o iguales a 9.

En la primera fase $a : b = a_1\left[\frac{1}{10}\right] + \left\{(10a - ba_1) : b\right\}\left[\frac{1}{10}\right]$ ;

$$b\,(a_1 + 1) > 10a \geq b\,a_1$$

Si $a_1 > 9$ se llegaría a que $10a \geq 10b$ lo que contradice que $a < b$.

ii.- $(1 : b)\left[\frac{1}{10}\right] = 1\left[\frac{1}{10b}\right] = 1 : 10b$

iii.- $\left\{1\left[\frac{1}{10}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{10p}\right]$

iv.- $a\left[\frac{1}{n}\right] = a : n$ esta igualdad ya se estableció en el punto vii del apartado II.1.1.

v.- $a\left[\frac{1}{10}\right] = a : 10$

vi.- $(a : b)\left[\frac{1}{10}\right] = a : 10b$

$$(a{:}b)\left[\frac{1}{10}\right] \overset{(iv)}{=} \left\{a\left[\frac{1}{10}\right]\right\}\left[\frac{1}{10}\right] \overset{(iii)}{=} a\left[\frac{1}{10b}\right] \overset{(iv)}{=} (a : 10b)$$

vii.- $a\left[\frac{1}{10a}\right] = 1\left[\frac{1}{10}\right] = 1 : 10$

Puesto que, $a\left[\frac{1}{10a}\right] \overset{(v)}{=} a : 10a \overset{(vi)}{=} (a : a)\left[\frac{1}{10}\right] = 1\left[\frac{1}{10}\right]$

viii.- $10\left[\frac{1}{10^p}\right] = 1\left[\frac{10}{10^p}\right] = \frac{1}{10^{p-1}}$

Basta tener en cuenta que, por construcción de las partes se verifica que

$$10\left[\frac{1}{10}\right] = 1 \text{ y que } 1\left[\frac{1}{10^p}\right] = \left\{1\left[\frac{1}{10}\right]\right\}\left[\frac{1}{10^{p-1}}\right]$$

### III.2.1. La técnica de "la mayor parte"

Anotaremos las diferencias que aparecen con respecto a los resultados reseñados en la representación polinómica unitaria

Definición: **llamamos "la parte mayor" del reparto a : b a la parte de**

$$\textbf{unidad } \mathbf{a_1} \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\right] \quad \textbf{siendo} \quad \mathbf{a_i \in N} \;,, \; \mathbf{b\,(a_1 + 1) > 10a \geq b\, a_1}$$

El reparto de a unidades entre b individuos siguiendo el procedimiento de dar a cada individuo "la parte mayor" en cada una de las fases del proceso, se algoritmiza en la forma siguiente:

1.- Observar si cada uno de los individuos puede recibir unidades completas, es decir si $a > b$, encontrar un número natural c tal que $(c+1).b > a \geq cb$

- Si $cb = a$ el reparto ha concluido y $a : b = c$
- Si $cb \neq a$ y $a\text{-}cb = n$ puede ocurrir que
  - si $n : b = a_1 : 10^p$ , $a : b = c + a_1 \left[\frac{1}{10^p}\right]$
  - si $n : b \neq a_1 : 10^p$, se tiene $a : b = c + (n:b)$; hay que seguir

2.- Hallar un número natural $a_1$ tal que $b\,(a_1 + 1) > 10a \geq b\,a_1$

- Si $n.a_1 - b = n^1$ puede ocurrir que
  - $n^1 : b = a_2 : 10^p$ el reparto ha concluido;

    $$a : b = c + a_2\left[\frac{1}{10}\right] + a_2 \left[\frac{1}{10^p}\right]$$
  - $n^1 : b \neq a_2 : 10^p$, $a:b = c + a_1 \left[\frac{1}{10}\right] + (n^1 : b) \left[\frac{1}{10}\right]$ y seguir

3.- El proceso continúa hasta que el reparto $n^p$: b se realice en una sola fase, que de lugar a fracción decimal, en cuyo caso se completa la representación en la siguiente forma:

$$a:b = c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + \ldots + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] \;;;\; 0 \leq a_1, a_2 , \ldots a_s \leq 9$$

4.- Si a lo largo del proceso aparece de nuevo alguno de los repartos realizados en una fase anterior el proceso de reparto es infinito. En efecto, al realizar el correspondiente reparto:

$$a : b = c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + \ldots + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] + (d:e)\left[\frac{1}{10^s}\right] =$$

$$= c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + \ldots + a_p\left[\frac{1}{10^p}\right] + \left\{a_{p+1}\left[\frac{1}{10^{p+1}}\right] + \ldots + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] + (d:e)\left[\frac{1}{10^s}\right]\right\} =$$

$$= c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + \ldots + a_p\left[\frac{1}{10^p}\right] + \ldots a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] +$$

$$+ \left\{a_{p+1}\left[\frac{1}{10^{s+1}}\right] + \ldots + a_s\left[\frac{1}{10^{s+1+(s-p)}}\right] + (d:e)\left[\frac{1}{10^{s+1+(s-p)}}\right]\right\}$$

y así continuaría el proceso de forma indefinida.

PROPIEDADES

1. Esta descomposición es **única** por cuanto los valores de $a_i$ se han encontrado con la condición de cumplir una doble desigualdad que los convierte en únicos.

2. Este proceso es **finito** si la fracción que indica el resto es equivalente a una fracción decimal. Y es **infinito** si tal situación no se produce, sino que vuelve a aparecer la fracción inicial.
3.- En cualquier representación se observa que se utilizan fracciones con denominadores diferentes pero todos ellos son potencias de 10

### III.2.2. Propiedad fundamental del orden

En una representación polinómica decimal cualquiera de los sumandos de una fracción es mayor que todos los que le siguen; es decir, que en cualquier expresión polinómica decimal con un número finito o infinito de sumandos; es decir, se cumple que para todo i ;; $a_i\left[\frac{1}{10^i}\right] > \sum_{k=i+1}^{p} a_k\left[\frac{1}{10^k}\right]$

Conceptualmente la desigualdad queda justificada porque se ha utilizado el procedimiento de la mayor parte. Recurriendo a la formulación simbólica, la aparición de $a_i\left[\frac{1}{10^i}\right]$ corresponde a la fase del reparto en que

$$(r_{i-1} : b)\left[\frac{10}{10^{i-1}}\right]\left\{a_i\left[\frac{1}{10}\right] + (r_{i-1} : b)\left[\frac{1}{10}\right]\right\}\left[\frac{1}{10^{i-1}}\right] = a_i\left[\frac{1}{10^i}\right] + (r_i : b)\left[\frac{1}{10^i}\right]$$

siendo $r_i = 10\, r_{i-1} - b\, a_i$ y $b\, a_i \leq 10r_{i-1} < b(a_i+1)$ (1)

Basta probar que $a_i\left[\frac{1}{10^i}\right] > (r_i : b)\left[\frac{1}{10^i}\right] = \sum_{k=i+1}^{p} a_k\left[\frac{1}{10^k}\right]$ y ello implica probar que $r_i < b$, pues en ese caso $a_i \geq 1 > (r_i : b) < 1$ (2)

- Si $r_i = 0$ , ya está probado, puesto que $a_i > 0$
- Si $r_i > 0$, de (1), $b\, a_i + b > 10r_{i-1}$ luego $r_i = 10\, r_{i-1} - b\, a_i < b\, a_i + b - b\, a_i = b$,

con lo que queda probada la desigualdad (2)

### III.2.3. Repartos equivalentes

Buscamos las representaciones polinómicas decimales de dos repartos equivalentes a:b y pa:pb (p entero y no nulo)

Sea $a{:}b = c\left[\frac{1}{10}\right] + (d{:}b)\left[\frac{1}{10}\right]$ ;; $10a \geq bc > 10(a-1)$ ;; $d = 10a - bc$ (1)

Siendo p un número entero positivo y no nulo, por (1)

$10ap \geq bcp > 10(a-1)p$ ,, $dp = 10ap - bcp \Rightarrow ap{:}bp = c\left[\frac{1}{10}\right] + (dp{:}bp)\left[\frac{1}{10}\right]$

Y, puesto que dp:bp es un reparto equivalente a d:b, concluiremos que los repartos equivalentes tienen la misma representación polinómica decimal.

### III.2.4. Modificar el tamaño de las partes

En la construcción de las representaciones polinómicas decimales pueden aparecer expresiones de la forma $a{:}b = c\left[\frac{1}{10}\right] + (d{:}b)\left[\frac{1}{10}\right]$ en las que d sea divisor de 10. Podría, por tanto, sustituirse la igualdad anterior por la siguiente

$$a:b \ = c \left[\frac{1}{10}\right] + (1:b)\left[\frac{1}{10/d}\right]$$

Esta modificación de las partes, que es fácilmente justificable, no será tenida en cuenta porque nuestra intención es la de que aparezca una estructura polinómica de las fracciones empleando exclusivamente fracciones cuyos denominadores sean potencias naturales de 10.

### III.2.5. De la expresión polinómica decimal al reparto del que procede

Nuestra intención es la de reconstruir las condiciones del reparto conociendo la representación polinómica decimal que ocasiona. No pretendemos utilizar la estructura operatoria de los números racionales puesto que la intención es la de reincidir en los significados de las representaciones que venimos utilizando.

En el Anexo I.5 se desarrollan en detalle los procesos que hay que seguir para obtener las condiciones del reparto conocida su expresión polinómica decimal. Se estudian los diferentes casos que pueden presentarse:

- La expresión polinómica decimal tiene un número finito de sumandos
- La expresión polinómica decimal tiene un número infinito de sumandos

### III.2.6. Operaciones con expresiones polinómicas decimales

A) Suma de expresiones polinómicas decimales

Conceptualmente la suma de dos expresiones polinómicas decimales indica la cantidad de magnitud que corresponde a un individuo que ha participado en dos repartos diferentes, o la agregación de las cantidades de magnitud que reciben dos individuos que participan en repartos distintos.

Obtención del resultado de la suma:

<u>a) Los sumandos tienen un número finito de términos</u>

Sean las expresiones polinómicas decimales

$$\text{(i) } c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + \ldots + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] \ ;;\ 0 \le a_1, a_2, \ldots a_s \le 9,$$

$$\text{(ii) } d + b_1\left[\frac{1}{10}\right] + b_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + b_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + \ldots + b_p\left[\frac{1}{10^p}\right] \ ;;\ 0 \le b_1, b_2, \ldots b_p \le 9$$

Para calcular la suma de las expresiones (i) y (ii) basta tener en cuenta las exigencias sintácticas del sistema de representación; en este sentido hay que sumar las partes que tienen igual tamaño y si dicha suma supera el valor 9, hay que considerar que 10 unidades de un tamaño equivalen a 1 unidad del tamaño inmediatamente anterior. Por tanto, si s > p, la suma se obtiene de la siguiente forma:

1.- Hacer la suma del número de partes de cada sumando que tiene el mismo tamaño

$$(c+d)+(a_1+b_1)\left[\frac{1}{10}\right]+\ldots+(a_p+b_p)\left[\frac{1}{10^p}\right]+a_{p+1}\left[\frac{1}{10^{p+1}}\right]+\ldots+a_s\left[\frac{1}{10^s}\right]$$

2.- Comenzando por la derecha, modificar aquellos sumandos en que se cumpla que $(a_i+b_i) > 9$, haciendo que si se cumple $(a_i+b_i) = 10 + q$, entonces

$$(a_i + b_i)\left[\frac{1}{10^i}\right] = 1\left[\frac{1}{10^{i+1}}\right] + q\left[\frac{1}{10^i}\right]$$

<u>b) Los sumandos tienen un número infinito de términos</u>

Sean las dos expresiones polinómicas decimales (i) y (ii)

(i) $$c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^p}\right] + b_1\left[\frac{1}{10^{p+1}}\right] + ... + b_q\left[\frac{1}{10^{p+q}}\right] +$$
$$+ b_1\left[\frac{1}{10^{p+q+1}}\right] + ... + b_q\left[\frac{1}{10^{p+2q}}\right] + ...$$

(ii) $$d + c_1\left[\frac{1}{10}\right] + ... + c_r\left[\frac{1}{10^r}\right] + d_1\left[\frac{1}{10^{r+1}}\right] + ... + b_s\left[\frac{1}{10^{r+s}}\right] +$$
$$+ d_1\left[\frac{1}{10^{r+s+1}}\right] + ... + b_q\left[\frac{1}{10^{r+2s}}\right] + ...$$

Para obtener la expresión de la suma de (i) y (ii) se tienen que reconstruir los repartos de los que procede cada una de estas expresiones, sumar los repartos y hallar la expresión polinómica decimal correspondiente.

Puede intentarse hacer la suma utilizando aproximaciones finitas de cada expresión, hallar la suma de éstas y tratar de acomodar el resultado obtenido al real; pero este proceso no se puede algoritmizar, pues dependiendo de los sumandos habrá que tomar distintas aproximaciones finitas, además de hacer una proyección del resultado obtenido al resultado final que no siempre es exitosa.

Las operaciones de resta de expresiones polinómicas decimales, producto de un número natural por una expresión polinómica decimal, cociente entre una expresión polinómica decimal y un número natural, y producto de una fracción por una expresión polinómica decimal se conceptualizan de la misma forma que se hizo con expresiones polinómicas decimales en el apartado III.1.9, de este capítulo.

En cuanto al cálculo del resultado, con carácter general, si las expresiones polinómicas decimales contienen infinitos sumandos es recomendable reconstruir el reparto del que proceden, hacer la correspondiente operación con dicho reparto y obtener la expresión polinómica decimal de dicho reparto.

En el caso de la resta de expresiones polinómicas decimales y del producto de un número natural por una expresión polinómica decimal, y si las expresiones polinómicas decimales tiene un número finito de sumandos es útil trabajar de la misma forma que se hizo con la suma de expresiones polinómicas decimales con un número finito de sumandos, pero haciendo las oportunas modificaciones en función de la operación a realizar: transformar una unidad de un determinado tamaño en 10 unidades del tamaño inmediatamente inferior, para el caso de la resta; y que para el caso del producto hay que tener en cuenta que si q=10a+b, entonces q unidades de un tamaño determinado se transforman en b unidades de dicho tamaño y a unidades del tamaño inmediatamente anterior.

### III.2.7. Representación polinómica decimal y fracción.

Ya se ha visto que una modificación en la técnica utilizada en la acción del modelo produce la aparición de un nuevo sistema de representación, que hemos denominado sistema de representación polinómica decimal, cuyas características se han analizado con anterioridad.

En el modelo que venimos utilizando ya se estableció que las fracciones pueden concebirse como repartos igualitarios. Las representaciones polinómicas decimales serán, por tanto, otro modo de simbolizar las fracciones ordinarias, de modo que se puede establecer la igualdad:

$$\frac{a}{b} = c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right];; \quad 0 \le a_1, a_2, .., a_s \le 9$$

La igualdad así formulada ofrece una nueva perspectiva de la fracción, un significado diferente al que se prioriza en las tareas escolares y distinto también del que se ofrece desde el sistema de representación polinómica unitaria: aquí se establece que la fracción se puede concebir como la suma, finita o infinita, de partes de unidad de tamaños que son exclusivamente potencias de 1/10.

### III.2.8. Resumen de hallazgos y análisis de significados

Una vez caracterizado el sistema de representación polinómico unitario, estudiadas sus propiedades y características, y relacionadas las expresiones polinómicas decimales con las fracciones, estamos en condiciones de hacer algunas reflexiones sobre su utilidad en la construcción del conocimiento personal de los estudiantes para maestro:

- Los sistemas de representación aparecen vinculados a las acciones realizadas sobre el modelo, de forma que una modificación en la técnica de reparto ha provocado la aparición de un nuevo sistema de representación (el polinómico decimal), que tiene similitudes con el polinómico unitario, pero que también presenta diferencias significativas en sus características sintácticas y semánticas.
- La fracción se constituye como suma de fracciones decimales, cada una de las cuales es la décima parte de la unidad de magnitud, o de una parte de ella, es decir aparece la fracción con una estructura polinómica de potencias de 1/10. La fracción, por tanto, se configura con una estructura aditiva y multiplicativa subyacente.
- Aparece una distinción entre fracciones: aquellas que admiten una expresión polinómica decimal con un número finito de sumandos; y las que contienen infinitos sumandos. Estas fracciones, traducidas al modelo, nos presentan situaciones en las que el reparto es finito y otras en que el proceso de reparto no finaliza; resultado que nos permitiría mostrar la continuidad del proceso de medida.
- La cantidad de magnitud, referida a la unidad de medida, que recibe un individuo que participa en dos repartos diferentes puede ser fácilmente

asociada a la noción de suma de expresiones polinómicas decimales. La simbolización del resultado de la suma no ofrece especiales dificultades, conceptuales u operativas, en el supuesto de tratarse de expresiones con un número finito de sumandos.

- El resultado de la participación en un número natural de repartos iguales o equivalentes dota de sentido a la multiplicación de un número natural por una expresión polinómica decimal. La obtención del resultado no presenta especiales dificultades en el caso de expresiones con un número finito de sumandos.
- Aun cuando no entraña dificultades la conceptualización de la división de una expresión polinómica decimal por un número natural como reparto reiterado, sí que resulta enojoso la obtención del resultado puesto que ello demanda la realización de tantos repartos como sumandos tenga la representación y una posterior suma de los resultados parciales obtenidos. Es claro que este proceso sería inaplicable en el caso de una representación con un número infinito de sumandos.
- El modelo utilizado no admite dar significado al producto de cantidades de magnitud. Pero sí que cabría plantear el cálculo de expresiones polinómicas decimales en el contexto de números como entes abstractos, como entes desligados de la medida de magnitudes y recurriendo a la estructura de cuerpo de los números racionales.
- La multiplicación de dos expresiones polinómicas decimales ha de entenderse, por tanto, como un operador aplicado a un reparto, como una aplicación racional de un reparto. No obstante, su escritura como expresión polinómica decimal no sería factible para expresiones con un número infinito de sumandos, y sería enojosa para expresiones con un número finito de sumandos
- La división de dos expresiones polinómicas decimales carece de sentido en el modelo. Además, no sería viable su obtención a través de las representaciones, por lo que habría que transformar las expresiones en los repartos o en las fracciones correspondientes, hacer la división de éstas, y buscar la expresión polinómica decimal del resultado obtenido.
- La comparación de expresiones polinómicas decimales se establece en términos de comparación de sumandos que tienen igual tamaño, que van acompañados de una misma fracción decimal. Y este resultado queda justificado por la técnica de la mayor parte utilizada en el modelo. De este modo, las expresiones polinómicas decimales ponen de manifiesto sus ventajas, con respecto a las fracciones, para determinar el orden y, también, para facilitar la comprensión de la densidad de los números racionales.
- La equivalencia de fracciones se traduce en una igualdad de las representaciones polinómicas decimales correspondientes.

### III.2.9. Expresión polinómica decimal y notación decimal.

Establecida la identificación entre fracciones y representaciones polinómicas decimales nos proponemos simular el proceso de Stevin para relacionar las fracciones y la notación decimal. Para ello, se introducen argumentos economicistas en el sentido de reducir las tareas de simbolización de las expresiones polinómicas decimales.

Escribamos dos expresiones polinómicas decimales que suponemos son diferentes, que indican cantidades distintas, aun cuando tengan un número finito igual de sumandos

$$c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] ;; \quad 0 \le a_1, a_2, .., a_s \le 9$$

$$d + b_1\left[\frac{1}{10}\right] + b_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + b_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + ... + b_s\left[\frac{1}{10^s}\right] ;; \quad 0 \le b_1, b_2, .., b_s \le 9$$

se observa que en ambas simbolizaciones aparecen elementos iguales (el tamaño de las partes) y elementos diferentes (las unidades enteras y las partes de cada tamaño que se consideran). Por tanto, parece plausible plantearse la posibilidad de reducir la escritura de las representaciones polinómicas decimales manteniendo las partes diferenciadas y suprimiendo las partes comunes.

Puesto que las partes enteras de las representaciones se simbolizan utilizando el sistema de numeración posicional decimal, hay que encontrar un nuevo modo de escritura de las cantidades no enteras, así como la manera de diferenciar las cantidades enteras y no enteras.

Observando las partes no enteras de las dos representaciones anteriores, los elementos comunes son las fracciones unitarias cuyos denominadores son potencias naturales de 10. Y los elementos diferenciadores son los números enteros que preceden a cada una de las fracciones. Por tanto, si introducimos una interpretación ordinal a esas potencias de modo que se pueda sustituir su presencia por el lugar que ocupan y asumimos que la colocación de dos cantidades consecutivas debe interpretarse como la suma de ambas, podemos hacer las siguientes sustituciones

$$a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] = [a_1] + [a_2] + .. .. + [a_s] ;; \quad 0 \le a_i \le 9$$

$$b_1\left[\frac{1}{10}\right] + b_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + b_s\left[\frac{1}{10^s}\right] = [b_1] + [b_2] + .. .. + [b_s] ;; \quad 0 \le b_j \le 9$$

De este modo podemos decir que en el primer caso hay $a_1$ unidades decimales de primer orden o décimas; $a_2$ unidades de segundo orden o centésimas; $a_3$ unidades de tercer orden o milésimas; $a_4$ unidades de cuarto orden o diezmilésimas; .... cienmilésimas, millonésimas, diezmillonésimas, ...

De acuerdo con las relaciones sintácticas establecidas para las representaciones polinómicas decimales las partes de cada tamaño o el número de unidades de cualquier orden no pueden ser mayores de 9 ni menores de 0. Además, como ya se indicó con anterioridad, se verifica que 10 unidades de orden p equivalen a 1 unidad de orden p-1, o que 1 unidad de orden p equivale a 10 unidades de orden p+1

$$10\left[\frac{1}{10^p}\right] = 1\left[\frac{1}{10^{p-1}}\right] \qquad ;; \qquad 1\left[\frac{1}{10^p}\right] = 10\left[\frac{1}{10^{p+1}}\right]$$

Puesto que estas reglas sintácticas son iguales a las que existen en nuestro sistema decimal de numeración. Y teniendo en cuenta que en nuestro sistema de numeración no se pone signo alguno entre las cifras de los números, podemos eliminar los corchetes que habíamos colocado anteriormente y que sea la posición de las cifras la que nos indique el lugar que ocupa. Además, en nuestro sistema de numeración la colocación de las cifras de modo consecutivo se interpreta como adición de las cantidades que representa cada cifra, por lo que podemos utilizar estos criterios y escribir

$$a_1\left[\frac{1}{10}\right]+a_2\left[\frac{1}{10^2}\right]+\ldots+a_s\left[\frac{1}{10^s}\right]=a_1\,a_2.....a_s\ \ ;;\ \ 0\le a_i\le 9$$

$$b_1\left[\frac{1}{10}\right]+b_2\left[\frac{1}{10^2}\right]+\ldots+b_s\left[\frac{1}{10^s}\right]=b_1\,b_2.....b_s\ \ ;;\ \ 0\le b_i\le 9$$

Quedan dos situaciones por determinar:

1.- Si la expresión polinómica decimal contiene cantidades enteras y no enteras la nueva simbolización induciría a errores por cuanto la parte entera y no entera se simbolizan del mismo modo. Por tanto, se sugiere el uso de una coma (que tradicionalmente se conoce como coma decimal) que separe las partes enteras y no enteras, a la vez que sirva para indicar la suma de dichas cantidades; de este modo haremos:

$$c\ +\ a_1\left[\frac{1}{10}\right]+a_2\left[\frac{1}{10^2}\right]+\ldots+a_s\left[\frac{1}{10^s}\right]=c\ ,\ a_1\,a_2\,..\,a_s$$

Si la representación polinómica decimal no contiene cantidades enteras, contiene 0 unidades enteras, se indicará utilizando la coma decimal precedida de 0, pues de lo contrario pudiera interpretarse como la simbolización de cantidades enteras. De este modo:

$$a_1\left[\frac{1}{10}\right]+a_2\left[\frac{1}{10^2}\right]+\ldots+a_s\left[\frac{1}{10^s}\right]=0\ ,\ a_1\,a_2\,..\,a_s$$

2.- Hay expresiones polinómicas decimales que están dadas por la suma de infinitas fracciones decimales. En este caso, y como ya se puso de manifiesto con anterioridad, las unidades de los diferentes órdenes se van repitiendo de forma indefinida pero manteniendo la cadencia. Para escribirlas en la nueva notación empleamos una raya o arco; de este modo

$$a_1\left[\frac{1}{10}\right]+\ldots+a_s\left[\frac{1}{10^s}\right]+a_1\left[\frac{1}{10^{s+1}}\right]+\ldots+a_s\left[\frac{1}{10^{2s}}\right]+\ldots=0,\overline{a_1a_2\ldots a_s}$$

Y también hay expresiones de la forma $c,\overline{a_1a_2\ldots a_s}$ ;; $c,b_1b_2\ldots b_p\overline{a_1a_2\ldots a_s}$

Esta nueva simbolización se denomina notación decimal. Y puesto que hemos identificado las fracciones con expresiones polinómicas decimales y a éstas con la notación decimal, podemos afirmar que toda fracción puede simbolizarse con la notación decimal y viceversa.

Nos queda hacer el traslado de los resultados obtenidos en el sistema de notación polinómica decimal al nuevo sistema simbólico, a la notación decimal. Así, podemos enunciar:

1.- Las fracciones equivalentes tienen una única expresión polinómica decimal y, por tanto, una sola notación decimal.
2.- Cualquier cifra de una notación decimal representa una cantidad mayor que la suma de todas las situadas a su derecha.
3.- Para comparar dos notaciones decimales basta ir comparando las cifras que ocupan el mismo lugar.
4.- Para simbolizar números mayores (menores) utilizando la notación decimal bastará aumentar (disminuir) el número de cifras o bien aumentar (disminuir) el valor de alguna de las cifras.
5.- Puesto que entre dos expresiones polinómicas decimales hay otras infinitas, podemos afirmar que entre dos notaciones decimales hay infinitas. En consecuencia, dada una cantidad indicada en notación decimal no tiene sentido buscar la siguiente.
6.- Es algoritmizable la realización de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números escritos con notación decimal para el caso de un número finito de cifras (los denominados números decimales). Los algoritmos, ya conocidos por los estudiantes, son similares a los utilizados con números naturales.
7.- Para números escritos con notaciones decimales de infinitas cifras no son aplicables los algoritmos de cálculo. Se hace necesario buscar los repartos de los que proceden o bien trabajar con las fracciones correspondientes.

## III.3. Tipo de estudio que se quiere realizar.

Como ya hemos enunciado, una de las finalidades de nuestra investigación es la de implementar una secuencia didáctica para que los maestros en formación incrementen su comprensión de los números racionales, mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las habituales notaciones fraccionaria y decimal. Otra finalidad es hacer indagaciones acerca de la proyección de los conocimientos personales de estos estudiantes en la revisión de tareas escolares y en la propuesta de actividades para que los escolares superen sus errores o progresen en la adquisición de nuevos conocimientos.

Para analizar y reflexionar sobre lo ocurrido en todo el proceso de experimentación, debemos hacer indagaciones sobre el comportamiento de los estudiantes para maestros cuando resuelven las tareas que propone el profesor, cuando hacen preguntas, cuando formulan resultados o cuando debaten sus ideas con sus compañeros o con el profesor. En todas estas tareas debemos atender a las percepciones que sobre el conocimiento muestran los estudiantes, a las acciones que realizan, a los significados que comunican y a las expresiones que utilizan.

Por otra parte, la observación del proceso de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes para maestro debe realizarse en alguno de los entornos en que se produzca. Puesto que nuestra condición de profesor nos permite acceder al espacio natural del aula, consideramos que ese es el marco idóneo para desarrollar nuestra investigación, pues en dicho espacio se produce y se puede analizar la interrelación entre los sujetos y las componentes del objeto de conocimiento, las componentes de la instrucción y las componentes del aprendizaje.

Pero además de fijar las metas a alcanzar y el entorno en el que se desarrolla la investigación, también debemos utilizar la metodología de investigación que resulte más adecuada al tipo de trabajo que queremos desarrollar. Para delimitar tal metodología debemos mirar inicialmente al campo en que se ubica nuestro trabajo, al campo de la educación; y en este campo encontramos que los métodos de investigación educativa cubren un amplio abanico de posibilidades (Jacob, 1988; Bisquerra, 1989; Cassell y Simón, 1994), en el que tienen cabida dos tipos de investigaciones:

- investigaciones que usan metodología cuantitativa, o investigaciones que incluyen aspectos tales como elección de muestras, elección de grupo de control, experimentación, control de variables, análisis estadístico,...
- investigaciones que usan metodología cualitativa, o investigaciones que permiten dotar de significado al estudio del comportamiento de los sujetos sometidos a tratamiento

Es evidente que la diferencia más significativa entre ambas metodologías de investigación se encuentra en la intencionalidad del trabajo: *La distinción más notable entre los paradigmas cuantitativo y cualitativo corresponde a la dimensión de verificación frente a la de descubrimiento. Los métodos cuantitativos han sido desarrollados más directamente para la tarea de verificar y confirmar teorías y, en gran medida, los métodos cualitativos fueron desarrollados, deliberadamente, para la tarea de descubrir o generar teorías.* (Cook y Reichard, 1982, pág 38).

La concreción de las metas que se pretenden alcanzar en esta investigación nos permiten, como aproximación global, aceptar que la metodología más adecuada es la investigación cualitativa, por cuanto "*la investigación cualitativa es esencialmente un acto de interpretación que valora los múltiples significados que construye la gente desde sus experiencias colectivas e individuales*" (Brotherson, 1994, pág. 17).

Aunque el término cualitativo no es unívoco ni exacto, en lo sucesivo lo vamos a interpretar como acceso a las experiencias personales y a la comprensión de sus comportamientos; y esto es así por cuanto nuestro interés se centra en indagar acerca de la construcción individual de los conocimientos personales de los estudiantes para maestros, lo que implica explorar los fenómenos aparecidos, hacer una descripción de los mismos y formular una justificación de lo observado. En este sentido, los trabajos de Cook-Reichard (1982), Smith-Glass y Taylor-Bogdam (1990) nos han permitido atender a los aspectos metodológicos generales que caracterizan la investigación cualitativa; desde estos principios generales se configura una amplia variedad de opciones, que se distinguen por la intencionalidad perseguida o por variantes de tipo metodológico.

La decisión final sobre la metodología de investigación que vamos a utilizar, como se justificará con amplitud en el Capítulo IV, nos lleva a optar por la conocida como Investigación-Acción (Elliot, 1990; McNiff, 1991; Kemmis y McTaggart, 1988), pues las características de este método de investigación se adaptan a nuestras intenciones, ya que:

- la idea fundamental es la de reflexionar sobre la práctica en general y la práctica educativa en particular.
- su intencionalidad es la de mejorar la calidad educativa
- se ocupa de hacer una indagación introspectiva colectiva
- su campo de actuación son los entornos reducidos en los que un equipo reducido de investigadores tiene la posibilidad de introducir modificaciones y analizar sus consecuencias.

## III.4. Racionalidad del estudio y supuestos en que se basa.

De lo expuesto en apartados anteriores se deduce la complejidad conceptual inherente al conjunto de los Números Racionales, puesto que en este conjunto numérico se aglutinan una mutiplicidad de significados y una variedad de sistemas de representación, que han aparecido durante un largo proceso histórico.

Desde la perspectiva docente, el diseño de la secuencia instructiva sobre los números racionales es una tarea muy compleja porque la variedad de conceptos, relaciones, y operaciones obliga a optar entre varias alternativas. Así, por ejemplo, dotar de significado a la fracción a partir de las acciones sobre magnitudes medibles, lleva a decidir sobre el tipo de magnitudes que se emplean: las magnitudes extensivas permiten la construcción de la estructura de grupo aditivo considerando la fracción como cociente; las magnitudes intensivas permiten formalizar una estructura de grupo multiplicativo considerando la fracción como razón.

Además, el conocimiento personal del alumno sobre los números naturales obstaculiza la comprensión del número racional, en tanto en cuanto los alumnos trasladan al conjunto de los números racionales conceptos y procedimientos que son propios de los números naturales, como ocurre en estos casos:

- en los números naturales la multiplicación se puede concebir como una suma repetida ("la multiplicación hace más grande"), mientras que la multiplicación de fracciones es independiente de la suma; se concibe como una función compuesta en la que cada uno de los números de la fracción actúa como operador multiplicativo.

- la comparación entre números naturales se resuelve en muchas ocasiones mediante el recuento de las cifras de cada uno de ellos; mientras que en las expresiones decimales debe hacerse atendiendo al valor posicional de las cifras.
- la unidad constituye el elemento básico del recuento en los números naturales; mientras que en los números racionales tiene dos papeles muy diferenciados: por una parte, es la unidad divisible que constituye el elemento esencial para la comparación de números; y, por otra parte, es la base conceptual para la formación del inverso de la multiplicación y sirve como elemento unidad u operador unidad (Kieren, 1993).

Desde la dimensión de formador de futuros maestros, también debemos atender a la preparación de profesionales capacitados para cumplir nuevos objetivos en la Educación Matemática: razonar sobre las matemáticas, comunicarse matemáticamente, o comprender mejor la naturaleza de las matemáticas. Objetivos que aparecen explicitados en la L.O.G.S.E. (M.E.C., 1990) y en documentos sobre tendencias de las matemáticas escolares (N.C.T.M., 1989, 1991)

En el caso que nos ocupa en esta investigación, en la preparación de estudiantes para maestros sobre el tópico de los números racionales, el diseño de una propuesta didáctica debe contemplar las siguientes intenciones:

- Fomentar el razonamiento sobre este tipo de números y potenciar la comprensión del papel de los números racionales en las matemáticas de la cantidad; es decir, colocar como objetivo prioritario el que los futuros profesores desarrollen el sentido del número (N.C.T.M., 1989).
- Crear oportunidades para que los estudiantes para maestros exploren y razonen sobre sus conocimientos personales acerca de los conceptos y procedimientos de los números racionales, mediante la propuesta de situaciones problemáticas que les fuercen a poner en evidencia los errores adquiridos en experiencias previas y a adquirir nuevos conocimientos sobre las relaciones y conexiones que subyacen en este conjunto numérico; reflexionando posteriormente sobre este nuevo conocimiento y la forma en que lo han adquirido (Sowder, Bezuk y Sowder, 1993).
- Potenciar las experiencias de los futuros maestros con los diferentes significados de la fracción, y que conecten éstos con la concepción dominante de relación parte-todo (Novillis-Larson, 1980, Kerslake, 1986).
- Fomentar el trabajo con una amplia variedad de modelos y representaciones de los números racionales, incrementando las conexiones entre los mismos y mostrando las relaciones entre los significados de la fracción y otras partes de la matemática:
    - la medida conecta la aritmética con la geometría y el espacio;
    - los operadores facilitan la comprensión de la existencia del inverso de la multiplicación y también el significado de la composición de aplicaciones;

- la razón tiene aplicaciones para la probabilidad y permite conectar la lógica del razonamiento proporcional con la lógica de las magnitudes intensivas;
- el cociente potencia las conexiones entre los dos sistemas de representación simbólicos que se vienen utilizando habitualmente en los números racionales.

• Reelaborar los conocimientos previos de los futuros maestros sobre las relaciones de orden entre números racionales, así como el sentido de la densidad respecto del orden, pues constituyen conocimientos esenciales para la comprensión de la estructura topológica del conjunto de los números racionales (Giménez, 1991; Post et al, 1991).

Se trata, por tanto, de ofrecer a los futuros profesores oportunidades para explorar, conjeturar, comprobar y reflexionar sobre el sentido de los números racionales contemplados desde los distintos significados. De este modo, ayudaremos a superar la actual situación en la que muchos profesores en ejercicio tienen dificultades con cuestiones conceptuales y procedimentales de los números racionales y no son capaces de resolver problemas más que de modo procedimental (Post, Harel, Behr y Lesh, 1991).

Además de la dimensión formativa, anteriormente contemplada, la preparación de los futuros profesores también debe abordar la dimensión profesional. Dimensión en la que tienen cabida las reflexiones sobre aspectos relacionados con la naturaleza de las matemáticas, con su enseñanza y con su aprendizaje. Estas reflexiones surgen desde el momento en que estos estudiantes para maestros tienen que analizar dos sistemas simbólicos de representación de las fracciones que les son novedosos (representaciones polinómicas unitaria y decimal), y, por tanto, se encuentran ante situaciones de aprendizaje generadoras de conflictos cognitivos;

Pensamos, por tanto, que el estudio que se propone en este trabajo tiene una delimitación curricular bien definida: por una parte, incrementa la comprensión de los futuros maestros sobre el conjunto de los Números Racionales; y, por otra parte, ofrece a estos estudiantes un aprendizaje que les permite reelaborar sus conocimientos personales sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

## III.5. Objetivos Generales e Hipótesis.

Las consideraciones realizadas hasta el momento sobre nuestra investigación nos permiten volver a los objetivos generales, que ya se enunciaron en el Capítulo I, apartado I.9, y darles mayor precisión; también nos permiten explicitar las hipótesis que orientan este estudio.

A través de estas precisiones contemplamos la doble vertiente que anima nuestro trabajo: la vertiente de formación personal de los futuros maestros y la vertiente profesional, en cuanto a la implicación que tienen los conocimientos personales de los futuros profesores sobre las tareas escolares que deberán realizar.

En consecuencia, mantenemos los dos objetivos que guían la presente investigación: delimitar las consecuencias que, para incrementar el conocimiento personal de los estudiantes para maestros, produce una determinada propuesta didáctica; e indagar acerca de las consecuencias que tiene en la orientación de tareas profesionales el dominio alcanzado en el conocimiento personal sobre números racionales por parte de estos futuros profesores de Educación Primaria.

Los dos objetivos que se persiguen con nuestro trabajo de investigación quedan formulados en los siguientes términos:

***Objetivo 1*. Explorar dificultades y potencialidades que presenta el trabajo en los Números Racionales positivos para estudiantes de Maestros, en la especialidad de Educación Primaria, utilizando una propuesta didáctica caracterizada por:**

**1.1. *Contemplar los objetivos específicos ya señalados en el Capítulo I: caracterizar un modelo para el aprendizaje; priorizar la fracción como cociente de números naturales; construir los sistemas de representación polinómicos unitario y decimal; y explicitar las características sintácticas y semánticas de estos dos sistemas.***

**1.2. *Reelaborar los conocimientos personales de los estudiantes sobre las relaciones y sobre las operaciones entre números racionales positivos, redefiniendo los conceptos a partir de los dos sistemas simbólicos de representación construidos.***

**1.3. *Potenciar las conexiones de estos dos sistemas de representación con las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, poniendo de manifiesto que las fracciones admiten una representación polinómica similar a la que subyace en nuestro sistema de numeración.***

**1.4. *Emplear una metodología que prioriza el trabajo personal de los estudiantes y que potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.***

***Objetivo 2.* Establecer relaciones entre los conocimientos personales de los futuros profesores sobre la propuesta didáctica y el desempeño de determinadas tareas como profesionales, a través de:**

**2.1. *El cumplimiento de los objetivos específicos marcados en el capítulo I: detección y valoración de los errores producidos por los escolares; explicaciones que ofrecen a dichos escolares; y elaboración de tareas para el aprendizaje.***

**2.2. *El uso de los modelos sobre los que construir el conocimiento matemático de los escolares.***

**2.3. *El tratamiento de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación utilizados por los escolares.***

Con los supuestos anteriores se configuran las **Hipótesis** que se pretenden contrastar en nuestro estudio:

**Sostenemos que:**

**Uno: Es viable una propuesta con las condiciones enunciadas que nos permita profundizar en el conocimiento del conjunto de los Números Racionales con un grupo de estudiantes de la Diplomatura de Maestro, en la especialidad de Educación Primaria. Además, el desarrollo en el aula de la mencionada propuesta permitirá recoger información relevante de la comprensión de estos estudiantes sobre el conjunto de los Números Racionales**

**Dos: Existen relaciones entre los conocimientos personales sobre los Números Racionales de los estudiantes para maestros y el conocimiento personal profesional de esos mismos estudiantes, que se expresan en las decisiones y orientaciones que adoptan ante determinadas tareas escolares.**

# CAPITULO IV

# DISEÑO DE LA INVESTIGACION

En el capítulo anterior se concluyó con la formulación general del objetivo y las hipótesis de nuestro trabajo de investigación. Este capítulo se dedica a explicitar el marco metodológico propio desde el que se aborda el trabajo de investigación.

La estructura general de este marco metodológico se ajusta a las siguientes ideas:

1.- Este trabajo es un estudio de tipo exploratorio e interpretativo, que se enmarca en el paradigma cualitativo.

2.- El estudio se articula en dos etapas, en cada una de las cuales se utiliza una metodología específica:

- En la Primera Etapa se desarrolla y evalúa una experiencia de aula sobre una innovación curricular, en la línea de la Investigación-Acción diagnóstica y empírica.
- En la Segunda Etapa se hace un estudio de casos exploratorio mediante la técnica de entrevistas.

En la primera parte de este capítulo se justifica la conveniencia de las dos etapas de la investigación, las relaciones entre ellas, sus peculiaridades, la metodología de investigación que se utiliza en cada una y la temporalización del proceso global.

El capítulo se completa con la concreción de aspectos relacionados con la metodología de Investigación-Acción que se utiliza en la Primera Etapa de nuestro trabajo: descripción de los participantes y Unidades de Análisis correspondientes a la Organización del Contenido, la Comprensión del Contenido y la Interacción Didáctica.

## IV.1. Etapas de este trabajo y su articulación.

En su diseño metodológico general, esta investigación sobre formación de futuros profesores de matemáticas se estructura en dos etapas, cuyas finalidades y relaciones interesa precisar.

Hay una **Primera Etapa** que tiene una clara intencionalidad formativa: incrementar la comprensión de los futuros maestros sobre los números racionales; y para ello, se elabora, implementa y evalúa una determinada propuesta didáctica.

Desde su posición de aprendices, a través de esta propuesta los estudiantes construyen nuevos conocimientos matemáticos sobre los tópicos fracciones y decimales y también reelaboran los conocimientos personales que tenían anteriormente.

Además, en esta propuesta se contienen aspectos importantes para que los futuros maestros revisen sus conocimientos personales acerca de la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Sobre estos aspectos, de gran utilidad en el desarrollo de las tareas profesionales de los futuros maestros, se han hecho referencias continuas a lo largo del proceso instructivo; básicamente se ha manifestado la siguiente secuencia argumental:

- Para pensar y comunicar ideas matemáticas los hombres deben construir códigos y símbolos, que en el caso de los números racionales son los sistemas de representación convencionales.
- Un sistema de representación no está dado a priori, hay que construirlo para poder comunicar los resultados de las acciones realizadas sobre los objetos. Su doble condición de ser un sistema general (es válido para todas las situaciones que se pueden presentar) y de universalidad (debe ser igual para todas las personas), hacen que los sistemas primitivos evolucionen y se modifiquen a lo largo del tiempo. Por tanto, las matemáticas se configuran como una disciplina científica, producto de una evolución histórica, y creada por el hombre para solucionar sus problemas.
- "El matemático inventa siempre nuevas formas de representación. Unas estimuladas por necesidades prácticas; otras, por necesidades estéticas, y varias otras aún" (Wittgenstein, 1988; p.74).
- Cada sistema de representación tiene unas características sintácticas y semánticas que tienen que respetarse escrupulosamente; de lo contrario, su utilidad como medio de comunicación sería nula.
- Para construir un sistema de representación hay que precisar los objetos sobre los que se actúa, la característica que se estudia de dichos objetos y las acciones que se realizan sobre los objetos; es decir, hay que concretar el modelo sobre el que se trabaja.
- Un modelo tiene una doble utilidad; de una parte, sirve para construir sistemas de representación, entre los que los simbólicos ocupan un lugar destacado en matemáticas; de otra parte, las relaciones y operaciones establecidas en el lenguaje simbólico pueden contemplarse como acciones sobre los objetos del modelo.
- En consecuencia, la verdad o falsedad de las afirmaciones expresadas en un lenguaje simbólico pueden certificarse con los sentidos; la verdad o falsedad de tales afirmaciones se pueden verificar en el modelo.
- En un proceso evolutivo, la notación fraccionaria va incorporando los diferentes significados de la fracción sin que haya variación de los símbolos utilizados; por tanto, la comprensión de la notación fraccionaria conlleva la conexión entre los diferentes significados de la fracción.

Todos estos posicionamientos se han puesto de manifiesto a lo largo del proceso instructivo, bien a través de los discursos del profesor, bien a través de tareas sobre el significado o existencia de un expresión simbólica, bien a través de la revisión crítica de las tareas, o bien en los debates colectivos o en pequeño grupo que se han celebrado.

Desde estas posiciones nos planteamos una **Segunda Etapa** de nuestra investigación cuyo objetivo es hacer indagaciones sobre las relaciones que se pueden detectar entre las posiciones manifestadas en las sesiones de clase sobre la naturaleza de las matemáticas y la construcción del conocimiento matemático y las reflexiones de estos mismos estudiantes al proponerles tareas relacionadas con la instrucción de escolares.

Para ello, seleccionamos tres estudiantes de acuerdo con el grado de comprensión mostrado respecto al modelo que se ha propuesto; grado que se determina por las producciones previas de estos estudiantes. Con cada uno de estos tres estudiantes se realiza una entrevista de la que se espera obtener datos que informen sobre la relación entre las producciones previas de dichos estudiantes y

- los argumentos utilizados para valorar la respuesta del escolar,
- la justificaciones utilizadas para determinar la explicación que se ofrece para que el escolar supere los errores detectados,
- los razonamientos que utiliza al determinar como prosigue la secuencia instructiva en el caso de que el escolar no tenga errores.

Con los datos obtenidos en esta Segunda Etapa estaremos en disposición de valorar si la propuesta didáctica, desarrollada en la Primera Etapa de la investigación, ha servido para que los estudiantes sobre un tópico concreto:

- Actúen con presteza y seguridad en la detección de los errores de los escolares, así como en la valoración de su importancia y en la determinación de su procedencia.
- Ayuden a los escolares a interpretar el lenguaje simbólico como resultado de las acciones sobre los objetos de algún modelo.
- Habitúen a los escolares a justificar las relaciones y operaciones entre expresiones simbólicas con ayuda del modelo en que trabajen.
- Hagan notar a los escolares que las normas sintácticas y semánticas de los sistemas de representación son de obligado cumplimiento, por cuanto que cualquier incumplimiento de dichas normas falsea su significado.

Las dos etapas que se contemplan en nuestro trabajo se enmarcan en el paradigma cualitativo; y más concretamente la Primera Etapa se ubica en la metodología denominada Investigación-Acción; mientras que la Segunda Etapa lo hace en la metodología de entrevistas.

La metodología de Investigación-Acción ya ha sido utilizada por Castro (1994) y Romero (1995), en trabajos en los que cada una de estas autoras elabora, implementa, analiza y reflexiona acerca de una propuesta didáctica experimentada con alumnos de E.G.B. y de B.U.P., respectivamente.

El trabajo que se recoge en esta Tesis contiene aspectos diferenciados de los que se contemplan en los de las autoras anteriores, tanto por los contenidos que se tratan como por los alumnos objeto de la experimentación. Sin embargo, la similitud de los diseños de investigación empleados en este estudio y en los de las autoras citadas, nos lleva a considerar esta investigación como parte de un proceso de validación del marco metodológico iniciado en dichos trabajos.

En este sentido, en la Primera Etapa de nuestro trabajo se utiliza la Investigación-Acción para evaluar una propuesta didáctica de innovación sobre números racionales, que se experimenta con estudiantes para maestro; por tanto, se considera una continuación de los trabajos de Castro y Romero.

En la Segunda Etapa de nuestro trabajo se indaga sobre el conocimiento profesional como futuros docentes de los estudiantes para maestros mediante una proyección de las producciones previas de esos futuros maestros en la revisión de tareas escolares.

Esta Segunda Etapa surge de la reflexión del equipo investigador sobre la Primera Etapa y tiene una finalidad indagatoria sobre el comportamiento de los futuros maestros en la revisión de tareas de escolares; por tanto, no hay intervención educativa. En consecuencia, la metodología de investigación debe ajustarse a la intencionalidad del estudio, por lo que el equipo investigador decide utilizar la metodología de entrevistas.

## IV.2. Primera etapa: propuesta de innovación curricular.

Esta etapa está centrada en desarrollar y evaluar una propuesta didáctica con un grupo natural de maestros en formación. El objetivo de esta propuesta es incrementar la comprensión de los estudiantes para maestro sobre las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales; la propuesta se articula en torno a dos focos de investigación o tópicos subsidiarios a través de los cuales se particulariza el objetivo general: el primero se refiere el sistema de representación polinómica unitaria y el segundo al sistema de representación polinómica decimal.

Aunque aborda un tópico matemático diferente, nuestro trabajo sigue en esta etapa las líneas generales del modelo de investigación ya desarrollado con anterioridad por Castro (1995) y por Romero (1996). Las peculiaridades de nuestro trabajo vienen delimitadas por los descriptores principales que se explicitan a continuación: el método de investigación en que se ubica este trabajo, las fases que se siguen, el grupo de estudiantes objeto de la experiencia, el papel específico del investigador, las técnicas de recogida y selección de datos, análisis de los datos y el control de la fiabilidad y validez de la experiencia.

### IV.2.1. Encuadre en la línea de Investigación-Acción.

En una aproximación amplia nuestro trabajo ha sido concebido dentro de la metodología denominada Investigación-Acción. La idea fundamental que encontramos en este método de investigación es la de reflexionar sobre la práctica en general y la práctica educativa en particular. Su intencionalidad es la de mejorar la calidad educativa (McNiff, 1992, pág. 1) y lo hace a través de una indagación introspectiva colectiva (Kemmis y McTaggart, 1988, pág. 9). La investigación-acción limita, por tanto, su campo de actuación a entornos reducidos en los que tienen posibilidad de introducir modificaciones y analizar sus consecuencias un equipo pequeño de investigadores.

En este método de trabajo el investigador no es un observador externo sino que se constituye en componente del equipo, junto con el director de esta tesis doctoral y un observador externo, que lleva a cabo la práctica de modo que *la división entre prácticos e investigadores se desvanece* (Lewin, citado por Elliot, 1990, pág. 95). Esto no obsta para que los resultados de la investigación-acción sean diferentes para los integrantes de la colectividad: los alumnos quieren ampliar sus conocimientos con mejores métodos de enseñanza-aprendizaje, el profesor quiere avanzar en su profesionalidad, mientras que el objetivo del investigador es encontrar respuesta a sus inquietudes científicas.

En orden a delimitar con mayor detalle la metodología de investigación que utilizaremos recurrimos a la clasificación de Arnal et al. (1992). De este modo, nuestro trabajo se encuentra en la intersección de dos de las categorías de la escuela lewiniana:

- Lo consideramos incluido en la categoría de investigación-acción diagnóstica por cuanto está enfocado a la recogida de datos, a la interpretación de los mismos, a realizar un diagnóstico y a enunciar unas medidas de acción.
- Lo consideramos incluido en la categoría de investigación-acción empírica por cuanto estudia un problema social mediante una acción que supone un cambio y, además, trata de valorar de forma sistemática los efectos producidos.

En cuanto a la caracterización del diseño de esta investigación y atendiendo a la tipología de Stake (1994), podemos calificarla como estudio de caso instrumental puesto que se trata de una experiencia curricular: conectar las notaciones fraccionaria y decimal de los Números Racionales positivos, por medio de la introducción de dos sistemas de representación, que permita abrir vías para el tratamiento del tema de los Números Racionales en la formación de futuros profesores de Educación Primaria. De este modo, al evaluar en profundidad las potencialidades y dificultades de un caso, con detalle de las actividades y el contexto en que se realizan, permitirá establecer caminos para un futuro avance hacia un mayor grado de generalización.

Por último, y utilizando los trabajos de Arnal et al. (1992), delimitamos nuestro trabajo en los términos siguientes:

- En cuanto a su finalidad, es una investigación aplicada, puesto que trata de dar respuesta a un problema práctico y, en consecuencia, mejorar la calidad educativa mediante la transformación de las condiciones instruccionales.
- Es un estudio longitudinal en su alcance temporal puesto que utilizamos datos de un único grupo a lo largo de un periodo de sesiones.
- Atendiendo al objeto perseguido nuestra investigación es de tipo

descriptivo, pues existe interés en el descubrimiento y la interpretación de fenómenos producidos en el aula.

- Por el marco, nuestra investigación es de campo puesto que se trabaja en el aula con un grupo natural.
- Es una investigación evaluativa puesto que pretendemos introducir un cambio en el currículo y valorar los efectos que produce.

### IV.2.2. Fases de la Investigación-Acción.

El método de trabajo en esta linea de investigación viene delimitado por cuatro fases fundamentales:

Desarrollo de un plan (**planificación**)
Puesta en marcha del plan (**acción**)
Observación de los efectos de la acción (**observación**)
Reflexión sobre los efectos de la acción (**reflexión**)

La idea de secuencialidad de las etapas en forma de ciclos hace que a la finalización de un ciclo (de las cuatro etapas), se esté en disposición de avanzar a un nuevo ciclo en el que el punto de partida, la pregunta inicial, se ha reformulado como consecuencia de la reflexión sobre la acción emprendida en el ciclo anterior (Kemmis y McTaggart, 1988; Elliot, 1990; Castro, 1994).

En esta Primera Etapa de nuestro estudio se aborda el desarrollo de una propuesta curricular sobre el Número Racional positivo en un grupo natural de estudiantes para maestro. Este desarrollo se articula en las cuatro fases mencionadas:

• Fase de planificación:

- Se hace un primer estudio para indagar sobre los aspectos estructurales y cognitivos del conjunto numérico objeto de nuestra investigación; estudio que se complementa con la revisión de textos escolares de E.G.B., puesto que dichos textos nos proporcionan informaciones acerca de la instrucción que sobre este tópico recibieron los estudiantes para maestro en su etapa de enseñanza obligatoria.
- Con la información obtenida se elabora la propuesta curricular, que se formula en torno a tres aspectos básicos:
  - el primero, contempla la caracterización de un modelo sobre el que construir los conceptos, con explicitación de sus potencialidades y deficiencias;
  - el segundo, establece un significado específico para las fracciones basado en el modelo y en la acción de repartir; aparece de este modo el sistema simbólico de representación polinómica unitaria, del que se analizan sus características sintácticas y semánticas, el significado de las relaciones de equivalencia y orden, de las operaciones y el cálculo del resultado, así como la relación entre este sistema de representación y la notación fraccionaria;
  - el tercero, introduce una modificación en la técnica del reparto, lo que produce la aparición de un nuevo sistema simbólico, denominado

representación polinómica decimal, que muestra similitudes y diferencias con el sistema simbólico anterior, y que permite mostrar una estructura polinómica de las fracciones similar a la que subyace en la notación decimal de los Números Racionales positivos.

- De acuerdo con estos aspectos, se conforma la programación de las sesiones de clase que se llevarán a cabo en la fase siguiente; para cada una de las sesiones dicha programación se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, actividades propuestas, metodología y valoración.
- Los tres aspectos que articulan esta propuesta curricular son originales del investigador y han sido elaborados explícitamente para este estudio. Su redacción definitiva se ha llevado a cabo durante 3 años, y ha sido contratada mediante una serie de estudios piloto,

• Fase de acción:

- Se lleva a cabo la programación diseñada, introduciendo las modificaciones que sugieran las observaciones efectuadas en el aula y de acuerdo con las decisiones elaboradas por el equipo investigador.
- Los estudiantes tienen que dar respuestas a los dos tipos de trabajo, que se les presentan en hojas separadas y que han de realizar individualmente:
  - <u>Cuestiones de investigación</u>: su intencionalidad es la de enfatizar el significado de las ideas matemáticas; son trabajos cuya resolución exige atender prioritariamente a aspectos conceptuales.

    Se presentan a los estudiantes en forma de tareas y algunas de ellas exigen que en su resolución se expliciten los significados de ideas nuevas o de ideas ya conocidas pero presentadas desde una perspectiva diferente. En otras tareas el estudiante tiene que formular resultados generales a partir de observaciones particulares; mientras que en otras tareas se demanda del estudiante un análisis sobre aspectos estructurales.

    La realización de las tareas precede a la exposición del profesor, y permiten la institucionalización de las ideas matemáticas a partir de las aportaciones de los estudiantes.
  - <u>Fichas de trabajo</u>: que también las denominamos cuestiones complementarias de investigación, y su finalidad es la de consolidar la utilización de técnicas; por tanto, este tipo de trabajos incide en los aspectos procedimentales.

    Se presentan, en general, después de que el profesor haya caracterizado públicamente la técnica de trabajo que se utilizará en las sesiones siguientes.
- Aun cuando la metodología de las sesiones hace especial énfasis en el trabajo individual de los alumnos, también se contemplan las exposiciones generales del profesor investigador, los trabajos en pequeño grupo y las discusiones colectivas y en grupos pequeños.

• Fase de observación.
- Como resultado de las dos fases anteriores se tienen datos sobre la puesta en práctica de los contenidos, sobre la comprensión que muestran los estudiantes sobre dichos contenidos, y sobre la interacción didáctica que se produce en la construcción del conocimiento. Durante esta fase se hace un vaciado de toda la información obtenida y se organizan los datos resultantes según una serie de categorías.
- Una buena parte de los datos de la experimentación se obtienen de las producciones escritas de los propios estudiantes, así como de las grabaciones en audio y en video de algunas de las sesiones.
- El profesor, en su calidad de participante, también aporta datos sobre la experimentación de la propuesta didáctica; datos que se reflejan en el Diario de Clase: En este documento se reflejan y valoran todas las incidencias que ocurren en cada una de las sesiones de la fase experimental.
- Después de cada una de las sesiones hay un intercambio de información con el profesor D. Rafael Escolano, que actúa como observador; las deliberaciones posteriores permiten decidir si la sesión siguiente mantiene o modifica alguno de los aspectos contenidos en la programación.
- El director del trabajo se mantiene informado de la implementación y hace un seguimiento de su desarrollo. Se contempla una entrevista personal entre el director y el profesor investigador al finalizar la primera etapa de la experimentación.

• Fase de reflexión
- En la fase de observación se han recogido y organizado los datos de las fases anteriores. El trabajo último será el de analizar dichos datos, valorarlos, extraer conclusiones y tomar las decisiones oportunas que se deriven.
- La reflexión debe encaminarse a determinar aquellos aspectos de la organización del contenido que deben mejorarse; a determinar los grados de comprensión alcanzados por los estudiantes y el modo de superarlos; y a determinar aquellos aspectos de la interacción didáctica que han de mantenerse o modificarse. Es un proceso de análisis y evaluación.
- De los análisis precedentes se dispondrá de información crítica para abordar la segunda etapa de este estudio: indagar sobre la influencia de los conocimientos personales de los futuros maestros en la revisión de tareas de escolares.

### IV.2.3. Focos de investigación

Esta primera etapa de nuestro trabajo tiene una clara intencionalidad formativa: incrementar la comprensión de los futuros maestros sobre los números racionales, potenciando las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. Para ello, la propuesta didáctica que experimentamos en el aula se articula en torno a dos núcleos del contenido o focos de investigación:

• Primer foco de investigación:
Sistema de representación polinómico unitario. Para concretar y establecer este sistema de representación se delimitan las características, potencialidades y limitaciones de un modelo sobre el que se trabaja. En este modelo, a partir de las acciones de reparto igualitario realizadas sobre objetos en los que destaca la magnitud superficie con la técnica de la mayor parte, se analizan las relaciones de equivalencia y orden, así como el significado de diferentes operaciones y cálculo del resultado de las mismas. Posteriormente, y como consecuencia de expresar la medida de la cantidad de magnitud que se obtiene como resultado del reparto igualitario por fases y aplicando el criterio de la mayor parte, se crea este sistema simbólico de representación.

En este foco se pretende dotar de significado de reparto o cociente a la fracción y, desde este significado, mostrar a las fracciones ordinarias como suma de productos de fracciones unitarias, como entidades numéricas conformadas por la suma de partes de partes de la unidad; poner de manifiesto, en suma, que las fracciones tienen una estructura polinómica subyacente. Además, desde el estudio de las expresiones polinómicas unitarias se pretende que los futuros profesores reelaboren sus conocimientos personales sobre las relaciones y operaciones entre fracciones.

• Segundo foco de investigación:
Sistema de representación polinómico decimal. Este sistema surge como consecuencia de modificar la técnica utilizada en el reparto, obligando a que los fraccionamientos de la unidad o de cualquiera de las partes de la unidad sea siempre en 10 partes iguales. Como consecuencia de esa modificación en la técnica del reparto, este sistema de representación asociado tiene similitudes y diferencias con el estudiado en el primer foco.

Los objetivos que se quieren alcanzar en este foco son los de presentar la estructura polinómica de las fracciones como suma de potencias de 1/10, lo que facilita la construcción de la notación decimal de las fracciones como recurso para economizar la escritura de las expresiones polinómicas decimales. De este modo se persigue conectar las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, dotando de significado a dichos entes numéricos a partir de las manipulaciones realizadas sobre el mismo modelo

### IV.2.4. Participantes.

La Implementación de la propuesta curricular desarrollada en este trabajo se lleva a cabo con un grupo natural de estudiantes de Maestro, matriculados en la asignatura "*El currículum de matemáticas en Educación Primaria*", que se imparte en la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Zaragoza. El grupo con el que se lleva a cabo la experiencia está conformado por aquellos estudiantes cuyo cuyo primer apellido comience por las letras M a Z, ambas inclusive; el grupo, según la lista oficial de alumnos matriculados, es de 68 estudiantes; sin embargo, los que han asistido a alguna de las sesiones celebradas han sido 56.

Con la intención de disponer de información más completa sobre los conocimientos personales de estos estudiantes acerca del tópico que se estudia, se pasó al inicio del curso una prueba a los asistentes a la sesión inicial, cuyos resultados se comentan con amplitud en el apartado IV.6.1 de este mismo capítulo. Responden a la prueba 47 alumnos, que proporcionan datos sobre su edad y preparación previa que merecen ser reseñados:

1.- Edad de los estudiantes

| Edad | [18-19) | [20-21) | [21-22) | [23-25) | Mas de 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 10 | 16 | 13 | 5 | 3 |
| Porcentaje | 21% | 34% | 28% | 11% | 6% |

Tabla IV.1. Edad de los estudiantes que intervienen en la Primera Etapa

- La mayoría de los estudiantes están entre 18 y 22 años, lo cual se corresponde con el curso que realizan, o con ligeras desviaciones del mismo.
- Hay 3 alumnos que superan ampliamente tal situación; seguramente se trata de alumnos que se han incorporado tardíamente a estos estudios.

2.- Condiciones de acceso a la asignatura

- Los estudiantes acceden mayoritariamente después de cursar B.U.P. (72%), siendo más reducido el grupo de estudiantes que acceden a través de la F.P., que son el 17%.
- De los 47 estudiantes que completaron la prueba, han cursado Matemáticas I en C.O.U. en el 34% de los casos y Matemáticas II en el 36% de los encuestados. Esto presupone que la mayor parte de los estudiantes han estudiado 12 cursos de matemáticas.
- Salvo un alumno, todos los demás se matriculan por primera vez en esta asignatura. Posiblemente entre los estudiantes que no realizaron la prueba haya algunos repetidores.
- Salvo 1 alumno, los estudiantes contestan que no conocen revistas de matemáticas ni de historia de las matemáticas. Con excepción de 2 de ellos, los restantes no conocen publicaciones sobre enseñanza de las matemáticas, ni sobre matemática recreativa (divertimentos, juegos, ...)

En el plan de estudios de esta Diplomatura, los futuros maestros tienen dos asignaturas troncales en primer curso: Matemáticas y su Didáctica I y Matemáticas y su Didáctica II. Ambas son cuatrimestrales y tienen una carga de 4 créditos. La primera aborda los contenidos aritméticos sobre números naturales y racionales, mientras que la segunda estudia la geometría del plano.

La asignatura en que se lleva a cabo la experimentación es anual, con una carga de 8 créditos y con carácter de obligatoria para los estudiantes de la Diplomatura de Maestro en la especialidad de Educación Primaria matriculados en la Universidad de Zaragoza.

El investigador es profesor responsable de la mencionada asignatura, "*El currículum de matemáticas en Educación Primaria*", en el grupo objeto de la experimentación; hay otro grupo de la misma asignatura del cual es responsable el profesor D. Rafael Escolano. En ambos grupos se desarrolla el mismo programa y se efectúan idénticas pruebas de evaluación, aunque el grupo objeto de análisis es el que corresponde al investigador.

La asignatura en la que se incluye la propuesta didáctica tiene una doble finalidad: de una parte, incrementar los conocimientos personales sobre las matemáticas escolares de los futuros maestros; y, de otra parte, formar a los futuros maestros en el desarrollo de tareas profesionales. Puesto que los objetivos de este trabajo de investigación también tienen esa doble finalidad, la propuesta didáctica que se experimenta en el aula, queda integrada plenamente en el currículum de dicha asignatura.

### IV.2.5. Papel del investigador

El investigador se sitúa como profesor del grupo en el que se experimenta la propuesta didáctica, posición desde la que elabora una propuesta didáctica para implementarla entre sus estudiantes. Además, el investigador actúa como especialista en Didáctica de la Matemática que imparte docencia sobre los contenidos de esta disciplina científica.

Esta doble posición del responsable de este trabajo le otorga un papel específico dentro del proceso investigador, lo que le permite llevar a cabo actuaciones como las siguientes:

* Introducir modificaciones en los contenidos del programa de la asignatura, por cuanto es responsable de la misma y porque dichas modificaciones no afectan a los objetivos de la asignatura.
* Aplicar las estrategias metodológicas más acordes con la intencionalidad del trabajo, previa justificación ante los estudiantes.
* Obtener datos para la investigación en el lugar y condiciones en que se producen, puesto que su presencia en el aula es un hecho normal.
* Analizar situaciones particulares del desarrollo de la experiencia y tomar decisiones en el momento en que se producen.
* Avanzar en su formación profesional en tanto en cuanto trata de dar respuesta a un problema práctico y, en consecuencia, mejorar la calidad de su actividad docente mediante la transformación de las condiciones instruccionales.
* Dar respuesta a unas inquietudes científicas al introducir un cambio en el currículo y observar los efectos que produce tal cambio.
* Avanzar en su preparación científica en la disciplina de Didáctica de las Matemáticas, así como en su formación como investigador en dicha disciplina.

El doble papel de investigador y profesor que asumimos en nuestra investigación, nos obliga a realizar una observación participante de la interacción social cotidiana que se produce en el aula. Pero esta posición de profesor y de investigador necesita arbitrar algunas cautelas que garanticen la fiabilidad y validez del estudio que nos proponemos; en este trabajo se han tenido en cuenta las siguientes cautelas:

- Utilizar la técnica de triangulación de investigadores para la obtención, delimitación y objetivación de los datos obtenidos en nuestro trabajo. Esta triangulación implica al Director del trabajo, al profesor D. Rafael Escolano y al propio investigador.
- Aplicar la técnica de triangulación de los datos mediante el empleo de distintas fuentes de información: documentos escritos de los alumnos, diario de campo del investigador y grabaciones en audio y en video.
- Utilizar descriptores de bajo nivel inferencial: la transcripción literal de los registros observacionales constituyen la evidencia principal para que los lectores puedan aceptar, rechazar o modificar las conclusiones extraídas por el observador.
- Ofrecer toda la información sobre el status de investigador; de los constructos y premisas teóricos que enmarcan este estudio; de los métodos de recogida y análisis de datos; de la selección de los informantes; y de la situación y condiciones sociales en que se desarrolla la experiencia.
- Desarrollar la investigación en el escenario natural del aula, lo que permite reflejar las experiencias y transformaciones de los participantes sin las distorsiones que producirían escenarios más artificiales o laboriosos.
- Mantener un proceso continuo de autovigilancia del investigador, que le ha llevado a un cuestionamiento y a una evaluación permanentes de sus actuaciones.

### IV.2.6. Técnicas para recoger información y elaborar los datos.

Al observar el desarrollo de las sesiones de clase en la que se está implementando una propuesta didáctica previamente elaborada, se obtienen informaciones relativas a la organización de los contenidos que se imparten, a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes, y a las interacciones didácticas que se producen. A partir de estas informaciones, debidamente categorizadas, se obtienen una serie de datos y, a partir de éstos y de su interpretación, se obtienen los resultados de la propuesta de innovación en estudio y se elaboran las conclusiones. Por tanto, es importante fijar las fuentes de información que se utilizan, así como los criterios para la selección de los datos obtenidos.

La recogida de información, en el paradigma cualitativo, puede hacerse a través de distintas técnicas, como el estudio de casos, las entrevistas personales, la observación participante, el empleo de medios audiovisuales (fotografía, grabaciones de voz, vídeo,...), etc. Lo que se persigue es, en suma, disponer de información lo más fiable posible de lo que hacen y dicen los sujetos observados.

El doble papel de investigador y profesor que asumimos en nuestra investigación, nos obliga a realizar una observación participante de la interacción social que se produce en el aula. Es por ello que en la recogida de informaciones utilizamos las siguientes técnicas:

- relación intensiva y a largo plazo con los estudiantes;
- registro cuidadoso de lo que ocurre en el aula (producciones de los alumnos, grabaciones de voz, anotaciones de sucesos o de comportamientos destacables, ...);
- registro de las reflexiones personales surgidas en el desarrollo de las sesiones;
- descripciones detalladas utilizando procedimientos narrativos; y
- reflexiones surgidas de la documentación obtenida.

Las medios considerados para obtener la información son los naturales; es decir, las comunicaciones interpersonales producidas en las sesiones de clase (detectadas a través del sistema perceptivo), que se realizan en un lenguaje natural. De este modo pretendemos conseguir como un primer objetivo que la observación sea sistemática y, como segundo objetivo, que el grado de inferencia en la observación sea débil, puesto que se enunciarán solamente los hechos que se hayan observado, sin aportar nuestra interpretación en esta fase.

En nuestra investigación los datos constituyen el soporte del que esperamos que aparezcan conceptos y planteamientos teóricos como resultado de su análisis. La construcción, análisis e interpretación de los datos necesita un sistema de categorías que permita codificar la información obtenida; este sistema de categorías, que el investigador desarrolla al inicio del trabajo, se describe con mayor detenimiento en el apartado IV.7 de este capítulo..

El tipo de análisis que utilizaremos será inductivo, pues las categorías, que surgen de las notas de campo, de los documentos de trabajo de los alumnos y de las entrevistas, no son impuestas a priori a los datos; antes bien, el examen de las observaciones realizadas y de las informaciones obtenidas permitirá la reformulación de categorías de fenómenos y de relaciones entre ellas, resultado de la reelaboración o modificación de las clasificaciones iniciales, de acuerdo con los casos que hayan aparecido.

Para llevar a efecto este análisis recurrimos a la técnica de triangulación, que trata de diferenciar entre los datos objetivos de la investigación y los datos subjetivos que se generan si hay una sola observación, puesto que tanto el observador como los sujetos observados contribuyen a la forma de los datos; de este modo se pretende ajustar las observaciones recurriendo al empleo de diferentes técnicas para estructurar los datos y para llevar a cabo su análisis desde distintas perspectivas.

En orden a precisar la técnica de triangulación que utilizaremos en nuestro análisis, atendemos a la tipología que aparece en los trabajos de Janesik (1994):

- Triangulación de datos: la objetivación de los datos se realiza mediante el empleo de distintas fuentes de información.

- Triangulación de investigadores: el análisis de datos se realiza con el trabajo de diferentes investigadores y evaluadores.

- Triangulación teórica: un mismo conjunto de datos se interpreta desde perspectivas diferentes.

- Triangulación metodológica: el problema que se investiga se aborda desde diferentes estrategias metodológicas.

Nuestra elección para este estudio, teniendo en cuenta las condiciones de contexto, ha sido utilizar una doble técnica de triangulación para la obtención, delimitación y objetivación de los datos producidos:

- una triangulación de investigadores en la que se implican el director de este trabajo, el profesor D. Rafael Escolano que pertenece al Area de didáctica de las Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y el profesor-investigador;

- una triangulación de los datos obtenidos a través de fuentes distintas: documentos escritos de los alumnos, diario de campo del investigador y grabaciones en audio y en video.

**IV.2.7. Categorías para construir y analizar los datos.**

La implementación de nuestra propuesta didáctica se desarrolla con unos estudiantes determinados y en un contexto concreto y esta consideración es determinante para la organización de la primera etapa de nuestro trabajo. La inserción en el marco curricular es obligada, nuestro trabajo se encuentra delimitado por el entorno sociocultural de las personas cuya formación estudia; el tipo de formación que se propone; las peculiaridades de las personas, medios y recursos que configuran la institución social en la que se produce esta formación; las necesidades formativas que se quieren cubrir y el control que se realiza de la formación alcanzada (Rico, 1990a).

En la planificación del currículum se consideran al profesor, los alumnos, el contenido y la institución como componentes o dimensiones del sistema curricular (Rico, 1990b; Romberg, 1992). En esta investigación nos situamos dentro de ese nivel de reflexión para centrarnos en el análisis de las componentes del triángulo didáctico, de las interacciones que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Considerando al aula como el marco en que se desarrolla la investigación, se identifican tres componentes interrelacionadas: contenido, alumnos y profesor, tal y como muestra el gráfico:

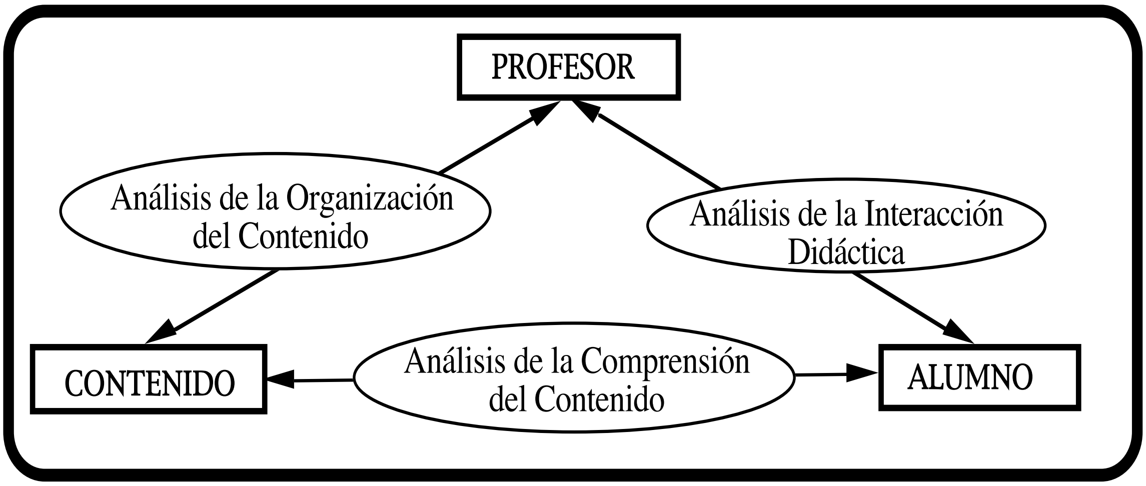



Gráfico IV.1. Relaciones entre las tres componentes del triángulo didáctico

La información que vamos a recoger y los datos que vamos a elaborar están centrados sobre las relaciones entre las tres componentes del triángulo. Como se indica mediante el gráfico, consideramos las relaciones entre cada dos de las componentes. Para estudiar la relación entre profesor y alumnos nos centramos en la interacción en el aula; para estudiar la interacción entre profesor y contenido observamos la organización del contenido; para conocer la relación entre contenido y alumnos estudiamos la comprensión del contenido por parte de los escolares.

La sistematización de la información obtenida aportará datos sobre las relaciones entre las componentes del triángulo didáctico. Para realizar la construcción y el análisis de dichos datos son necesarias unas categorías o unidades de análisis, que sistematizan la información sobre las relaciones entre el contenido, el profesor y los alumnos. Aunque se detallarán con amplitud en el apartado IV.7 de este mismo capítulo, estas unidades son de tres tipos y se sustentan en las ya establecidas por Romero (1995) que, a su vez, eran una adaptación de las que elaboró Castro (1994):

- Unidades de Análisis para la Organización del Contenido: permiten estudiar la organización y secuenciación de los contenidos que se tratan en el proceso didáctico. Estas unidades sistematizan toda la información sobre las interacciones Profesor-Contenido y la analizan; están fijadas antes de la implementación del proceso instructivo, si bien contemplan las observaciones y reflexiones que aporta la experiencia docente del investigador.
- Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido: permiten sistematizar los fenómenos que se presentan de comprensión del contenido matemático por parte de los estudiantes, así como analizar los datos resultantes. El estudio de las relaciones entre el profesor y los futuros maestros permitirá clarificar el marco de interacción social en el que se trabaja, así como contextualizar y precisar las condiciones bajo las que los estudiantes han modificado su comprensión sobre los Números Racionales positivos, caracterizando los factores que facilitan o

dificultan tal comprensión.

• Unidades de análisis de la Interacción Didáctica: permiten abordar el estudio de las interacciones que han tenido lugar entre el profesor y los futuros maestros a lo largo del proceso didáctico y su relación con la construcción del conocimiento. Estas unidades contemplan aspectos sobre gestión del trabajo en el aula, sobre gestión del desarrollo del contenido y sobre la construcción del conocimiento en el aula.

**IV.2.8. Fiabilidad y validez del estudio.**

En el paradigma metodológico cuantitativo la evaluación de la calidad científica de un trabajo de investigación debe contemplar los criterios de validez y fiabilidad del mismo. Estos criterios siguen siendo válidos en el paradigma metodológico cualitativo (Janesick, 1994). El control sobre la fiabilidad y validez de este trabajo indagatorio sigue la reflexión realizada por Romero (1995), sobre cuyas ideas principales se basa nuestra argumentación.

La fiabilidad es una cualidad de una investigación relativa a la exactitud y constancia de la misma. Se dice que la fiabilidad es alta cuando mide con la misma precisión los resultados; es decir, produce los mismos resultados al aplicar los mismos métodos en sucesivas investigaciones realizadas en condiciones similares. Cuando es posible, la fiabilidad de una prueba puede determinarse mediante técnicas que midan la correlación entre los resultados de dos investigaciones que se obtienen de repetir la misma prueba, de dos pruebas equivalentes o de la partición de la prueba en dos mitades.

La reiteración de los trabajos plantea grandes dificultades en las investigaciones sobre el comportamiento natural o los fenómenos únicos. En estos casos, parece inviable la medida de la fiabilidad de un estudio cualitativo por cuanto la presencia de cualidades como la unicidad y la idiosincrasia imposibilitan la reiteración del proceso, sobre todo, cuando se intentan registrar las transformaciones que se producen.

En el caso de nuestra investigación, en la que se analiza un comportamiento humano que no es estático, no sería posible la replicación exacta del estudio. Por tanto, la fiabilidad de nuestro trabajo vendrá determinada por la generación, perfeccionamiento y validación de constructos y postulados que hagan innecesaria la réplica de las situaciones. Y en este sentido, y siguiendo los trabajos de Goetz y Lecompte (1988), mejoraremos la fiabilidad tanto interna como externa del siguiente modo:

• La fiabilidad interna se mejora con la presencia de diferentes investigadores que actúan sobre un mismo estudio. Las estrategias seguidas en nuestro estudio para incrementar la fiabilidad interna han sido:

  * Utilizar descriptores de bajo nivel inferencial: la transcripción literal de los registros observacionales constituyen la evidencia principal para que los lectores puedan aceptar, rechazar o modificar las conclusiones extraídas por el observador.

* Facilitar la revisión por otros investigadores: además del director de la tesis y otros colegas que han intervenido en el proceso de construcción y análisis de los datos, la presente memoria, como documento público, constituye un material idóneo para su revisión por otros expertos.

• La fiabilidad externa de esta investigación se fortalece en tanto en cuanto se proporciona toda la información relativa a:
* el status de investigador;
* los constructos y premisas analíticos sobre los que se asienta este trabajo;
* los métodos de recogida y análisis de datos;
* la selección de los informantes;
* la situación y condiciones sociales en que se desarrolla la experiencia.

La validez de los métodos de investigación científica es una apreciación del grado de proximidad entre la realidad y los resultados obtenidos. En el paradigma cuantitativo se diferencian la validez interna (o condiciones de control experimental) y la validez externa (o posibilidad de generalización de los datos). En las investigaciones cualitativas, cual es el caso de la que estamos realizando, y siguiendo los trabajos de Goetz y Lecompte (1988), también podemos incrementar el grado de validez interna y de validez externa, en los términos siguientes:

• La **validez interna** está avalada por:
* La convivencia con los participantes: la dualidad del papel del investigador como profesor de los estudiantes, así como la duración temporal de la prueba han permitido el análisis y comparación permanente de los datos con el fin de perfeccionar los conceptos.
* La realización de la investigación en un escenario natural ha permitido reflejar las experiencias y transformaciones de los participantes sin las distorsiones que producirían escenarios más artificiales o laboriosos.
* El proceso de autovigilancia del investigador, subjetividad disciplinada, que ha llevado a un cuestionamiento y evaluación permanentes de su actuación.

• En cuanto a la **validez externa** o generalización de los resultados presenta una gran dificultad, como corresponde a todas las investigaciones cualitativas (Firestone, 1993). En la investigación cuantitativa se emplean tres técnicas para la generalización de los resultados obtenidos: la extrapolación desde una muestra a la población a partir de análisis estadísticos, la generalización analítica y la transferencia de un caso a otro. En la investigación cualitativa se utiliza fundamentalmente la tercera, la transferencia de un caso a otro, aunque también se han hecho esfuerzos para utilizar las otras dos.

En el caso de nuestra investigación, incrementamos la validez externa mediante una descripción los más rica, profunda y detallada posible de todo el proceso, pormenorizando la situación real en que se hizo el estudio, así como una información amplia del proceso y de los hallazgos obtenidos. De este modo, el lector que quiera utilizar los resultados de la investigación deberá asumir la responsabilidad de aplicar los mismos a la situación en que quiere hacerse, la responsabilidad del investigador es la de haber proporcionado toda la información que necesita.

No es factible una generalización de los resultados desde una muestra hasta la población mediante datos estadísticos porque no se ha trabajado con esa intencionalidad (no ha habido una selección de informantes sino un grupo de alumnos que trabajan en su escenario natural) y por el carácter exploratorio del trabajo. Tampoco parece oportuna la generalización analítica de los resultados dado el carácter exploratorio de la investigación.

## IV.3. Segunda etapa: estudio del conocimiento profesional.

La preparación de futuros profesores de matemáticas tiene una doble dimensión: la formación en matemáticas y la preparación para su trabajo como docentes. En esta etapa queremos hacer indagaciones que nos ilustren acerca de la utilidad profesional que los maestros en formación han obtenido de la propuesta de enseñanza sobre expresiones fraccionarias y decimales. Estas indagaciones giran en torno a dos componentes principales. La primera consiste en presentar propuestas que permitan analizar cómo los futuros maestros resuelven tareas profesionales de detección de errores y concepciones inadecuadas, en el sentido que indican Chappell y Thompson (1994). La segunda componente, siguiendo a Watson (1995), consiste en estudiar si la experiencia adquirida en matemáticas por nuestros estudiantes les permite construir un repertorio de estrategias educativas, una vez que han cubierto la primera etapa de nuestro trabajo.

Esta etapa es complementaria de la primera, y trata de profundizar sobre el conocimiento profesional conectado con la innovación curricular sobre fracciones. En esta etapa se utiliza un método de investigación diferente al de la Primera Etapa, cual es el método de entrevista.

Siguiendo los trabajos de Cohen y Manion (1990), esta metodología de investigación comprende una secuencia de pasos que se deben cubrir en el proceso de indagación:

Primer paso: establecer el objetivo de la investigación

Aunque las dos etapas que comprende nuestro estudio están conectadas, esta Segunda Etapa no tiene como finalidad la confirmación del estudio hecho en la etapa anterior, sino que continúa la exploración antes emprendida, orientado hacia el conocimiento profesional de los estudiantes para profesores de Educación Primaria.

El objetivo de esta Segunda Etapa es hacer indagaciones sobre las relaciones que se pueden detectar, respecto al tópico matemáticos fracciones y decimales, entre:

- las posiciones manifestadas en las sesiones de clase por los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas y la construcción del conocimiento matemático, y
- las reflexiones de estos mismos estudiantes al proponerles tareas relacionadas con la instrucción de escolares.

Segundo paso: preparar el programa de la entrevista

Los objetivos de la investigación se plasman en las preguntas que se formulan a los informantes, así como el modo en que se formulan las respuestas. En este sentido, y atendiendo a su tipología, cada una de las entrevistas que se realizan con los estudiantes seleccionados responde a las siguientes características de la clasificación de Martorell (1997) y se encuentran completamente detalladas en el Capítulo VII:

- Según los aspectos formales es semiestructurada, puesto que el investigador se apoya en un esquema sobre el que hacer las preguntas, aunque lo utiliza de forma flexible.
- Según el tipo de preguntas las hay abiertas y cerradas, o preguntas en las que el entrevistado actúa según su personal criterio y preguntas que se formulan de la forma previamente establecidas.
- Según el tipo de respuesta es mixta, ya que el entrevistado una veces se limita a realizar una elección razonada sobre una de las opciones que se le presentan; mientras que en otras preguntas el entrevistado tiene libertad para ofrecer las respuestas que estime más oportunas.
- Según la finalidad que se persigue, es una entrevista prospectiva o de investigación, por cuanto su objetivo es llegar al conocimiento objetivo de una situación de enseñanza.
- Según el marco teórico de referencia es una entrevista directiva por cuanto es el entrevistador quien define o centra la idea acerca de la cual se quiere obtener la información.

Tercer paso: establecimiento y dirección de la entrevista.

El trabajo de campo en esta etapa consiste en la realización, por parte del investigador, de entrevistas personales a tres estudiantes seleccionados entre los que han seguido con regularidad la implementación de la propuesta didáctica que se experimentó en la Primera Etapa.

En cuanto al entrevistador, señalemos que éste es el investigador de este trabajo y es el profesor de la asignatura en la que se ha llevado a cabo, en la Primera Etapa, la implementación de la propuesta didáctica; por tanto, conoce a cada uno de los estudiantes seleccionados y también conoce el grado de comprensión de los contenidos de cada uno de los entrevistados.

Cuarto paso: realización de las entrevistas.

Quinto paso: recogida de datos.

Sexto paso: análisis e interpretación de los datos.

En este capítulo no se desarrollan estos tres últimos pasos (cuarto, quinto y sexto), dado que nuestra pretensión es, en estos momentos, la de presentar el proceso metodológico seguido en la investigación; mientras que arbitramos el Capítulo VII para desarrollar completamente la Segunda Etapa de la investigación, donde se recoge la descripción del proceso seguido, así como los resultados observados.

## IV.4. Esquema general del diseño.

Para resumir el diseño de la experimentación en las dos etapas que se han presentado y comentado detalladamente en los apartados IV.2 y IV.3 anteriores, hemos elaborado un esquema general para cada una de las etapas

En la Primera Etapa figura nuestro esquema de Investigación-Acción construido a partir del esquema propuesto propuesto por Elliot (citado por McNiff, 1988, pág. 30), en el que se recogen las ideas básicas de las etapas cíclicas de la metodología de investigación.

En nuestro esquema incorporamos la aportación de Whitehead (citado por McNiff, 1988, pág. 44) que considera la posibilidad de dar cuenta de episodios espontáneos a lo largo del proceso de investigación-acción, añadiendo espirales adyacentes al problema general de investigación; estas aportaciones permiten acomodar el tratamiento que se da a problemas subyacentes al problema fundamental de la investigación y cuyo tratamiento se considera necesario para abordar dicho problema principal. En este caso. dicha espiral adyacente se corresponde con la valoración de la Primera Etapa y la correspondiente toma de decisiones para afrontar la Segunda Etapa.

En cuanto a la Segunda Etapa de nuestro trabajo, y en consonancia con los objetivos perseguidos, la metodología de investigación aplicada es la de entrevistas personales, que se han estructurado en los seis pasos que figuran en los trabajos de Cohen y Manion (1990).

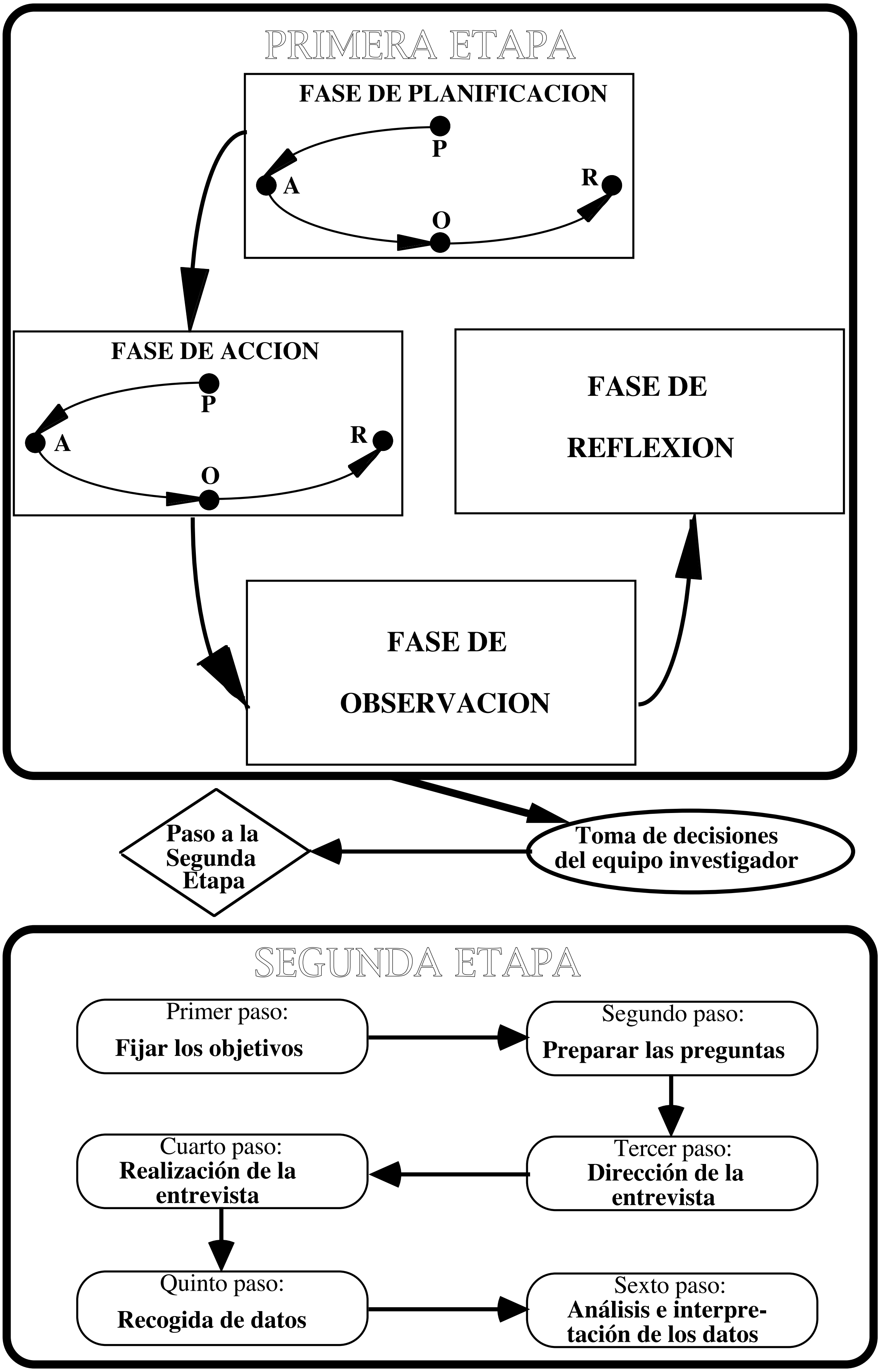



Gráfico IV.2. Esquema de la metodología de investigación utilizada

El esquema que se presenta no refleja un plan apriorístico, sino que muestra la síntesis de nuestro proceso de investigación y que se ha elaborado para facilitar su comprensión y servir de guía para el desarrollo de la exposición. También queremos señalar que hemos optado por describir el proceso de investigación de forma lineal, puesto que ello nos permite ofrecer una mayor claridad expositiva, en la que queda explicitada una estructura que, en determinados aspectos, permaneció implícita a lo largo de la realización del trabajo propio de la investigación.

En los apartados anteriores quedaron marcadas las lineas generales que se van a seguir en las dos etapas de que consta este estudio. En los siguientes apartados nos proponemos detallar algunos elementos relevantes que son específicos de nuestra investigación: características de los participantes en cada una de las dos etapas, temporalización del proceso global, y unidades para la construcción y el análisis de los datos en cada una de las etapas consideradas.

## IV.5. Temporalización del proceso global

En la **Primera Etapa** se contempla el desarrollo de una propuesta curricular en 13 sesiones: una introductoria de 1/2 hora de duración (sesión número 1); y las sesiones 2 a 13 restantes con una duración de 2 horas, (se hace un descanso intermedio de unos 10 minutos).

Estas 12 sesiones se vertebran en torno a los dos focos de investigación establecidos, cada uno de los cuales se divide en temas (en los que los futuros maestros realizan trabajos específicos), y a los que se asigna una temporalización, tal y como puede verse en el Anexo III.1. Se resume en los siguientes dos cuadros la distribución temporal de temas y tareas por cada uno de los dos focos de investigación:

Primer foco de investigación:

| Contenido | Temporalización | Trabajos |
|---|---|---|
| Tema 1 | Sesión 2<br>Sesión 3 | Ficha 1<br>Cuestión de investigación 1 |
| Tema 2 | Sesión 4<br>Sesión 5<br>Sesión 6<br>Sesión 7<br>Sesión 8 | Ficha 2<br>Ficha 3<br>Ficha 4<br>Cuestión de investigación 2<br>Cuestión de investigación 3 |
| Tema 3 | Sesión 9 | Cuestión de investigación 4 |

Cuadro IV.1. Distribución temporal correspondiente al primer foco de investigación

A este foco de investigación está previsto dedicar 9 sesiones de clase (18 horas), que permiten desarrollar la parte de la propuesta didáctica sobre el sistema de representación polinómico unitario. Las tareas propuestas a los estudiantes son fichas de trabajo o cuestiones específicas de investigación

Segundo foco de investigación:

| Contenido | Temporalización | Trabajos |
|---|---|---|
| Tema 4 | Sesión 10 | Ficha 5<br>Cuestión de investigación 5 |
| | Sesión 11 | Ficha 6 |
| | Sesión 12 | Cuestión de investigación 6 |
| Tema 5 | Sesión 13 | Cuestión de investigación 7 |

Cuadro IV.2. Distribución temporal correspondiente al segundo foco de investigación

El hecho de que los estudiantes para maestros ya hayan recibido instrucción sobre las expresiones polinómicas unitarias, permite que este segundo foco de investigación se reduzca a dos temas, a desarrollar en 4 sesiones de clase (8 horas).

Estas sesiones se celebrarán en el aula que tienen asignada, por la Vicedirección de Ordenación Académica de la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Zaragoza, el grupo de estudiantes objeto de la experiencia, que es el aula número 2. Por tanto, la experiencia se desarrolla en las condiciones habituales de enseñanza.

Está previsto que la experimentación comience el 28-20-97 y finalice el 4-12 de 1997, con un tiempo planificado de 26 horas lectivas. En el apartado V.3.2 del capítulo V se hace un balance entre la planificación preestablecida y la ejecución del plan.

En la **Segunda Etapa** se contempla la celebración de tres sesiones de entrevistas, una por cada uno de los estudiantes seleccionados, con una duración de 2 horas cada una, intercalando un descanso de 10 minutos.

No se produjeron desviaciones entre la previsión y la ejecución. Las entrevistas se celebraron el 20-3-98 con el estudiante número 34; el día 23-3-98 con el estudiante número 10; y el día 1-4-98 con el estudiante número 24

## IV.6. Descripción de los participantes en la Primera Etapa.

Como ya se ha señalado, en esta Etapa participan un grupo natural de estudiantes para maestros que están matriculados en la asignatura "El currículum de Matemáticas en Educación Primaria", asignatura troncal de 2º curso de la especialidad de Educación Primaria. El número de inicial de estos estudiantes era de 66, aunque fueron 57 los que tomaron parte en alguna de las tareas que se desarrollaron a lo largo de la fase de implementación.

Con la intención de disponer de información acerca de los conocimientos personales de los estudiantes que participan en esta etapa, se realizó una prueba el día 23 de Setiembre de 1997. La prueba fue completada por los 47 estudiantes que asistieron a la primera clase de la asignatura.

La prueba proporciona información sobre las opiniones de los estudiantes sobre la dificultad, amenidad y utilidad de las matemáticas, sobre su naturaleza como disciplina científica, y sobre las características de su enseñanza y de su aprendizaje; además, ofrece información sobre los conocimientos personales de los futuros maestros sobre el tópico objeto de este trabajo: significados de las fracciones, de los decimales y de la conexión entre ambos, así como sobre el orden, y la densidad respecto al mismo, entre expresiones fraccionarias y decimales de los números racionales.

Informamos, en primer lugar, sobre el contenido de la prueba y, en segundo lugar, presentamos los resultados obtenidos por los estudiantes.

### IV.6.1. Contenido de la prueba

La prueba propuesta a los estudiantes para maestro en la primera sesión de clase es la siguiente:

Estudios de acceso a la Universidad: FP o COU (en COU, Matemáticas I o II)

Matriculado por primera vez en la asignatura: SI NO

**1-a**) ¿Qué revistas de matemáticas conoces?

**1-b**) ¿Qué libros sobre enseñanza-aprendizaje de las matemáticas conoces?

**1-c**) ¿Qué revistas o libros sobre Historia de las Matemáticas conoces?.

**1-d**) ¿Qué libros sobre divertimentos, curiosidades o juegos matemáticos conoces?.

**2-a**) Las matemáticas son fáciles o difíciles de aprender:

**2-b**) Las matemáticas: Te gustan Te desagradan Las odias

**3**) Escribe 5 situaciones (fuera del ámbito de la enseñanza) en las que **utilices las matemáticas**:

**4**) Para ti **las matemáticas son**: una ciencia exacta que trabaja sobre verdades inmutables o una obra humana y como tal sometida a cambios constantes

**5**) ¿Qué **capacidades mentales** ayuda a desarrollar el estudio de las matemáticas?.

**6**) Valora los siguientes **temas según los hayas necesitado** en tu vida como ciudadano, utilizando el código: **0** Innecesario; **1** Poco necesario (sólo a veces); **2** Bastante necesario **3** Imprescindible

números naturales (0 , 1 , 2 , 3 , .........); números racionales (1 , 0´5 , 3/4 , 32% , - 7/3 , ...........); números enteros (.......... , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , ...............); números irracionales ($\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, π , e , ...........); sistemas de medida; geometría del plano; geometría del espacio; ecuaciones y sistemas; regla de tres; teoría de conjuntos; estadística

**7**) Valora las acciones que abajo se indican según sean adecuadas para **aprender matemáticas**, utilizando el código:**0** No sirve para aprender;**1** Es adecuada en alguna ocasión; **2** Es bastante necesaria; **3** Es imprescindible

disponer de los apuntes y/o los libros adecuados; escuchar, con atención, las explicaciones del profesor; resolver los problemas enunciados en el libro de texto; discusión entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor sobre ideas matemáticas; supervisión y/o evaluación de las tareas realizadas; necesidad de resolver un problema; realizar muchos ejercicios de cálculo; realizar trabajos de investigación; utilizar calculadoras y/o ordenadores; memorizar las definiciones; salir a la pizarra; utilizar material manipulable

**8**) Valora qué conocimientos de los abajo descritos permiten decir que una persona **sabe matemáticas**, utilizando el código: **0** No es indicativo de saber matemático; **1** Es poco indicativo; **2** Es bastante indicativo; **3** Es totalmente indicativo

relacionar conceptos, por ejemplo, al definir un mismo concepto de diferentes formas; conocer bien las fórmulas y resultados matemáticos y aplicarlos correctamente; saber generalizar, por ejemplo, al escribir cualquier resultado numérico con letras; conocer y manejar correctamente los símbolos; saber resolver problemas; hacer bien los cálculos; manejar bien el cálculo mental; comprender las demostraciones; saber formular conjeturas

I. Escribe todo lo que entiendas cuando ves el símbolo $\frac{5}{7}$

II. Escribe todo lo que entiendas cuando ves el símbolo **2,04**

III. Escribe distintas formas de justificar que los números **0,375** y $\frac{3}{8}$ son iguales

IV. Escribe los números siguientes a los que se dan:
a) 2,3; b) 0,567; c) 1,222... ; d) $\frac{1}{2}$; e) -2; f) 0,9999 ...

V. Escribe distintas formas de justificar que la fracción $\frac{3}{5}$ es mayor que $\frac{4}{7}$

VI. Escribe distintas formas de justificar que el número **0,468** es mayor que **0,35**

VII. Escribe distintas justificaciones de que el número **0,9292...** es menor que $\frac{15}{16}$

Cuadro IV.3. Contenido de la prueba inicial

Los resultados detallados de cada uno de los items de esta prueba se presentan, junto con sus comentarios, en el Anexo III. 3. Recordamos que las cuestiones relativas la edad, acceso a los estudios y si repiten la asignatura ya se presentaron en el apartado IV.2.4.

### IV.6.2. Valoración de las respuestas de los estudiantes.

De la revisión de las respuestas dadas por los estudiantes para maestro a la prueba inicial extraemos las siguientes consideraciones:

• Los estudiantes muestran que no conocen revistas sobre matemáticas divulgativas, ni tampoco del mundo profesional de la Educación Matemática.

• Los estudiantes manifiestan opiniones contrapuestas y cualitativamente importantes en cuanto a la dificultad de la materia y en cuanto a la satisfacción que les produce su estudio.

• Para la mayoría de los encuestados, la matemática es un ciencia exacta y de verdades inmutables.

• Los estudiantes ponen en evidencia que el currículum de las matemáticas escolares contiene un número escaso de tópicos que sean de utilidad en la vida cotidiana.

• La mayoría de los encuestados han estudiado 12 cursos de matemáticas, lo que les ha forjado una idea acerca de que el aprendizaje es fundamentalmente pasivo: la base del aprendizaje se sustenta en unas nítidas explicaciones del profesor y unos buenos libros y apuntes; ocupando un lugar secundario tanto la participación del alumno en discusiones o en mostrar sus conocimientos, como en la utilización de materiales.

• Los estudiantes para maestros no conceden importancia a la memorización de las definiciones, lo que reflejaría su consideración acerca de que la matemática es básicamente mostrativa, que los resultados hay que conocerlos, pero no es necesario justificarlos.

• En cuanto a los conocimientos personales de los estudiantes sobre determinados aspectos del Número Racional, las respuestas que han ofrecido permiten caracterizarlos en los términos siguientes:

- El significado predominante de la fracción es como relación parte-todo, siendo muy minoritario el de cociente, e inexistentes los de razón o medida.
- La notación decimal no está asociada a ningún modelo, simplemente se conocen su clasificación o su descripción en términos de otros números o del sistema de numeración.
- Las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal se establecen en términos exclusivamente operatorios, siendo el algoritmo de la división el que se emplea mayoritariamente
- Las relaciones de orden entre fracciones se establecen, de forma mayoritaria, a través de la notación decimal; entre estas notaciones el orden se establece teniendo en cuenta el valor posicional.
- Los estudiantes, en su práctica totalidad, no conocen la densidad de los números racionales puesto que trasladan a estos números las nociones sobre orden de los números naturales; y esto lo hacen con independencia de que los números racionales vengan expresados con notación fraccionaria o decimal.

Estos datos generales establecen el perfil del estudiante medio de la asignatura *El Currículum de Matemáticas en Educación Primaria* en el curso 97-98 en la Escuela de Magisterio de Zaragoza, antes de comenzar el trabajo experimental correspondiente a esta investigación. Desde los intereses de esta investigación las principales características de estos estudiantes son: los grados de aceptación de la materia son muy dispares; conciben un aprendizaje pasivo de las matemáticas; la matemática es básicamente mostrativa; tienen una idea prioritaria de la fracción como relación parte-todo; la notación decimal no la asocian con ningún modelo; y trasladan significados del orden de los naturales a los números racionales.

## IV.7. Unidades de Análisis de la Primera Etapa

En el apartado IV.2.6. se mencionaron las categorías para la construcción, análisis e interpretación de los datos, estructuradas como un sistema para codificar y sistematizar la información obtenida. Presentamos aquí el sistema de categorías, o unidades de análisis, que vamos a utilizar en nuestro trabajo y detallaremos cada una de esas unidades de acuerdo con la tipología preestablecida.

### IV.7.1. Unidades de Análisis para la Organización del Contenido.

Nuestro objetivo es incrementar la compresión de los Números Racionales entre los estudiantes para maestros en la especialidad de Educación Primaria; proponemos dos focos de investigación, que corresponden a dos nuevos sistemas de representación y que robustecen las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, ya conocidas por estos estudiantes. Seguidamente detallamos las Unidades de Análisis que permitirán conocer qué aspectos concretos del contenido se planifican y desarrollan, así como el grado de detalle con el que son propuestos. Mediante estas unidades podemos conocer y valorar la estructura conceptual propuesta a los estudiantes.

### *IV.7.1.1. Unidades para el Primer Foco de Investigación*

En este Foco de Investigación nuestro objetivo es introducir un modelo desde el que surja un sistema de representación para cantidades positivas y no enteras. A través de este sistema, que denominamos representación polinómica unitaria, buscamos la reflexión del alumno sobre las exigencias sintácticas y semánticas que demanda esta simbolización matemática. Además, se produce una revisión de las relaciones y operaciones entre números racionales que proporciona una nueva perspectiva de conocimientos anteriores.

Pasamos a presentar las distintas unidades de análisis sobre este primer foco, desglosadas en 7 puntos que lo estructuran.

<u>Punto 1.- Concreción del modelo.</u>

La propuesta de trabajo conlleva la explicitación de un modelo físico (y el modelo útil asociado), sobre él se llevan a cabo unas acciones determinadas de las que surgirán conceptos, relaciones y operaciones por medio de una posterior abstracción. Para ello hay que definir, en detalle y con precisión, los valores que toman las variables intervinientes.

*1.1. Repartos igualitarios y no igualitarios.*

El resultado de un reparto viene condicionado por el modo de llevarlo a cabo, por los criterios que rigen la forma de disgregar una cantidad de magnitud en una o más cantidades.

Esta unidad tiene el propósito de conocer y valorar los modos y resultados de distribuir totalmente una cantidad de magnitud en otras n cantidades iguales.

*1.2. Repartos igualitarios: una o varias fases.*

Los repartos igualitarios pueden llevarse a cabo mediante procedimientos diferentes: mediante una división partitiva-razón o mediante repartos parciales o repartos en varias fases.

Con esta unidad se conocen y valoran diferentes procedimientos de llevar a cabo repartos igualitarios.

*1.3. Relaciones y operaciones entre repartos igualitarios.*

Establecido el conjunto de pares de números naturales en la forma a:b, y con el sentido de representar cada una de las b partes iguales en las que se han separado las a unidades iniciales de magnitud; se puede definir una relación de equivalencia que admite una caracterización simbólica a través del producto de números naturales.

También se puede definir un orden total en el conjunto de los repartos y establecer argumentos que muestren que el conjunto numérico resultante, con esa relación de orden, es denso.

La operación interna suma de repartos no presenta dificultades de conceptualización. La resta de repartos no es operación por trabajar con cantidades de magnitudes y, por tanto, con números positivos, aunque sí que se puede dotar de significado a la diferencia de repartos.

Se pueden definir operaciones externas sobre el conjunto de los números naturales: multiplicar un número natural por un reparto tiene el sentido de suma reiterada de repartos; la división de un reparto entre un número natural tiene el significado de reparto reiterado, de hacer un nuevo reparto con el resultado del reparto inicial.

Con esta unidad se conoce y valora el significado atribuido a cada una de las relaciones y operaciones entre las cantidades de magnitud resultantes de distintos repartos igualitarios, a través de acciones realizadas en el modelo propuesto. Y también se valora la adecuada simbolización de las relaciones y del resultado de las operaciones entre repartos igualitarios.

Punto 2.- Repartos igualitarios: la medida del resultado de la acción

Los sistemas de representación tienen unas exigencias sintácticas y semánticas que tienen su origen en una descripción de los resultados obtenidos como consecuencia de una acción, aunque posteriormente evolucionen a formas de representación más económicas y, en consecuencia, más alejadas del modelo. La confrontación de los distintos sistemas de representación que surjan en el trabajo de aula han de provocar un acuerdo consensuado sobre el sistema de representación que se adopte con carácter de uniformidad y universalidad.

*2.1. Objetos no fraccionables:*

El uso de objetos no fraccionables permite establecer sistemas de representación del resultado de un reparto igualitario, realizado en una sola fase, que recuerdan los sistemas utilizados para la división de números naturales. Al utilizar el procedimiento de repartir en varias fases el resultado final se conforma como agregación de los resultados de cada una de las fases.

Con esta unidad se valoran las ventajas e inconvenientes que aparecen al utilizar distintos sistemas para representar el resultado de repartos igualitarios realizados en una y en varias fases.

*2.2. Objetos fraccionables:*

La utilización de un modelo en el que los objetos sean fraccionables permite hacer repartos completos, aunque ello exija dar unidades enteras y partes de la unidad. El sistema de representación simbólica utilizado para indicar el resultado de este reparto conlleva unas exigencias sintácticas y semánticas que están fuertemente ancladas al proceso de manipulación que se sigue en el modelo.

Con esta unidad se valora si el sistema de representación simbólico utilizado recoge todos los elementos del proceso manipulativo realizado en el modelo: las unidades completas que corresponden a cada participante, las partes de unidad que corresponden a cada participante en cada fase del proceso, el número de partes de unidad que restan por repartir, el tamaño de las nuevas partes medidas con la unidad inicial y el momento en que se finaliza el proceso de reparto.

Punto 3. Representación polinómica unitaria.

Precisando la acción como reparto igualitario por fases y con el criterio de la mayor parte (repartir la parte alícuota de unidad más grande posible en cada fase), aparece un sistema de representación con características de unicidad y finitud.

*3.1. Características de este sistema de representación.*

En el sistema de representación polinómica unitaria la cantidad de unidad que corresponde a cada participante se configura como una suma de fracciones unitarias, o partes alícuotas de unidad, que recibe cada individuo en cada una de las fases del reparto. Cada una de estas cantidades viene determinada por aplicación del criterio de la mayor parte.

Con esta unidad se conoce y valora el estricto cumplimiento de las normas sintácticas del sistema, así como la correcta interpretación semántica de las manipulaciones simbólicas utilizadas para obtener el resultado del reparto.

*3.2. Las expresiones polinómicas unitarias*

Al aplicar las técnicas de reparto ya reseñadas, el resultado de un reparto se configura de forma única como suma finita de fracciones unitarias con estrictas exigencias sintácticas y semánticas.

Con esta unidad se valora la adecuada interpretación de los símbolos que figuran en la expresión polinómica, así como de las relaciones de divisibilidad que caracterizan a los denominadores de las fracciones unitarias que aparecen en las expresiones polinómicas unitarias.

Punto 4. Reconstrucción del reparto conocida la representación polinómica unitaria.

Para reforzar el conocimiento del sistema de representación polinómica unitaria se plantea a los estudiantes la reconstrucción del proceso en sentido inverso; es decir, conocida una expresión determinar las condiciones del reparto que la producen, lo que conlleva la necesidad de determinar las unidades que se repartieron y el número de intervinientes.

*4.1. Técnica directa*

Para determinar las condiciones iniciales se reproducen todas las fases de un reparto incógnita y se van igualando los resultados de este proceso con las fracciones unitarias de la expresión conocida. La igualdad establecida con la última fase proporciona el reparto buscado o uno equivalente.

Con esta unidad se valoran las sucesivas adaptaciones de la simbolización del resultado de un reparto genérico, a la simbolización del resultado de un reparto determinado.

*4.1. Técnica inversa*

Tomando la expresión polinómica unitaria como punto de partida, se van anotando los resultados de cada una de las fases del reparto. Cuando se ha obtenido la última, compuesta de dos fracciones unitarias, se determina el reparto del que proceden teniendo en cuenta la técnica de reparto utilizada en una fase. Una vez obtenido este resultado, se procede a reconstruir las demás fases del reparto en sentido inverso, hasta encontrar las condiciones iniciales.

Con esta unidad se establece y valora la correcta interpretación de cada uno de los símbolos de una expresión polinómica unitaria, así como la relación entre el resultado de cada fase del reparto y los elementos que caracterizan el reparto efectuado en dicha fase.

Punto 5. Relaciones entre expresiones polinómicas unitarias.

Se ha trabajado sobre la existencia de un conjunto, perfectamente definido, de expresiones numéricas. Ahora interesa revisar las relaciones de equivalencia y orden; conceptualizadas éstas en el modelo en que se trabaja, es necesario precisar las técnicas necesarias para decidir si se cumplen estas relaciones entre expresiones polinómicas unitarias.

*5.1. Igualdad de las expresiones para repartos equivalentes*

Existe una única expresión polinómica unitaria para repartos equivalentes, resultado previsible por el significado de equivalencia de repartos y por la unicidad de la expresión del reparto.

Se valora aquí el significado y la caracterización simbólica de las relaciones de equivalencia entre expresiones polinómicas unitarias.

*5.2. Propiedad fundamental del orden entre expresiones polinómicas unitarias*

El significado de la representación polinómica unitaria permite establecer una técnica de comparación de expresiones simbólicas basada en la comparación ordenada término a término, resultado que se deriva de introducir el criterio de la mayor parte en la técnica de reparto.

Se conocen y valoran las interpretaciones razonadas de las relaciones de orden entre expresiones polinómicas unitarias.

*5.2. Densidad, respecto del orden, de las expresiones polinómicas unitarias*

Las exigencias sintácticas de las expresiones polinómicas unitarias permiten encontrar fácilmente expresiones mayores o menores que una dada; de igual forma, permiten establecer la existencia de infinitas expresiones mayores o menores que una dada. Finalmente, por aplicación, en el doble sentido, de las relaciones de orden establecidas se pone de manifiesto que entre dos expresiones existen otras infinitas.

Con esta unidad se valoran los modos en que se establece la viabilidad de intercalar infinitas expresiones polinómicas unitarias entre otras dos dadas.

Punto 6. Operaciones entre expresiones polinómicas unitarias.

Las operaciones entre expresiones polinómicas unitarias exigen de su conceptualización en el modelo y, además, de la obtención del resultado de dicha operación. Estas tareas presentan dificultades conceptuales para modelizar la existencia de elemento inverso y, por tanto, de la división; además hay dificultades de cálculo por cuanto las exigencias sintácticas del sistema de representación demandarían de laboriosos trabajos para escribir la suma de expresiones unitarias como otra expresión de la misma forma.

*6.1. Suma y resta de expresiones polinómicas unitarias*

Las acciones de añadir y quitar resultados de repartos permiten conceptualizar la suma o resta a partir del modelo. Las dificultades operatorias aconsejan reconstruir las condiciones iniciales del reparto, realizar la suma de repartos y simbolizar el resultado como expresión polinómica unitaria.

Se valora aquí la interpretación de la suma y resta de expresiones polinómicas unitarias a través de acciones que tengan sentido en el modelo propuesto.

*6.2. Multiplicación y división de expresiones polinómicas unitarias por números naturales*

La suma reiterada de repartos o la reiteración del reparto permite conceptualizar el producto y el cociente, respectivamente, de una expresión polinómica unitaria por un número natural. Las dificultades para la obtención del resultado se agravan, con respecto a la suma, por cuanto aparecen sumas de varias expresiones iguales, en el caso de la multiplicación. Por tanto, se utiliza el procedimiento de reconstrucción del reparto para obtener el resultado.

Se valora la interpretación de las operaciones señaladas como acciones plausibles de realizar en el modelo propuesto.

*6.3. Multiplicación de expresiones polinómicas unitarias*

En el paso de la acción de reparto a su simbolización como expresión polinómica unitaria se exige el significado de producto de fracciones unitarias como parte de parte, como función racional. Para expresiones polinómicas unitarias este significado resulta complejo por cuanto conllevaría la utilización de aplicaciones multilineales. Tampoco resulta comprensible la multiplicación desde la perspectiva del producto de dos magnitudes superficie. Se podía recurrir a introducir una nueva magnitud, como la magnitud dinero, pero solamente habría que limitarlo a casos de productos de unas fracciones unitarias por una expresión polinómica unitaria; pero este caso queda contemplado en el punto anterior. En consecuencia, no se aborda la multiplicación de estas expresiones.

Se valora el modo de presentar y justificar la inexistencia de acciones en el modelo que correspondan a la simbolización del producto de dos repartos; incluso aunque se pueda dar una expresión simbólica del resultado de dicho producto.

*6.4. División de expresiones polinómicas unitarias*

Desde el modelo en que se trabaja resulta inviable la conceptualización de la expresión inversa de una dada, por lo que no se aborda este contenido.

Se valora el modo de presentar y justificar la inexistencia de acciones en el modelo que correspondan a la simbolización del cociente de dos repartos.

Punto 7. Expresiones polinómicas unitarias y fracciones.

Las expresiones polinómicas unitarias se configuran como sumas de fracciones unitarias. Puesto que nuestros alumnos conocen las operaciones con fracciones hay que poner de manifiesto las relaciones entre el conjunto de las fracciones positivas y el conjunto de estas expresiones.

*7.1. La fracción como resultado de un reparto igualitario*

Puesto que las expresiones polinómicas unitarias están constituidas por sumas finitas de fracciones unitarias y considerando los conocimientos sobre fracciones de nuestros alumnos, el reparto se puede simbolizar como una fracción cuyo numerador indica las unidades de magnitud a repartir y el denominador los individuos intervinientes. En consecuencia, la fracción puede conceptualizarse como la medida de una de las partes resultantes de hacer un reparto igualitario; y, a su vez, se muestra que esta cantidad se puede representar por una suma de fracciones unitarias, cada una de las cuales es una parte de la fracción que le precede.

Se valora la interpretación de las fracciones como cociente de dos números naturales, como simbolización del resultado de un reparto igualitario; en la que numerador y denominador indican las condiciones de dicho reparto.

*7.2. Densidad, respecto al orden, de las fracciones positivas*

Conceptualizada la fracción como reparto igualitario una traslación de significados de las expresiones polinómicas unitarias, pondrá de manifiesto que en el conjunto de fracciones positivas hay definida una relación de orden respecto de la cual este conjunto es denso; concepto importante para que los estudiantes no asocien a las fracciones nociones propias del conjunto de los números naturales.

Se valora el modo de presentar y justificar la interpretación de que entre dos fracciones positivas siempre es posible intercalar otras infinitas fracciones positivas.

### *IV.7.1.2. Unidades para el Segundo Foco de Investigación*

Nuestro objetivo para este segundo foco es introducir un nuevo sistema de representación, originado al alterar el valor de la variable acción en el modelo, en el que se muestre la estructura polinómica decimal de las fracciones. Este sistema, que denominamos representación polinómica decimal, facilitará la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal.

Pasamos a presentar las distintas unidades de análisis sobre este segundo foco, desglosadas en los 7 puntos en que se estructura, que numeramos del 8 al 14, continuando los puntos señalados para el Primer Foco de Investigación.

Punto 8. Representación polinómica decimal.

Una variación en la acción del modelo (los fraccionamientos se hacen siempre en 10 partes iguales) da origen a un nuevo sistema de representación, que tiene analogías y diferencias con el sistema de representación caracterizado con anterioridad.

*8.1. Expresiones finitas e infinitas*

En este sistema de representación hay una forma única de simbolizar el resultado de un reparto igualitario. Sin embargo, las exigencias de la acción producen procesos de reparto ilimitados pues en alguna fase se reproducen condiciones de reparto equivalentes, salvo el tamaño de la unidad, a las de una fase anterior; esto exige tomar decisiones sobre la forma en que se va a simbolizar.

Se valora aquí la simbolización del resultado de un reparto asociado a unas acciones de reparto, realizadas en el modelo con una técnica diferente.

*8.2. Características sintácticas de este sistema*

Puesto que las divisiones de la unidad se hace siempre en 10 partes iguales, en cada una de las fases del reparto los individuos, atendiendo al criterio de la mayor parte, recibirán más de una de esas subdivisiones de la unidad. Por tanto, el reparto se configura como una suma, finita o infinita, de fracciones unitarias decimales, multiplicadas por un número natural comprendido entre 1 y 9.

Se valora la correcta simbolización del reparto mediante partes de unidad de tamaño las potencias de 1/10, tanto si tienen un número finito de sumandos como si tienen un número infinito

Punto 9. Reconstrucción del reparto conocida la expresión polinómica decimal.

Conocida una expresión polinómica decimal hay que determinar las condiciones del reparto que la producen, lo que conlleva la necesidad de determinar las unidades que se repartieron y el número de intervinientes.

*9.1. Hay un número finito de sumandos*

La situación es similar a la ya estudiada en las expresiones polinómicas unitarias, por lo que puede actuarse de dos formas distintas, que denominábamos directa e inversa

Con esta unidad se valoran los modos de interpretar adecuadamente los símbolos con los que se representa el resultado de un reparto y las condiciones en que se produce tal reparto.

*9.2. El número de sumandos es infinito*

La búsqueda de las condiciones iniciales exige una primera tarea de encontrar el reparto que proporciona la parte de la expresión en que se van repitiendo los sumandos. Posteriormente se actúa como se haría con una expresión con un número finito de sumandos.

Con esta unidad se valoran las técnicas de reconstrucción del reparto cuando el número de sumandos es infinito.

Punto 10.- Relaciones entre expresiones polinómicas decimales.

Disponemos de un conjunto de expresiones polinómicas decimales, entre las que se pueden establecer relaciones justificadas en el modelo en que se trabaja.

*10.1. Igualdad de expresiones para repartos equivalentes.*

La unicidad del proceso pone de manifiesto que los repartos equivalentes tienen la misma expresión polinómica decimal, salvo que no se conserve el principio de la mayor parte, en cuyo caso las expresiones finitas se conviertan en infinitas.

Se valora en este caso el significado y la caracterización simbólica de las relaciones de equivalencia entre expresiones polinómicas decimales.

*10.2. Propiedad fundamental del orden entre expresiones polinómicas decimales.*

La técnica de reparto utilizada permite establecer una técnica para las relaciones de orden similar a la utilizada en las expresiones polinómicas unitarias.

Se valora la razonada interpretación de las relaciones de orden entre expresiones polinómicas decimales.

*10.3. Densidad, respecto del orden, de las expresiones polinómicas decimales.*

La ubicación de infinitas expresiones polinómicas decimales entre otras dos dadas, permitirá justificar el sentido de densidad respecto del orden, el sentido de continuidad de los números racionales frente al sentido discreto que caracteriza a los números naturales.

Con esta unidad se valora la posibilidad de intercalar infinitas expresiones polinómicas unitarias entre otras dos dadas.

Punto 11. Operaciones entre expresiones polinómicas decimales.

La conceptualización de las operaciones entre expresiones polinómicas decimales presenta las mismas dificultades que en el caso de las expresiones polinómicas unitarias, por cuanto el modelo empleado difiere tan sólo en la técnica de la acción. Sin embargo, sí que es posible realizar los cálculos para obtener el resultado de las operaciones, como se señala seguidamente

*11.1. Suma y resta de expresiones polinómicas decimales*

Para los casos en que ambas expresiones tengan un número finito de sumandos la obtención del resultado resulta sencilla: sumar las partes de igual tamaño y modificar aquellos sumandos en los que haya más de 9 partes. Si las expresiones contienen infinitos sumandos habrá que buscar un periodo que contenga tantas parte como el m.c.m. de las partes que contienen cada uno de los periodos de ambas expresiones, sumar o restar esas partes como en el caso en que hay un número finito de sumandos y después sumar o restar los repartos que quedan pendientes de ambos.

Se valora la interpretación de la suma y resta de expresiones polinómicas unitarias a través de acciones que tengan sentido en el modelo propuesto; así como el modo de obtener el resultado de dicha operación

*11.2. Multiplicación y división de expresiones polinómicas decimales por números naturales*

Hay que ser cuidadosos con las exigencias sintácticas y, en consecuencia, ir transformando cada uno de los resultados correspondientes a cada uno de los tamaños de las partes, empezando por las de mayor tamaño.

Se valora en este caso la interpretación de las operaciones señaladas como acciones plausibles de realizar en el modelo propuesto.

*11.3. Multiplicación de expresiones polinómicas decimales*

Aun cuando no se conceptualiza, sí que parece conveniente poner de manifiesto las dificultades que entrañaría el trabajo con expresiones de infinitos sumandos, por lo que, en estos casos, lo aconsejable es reconstruir las condiciones del reparto.

Se valora la inexistencia de acciones en el modelo que correspondan a la simbolización del producto de dos repartos; incluso aunque se pueda dar una expresión simbólica del resultado de dicho producto.

*11.4. División de expresiones polinómicas unitarias*

También puede ponerse de manifiesto la conveniencia de utilizar las condiciones del reparto para obtener el resultado.

Se valora la inexistencia de acciones en el modelo que correspondan a la simbolización del cociente de dos repartos.

Punto 12.- Expresiones polinómicas decimales y notación decimal.

La constatación de que en la escritura de las expresiones polinómicas decimales hay elementos diferenciadores y elementos comunes sugiere la posibilidad de simplificar el proceso de escritura de estas expresiones.

*12.1. El criterio del valor posicional*

Las expresiones polinómicas decimales muestran una estructura similar: sumandos formados por un dígito, que indica el número de partes que se contabilizan; y una fracción unitaria, con una potencia de 10 en el denominador, que señala el tamaño de las partes que se consideran. Introduciendo un criterio posicional se evita la escritura del tamaño de las partes.

Se valora la adecuada interpretación del significado de expresiones simbólicas distintas, siendo una de ellas una simplificación de la otra.

*12.2. El criterio de la coma decimal*

Para evitar confusiones, el uso de una coma permitirá separar las partes enteras y no enteras en la notación decimal que asociamos con las expresiones polinómicas decimales.

Se valora la correcta interpretación del símbolo que separe dígitos que indican cantidades de magnitud de distinta naturaleza.

*12.3. El criterio para simbolizar fraccionamientos infinitos*

En aquellos casos en que se repiten las condiciones del reparto recurrimos al signo con el que se señala el periodo y que es el conocido en la notación decimal.

Se valora la interpretación de los símbolos que facilitan la escritura de un número infinito de sumandos

Punto 13.- La escritura con notación decimal de las fracción: algoritmo de la división.

*13.1. La técnica de reparto y el algoritmo de la división*

Un estudio paralelo permitirá mostrar la similitud entre el procedimiento de reparto y el algoritmo de la división, lo que facilitará el paso de la notación fraccionaria a la notación decimal.

Se presenta y valora la conexión entre un algoritmo ya conocido por los estudiantes y la técnica de reparto utilizada en la representación polinómica decimal.

*13.2. De la notación decimal a la notación fraccionaria*

En el trabajo anterior se introdujeron dos procedimientos para reconstruir las condiciones del reparto dada su representación polinómica decimal. Cualquiera de ellos es igualmente válido para escribir la fracción que corresponde a una notación decimal.

Aun cuando los estudiantes conocen los procedimientos para convertir un decimal periódico en fracción, no son conscientes de que en esos procedimientos se hace uso implícito de propiedades de series numéricas. En el caso de todas las expresiones decimales que tienen periodo 9, cuyo ejemplo más paradigmático es 0,999..., las fracciones generatrices resultan sorprendentes para los estudiantes. Así, al comprobar que 0,999 .... es igual a 1 los alumnos lo admiten como resultado operatorio, que también admitirían como resultado convenido.

Desde la perspectiva de la representación polinómica decimal tal resultado podría aprovecharse para mostrar que cualquier representación finita se puede convertir en infinita, de período 9, si se contraviene el principio de la mayor parte. Esto significa que la representación polinómica decimal es única, pero que las expresiones finitas se pueden convertir en infinitas si, en el último reparto, se disminuye en una unidad al resultado que corresponde al principio de la mayor parte y se actúa de igual modo en los repartos que vayan apareciendo

$$a:b = c\left[\frac{1}{10^p}\right] = (c-1)\left[\frac{1}{10^p}\right] + (b:b)\left[\frac{1}{10^p}\right] \;;;\; b:b = 9\left[\frac{1}{10^p}\right] + (b:b)\left[\frac{1}{10^p}\right]$$

Se valoran las conexiones entre estos dos sistemas simbólicos de representación de los números racionales a través de los significados de ambas expresiones numéricas como formas distintas de representar una misma acción en el modelo propuesto y realizada con técnicas distintas

Punto 14.- Relaciones entre distintos sistemas de representación de los números racionales positivos.

Después del trabajo realizado, los estudiantes tienen dos nuevos sistemas de representación simbólicos que conviene conectar con los otros dos sistemas que ya conocían desde su etapa escolar. En este sentido, hacemos una síntesis de los resultados obtenidos:

- La fracción se puede concebir como la medida de una cierta cantidad de magnitud, la que corresponde a cualquiera de los individuos que participan en un reparto igualitario.

- Las expresiones polinómicas muestran que la fracción se configura con una estructura polinómica (suma de partes de partes de la unidad), que es finita si se hacen fraccionamientos en cualquier número de partes iguales, pero que puede ser infinita si los fraccionamientos solamente se hacen en 10 partes iguales.
- La notación decimal es un recurso técnico que economiza la escritura de las expresiones polinómicas decimales; por tanto, mantiene todos los resultados obtenidos en dicho sistema de representación.
- Hay infinitas fracciones que son equivalentes a una dada, sin embargo, solamente hay una expresión polinómica, unitaria o decimal, para representar un reparto o una fracción; y, por tanto, la notación decimal de una fracción es única, salvo para las expresiones finitas que admiten una expresión infinita introduciendo el período 9.
- Las relaciones de orden se establecen de forma inmediata en las expresiones polinómicas. En consecuencia, la notación decimal es más ventajosa que la notación fraccionaria para determinar relaciones de orden entre números racionales.
- Cualquiera de los sistemas de representación, por medio del modelo utilizado, permiten conceptualizar las nociones de suma, resta, multiplicación por un natural y división por un natural. Sin embargo, no permiten conceptualizar, con dos números racionales cualesquiera, las nociones de multiplicación y división; éstas pueden trabajarse a partir de la noción de aplicación racional.
- La obtención de los resultados operatorios no se han abordado desde las expresiones polinómicas unitarias por la complejidad que encierran. En las expresiones polinómicas decimales finitas, y por tanto en la notación decimal finita, los resultados se obtienen con facilidad; sin embargo, al intervenir infinitos sumandos los cálculos son muy laboriosos en el caso de suma y resta y casi inabordables para la multiplicación y división. La notación fraccionaria, por tanto, se muestra como la más adecuada para obtener los resultados de sumas y restas con expresiones decimales infinitas y para los cálculos en los que haya multiplicaciones o divisiones. Se valoran las conexiones entre cuatro sistemas simbólicos de representación de los números racionales positivos, utilizando un mismo modelo, sobre el que una misma acción de repartir de forma igualitaria se realiza con diferentes técnicas.

De este modo, quedan definidas 14 Unidades de Análisis para la Organización del Contenido, que se resumen en la tabla siguiente. De ellas hay definidas 7 para el Primer Foco de Investigación, 6 para el Segundo Foco y una que contempla las conexiones entre las tradicionales notaciones fraccionaria y decimal y los dos sistemas de representación, polinómica unitaria y decimal, que se han trabajado en la implementación.

| | |
|---|---|
| **Primer Foco de Investigación** | **1. Concreción del modelo: relaciones y operaciones**<br>**2. Medida del resultado de la acción con objetos fraccionables**<br>**3. Representación polinómica unitaria: características sintácticas y semánticas. Propiedades.**<br>**4. Reconstrucción del reparto: técnicas directa e indirecta.**<br>**5. Relaciones: equivalencia, orden y densidad respecto del orden.**<br>**6. Operaciones: suma, resta, producto y cociente por números naturales**<br>**7. La fracción como cociente: orden y densidad respecto del orden.** |
| **Segundo Foco de Investigación** | **8. Representación polinómica decimal: características sintácticas y semánticas. Expresiones finitas e infinitas**<br>**9. Reconstrucción del reparto: técnicas directa e indirecta. Número finito o infinito de sumandos**<br>**10. Relaciones: equivalencia, orden y densidad respecto del orden.**<br>**11. Operaciones: suma, resta, producto y cociente por números naturales**<br>**12. Expr. polinómicas decimales y notación decimal: valor posicional y coma decimal**<br>**13. Reparto y división. Notación fraccionaria y decimal** |
| **14. Conexiones entre diferentes sistemas simbólicos de representación de los números racionales positivos.** | |

Cuadro IV.3. Unidades de Análisis para la Organización del Contenido

### IV.7.2. Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido.

A lo largo de este trabajo venimos utilizando el término comprensión en el sentido de Hiebert y Carpenter (1992), que se interpreta como ligar los nuevos conocimientos a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes. Estas Unidades de Análisis se han elaborado para indagar sobre la compresión de los estudiantes sobre los contenidos matemáticos, que se han enumerado anteriormente y cuya concreción ha quedado detallada mediante las Unidades de Análisis para la Organización del Contenido. A continuación describimos estas unidades de Análisis de Comprensión del Contenido, desglosadas en dos apartados, que se corresponden con los dos Focos de Investigación.

#### *IV.7.2.1. Unidades para el Primer Foco de Investigación*

En la fundamentación de este foco de investigación se explicita un modelo físico, y el correspondiente modelo útil asociado, sobre el que practicar y ejercer la manipulación de objetos que sustenten un determinado razonamiento abstracto. Se considera que la construcción de un sistema de representación simbólico está fuertemente vinculado al desarrollo de un proceso manipulativo bien definido; además, y debido a una necesidad de universalidad y generalidad, este sistema de representación tiene unas exigencias sintácticas y semánticas muy precisas. Un tercer aspecto contemplado es la necesaria conceptualización de la fracción como forma de simbolizar el resultado de un reparto igualitario, pues las preconcepciones de los estudiantes sobre la fracción como relación parte-todo obstaculizan el establecimiento de relaciones significativas entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales (Kerslake, 1986; Sowder, 1995). El nuevo sistema de representación de la fracción proporciona una visión diferente de ella, ya que aparece como suma de partes de partes de la unidad, con una estructura polinómica distinta de la fracción como agrupación de subpartes iguales de la unidad, como recuento de las partes destacadas de una unidad fraccionada.

Para indagar sobre la comprensión de nuestros estudiantes sobre todos estos aspectos se elaboran unas Unidades de Análisis, que denominaremos genéricamente con las siglas CEI, que detallamos a continuación

1.- Concreción del modelo.

El punto de partida de nuestro trabajo es *concretar un modelo, con variables bien definidas, para representar las fracciones positivas como suma de fracciones unitarias,* la presentación a los estudiantes para maestros de un modelo que resulte sencillo de manipular. Ahora bien, la definición del modelo exige precisar la magnitud a utilizar, la acción a realizar (así como la técnica con que se efectúa) y los objetos, o sus expresiones gráficas, con los que se trabaja. Los siguientes puntos resumen nuestros propósitos:

a) Queremos explorar cómo gestionan los alumnos un modelo asociado a acciones de reparto igualitario, en el que las expresiones gráficas no son necesarias.

b) Pretendemos conocer cómo gestionan los alumnos la representación simbólica de acciones físicas y viceversa.

c) Queremos conocer el significado y simbolización que hacen de las relaciones y operaciones entre repartos igualitarios.

La exploración de estos objetivos se llevará a cabo a lo largo de toda la implementación, pero haremos una prospección más profunda después de haber presentado el modelo, puesto que necesitamos conocer cuál es el estado de aceptación de los estudiantes antes de proseguir con la introducción de nuevos temas.

Por ello, indicamos las Unidades de Comprensión del Contenido correspondientes a este apartado mediante el cuadro IV.4 siguiente:

| Criterios de valoración / Unidades de Comprensión | Argumentaciones sobre el significado de: | Razonamientos empleados para: | Utilización de las notaciones simbólicas adecuadas para: |
|---|---|---|---|
| Interpretaciones del modelo y de las acciones que realizan **CEI.I** | un reparto igualitario. **CEI.I.1** | considerar las componentes que intervienen en el reparto. **CEI.I.2** | expresar un reparto igualitario **CEI.I.3** |
| Interpretación de las relaciones de equivalencia entre repartos igualitarios. **CEI.II** | repartos igualitarios equivalentes **CEI.II.1** | establecer relaciones simbólicas de equivalencia **CEI.II.2** | la equivalencia de repartos igualitarios **CEI.II.3** |
| Interpretación de las relaciones de orden entre repartos igualitarios. **CEI.III** | reparto mayor que otro **CEI.III.1** | establecer relaciones simbólicas de orden **CEI.III.2** | intercalar repartos entre otros dos dados **CEI.III.3** |
| Obtención del resultado de la suma/resta de repartos igualitarios **CEI.IV** | la suma/resta de dos repartos igualitarios en el modelo propuesto **CEI.IV.1** | encontrar la suma/resta de dos repartos en el modelo propuesto **CEI.IV.2** | expresar la suma/resta de dos repartos igualitarios **CEI.IV.3** |
| Obtención del producto/cociente de un reparto igualitario por un número natural **CEI.V** | producto de un reparto por un número natural **CEI.V.1** cociente de un reparto entre un número natural **CEI.V.4** | calcular el producto de un reparto por un número natural **CEI.V.2** calcular el cociente de un reparto entre un número natural **CEI.V.5** | expresar el producto de un reparto por un número natural **CEI.V.3** expresar el cociente entre un reparto y un número natural **CEI.V.6** |
| Obtención del producto/cociente de dos repartos igualitarios **CEI.VI** | producto de dos repartos igualitarios **CEI.VI.1** cociente de dos repartos igualitarios **CEI.VI.4** | calcular el producto de dos repartos igualitarios **CEI.VI.2** calcular el cociente de dos repartos igualitarios **CEI.VI.5** | expresar el producto de dos repartos igualitarios **CEI.VI.3** expresar el cociente dos repartos igualitarios **CEI.VI.6** |

Cuadro IV.4. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: concreción del modelo

2. Representación polinómica unitaria.

El resultado de la acción indica la medida de cada una de las partes que resultan al hacer un reparto igualitario; al utilizar el criterio de "la mayor parte" hay una forma única y finita de medir cada una de las partes utilizando la unidad de medida inicial.

De este modo aparece la representación polinómica unitaria como sistema simbólico que permite determinar la cantidad de magnitud, medida con la unidad inicial, que corresponde a cada participante en un reparto igualitario. Nuestro objetivo es *definir el sistema de representación polinómica unitaria, con estudio de sus características sintácticas y semánticas.*

La introducción de este sistema simbólico favorece nuestras intenciones de asentar la fracción con significado de cociente y estudiar algunos de los resultados que ofrece dicho sistema de representación. Por ello, nuestras inquietudes se enuncian con las siguientes intencionalidades:

a) Queremos explorar cómo simbolizan las acciones realizadas en un reparto en fases y con el procedimiento de la mayor parte.

b) Pretendemos conocer si son conscientes de las exigencias sintácticas de un sistema de representación.

c) Queremos explorar el significado de las relaciones y operaciones entre expresiones polinómicas unitarias.

La simbolización de la medida de la cantidad de magnitud resultante de un reparto, en las condiciones establecidas, resulta novedosa para el alumnado, por lo que conviene que realicen actividades en tal sentido (y también en el contrario, la reconstrucción de un reparto conocida su expresión polinómica unitaria).

Una vez que los estudiantes se han familiarizado con los significados y la forma de la expresión, haremos indagaciones para conocer su grado de comprensión, a través de las Unidades de Análisis que se sintetizan en el cuadro IV.5. siguiente:

| Criterios de valoración / Unidades de Comprensión | Argumentaciones utilizadas sobre el significado de: | Razonamientos empleados para: |
|---|---|---|
| Interpretaciones del sistema de representación polinómico unitario **CEI.VII** | repartos en las que alguno de sus términos es 0 **CEI.VII.1.1,1.2,1.3,1.4**<br>las condiciones de un reparto **CEI.VII.2**<br>las relaciones sintácticas de un reparto **CEI.VII.5**<br>las relaciones semánticas de un reparto **CEI.VII.6.1, 6.2 y 6.3** | determinar la unicidad de las expresiones polinómicas unitarias **CEI.VII.3**<br>determinar la finitud de las expresiones polinómicas unitarias **CEI.VII.4**<br>reconstruir las condiciones del reparto **CEI.VII.7.1, 2 y 3** |
| Interpretación de las relaciones de orden entre expresiones polinómicas unitarias. **CEI.VIII** | expresión polinómica unitaria mayor que otra **CEI.VIII.1.1**<br>expresión polinómica unitaria menor que otra **CEI.VIII.2.1** | obtener una expresión polinómica mayor que otra **CEI.VIII.1.2**<br>obtener una expresión polinómica menor que otra **CEI.VIII.2.2** |
| Interpretación de la densidad respecto del orden. **CEI.IX** | la inexistencia de la expresión siguiente **CEI.IX.1.1**<br>la inexistencia de la expresión anterior **CEI.IX.2.1** | rechazar que una determinada expresión es la siguiente de otra **CEI.IX.1.2**<br>rechazar que una determinada expresión es la anterior de otra **CEI.IX.2.2** |

| | | |
|---|---|---|
| Interpretación del significado y cálculo de operaciones entre expresiones polinómicas **CEI.X** | la suma de dos expresiones polinómicas unitarias **CEI.X.1** el producto de expresiones polinómicas unitarias por números naturales **CEI.X.3** el cociente entre expresiones polinómicas unitarias y números naturales **CEI.X.4** el producto de fracciones por expresiones polinómicas unitarias **CEI.X.5** | calcular la suma de expresiones polinómicas unitarias **CEI.X.2** |

Cuadro IV.5. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: sistema de representación polinómico unitario

3. Expresiones polinómicas unitarias y fracciones.

Los conocimientos previos de los estudiantes sobre el significado y técnica de la suma de fracciones permitirá establecer una identificación entre la representación polinómica unitaria y la notación fraccionaria habitual, con lo que el alumno podrá conceptualizar la fracción como resultado de un reparto igualitario y la posibilidad de su representación como suma finita de partes de partes de la unidad; además, de revisar sus concepciones previas sobre equivalencia, orden y densidad respecto del orden. Nuestro objetivo es *identificar las expresiones polinómicas unitarias y la notación fraccionaria.* Por tanto, nos interesa comprobar si los alumnos interpretan la fracción con significado de cociente y si hacen transferencias de los resultados obtenidos en las expresiones polinómicas unitarias a las fracciones. Para ello, definimos las correspondientes Unidades de Análisis, que se recogen en el cuadro IV.6:

| Criterios de valoración / Unidades de Comprensión | Argumentaciones utilizadas sobre el significado de: | Razonamientos empleados para: |
|---|---|---|
| Interpretaciones de la notación fraccionaria **CEI.XI** | la equivalencia de fracciones **CEI.XI.1.1** la unicidad de la cantidad dada por una fracción **CEI.XI.2** la fracción (a+b)/(c+d) a partir de las fracciones a/b y c/d **CEI.XI.3** la fracción semisuma de otras dos fracciones **CEI.XI.5** | construir fracciones equivalentes a otra dada **CEI.XI.1.2** establecer relaciones de orden entre a/b, c/d y (a+b)/(c+d) **CEI.XI.4** relacionar dos fracciones con su semisuma **CEI.XI.6** conocidas a/b y c/d, ordenar las fracciones semisuma de ambas y (a+b)/(c+d) **CEI.XI.7** |

Cuadro IV.6. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: expresiones polinómicas unitarias y fracciones

### *IV.7.2.2. Unidades para el Segundo Foco de Investigación*

En este foco de investigación los estudiantes para maestros parten de un trabajo previo sobre la representación polinómica unitaria, por lo que están habituados a utilizar un modelo. Lo que se provoca es una modificación del modelo que consiste en que el fraccionamiento de la unidad o de cualquiera de sus partes se hace siempre en 10 partes iguales.

Esta modificación va a originar un nuevo sistema de representación, con unas exigencias sintácticas y semánticas muy precisas, que presenta similitudes y diferencias con el ya utilizado con anterioridad. De este modo, la fracción, conceptualizada como resultado de un reparto igualitario, se muestra con una estructura polinómica en la que las partes de la unidad se simbolizan con fracciones unitarias cuyos denominadores son potencias de 10.

La búsqueda de sistemas de representación más económicos permite establecer, a partir de las expresiones polinómicas decimales, la notación decimal habitual como un sistema simbólico paralelo al de la notación fraccionaria y ambos representan conceptos similares. De este modo, pretendemos que los estudiantes comprendan el aspecto continuo de los decimales, que resulta especialmente difícil de comprender (Wearne et al. 1991); y mostrar dos sistemas simbólicos como formas alternativas para un mismo concepto subyacente, con la intención de incrementar la habilidad de los estudiantes para ver a las fracciones comunes y a las fracciones decimales como pertenecientes al mismo sistema de los números racionales (Owens y Super, 1993).

Atendiendo a su desarrollo histórico, la notación decimal aparece como recurso técnico para economizar un sistema de representación simbólico, pero su construcción a través de un modelo permitirá que el estudiante dote de significado a las relaciones y operaciones con notaciones decimales. Además, dispondrá de una nueva vía para fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal que en su etapa escolar quedó limitada a la extensión del algoritmo de la división de números naturales.

8. Representación polinómica decimal.

Nuestras intenciones se centran en analizar las variaciones que se producen en las relaciones sintácticas y semánticas de un nuevo sistema de representación, que surge como consecuencia de una modificación en el procedimiento de realizar la acción en el modelo. Por ello, nuestras inquietudes se enuncian con las siguientes intencionalidades:

a) Queremos explorar cómo simbolizan los alumnos las acciones realizadas con un nuevo procedimiento.
b) Pretendemos conocer si son conscientes de las exigencias sintácticas de un sistema de representación en el que aparecen sumas infinitas.
c) Queremos conocer el significado de las relaciones y operaciones entre expresiones polinómicas decimales.

La simbolización de acciones de reparto, ya conocida por los alumnos, sufre modificaciones significativas en cuanto a la finitud del proceso, aunque mantiene las características de unicidad.

Este hecho, que se justifica por la aparición, en alguna de la fases, de unas condiciones de reparto similares a las iniciales (solamente varía el tamaño de las unidades a repartir), introduce sensibles diferencias entre la sintaxis de las expresiones polinómicas unitarias y decimales, diferencias producidas al representar una misma cantidad de magnitud con dos criterios diferentes de partición de la unidad.

Una vez que se han familiarizado con los significados y la forma de la representación, haremos indagaciones para conocer su grado de comprensión, a través de las Unidades de Análisis recogidas en el cuadro IV.7 siguiente:

| Criterios de valoración / Unidades de Comprensión | Argumentaciones utilizadas sobre el significado de: | Razonamientos empleados para: |
|---|---|---|
| Interpretaciones del sistema de representación polinómico decimal **CEI.XII** | repartos en las que alguno de sus términos es 0 **CEI.XII.1.1,1.2,1.3,1.4** las condiciones del reparto **CEI.XII.2** las relaciones semánticas **CEI.XII.4.1, 4.2 y 4.3.** | caracterizar la infinitud de las expresiones polinómicas decimales **CEI.XII.3.1 y 3.2** reconstruir las condiciones del reparto **CEI.XII.5** |
| Interpretación del significado y cálculo de operaciones entre expresiones polinómicas **CEI.XIII** | suma de expresiones polinómicas decimales **CEI.XIII.1** producto de expresiones polinómicas decimales por números naturales **CEI.XIII.3** cociente entre expresiones polinómicas decimales y números naturales **CEI.XIII.5** | calcular el resultado de la suma de expresiones polinómicas **CEI.XIII.2** determinar las dificultades del cálculo del producto de un número natural por expresiones polinómicas decimales **CEI.XIII.4** calcular el resultado del cociente entre expresiones polinómicas y números naturales **CEI.XIII.6** |

Cuadro IV.7. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: sistema de representación polinómico decimal

9 Expresiones polinómicas decimales y notación decimal.

La posibilidad de economizar la escritura de expresiones polinómicas decimales y el conocimiento de un sistema de numeración posicional, permitirá arbitrar criterios generales para la introducción de la notación decimal, sin que ello afecte a los resultados obtenidos con anterioridad en cuanto a relaciones y operaciones entre expresiones polinómicas decimales.

Nos interesa comprobar si los alumnos conectan estos resultados y si el trabajo facilita la comprensión de las notaciones fraccionaria y decimal. Las

Unidades de Análisis definidas se recogen en el siguiente cuadro IV.8:

| Criterios de valoración / Unidades de Comprensión | Argumentaciones utilizadas sobre el significado de: | Razonamientos empleados para: |
|---|---|---|
| Interpretaciones de la notación decimal **CEI.XIV** | los números naturales **CEI.XIV.1** los números decimales **CEI.XIV.2** los números periódicos puros **CEI.XIV.3** los números periódicos mixtos **CEI.XIV.4** | |
| Interpretación de las relaciones entre notaciones fraccionaria y decimal. **CEI.XV** | el símbolo 2/0 **CEI.XV.3** la fracción 0/8 **CEI.XV.4** el símbolo 0/0 **CEI.XV.5** | escribir como número entero una fracción **CEI.XV.1** escribir como la unidad algunas fracciones **CEI.XV.2** |
| Interpretación de las relaciones de orden entre expresiones decimales **CEI.XVI** | | comparar un número decimal y un número periódico **CEI.XVI.1** comparar dos números periódicos **CEI.XVI.2** |
| Interpretación del significado y cálculo de operaciones entre expresiones decimales **CEI.XVII** | resta de expresiones decimales **CEI.XVII.1** producto de dos números decimales **CEI.XVII.3.1** producto de dos decimales periódicos **CEI.XVII.4.1** cociente entre expresiones decimales y números naturales **CEI.XVII.5** | calcular la resta de dos expresiones decimales **CEI.XVII.2** calcular al producto de dos números decimales **CEI.XVII.3.2** calcular el producto de dos decimales periódicos **CEI.XVII.4.2** calcular el resultado del cociente entre expresiones decimales y números naturales **CEI.XVII.6** |

Cuadro IV.8. Unidades de Análisis de la Comprensión del Contenido: expresiones polinómicas decimales y notaciones decimales

En total se han definido 17 Unidades de Análisis para la comprensión de los contenidos. De ellas, 6 corresponden a la comprensión de las relaciones y operaciones entre repartos igualitarios en el modelo de trabajo que se utiliza; otras 5 unidades corresponden a la construcción e interpretación de un sistema de representación simbólico asociado a una técnica y que denominamos sistema polinómico unitario; y hay otras 6 unidades que corresponden a la elaboración de otro sistema de representación simbólico, que llamamos sistema polinómico decimal.

### IV.7.3. Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica.

Las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica se elaboran para sistematizar, estructurar y analizar las interacciones que se producen en el aula. En la definición de estas unidades utilizamos el trabajo de Romero (1995), aunque no hacemos uso de la pormenorizada operativización de cada una de las unidades que se detallan en el mencionado trabajo, puesto que consideramos que para nuestro estudio es suficiente considerar las categorías en su enunciado general.

Las Unidades de Análisis para la interacción didáctica que utilizaremos en esta investigación son de tres tipos:

- Para que los estudiantes realicen las tareas que propone el profesor se necesita una estructura organizativa que forma parte del contrato didáctico establecido; además, hay que desarrollar los trabajos en condiciones adecuadas para favorecer el trabajo individual, así como la discusión colectiva o individual. Por ello se contemplan la unidades relativas a la **gestión del trabajo en el aula**.
- Ahora bien, la construcción del conocimiento precisa de actuaciones dirigidas a la gestión de las discusiones del aula. Éstas, que agrupamos bajo la denominación de Unidades de Análisis para la **gestión del desarrollo del contenido**, contemplan los contenidos que se van a tratar, la secuenciación de esos contenidos, las intervenciones de los agentes profesor y alumnos, la articulación del debate, la institucionalización de los conocimientos, .....
- No hay que olvidar que el objetivo final de las sesiones de intercambio de opiniones que se han planificado es el de elaborar significados del tópico que se ha propuesto. Con esta finalidad, se definen Unidades de Análisis de **construcción del conocimiento**.

### *IV.7.3.1. Unidades relativas a la gestión del trabajo en el aula*

Con independencia de la materia o del contenido, el profesor tiene a su cargo la gestión del trabajo de los alumnos en el aula, así como la de su comportamiento. Esta gestión se produce al proponer tareas y actuaciones, al marcar pautas para su realización, al organizar las acciones en el aula, al resolver las dudas que planteen los alumnos; asimismo se muestra en las actuaciones para la creación de un clima de trabajo apropiado: establece normas para el comportamiento, asume su control, amonesta y sanciona a quien no respeta las normas establecidas.

Por su parte los alumnos participan en la gestión manifestando acuerdo o desacuerdo con las actuaciones del profesor, piden justificaciones de dicha actuación, hacen propuestas alternativas, valoran el acierto o desacierto de las propuestas realizadas y, en su caso, proponen su modificación. También los alumnos, en determinadas ocasiones, asumen la responsabilidad de gestionar el trabajo del aula o mantener la disciplina, y así se considera cuando se produce.

**1.P**. Relativas a la actuación del Profesor:

**1.PO**: El profesor ORGANIZA. Para cumplir con su responsabilidad como gestor en el aula tiene que llevar a cabo diferentes tipos de actuaciones: dirigir la gestión, reclamar la atención de los estudiantes, ...

**1.PP**: El profesor PREGUNTA. Necesita conocer la opinión del alumnado respecto a la gestión de la clase.

**1.PE**: El profesor EXPLICA. Tiene que transmitir a los alumnos sus decisiones sobre la gestión.

**1.PV**: El profesor VALORA. Las actuaciones que se producen en el aula pueden ser cuestionadas por los alumnos y, en consecuencia, el profesor debe atender a sus razones.

**1.PA**: El profesor AMONESTA. Tiene que juzgar las actuaciones de los alumnos y tomar decisiones al respecto.

**1.A**. Relativas a la actuación de los Alumnos:

**1.AS**: Los alumnos SUGIEREN. Hacen Indicaciones o propuestas alternativas sobre las actuaciones producidas en la gestión de la clase.

**1.AP**: Los alumnos PREGUNTAN. Quieren disponer de informaciones más amplias o concretas sobre la gestión de la clase.

**1.AE**: Los alumnos EXPLICAN. Dan información sobre sus actuaciones o sus propuestas sobre la gestión de la clase.

**1.AV**: Los alumnos VALORAN. Toman decisiones sobre las propuestas que aparecen en el aula.

**1.AR**: Los alumnos REACCIONAN. Las amonestaciones o sanciones que se produzcan en el aula producirán modificaciones en el comportamiento de los alumnos, tanto si les afecta directamente como si es un compañero el afectado.

#### *IV.7.3.2. Unidades relativas a la gestión del desarrollo del contenido.*

El profesor conduce la presentación y desarrollo de los contenidos que se trabajan en el aula, lo que le obliga a decidir sobre las actuaciones que se produzcan, como establecer prioridades en los contenidos; promover, fomentar, reconducir o finalizar las discusiones entre alumnos, o entre alumnos y profesor; modificar las estrategias metodológicas cuando lo considere oportuno; resolver dudas de los alumnos respecto a la organización y desarrollo de los contenidos; y delimitando la importancia que corresponde a los diferentes contenidos que han aparecido en la realización de las tareas.

Los alumnos participan en el desarrollo del contenido e influyen en las decisiones del profesor a través de sugerencias, de preguntas sobre aspectos que tienen confusos o con intervenciones que pongan de manifiesto sus dificultades de comprensión del contenido.

**2.P**. Relativas a la actuación del Profesor:

**2.PO**: El profesor ORGANIZA. Tiene que atender a la forma en que se presentan los contenidos y a la gestión sobre su oportunidad.

**2.PP**: El profesor PREGUNTA. Necesita información de los alumnos sobre las propuestas realizadas.

**2.PE**: El profesor EXPLICA. Tiene que explicitar a los estudiantes los trabajos a realizar.

**2.PV**: El profesor VALORA. Emite juicios sobre las sugerencias que recibe de los alumnos acerca de la presentación de los contenidos o sobre la discusión sobre el mismo.

**2.PI**: El profesor INTERVIENE. En la interacción con los alumnos toma decisiones y actúa en consecuencia.

**2.A**. Relativas a la actuación de los Alumnos:

**2.AS**: Los alumnos SUGIEREN. Hacen propuestas sobre los contenidos a tratar, sobre la organización de los contenidos, sobre la gestión de las discusiones, etc...

**2.AP**: Los alumnos PREGUNTAN. Demandan que se explicita alguna información recibida.

**2.AE**: Los alumnos EXPLICAN. Exponen sus puntos de vista

**2.AV**: Los alumnos VALORAN. Toman decisiones ante las propuestas formuladas por el profesor o por un compañero sobre la presentación y discusión de los contenidos.

**2.AI**: Los alumnos INTERVIENEN. Interaccionan con el profesor y con otros compañeros

***IV.7.3.3. Unidades relativas a la construcción del conocimiento en el aula.***

Una vez que han finalizado las tareas propuestas se establece una discusión colectiva sobre los contenidos trabajados por los alumnos de forma individual. En ese debate el profesor promueve la comprensión de los alumnos sobre los tópicos tratados, fomentando las explicaciones de los alumnos y contrastándolas con las de otros compañeros y con el propio profesor. Además, favorece un proceso dialéctico mediante el cual se comparten los conocimientos con la colectividad y se cuestionan las concepciones de los participantes, favoreciendo su comprensión.

Los alumnos tienen que exponer sus ideas, bien a propuesta de la profesora, bien por iniciativa propia o bien por alusiones de algún compañero. Además, deben cuestionar su propio aprendizaje defendiendo sus puntos de vista o rebatiendo los de otras personas.

No se incluyen los parámetros que caracterizan cada una de las Unidades de Análisis o categorías, y que sí figuran en el trabajo de Romero (1995)

**3.P**. Relativas a la actuación del Profesor:

**3.POC**: El profesor ORGANIZA LOS CONTENIDOS. La preocupación se centra en el desarrollo de la comprensión y la construcción del conocimiento.

**3.PIS**: El profesor INDAGA SIGNIFICADOS. Las percepciones y concepciones de los alumnos deben ser conocidas.

**3.PDC**: El profesor DESARROLLA LA COMPRENSION. Tiene que arbitrar actuaciones que le faciliten la comprensión de los contenidos.

**3.PVI**: El profesor VALORA LAS IDEAS. Toma decisiones sobre el interés de las propuestas de los alumnos y sobre la gestión de las mismas en aras de facilitar la comprensión.

**3.PSC**: El profesor SISTEMATIZA CONOCIMIENTOS. Como resultado de los trabajo debe institucionalizar los contenidos tratados.

**3.A**. Relativas a la actuación de los Alumnos:

**3.AAI**: Los alumnos APORTAN INFORMACION. Ponen de manifiesto su comprensión de los contenidos o hacen propuestas en ese sentido.

**3.AIS**: Los alumnos INDAGAN SIGNIFICADOS. Quieren que se les facilite la comprensión del contenido.

**3.AMC**: Los alumnos MUESTRAN COMPRENSION. Hacen signos externos que manifiestan su comprensión de los contenidos.

**3.AVI**: Los alumnos VALORAN IDEAS. Enjuician los argumentos propuestos y toman posiciones al respecto

**3.AEC**: Los alumnos ELABORAN CONOCIMIENTO. Establecen conclusiones sobre lo tratado, conectan las nuevas ideas con otras anteriores, expresan de modo organizado su dominio del contenido, hacen propuestas para avanzar en el contenido o para aplicarlo a situaciones problemáticas, ...

**CA:** Es una unidad de análisis o categoría con la que se estudia el CLIMA DEL AULA. No esta clasificada según agente, ni por su finalidad, ni atendiendo a las actuaciones previstas, pero consideramos oportuno disponer de elementos de juicio sobre las condiciones en que se desarrolla el trabajo del aula

### *IV.7.3.4. Resumen global*

Cuantificando las unidades de análisis o categorías que se han desarrollado resultan un total de 31, de las que 30 corresponden a la Interacción Didáctica y 1 corresponde al Clima de la clase.

Contabilizando por agentes, finalidad y actuación las unidades están distribuidas del modo que se resuma en los dos cuadros que figuran en la siguiente página:

- Hay 15 unidades para analizar el comportamiento del profesor, tal y como se refleja en el siguiente cuadro:

| Actuación \ Finalidad | 1. Gestión del TRABAJO EN EL AULA | 2. Gestión del DESARROLLO DEL CONTENIDO | 3. Construcción del CONOCIMIENTO EN EL AULA |
|---|---|---|---|
| Fijar Normas o Convenios | ORGANIZA **P O** | ORGANIZA **P O** | ORGANIZA CONOCIMIENTO **P O C** |
| Establecer significados | PREGUNTA **P P** | PREGUNTA **P P** | INDAGA SIGNIFICADOS **P I S** |
| | EXPLICA **P E** | EXPLICA **P E** | DESARROLLA COMPRENSION **P D C** |
| Enjuiciar | VALORA Propuestas e intervenciones **P V** | VALORA Propuestas e intervenciones **P V** | VALORA IDEAS **P V I** |
| Intervenir | AMONESTA Comportamientos **P A** | INTERVIENE en la Interacción **P I** | SISTEMATIZA CONOCIMIENTO **P S C** |

Cuadro IV.9. Unidades de Análisis de la Didáctica de la actuación del profesor según la finalidad

- Son 15 unidades definidas para analizar el comportamiento del alumno, que quedan reflejadas en el cuadro siguiente:

| Actuación \ Finalidad | 1. Gestión del TRABAJO EN EL AULA | 2. Gestión del DESARROLLO DEL CONTENIDO | 3. Construcción del CONOCIMIENTO EN EL AULA |
|---|---|---|---|
| Fijar Normas o Convenios | SUGIERE **A S** | SUGIERE **A S** | APORTA INFORMACION **A A I** |
| Establecer significados | PREGUNTA **A P** | PREGUNTA **A P** | INDAGA SIGNIFICADOS **A I S** |
| | EXPLICA **A E** | EXPLICA **A E** | MUESTRA COMPRENSION **A M C** |
| Enjuiciar | VALORA Propuestas e intervenciones **A V** | VALORA Propuestas e intervenciones **A V** | VALORA IDEAS **A V I** |
| Intervenir | REACCIONA a la amonestación **A R** | INTERVIENE en la Interacción **A I** | ELABORA CONOCIMIENTO **A E C** |

Cuadro IV.10. Unidades de Análisis de la Didáctica de la actuación del alumno según la finalidad

- En conjunto se definen 10 unidades para la gestión del trabajo en el aula; otras 10 para la gestión del desarrollo del contenido y otras 10 para la construcción del conocimiento en el aula.
- Atendiendo al tipo de actuación se definen 6 unidades relativas a normas y comportamientos, 12 unidades para estudiar el establecimiento de significados, 6 unidades para estudiar las actuaciones de valoración y otras 6 unidades para estudiar las acciones de intervención.

## IV.8. La manera en que se organiza la información.

Con este Capítulo IV se cierra la primera parte del trabajo de investigación en la que se han especificado los objetivos que se persiguen, así como la metodología que se va a utilizar en las cada una de las dos etapas que se contemplan en esta Tesis.

Se abre, por tanto, una segunda parte del trabajo que abarca la información sobre el desarrollo de la experimentación, y sobre la obtención de datos y análisis de los mismos; posición desde la que se afronta la elaboración de las conclusiones y perspectivas futuras.

La descripción del proceso seguido, las observaciones realizadas y las informaciones recogidas, los datos obtenidos y su posterior análisis, así como la reflexión sobre los mismos para llegar a los resultados, han producido un importante volumen de documentación, que hemos decidido organizar de acuerdo con las dos Etapas que comprenden nuestro trabajo. De esta forma, hemos organizado la documentación del siguiente modo:

- Primera Etapa:

  La documentación se organiza siguiendo la secuencia de las cuatro fases de la Investigación-Acción, y se distribuye en los Capítulos V y VI de la forma siguiente:

  - El Capítulo V contiene los documentos correspondientes a las fases de Planificación y de Acción.
    * En la Fase de Planificación se detalla el proceso seguido desde la propuesta didáctica inicial hasta la propuesta definitiva, incluyendo las observaciones y reflexiones del equipo investigador sobre una experiencia piloto.
    * En la Fase de Acción se da cuenta del balance entre lo planificado y lo ejecutado, se detallan las observaciones realizadas acerca del comportamiento de los estudiantes en la realización de las diferentes tareas propuestas, se analiza la interacción didáctica producida en las sesiones de debate, y se concluye con una reflexión sobre la totalidad del proceso seguido en esta Fase.
  - El Capítulo VI contiene la documentación correspondientes a las fases de Observación y de Reflexión.
    * En la Fase de Observación se analizan las producciones escritas de los estudiantes sobre la comprensión de los conocimientos matemáticos sobre los que se instruye. En su valoración se tienen

en cuenta las Unidades de Análisis correspondientes y que se han detallado en el apartado IV.7 anterior.

* La Fase de Reflexión permite hacer una balance de la comprensión de los estudiantes sobre los diferentes temas que se abordan en la propuesta didáctica: concreción del modelo, sistema de representación polinómico unitario, la fracción como cociente, sistema de representación polinómico decimal y la notación decimal como resultado de un reparto.

• Segunda Etapa:

La documentación se organiza siguiendo la secuencia de pasos que Cohen y Manion (1990) establecen para la metodología de entrevistas.

En el Capítulo VII se hace una completa descripción de los pasos correspondientes a la dirección de las entrevistas, la realización de las mismas, la recogida de información, codificación de los datos, y análisis e interpretación de los datos obtenidos.

# CAPITULO V

## PLANIFICACION Y ACCION DE LA PRIMERA ETAPA

Este capítulo está dedicado a presentar los resultados de las fases de planificación y acción del trabajo realizado en la Primera Etapa siguiendo nuestro esquema de Investigación-Acción, fases que corresponden a la elaboración y puesta en práctica de una propuesta curricular para la formación de Maestros de Educación Primaria. Esta propuesta se ha llevado a cabo con estudiantes de la asignatura "El currículum de Matemáticas en la Educación Primaria", que se imparte en el segundo curso de la Diplomatura de Magisterio en la Escuela Universitaria de Profesorado de Educación General Básica (E.U.P.E.G.B.) de Zaragoza.

### V.1. Fase de Planificación

El proceso de elaborar la propuesta didáctica que se implementa en el aula es determinante para un estudio curricular. Es por ello que, en esta fase, se ha seguido un proceso acorde con el esquema de Investigación-Acción, ya reseñado en el Capítulo IV. Este proceso se lleva a cabo mediante un ciclo que consta de cuatro subfases, concluidas las cuales pasamos a la siguiente Fase de Acción, tal y como se recoge en el siguiente gráfico:

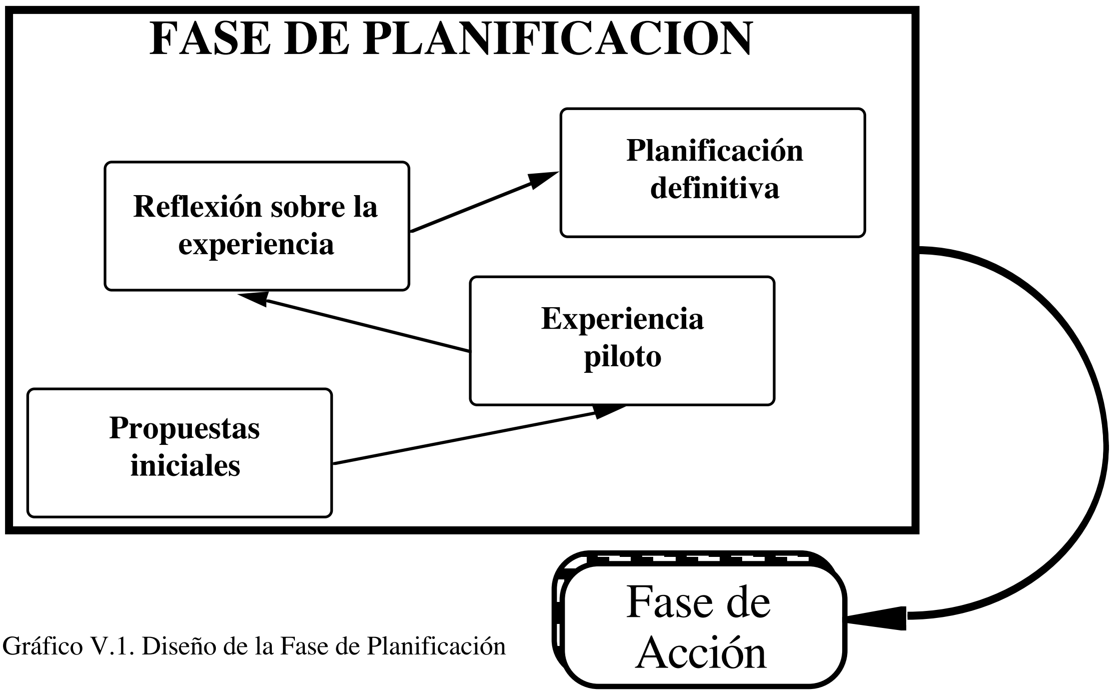



Gráfico V.1. Diseño de la Fase de Planificación

En los epígrafes que siguen se detallan cada una de las subfases de la Fase de Planificación, que contribuyen a la programación de la propuesta didáctica que será llevada al aula.

### V.1.1. Antecedentes

La planificación de la propuesta didáctica que se recoge en este trabajo es resultado de una reflexión continuada y profunda sobre la forma más adecuada de alcanzar los objetivos propuestos, y que tuvo su comienzo en el curso 94-95. Destacamos de manera resumida algunos momentos relevantes del camino recorrido:

***1ª propuesta:***

Durante el curso 94-95, en Marzo de 1.995, se elabora un documento con una propuesta didáctica que contempla 7 sesiones de clase (14 horas), con los siguientes objetivos:

1.- Conceptualizar la fracción con significado de cociente.

2.- Mostrar una estructura polinómica de la fracción al representar el resultado del reparto igualitario por fases y utilizando el criterio de la mayor parte.

3.- Poner de manifiesto la estructura polinómica decimal de la fracción como resultado de exigir el fraccionamiento en 10 partes iguales.

4.- Mostrar la notación decimal como un recurso para economizar la expresión polinómica decimal de las fracciones.

El equipo investigador asume la revisión de esta propuesta en el sentido de evaluar las tareas diseñadas, indagar sobre las respuestas esperadas de los estudiantes y analizar la viabilidad de los objetivos enunciados. Como consecuencia de este trabajo, en el mes de Julio de 1995 el equipo investigador decide que, para una mejor consecución de los objetivos propuestos, se reformule la propuesta atendiendo a los siguientes criterios:

- Que sea el estudiante quien, mediante la resolución de problemas, construya el significado de la fracción como cociente .
- Que se consolide este nuevo significado reelaborando los conocimientos personales de los estudiantes sobre relaciones y operaciones entre fracciones positivas, de manera que la propuesta tenga en cuenta los aspectos mas importantes del sistema de los números racionales.
- Que se contraste y evalúe la propuesta de innovación curricular elaborada con un grupo experimental de estudiantes.

***2ª propuesta.***

El curso 95-96 se dedica a elaborar la nueva propuesta didáctica, en concreto es en Febrero de 1.996 cuando se concluye su elaboración; esta nueva propuesta estructura su desarrollo en 10 sesiones de 2 horas de duración cada una. En ella, se propone a los estudiantes el problema de determinar la forma en que el escriba Ahmés construye la tabla de fracciones que aparece en el Recto del Papiro de Rind. Para llegar a la solución, el profesor va ofreciendo informaciones sobre el significado de la fracción como cociente, el reparto por fases, el criterio de la mayor parte, las dificultades del fraccionamiento de objetos reales y la modificación de las partes sobrantes en alguna fase del reparto. Una descripción más detallada de estos aspectos se encuentra pendiente de publicación en la revista Suma (Gairín, J.M. "El enigma del escriba Ahmés").

Esta propuesta se pone en práctica de manera experimental con un grupo de estudiantes de 2º curso de la Diplomatura de Maestro de Educación Primaria, en la E.U.P.E.G.B. de Zaragoza en Noviembre y Diciembre de 1.996. Como consecuencia de evaluar las observaciones realizadas la propuesta didáctica muestra aspectos vulnerables a la crítica, entre los que reseñamos los siguientes:

a) Respecto a los objetivos
- Se advierte la división de la propuesta en dos focos de conocimiento diferenciados: las fracciones unitarias y las fracciones decimales. Sobre los objetivos parciales de estos focos hay que incorporar tareas específicas sobre las que hacer indagaciones de la comprensión del contenido.

b) Respecto al contenido
- El problema sobre el que se sustenta la propuesta resulta muy complejo; además su resolución se dilata temporalmente con lo que los estudiantes llegan a perder la perspectiva de su trabajo.
- Las herramientas utilizadas para la construcción del conocimiento, modelo y sistema de representación, aparecen implícitamente en la propuesta; sin embargo, por su condición de herramientas, deben explicitarse sus características, utilidades, potencialidades y limitaciones.
- Es un objetivo de este trabajo dotar de significado a la fracción como cociente. Pero la secuencia de actividades no contempla la construcción del significado, sino que utiliza la idea de reparto para mostrar que la fracción también se puede entender como suma de fracciones unitarias. Por tanto, se recomienda que primero se resuelva la tarea de simbolizar el resultado del reparto, y después que se ponga de manifiesto que tal resultado es expresable mediante una fracción en la que los términos tienen un significado preciso y diferente del que tienen en la fracción con significado de relación parte-todo. Es decir, cambiar la idea de que los sistemas de representación se modelizan por la de que los sistemas de representación se construyen a partir de la necesidad de comunicar los resultados de las acciones realizadas en el modelo.
- Desde el comienzo del trabajo aparece el símbolo a/b para indicar el reparto de a unidades entre b individuos; esta forma inicial de representar el reparto pierde efectividad por cuanto los estudiantes tienen asociado dicho signo al significado de la fracción como relación parte-todo.

c) Respecto a la evaluación de los estudiantes
- Se contempla solamente desde el análisis de las producciones de los estudiantes. Pero estas producciones contemplan aspectos locales del conocimiento, por lo que se sugiere la posibilidad de disponer de datos sobre la globalidad de los contenidos.

El curso 96-97 está dedicado a la puesta en práctica y evaluación de esta segunda propuesta.

## V.2. Planificación según modelo curricular.

Como resultado de las observaciones y reflexiones realizadas y de la correspondiente evaluación de las intervenciones curriculares previas surge la propuesta didáctica definitiva; dicha propuesta se estructura según los apartados:

a) Objetivos.
b) Contenidos
c) Metodología
d) Evaluación
e) Criterios para la actuación en el aula

Esta propuesta final se lleva a cabo durante el curso 97-98.

***a) Objetivos***

La propuesta didáctica objeto de este trabajo de investigación persigue incrementar la comprensión sobre números racionales de unos determinados estudiantes. En este sentido, los siguientes objetivos concretan las intenciones de la mencionada propuesta:

1.- Concretar el modelo sobre el que realizar las acciones, delimitando sus potencialidades y limitaciones.
2.- Conceptualizar la fracción con significado de cociente, como medida de la cantidad de magnitud resultado de un reparto igualitario.
3.- Construir un sistema de representación polinómico unitario al representar el resultado del reparto realizado por fases y utilizando el criterio de la mayor parte: analizar sus características sintácticas y semánticas.
4.- Caracterizar las relaciones de equivalencia y de orden entre expresiones polinómicas unitarias.
5.- Dotar de significado, en el modelo propuesto, a las operaciones entre expresiones polinómicas unitarias; obtener el resultado de las distintas operaciones.
6.- Construir un sistema de representación polinómico decimal al representar resultados de repartos con fraccionamientos en 10 partes iguales: analizar sus características sintácticas y semánticas.
7.- Caracterizar las relaciones de equivalencia y de orden entre expresiones polinómicas decimales.
8.- Dotar de significado, en el modelo propuesto, a las operaciones entre expresiones polinómicas unitarias; obtener el resultado de las distintas operaciones.
9.- Introducir la notación decimal para economizar la escritura de las expresiones polinómicas decimales.
10.- Establecer conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de las fracciones a través de los sistemas de representación estudiados.

***b) Organización del contenido por temas y tareas***

Los contenidos de la propuesta didáctica se agrupan por temas, en cada uno de los cuales se señalan las tareas que deben realizar los estudiantes. El desarrollo completo de las tareas (objetivos, contenidos, metodología, evaluación y temporalización), se lleva a cabo en 13 sesiones de clase. A título de ejemplo incluimos el plan de trabajo de una de estas sesiones, la número 3. Una versión detallada de las 13 sesiones se encuentra en el Anexo III. 1.

## SESION 3.

***Potencialidad del modelo*** (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Adoptar la simbología a:b como resultado del reparto igualitario de a unidades en b partes iguales.

2.- Explicitar conocimientos sobre:

• La equivalencia de repartos
• Relaciones de orden entre repartos.
• Operaciones con repartos.

**II. CONTENIDOS**

2.1.- La equivalencia de repartos como los que producen partes de igual cantidad

i.- Varias formas de representar un mismo resultado

ii.- Caracterizar los repartos equivalentes.

2.2.- Un reparto es mayor que otro si su resultado ofrece una cantidad mayor de magnitud.

i.- Simbolizar de la relación de orden

ii.- Caracterizar el orden entre repartos

iii.- Interpretación de la densidad respecto del orden

2.3.- Significado y obtención del resultado de repartos igualitarios.

i.- Suma de repartos: significado y resultado.

ii.- Resta de repartos: significado y resultado

iii.- Producto de un número natural por un reparto, como suma reiterada de repartos: obtención del resultado.

iv.- Cociente de un reparto por un número natural, como reparto reiterado: obtención del resultado.

v.- Dificultades al conceptualizar la multiplicación y división de repartos igualitarios

**III. ACTIVIDADES**

Los alumnos deben realizar las cuestiones de investigación que se presentan en forma de tareas secuenciadas.

**CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 1**

2.1. Tarea 1:

*¿Puede haber repartos equivalentes?. Justifica tu respuesta.*
*Escribe, de forma simbólica, dos repartos equivalentes.*
*Generaliza la escritura de repartos equivalentes*

2.2. Tarea 2:

*¿Hay repartos que sean mayores que otros?. Justifica tu respuesta.*
*Escribe, de forma simbólica, que un reparto es mayor que otro. Generaliza el resultado.*
*Escribe 5 repartos entre (2:3) y (4:5)*

2.3.i. Tarea 3:

*¿Cómo se interpreta, en el modelo en que venimos trabajando, la expresión (a : b )+ (c : d)?*
*¿Cómo se obtiene el resultado de esa suma,*

2.3.iii y iv Tarea 4:
*a) Justifica, en el modelo, la expresión n x (c : d), siendo n un número natural. Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : n, siendo n un número natural. Calcula el resultado.*

2.3.v Tarea 5:
*a) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) x (c : d). Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : (c : d). Calcula el resultado.*

Seguidamente hacemos una breve descripción del contenido y reseñamos los trabajos que se proponen a los estudiantes; estos trabajos se explicitan en el apartado V.4 de este mismo capítulo, por lo que en este punto nos limitamos a ubicarlos en la secuencia didáctica

Tema 1.- Concreción de un modelo

Se presenta a los estudiantes el modelo formado por los siguientes elementos: tortillas, repartir de forma igualitaria, superficie. Posteriormente se hace un estudio sobre el significado y caracterización de las relaciones de equivalencia y orden entre repartos; además se presenta el significado de las operaciones en el modelo propuesto.

Trabajos a realizar: Ficha 1, Cuestión de Investigación nº 1

Tema 2.- Sistema de representación polinómico unitario

A partir de la simbolización de las acciones realizadas en el modelo se construye un sistema de representación, del que se estudian sus características sintácticas y semánticas. Además, se analizan y caracterizan las relaciones y operaciones entre expresiones de este sistema de representación.

Trabajos a realizar: Ficha 2, Ficha 3, Ficha 4, Cuestión de Investigación nº 2, Cuestión de Investigación nº 3

Tema 3.- Expresiones polinómicas unitarias y fracciones,

La conexión entre el sistema de representación polinómico unitario y la notación fraccionaria permite conceptualizar la fracción con significado de cociente. Y con este significado se revisan las relaciones y operaciones entre fracciones positivas.

Trabajos a realizar: Cuestión de Investigación nº 4

Tema 4.- Sistema de representación polinómico decimal

La modificación del proceso de reparto produce resultados distintos de los hasta ahora conseguidos. De este modo, aparece un nuevo sistema de representación, que presenta similitudes y diferencias con el sistema de representación anteriormente estudiado.

Trabajos a realizar: Ficha 4,
Cuestión de Investigación nº 5, Ficha 6,
Cuestión de Investigación nº 6

Tema 5.- Notación decimal

Al economizar la escritura de expresiones polinómicas decimales aparece la notación decimal, con significado de resultado de un reparto igualitario. Desde esta perspectiva se revisan las relaciones y operaciones entre notaciones decimales positivas

Trabajos a realizar: Cuestión de investigación Nº 7

***c) Metodología***

Lo que persigue esta propuesta es incrementar los conocimientos personales de los futuros maestros sobre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos. En este sentido, nos proponemos potenciar que los estudiantes sean los autores de su propio aprendizaje, que la formación de conceptos se desarrolle a través de la resolución de las situaciones problemáticas que se propongan.

En consecuencia, tendrán prioridad el trabajo individual y la discusión en pequeño y gran grupo. Las intervenciones del profesor quedan limitadas a la presentación de la tareas, a la participación en las discusiones y a la formulación de conclusiones; además, atenderá individualmente las preguntas de los estudiantes o dará respuestas públicas cuando varios estudiantes formulen la misma pregunta.

Queda así caracterizado un ciclo de actuación: el profesor entrega las tareas, los alumnos las resuelven y las entregan al profesor, el profesor las revisa y organiza la discusión para fijar los elementos esenciales del conocimiento matemático que se sustenta en las tareas; una vez institucionalizado el conocimiento el profesor propone nuevas tareas y el ciclo se reinicia.

Esta metodología exige que se favorezca una atmósfera de libertad en el aula para que los alumnos puedan expresar sus ideas; asimismo, se fomentará la idea de que los errores son consustanciales al aprendizaje, con independencia de la edad del aprendiz o de las características del contenido, con lo que se favorecerá la participación de todos los estudiantes en las discusiones. Esto queda ejemplificado con la propuesta que aparece para la tercera sesión:

**SESION 3.**

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.

2.- Trabajo individual de los alumnos. Las tareas se entregan de forma secuencial, al finalizar una tarea se recoge y se entrega la siguiente

Discusión colectiva sobre cada una de las tareas trabajadas individualmente.

***c) Evaluación***

Las tareas resueltas por los estudiantes constituyen el principal elemento para valorar su trabajo; además, también se tiene en cuenta la actitud que muestran a lo largo del proceso de aprendizaje.

Con estos datos se puede hacer una valoración de tipo local, una valoración de aspectos parciales del contenido. Para disponer de información sobre la comprensión global del contenido de la propuesta didáctica se somete a los estudiantes a una prueba final, que será valorada de acuerdo con los siguientes criterios:

- Reconocimiento del modelo propuesto
- Interpretación del reparto en el supuesto de que la cantidad a repartir sea nula.
- Reconocimiento, interpretación y utilización de los símbolos en la representación polinómica unitaria
- Justificación de algunas características esenciales de la representación polinómica decimal
- Reconstrucción de las condiciones iniciales de un reparto conocida su expresión polinómica decimal, tanto si ésta contiene un número finito de sumandos, como en el caso de que sea un número infinito.
- Interpretaciones de las relaciones de orden entre representaciones polinómicas decimales, así como de la densidad respecto del orden.
- Interpretación de operaciones con números simbolizados con la notación decimal, así como la forma de obtener los resultados de dichas operaciones.

***e) Criterios para la actuación en el aula***

Al inicio de la primera sesión de esta propuesta se advierte a los estudiantes que sus trabajos serán tenidos en cuenta para la calificación final de la asignatura; en concreto, se señala que los trabajos de clase pueden suponer hasta 2 puntos de dicha calificación dependiendo de su calidad y cantidad.

Se recordará a los estudiantes, cuantas veces sea necesario, que las tareas deben hacerse individualmente; solamente se fomentará la discusión con sus compañeros más próximos si con ello se facilita la comprensión del conocimiento en juego.

Ante las preguntas que formulen los estudiantes el profesor tratará de evitar que las respuestas sean directas, antes bien tratará de orientar el trabajo del estudiante reformulando nuevas preguntas o haciendo sugerencias sobre una nueva lectura del enunciado o sobre alguno de los conceptos estudiados con anterioridad.

Después de las discusiones colectivas sobre las tareas ya realizadas, es tarea importante del profesor el sintetizar los resultados obtenidos, recalcar aquellos aspectos del contenido que tienen mayor importancia y conectar los nuevos contenidos con otros ya trabajados con anterioridad.

Se hará notar a los estudiantes que la organización del contenido exige un trabajo continuado, que los contenidos trabajados en cada nueva sesión están sustentados en los contenidos de las sesiones anteriores; además, se les hace notar a los estudiantes que los contenidos matemáticos que se trabajan no están recogidos en libro alguno. Por tanto, se recomienda encarecidamente que en las clases pregunten al profesor cuantas dudas tengan, que hagan uso de las seis horas semanales de tutoría asignadas al profesor y que pueden concertar entrevistas con el profesor cuando lo consideren necesario.

Con la elaboración de la propuesta didáctica, el equipo investigador valora que se han cubierto las etapas previstas para esta Fase, y que están sintetizadas en el gráfico V.1. En este recorrido se ha modificado la propuesta inicial a partir del análisis de la misma y a partir de las observaciones y reflexiones realizadas sobre una experiencia piloto.

En consecuencia, el equipo investigador decide pasar a la siguiente fase del ciclo de Investigación-Acción, para lo que se fija la fecha del 28 de Octubre de 1998 como inicio de la implementación de la propuesta didáctica con un grupo natural de estudiantes de la asignatura "El currículum de Matemáticas en Educación Primaria", que se desarrolla en 2º curso de la especialidad de Educación Primaria de la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Zaragoza. En el apartado siguiente, V.3, se informa sobre el desarrollo de esta segunda Fase de nuestra investigación en la Etapa Primera.

## V.3. Fase de Acción

Una vez que se ha concluido la fase de planificación de la propuesta didáctica, comienza la fase siguiente, la de desarrollar en el aula lo planificado, la Fase de Acción. La información sobre las 20 sesiones que conforman esta parte de nuestro estudio se organiza de acuerdo con el esquema de investigación-acción que venimos utilizando y que se resume en el siguiente gráfico:

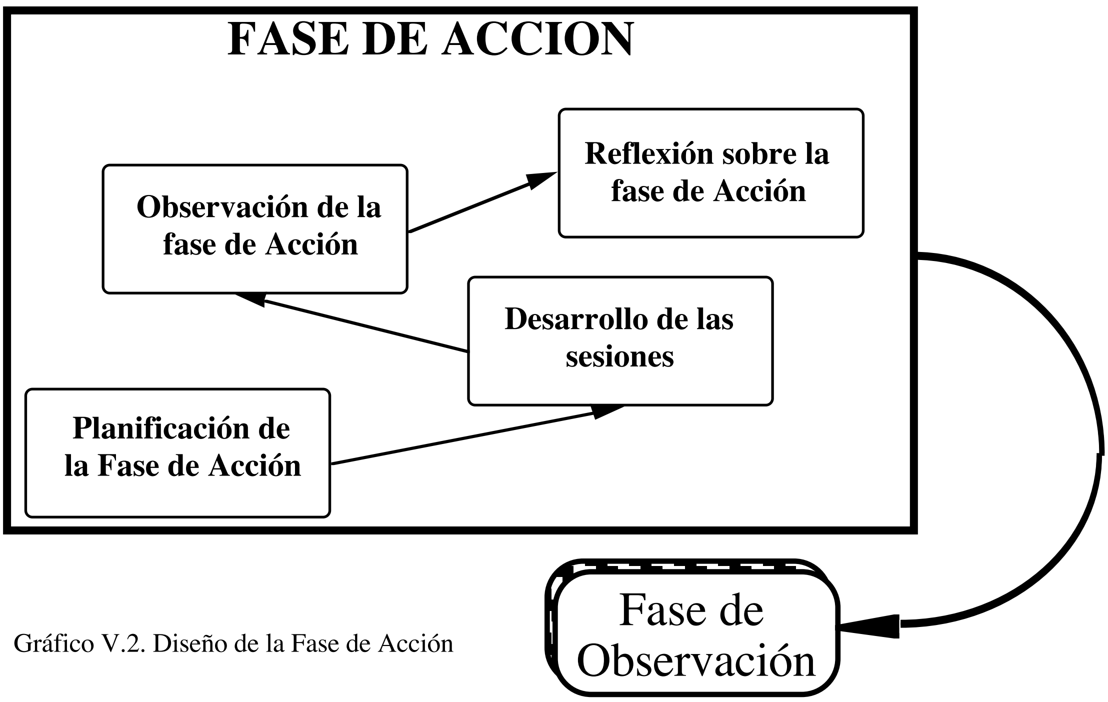



Gráfico V.2. Diseño de la Fase de Acción

Esta Fase se describe utilizando a su vez, de manera recursiva, los cuatro pasos o etapas de la Investigación-Acción del modo siguiente:

Planificación de la Fase de Acción, en la que se especifica la distribución temporal de la secuencia didáctica según el diseño de la propuesta didáctica.

Desarrollo de las sesiones, que constituye la Fase de Acción propiamente dicha.

Observación o recogida de datos de la Fase de Acción, referidos a la comprensión de los contenidos y a la interacción didáctica.

Reflexión sobre la Fase de Acción en la que se valora críticamente el trabajo realizado y, en consecuencia, se toman decisiones sobre el modo de continuar el trabajo.

### V.3.1. Planificación de la fase de Acción

Al concluir la fase de planificación se contempló una propuesta curricular cuyo desarrollo abarcaba 13 sesiones: una introductoria de 1/2 hora de duración (sesión número 1); y las sesiones 2 a 13 restantes con una duración de 2 horas, (se hace un descanso intermedio de unos 10 minutos).

Estas 12 sesiones se vertebran en torno a los dos focos de investigación establecidos, cada uno de los cuales se divide en temas (en los que los futuros maestros realizan trabajos específicos), y a los que se asigna una temporalización, tal y como puede verse en el Anexo III.1

Los dos cuadros siguientes resumen la distribución temporal de temas y tareas por cada uno de los dos focos de investigación:

Primer foco de investigación:

| Contenido | Temporalización | Trabajos |
|---|---|---|
| Tema 1 | Sesión 2<br>Sesión 3 | Ficha 1<br>Cuestión de investigación 1 |
| Tema 2 | Sesión 4<br>Sesión 5<br>Sesión 6<br>Sesión 7<br>Sesión 8 | Ficha 2<br>Ficha 3<br>Ficha 4<br>Cuestión de investigación 2<br>Cuestión de investigación 3 |
| Tema 3 | Sesión 9 | Cuestión de investigación 4 |

Cuadro V.1: Distribución temporal y trabajos para el primer foco de investigación

A este foco de investigación se dedican 9 sesiones de clase (18 horas), que permiten desarrollar la parte de la propuesta didáctica sobre el sistema de representación polinómico unitario. Las tareas propuestas a los estudiantes son fichas de trabajo o cuestiones específicas de investigación

Segundo foco de investigación:

| Contenido | Temporalización | Trabajos |
|---|---|---|
| Tema 4 | Sesión 10<br><br>Sesión 11<br>Sesión 12 | Ficha 5<br>Cuestión de investigación 5<br>Ficha 6<br>Cuestión de investigación 6 |
| Tema 5 | Sesión 13 | Cuestión de investigación 7 |

Cuadro V.2: Distribución temporal y trabajos para el segundo foco de investigación

El hecho de que los estudiantes para maestros ya hayan recibido instrucción sobre las representaciones polinómicas unitarias, permite que este segundo foco de investigación se reduzca a dos temas, que se desarrollarán en 4 sesiones de clase (8 horas).

### V.3.2. Desarrollo de la fase de Acción

Una vez que se ha realizado la implementación de tal propuesta curricular interesa determinar las desviaciones que se han producido respecto a la planificación inicial, así como las causas que las han provocado.

Para hacer un seguimiento exhaustivo del desarrollo completo de las sesiones de clase se debe consultar el Anexo II, en el que se recoge el Diario de Clase.

En este Diario figuran todas las incidencias ocurridas en cada una de las sesiones de clase. La información consignada para cada una de las sesiones se organiza según el esquema siguiente:

1.- Plan previsto

2.- Ejecución

3.- Aspectos actitudinales

4.- Aspectos relacionados con la comprensión.

5.- Valoración.

6.- Toma de decisiones

Presentamos en este apartado dos aspectos del desarrollo de las sesiones de clase que consideramos importantes para nuestra investigación: en primer lugar, hacemos una comparación entre la planificación y la ejecución de la secuencia instructiva, en su desarrollo temporal; en segundo lugar, el grado de asistencia de los alumnos a las sesiones de clase, puesto que se recomendó a los mismos que su presencia en el aula era esencial para la adquisición de los conocimientos, ya que no existen publicaciones que los aborden.

#### *a) Balance entre planificación y ejecución*

A partir de las informaciones recogidas en el antes mencionado Diario de Clase vamos a elaborar un cuadro-resumen por cada uno de los Focos de Investigación, en el que figuran las fechas de las sesiones, el tema que se trata y los trabajos realizados por los estudiantes.

Ello nos permitirá hacer un balance entre lo planificado en la fase correspondiente de nuestro modelo de Investigación-Acción, y lo ejecutado en la correspondiente fase de implementación:

Primer foco de investigación:

| Fecha | Contenido | Trabajos realizados |
|---|---|---|
| 28-10-97 | Tema 1 | Ficha 1 |
| 30-10-97 | Tema 1 | Cuestión de investigación 1 |
| 4-11-97 | Tema 2 | Ficha 2 |
| 6-11-97 | Tema 2 | Ficha 3 |
| 11-11-97 | Tema 2 | Cuestión de debate nº 1 |
| 13-11-97 | Tema 2 | Cuestiones debate 2, 3 y 4 |
| 18-11-97 | Tema 2 | Ficha 4 |
| 20-11-97 | Tema 2 | Cuestión de investigación 2 |
| 25-11-97 | Tema 2 | Cuestión de investigación 2 |
| 27-11-97 | Tema 2 | Cuestiones de debate 5 |
| 2-12-97 | Tema 2 | Cuestión de investigación 2<br>Cuestión de investigación 3 |
| 4-12-97 | Tema 2 | Cuestión de investigación 3 |
| 9-12-97 | Tema 2<br>Tema 3 | Cuestión de investigación 3<br>Cuestión de investigación 4 |
| 11-12-97 | Tema 3 | Cuestión de investigación 4 |
| 16-12-97 | Tema 3 | Cuestión de investigación 4 |

Cuadro V.3: Balance entre planificación y ejecución del primer foco de investigación

Este cuadro muestra que para el Primer foco de Investigación se utilizaron 14,5 sesiones, en lugar de las 9 previstas en la planificación; es decir, se utilizaron 29 horas en lugar de las 18 previstas. Las previsiones sufren un incremento del 50%, debido a las siguientes razones:

1.- Introducir 2 sesiones de debate (cuestiones de debate 1, 2, 3 y 4), de acuerdo con las decisiones tomadas por el equipo investigador. Estas sesiones tienen por finalidad utilizar nuevas estrategias metódicas para que los estudiantes fortalezcan su comprensión sobre el modelo en que se trabaja y sobre el sistema simbólico que se define para representar el resultado de la acción.

2.- Las dificultades que tienen algunos estudiantes acerca de la interpretación y simbolización de repartos en los que aparece el 0 entre las condiciones del reparto, llevan a la decisión de introducir una nueva sesión de debate (cuestiones de debate 5), en pequeño grupo y su posterior puesta en común de forma colectiva.

3.- La revisión de la Cuestión de Investigación nº 3 exigió 2 horas, en vez de 1 hora inicialmente prevista, por cuanto el profesor tuvo que afrontar en profundidad el tratamiento de las relaciones de orden entre representaciones polinómicas unitarias; esta necesidad surgió tras la reflexión sobre las respuestas que dieron los estudiantes a las tareas incluidas en la mencionada Cuestión de Investigación nº 3

4.- La revisión de las respuestas de los estudiantes a las tareas de la Cuestión de Investigación nº 4, provocó que las explicaciones del profesor durasen 1 hora más de lo previsto, puesto que los alumnos encontraron dificultades en justificar los significados de las operaciones entre notaciones fraccionarias, a pesar de que se había sugerido la interpretación de las expresiones simbólicas por medio del modelo propuesto.

5.- En la planificación del trabajo se contemplaba dedicar 1 hora para que el profesor hiciese una exposición-resumen sobre la representación polinómica unitaria. En realidad hubo que ampliar tal exposición hasta 2 horas por cuanto surgieron preguntas de los estudiantes sobre las relaciones y operaciones tratadas con anterioridad.

Segundo foco de investigación:

| Fecha | Contenido | Trabajos realizados |
|---|---|---|
| 16-12-97 | Tema 4 | Ficha 5 |
| 18-12-97 | Tema 4 | Cuestión de investigación 5 |
| 8-1-98 | Tema 4 | Ficha 6 |
| 13-1-98 | Tema 4<br>Tema 5 | Cuestión de investigación 6<br>Cuestión de investigación 7 |
| 20-1-98 | Tema 5 | Cuestión de investigación 7 |

Cuadro V.4: Balance entre planificación y ejecución del segundo foco de investigación

En total se han utilizado 5 sesiones de 2 horas cada una, por tanto, se han necesitado 10 horas de trabajo frente a las 8 horas previstas. Esta desviación de un 25% respecto a la planificación está justificada porque la revisión de los trabajos de los estudiantes respecto a las Cuestiones de Investigación números 6 y 7 demandó aumentar de 2 a 4 las horas previstas. Esta ampliación superó las previsiones del investigador, puesto que no esperaba que los conocimientos personales de los estudiantes acerca de las notaciones decimales contuviesen una gama tan amplia y variada de significados erróneos.

***b) Tareas diseñadas para recoger información***

Las tareas diseñadas para recoger información y obtener datos relacionados con la comprensión del contenido por parte de los estudiantes han sido 6 Fichas o Cuestiones Complementarias de Investigación y 7 Cuestiones de Investigación, que se recogen en el Anexo III.1. Cada Ficha está subdividida en varios trabajos parciales, que se denominan actividades; y cada una de las Cuestiones de Investigación esta subdividida en varios trabajos, denominados tareas. Además, en la fase de Acción hubo que incorporar a estas tareas 2 sesiones de debate con 5 Cuestiones de Debate, que aparecen en el ANEXO IV.2. En total son 18 las Fichas, Cuestiones de Investigación y las Cuestiones de Debate propuestas en el transcurso de esta Fase de Acción de la Primera Etapa de nuestro trabajo, que permiten estudiar la comprensión de los estudiantes sobre cada uno de los contenidos planteados. La prueba de evaluación final, que ya se ha mencionado, está pensada para recoger información sobre la comprensión global de los conceptos presentados en nuestra propuesta.

***c) Participación de los estudiantes***

En la Fase de Planificación de la propuesta curricular que se desarrolla en la Etapa 1 de nuestra investigación, se señalaba (capítulo IV), que las estrategias metódicas a utilizar se basan en la realización de tareas individuales, en las exposiciones del profesor y en las discusiones en la clase. Por tanto, la participación de los estudiantes para maestros en las sesiones de clase juega un importante papel en la construcción de los conocimientos.

Finalizada la fase de Acción, interesa conocer datos que dimensionen la partición de estos estudiantes en la realización de las tareas propuestas. Algunas de las causas que provocan la disminución del número de asistentes quedan reflejadas en el Diario de Clase (Anexo II).

La participación de los estudiantes se determina a partir de los trabajos (actividades o tareas que conforman las Fichas y las Cuestiones de Investigación, respectivamente), que entregan a lo largo de las 20 sesiones de clase. En total son 37 los trabajos controlados: una prueba inicial, 35 trabajos de aula y una prueba final. En el Anexo IV.3 se recogen las actividades realizadas por cada uno de los 56 estudiantes que asistieron a alguna de las sesiones de clase.

De acuerdo con los trabajos entregados, los 68 estudiantes matriculados en la asignatura pueden clasificarse en 3 grupos amplios, de características bien diferenciadas en cuanto a su participación:

Estudiantes de asistencia regular: es el grupo más numeroso, 40 estudiantes, que han realizado más del 60% de los trabajos propuestos. Son alumnos que habitualmente asisten a las sesiones y, por tanto, han seguido la propuesta didáctica en buenas condiciones.

Estudiantes de asistencia irregular: es el grupo de 12 estudiantes que realizan entre el 25 y el 60% de las tareas. Consideramos que estos estudiantes tienen una participación irregular en tanto en cuanto su asistencia a las sesiones de clase presenta muchas lagunas, por lo que su seguimiento de la propuesta didáctica no es el deseable.

Estudiantes con escasa o nula participación: es un grupo de 16 estudiantes que no asistieron a clase (8 estudiantes), o que el número de tareas entregadas no alcanza el 25% de las propuestas (8 estudiantes). Consideramos que este grupo de estudiantes no ha seguido la experiencia.

## V.4 Observación de la fase de Acción

En cada una de las sesiones se hace un seguimiento de las actitudes de los estudiantes así como de la comprensión que manifiestan sobre los contenidos presentados. Dichas observaciones se recogen de forma detallada en el Diario de Clase que figura en el Anexo II. La mayor parte de la información se ha recogido a partir de las 18 tareas propuestas a los estudiantes, clasificadas en tres tipos: fichas de trabajo, cuestiones específicas de debate y cuestiones específicas de investigación. Cada una de estas tareas se presenta y comenta singularmente en el apartado V.4.1.

En el apartado V.5 haremos un estudio de las interacciones didácticas observadas durante las dos horas de la sesiones de debate colectivo que se celebraron. Para estructurar esta información se utilizarán las correspondientes Unidades de Análisis que fueron definidas en el Capítulo IV

### V.4.1. Sobre las tareas realizadas

Seguidamente presentamos las diferentes tareas realizadas junto con las observaciones mas significativas que han surgido durante el proceso de su realización por los estudiantes para profesor. Estas observaciones proporcionan indicaciones de algunas de las cuestiones más relevantes detectadas en el proceso de construcción del conocimiento personal sobre fracciones por parte de los estudiantes, que se estudiarán con detalle en el próximo capítulo.

Como se ha dicho, organizamos nuestras observaciones de acuerdo con los tipos de tareas de los que proceden y que se han propuesto a los estudiantes: fichas de trabajo o cuestiones complementarias de investigación, cuestiones específicas de debate y cuestiones específicas de investigación.

#### *V.4.1.1. Observaciones sobre las Fichas o Cuestiones Complementarias de Investigación*

#### *Ficha 1*

Esta ficha se propone a los estudiantes después de que el profesor haga una exposición general sobre las nociones de representación y sistema de representación. Además, el discurso se ejemplifica sobre los números naturales con representaciones orales, gráficas y simbólicas.

| | |
|---|---|
| *Actividad 1:* | *Hay que repartir de forma igualitaria 15 raquetas de tenis entre 3 jugadores. Utiliza un SISTEMA GRAFICO y un SISTEMA SIMBOLICO para expresar el resultado* |
| *Actividad 2:* | *A la vista de los sistemas utilizados, señala ventajas e inconvenientes que encuentras en cada uno para el reparto de estos casos:*<br>*a) Repartir 3634 raquetas entre 23 niños*<br>*b) Repartir 23 raquetas entre 7 niños* |
| *Actividad 3:* | *Da respuestas justificadas para indicar el significado de cada una de las expresiones simbólicas*<br>*a) (a : b) y (b : a) ;; b) a : a ;; c) a : 0 ;; d) 0 : a ;; e) 0 : 0* |

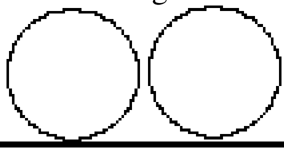
• Las explicaciones previas del profesor sobre las nociones de representación y sistema de representación se han mostrado insuficientes para que, sin ayudas externas, los estudiantes pudiesen realizar la actividad 1. En efecto, los contenidos del discurso del profesor presentan un aspecto sensiblemente diferente de las exigencias de las tareas propuesta a los estudiantes: en dicho discurso solamente se ejemplifica la representación del número de objetos de un conjunto, solamente se ejemplifica la representación de una cantidad; sin embargo, a los estudiantes se les propone que ideen una representación que contemple simultáneamente tres cardinales, que corresponden a las unidades a repartir, al número de participantes en el reparto y al resultado del reparto.

- En la actividad 1 la mayoría de los estudiantes se crean dificultades en su trabajo porque interpretan que en la representación simbólica que buscan no deben incluir símbolos conocidos. Como resultado de esta presunción un pequeño grupo de estudiantes no ofrecen respuesta alguna; otro grupo pequeño utiliza representaciones en las que los objetos son identificados con números o con letras; otro reducido grupo simboliza el reparto con una división acompañada de textos explicativos; la mayoría optaron por pedir aclaraciones sobre la tarea al profesor.
- Al resolver la actividad 2, los estudiantes manifestaron que la representación gráfica usada en la actividad 1 resultaba inadecuada, por laboriosa, cuando es grande el número de objetos a repartir. Sin embargo, los estudiantes no encontraron dificultades en el caso b), pues entendieron que al ser pequeño el número de objetos la tarea se resolvía de la misma forma que en la actividad 1, pero añadiendo un nuevo conjunto en el que se incluían los objetos sobrantes, y que todos especificaban de forma verbal.
- En la actividad 2, las representaciones simbólicas que se mostraron eficaces fueron aquellas que venían utilizando los símbolos de la división. La mayoría de los alumnos abandonaron las representaciones que usaron en la actividad 1 y adoptaron los símbolos de la división.
- Los estudiantes que utilizan la división como representación simbólica del reparto en el punto b) de la actividad 2, lo hacen con forma y significado diferentes: hay alumnos que utilizan la clásica caja de división y la interpretación que le dan es la de división euclídea; mientras que otros alumnos utilizan dos puntos y la interpretan como división racional señalando que corresponde a cada jugador 3 raquetas y un trozo de raqueta.
- En la actividad 3 se han detectado algunas ideas erróneas ocasionadas por el uso de expresiones literales pues, contrariamente a lo esperado, aproximadamente la mitad de los estudiantes no interpretaron las letras como parámetros sino como elementos identificativos de una clase de objetos
- En la actividad 3, el modelo utilizado (raquetas de tenis, repartir de forma igualitaria, cardinalidad) no se ha mostrado plenamente eficaz para superar interpretaciones de las expresiones a:b, cuando a=b, o cuando a, b o ambos son iguales a 0.
- La actividad 3 exige la interpretación de expresiones literales que, en la planificación de esta actividad, supusimos pertenecían a los conocimientos personales de los estudiantes. Sin embargo, las preguntas que formulan más de la mitad de los estudiantes ponen de manifiesto que la interpretación de resultados generales es una tarea dificultosa para dichos estudiantes.

***Ficha 2***

Esta ficha se propone a los estudiantes una vez que se ha concretado el modelo y se han estudiado sus relaciones y operaciones, así como la forma de obtener el resultado de las operaciones.

*Se reparten, en partes iguales, 2 tortillas entre 5 personas. Indicar la parte de tortilla que recibe cada una de ellas, expresando el resultado en las diferentes formas que se piden*

| Forma gráfica | Formas habladas | Formas simbólicas |
| --- | --- | --- |
|  | 1. ________<br>2. ________<br>3. ________ | 1. ________<br>2. ________<br>3. ________ |

- Los estudiantes admiten que no utilizan representaciones verbales, tan solo describen el proceso; posiblemente se debe a que los estudiantes, como consecuencia de la práctica escolar, no están habituados a representaciones orales, a diferencia de las gráficas y simbólicas
- Es muy escaso el número de estudiantes que introdujeron el procedimiento del reparto por fases, posiblemente por sus experiencias previas con fracciones, ya que siempre aparecen fraccionamientos de la unidad en un número igual de partes.
- Los estudiantes, en general, no hacen referencia a la unidad de medida con la que están trabajando, a pesar de que en la presentación del modelo se señaló que la igualdad en el reparto venía indicada por la igualdad de la cantidad de magnitud recibida.
- Los errores detectados en las representaciones simbólicas tienen un origen importante en la no explicitación de la unidad de medida que se utiliza, así como a las relaciones de esta unidad con las partes en que se fracciona.

***Ficha 3***

Esta ficha se propone inmediatamente después de haber discutido los resultados de la ficha 2, por lo que los estudiantes deben conocer la técnica de reparto por fases, así como diferentes formas de expresar el resultado en forma verbal y simbólica. Por tanto, esta ficha sirve para consolidar la mencionada técnica de reparto y las formas de comunicar los resultados obtenidos en el reparto.

*Hacer los repartos que se indican de TRES formas diferentes y representar el proceso de formas gráfica, hablada y simbólica*
*i) 2 tortillas entre 7 personas ;; i) 3 bizcochos entre 5 personas*
*iii) 4 : 9 ;; iv) 24 : 5*

- La mayor parte de los estudiantes muestran habilidad en la técnica del reparto en aquellos repartos que se completan en dos fases; sin embargo, se muestran más inseguros cuando el número de fases es superior a tres, y demandan al profesor que certifique la bondad de los resultados que obtienen.
- Algunos estudiantes, aproximadamente la cuarta parte, mantienen el reparto en una sola fase, a pesar de haberse advertido que el procedimiento de reparto debe hacerse en varias fases. Posiblemente hubiese resultado más clarificador para dichos estudiantes la consigna de realizar los repartos de forma que la unidad no se fraccionase en tantas partes como el número de individuos participantes.

- La totalidad de los estudiantes necesitan de las representaciones gráficas para obtener el resultado. Todavía no tiene la experiencia necesaria para abordar el reparto desde las expresiones simbólicas.

### *Ficha 4*

Esta ficha se propone a los estudiantes después de haber celebrado dos sesiones de debate colectivo en torno a la utilización correcta de la simbología que utilizamos para representar el resultado de un reparto.

*Actividad 1: Utilizando el procedimiento de "la mayor parte" hacer los repartos que se indican y representar el proceso de forma gráfica, hablada y simbólica*

*i) 5 tortillas entre 7 personas ;; ii) 23 bizcochos entre 5 personas*

*iii) 7 : 11 ;; iv) 43 : 17*

*Actividad 2: Ahmés fue un escriba del antiguo Egipto al que se atribuye la autoría de uno de los más valiosos documentos matemáticos que han llegado hasta nuestros días, el conocido como Papiro de Rind, que está datado en el año 1650 A.C. ... En el cuadro adjunto aparecen algunos resultados de Ahmés. Indica si siguen el procedimiento de "la mayor parte", y en caso de no ser así señala el resultado que debería figurar*

| Reparto | Escritura egipcia | Reparto | Escritura egipcia |
|---|---|---|---|
| 2 : 5 | $\overline{3}$ $\overline{15}$ | 2 : 7 | $\overline{4}$ $\overline{28}$ |
| 2 : 11 | $\overline{6}$ $\overline{66}$ | 2 : 23 | $\overline{12}$ $\overline{276}$ |
| ... | .... | .... | ..... |

- Los alumnos realizaron las tareas sin hacer preguntas al profesor. Pensamos que las tareas referidas a la práctica de técnicas están más cercanas a su experiencia de aprendizaje de las matemáticas, que las tareas referidas a la explicitación de significados.

- Un estudiante planteo la posibilidad de introducir ligeras modificaciones en la representación simbólica, cual era el uso indiferente de paréntesis o corchetes. Se le hizo saber que los símbolos que se utilizan en la representación de las acciones tienen asignado un significado preciso; en nuestro caso, la utilización de corchetes se reserva para indicar el tamaño de las partes con relación a la unidad. El alumno mostró su conformidad con la justificación ofrecida por el profesor.

### *Ficha 5*

Esta ficha se propone a los estudiantes después de haber estudiado las características sintácticas y semánticas de la representación polinómica unitaria, y después de haber señalado que el sistema de representación polinómico decimal surge al modificar el fraccionamiento de la unidad o de las partes de unidad; el fraccionamiento es siempre en 10 partes iguales

*Actividad 1: Escribir en el sistema de representación polinómica decimal:*
*a) 1/2 ;; b) 3/5 ;; c) 5/8 ;; d) 7/16 ;; e) 65/32*
*Comparar los resultados con los que se obtienen en la representación polinómica unitaria.*
*Actividad 2: Escribir en el sistema de representación polinómica decimal:*
*a) 1/3 b) 2/7 c) 9/13*
*Comparar los resultados con los que se obtienen en la representación polinómica unitaria.*

- Los alumnos interpretaron correctamente el significado que se introduce en la acción empleada en el modelo y que dio lugar al surgimiento de la representación polinómica unitaria. A través de un ejemplo, realizado por el profesor, los estudiantes no hicieron preguntas ni demandaron información complementaria sobre el resultado de la acción de fraccionar siempre en 10 partes iguales; asimismo admitieron la simbolización que se presentaba.
- En la realización de la actividad 1 hubo alumnos que preguntaron sobre la forma de resolver la situación problemática que les creaba al hacer el reparto (1:32) pues la división de la unidad en 10 partes no era suficiente para efectuar el reparto. Las sugerencias del profesor para que volviesen a fraccionar las partes fue suficiente para que los estudiantes realizasen la tarea.
- En la actividad 2 surgió, tal y como se pretendía, la pregunta sobre la forma de representar repartos que tenían infinitas fases, los repartos "que se vuelven a repetir", tal y como manifestaban los estudiantes. El profesor se limitó a señalar que la pretensión era la de incorporar decisiones para ampliar un sistema de representación que debía ser útil para todas las situaciones. Los alumnos recurrieron, en su mayor parte, al empleo de puntos suspensivos.

### *Ficha 6*

Esta ficha se propone a los estudiantes después de haber estudiado las características sintácticas y semánticas de la representación polinómica decimal.

*Actividad 1: Encuentra las condiciones iniciales de los repartos que dan lugar a las representaciones polinómicas siguientes*

*a)* $5\left[\frac{1}{10}\right] + 3\left[\frac{1}{10^3}\right]$ *b)* $7\left[\frac{1}{10}\right] + 7\left[\frac{1}{10^2}\right] + \ldots$

*c)* $2 + 5\left[\frac{1}{10}\right] + 7\left[\frac{1}{10^2}\right] + 5\left[\frac{1}{10^3}\right] + 7\left[\frac{1}{10^4}\right] \ldots$

*Actividad 2 Utilizando las representaciones polinómicas decimales, ¿son equivalentes las fracciones 3/11 y 12/44?, ¿por qué?*
*Escribe las condiciones que han de cumplir dos fracciones positivas para que sean equivalentes, utilizando la representación polinómica decimal*
*Actividad 3: Utilizando las representaciones polinómicas decimales,*
*a) Escribir 2 fracciones mayores que 9/20.*
*b) Escribir 2 fracciones menores que 5/11*
*c) Escribir 2 fracciones que cumplan la doble condición de ser mayores que 1/2 y menores que 3/4.*
*d) Escribir 2 fracciones que cumplan la doble condición de ser mayores que 4/7 y menores que 9/11.*

- En la primera actividad, en la que aparecía una expresión polinómica decimal finita, los estudiantes percibieron que en la segunda fase del reparto cada uno de los participantes no recibía cantidad alguna de magnitud, por lo que no realizaban esta fase. El profesor hubo de advertir que aunque no se repartía cantidad alguna de magnitud, sí que había que tener en cuenta esta fase pues ello afectaba al tamaño de las partes resultantes. En la exposición del profesor acerca de la reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto conocida su representación polinómica decimal infinita y con partes de unidad que no se repiten, suscitó diversas intervenciones de los estudiantes para que aclarasen la forma de realizar diferentes operaciones. La mayor parte de las intervenciones venían producidas por el empleo de notaciones literales, mostrando algunos alumnos dificultades que desaparecían al utilizar expresiones numéricas; esta situación hizo surgir dudas en el profesor acerca de la comprensión de las notaciones algebraicas entre estos estudiantes.
- En la segunda actividad los estudiantes encontraron la dificultad de que la representación polinómica decimal era infinita. Inicialmente trataron de realizar el trabajo como si se tratase de una representación finita y de la que contemplaban la posibilidad de extender el resultado mediante una generalización del proceso. El profesor tuvo que atender a las continuas preguntas de los estudiantes en el sentido de que los resultados que perseguían no eran fáciles de obtener ni de expresar. Las intervenciones del profesor giraron en torno a la reflexión sobre las causas que provocan la aparición de representaciones infinitas y al significado de los repartos equivalentes. Después de conducir estas reflexiones los estudiantes finalizaron la tarea sin realizar más preguntas.
- Las dificultades que encontraban los estudiantes ante la tercera actividad venían provocadas por el hecho de que la representación polinómica, que era infinita, contuviese un elemento que no se repetía. Bastaron las intervenciones del profesor en el sentido de que la tarea la subdividiesen en dos partes, para que los estudiantes realizasen el trabajo sin demandar informaciones suplementarias.
- Las actividades propuestas son de gran utilidad para hacer una revisión de los conceptos subyacentes en la simbolización de un reparto con las condiciones impuestas. Además, estas tareas exigen que los estudiantes utilicen de forma reflexiva la técnica de reparto atendiendo especialmente al tamaño de las partes, a las partes que se entregan, a las partes sobrantes y a la finalización del reparto.
- La elección de las actividades también se muestra eficaz por cuanto recogen toda la casuística que puede presentarse; de este modo, los estudiantes advierten las distintas formas de actuación que son necesarias de acuerdo con las características particulares de cada representación polinómica decimal. Además, toman conciencia de las diferencias existentes entre las formas de trabajo con los dos sistemas de representación propuestos.
- En la actividad 2 de la ficha 6 algunos alumnos tenían dificultades en la interpretación de la tarea de generalizar el resultado que habían logrado en

casos particulares. Las observaciones del profesor fueron suficientes para finalizar la tarea

- Resultó sorprendente para el profesor que algunos estudiantes preguntasen si habían realizado bien la actividad 3 de la ficha 6, en la que se exigía encontrar expresiones polinómicas mayores, menores o intercaladas entre otras dadas. Las intervenciones del profesor fueron en el sentido de que utilizasen el modelo y que, a través del mismo, pudiesen razonar sobre la bondad de sus resultados.
- La aparición de dificultades en la interpretación de las expresiones literales se hará explícita para aquellos alumnos que las tengan, y se les sugerirá que realicen más ejercicios como los propuestos y que recurran a las tutorías para que el profesor pueda observar el grado de superación de sus dificultades. Consideramos que los problemas particulares merecen ser considerados como tales y, en consecuencia, actuar sobre los alumnos afectados y no sobre la totalidad de la clase.
- Conjuntamente con el Profesor Rafael Escolano se decide que los alumnos no realicen la actividad 4, puesto que el tema de la densidad respecto del orden de los números racionales ya ha sido tratado anteriormente y, de este modo, se ganaría tiempo para las actividades previstas antes de la fecha del examen.

### *V.4.1.2. Observaciones sobre las Cuestiones de Debate*

Se celebraron dos sesiones de debate con una estructura similar: analizar las respuestas de unos escolares ante una tarea propuesta por el profesor. El desarrollo completo de los debates se recoge en el Anexo IV.2, donde figuran los debates en pequeño grupo y los debates posteriores en gran grupo. Seguidamente se recogen los aspectos más reseñables de las 5 cuestiones que se discutieron, y que se organizan de acuerdo con las dos sesiones de clase en que se celebraron dichos debates:

**Sesión primera**

Se celebra al finalizar los estudiantes la ficha 3, que corresponde a la introducción del sistema de representación polinómico unitario. Las propuestas que se discuten son resultados erróneos producidos por los propios estudiantes, que se enmascaran como respuestas de escolares; las 4 cuestiones que se debaten tienen la misma estructura: una tarea propuesta por un profesor, la respuesta que da el escolar y los puntos que centran el debate:

1.- Determinar si la respuesta es correcta o errónea.
2.- Analizar la sintaxis empleada.
3.- Estudiar la verdad o falsedad de las relaciones semánticas utilizadas.
4.- En caso de desacuerdo con el trabajo del alumno X, formular la respuesta que debería haber dado.

Seguidamente hacemos un recorrido por cada una de estas cuestiones; para cada una de ellas se presenta su enunciado y, a continuación, los aspectos más destacables del debate en cuanto a la comprensión del contenido

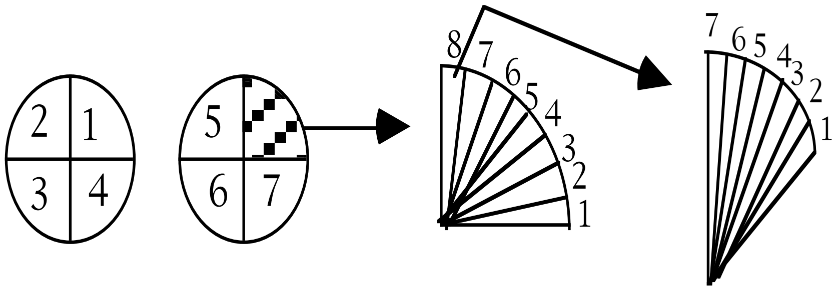
***Primera cuestión de debate***

Tarea propuesta al escolar

Hacer una representación gráfica y una representación simbólica para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas. El reparto ha de hacerse por fases.

Respuesta del alumno X

a) Representación gráfica




b) Representación simbólica

$$2:7 = \frac{1}{4}\ [1] + (1:8)\left[\frac{1}{4}\right] + (1:7)\left[\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{56}$$

Resumimos las ideas que aparecen de acuerdo con los puntos sobre los que se organizó dicho debate:

• Sobre la revisión de la tarea.

En 5 de los 7 pequeños grupos de debate que se constituyeron, los estudiantes revisan la respuesta del escolar haciendo una lectura crítica de lo que ha escrito dicho escolar. Sin embargo, hay dos grupos que utilizan procedimientos de comprobación diferentes:

* Un procedimiento utilizado es el de realizar el reparto de manera diferente y comparar las soluciones

*Yo esto lo repartiría en 4 y después lo que sobra lo repartiría entre 7. !Ah, claro!, si nos sale esto igual que lo otro estará bien. Porque aquí ha trabajado más de la cuenta, pero si sale lo mismo estará bien.*

* Otro procedimiento consiste en calcular el total de tortilla repartida y comparar con la cantidad que se propone

*No es correcto, ¡eh!. No, porque esto, esto es lo que le tocaría a una persona, si lo multiplicamos por 7 entonces nos saldría esto, que al dividirlo nos sale 2 coma seten...*

• Sobre la revisión de la sintaxis utilizada.

Los estudiantes no parecen conceder la importancia que se merece al control de las exigencias sintácticas del sistema de representación, posiblemente porque en su experiencia matemática anterior no se destacó esta importancia; sin embargo, debajo del uso inadecuado de la sintaxis se encierran conocimientos personales erróneos, como observamos en el debate:

* En el debate sobre la adecuación de la escritura 1:8, frente a 1/8, para indicar que la unidad se divide en 8 partes iguales, se pone de manifiesto que las ideas de fraccionar y repartir se confunden

*Si ha dividido el cuarto en 8 partes estará bien. ... Es que es lo mismo.*

* Al analizar la expresión $2:7 = \frac{1}{4}\ [1] + \mathbf{(1:8)}\left[\frac{1}{4}\right] + (1:7)\left[\frac{1}{8}\right]$ surgen interpretaciones erróneas del denominador: la lectura como partes en que

se fracciona la unidad prevalece sobre la idea de que indica el número de individuos participantes

*A. Aunque haga 8 trozos, como aquí, lo reparte entre 7 personas. Aquí tendría que poner un 7*

*B. Pero al principio también ha dividido en 8 partes, cuando ha sacado los 8 cuartos, y ha puesto un 7. Aquí también ha dividido en 8 trozos y ha puesto un 7; por esa misma regla de tres también tendría que haber puesto 8.*

• Sobre la revisión de las relaciones semánticas.

La interpretación, por parte de los futuros maestros, de las relaciones semánticas que subyacen en la respuesta del escolar han evidenciado dos ideas erróneas sobre el sistema de representación polinómico unitario:

* No considerar que en el reparto se realiza un proceso de medida y que, por tanto, hay que indicar el tamaño de las partes respecto a la unidad de medida. Posiblemente sea la idea del fraccionamiento de la unidad presente en la relación parte-todo, que no exige referencias a la medida de las partes, la que obstaculice la comprensión de la idea de reparto

*Pero a ti lo que te ha sobrado de 1/4 es 1/8. Entonces 1/8 lo divides entre 7 trozos* y te sale 1/7.

* La asociación entre las acciones que se realizan en el modelo y el sistema de representación que se asocia no es una idea plenamente asumida por los estudiantes; así se pone de manifiesto cuando se admiten procedimientos de reparto que no exijan de la técnica de la mayor parte:

*Se podía haber evitado una fase, pero él ha querido hacer dos, haciendo que en la primera fase se repartan 8 trozos; como son 7 personas, el otro, el trozo que queda se reparte otra vez entre siete. Pero ya podía haber hecho directamente el trozo que quedaba al principio entre siete y así hubiese acabado el reparto; pero así también vemos que es correcto, en más fases pero bueno.*

***Segunda cuestión de debate***

Tarea propuesta al escolar

Utilizar representaciones simbólicas para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 4 tortillas entre 9 personas. El reparto ha de hacerse por fases. Justificar el resultado.

Respuesta del alumno X

*1) Tenemos en cuenta que lo que vamos a dividir son 4 tortillas entre 9 personas, por tanto, cogemos como unidad la tortilla y repartimos entre 9 personas*

*2) Cada una coge 1/4 de tortilla y después, de lo que queda, se les da a cada una de las personas un octavo de tortilla y un dieciseisavo de tortilla.*

*3)* $4 : 9 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

El hecho de que la presentación de la tarea no incluyese representaciones gráficas del proceso, llevó a los estudiantes para maestro a revisar la tarea en el terreno puramente simbólico. Además, la celebración del debate de la cuestión anterior facilitó la tarea de estos estudiantes y, en consecuencia, el debate aportó menos argumentos.

• Sobre la revisión de la tarea.

Todos los grupos determinan con rapidez que falta 1/144 de unidad.

• Sobre la revisión de la sintaxis utilizada.

Surgen discrepancias entre los estudiantes sobre el modo de simbolizar la referencia a la unidad. El alumno nº 41 escribe en la pizarra 1/144 de tortilla; después lo tacha y pone [1] detrás de la fracción. A requerimiento de sus compañeros se limita a decir: *Da lo mismo poner una cosa que otra*

• Sobre la revisión de las relaciones semánticas.

En los debates sostenidos en pequeño grupo se vuelven a poner de manifiesto dificultades en el trabajo con partes de partes de la unidad. Puede deberse a que en su etapa escolar los alumnos trabajasen la relación parte-todo solamente para partes de la unidad, pero que no tuviesen que expresar la fracción que representa una parte de alguna parte de la unidad.

***Tercera cuestión de debate***

Tarea propuesta al escolar

Utilizar representaciones simbólicas para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas. El reparto ha de hacerse por fases.

Respuesta del alumno X

*Para repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas dividimos cada tortilla en 5 trozos iguales*

$$2 : 7 = \frac{1}{5}\ [1] + (3 : 7)\left[\frac{3}{5}\right] = \frac{1}{5}\ [1] + \frac{3}{7}\left[\frac{3}{5}\right] = \frac{1}{5}\ [1] + \frac{9}{35}\ [1] = \frac{1}{5} + \frac{9}{35} \text{ de tortilla}$$

Aun cuando la tarea del escolar no ofrece representaciones gráficas, el debate fue más enriquecedor que en la cuestión de debate 2, por cuanto aquí aparece plenamente desarrollado todo el proceso de simbolización del reparto, lo que obliga a los futuros maestros a interpretar las diferentes acciones realizadas, así como el análisis de la pertinencia de los símbolos empleados.

• Sobre la revisión de la tarea.

En el seguimiento de las expresiones que aparecen en la respuesta del escolar aparecen discusiones entre los futuros maestros sobre la corrección de la medida de las partes de partes de unidad. Estas discusiones surgen, presumiblemente, de interpretar la fracción como relación parte-todo y, por tanto, de no tener en cuenta la existencia de una unidad de medida.

• Sobre la revisión de la sintaxis utilizada.

Después de hacer la primera fase del reparto restan 3/5 de tortilla para repartir. Su simbolización se debate entre dos opciones: hay que repartir 3 trozos de tamaño 1/5 de unidad entre 7 individuos; o hay que repartir 1 trozo de tamaño 3/5 entre 7 individuos; es decir, si la expresión correcta es $(3 : 7)\left[\frac{1}{5}\right]$ o si, por el contrario, debe ser $(1 : 7)\left[\frac{3}{5}\right]$

* La idea que sustenta la correcta utilización de la primera expresión simbólica, viene avalada por la adecuada interpretación de los signos utilizados:

> *Es que 1/5 no es lo que repartes, es la unidad que coges. Cada uno de los trozos es 1/5 y tienes 3, pero no repartes sólo 1*

* Debajo de la segunda de las simbolizaciones aparece un conocimiento personal erróneo sobre el significado de los símbolos utilizados, entendiendo que el corchete indica la cantidad a repartir, no el tamaño de

cada una de las partes:

> *Al decir (3:7) de 1/5 si lo haces gráficamente estas repartiendo solamente 1/5, sólo 1/5. Y entonces te quedan 2/5 libres, que no los repartes*

• Sobre la revisión de las relaciones semánticas.

A pesar de que los estudiantes llevan varias sesiones de clase utilizando el signo :, en el debate apareció una disyuntiva sobre si la simbolización a:b indica un proceso o un resultado. Es decir, si al utilizar el signo : se indica que hay que hacer un reparto, o si tal simbolización hace referencia a que el reparto ya se ha efectuado y el resultado del mismo es la cantidad a:b.

Uno de los alumnos, el número 40, mantuvo frente a sus compañeros una distinción entre proceso y resultado, indicando, además, los símbolos adecuados para hacer tal distinción:

> *Hay que poner 3/7 y no (3:7), porque ahí haces el reparto de 3 tortillas entre 7 personas. Bueno,(se refiere a (3:7)) eso indica que haces como 3 partes, pero no lo que se lleva cada uno. Eso no indica el resultado de un reparto, lo que se lleva cada uno.*

***Cuarta cuestión de debate***

<u>Tarea propuesta al escolar</u>

Utilizar las representaciones simbólicas para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas. El reparto ha de hacerse por fases. Describir el proceso.

<u>Respuesta del alumno X</u>

*Dividimos las tortillas en 6 partes*

*Cada uno recibe* $\frac{1}{6}$ [1] *y sobran* $\frac{5}{6}$ [1]

$$\frac{5}{6}[1] : 7 = \frac{5}{42}\left[\frac{5}{6}\right]$$

$$\frac{1}{6}[1] + \frac{5}{42}\left[\frac{5}{6}\right] = \frac{7+5}{42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

Esta actividad contiene una variedad de matices más amplia que las otras 3 propuestas anteriormente, pues a las interpretaciones incorrectas de la medida de las partes de partes de la unidad, se unen manipulaciones operatorias inadecuadas.

• Sobre la revisión de la tarea.

Vuelven a aparecer argumentos ya esgrimidos con anterioridad sobre la medida de partes de partes de la unidad; aparecen ideas sobre que tal medida es una parte alícuota de la unidad inicial, aunque el proceso muestre que son partes resultantes de fraccionar una parte de la unidad inicial. Pensamos que la fuerte experiencia con la relación parte-todo, en la que no se considera unidad alguna, influye en la reiteración de estas dificultades.

> *Yo es que, a ver, he llegado a que consigue 1/6 (es decir cada persona consigue 1/6) y luego con lo que sobra que son 5 partes; nos quedan 35 dividido para 7*

• Sobre la revisión de la sintaxis utilizada.

Aun cuando el profesor manifiesta que la simbolización 5/6:7 es inadecuada y cuestiona si es posible sustituirla por (5:6):7, los alumnos no manifestaron su interés por la interrogante, hasta tal punto que un solo alumno entendió que allí había un reparto de un reparto y que era correcto. La mayoría de los estudiantes estaban preocupados por analizar la simbolización tal y como aparece en la respuesta del escolar.

• Sobre la revisión de las relaciones semánticas.

La respuesta del escolar contiene la suma de cantidades de magnitud expresadas con diferentes unidades. Esta idea es rechazada de inmediato por los estudiantes, con argumentos que rememoran, posiblemente, alguna situación escolar similar: *No se pueden sumar chorizos y longanizas*

**Sesión segunda**

Se celebra al finalizar los estudiantes la Cuestión de Investigación número 2, que contempla interpretaciones de expresiones polinómicas asociadas a repartos en los que alguno, o ambos, de los datos es 0.

El equipo investigador decide introducir esta sesión de debate en pequeño grupo debido a que los estudiantes para maestro tiene especiales dificultades con esta tarea, a pesar de que en la Ficha 1 ya se habían trabajado y debatido situaciones similares. Estas dificultades provienen de que el trabajo con el 0 no puede hacerse mediante la observación de las acciones realizadas sobre el modelo; en consecuencia, el estudiante se ve en la necesidad de razonar sobre situaciones irreales, o situaciones al límite de la realidad, por cuanto no trabaja con cantidades de magnitud, no puede manipular objetos, no puede tener una representación física de la cantidad de magnitud 0 por cuanto este símbolo indica ausencia de magnitud.

Las propuestas que se debaten, siguen el esquema de las cuestiones de debate de la primera sesión: tareas propuestas a unos escolares y respuestas que dan estos escolares. Los puntos que centran el debate son:

1.- Determinar si las respuestas son correctas o erróneas.
2.- La persona que resuelve las dos tareas utiliza el símbolo 0 en diferentes momentos. Analizar los significados del símbolo 0 que ha utilizado en las 7 ocasiones señaladas con números en negrita, y debatir sobre la pertinencia de su uso.

***Quinta cuestión de debate***

Tarea 1.1 propuesta al escolar

¿Tiene sentido la expresión 0 : 5?. Justifica tu respuesta.

Respuesta del alumno X

*No tiene sentido este reparto ya que tenemos un número nulo de tortillas para 5 personas. No existe nada para repartir. Hay que repartir 0 tortillas entre 5 personas*

$$\underset{1}{0} : 5 = \underset{2}{0} :5\ [\underset{3}{0}] = \underset{4}{0}$$

Tarea 1.2 propuesta al escolar

¿Tiene sentido la expresión 7 : 0?. Justifica tu respuesta.

Respuesta del alumno X

*Carece de sentido este reparto porque aunque existan 7 tortillas no tenemos ninguna persona a quien repartírselas.*

$$7 : \underset{5}{0} = 7 :\underset{6}{0}\ [1] = \underset{7}{0}$$

En la respuesta del escolar a la tarea 1.1. hay una interpretación correcta sobre la inexistencia de cantidad de magnitud para repartir, y por tanto, que el resultado del reparto, la cantidad de magnitud que reciben los asistentes, debe ser 0. Sin embargo, en la simbolización de la respuesta el escolar introduce un error, escribe un 0 (el que está señalado con 3), para indicar que al no haber cantidad de magnitud la unidad de medida es 0. En la respuesta del escolar a la tarea 1.2 aparece la idea errónea de admitir que la imposibilidad de realizar las acciones se tiene que simbolizar por 0

Describimos las ideas que se suscitaron en los diferentes debates en pequeño grupo que nos parecen más interesantes:

• Sobre la corrección de la respuesta.

Se considera que el reparto no tiene sentido en el supuesto de que la magnitud a repartir sea nula. La acción del reparto es irreal, no se puede llevar a cabo en el mundo de los objetos físico:

*Que no, que no. Que sin haber algo no se cómo puede haber reparto. No lo veo lógico.*

*Yo pienso que para que haya un reparto debe haber... algo, algo que repartir y algo a quien repartir. Es repartir algo entre alguien, algo entre alguien, mínimo uno entre uno.*

La imposibilidad de verificar la veracidad o falsedad de las afirmaciones a través de la manipulación de objetos, conduce a realizar tal verificación a través de resultados operatorios conocidos;

*A. Según esto matemáticamente tiene sentido. Ha representado las unidades de tortilla, aquí el tamaño de las unidades, que es cero, el tamaño de las cero unidades es cero también, y el resultado del reparto que es cero.*

*B. Estamos de acuerdo en que en un sentido práctico esto no se puede aplicar, o sea no, pero matemáticamente sí, el resultado daría cero.*

Es posible que las argumentaciones anteriores se sustenten en una prácticas matemáticas escolares en las que prima el empleo de técnicas de cálculo. Y esto ha influido en admitir que la posibilidad de realizar las operaciones sea determinante para decidir sobre la existencia del significado de dicha operación.

*Porque si no tiene sentido no puedes hacer una operación. Si a ti te dan una multiplicación, que no puedes hacer porque no existe, no la puedes hacer; pero si la puedes hacer es que tendrá sentido, digo yo*

Las nuevas tecnologías pueden sustentar argumentos sobre la bondad de los resultados, aunque no aporte argumentos sobre los que sustentar tales resultados:

*A. Pensamos que no está bien matemáticamente porque en la calculadora sale error; habeis dicho, ¿no?.*

*B. Aquí no tendría que poner un cero de solución, porque da error.*

Nos encontramos, por tanto, que el debate no ha sido eficaz para erradicar ideas erróneas sobre el 0. Ello es debido, por una parte, a la conceptualización del 0 como ausencia de magnitud y no como medida de una cantidad de magnitud (el hecho de que un examen en blanco sea evaluado como 0, se admite como una norma, pero no se admite como resultado de una medida); y, de otra parte, a la imposibilidad de hacer manipulaciones sobre objetos físicos que faciliten la construcción personal de conceptos correctos. En consecuencia, el debate no ha servido para modificar los conocimientos personales desde los que se partía, porque

- si los conocimientos personales de los estudiantes son erróneos, no se ha podido erradicarlos mediante la utilización de objetos físicos, ni por medio de argumentaciones abstractas.
- si los conocimientos personales son correctos y están sustentados por hechos memorizados, no hay argumentos que ofrecer a los compañeros, porque no existen:

  *No, si a mi de pequeña si que me acuerdo que esta expresión me han enseñado que está bien, pero yo es que no lo entiendo*

• Sobre el uso de los ceros.

La no aceptación del número 0 como medida de cantidad de magnitud lleva a la idea de que la unidad de medida es de tamaño 0, aunque ello no tenga sentido si se quiere medir:

*A. En teoría si te propones hacer el reparto las partes son cero, el tamaño de las partes es cero, pero puede tener sentido poner el cero aquí como las partes o no puede tener sentido porque si no tienes partes no puedes tener tamaño de partes a repartir.*

*B. Si no tienes unidades no tienes tamaño; por lo tanto, el tamaño tiene que ser 0.*

La idea de que 0 indica ausencia de cantidad se transporta a la simbolización de la ausencia de acciones: la imposibilidad de efectuar manipulaciones de objetos, la imposibilidad de llevar a cabo la acción, también se simboliza con 0:

*A. Igual a cero porque no hay individuos*

*B. (Al dar significado a los ceros de la expresión*

$$7 : \underset{\mathbf{5}}{0} = 7 : \underset{\mathbf{6}}{0}\,[1] = \underset{\mathbf{7}}{0}$$

*Y éste igual: éste sería que no hay individuos(cero número 5), éste lo mismo (cero número 6),... Y éste (cero número 7), que no hay reparto.*

### *V.4.1.3. Observaciones sobre las Cuestiones Específicas de Investigación*

En este apartado nos limitamos a señalar aquellos aspectos de la organización y de la comprensión del contenido que aparecieron en el momento de llevar la propuesta didáctica al aula; los conceptos y procedimientos que se pusieron en evidencia de forma verbal.

Sobre las producciones escritas de los estudiantes para maestro se hará un estudio en profundidad de la comprensión de los contenidos, a partir de las Unidades de Análisis ya elaboradas; dicho estudio se localiza en el capítulo VI.

A continuación se recogen los mencionados aspectos en orden secuencial, en el orden en que se propusieron las Cuestiones Específicas de Investigación a los estudiantes y cuya descripción más exhaustiva se encuentra en el Diario de Clase, que está ubicado en el Anexo II:

***Cuestión de Investigación número 1***

Tarea 1: *¿Puede haber repartos equivalentes?. Justifica tu respuesta. Escribe, de forma simbólica, dos repartos equivalentes. Generaliza la escritura de repartos equivalentes*
Tarea 2:*¿Hay repartos que sean mayores que otros? Justifica tu respuesta. Escribe, de forma simbólica, que un reparto es mayor que otro. Generaliza el resultado. Escribe 5 repartos entre (2:3) y (4:5)*
Tarea 3:*¿Cómo se interpreta, en el modelo en que venimos trabajando, la expresión (a : b )+ (c : d)? ¿Cómo se obtiene el resultado de esa suma,*
Tarea 4: *a) Justifica, en el modelo, la expresión n x (c : d), siendo n un número natural. Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : n, siendo n un número natural. Calcula el resultado.*
Tarea 5:*a) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) x (c : d). Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : (c : d). Calcula el resultado.*

• En la tarea 1 los estudiantes preguntaron, de forma generalizada, sobre el significado de la expresión repartos equivalentes. Una vez que el profesor respondió a la pregunta, los estudiantes encontraron repartos equivalentes, aunque la generalización del resultado ofrecía dificultades para aquellos estudiantes que tienen lagunas en la utilización de expresiones algebraicas.

La simbología no es uniformemente aceptada por los estudiantes, por cuanto muchos de ellos interpretan las expresiones a:b como divisiones, mientras que para otros muchos esta simbología queda anulada por la notación fraccionaria habitual.

Es un elemento a revisar, en el sentido de sustituir el signo : por otro que no sea habitual en las tareas escolares, como por ejemplo #, o bien recurrir al empleo de pares de números naturales (a,b); en cuanto al uso de la notación fraccionaria cabe la posibilidad de plantear a los estudiantes la inoportunidad de utilización de otros símbolos distintos de los que se presenten en el aula.

• En la tarea 2 se encuentran con facilidad los significados de repartos mayores o menores. Pero se reiteran las dificultades con la manipulación de expresiones algebraicas ya detectadas en las relaciones de orden.

• Sobre las operaciones los estudiantes no formularon preguntas y realizaron las tareas con relativa rapidez. En la revisión de los trabajos escritos, que se comenta con amplitud en el capítulo VI, se pusieron de manifiesto dos aspectos del conocimiento que no se habían mostrado públicamente:

* Los significados de las operaciones no son explicitados, simplemente se hace una lectura del correspondiente signo: hay que sumar, indica un producto de repartos, es una resta de repartos, ...

* Los resultados de las operaciones son hechos memorizados que no hay que justificar, basta con aplicar el algoritmo conocido.

***Cuestión de Investigación número 2***

Tarea 1: *¿Tienen sentido expresiones como 3 : 3; 0 : 5; 7 : 0; 0 : 0?. Justifica tu respuesta utilizando la representación polinómica unitaria y enuncia resultados generales poniendo las condiciones que deben cumplir a y b para que la expresión a : b se interprete como reparto igualitario.*
Tarea 2: *¿Hay repartos que se escriben con un número infinito de sumandos?. Justifica tu respuesta. ¿Hay repartos que admiten dos representaciones polinómicas unitarias distintas?. Justifica tu respuesta.*

*En la igualdad* $a : b = \frac{1}{c} + \frac{1}{cd}$ *¿por qué d tiene que ser mayor o igual que c?*

Tarea 3: *Justifica las igualdades siguientes a)* $(1 : b)\left[\frac{1}{n}\right] = 1\left[\frac{1}{bn}\right]$ ;;

*b)* $\left\{1\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{np}\right]$ *;; c)* $(a : b)\left[\frac{1}{n}\right] = a : bn$

Tarea 4: *Encuentra las condiciones iniciales de los repartos que dan lugar a las representaciones polinómicas siguientes: a)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ;; *b)* $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$

*c)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

- Sobre la tarea 1 se realizó una sesión de debate, la número 5, debido a que los estudiantes mostraban las mismas ideas erróneas detectadas en la Ficha 1, a pesar de que se habían comentado en la sesión siguiente los errores que aparecían en las respuestas de la mencionada ficha 1.

- En la tarea 2 los estudiantes preguntaron si los repartos se realizaban con el criterio de la mayor parte. A pesar de que se había señalado tal circunstancia al presentar las tareas, los estudiantes formularon esta pregunta por cuanto manifestaban que si no se aplica tal criterio sí que pueden hacerse los repartos en infinitas fases; una situación similar se produce al representar un mismo reparto de formas diferentes.

  Para justificar que en $a : b = \frac{1}{c} + \frac{1}{cd}$, d es mayor o igual que c, los estudiantes simplemente comprobaron el resultado y señalaron que se cumplía siempre, pero no aportaron argumentos, pues no tienen consciencia de que el proceso de reparto utilizado se caracteriza porque en cada fase el número de partes sobrantes es menor o igual que en que había en la fase anterior.

- La tarea 3 resultó de mayor dificultad de la prevista por cuanto en su resolución debe tenerse en cuenta la doble desigualdad que caracteriza el procedimiento de la mayor parte. Además, volvieron a reproducirse las dificultades del manejo de expresiones algebraicas, por lo que los estudiantes preguntaron si era posible hacer justificaciones con casos particulares, pues les resultaba dificultoso dar argumentos generales.

  En la exposición del profesor hubo estudiantes que pusieron inconvenientes a aceptar que las expresiones [1/b] y 1/b fuesen iguales. En sus argumentaciones indicaban que el corchete indica unidad de medida y que, en consecuencia, no hace referencia a cantidad de magnitud. Se utilizaron frases del tipo "*es que eso indica como centímetros, pero si no va acompañado de un número no se puede hablar de una longitud*". Consideramos que en estas posiciones de los alumnos subyace una deficiente interpretación del significado de la medida de magnitudes, así como del proceso de su realización y el papel que juega la unidad de medida y su relación con otras unidades de medida de la misma magnitud.

También se demandaron justificaciones complementarias para aceptar el proceso de reconstrucción de la unidad. La dificultad era aceptar la igualdad de las cantidades de tortilla (1/b de 1/n) y (1/bn). Como ya habíamos detectado con anterioridad algunos estudiantes tienen dificultades en la reconstrucción de la unidad en situaciones particulares, por lo que no era de extrañar que estas dificultades volviesen a aparecer en el supuesto de generalizar tal proceso de reconstrucción.

- La tarea 4 se presentó a los estudiantes con la exigencia de que reconstruyesen el proceso de reparto en orden inverso a como se había trabajado para obtener la representación polinómica unitaria. En ese sentido se indicó que no se admitirían como respuestas la comprobación mediante cálculos realizados con fracciones. El interés de esta tarea radica en que al llevarla a cabo hay que controlar todos los aspectos que caracterizan el procedimiento de reparto: número de fases, tamaño de las partes entregadas en cada fase, partes que sobran en el reparto, repartos equivalentes, significado de cada símbolo, ....

  La tarea puso de manifiesto que todavía se encuentran dificultades en dotar de significado a los símbolos que se vienen utilizando. Ello provocó que algunos estudiantes no entendiesen las manipulaciones realizadas para que apareciesen expresiones de la forma 1/x + (a:b) [1/x], a pesar de que eran necesarias para la reconstrucción del reparto.

  Es destacable la forma de actuación del estudiante nº 6 que actuaba del siguiente modo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + (6{:}6)\left[\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{2} + (2{:}6)\left[\frac{1}{2}\right] = (6{:}6)\left[\frac{1}{2}\right] + (2{:}6)\left[\frac{1}{2}\right]$$
$$= (8{:}6)\left[\frac{1}{2}\right] = (4{:}6)\,[\,1\,] = 2{:}3$$

  Este estudiante recurre a la modificación de partes para realizar una suma de repartos. El profesor le respondió que su trabajo no era el que se pedía por cuanto no se tiene en cuenta el proceso de reparto, tal y como figuraba en la propuesta de la tarea. Además, el profesor consideró conveniente eliminar esta técnica por cuanto la posibilidad de que se modifiquen las partes producirá efectos no deseados en la representación polinómica decimal, como son los de que puedan aparecer partes que son de tamaños distintos de las potencias de 10.

***Cuestión de Investigación número 3***

Tarea 1: *Encontrar representaciones polinómicas unitarias* ***mayores y menores*** que $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$ *La respuesta debe estar debidamente justificada*

Tarea 2: *Encontrar las representaciones polinómicas unitarias* ***anterior*** *y* ***siguiente*** *a* $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$ *La respuesta debe estar debidamente justificada*

Tarea 3: *Si encuentras la suma de dos representaciones polinómicas unitarias* $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60}\right]$ *¿cómo se interpreta en el modelo? ¿Cuál será la representación polinómica unitaria que corresponda al resultado? Explica cómo lo has hecho.*

Tarea 4: *Escribe, en cada uno de los casos, la interpretación que corresponde a cada una de las operaciones en el modelo. a)* $3 \times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right]$ ;; *b)* $\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right] : 7$

*c)* $\frac{3}{4} \times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right]$

- Los estudiantes demandaron, de forma casi unánime, que se explicitara el enunciado de la tarea 1. Las preguntas se formulaban en el sentido de que si debían de reconstruir el reparto, encontrar un reparto mayor o menor y, posteriormente, escribir la representación polinómica unitaria de los repartos hallados. Los estudiantes no están habituados a trabajar con representaciones polinómicas unitarias como entidades numéricas pero, tras las oportunas aclaraciones del profesor, los estudiantes realizaron la tarea sin formular ninguna otra pregunta.

  Los alumnos reconocieron sus "despistes" en el momento de la escritura de representaciones polinómicas unitarias; tal despiste señalaron era producto de priorizar su atención en las relaciones de orden entre fracciones. Asimismo admitieron que los despistes conllevaban la transgresión del principio de la mayor parte y que, en consecuencia, las relaciones de orden establecidas se sustentaban en la simple comparación de fracciones.

- Algunos estudiantes mostraron su extrañeza ante la utilización de representaciones polinómicas unitarias que contuviesen un solo sumando; sus reparos desaparecieron al mostrarse repartos cuya representación fuese como la indicada.

  Algunos estudiantes requirieron explicaciones complementarias para admitir el principio fundamental del orden pues, desde la perspectiva de las fracciones, les resultaba poco evidente que una fracción siempre fuese mayor que la suma de todas las que le siguen en la representación polinómica unitaria. Al mostrarles la interpretación del criterio de la mayor parte se disiparon sus dudas.

- En la presentación de la tarea 3 el profesor puso de manifiesto que la interpretación que se solicitaba debía de formularse como una situación problemática cuya solución condujese a la operación representada en la tarea; es más, se hizo pública la advertencia que interpretaciones como "la suma de dos repartos" no era admisible.

- El procedimiento de la mayor parte se mostró como herramienta eficaz para establecer relaciones de orden y para estudiar la densidad respecto del orden.
- El resultado fundamental del orden no se demostró, tan solo se justificó en ejemplos concretos. Esta decisión se tomó como consecuencia de haber valorado como prioritaria su comprensión desde el modelo y porque la demostración encierra manipulaciones simbólicas entre desigualdades que presentan dificultades de comprensión para muchos alumnos.
- Los alumnos mantienen la creencia de que las relaciones de orden establecidas entre números naturales son extensibles a cualquier otro conjunto numérico. Después de que admitiesen representaciones polinómicas unitarias anteriores y posteriores a una dada (que fueron unánimemente admitidas por el alumnado), se mostró eficaz la utilización del principio fundamental de orden para que admitiesen su error, en el sentido de que entre dos representaciones existían infinitas y, consecuentemente, ello no permitía hablar de anterior y siguiente. La posterior referencia a los resultados de la prueba inicial sobre este aspecto, facilitó que los estudiantes admitiesen que el orden entre números naturales tenía peculiaridades que le diferenciaban del orden entre elementos de otros conjuntos numéricos. No obstante, el significado de la densidad respecto del orden es un aspecto al que dedicaremos un seguimiento especial en sesiones posteriores.

***Cuestión de Investigación número 4***

Tarea 1: *a) ¿Por qué hay infinitas fracciones equivalentes a* $\frac{2}{5}$ *y una sola representación polinómica unitaria? Justifica la respuesta*

Tarea 2: *A partir del modelo, si* $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *indican dos repartos igualitarios, responde* ***justificadamente*** *a las siguientes cuestiones a) ¿Qué significado tiene la expresión* $\frac{a+c}{b+d}$ ? *b) ¿Es cierta la desigualdad* $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *sabiendo que* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ?

Tarea 3: *A partir del modelo, si* $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *indican dos repartos igualitarios, responde* ***justificadamente*** *a las siguientes cuestiones a) ¿Qué significado tiene la expresión* $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ ? *b) ¿Es cierta la desigualdad* $\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$ *sabiendo que* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ?

Tarea 4: *A partir de las expresiones* $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *calcula los repartos* $\frac{a+c}{b+d}$ y $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$
*Da una explicación razonada de por qué ambos repartos no son iguales*

- Al aparecer la fracción con el significado de reparto igualitario algunos alumnos hicieron emerger sus creencias sobre el significado único de la fracción como relación parte-todo, en el sentido de que la fracción tenía el sentido de tomar unas partes de las que se ha dividido la unidad y, por tanto, que era impensable que otros individuos participantes en el reparto se pudiesen llevar partes iguales de la unidad.
  La introducción del significado de resultado de un reparto igualitario en la notación fraccionaria es posible que necesite para su aceptación un periodo

de tiempo largo, ya que no se supera el obstáculo de la relación parte-todo de forma inmediata.

- Las tareas 2, 3 y 4 presentaban características comunes en tanto en cuanto eran expresiones simbólicas cuya verdad o falsedad se podía certificar a partir de manipulaciones de objetos en el modelo propuesto. Sin embargo, los estudiantes muestran algunas reticencias a utilizar el modelo para responder a las tareas propuestas, prefieren recurrir a sus conocimientos sobre la manipulación de símbolos que analizar el significado de tales símbolos en el modelo. Esta disposición les dificulta la realización de las tareas propuestas, pues la manipulación de símbolos con expresiones literales, así como el empleo de desigualdades, no es el trabajo en el que muestran una mayor habilidad; posiblemente, sean sus experiencias personales sobre el trabajo matemático las que les impidan reflexionar sobre acciones realizadas en un modelo físico.

***Cuestión de Investigación número 5***

Tarea 1:*¿Tienen sentido expresiones como 3 : 3; 0 : 5; 7 : 0; 0 : 0?. Justifica tu respuesta utilizando la representación polinómica decimal y enuncia resultados generales poniendo las condiciones que deben cumplir a y b para que la expresión a : b se interprete como reparto igualitario.*

Tarea 2:*¿Por qué hay repartos que se escriben con un número infinito de sumandos? Justifica tu respuesta. ¿Que condiciones deben cumplir a y b para que, sin hacerlo, podamos determinar si la representación polinómica decimal del reparto a : b tendrá un número finito o infinito de sumandos?*

Tarea 3: *Justifica las igualdades siguientes*

*a)* $(1 : 10)\left[\frac{1}{10}\right] = 1\left[\frac{1}{10^2}\right] = \frac{1}{10^2}$

*b)* $\left\{1\left[\frac{1}{10}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{10p}\right]$ ;;

*c)* $(a : b)\left[\frac{1}{10}\right] = a : 10\,b$

- En dos ocasiones el profesor tuvo que atender a alumnos que señalaban que la expresión polinómica decimal del reparto 3:3 no tenía sentido, pues ese reparto daba 1 y no se entiende el que haya que dividir la unidad en 10 partes iguales.
- Las expresiones simbólicas en las que aparece el número 0 se resolvieron con errores similares a los detectados en otros trabajos; parece que dichos errores no son fáciles de erradicar y que los trabajos propuestos no son eficaces en dicha erradicación.
- En la tarea 2 se vuelven a poner de manifiesto las dificultades que entraña el uso de expresiones algebraicas. Aunque, en este caso, el enunciado de la tarea hizo preguntar a los estudiantes sobre si la respuesta estaba relacionada con la divisibilidad y, en consecuencia, sus dificultades algebraicas se transformaron en tareas de recordar qué aspectos de la divisibilidad deberían tener en cuenta.
- La tarea 3 ofreció las mismas dificultades que aparecieron en la Cuestión de Investigación nº 3, por lo que los estudiantes se limitaron a comprobar los resultados en casos particulares y afirmar que las igualdades propuestas eran

ciertas.

***Cuestión de Investigación número 6***

Tarea 1: *Si encuentras la suma de dos representaciones polinómicas decimales*

$$\left[3\left[\frac{1}{10}\right]+5\left[\frac{1}{10^2}\right]\right] + \left[3\left[\frac{1}{10}\right]+3\left[\frac{1}{10^2}\right]+...\right]$$

*¿cómo se interpreta en el modelo? ¿Cuál será la representación polinómica decimal que corresponda al resultado? Explica cómo lo has hecho.*

Tarea 2: *Escribe, en cada uno de los casos, la interpretación que corresponde a cada una de las operaciones en el modelo, y calcula el resultado*

*a)* $\left\{4\left[\frac{1}{10}\right]+7\left[\frac{1}{10^2}\right]\right\} \times 2$ ;; *b)* $\left\{6\left[\frac{1}{10}\right]+2\left[\frac{1}{10^3}\right]\right\} : 3$

- Al realizar la tarea 1 los estudiantes resolvían la primera parte proponiendo situaciones problemáticas en el modelo, tal y como se había trabajado al dotar de significado a las operaciones en el modelo.
- Un número considerable de estudiantes manifestó que la tarea de sumar representaciones polinómicas decimales no podía realizarse por cuanto para las representaciones polinómicas unitarias ya habíamos manifestado que el cálculo del resultado de las operaciones no era algoritmizable.
- En la tarea 2 la cuarta parte de los estudiantes escribían 2/3 como número de partes de un determinado tamaño. Ante las preguntas del profesor, los estudiantes manifestaban que lo escribían de este modo porque en la simbolización utilizada en la pregunta interpretaban que: indica una división; es decir, que no interpretan dicho signo con significado de reparto, a pesar del tiempo que se viene usando tal simbolización

***Cuestión de Investigación número 7***

Tarea 1: *i.- Explica,* ***de todas las formas posibles****, lo que entiendes en cada uno de los casos siguientes:* a) 12 ;; b) 6,23 ;; c) 0,99999..... ;; d) $9{,}81\overline{437}$

*ii.- En cada uno de los casos siguientes, escribe los símbolos con notación decimal, justificando la respuesta* a) $\frac{35}{5}$ ;; b) $\frac{7}{7}$ ;; c) $\frac{2}{0}$ ;; d) $\frac{0}{8}$ ;; e) $\frac{0}{0}$

Tarea 2: *Encuentra todas las expresiones decimales situadas entre las que se proponen*

a) entre 3,5 y $3,\overline{5}$ b) entre $4,\overline{27}$ y $4,\overline{28}$

Tarea 3: *En cada apartados tienen que indicar el significado de la operación que se propone, la forma de obtener el resultado y cómo se justifica ese resultado*

*a) 3,98* - $3,\overline{97}$ ;; *b) 0,25 x 4,367 ;; c)* $4,\overline{2}$ x $0,5\overline{43}$ ;; e) $2,\overline{36}$ : 4

- En el apartado i de la tarea 1 algunos estudiantes demandaron que se aclarase la expresión "*de todas las formas posibles*", puesto que, en su manera de entender la pregunta, solamente se debería hacer referencia al modelo de reparto en que estamos trabajando. Después de que el profesor indicase que la pregunta hacía referencia a todos los significados que se les ocurriese, que no había limitación en el modelo, los estudiantes completaron la tarea.

En la parte ii de la actividad 1 hubo preguntas de distintos alumnos en las que las dudas se centraban en la escritura de la expresión 35/5 con notación decimal, pues no admitían que el símbolo 7 fuese el adecuado. Es decir, un reducido grupo de alumnos no acepta los números enteros como decimales, pues no existe la coma decimal.

En la parte iii se reiteran los errores encontrados en situaciones similares. Incluso un alumno, que lleva un largo periodo ausente de las clase (alumno nº 5), requirió del profesor que le certificase que la expresión 0/8 no tiene significado.

- Resultó sorprendente para el profesor que algunos estudiantes preguntasen si habían realizado bien la tarea 2 en la que se exigía encontrar expresiones decimales intercaladas entre otras dos, sobre todo las demandas se centraban en intercalar expresiones decimales entre dos números periódicos. En este sentido son destacables las ideas expuestas por el alumno número 12:

  *Yo sé que entre 4,27 y 4,28 hay infinitos términos, pero ¿verdad que entre* $4,\overline{27}$ *y* $4,\overline{28}$ *no hay ningún número?, porque en el primer caso es 27, 27, 27, ... y en el segundo 28, 28, 28, .... y no se puede poner ningún número enmedio.*

- También aparecen dificultades en la interpretación de las expresiones decimales con infinitas cifras, dificultades que provienen de ideas erróneas sobre el significado del periodo y sobre la noción de cifras infinitas, como se pone de manifiesto en la explicación del alumno nº 7:

  *P. ¿Qué sentido tiene escribir el número* $4,\overline{27}\ 1$*?*
  *A. Significa que después del 4 aparecen infinitas cifras decimales que se van repitiendo, 27, 27, ... y al final de todas ellas aparece un 1*

- A pesar de las indicaciones previas del profesor sobre los tres aspectos que conformaban la pregunta que se hacía en la tarea 2, el profesor, en los casos que lo detectó, tuvo que indicar a los estudiantes la necesidad de que, en primer lugar, propusiesen alguna situación para determinar si la operación indicada tenía significado o no.
- Al realizar el apartado c de la tarea 2 el alumno nº 15 requirió que el profesor le ayudase puesto que se encontraba atascado. Su problema provenía de que interpretaba el producto con el sentido de los números naturales y, en consecuencia, encontraba dificultades para sumar $4,\overline{2}$ veces el otro número que aparecía en la multiplicación. Este alumno, traslada el significado del producto de naturales al producto con expresiones decimales y queda bloqueado.
- El apartado a de la tarea 3 provocó una nueva serie de preguntas al profesor acerca del modo en que deberían escribir el resultado de la operación propuesta. Entre ellas volvieron a aparecer nuevas formulaciones sobre la sintaxis que ya habían surgido en la tarea 2, como la de la legalidad de la escritura del número $0,00\overline{02}\ 3$, o sobre el modo de indicar que la última cifra del resultado debía de ser un 3.
- La utilización de la calculadora provocó la aparición de problemas inesperados para el profesor y producidos por las peculiaridades del aparato; más

concretamente surgieron tres tipos de preguntas en torno a la escritura de números periódicos a partir de los resultados obtenidos con la calculadora y que son números decimales:

a) El alumno nº 8 realizó la siguiente pregunta sobre la determinación del periodo a partir de una expresión decimal obtenida al operar números decimales con la calculadora

*Al hacer la operación* $2,\overline{36}$ : 4 *con la calculadora me aparece 0,590909,*

*¿cómo debo escribir el resultado* $0,5\overline{90}$ *o como* $0,59\overline{09}$ *?*

b) El alumno nº 1 hace una pregunta en torno al modo de interpretar diferentes resultados que aparecen como consecuencia de utilizar diferentes calculadoras, sin tener en cuenta la capacidad de las mismas y, por tanto, sin controlar la aproximación decimal que utilizan para la escritura en la calculadora del número periódico que figura en la operación propuesta. La pregunta que formuló al profesor fue la siguiente:

*Hemos hecho la operación* $2,\overline{36}$ : 4 *cada uno con su calculadora y han salido resultados diferentes como 0,590909, 0,590909075 y 0,59090909091, ¿verdad que aunque al final salgan números diferentes el resultado que hay que poner es* $0,5\overline{90}$ *?*

c) La creencia de que las operaciones con números de infinitas cifras tiene como resultado un número de infinitas cifras, unido al hecho de que el resultado de la calculadora no ofrezca cifras susceptibles de conformar un período, llevó al alumno nº 23 a mantener con el profesor un diálogo que se desarrolló en términos similares a los siguientes

*A.- Cómo se llaman los números que tienen infinitas cifras decimales y no tienen periodo?*
*P.- Explícame cómo has encontrado ese número*
*A.- Es que no se pueden multiplicar números infinitos entre sí, por lo que he buscado la fracción de la que proceden y he efectuado la operación. Entonces me encuentro con la operación* $\frac{543}{999} \times \frac{38}{9}$ *y al hacerlo con la calculadora me sale este número (señala la calculadora en la que aparece 2,2949614) que no tiene periodo, pero que yo se que es infinito.*

## V.5. Sobre la interacción didáctica

Se celebraron 3 sesiones de debate durante los días 11-11-97, 13-11-97 y 27-11-97. Todas las sesiones de debate respondían a un mismo diseño: se presentan las respuestas que dan unos escolares a tareas propuestas por el profesor-investigador y sobre esas respuestas se formulan una serie de preguntas para que se debatan en pequeño grupo. Posteriormente, y tan sólo en las dos primeras sesiones, se produce un debate colectivo con intervención de todos los estudiantes y del profesor-investigador.

Las propuestas de debate, así como las transcripción de las grabaciones de audio y de vídeo de todas las sesiones se recogen en el Anexo IV.2. Las grabaciones de vídeo corresponden a los discusiones colectivas sobre las Cuestiones de Debate 1, 2, 3 y 4; además, también existen grabaciones en audio de debates en pequeño grupo. La discusión sobre la Cuestión de Debate número 5 se celebró exclusivamente en pequeños grupos y se grabaron en audio, pero no en vídeo.

En este apartado nos proponemos estudiar las interacciones producidas en el aula en un momento concreto: la formalización del sistema de representación polinómico unitario. Consideramos este momento adecuado para el fin que nos proponemos puesto que se trata de una discusión colectiva sobre la construcción de un sistema para comunicar los resultados de las acciones efectuadas en un modelo físico. Además, el debate se suscita en el equipo investigador al observar las dificultades que encuentran los futuros profesores en este punto concreto de la propuesta didáctica.

Para sistematizar, estructurar y estudiar las interacciones que se producen a lo largo de estos debates entre el profesor y los alumnos y de los alumnos entre sí, en relación a los contenidos seleccionados, se elaboraron unas Unidades de Análisis que están descritas en el Capítulo IV (apartado IV.7.3).

El análisis que nos proponemos corresponde a las sesiones de debate colectivo celebradas los días 11-11-97 y 13-11-97. En los siguientes cuadros se recogen las 354 intervenciones registradas a lo largo de dichas dos sesiones de debate colectivo, ordenadas de acuerdo con las finalidades y clasificadas de acuerdo con las Unidades de Análisis:

a) Sobre la gestión del trabajo en el aula

| **Categorías** | **Intervenci.** | **Porcentaje** | **Categorías** | **Intervenci.** | **Porcentaje** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.PO** | 18 | 5,08 | **1.AS** | 0 | 0 |
| **1.PP** | 0 | 0 | **1.AP** | 0 | 0 |
| **1.PE** | 0 | 0 | **1.AE** | 1 | 0,28 |
| **1.PV** | 0 | 0 | **1.AV** | 0 | 0 |
| **1.PA** | 3 | 0,85 | **1.AR** | 0 | 0 |

b) Sobre la gestión del desarrollo del contenido:

| **Categorías** | **Intervenci.** | **Porcentaje** | **Categorías** | **Intervenci.** | **Porcentaje** |
|---|---|---|---|---|---|
| **2.PO** | 5 | 1,41 | **2.AS** | 0 | 0 |
| **2.PP** | 6 | 1,69 | **2.AP** | 4 | 1,13 |
| **2.PE** | 10 | 2,82 | **2.AE** | 3 | 0,85 |
| **2.PV** | 1 | 0,28 | **2.AV** | 4 | 1,13 |
| **2.PI** | 0 | 0 | **2.AI** | 0 | 0 |

c) Sobre la construcción del conocimiento

| Categorías | Intervenci. | Porcentaje | Categorías | Intervenci. | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|
| **3.POC** | 2 | 0,56 | **3.AAI** | 65 | 18,36 |
| **3.PIS** | 64 | 18,08 | **3.AIS** | 12 | 3,39 |
| **3.PDC** | 8 | 2,26 | **3.AMC** | 25 | 7,06 |
| **3.PVI** | 20 | 5,65 | **3.AVI** | 100 | 28,25 |
| **3.PSC** | 3 | 0,85 | **3.AEC** | 0 | 0 |

La lectura de los cuadros anteriores ofrece una panorámica global del desarrollo de los debates, en la que destaca la categoría 3.AVI como la que presenta la frecuencia más alta; este resultado era esperable por cuanto que refleja una situación de debate entre alumnos adultos. Se produce un intercambio considerable de ideas entre los estudiantes, que deben valorarse para su aceptación o rechazo.

También son importantes las frecuencias de las categorías 3.AAI y 3.PIS, que corresponden a la actuación de estudiantes que aportan información y a la del profesor que pregunta a dichos estudiantes para indagar sobre los significados de los términos que se someten a la discusión.

De otra parte, en los cuadros anteriores figuran los resultados de 11 de las categorías definidas que no han registrado ninguna intervención; asimismo hay otras 8 categorías cuyas frecuencias son menores que 5. Básicamente, son unidades de análisis o categorías que corresponden a la gestión del trabajo en el aula o al desarrollo del contenido, resultados que son esperables por las condiciones de trabajo con estudiantes universitarios.

Además, hay que señalar que la unidad de análisis que denominamos CA, clima de aula, tuvo una frecuencia absoluta de 13.

En los dos epígrafes que siguen nos proponemos analizar las intervenciones de los estudiantes y las del profesor desde la doble perspectiva de atender a la finalidad de dichas intervenciones y la de estudiar el tipo de actuación producido.

### V.5.1. Interacciones según finalidades

1) Sobre la gestión del trabajo en el aula.

El porcentaje de interacciones que tienen la finalidad de gestionar el trabajo del aula representan solamente el 6,21 del total de actuaciones; y de ellas, la mayor parte (el 5,08% del total) corresponden a intervenciones del profesor para organizar el trabajo. No hay intervenciones del profesor preguntando a los estudiantes sobre la gestión, ni tiene que dar explicaciones o valorar las opiniones de los estudiantes sobre la gestión; tampoco los alumnos sugieren, preguntan o valoran decisiones relativas a la gestión del trabajo.

Estos resultados muestran un colectivo con amplia experiencia escolar y que tiene hábitos propios de personas adultas que debaten organizadamente sobre temas de su interés. En este sentido, es interesante resaltar que tan sólo hubo 3 intervenciones para recabar la atención de los estudiantes y en todas ellas se aceptaron de forma inmediata las sugerencias del profesor.

2) Sobre la gestión del desarrollo del contenido

Con la finalidad de gestionar el desarrollo del contenido objeto de los debates se produjeron 28 intervenciones (el 7,91% del total), de las que la mayoría, 21, correspondieron al profesor y solamente 7 a los estudiantes.

Las intervenciones del profesor se refieren a la organización, a establecer prioridades en el tratamiento de la información que surge en el debate; también hay intervenciones del profesor en las que pregunta a los estudiantes acerca del modo en que se está llevando la gestión sobre aspectos del contenido; pero las intervenciones más numerosas, 10, fueron en el sentido de explicitar a los estudiantes los aspectos relacionados con la comprensión de las tareas que se proponen. Sin embargo, el profesor no tuvo que intervenir para interrumpir o suspender la discusión.

Por otra parte, las 7 intervenciones de los estudiantes se limitaron a demandar precisiones sobre alguna de las informaciones que aparecen en el debate o a exponer sus opiniones justificadas sobre propuestas de gestión de los contenidos. Pero no hubo intervenciones en el sentido de hacer sugerencias sobre los contenidos a tratar o sobre su organización.

Estos resultados ponen de manifiesto que estos estudiantes, a pesar de su carácter de universitarios, no actúan de manera crítica en la gestión del desarrollo de los contenidos; antes bien, se limitan a aclarar las dudas surgidas en la realización de la tarea y a que sea el profesor el que tome la iniciativa en los contenidos a tratar, así como en la secuencia de presentación de los mismos.

3) Sobre la construcción del conocimiento

La gran mayoría de las intervenciones, casi el 84%, estuvieron encaminadas a la construcción del conocimiento. De ellas, el 26,84% corresponden a actuaciones del profesor, mientras que son significativamente más numerosas las que corresponden a los estudiantes; hay 202 intervenciones de los estudiantes y 97 del profesor

Las principales intervenciones del profesor corresponden a la formulación de preguntas a estudiantes particulares, o a la totalidad de la clase, para indagar sobre los significados que aparecen en la discusión; y en menor grado, las intervenciones en las que el profesor valora las propuestas de los estudiantes de acuerdo con su interés para el debate. Sin embargo, son más escasas las intervenciones del profesor relativas a desarrollar la comprensión que no fueron muy necesarias; como tampoco fueron necesarias intervenciones para sistematizar los conocimientos.

En cuanto a los estudiantes hay que señalar que sus intervenciones tienen como foco principal la valoración de ideas que provienen fundamentalmente de sus compañeros, 100 intervenciones; y también resultan numéricamente importantes las 65 intervenciones de los estudiantes en las que aportaban información sobre la comprensión de los contenidos tratados. A lo largo de las sesiones hubo 25 actuaciones en las que los estudiantes justifican con argumentos fundados las posiciones o resultados que se producen en los debates poniendo de manifiesto su comprensión de los contenidos; y frente a estas intervenciones solamente hubo 12 peticiones de los alumnos para que se les diese una aclaración o justificación de las posiciones que se someten a discusión. Sin embargo, no hubo intervención alguna en la que los estudiantes formulasen conclusiones o avances en el contenido.

La descripción de las intervenciones dibuja unas sesiones de debate en las que prioritariamente se producen interacciones entre los estudiantes y en las que las discusiones no se desvían de sus objetivos. Además, las informaciones aportadas por los participantes, la exposición razonada de las posiciones sometidas a discusión y la permanente valoración de las ideas expuestas, son elementos suficientes para que los conocimientos no necesiten ser sistematizados.

### V.5.2. Interacciones según actuaciones

a) Fijar normas.

El 9,6% de las intervenciones se hacen para fijar normas, la totalidad de ellas son derivadas de la actuación del profesor; esto indica que los debates se han desarrollado con un número pequeño de normas, que no ha sido necesario ni la exhaustividad en la formulación de reglas de actuación, ni tampoco ha sido necesario reiterar los acuerdos anteriormente establecidos; es un debate que interesa a unas personas adultas.

b) Establecer significados

Más de la mitad de la intervenciones, el 55,1%, han servido para establecer significados. De ellas, corresponden al profesor casi el 43% y a los estudiantes el 56,4%. Estos datos configuran unos debates en los que la posición del profesor no ha sido prioritaria, que han sido los estudiantes los que han tomado la iniciativa de formular ideas y argumentos para delimitar las características de los contenidos que se tratan.

c) Emitir juicios

De las 125 intervenciones producidas con esta intencionalidad, el 35,3% de las actuaciones totales corresponden al profesor, mientras que los estudiantes han participado en 104 ocasiones. Estos resultados son producto de unos debates en los que los futuros maestros han interactuado entre sí y han sabido encauzar sus discusiones sin intervención del profesor.

## V.6. Reflexión y valoración de la Fase de Acción

La propuesta didáctica que se experimenta en la Etapa 1 de este trabajo, se articula en torno a dos Focos de Investigación sobre los que vamos a organizar las reflexiones suscitadas tras la experiencia del aula.

### V.6.1. Primer foco de Investigación

Las principales reflexiones al concluir la Fase de Acción en relación con el primer Foco de Investigación son las siguientes:

- Las tres cuartas partes del tiempo dedicado a la fase de Acción han correspondido a este foco. En ello ha influido que los contenidos eran más amplios (6 temas), que los estudiantes han sido los principales autores de la construcción de su propio conocimiento, y que en en este foco se asientan elementos conceptuales tan importantes para nuestra propuesta cuales son la concreción de un modelo y la construcción de un sistema de representación asociado al mismo.

- La idea de sustentar las manipulaciones simbólicas en un modelo, presentó dificultades iniciales de aceptación por parte de los estudiantes; sin embargo, luego se mostró su utilidad para certificar la validez o falsedad de expresiones simbólicas.

- La construcción del sistema de representación polinómico unitario resultó más compleja de lo inicialmente previsto, hasta tal punto que el equipo investigador determinó incluir dos sesiones de debate para consolidar las ideas sobre la correcta interpretación y escritura de los símbolos. Buena parte de estas dificultades provienen de la complejidad de la técnica del reparto utilizada, así como de la simbolización de los elementos que hay que considerar: cantidad de magnitud que se reparte, individuos que participan, cantidad que se entrega a cada participante en la primera fase, cantidad restante, ....

- Los conocimientos personales de los alumnos sobre las fracciones a las que conceden el significado prioritario de relación parte-todo, obstaculiza el significado de fracción como cociente. En efecto, del significado de la fracción como relación parte-todo surge la idea de que la fracción indica una cantidad que se separa de una totalidad, quedando un resto de dicha totalidad; mientras que en el significado de cociente la fracción indica una de las cantidades iguales en que se ha dividido la totalidad.

- La simbolización utilizada para indicar el reparto, los dos puntos :, pensamos que debe modificarse puesto que tal simbolización sugiere a los estudiantes la idea de fracción, que asocian al significado de relación parte-todo. En consecuencia, creemos que si se quiere construir un nuevo significado de la fracción hay que utilizar símbolos, como paréntesis, que no favorezcan el surgimiento de la notación fraccionaria.

- Se ha detectado que la interpretación del 0 presenta dificultades de dos tipos: si se refiere a cantidad de magnitud no se acepta por entender que tal medida es inexistente, que hay ausencia de magnitud; si se utiliza para indicar la imposibilidad de realizar acciones, el 0 pierde su sentido numérico. Y en este sentido, el modelo no se ha mostrado eficaz para erradicar conocimientos personales erróneos, pero sólidamente asentados.

- Los conocimientos personales de los alumnos sobre el sentido de las expresiones literales no se corresponde con las necesidades de esta propuesta didáctica. En efecto, dichas carencias imposibilitan el tratamiento general de los resultados, solamente permite que se comprueben leyes generales en casos particulares.

- De las observaciones efectuadas se deduce que los estudiantes no conceden importancia al significado de las operaciones, suponen que el significado está determinado por la viabilidad de obtener el resultado de dichas operaciones. Parece traslucirse una experiencia matemática de los estudiantes que prioriza el sentido operatorio frente a la formación de conceptos.

- Aunque los algoritmos de cálculo parecen presidir la actividad matemática de los estudiantes, resulta sorprendente que el conocimiento personal sobre dichos algoritmos se limite a considerarlos como hechos aprendidos; no es necesario justificar su existencia o su funcionamiento, simplemente hay que conocerlos y aplicarlos correctamente.

### V.6.2. Segundo foco de Investigación

En relación con el segundo foco de investigación, las reflexiones obtenidas son:

- En este foco se invierte la cuarta parte del tiempo total. Esto es así porque la construcción de un nuevo sistema de representación polinómico decimal se hace sobre un modelo ya conocido; además este sistema de representación utiliza los símbolos del sistema polinómico unitario, que se ha trabajado exhaustivamente con anterioridad.

- Las dificultades de los estudiantes con las expresiones algebraicas permanecen, así como las ideas erróneas en la interpretación del 0; la instrucción recibida no ha sido eficaz para superar estas deficiencias.

- La aparición de expresiones polinómicas decimales con un número infinito de sumandos puso de manifiesto las dificultades de los estudiantes con el concepto de infinito; el modelo no es eficaz en este sentido, sino que parece dificultar la comprensión en tanto en cuanto hace intervenir la noción de continuidad de la magnitud superficie, lo que provoca que los estudiantes solamente admitan como teórico el reparto en infinitas fases: su percepción de los objetos físicos les induce a creer que el reparto de cantidades de magnitud muy pequeñas se termina ante la imposibilidad real de efectuar nuevas particiones.

- El trabajo con expresiones polinómicas decimales se ha mostrado eficaz para justificar las relaciones de orden entre expresiones de este tipo, así como para abordar la idea de densidad respecto del orden; también se ha mostrado eficaz en el cálculo operatorio con expresiones con un número finito de sumandos, así como para evidenciar las dificultades que encierran las operaciones con expresiones con un número infinito de sumandos.

- La notación decimal se admite como recurso para economizar la escritura de unas expresiones polinómicas decimales, que tienen un significado preciso como medida de la cantidad de magnitud que corresponde a cada uno de los participantes en un reparto igualitario.

- Nuestros supuestos iniciales de trasladar los resultados establecidos en el sistema de representación polinómico unitario a la notación decimal, han resultado insatisfactorios por cuanto los estudiantes no han hecho tal traslación sino que la han sustituido por sus conocimientos personales. Por tanto, hay que dedicar más tiempo para ayudar a los estudiantes a superar sus deficiencias conceptuales sobre la notación decimal, haciendo que las expresiones decimales se interpreten como resultados de repartos igualitarios, en los que se aplica el criterio de la mayor parte. En este sentido, se pueden ofrecer a los estudiantes argumentos como los siguientes:

  - Las expresiones del tipo $2,\overline{36}\ 5$ no tienen sentido. Las expresiones polinómicas decimales de las que proceden no existen, puesto que la aparición de expresiones periódicas indica que el reparto se repite en las mismas condiciones.

  - En las expresiones del tipo $2,\overline{36}$ la parte decimal no se entiende como el número 36, sino que proviene de distintas fases del reparto. Por tanto, entre $2,\overline{36}$ y $2,\overline{37}$ existen infinitas expresiones decimales, porque entre los repartos de los que provienen se pueden intercalar otros infinitos repartos igualitarios.
  - Las operaciones con expresiones decimales periódicas presentan dificultades de cálculo, pues las operaciones entre las expresiones polinómicas decimales de las que proceden tampoco se pueden calcular. Por tanto, si los resultados de operaciones con números periódicos se obtienen a partir de aproximaciones decimales de dichos números, es muy posible que se cometan errores.

- El uso de la calculadora potencia, entre los estudiantes, prácticas operatorias erróneas con números periódicos; con el agravante de que dichos resultados suelen estar avalados por la fiabilidad que los estudiantes conceden a las calculadoras.

  Por tanto, es necesario que los estudiantes reflexionen sobre las limitaciones de la calculadora para operar con números periódicos.

### V.6.3. Valoración final de la Fase de Acción

Al concluir la Fase de Acción el equipo investigador valora que se han cubierto los objetivos propuestos y se ha desarrollado en toda su extensión y complejidad la propuesta didáctica planteada.

Las tareas propuestas a los estudiantes para profesor han tenido en cuenta todos los conceptos y procedimientos del sistema de los números racionales según el significado de reparto en que se ha basado la noción de fracción de esta propuesta.

Como hemos ido viendo en los apartados anteriores, las fuentes de información han sido variadas y han permitido recoger la gran riqueza de interpretaciones de los estudiantes sobre los significados de los conceptos y procedimientos involucrados, mostrando el conocimiento personal de estos estudiantes, sus errores y la comprensión alcanzada por cada uno de ellos.

En este momento del desarrollo de la investigación el equipo investigador adopta dos decisiones importantes, basadas en los trabajos realizados y en las observaciones y evidencias obtenidas.

- En primer lugar considera que, a diferencia de lo que ocurrió en los dos ensayos previos, en este caso se han cubierto las condiciones establecidas para el trabajo en el aula y, por ello, resulta adecuado continuar el estudio y pasar a la fase siguiente del ciclo de Investigación-Acción.

- En segundo lugar el equipo investigador se plantea la conveniencia de completar la información obtenida sobre el dominio de los significados de la fracción como reparto, con un estudio centrado en establecer la competencia profesional de los estudiantes para profesor en el manejo de los conceptos estudiados para orientar a escolares de primaria. El equipo toma aquí el acuerdo de diseñar una Segunda Etapa para esta investigación, cuyas características generales se han descrito en el Capítulo IV, y cuya realización se presentará en el Capítulo VII.

En esta Segunda Etapa queremos indagar sobre si las posiciones manifestadas en las sesiones de clase sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre la construcción del conocimiento matemático, quedaban reflejadas al proponer a estos estudiantes tareas relacionadas con la instrucción de escolares.

Todos estos posicionamientos se han puesto de manifiesto a lo largo del proceso instructivo, bien a través de los discursos del profesor, bien a través de tareas sobre el significado o existencia de un expresión simbólica, bien a través de la revisión crítica de las tareas o bien en los debates colectivos o en pequeño grupo que se han celebrado.

Se hace un estudio de casos exploratorio mediante la técnica de entrevistas a tres estudiantes seleccionados de acuerdo con el grado de comprensión del modelo utilizado; grado que se determina por las producciones previas de estos estudiantes.

Damos aquí por concluida la fase de Acción. En el próximo capítulo, Capítulo VI, presentamos y desarrollamos las dos fases restantes, Fase de Observación y Fase de Reflexión del ciclo de Investigación-Acción de la Etapa Primera de este estudio.

# CAPITULO VI

## OBSERVACION Y REFLEXION DE LA PRIMERA ETAPA

En este capítulo completamos el estudio iniciado en el capítulo anterior sobre la Primera Etapa de esta investigación. Una vez descritas allí la planificación e implementación de nuestra propuesta didáctica nos proponemos presentar los datos que se obtienen de la información recogida, interpretarlos, valorarlos y, a partir de esta reflexión, mostrar las dificultades que se derivan de los dos sistemas de representación propuestos para las fracciones, caracterizar la comprensión que muestran los estudiantes para maestro sobre estos sistemas y las reglas de conversión entre ellos, y argumentar sobre su viabilidad didáctica. Presentamos en este capítulo la Fase de Observación y la Fase de Reflexión de la Primera Etapa. En estas fases se sustentan los resultados de esta etapa de la investigación, entendiendo que los resultados de una investigación son las explicaciones de las observaciones realizadas y de los datos obtenidos dentro de un marco interpretativo determinado.

En el capítulo anterior presentamos los instrumento y tareas diseñadas para recoger información. Nuestras principales fuentes de información en la etapa de observación son las producciones escritas de los estudiantes en relación con las fichas de trabajo, cuestiones específicas de investigación y prueba final.

La obtención y selección de datos que realizamos en la fase de observación se hace de acuerdo con el tipo de trabajo propuesto a los estudiantes y con las categorías e instrumentos de análisis diseñados al efecto.

Puesto que la implementación de la propuesta didáctica se articula en 5 temas y una prueba final, hemos mantenido esa estructura para organizar los apartados de este capítulo.

Para presentar los resultados de nuestra observación en cada uno de los temas consideramos los siguientes puntos:

- Fichas de trabajo:
  - a) Trabajo propuesto.
  - b) Observaciones sobre las respuestas de los estudiantes.
  - c) Interpretación y valoración.
  - d) Resultados.

- Cuestiones de investigación:
  - a) Propósitos de la indagación.
  - b) Trabajo propuesto.
  - c) Criterios de valoración según las unidades de análisis.
  - d) Datos obtenidos.

e) Análisis e interpretación.
f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes.
g) Resultados.

Para la prueba final consideramos los siguientes puntos:
a) Aspectos de la compresión de los contenidos que se quieren analizar.
b) Tareas propuestas y unidades de análisis de la comprensión.
d) Criterios de valoración según las unidades de análisis.
e) Datos obtenidos.
e) Análisis e interpretación.
f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes.
g) Resultados.

Igualmente, de acuerdo con la organización de contenidos, en esta etapa hay dos focos de investigación que se subdividen en temas, y cada uno de los temas tiene asignadas unas tareas o trabajos específicos. Por tanto, la reflexión que aquí se presenta tiene en cuenta los siguientes niveles:
- Sobre cada tarea.
- Sobre cada tema.
- Sobre cada foco de investigación.
- Sobre la propuesta didáctica global.

## VI.1. Observación y Reflexión del primer tema: Concreción del modelo

Para concretar el modelo en que se trabaja, así como sus potencialidades y limitaciones, se proponen a los estudiantes la ficha de trabajo número 1 y la Cuestión de Investigación número 1.

### VI.1.1. Ficha de trabajo número 1

a) Trabajo propuesto

| | |
|---|---|
| *Actividad 1:* | *Hay que repartir de forma igualitaria 15 raquetas de tenis entre 3 jugadores. Utiliza un SISTEMA GRAFICO y un SISTEMA SIMBOLICO para expresar el resultado* |
| *Actividad 2:* | *A la vista de los sistemas utilizados, señala ventajas e inconvenientes que encuentras en cada uno para el reparto de estos casos:*<br>*a) Repartir 3634 raquetas entre 23 niños*<br>*b) Repartir 23 raquetas entre 7 niños* |
| *Actividad 3:* | *Da respuestas justificadas para indicar el significado de cada una de las expresiones simbólicas*<br>*a) (a : b) y (b : a) ;; b) a : a ;; c) a : 0 ;; d) 0 : a ;; e) 0 : 0* |

b) Observaciones sobre las respuestas de los estudiantes

En el apartado V.4.1.1. presentamos ya una serie de observaciones sobre las respuestas de los estudiantes a esta ficha de trabajo. Sintetizamos ahora las ideas principales de la información allí resumida.

- En las representaciones gráficas los estudiantes encuentran recursos suficientes para realizar la tarea, aun cuando han necesitado de alguna aclaración o explicación verbal. También los estudiantes han visto la dificultad del sistema de representación gráfico utilizado para el caso de cantidades grandes, aunque se muestran eficaces en situaciones en las que el reparto no se concluye, que queda algún resto.
- Los alumnos han encontrado dificultades con los sistemas de representación simbólicos como lo demuestra el hecho de que algunos de ellos no ofrezcan respuesta alguna. Hay un número importante de estudiantes que considera como sistema simbólico a un sistema gráfico en el que la representación de los objetos se ha sustituido con letras o números. Aquellos estudiantes que utilizaron la división no han tenido dificultades en la tarea.
- Aparecen ideas erróneas ocasionadas por el uso de expresiones literales:

  * En la expresión a:b se interpretan los valores de a y de b como denominación de las raquetas y de los jugadores, respectivamente, y no con valor de parámetro:

  > *En a:b repartimos un nº de raquetas para tantos niños, es decir, en la respuesta diremos que a cada niño le tocan x raquetas. El nº de raquetas ha de ser mayor que el de niños porque no le pueden tocar a un niño 0,15 raquetas.*

  * En la simbolización a:b el signo : se interpreta con el sentido operatorio, como relación funcional entre números disociados de las magnitudes:

  > *a:b indica que dividimos una cantidad "a" entre otra cantidad "b"; y también indica que se puede hacer la operación al revés, cambiando el resultado* (alumno nº 2).

  * Se modifica el significado del reparto para superar las dificultades de interpretar las letras como parámetros:

  > *a:a quiere decir que a se reparte o se divide entre a, es decir, que una cosa se divide o se reparte en la misma cosa.*
  > *a es igual a a, entonces al repartir a entre a, el resultado será igual a 1* (alumno nº 4)

- El modelo utilizado no se ha mostrado plenamente eficaz para superar interpretaciones erróneas de las expresiones a:b, cuando a=b, o cuando a, b o ambos son iguales a 0:

  * Aplicar resultados conocidos con independencia de que el contexto en que se trabaja no sea el adecuado:

  > *a:0 corresponderá al reparto de un determinado nº de unidades o elementos para nadie, por lo que no se puede realizar esta operación. Corresponde a lo que en matemáticas se resolvería con límites dando infinito (k/0)* (alumno nº 7)

  * Trasladar resultados conocidos que son erróneos

  > *0:a Dividimos "0" unidades entre "a" individuos, el resultado en este caso sería un infinito por tratarse de una indeterminación.* (alumno nº 48)

  * Utilizar el cero para representar la imposibilidad de la acción

*Un número nulo de unidades (0) dividido entre 0 elementos es 0 porque no tenemos nada que repartir para nadie* (alumno nº 51)

c) Interpretación y valoración

- Los estudiantes han encontrado dificultades para utilizar un sistema de representación limitado exclusivamente a imágenes gráficas, puesto que no han encontrado la forma de indicar los elementos a repartir, los individuos intervinientes y el resultado del reparto. Las representaciones simbólicas que se muestran eficaces son las que utilizan los algoritmos de la división.
- El modelo utilizado (raquetas de tenis, repartir de forma igualitaria, cardinalidad) no se ha mostrado plenamente eficaz para superar ideas erróneas sobre el sentido de las expresiones a:b, cuando a=b, o cuando a, b o ambos son iguales a 0.
- Hay que revisar el modo en que se utilizan las expresiones literales. Sería conveniente seguir un proceso inductivo y desechar la suposición de que todos los estudiantes son capaces de trabajar en procesos deductivos.

d) Resultados

Como resultados destacables del trabajo de esta ficha señalamos:

1. Aceptación intuitiva del modelo basado en la representación gráfica, pero con limitaciones de tipo práctico si las cantidades exceden de un cierto tamaño.
2. Dificultades en la interpretación y uso de la notación simbólica y de los términos que en ella intervienen, lo cual se agudiza para algunos casos particulares de reparto. Estas dificultades las presentan al comienzo del estudio un porcentaje de estudiantes considerable.
3. Dificultades en la interpretación del símbolo 0, que los estudiantes tratan de superar aplicando resultados operatorios del cálculo de límites. Además, aparece la interpretación de 0 como simbolización de la imposibilidad de realizar una acción.

### VI.1.2. Cuestión Específica de Investigación número 1

a) Propósitos de la indagación

a) Queremos explorar cómo gestionan los alumnos un modelo asociado a acciones de reparto igualitario.

b) Pretendemos conocer cómo gestionan los alumnos la conexión entre las acciones y su simbolización.

c) Queremos explorar el significado y simbolización que hacen de las relaciones y operaciones entre repartos igualitarios.

b) Trabajo propuesto.

| **CUESTIóN DE INVESTIGACION Nº 1** |
| --- |
| Tarea 1: *¿Puede haber repartos equivalentes?. Justifica tu respuesta. Escribe, de forma simbólica, dos repartos equivalentes. Generaliza la escritura de repartos equivalentes* |
| Tarea 2: *¿Hay repartos que sean mayores que otros? Justifica tu respuesta. Escribe, de forma simbólica, que un reparto es mayor que otro. Generaliza el resultado. Escribe 5 repartos entre (2:3) y (4:5)* |
| Tarea 3: *¿Cómo se interpreta, en el modelo en que venimos trabajando, la expresión (a : b )+ (c : d)? ¿Cómo se obtiene el resultado de esa suma?* |

Tarea 4: *a) Justifica, en el modelo, la expresión n x (c : d), siendo n un número natural. Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : n, siendo n un número natural. Calcula el resultado.*
Tarea 5:*a) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) x (c : d). Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : (c : d). Calcula el resultado.*

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado IV.7.2 con los siguientes criterios:

**1.- Interpretación correcta o bastante probable**
**2.- Interpretación dudosa o incompleta**
**3.- Interpretación errónea o inadecuada**

d) Datos obtenidos

Los datos obtenidos de los futuros profesores en esta Cuestión de Investigación, según los criterios y apartados considerados, se recogen en los Anexos V.1, V.1.1. y V.1.2.

Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro, indicando para cada Unidad de Análisis las frecuencias y, entre paréntesis, los porcentajes de respuestas para cada uno de los criterios utilizados. El número de estudiantes que realizaron cada una de las tareas varía entre 42 y 47.

| Criterios valoración<br>Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** | **No con.** |
|---|---|---|---|---|
| CEI. I.1 | 20 (**48**) | 10 (**24**) | 12 (**28**) | 0 (**0**) |
| CEI. I.2 | 25 (**59**) | 15 (**36**) | 2 (**5**) | 0 (**0**) |
| CEI. I.3 | 13 (**31**) | 27 (**64**) | 2 (**5**) | 0 (**0**) |
| CEI. II.1. | 7 (**17**) | 10 (**24**) | 25 (**59**) | 0 (**0**) |
| CEI. II.2 | 11 (**26**) | 5 (**12**) | 26 (**62**) | 0 (**0**) |
| CEI. II.3 | 5 (**12**) | 14 (**33**) | 23 (**55**) | 0 (**0**) |
| CEI. III.1. | 26 (**62**) | 0 (**0**) | 16 (**38**) | 0 (**0**) |
| CEI. III.2 | 5 (**12**) | 4 (**9**) | 33 (**79**) | 0 (**0**) |
| CEI. III.3 | 4 (**10**) | 27 (**64**) | 11 (**26**) | 0 (**0**) |
| CEI. IV.1. | 5 (**12**) | 0 (**0**) | 35 (**83**) | 2 (**5**) |
| CEI. IV.2 | 0 (**0**) | 0 (**0**) | 40 (**95**) | 2 (**5**) |
| CEI. IV.3 | 3 (**7**) | 16 (**38**) | 21 (**50**) | 2 (**5**) |
| CEI. V.1. | 15 (**33**) | 0 (**0**) | 30 (**67**) | 0 (**0**) |
| CEI. V.2 | 4 (**9**) | 0 (**0**) | 41 (**91**) | 0 (**0**) |
| CEI. V.3 | 7 (**16**) | 23 (**51**) | 15 (**33**) | 0 (**0**) |
| CEI. V.4. | 14 (**31**) | 0 (**0**) | 31 (**69**) | 0 (**0**) |
| CEI. V.5 | 14 (**31**) | 0 (**0**) | 31 (**69**) | 0 (**0**) |
| CEI. V.6 | 5 (**11**) | 23 (**51**) | 17 (**38**) | 0 (**0**) |
| CEI. VI.1. | 2 (**5**) | 1 (**2**) | 40 (**93**) | 0 (**0**) |
| CEI. VI.2 | 1 (**2**) | 6 (**14**) | 36 (**84**) | 0 (**0**) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| CEI. VI.3 | 7 (**16**) | 0 (**0**) | 36 (**84**) | 0 (**0**) |
| CEI. VI.4. | 1 (**2**) | 2 (**5**) | 40 (**93**) | 0 (**0**) |
| CEI. VI.5 | 1 (**2**) | 5 (**12**) | 37 (**86**) | 0 (**0**) |
| CEI. VI.6 | 7 (**16**) | 0 (**0**) | 36 (**84**) | 0 (**0**) |

Tabla VI.1. Resultados de la Cuestión Específica de Investigación número 1

e) Análisis e interpretación

CEI.I.1: Sobre el significado de los repartos igualitarios

- Aun cuando la mitad de los alumnos manifiestan una interpretación correcta de la noción de reparto, queda una cuarta parte de los estudiantes que tienen una noción confusa de reparto igualitario, noción que, a priori, nos parecía sencilla de entender.
- Resulta importante destacar ese 28% de los estudiantes que confunden las nociones de repartir y fraccionar. Pensamos que tal confusión puede tener su origen en un trabajo escolar en el que predominan las tareas de fraccionar.

CEI.I.2: Sobre la consideración de los elementos intervinientes en el reparto

- A pesar de las exposiciones del profesor, resulta llamativo que más de la tercera parte de los estudiantes no tengan en cuenta todos los elementos que intervienen en el reparto: hay un 36% de alumnos que no tienen en cuenta la cantidad de magnitud correspondiente a cada uno de individuos participantes.

CEI.I.3: Sobre la utilización de la representación simbólica propuesta

- Casi 2/3 de los estudiantes son reacios a la utilización de una nueva simbología. De los trabajos revisados puede intuirse que esta resistencia es fuerte: los estudiantes prefieren utilizar la notación fraccionaria, que les resulta familiar, aun cuando dicha notación la aprendieron y usaron en contextos diferentes de los que se han presentado.

CEI.II.1: Sobre el significado de la equivalencia de repartos igualitarios

- El porcentaje de respuestas inadecuadas o de dudosa interpretación, el 83%, ponen de manifiesto que para los estudiantes la equivalencia tiene el significado de reparto igualitario; es decir, que la noción de equivalencia va asociada a un solo reparto, la equivalencia no es vista como relación entre dos elementos, sino como característica de cada uno de los elementos.

  > *Si puede haber repartos equivalentes, cuando a todas las personas les toca el mismo reparto y, por tanto, el reparto es igualitario, es decir, en relación con las tortillas cuando a todas las personas les toca el mismo trozo al repartir la tortilla.* (alumno nº 4)

CEI.II.2: Sobre la justificación de la equivalencia de repartos

- Puesto que las nociones sobre equivalencia eran confusas, y como se puede observar en el cuadro, los 2/3 del alumnado exponen razonamientos incorrectos para determinar la equivalencia de repartos. Además, el 12% de los alumnos justifican las relaciones de equivalencia a través de un modelo diferente al propuesto recurriendo a sus conocimientos sobre las fracciones.

*Sí que pueden existir repartos equivalentes pero depende de aquello que se va a repartir. Por ejemplo 10 caramelos entre 5 niños. Hay un reparto equivalente porque a cada niño le tocan 2 caramelos. Pero si son por ejemplo 10 camisetas entre 7 niños ya no es lo mismo porque una camiseta no se puede repartir. No se puede fraccionar. Sin embargo si lo que se quiere repartir es una tortilla ya se puede fraccionar entre x niños* (alumno nº 48).

CEI.II.3: Sobre la utilización de la representación simbólica propuesta

- Más de la mitad de los estudiantes utilizan de forma incorrecta la simbología propuesta para determinar la equivalencia de repartos, situación que es coherente si se tienen en cuenta los comentarios anteriores sobre el significado que dan los estudiantes a este concepto.
- Puede observarse el escaso éxito mostrado por los alumnos en el manejo de la simbología propuesta (tan solo uno de cada ocho alumnos); mientras que la tercera parte, usa la notación fraccionaria.

*Si, habrá repartos equivalentes cuando aparezcan ejemplos en los que haya fracciones equivalentes, por ejemplo* $\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{128}{32} = 4$

*ambas fracciones son equivalentes ya que*

$$\frac{8}{2} = \frac{128}{32} \qquad 8 \cdot 32 = 2 \cdot 128\, 256 = 256$$

*en dichas fracciones equivalentes el reparto es el mismo es decir 4 tortillas para 2 personas (para cada una de las 2) y 4 tortillas para cada una de las 32 personas* (alumno nº 9)

CEI.III.1: Sobre el significado de la relación de orden entre repartos igualitarios

- En este caso el modelo sí se ha mostrado eficaz pues ninguno de los estudiantes necesitó recurrir a otro modelo. No obstante hemos detectado interpretaciones incorrectas del reparto igualitario, lo que ha llevado a convertir el reparto en no igualitario para, a partir de ahí, establecer relaciones de orden.

*Si, porque puede que al cortar no queden superficies iguales y unos reciban mas trozo que otros* (alumno nº 10)

CEI.III.2: Sobre la justificación de la representación simbólica de las relaciones de orden

- La mayoría de los estudiantes han utilizado la simbología propuesta, pero un porcentaje muy significativo de los mismos (el 79%), no ha sabido establecer las condiciones generales para determinar el orden entre dos repartos igualitarios. Pensamos que este resultado es consecuencia de dos hechos: las dificultades ya reseñadas de los estudiantes en el manejo de expresiones literales; y la poca experiencia de los estudiantes en formular resultados generales.

  De hecho, son abundantes los casos en que los futuros profesores quieren hacer una consideración de diferentes situaciones, pero en la que no se tiene en cuenta la totalidad de la casuística.

*a:b es mayor que c:d*

*a) Si a=c y b<d, es mayor si habiendo el mismo número de tortillas, el*

*número de personas entre las que hay que repartir es menor*
*b) Si $b=d$ y $a>c$ es mayor si habiendo el mismo número de personas entre las que hay que repartir las tortillas, el número de tortillas a repartir es mayor*
*c) Si $a>c$ y $b<d$ si hay más tortillas para repartir y menos personas entre las que repartir* (alumno nº 34)

CEI.III.3: Sobre la búsqueda de repartos comprendidos entre otros dos

- La mayoría de los estudiantes abandonan el modelo y tratan de buscar los repartos por medio de la notación decimal, bien incumpliendo la sintaxis (el alumno nº 8, por ejemplo, escribe como repartos intermedios 10´3:15; 10´7:15), o bien utilizando la división para intercalar otras expresiones decimales reformuladas en condiciones de reparto (así el alumno nº 9 establece que si 2:3=0'666 y 4:5=0'8, hay repartos intermedios como 7:9, pues 7:9=0'77). Pero la opción cuantitativamente más importante ha sido el abandono del modelo y el recurso a un trabajo numérico de intercalar fracciones entre dos dadas, utilizando el recurso operatorio de la equivalencia de fracciones

  $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{4}{5}$ *equivale a decir*

  $$\frac{2}{3} x \frac{5}{5} = \frac{10}{15} = \frac{10.3}{15.3} = \frac{30}{45} \qquad \frac{4}{5} x \frac{3}{3} = \frac{12}{15} = \frac{12.3}{15.3} = \frac{36}{45}$$

  *Repartos intermedios serían*

  $\frac{31}{45}, \frac{32}{45}, \frac{33}{45}, \frac{34}{45}, \frac{35}{45}$ (alumno nº 7)

CEI.IV.1: Sobre el significado de la suma de repartos igualitarios

- La tarea propuesta buscaba enunciar acciones en el modelo que ilustrasen sobre el significado de la suma, pero el número de repuestas correctas es muy escaso. La mayoría de los estudiantes se limitaron a una lectura del enunciado, señalando que se trataba de una suma de repartos; además, si las respuestas correctas estaban claramente expuestas el uso de la simbología no era el exigido

  *Serían dos repartos y la suma de ambos dos sería decir que alguien interviene en dos repartos diferentes de tortilla y que junta lo que obtiene en los dos. Por ejemplo*
  *4/2 4 tortillas para dos, 2 tortillas cada uno*
  *5/2 5 tortillas para dos, 2 cada uno y media*
  *total obtenido 4,5 tortillas (aunque en este caso particular he considerado suponiendo que una misma persona computa en b y d)*
  (alumno nº 7)

- Es destacable el hecho de que dos estudiantes no sepan dar significado a la suma en el modelo propuesto

CEI.IV.2: Sobre la justificación de la representación simbólica de la suma de repartos igualitarios

- El resultado indica claramente que la simbología propuesta no es aceptada por los estudiantes, prefieren expresarlo como suma de fracciones. Además, se limitan a exponer el resultado sin justificar, o a una descripción, más o menos detallada, del proceso seguido.

*1º) M.C.M.* $\frac{a}{bd}+\frac{c}{bd}$

*2º) Multiplicar el numerador por el número que falta* $\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}$

*3º) Suma de los numeradores, pues el denominador queda igual*

$\frac{ad+bc}{bd}$ (alumno nº 24)

CEI.IV.3: Sobre la utilización de la representación simbólica propuesta

- Se vuelve a poner de manifiesto que la simbología propuesta no es aceptada por los estudiantes. Y aquellos que la utilizan lo hacen de forma inadecuada o como suma genérica ausente de modelización

*a:b significa que repartimos "a" trozos en el ejemplo de la tortilla por "b" personas y nos da un resultado "e" que lo tenemos que sumar al resultado que da "f" de realizar c:d igual que el anterior*

*a:b=e y c:d=f*, por tanto *(a:b) + (c:d)=e + f* (alumno nº 12)

CEI.V.1: Sobre el significado del producto de un número natural por un reparto igualitario

- Los alumnos que realizan la tarea interpretan el producto como suma reiterada de repartos.
- De los 2/3 de los alumnos que no realizan de forma correcta la tarea, la mayoría omiten el significado, se limitan a interpretar el signo (x) y a detallar el modo de realizar la operación en un contexto puramente numérico, contexto que, en muchos casos, tiene su referencia en la notación fraccionaria

*Esta expresión es una multiplicación de un número natural n por una fracción o reparto. Para realizar esta multiplicación se puede realizar de la siguiente manera n x (c : d) = (n x c : d)*

*El resultado (n x c : d) se obtiene de multiplicar la expresión anterior, la operación consiste en multiplicar el numerador de la fracción por el número natural n y de esta forma se obtendrá el numerador de la nueva fracción y, por otra parte, el denominador de esa nueva fracción será d* (alumno nº 4)

CEI.V.2: Sobre la justificación de la representación simbólica del producto de un número natural por un reparto igualitario

- Los estudiantes, de forma notablemente mayoritaria, no se preocupan de justificar el resultado que obtienen; simplemente se limitan a escribirlo o a presentar resultados con fracciones como justificación, incluso en aquellos casos que dan significado en el modelo

*Significa que repartimos unas tortillas (c) entre varias personas (d) y luego lo multiplicamos por un nº natural (n), como si la operación se repitiera un nº determinado de veces.*

*No podemos multiplicar n por cada uno de los miembros del reparto porque si no lo que tendríamos seria un reparto diferente al inicial.*

*Lo que en realidad hacemos es* $\frac{n}{1} x \frac{c}{d} = \frac{n\,x\,c}{6}$ (alumno nº 8)

CEI.V.3: Sobre la utilización de la representación simbólica propuesta

- La mayoría de los estudiantes llega a dar una respuesta correcta pero utilizando la notación fraccionaria. Estos resultados ponen de manifiesto que no han aceptado la simbología propuesta o que se encuentran incómodos con ella y prefieren recurrir al uso de una notación que les resulta más familiar, la notación fraccionaria.

- Teniendo en cuenta los comentarios hechos anteriormente en CEI.V.2 y CEI.V.1, podemos suponer que los estudiantes no usan la simbología propuesta porque no conceden importancia al significado de la operación y tan solo se centran en obtener el resultado.

CEI.V.4: Sobre el significado de dicho cociente

- Los alumnos que responden adecuadamente a esta tarea interpretan dicha expresión como reparto reiterado

  *Sería decir que de lo que le toca a cada uno debe dar la mitad, o quedarse solo con un tercio, etc... Otro ejemplo: dos hermanos han heredado dos tortillas y cada uno tiene dos hijos dará media a cada uno. Sería un reparto de un reparto.* (alumno nº 7)

- Pero la mayoría de los alumnos repiten los planteamientos ya comentados, en el epígrafe anterior, respecto a la multiplicación de un número natural por un reparto igualitario

CEI.V.5.: Sobre la justificación de la representación simbólica del cociente de un número por un natural.

- Los resultados vuelven a poner de manifiesto una situación similar a la ya comentada para el producto por un número natural: optan por escribir el resultado a partir de sus conocimientos operatorios sobre fracciones, pero sin justificación alguna

CEI.V.6: Sobre la utilización de la representación simbólica propuesta

- Los estudiantes, de manera mayoritaria, recurren al empleo de la notación fraccionaria, aunque tengan ideas precisas sobre el significado de la operación y sean capaces de plasmarlas en algún modelo físico

  *Representa que un reparto, en una de las partes, o en todas se reparten nuevamente (Ana reparte 3000 ptas entre sus 3 hijos cada semana. Los hijos gastan toda la propina gastando lo mismo cada día ¿Cuánto gastan cada día?)*

  *Solución* $\left(\frac{a}{bn}\right) \quad \frac{3000}{7} = \frac{3000}{3} : 7 = 1000 : 7$ (alumno nº 52)

CEI.VI.1:Sobre el significado del producto de dos repartos igualitarios

- Es muy significativo el número de alumnos que no dan una interpretación al producto de dos repartos. Esperábamos que los estudiantes utilizasen el modelo y advirtiesen que no se podía dar significado a dicha operación, pero la realidad es que han soslayado la situación problemática porque su interés se centraba exclusivamente en detallar la forma de obtener el resultado.

CEI.VI.2: Sobre la justificación del resultado del producto de dos repartos igualitarios

- El alto porcentaje de respuestas incorrectas se justifica por la no preocupación en dar significado a la operación y porque recuerdan unos resultados, con fracciones, que les son suficientes para dar por resuelta la tarea.

CEI.VI.3: Sobre la utilización de la representación simbólica propuesta

- Tan solo 2 estudiantes utilizan la simbología propuesta; los demás recurren a la notación fraccionaria con la que están más familiarizados

CEI.VI.4: Sobre el significado de dicho cociente.

- Las dificultadas reseñadas en CEI.VI.1 se han incrementado al exigir que dotasen de significado al cociente. Tan sólo 1 estudiante indica que es imposible hacer tal cociente de magnitudes.

CEI.VI.5: Sobre la justificación de la representación simbólica del cociente de dos repartos igualitarios

- Para el 86% de los estudiantes tal justificación no existe, simplemente se aplica el algoritmo. Uno sólo de los estudiantes ha hecho intentos serios de razonar sobre el resultado de dicho cociente

CEI.VI.6: Sobre la utilización de la representación simbólica propuesta

- Para el 84% de los estudiantes la simbología a utilizar era la notación fraccionaria; se reitera la posición señalada en CEI.VI.3

f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes

- La revisión realizada nos muestra que para los estudiantes el modelo no ha resultado tan intuitivo como estimábamos inicialmente, puesto que lo abandonan en cuanto encuentran dificultades en su gestión. Además, observamos una tendencia generalizada a sustituir la notación simbólica propuesta por la notación fraccionaria habitual que vienen empleando los estudiantes desde hace muchos años.
- Tanto por las manifestaciones orales de los estudiantes como por las aportaciones escritas que han efectuado, la noción de equivalencia no tiene especial significado para ellos; la única referencia que reconocen para tal concepto es la de equivalencia de fracciones. Como consecuencia, no es de extrañar que los alumnos confundan las nociones de equivalencia de repartos y la de reparto igualitario, puesto que sus referentes sobre el término equivalencia les sugiere la noción de igualdad, y ello lo traducen, en el caso de los repartos, en la igualdad de cantidad que recibe cada participante; es decir, les sugiere la noción de reparto igualitario y no el significado de igualdad de dos repartos.
- Para los estudiantes el modelo ha sido útil para establecer relaciones de orden, salvo para aquellos que no admiten la necesaria distinción entre repartir y fraccionar. Sin embargo, la representación simbólica se ha mostrado totalmente ineficaz para estudiantes que disponen de una práctica habitual con fracciones y en la que muestran tener confianza cuando están en situaciones conflictivas.
- De las respuestas de los estudiantes se deduce que la operación suma no tiene significado en el modelo, aunque dichos resultados posiblemente vengan influenciados por el enunciado de la tarea. Quedaría por verificar si se produce un cambio en las respuestas de los alumnos al formular la pregunta exigiendo que buscasen situaciones de reparto que den lugar a la suma de los mismos; no obstante el hecho de que algunos alumnos, ciertamente pocos, hayan sido

capaces de dar respuestas adecuadas nos lleva a cuestionarnos si los estudiantes han reflexionado sobre el significado de la suma.

- La multiplicación de un reparto por un número natural no tiene significado para los alumnos, o bien consideran que no hay que explicitarlo. Pensamos que la práctica escolar puede haber influido para no utilizar un modelo en el que justificar las acciones que se les proponen. Es posible que si, en la formulación de la tarea, se hubiese sustituido el término justifica por alguna expresión más clarificadora, los resultados hubiesen sido notablemente mejores, como lo demuestra el hecho de que algunos alumnos sí que han respondido de forma adecuada recurriendo al modelo. Igualmente, resulta llamativo el predominio de la notación fraccionaria sobre la simbología propuesta; a nuestro juicio esto puede ser resultado de una actuación de los alumnos consecuente con sus conocimientos previos y a que la propia presentación de la tarea no hace desistir de hacerlo.
- Sobre la tarea de justificar y calcular el cociente de un reparto entre un número natural hay que hacer reflexiones similares al caso de la multiplicación, tanto sobre los resultados obtenidos como de los que se hubiesen logrado de haber formulado la tarea en términos más explícitos y más exigentes
- Tanto en el caso del producto de dos repartos como en el del cociente de dos repartos, los alumnos han eludido la tarea de dar significado a dichas operaciones en el modelo propuesto, por lo que una formulación más explícita de las intenciones perseguidas hubiese resultado más enriquecedora desde la perspectiva de sus conocimientos personales.

Igualmente hay que reseñar que, al no existir impedimentos para ello, los estudiantes optan por el empleo de los sistemas de representación con los que están más familiarizados. En consecuencia, hay que revisar las consignas que acompañan a las tareas en el sentido de ser más exigente con la forma en que los estudiantes deben resolverlas; de este modo, se dispondrá de más información acerca de la interpretación y uso que hacen de la simbología propuesta y, en consecuencia, se podrán tomar las cautelas necesarias para incrementar la comprensión del modelo y su simbolización.

<u>g) Resultados</u>

Como resultados destacables de la Cuestión Específica de investigación número 1 señalamos los siguientes:

1. Los estudiantes se muestran reacios a admitir el modelo presentado como medio sobre el que construir el conocimiento y sobre el que validar las expresiones simbólicas. Las explicaciones previas del profesor sobre el modelo y su papel en el aprendizaje no han sido suficientes para que los estudiantes las apliquen en las tareas propuestas.
2. La simbolización propuesta para señalar los resultados de las acciones sobre el modelo resulta muy cercana a la notación fraccionaria, por lo que los estudiantes, de forma muy mayoritaria, han obviado el trabajo con dicha simbología y han trabajado con la notación fraccionaria que, evidentemente, resulta más familiar.

3. El modelo sí ha sido eficaz para establecer relaciones de orden puesto que a los estudiantes les resulta muy intuitiva la comparación de cantidades de magnitud. Sin embargo, estas relaciones no resultan significativas, pues los estudiantes entienden que dicha relación no es significativa para cantidades de magnitud, entre las que la relación es de igualdad.
4. Los estudiantes encuentran dificultades para interpretar las tareas en las que se exige dotar de significado a las operaciones entre repartos igualitarios. Dichas dificultades provienen tanto de la modelización de las acciones, como de la deshabituación de los estudiantes a este tipo de trabajos.
5. La simbolización de las operaciones entre repartos igualitarios se hace, de forma mayoritaria, con la notación fraccionaria; utilización que resulta inadecuada debido a que los estudiantes dotan de significado de parte-todo a las expresiones fraccionarias.

### VI.1.3. Reflexión sobre la comprensión del modelo propuesto

- Las explicaciones previas del profesor sobre las nociones de representación y sistema de representación se han mostrado insuficientes para que los estudiantes pudiesen realizar la ficha 1. En efecto, los contenidos del discurso del profesor presentan un aspecto sensiblemente diferente a los contenidos de la tareas propuestas a los estudiantes: en dicho discurso solamente se ejemplifica la representación del número de objetos de un conjunto, solamente se ejemplifica la representación de una cantidad; sin embargo, a los estudiantes se les propone que ideen una representación que contemple simultáneamente tres cardinales, que corresponden a las unidades a repartir, al número de participantes en el reparto y al resultado del reparto.
- De los trabajos y observaciones podemos deducir que existen dificultades sobre la gestión y simbolización de las acciones en un modelo con el que los alumnos no están familiarizados. Por tanto, se sugiere un cambio en el sentido de ofrecer mayores oportunidades para que los estudiantes adquieran los conocimientos y destrezas que les faciliten la gestión del nuevo modelo; este cambio ha de poner de manifiesto aspectos importantes como la distinción entre repartir y fraccionar; la de reflexionar sobre las acciones realizadas y los resultados obtenidos, así como hacer reflexiones sobre las condiciones requeridas para que el reparto sea igualitario.
- También hay dos aspectos de la propuesta didáctica, relacionados con la presentación de los contenidos, que han influido de forma importante en la actuación de los estudiantes:

  - De una parte, la introducción del modelo se hizo en un contexto discreto, en el que la división entera se mostraba como herramienta adecuada para la simbolización. Ello ha provocado que, desde el principio, los estudiantes asocien las acciones de reparto con la división y, en consecuencia, que al pasar al contexto continuo tal división sea simbolizada por la notación fraccionaria. En consecuencia, pensamos que debe suprimirse la ficha 1 e introducir el modelo directamente con magnitudes continuas.

  - El hecho de utilizar el símbolo : para representar el reparto igualitario ha facilitado que los estudiantes primen el significado de división que le vienen otorgando desde la enseñanza primaria y que, en consecuencia, no le concedan el significado de reparto igualitario. Pensamos que se debe introducir un signo diferente a los que ya se han utilizado para la división, pues con ello pensamos que limitarían la identificación de significados no deseada; sugerimos la utilización de pares ordenados de números naturales.

- En las fracciones con significado de relación parte-todo, las nociones de equivalencia de fracciones están asociadas a las de igualdad de superficie. No resulta extraño, por tanto, que los estudiantes puedan confundir las nociones de equivalencia de repartos con las de reparto igualitario. En este sentido, hay que potenciar la eficacia del modelo para interpretar el significado diferente de las fracción como parte-todo y como reparto igualitario y, en consecuencia, la diferente interpretación de la idea de equivalencia.
- Resulta llamativo que los estudiantes que describen con precisión las condiciones en que dos repartos se pueden comparar, han decidido abandonar el modelo y refugiarse en el trabajo operatorio con fracciones; fracciones que han utilizado sin significado alguno en un modelo, sino que las han utilizado como números con los que todas las acciones están justificadas previamente.

  Unas consignas más estrictas en el sentido de exigir que los estudiantes solamente utilicen la simbología propuesta, les hubiese forzado a establecer conexiones entre modelo y representación, pues, como ya hemos indicado, el modelo ha sido muy útil para conceptualizar las nociones de orden.
- Se detecta una despreocupación entre los estudiantes por dotar de significado a las operaciones; es más, parece intuirse que estos estudiantes suponen que las operaciones siempre tienen sentido y que, por tanto, su tarea primordial es la de obtener el resultado. El modelo es adecuado para evidenciar que tales suposiciones no son adecuadas.

  Tal y como tenemos previsto en esta investigación, hay nuevas situaciones en las que se propone a los estudiantes una reflexión sobre el significado de las operaciones. Esperemos que los resultados hayan mejorado como consecuencia del trabajo de los alumnos y de las posteriores intervenciones del profesor. Ello redundará positivamente en su formación como maestros
- Resulta sorprendente que ninguno de los estudiantes fuese capaz de justificar el resultado de la suma de fracciones a pesar de que llevan mucho tiempo trabajando con este sistema de representación. Pudiera entenderse que, como consecuencia de la práctica escolar, los estudiantes están preocupados por la correcta aplicación de las técnicas operatorias, pero no lo están tanto por reflexionar sobre la forma en que tales resultados se alcanzan. En este sentido, consideramos que el modelo propuesto será útil para que los futuros profesores se cuestionen el origen de los algoritmos que utilizan para hacer cálculos con fracciones.

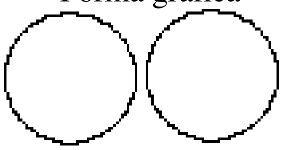
## VI.2. Observación y Reflexión del segundo tema: sistema de representación polinómico unitario

Con la intención de que los futuros maestros elaboren un sistema de representación asociado al modelo que venimos estudiando, así como significar y caracterizar las relaciones y operaciones entre expresiones de dicho sistema, se proponen a los estudiantes las Fichas números 2, 3 y 4, y las Cuestiones de Investigación 2 y 3. La información sobre estos trabajos se presenta de acuerdo con el orden en que se propusieron a los estudiantes.

### VI.2.1. Ficha de trabajo número 2.

<u>a) Trabajo propuesto.</u>

*Se reparten, en partes iguales, 2 tortillas entre 5 personas. Indicar la parte de tortilla que recibe cada una de ellas, expresando el resultado en las diferentes formas que se piden*

| Forma gráfica | Formas habladas | Formas simbólicas |
|---|---|---|
|  | 1. ______<br>2. ______<br>3. ______ | 1. ______<br>2. ______<br>3. ______ |

<u>b) Observaciones sobre las respuestas de los estudiantes</u>

- Mayoritariamente se utilizó el reparto en una sola fase y las diferentes formas que se pedían se hicieron utilizado la misma técnica pero recurriendo a divisiones de la unidad en un número de partes múltiplo de 5. El reparto por fases lo realizan pocos alumnos y, la mayoría de ellos, se limitan a dividir la unidad en 3 o 4 partes iguales

  *Cada tortilla en 4 trozos. De la segunda tortilla 3 trozos en dos y del trozo que sobra en 5 partes* (alumno nº 7)

- Los estudiantes fraccionan la unidad en sectores circulares aun cuando no especifican que deban ser iguales. Tan sólo dos estudiantes garantizaron la igualdad haciendo el fraccionamiento con la medida del ángulo central.

  *La tortilla tiene 360º y por regla de tres se obtiene que, si 1/4 de la tortilla son 90º, 1/5 son 72º* (alumno nº 44)

- Los errores que han aparecido en las representaciones simbólicas fueron de los siguientes tipos:

  i) No considerar la unidad de medida

  - Aceptar resultados manifiestamente dispares

    El alumno nº 11 divide cada tortilla en 5 partes iguales y señala que cada uno recibe 2x5:5 = 2. Al hacer el reparto de otra forma, haciendo 5 partes de las dos tortillas, indica que a cada uno le corresponde 5:5 = 1

  - Considerar como unidades a las partes resultantes del fraccionamiento de la unidad. Por ejemplo, el alumno nº 23 hace dos repartos diferentes:

    *Divido cada tortilla en 5 partes 10:5 = 2*
    *Divido cada tortilla en 10 partes 20:5 = 4*

  - Aceptar denominaciones genéricas

El alumno nº 22 ofrece los resultados de acuerdo con diferentes fraccionamientos de la unidad: *2 trozos de tarta, 4 trozos de tarta y 8 trozos de tarta*

ii) Significado inadecuado del reparto. El alumno nº 40 indica que divide cada tortilla en 5 partes iguales y da dos trozos a cada uno, expresando el resultado como *(1/5+1/5):5*

iii) No controlar las acciones del reparto por fases

*Dividimos las tortillas en 16 trozos de tal forma que a cada uno le tocan 3 trozos y el trozo que queda se vuelve a repartir. A cada uno le tocan 3 trozos y lo que queda de repartir el que sobra 3/16 a cada uno; 1/16 para todos; 3/16 + 1/16 = 4/16* (alumno nº 41)

- En la representación gráfica los estudiantes utilizaban mayoritariamente el rayado de las partes para indicar el resultado del reparto, aunque también hubo estudiantes que señalaban las partes con números, del 1 al 5, para señalar las partes que correspondían a cada uno de los participantes en el reparto. También hubo un grupo de alumnos que se limitaban a señalar la división de las unidades, sin explicitar el resultado del reparto. Tan solo un alumno utilizó colores diferentes para indicar lo que correspondía a cada participante.
- La expresión del resultado en forma hablada, se interpretó como una descripción del proceso que habían seguido.

*Dividir las tortillas en el doble de personas. A cada persona se le dan dos trozos de cada tortilla* (alumno nº 4)

- La tarea de dar el resultado por medio de representaciones simbólicas, salvo en 1 caso, fue abordado por todos los estudiantes. Las formulaciones fueron de los siguientes tipos:

a) Utilizar exclusivamente la simbología de repartos, 2:5=(1:5) + (1:5). Fue la respuesta mayoritaria (16 alumnos)

b) Utilizar exclusivamente fracciones, 1/5 + 1/5 (7 alumnos)

c) Utilizar grados sexagesimales 144º (3 alumnos)

d) Utilizar repartos y fracciones, (3:4):5 = 3/20 (3 alumnos)

e) Utilizar fracciones de fracciones 1/4 + 1/5 de 1/6 (1 alumno)

g) Utilizar repartos y decimales, (1:5)x5 = 0,2 x5 = 1 (1 alumno)

h) Utilizar divisiones y fracciones, 2 |5 = 0,4 ,, 4/10 (1 alumno)

<u>c) Interpretación y valoración</u>

- Muchos alumnos admiten como repartos diferentes los que son equivalentes. Posiblemente la actividad hubiese resultado más positiva si tal situación se previene de antemano: indicar en las consignas de la tarea que los repartos equivalentes no se consideran métodos diferentes de reparto.
- En los sistemas de representación los estudiantes muestran mayor precisión con los gráficos, debido, quizás, a sus hábitos de trabajo con las fracciones.
- Los sistemas de representación orales se sustituyen por descripciones de los procesos de reparto. Pensamos que ello es consecuencia de un sistema escolar en el que prima una aritmética escrita frente a una aritmética oral prácticamente inexistente.
- A pesar de que se indicó explícitamente, muchos estudiantes no representaban

de forma simbólica el resultado del reparto, sino que se limitaban a ofrecer como resultado otros repartos. Las posteriores exposiciones del profesor deben servir para clarificar el modo en que el resultado del reparto se simboliza mediante la suma de las cantidades recibidas por cada individuo en cada una de las fases del reparto.

d) Resultados

Los resultados más destacables de la Ficha número 2 son:

1. Se detectan dificultades en la gestión del modelo derivadas de una inadecuada interpretación del reparto, así como las provinientes de la medida de partes de la unidad.
2. Los estudiantes muestran gran destreza en la utilización de las representaciones simbólicas, mientras que las representaciones gráficas no se utilizan, y las representaciones orales son meras descripciones del proceso seguido. Posiblemente estas actuaciones sean el reflejo de una práctica escolar que prioriza la manipulación de símbolos,

### VI.2.2. Ficha de trabajo número 3.

a) Trabajo propuesto.

> *Hacer los repartos que se indican de TRES formas diferentes y representar el proceso de formas gráfica, hablada y simbólica*
> *i) 2 tortillas entre 7 personas ;; i) 3 bizcochos entre 5 personas*
> *iii) 4 : 9 ;; iv) 24 : 5*

b) Observaciones sobre las respuestas de los estudiantes

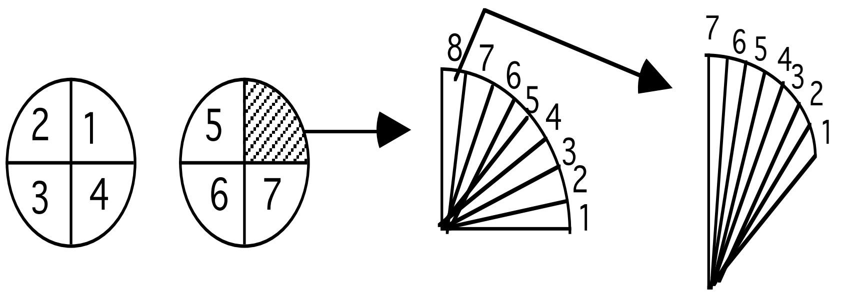
• Los estudiantes muestran una mayor eficacia en la técnica del reparto por fases, sobre todo en aquellos de dos fases. También en este tipo de repartos utilizan adecuadamente los sistemas de representación propuestos.

• Las representaciones orales incluyen las partículas **y** y **de** para indicar, en su caso, la suma de cantidades de magnitud y las partes de partes de la unidad.

> *Le corresponde un tercio de tortilla y un quinto de tortilla y un quinto de un tercio de tortilla* (alumno nº 30)

• Aunque las tareas exigen que las representaciones orales precedan a las simbólicas, los estudiantes, de forma mayoritaria, invierten el orden de presentación, lo que hace suponer que las representaciones orales son más dificultosas; presumiblemente porque no son habituales en la práctica escolar.

• Los estudiantes muestran dificultades notables en los repartos que deben resolverse en más de dos fases; así surgen errores de los tipos siguientes:
   i) No atender a las condiciones del reparto propuesto, sustituyendo alguna de estas condiciones por el tamaño de las partes




$$2:7=\frac{1}{4}[1]+(1:8)\left[\frac{1}{4}\right]+(1:7)\left[\frac{1}{8}\right]$$ (alumno nº13)

ii) No llevar el control de lo que queda por repartir

*1) Si tenemos en cuenta que lo que vamos a dividir son 4 tortillas entre 9 personas por tanto cogemos como unidad la tortilla y lo dividimos entre 9 personas*

*2) Cada una coge 1/4 de tortilla y después de lo que queda se quedan con un octavo de tortilla y un dieciseisavo de tortilla.*

*3)* $4:9=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ (alumno nº 38)

Este alumno no controla que quedan por repartir 5/8 de tortilla, que se convierten en 10/16 y, por tanto, cada participante recibe 1/16 de tortilla y quedan por repartir 7/16 de tortilla.

iii) Transformar los repartos en fracciones

*Dividimos cada tortilla en 5 trozos iguales*

$2:7=\frac{1}{5}[1]+(3:7)\left[\frac{3}{5}\right]=\frac{1}{5}[1]+\frac{3}{7}\left[\frac{3}{5}\right]=\frac{1}{5}[1]+\frac{9}{35}[1]=\frac{1}{5}+\frac{9}{35}$ de tortilla (alumno nº 43)

El alumno no es consciente de que la expresión $(3:7)\left[\frac{3}{5}\right]$ indica el reparto de tres unidades, de tamaño 3/5 de unidad, que se han de repartir entre 7 individuos y que dicho proceso hay que hacerlo por fases; el alumno ha sustituido tal significado por 3/7, con lo que el producto 3/7 x 3/5 debe interpretarse como el producto de dos magnitudes, que ya se indicó carece de sentido en el modelo propuesto.

iv) No considerar el tamaño de las partes con las que se trabaja.

*Si dividimos las tortillas en 6 partes*

$\frac{1}{6}[1]$ *y sobran* $\frac{5}{6}[1]$ $\qquad$ $\frac{5}{6}[1]:7=\frac{5}{42}\left[\frac{5}{6}\right]$

$\frac{1}{6}[1]+\frac{5}{42}\left[\frac{5}{6}\right]=\frac{7+5}{42}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$ (alumno nº 44)

En el segundo paso el alumno establece las condiciones del reparto, expresadas con fracción, pero no tiene en cuenta el tamaño de las partes que divide, que reparte unidades y no 5/6 de unidad, como se desprende de lo que ha expresado en el primer paso. Este hecho se vuelve a manifestar en el paso tercero.

c) Interpretación y valoración.

- Algunos estudiantes mantienen el reparto en una sola fase, a pesar de haberse advertido que el procedimiento de reparto debe hacerse en varias fases. Posiblemente hubiese resultado más clarificador para los estudiantes la consigna de realizar los repartos de forma que la unidad no se fraccionase en tantas partes como el número de individuos participantes.

- Los resultados de las tareas propuestas dejan entrever que los estudiantes van adaptándose a las exigencias planteadas, a la utilización del modelo propuesto y al adecuado uso de los sistemas de representación que se piden.
- Las diferencias de ritmo de trabajo, que se han evidenciado, aconsejan diferenciar en esta ficha unas tareas comunes y de exigencia mínima (realizar la mitad de los repartos propuestos) y otras tareas que fuesen ofrecidas a aquellos estudiantes que terminen las tareas mínimas.

d) Resultados

Los resultados más destacables de la Ficha de trabajo número 3 son:

1. Las representaciones orales aparecen después de las simbólicas, lo que apoya el supuesto de que la aritmética oral tiene una presencia sensiblemente menor que la simbólica en el ámbito escolar.
2. Las dificultades de la medida de las partes de la unidad recomiendan que en el desarrollo de la experiencia se incorporen tareas que incidan en la obtención del resultado de la medida de partes de unidad.

### VI.2.3. Ficha de trabajo número 4.

a) Trabajo propuesto.

*Actividad 1: Utilizando el procedimiento de "la mayor parte" hacer los repartos que se indican y representar el proceso de forma gráfica, hablada y simbólica*

*i) 5 tortillas entre 7 personas ;; ii) 23 bizcochos entre 5 personas*

*iii) 7 : 11 ;; iv) 43 : 17*

*Actividad 2: Ahmés fue un escriba del antiguo Egipto al que se atribuye la autoría de uno de los más valiosos documentos matemáticos que han llegado hasta nuestros días, el conocido como Papiro de Rind, que está datado en el año 1650 A.C. ... En el cuadro adjunto aparecen algunos resultados de Ahmés. Indica si siguen el procedimiento de "la mayor parte", y en caso de no ser así señala el resultado que debería figurar*

| Reparto | Escritura egipcia | Reparto | Escritura egipcia |
|---|---|---|---|
| 2 : 5 | $\overline{3}\ \overline{15}$ | 2 : 7 | $\overline{4}\ \overline{28}$ |
| 2 : 21 | $\overline{14}\ \overline{42}$ | 2 : 17 | $\overline{12}\ \overline{51}\ \overline{68}$ |
| ... | ... | ... | .... |

b) Observaciones sobre las respuestas de los estudiantes

- En la actividad 1, y posiblemente debido a que el criterio de la mayor parte se expuso de forma precipitada, detectamos los errores que reseñamos seguidamente:

  i) Aplicar el criterio de la mayor parte solamente en la primera fase del reparto

  *(para repartir 5 tortillas entre 7 personas)*

  *Se toma la tortilla como unidad y a cada persona le va a corresponder 1/2 de tortilla pero sobra una tortilla y media. La tortilla sobrante se* *divide en seis partes y la media en tres. Cada persona toma 1/6 sobrando 2/6 de tortilla, los cuales se dividen en 7 trozos para cada persona uno de ellos* (alumno nº 1)

ii) Hacer varios repartos en la misma fase

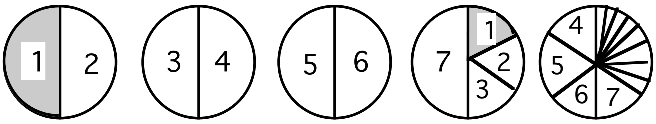
$$5:7=\frac{1}{1}\,[1]+(9:7)\left[\frac{1}{6}\right]+(1:7)\left[\frac{2}{6}\right]$$ (alumno nº 22)

iii) Aplicar el criterio utilizando partes no alícuotas de la unidad

$$5:7=\frac{2}{3}\,[1]+(1:7)\left[\frac{1}{3}\right]$$ (alumno nº 20)

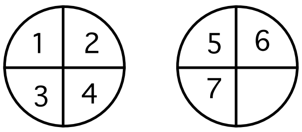
- Se mantienen errores, ya detectados en actividades precedentes, y que manifiestan conocimientos personales derivados de una mala interpretación de la fracción como relación parte-todo:

i) No controlar el tamaño de las partes




*A cada individuo le toca: media tortilla, más un tercio de tortilla, más un séptimo de dos tercios de tortilla* (alumno nº 23)

ii) Confusión entre fraccionar y repartir




$$2:7=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{7}\right]$$ (alumno nº 41)

iii) Confusión entre las unidades a repartir y los individuos participantes

*Tomando una tortilla como unidad vamos repartiendo unidades a cada persona, y lo que queda lo divido en 43 partes iguales, una para cada persona*

$$43:17=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{43}\left[\frac{1}{2}\right]$$ (alumno nº 40)

- Al observar el trabajo de los alumnos advertimos, en dos de ellos, que el proceso de reparto que realizan es el de transformar las partes en otras más pequeñas, para obtener más partes que individuos y después realizar el reparto. Es decir, su método de trabajo no consiste en repartir unidades y ajustar el tamaño de las mismas, tal y como se ha venido haciendo en las sesiones de clase, sino que modifican el tamaño previamente. Así, transforman $(3:7)\left[\frac{1}{2}\right]$ en $(9:7)\left[\frac{1}{6}\right]$ Después de ponerles de manifiesto que esa forma de trabajo no era acorde con las exigencias impuestas, estos estudiantes realizaron las tareas del mismo modo que lo hacían sus compañeros.

c) Interpretación y valoración.

- Todos los alumnos siguen utilizando el modelo pero recurriendo a representaciones gráficas: dibujan todo el proceso de reparto, posteriormente llegan a la representación simbólica detallando las acciones realizadas.
- La revisión de las tareas exigidas en la actividad 2 de la ficha 4, que los alumnos realizaron después de que el profesor, mediante dos ejemplos, expusiese las características sintácticas y semánticas de la representación utilizada, puso de manifiesto que los estudiantes tienen un dominio amplio

sobre las acciones de reparto utilizando el criterio de la mayor parte. Igualmente mostraron un uso adecuado de las representaciones simbólicas.

d) Resultados

Los resultados más destacables de la Ficha de trabajo número 4 son:

1. Los conocimientos previos sobre la fracción como relación parte-todo obstaculizan la interpretación de la fracción como cociente, en el sentido de que los estudiantes interpretan que repartir y fraccionar son acciones similares, aun cuando en el reparto "desaparece" la cantidad de magnitud inicial, mientras que en la parte-todo solamente se separa una cantidad.
2. Aparecen actuaciones de alumnos en las que el reparto se hace modificando el tamaño de las partes. El profesor reconvino tales actuaciones por no ajustarse al proceso general sobre el que se instruía; y porque tales actuaciones podrían influir negativamente en el momento de introducir la notación decimal, ya que en tal caso no se garantiza la presencia de fracciones que sean potencias de 1/10

### VI.2.4. Cuestión Específica de Investigación número 2

a) Propósitos de la indagación

a) Queremos explorar cómo gestionan los alumnos un sistema de representación asociado a un modelo físico sobre el que ya se ha trabajado.

b) Interesa averiguar las concepciones de los alumnos acerca de las relaciones sintácticas y semánticas características de este sistema de representación.

c) Pretendemos que los alumnos profundicen en el significado de la representación mediante tareas de reconstrucción del reparto conocido el resultado del mismo.

b) Trabajo propuesto.

Tarea 1: *¿Tienen sentido expresiones como 3 : 3; 0 : 5; 7 : 0; 0 : 0? Justifica tu respuesta utilizando la representación polinómica unitaria y enuncia resultados generales poniendo las condiciones que deben cumplir a y b para que la expresión a : b se interprete como reparto igualitario.*

Tarea 2: *¿Hay repartos que se escriben con un número infinito de sumandos? Justifica tu respuesta. ¿Hay repartos que admiten dos representaciones polinómicas unitarias distintas? Justifica tu respuesta.*

*En la igualdad* $a : b = \frac{1}{c} + \frac{1}{cd}$ *¿por qué d tiene que ser mayor o igual que c?*

Tarea 3: *Justifica las igualdades siguientes* a) $(1 : b)\left[\frac{1}{n}\right] = 1\left[\frac{1}{bn}\right]$ ;;

b) $\left\{1\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{np}\right]$ c) $(1 : b)\left[\frac{1}{n}\right] = a : bn$

Tarea 4: *Encuentra las condiciones iniciales de los repartos que dan lugar a las representaciones* a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ;; b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$ ;; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado IV.7.2 con los siguientes criterios:

**1.- Interpretación correcta o bastante probable**

**2.- Interpretación dudosa o incompleta**

**3.- Interpretación errónea o inadecuada**

d) Datos obtenidos

Los resultados obtenidos por cada uno de los futuros profesores en esta Cuestión de Investigación, según los criterios y apartados considerados, se recogen en los Anexos V.1.3. y V.1.4.

Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro, indicando para cada Unidad de Análisis las frecuencias **(porcentajes)** de cada uno de los criterios utilizados. El número de estudiantes que realizaron cada una de las tareas varía entre 31 y 36.

| Criterios valoración<br>Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| CEI. VII.1.1 | 31 (**94**) | 0 (**0**) | 2 (**6**) |
| CEI. VII.1.2 | 20 (**61**) | 2 (**6**) | 11 (**33**) |
| CEI. VII.1.3 | 28 (**85**) | 5 (**15**) | 0 (**0**) |
| CEI. VII.1.4 | 26 (**79**) | 7 (**21**) | 0 (**0**) |
| CEI. VII.2 | 5 (**15**) | 4 (**12**) | 24 (**73**) |
| CEI. VII.3 | 1 (**3**) | 23 (**68**) | 10 (**29**) |
| CEI. VII.4 | 4 (**12**) | 21 (**62**) | 9 (**26**) |
| CEI. VII.5 | 0 (**0**) | 17 (**50**) | 17 (**50**) |
| CEI. VII.6.1 | 18 (**58**) | 3 (**10**) | 10 (**32**) |
| CEI. VII.6.2 | 11 (**36**) | 6 (**19**) | 14 (**45**) |
| CEI. VII.6.3 | 12 (**39**) | 4 (**13**) | 15 (**48**) |
| CEI. VII.7.1 | Anulada | Anulada | Anulada |
| CEI. VII.7.2 | Anulada | Anulada | Anulada |
| CEI. VII.7.3 | Anulada | Anulada | Anulada |

Tabla VI.2. Resultados de la Cuestión Específica de Investigación número 2

e) Análisis e interpretación

CEI.VII.1.1: Sobre el significado del reparto 3:3

- Para la práctica totalidad del alumnado este tipo de reparto no resulta conflictivo, pues el modelo les permite ver que el resultado es 1. Tan sólo 2 alumnos (los números 10 y 32) colocan como resultado 1/1 + 1/1 + 1/1, por lo que hay que hablar de error en el significado de la representación simbólica del reparto.

CEI.VII.1.2: Sobre el significado del reparto 0:5

- Es muy significativo que la tercera parte de los alumnos den una respuesta errónea, a pesar de que disponen de un modelo en el que dar sentido a las acciones. Parece que su error viene determinado porque no usan 0 como símbolo para representar una cantidad nula de magnitud.

*No tiene sentido porque es ilógico pretender saber cuanto le toca a cada uno cuando no se tiene nada para repartir. Porque es 0 cosas entre 5* *personas* (alumno nº 39).

CEI.VII.1.3: Sobre el significado del reparto 7:0

- Resulta significativo que se mantengan algunos errores debidos a una conceptualización del 0 como representación de la imposibilidad de realizar una acción y no como medida de magnitud

*7:0 = 0. No tiene sentido porque si tienes 7 cosas y no hay nadie para repartirlas no puede haber reparto* (alumno nº 33).

- Otros de los errores tienen su origen en la interpretación de la simbología

*No tiene sentido, pues supongamos que tengo 7 tortillas paro no las voy a repartir con nadie, por lo tanto me quedan los mismos* $7:0 = \frac{7}{0}[1] = 0$ (alumno nº25).

CEI.VII.1.4: Sobre el significado del reparto 0:0

- De nuevo aparecen errores debidos a la utilización del 0 para representar la imposibilidad de realizar las acciones:

*(0:0) = 0. Tampoco tiene sentido el reparto ya que ni se puede hablar de personas ni se puede hablar de unidades como consecuencia el resultado es nulo* (alumno nº 21).

CEI.VII.2: Sobre la caracterización de las condiciones del reparto

- Es muy significativo el alto porcentaje de alumnos que da respuestas incorrectas. En su mayoría imponen la condición de que para a:b sea un reparto a no puede ser nulo. Hay un alumno (el número 7) que, impone la condición de que a sea real, mientras b debe ser natural

CEI.VII.3: Sobre la justificación de la finitud de las expresiones polinómicas

- La mayoría de los estudiantes (el 68%), ofrecen argumentos incompletos, posiblemente producidos por no estar habituados a las exigencias del trabajo de justificación en matemáticas; en el siguiente texto se puede advertir cómo aceptan la justificación de un hecho que han observado en su trabajo, pero no entran a justificar que tal hecho se produzca.

*No hay repartos con un número infinito de sumandos, ya que siempre se llegará a un reparto en que sólo se reparta una unidad y ahí se terminará el reparto* (alumno nº 3).

- Otro tipo de argumento dice que en caso de no hacerse así se podría producir un reparto infinito.

*Si en una fase de un reparto nos queda 1:b, podemos terminar con el reparto dividiendo 1 en tantas partes como b, pero si en vez de hacer eso dividimos en un número mayor que b, no terminaríamos el reparto y podríamos alargarlo hasta que quisiéramos. Si hay que hacerlo por la mayor parte no porque cuando llegásemos a 1:b el problema está terminado* (alumno 8).

- Las justificaciones erróneas provienen de creer que el trabajo con números finitos debe ser finito.

*No hay repartos que se escriban con un número finito de sumandos, ya que, si tenemos que repartir un número determinado de objetos entre un número determinado de individuos podrá expresarse con más o menos sumandos pero llegará un momento en que la materia se acabaría y no podría ser dividida en más* (alumno nº 38).

- Y también encontramos una creencia que indica que el resultado del reparto tiene que conseguirse después de un número finito de fases; que se reparta la cantidad que se reparta, aunque sea una cantidad infinita, el resultado es finito, es una suma finita de cantidades finitas.

  *No, porque puede haber infinitos objetos repartidos para infinitas personas pero tendrán un número de sumandos concretos* (alumno nº 12).

CEI.VII.4: Sobre la justificación de la unicidad de las expresiones polinómicas

- La mayoría de los alumnos manifiesta estar de acuerdo con la propuesta realizada, pero no encuentran más necesidades justificativas que la propia convicción

  *No, porque las representaciones polinómicas unitarias, siempre se dividen las partes en el menor número de partes posibles, por lo que un determinado reparto solo puede dar un resultado una sola representación polinómica* (alumno nº 51).

- Los errores detectados tienen su origen en no considerar que las expresiones polinómicas unitarias proceden de realizar repartos igualitarios aplicando el criterio de la mayor parte.

  *Si, porque la manera de repartir algo no es única, puedes dividir una tortilla de diferentes maneras y se puede repartir de forma distinta. Por ejemplo: si queremos repartir dos tortillas entre 3 personas podemos: a) repartir primero media tortilla a cada uno y nos quedaría media tortilla que se dividiría en 3 trozos y se repartirían uno a cada uno;*
  *b) Pero también podemos dividir las dos tortillas en 3 trozos cada una y que cada uno coja un trozo de tortilla y otro de otra* (alumno nº 17).

CEI.VII.5: Sobre algunas relaciones sintácticas

- Puesto que los estudiantes no han caracterizado el criterio de la mayor parte, era previsible que no completasen la tarea propuesta. Las respuestas incompletas hacían referencia a que, en el modelo y de acuerdo con el criterio de la mayor parte, la segunda fracción era menor que la primera y, en consecuencia, los denominadores de la segunda deberían de ser mayores que los de la primera:

  *La fracción 1/cd representa la segunda fase de un reparto igualitario en el que se reparten trozos más pequeños. Con lo que en la fracción 1/cd que viene de 1/c . 1/d, 1/d hará referencia a la 2ª fase de ese reparto que, al ser un reparto de trozos más pequeños, su denominador d será mayor o igual que el de la fracción 1/c que corresponde a la primera fase del reparto* (alumno nº 21).

- Es digno de reseñar que la formulación de la pregunta inducía a algunos alumnos a tomar como punto de partida que el reparto era solamente en dos fases; además, también se puso de manifiesto la creencia de que, en ese caso, la segunda fracción debe contener el valor de b, el número de personas (hecho que es cierto salvo que aparezcan repartos equivalentes, como en 4:9 = 1/3 + 1/3.3), y esta misma consideración llevó a algunos alumnos a negar la posibilidad de que d=c

  *a : b = 1/c + 1/cd , d siempre es el nº de individuos entre los que se produce el reparto, por lo que será un nº mayor que c, que representa el nº de partes en las que se fracciona la unidad (Esto no se puede generalizar en los casos con más sumandos) b=d. Por otro lado no creo que d pueda ser nunca igual a c*

$a:b = \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}$ , así $a:b = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}$ *No tiene sentido* (alumno nº 46).

CEI.VII.6.1: Sobre la igualdad $(1:b)\left[\frac{1}{n}\right] = 1\left[\frac{1}{10}\right]$

- Los estudiantes encuentran una justificación acertada en la mayoría de las respuestas y tan sólo el 10% lo comprueban con algún ejemplo.
- Las respuestas erróneas provienen, de forma mayoritaria, de una confusión, parece que originada en los corchetes, entre unidad de medida y el tamaño de las partes, así ocurre con el alumno nº 15:

  *Lo que se indica en la izquierda esta correctamente pero la igualdad no es cierta porque* $\left[\frac{1}{bn}\right]$ *sería una magnitud entonces sobrarían los corchetes*

  $(1:b)\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{bn}$ *de objetos*

  *Esta seria la igualdad correcta donde* $\frac{1}{bn}$ *es la cantidad del resultado acompañada de la magnitud objetos. Se dice que un reparto es igual a una magnitud algo incorrecto semánticamente ya que faltaría el numero de magnitudes.*

  Con el término magnitud, y en conversación privada, este alumno indicaba que la lectura del corchete le inducía a creer que con ello se indicaba unidad de medida, "*por ejemplo kilómetros*", por lo que no tenía sentido escribir "*kilómetros sin indicar a cuántos se hace referencia*"

CEI.VII.6.2: Sobre la igualdad $\left\{1\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{np}\right]$

- El número de respuestas correctas disminuye respecto a la tarea anterior; a cambio se duplica el número de alumnos que recurren a un ejemplo y se incrementa el número de respuestas incorrectas; ello hace suponer que la tarea resulta más dificultosa que la anterior. En las respuestas incorrectas se niega la igualdad porque se interpreta como producto de cantidad de magnitud

  *Lo que aquí se realiza es un multiplicación de magnitudes y esto no es correcto ya que si tu por ejemplo multiplicas 3 km . 4 km obtienes 12 km lo que se multiplica es 3x4 y no los km. Estamos ante un caso de este tipo donde se multiplican magnitudes.*

  *Si quitamos los corchetes y tenemos 1/n . 1/p = 1/np y añadimos una magnitud por ejemplo "de objetos" la respuesta sería correcta* (alumno nº 15).
- Hay algunos alumnos que abandonan el modelo y trabajan con fracciones-número:

  *Para expresar el resultado y reducirlo, siendo más sencillo, multiplico según la regla de la multiplicación de las fracciones y queda 1/np* (alumno nº 16).

CEI.VII.6.3: Sobre la igualdad $(a:b)\left[\frac{1}{n}\right] = a:bn$

- En la realización de esta tarea han surgido dos aspectos relacionados con la comprensión del contenido que deben tomarse en consideración:

* i) La ausencia de referencia al tamaño de las partes indica que éstas se consideran de medida la unidad

*No está bien porque en un reparto la solución no puede ser otro reparto sin unidad de medida* (alumno nº 12).

* ii) No contemplar el tamaño de las partes para determinar la igualdad de dos repartos

*Esta igualdad está mal porque representa un reparto igualado a otro reparto con mayor número de personas a las que repartir (bn)* (alumno nº 5).

CEI.VII.7 La determinación de las condiciones de reparto conocida su representación polinómica unitaria

Esta tarea no se va a tomar en cuenta puesto que resultó excesivamente complicada para los estudiantes, hasta tal punto que el profesor tuvo que hacer una exposición general porque los alumnos, a nivel individual, reiteraban sus preguntas sobre los mismos aspectos.

De hecho, los estudiantes resolvieron satisfactoriamente la primera parte de la tarea, el caso en que la representación polinómica unitaria estaba constituida por 2 fracciones. Sin embargo, en el caso de tres fracciones los alumnos quedaron bloqueados porque ante la situación $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n}\right]$ entendían que la fracción 1/4 solamente podía provenir del reparto (1:4), sin tener en cuenta el significado de repartos equivalentes; la postura de los alumnos era la de exponer que la tarea era imposible de resolver, que estaba mal enunciada.

Ante las permanentes y generalizadas demandas del alumnado, el profesor optó por resolver en la pizarra la tarea, con lo que la intencionalidad de la propuesta perdía su virtualidad, pues las respuestas de los alumnos se hubiesen reducido a la mera transcripción de lo que había expuesto el profesor. Por todo ello, el profesor optó por hacer una exposición detallada de la técnica utilizada, a la par que comunicaba a los estudiantes que los trabajos no tendrían validez.

f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes

- Los estudiantes han utilizado el modelo para situaciones de reparto en las que no aparece el 0 y han obtenido resultados correctos. Sin embargo, la aparición del símbolo 0 provoca dificultades de interpretación.
- Los escritos de los alumnos ponen de manifiesto que la noción de la mayor parte la tienen asimilada, pero no son capaces de formular las relaciones numéricas subyacentes, y este aspecto era esencial para llegar a establecer los razonamientos adecuados requeridos en la tarea.
- También hay que señalar que algunos alumnos han mostrado unas creencias sobre las relaciones operatorias entre cantidades finitas e infinitas que no son aceptables, por lo que habrá que atender a la evolución de las mismas en próximas tareas, más en concreto en la aparición de repartos infinitos en la representación polinómica decimal.
- Las relaciones de orden entre los factores de los denominadores de las

fracciones unitarias de una expresión polinómica unitaria son importantes para las tareas de reconstrucción de los repartos. Sin embargo, la no caracterización del criterio de la mayor parte les impide a los estudiantes justificar un resultado que ellos mismos constatan en los ejemplos que utilizan. La tarea, por tanto, hay que considerarla como inadecuada, salvo que previamente se haya hecho una reflexión sobre el descenso, en cada fase del reparto, de las unidades a repartir.

- La simbología utilizada para indicar el tamaño de las partes de la unidad entre corchetes, [1/n], es interpretada como unidad de medida, no como la medida de cierta cantidad de magnitud con respecto a la unidad de medida. En estos casos, entienden que el corchete debe estar precedido por un número natural, y, por tanto no encuentran sentido a expresiones del tipo (a:b) [1/n]
- En el proceso de construcción de las expresiones polinómicas decimales aparecen productos de la forma [1/n] [1/m]. Hay estudiantes que operan con ellas entendiendo que se trata del producto de dos cantidades de magnitud, a pesar de que tal situación no tiene sentido en el modelo en que se trabaja.
- La tarea 4, de determinar las condiciones del reparto conocida su representación polinómica unitaria, se muestra muy eficaz para revisar los conocimientos sobre la técnica de reparto y su simbolización. En efecto, esta tarea se presenta ante el alumno como un problema con distintos aspectos que es preciso controlar: las condiciones de finalización de un reparto, el resultado de cada fase del reparto, el tamaño de las partes que han repartido, la cantidad de magnitud ya repartida y la que queda por repartir, elección de uno de los repartos equivalentes conocido su efecto, ..... Consideramos que la tarea hay que mantenerla, aunque antes de realizar trabajos con repartos en 3 fases, habría que trabajar con repartos de dos fases en los que sea necesario recurrir a la equivalencia de repartos.

<u>g) Resultados</u>

Los resultados más destacables de la Cuestión Específica de Investigación número 2 son:

1. La cuantificación del resultado del reparto mediante la representación polinómica unitaria es una técnica compleja en la que hay que controlar todos los elementos intervinientes; en este sentido, la reconstrucción de las condiciones del reparto desde su representación polinómica unitaria se muestra como tarea eficaz para que los estudiantes se familiaricen con los aspectos que intervienen en cada fase del reparto.
2. La presencia de un sistema de representación novedoso ha puesto de manifiesto que los estudiantes están poco habituados a respetar la sintaxis; y tampoco están habituados a evaluar semánticamente las expresiones simbólicas que utilizan.
3. Los futuros maestros han mostrado ciertas limitaciones para aplicar técnicas de trabajo de la matemática demostrativa, posiblemente debido a la práctica escolar de una matemática mostrativa.
4. Se constata la persistencia de las dificultades ya mostradas por los estudiantes

en la interpretación del símbolo 0, al que algunos conceden status de forma de indicar la imposibilidad de realizar una acción, mientras que otros niegan su valor para indicar la cantidad nula de magnitud. Son interpretaciones erróneas que no se han erradicado con el sistema de representación polinómico unitario.

5. Aparecen dificultades en el manejo de la noción de infinito, detectándose la idea de que el trabajo con cantidades finitas no puede producir procesos de reparto en infinitas fases.

### VI.2.5. Cuestión Específica de Investigación número 3

a) Propósitos de la indagación

a) Queremos explorar cómo justifican los alumnos las relaciones de orden entre representaciones polinómicas unitarias, así como el significado que conceden a la densidad respecto de ese orden.

b) Interesa conocer el significado que conceden a la suma de representaciones polinómicas unitarias, así como a las técnicas que utilizan para obtener el resultado.

c) Pretendemos explorar los significados que dan los estudiantes a las operaciones entre números naturales o fraccionarios con las representaciones polinómicas unitarias.

b) Trabajo propuesto.

Tarea 1: *Encontrar representaciones polinómicas unitarias* ***mayores y menores*** que $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}$ *La respuesta debe estar debidamente justificada*

Tarea 2: *Encontrar las representaciones polinómicas unitarias* ***anterior*** *y* ***siguiente*** *a* $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}$ *La respuesta debe estar debidamente justificada*

Tarea 3: *Si encuentras la suma de dos representaciones polinómicas unitarias* $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}\right]$ *¿cómo se interpreta en el modelo? ¿Cuál será la representación polinómica unitaria que corresponda al resultado? Explica cómo lo has hecho.*

Tarea 4: *Escribe, en cada uno de los casos, la interpretación que corresponde a cada una de las operaciones en el modelo. a)* $3 \times \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right]$ ;; *b)* $\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right]:7$

*c)* $\frac{3}{4} \times \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\right]$

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado IV.7.2 con los siguientes criterios:

**1.- Interpretación correcta o bastante probable**
**2.- Interpretación dudosa o incompleta**
**3.- Interpretación errónea o inadecuada**

d) Datos obtenidos

Los resultados obtenidos por cada uno de los futuros profesores en esta Cuestión de Investigación número 3, según los criterios y apartados considerados, se recogen en el Anexo V.1.5.

Los resultados globales se recogen en la siguiente tabla VI.3, indicando para cada Unidad de Análisis las frecuencias **(porcentajes)** de cada uno de los criterios utilizados. El número de estudiantes que realizaron cada una de las tareas varía entre 36 y 44.

| Criterios valoración / Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| CEI. VIII.1 | 24 (**55**) | 18 (**41**) | 2 (**4**) |
| CEI. VIII.2 | 12 (**28**) | 29 (**67**) | 2 (**5**) |
| CEI. IX.1 * | 0 (**0**) | 31 (**78**) | 9 (**22**) |
| CEI. IX.2 * | 0 (**0**) | 31 (**78**) | 9 (**22**) |
| CEI. X.1 | 24 (**63**) | 3 (**8**) | 11 (**29**) |
| CEI. X.2 | 3 (**8**) | 33 (**87**) | 2 (**5**) |
| CEI. X.3 | 19 (**53**) | 12 (**33**) | 5 (**14**) |
| CEI.X.4 | 24 (**67**) | 1 (**3**) | 11 (**30**) |
| CEI. X.5 | 7 (**19**) | 10 (**28**) | 19 (**53**) |

Tabla VI.3. Resultados de la Cuestión Específica de Investigación número 3
* En estas unidades de análisis hay una variación en los criterios: 2 indica que se modifica la tercera fracción unitaria y 3 que se hacen otras modificaciones

<u>e) Análisis e interpretación</u>

CEI VIII.1: Sobre expresiones polinómicas unitarias mayores que una dada

- Es muy reducido el número de alumnos que resuelve mal la tarea, pues el trabajo necesita de la comparación de fracciones, donde son muy competentes. Sin embargo, el 41% de los estudiantes no han tenido en cuenta las exigencias sintácticas del sistema de representación utilizado, o solamente lo han tenido en cuenta de forma parcial
- Las formas de encontrar expresiones polinómicas unitarias mayores que una dada son de los tipos siguientes:
  i) Buscar una fracción mayor que la primera fracción unitaria y, a partir de ella, construir una expresión polinómica unitaria
  $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ *Porque la primera fracción es mayor que 1/3, entonces esta representación que yo he calculado será mayor* (alumno nº 3).
  ii) Modificar únicamente la tercera fracción.
  Hay un alumno (el número 11) que se justifica con la tercera fracción porque "se acerca más a la unidad"
  $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$ *Es mayor porque 1/27 representa un trozo mayor que 1/36* (alumno nº 4).
  iii) Dividir cada sumando por 1/3.
  No se justifica; simplemente se comprueba, con fracciones, que el resultado así obtenido es mayor que el dado,

*Dividimos cada sumando por 1/3 y obtenemos* $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$ *que es mayor que* $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}$ *ya que* $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$, así $\frac{17.3}{12.3}=\frac{51}{36}>\frac{17}{36}$ (alumno nº 9).

iv) Hacer que la expresión buscada tenga todos los sumandos respectivamente mayores que los de la dada

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ *Esta representación polinómica es mayor porque 1/2 > 1/3 , 1/4 > 1/9 y 1/16 > 1/36 y además se cumple la condición de que los denominadores son múltiplos entre si* (alumno nº 16).

v) Aumentar un sumando a los de la representación dada

*La representación* $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}$ *indica que una persona recibe como consecuencia de un reparto 3 trozos de tamaños 1/3, 1/9 y 1/36 respectivamente, con lo cual, la cantidad total que recibe es la suma de los tres trozos. Así, un reparto es mayor cuando, además de esos 3 trozos recibe otro, cuyo tamaño será el siguiente de la progresión dada; en este caso, 1/180. Con lo cual* $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}>\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}$ *porque el primer miembro incluye un término más que el segundo* (alumno 42).

- Hay estudiantes que han encontrado sumas de fracciones mayores que las dadas utilizando alguna justificación similar a las anteriores, pero no han tenido cuidado en mantener las exigencias sintácticas del sistema de representación. Además, hay respuestas que utilizan argumentos distintos de los reseñados con anterioridad (como multiplicar todos los numeradores por un mismo número natural, alumno nº 32, o aumentar aleatoriamente los denominadores, alumno nº 37)

CEI.VIII.2: Sobre expresiones polinómicas unitarias menores que una dada

- Los estudiantes han tenido más dificultades para escribir expresiones polinómicas unitarias menores que una dada; es más, hay alumnos con deficiencias sintácticas en esta tarea y que no las presentan en la anterior.
- Las justificaciones que escriben los estudiantes están plenamente relacionadas con las que utilizan para la búsqueda de expresiones polinómicas unitarias mayores. Reseñamos aquellas justificaciones que no fueron empleadas anteriormente.

a) Modificar la segunda y tercera fracciones

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4.5}$ *representación polinómica menor que la anterior 1/9 < 1/12 1/36 < 1/69 ambos representan porciones menores a las dadas* (alumno nº 8).

*b)* Suprimir una de las fracciones

*Si quitamos un trozo de esa representación polinómica, el resultado del reparto es menor y* $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}<\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}$ (alumno nº 42).

c) Multiplicar cada una de las fracciones por un mismo número natural, sin justificar que tal manipulación sea correcta, ni tampoco las limitaciones que impone

*Para ser menor multiplicamos los denominadores por cualquier número natural (igual o menor que 3), de forma que las fracciones sean mayores, por lo tanto la representación será menor*

*Ejemplo* $\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.3.4}+\frac{1}{3.3.3.4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}$ (alumno 41).

CEI.IX.1: Sobre expresiones polinómicas unitarias anteriores a una dada

- La respuesta más numerosa ha sido la de modificar el denominador de la tercera fracción, buscando un factor inmediatamente inferior

  $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$ *es la representación siguiente a la dada ya que el último término es mayor que el último dado y el siguiente que se puede poner siguiendo la relación dada, resultado de dividir los últimos trozos en 5 partes en lugar de en 6 y tocando un trozo mayor* (alumno nº 42).

  Resulta destacable el hecho de que este alumno fuese el único que en la tarea anterior (tarea 2) encontrase representaciones mayores o menores que una dada incrementando, o reduciendo, el número de sumandos; sin embargo, no tiene en cuenta esos resultados.

- Otras formas de actuación fueron las siguientes:

  i) Modificar el denominador de las dos últimas fracciones.

  $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.4.7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$ *siguiente*

  $\frac{1}{6}$ *es* $\frac{1}{2}x\frac{1}{3}$ *para que sea el anterior tendría que ser* $\frac{1}{2}x\frac{1}{2}$ *y para que sea el siguiente tendría que ser* $\frac{1}{2}x\frac{1}{4}$

  $\frac{1}{36}$ *es* $\frac{1}{2}x\frac{1}{3}x\frac{1}{6}$ *para que sea el anterior tendría que ser* $\frac{1}{2}x\frac{1}{3}x\frac{1}{5}$ *y para que sea el siguiente tendría que ser* $\frac{1}{2}x\frac{1}{3}x\frac{1}{7}$ (alumno nº 5).

  Es de hacer notar que este alumno presenta un resultado erróneo al trasladar el orden de los naturales directamente a las fracciones.

  ii) Dividir los denominadores por un mismo número, 2.

  $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$ *Posterior: dividiendo el denominador por 2, ya que si lo divides por 1 queda igual y dividido por 3 no es el siguiente sino la segunda posibilidad* (alumno nº 36).

  iii) Hallar la fracción suma y buscar la expresión polinómica unitaria correspondiente

  *Sumo* $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{25}{36}$ *La posterior es* $\frac{26}{36}$ *Ahora busco tres fracciones que me den ese resultado (no las encuentra)* (alumno 49).

  iv) Hay un estudiante que no encuentra el sentido de la expresión siguiente y ofrece distintas interpretaciones (hemos de hacer notar que fue el único alumno que en la prueba inicial destacó la imposibilidad de hablar de anterior o siguiente en la notación fraccionaria y en la notación decimal)

  $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{1296}$ *Si el siguiente se refiere a otro polinomio unitario* *con denominadores en secuencia numérica superior.*

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}$ *Si el siguiente se refiere a que la representación unitaria debe partir de un trozo mas pequeño.*

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{936}$ *Si el siguiente se refiere a un reparto en el que la representación sea un paso mas* (alumno nº 52).

CEI.IX.2: Sobre expresiones polinómicas unitarias siguiente a una dada

- Las estrategias utilizadas han sido idénticas a las que usaron para encontrar una representación polinómica unitaria anterior a una dada. Los estudiantes han utilizado razonamientos similares en ambos caso.

CEI.X.1: Sobre el significado de la suma de expresiones polinómicas unitarias

- Los estudiantes encuentran situaciones en las que las acciones realizadas dan lugar a la suma de dos representaciones polinómicas unitarias: un mismo individuo que participa en dos repartos diferentes, dos repartos realizados entre un mismo grupo de personas, o la unión de las cantidades recibidas por dos personas diferentes que participan en dos repartos distintos.

CEI.X.2: Sobre el cálculo de la suma de expresiones polinómicas unitarias

- Casi ninguno de los alumnos ha obtenido la suma de dos expresiones utilizando sus conocimientos sobre repartos; los restantes tampoco se han manifestado sobre las dificultades de encontrar un algoritmo de cálculo para la suma de representaciones polinómicas unitarias. Los estudiantes hacen uso de las fracciones.

CEI.X.3: Sobre el significado del producto de un número natural por una expresión polinómica unitaria

- La mayoría de los estudiantes dan significado correcto a la operación propuesta y entienden tal producto: como suma reiterada; como tantas veces una cantidad, como aplicación; además, el modelo se ha mostrado como eficaz para trabajar el significado de la operación propuesta.

  Entre las respuestas incorrectas detectamos que permanece la confusión entre fraccionar y repartir:

  *En una casa se hacen 3 tortillas y cada una de ellas se reparte dividiéndolas en dos partes y el trozo que sobra se divide en 10 partes* (alumno nº 4).
- Y también se detecta que, posiblemente por el trabajo escolar con la relación parte-todo, la noción de reparto va asociada a acciones realizadas sobre una única unidad..

  *Estamos en un picnic, repartiendo el pan. Parto una barra por la mitad , y luego de cada mitad lo divido en cinco. Esto mismo lo hago luego (1 barra) lo hago con otras dos barras (1 barra + 2 barras = 3 barras)* (alumno 11).

CEI.X.4: Sobre el significado del cociente entre una expresión polinómica unitaria y un número natural

- La mayoría de los alumnos describen acciones que dan lugar a la operación propuesta; mientras que una tercera parte del alumnado se refiere al resultado de la operación.
- Las respuestas correctas presentan situaciones en las que la operación

tiene el significado de reparto de reparto

*Una vez realizado el reparto de tortilla a mi me ha tocado* $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right]$, *pero en mi casa no hay comida y me lo llevo a casa. En mi casa somos 7 personas y lo repartimos, luego a cada uno le tocará lo que me había tocado repartido para 7* (alumno nº 29).

CEI.X.5: Sobre el significado del producto de una fracción por una expresión polinómica unitaria

- Los alumnos han encontrado más dificultades para dar significado a la operación propuesta, hasta tal punto que hay dos respuestas en blanco y el alumno nº 30 escribe que "no encuentro interpretación".

  En las respuestas correctas predomina el significado de parte de parte

  *Que de la cantidad que te toca en un reparto inicial se hacen 4 partes y te tocan 3* (alumno nº 22).

- Es importante el número de alumnos que interpretan la operación como composición de operadores:

  *Pedro, Luis y Ana han ido a una comida. A cada uno le corresponde* $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$ *del total de la paellera. Sin embargo a última hora llega Luisa y deciden unir lo que les había tocado a los 3 y repartirlo entre los cuatro. ¿Cuánta paella come cada uno?* (alumno nº 23).

<u>f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes</u>

• El modelo se ha mostrado útil para que los alumnos encontrasen expresiones polinómicas unitarias mayores a una dada, aun cuando resulta sorprendente que tan solo uno de ellos optase por aumentar el número de sumandos, mientras que el resto de sus compañeros trabajaba con el número de sumandos de la expresión dada. No han aparecido errores en la comparación de las fracciones que componen la expresiones encontradas por los alumnos.

• La búsqueda de representaciones polinómicas unitarias menores que la dada se justifica, en general, de la misma forma que paar el caso de mayores. Consecuentemente, hay que suponer que la formulación de la tarea no les ha obligado a los estudiantes a tener que resolver situaciones en que su estrategia no fuese adecuada; en este sentido, se podría ampliar el enunciado con exigencias de que encontrasen 3 o más representaciones polinómicas diferentes, o bien que resolviesen la tarea de dos o más formas diferentes. Así se lograría que los estudiantes comprobasen que hay distintas estrategias para establecer relaciones de orden. Será necesario proporcionar a los estudiantes una exposición de las distintas estrategias utilizadas por sus compañeros y, de este modo, ampliar las estrategias únicas que han utilizado los alumnos.

• El hecho de no añadir sumandos para buscar expresiones polinómicas unitarias mayores que una dada, ha dificultado que estos alumnos pudiesen combatir sus concepciones erróneas sobre la densidad respecto del orden; pues si añaden sumandos, hubiesen advertido la imposibilidad de encontrar la expresión siguiente a una dada. Pero al actuar con tantas fracciones unitarias como las de la expresión polinómica dada, se han limitado a variar el denominador de una de ellas, sin advertir se incumplen las normas sintácticas y sin advertir que tal expresión no es la siguiente a la dada.

- Los estudiantes, de forma mayoritaria, manifiestan una correcta interpretación del significado de la suma de representaciones polinómicas unitarias. Sin embargo, casi ninguno de ellos busca técnicas de cálculo de dicha suma, sino que recurren a la manipulación de fracciones. Pensamos que no han sido conscientes de los distintos significados de las fracciones que manipulan, pues su preocupación se centra en encontrar el resultado de la suma.
- Puesto que la interpretación de las operaciones no es única, en la sesión siguiente el profesor expondrá las diferentes concepciones aparecidas en el aula, para que todos los alumnos puedan ampliar sus propias interpretaciones.

g) Resultados

Los resultados más destacables de la Cuestión Específica de investigación número 3 son:

1. El modelo se muestra como medio potente para conceptualizar las relaciones de orden entre representaciones polinómicas unitarias; sin embargo, en la resolución de las tareas de orden los estudiantes no son cuidadosos en mantener las exigencias sintácticas del sistema de representación.
2. La densidad entre representaciones polinómicas unitarias está obstaculizada por los conocimientos previos sobre los números naturales; es más, los estudiantes son capaces de optar entre varias expresiones antes de negar la existencia de la expresión polinómica unitaria siguiente o anterior a una dada.
3. Las operaciones son conceptualizadas como acciones realizables en el modelo, aun cuando resulta más sencillo dotar de significado a la suma que a la multiplicación o división por naturales. No obstante, hay algunos estudiantes que no admiten la necesidad de dotar de significado a las operaciones, manifiestan que lo importante es el cálculo del resultado.
4. La acomodación de nuevos conocimientos presenta episodios de retroceso a conocimientos previos anteriores; de hecho, el cálculo de los resultados de las operaciones se efectúan con notación fraccionaria, sin que se manifiesten intentos de buscar dichos resultados a través de los conocimientos que se han trabajado a través del modelo propuesto.

### VI.2.6. Reflexión sobre la comprensión del sistema polinómico unitario

- En este tema los estudiantes han vivenciado las dificultades que conlleva la construcción de sistemas simbólicos a partir de las acciones que se realizan sobre objetos físicos. Estas dificultades provienen de utilizar un medio de comunicación simbólico que contemple todas las situaciones que se presenten y que sea comprendido por todos los interlocutores.
- La utilización de la simbología presenta dificultades iniciales para distintos alumnos en aspectos muy variados: confusión entre partes de unidad y unidad de medida, medida del tamaño de las partes, control de la cantidad repartida y de la cantidad sobrante, ... Este nuevo sistema de representación, aunque esté asociado a un modelo concreto, necesita de un periodo de tiempo para consolidarse, a pesar de que la edad de los alumnos nos hizo concebir a priori,

expectativas de una rápida asimilación..

- Los estudiantes han utilizado el modelo para situaciones de reparto en las que no aparece el 0 y han obtenido resultados correctos. Sin embargo, la presencia del símbolo 0 continúa generando dificultades de interpretación aun utilizando el propio modelo. Ello nos ha llevado a plantear una discusión colectiva con los estudiantes (Cuestión Específica de Debate nº 3), cuyo núcleo sitúe al símbolo 0 en los dos que originan los errores de interpretación:
    a) Como simbolización de la imposibilidad de realizar acciones; es decir, sobre la utilización del símbolo 0 para poner de manifiesto el que una acción "no tenga sentido", pues en esas condiciones apareció en algunos trabajos de los alumnos.
    b) sobre la distinción del 0 con significado de cantidad de medida nula, tanto en el caso de trabajar con cantidades discretas (medida de contar), como en el caso de magnitudes continuas (la magnitud superficie en el modelo que utilizamos).
- Las tareas diseñadas sirven para que los estudiantes reflexionen sobre la importancia de las normas sintácticas de los sistemas de representación. De hecho, ellos han comprobado la facilidad de cometer errores al no respetar las relaciones de divisibilidad de los denominadores de las fracciones que componen las expresiones polinómicas unitarias.
- Las actividades de determinar los elementos del reparto conocida su expresión polinómica unitaria, resultan muy adecuadas para que los estudiantes reflexionen sobre las características semánticas que subyacen en los sistemas simbólicos de representación.
- El significado del orden en el modelo aparece con gran nitidez, pues basta comparar cantidades de magnitud medidas con la misma unidad. Y también es palpable la potencia del sistema de representación para comparar con facilidad dos expresiones polinómicas unitarias. No obstante, hay que alertar a los estudiantes sobre la comisión de errores provocados por la presencia exclusiva de fracciones unitarias; en efecto, centrar la atención solamente en los denominadores induce a pensar que basta aumentar una unidad al denominador para obtener una expresión polinómica mayor.
- Al realizar tareas referentes a dotar de significado a las operaciones los estudiantes han mejorado los resultados a lo largo de este tema, aunque todavía hay estudiantes que no se ocupan del significado de la operación, simplemente se ocupan de la realización de los cálculos necesarios para obtener el resultado. Consideramos conveniente insistir en este tipo de tareas puesto que son importantes para la formación de futuros profesores y porque es un tipo de actividad a la que no parecen estar habituados.
- Hemos detectado una tendencia acusada entre el alumnado a concebir las matemáticas como conjunto de técnicas operatorias realizadas entre entes numéricos descontextualizados, y que estas creencias están firmemente asentadas; así se constata en las manifestaciones hechas en el aula en el sentido de que las tareas sobre el significado de las operaciones o sobre la

veracidad de expresiones simbólicas son de difícil realización, prefieren otro tipo de tareas en las que se manejen técnicas de cálculo.

- Se ha puesto de manifiesto que las exigencias del trabajo de justificación propio de las matemáticas resulta extremadamente dificultoso para nuestros alumnos. Puede que haya causas derivadas de la propia formación matemática recibida por los alumnos, una matemática fundamentalmente mostrativa, y en la que no tienen oportunidades de realizar experiencias personales de demostración matemática.
- Este tema sirve para incrementar los conocimientos personales de los alumnos sobre los números racionales. Y también se ha mostrado como un medio apropiado para que los futuros maestros reflexionen acerca de sus conocimientos personales sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje.

## VI.3. Observación y Reflexión del tercer tema: expresiones polinómicas unitarias y fracciones

Anteriormente se ha visto cómo el resultado del reparto a:b se simboliza por una suma finita de fracciones unitarias. Si se calcula el resultado de dicha suma aparece una fracción de la forma a/b; es decir, surge la fracción con significado de reparto igualitario en el que el numerador indica el número de unidades a repartir y el denominador el número de participantes; además, la fracción se muestra como suma de fracciones unitarias, como suma de partes de la unidad. Además, se han conceptualizado las nociones relaciones de equivalencia y orden entre expresiones polinómicas unitarias, así como la idea de densidad respecto del orden. También se ha dotado de significado a las operaciones entre expresiones polinómicas unitarias y se han explicitado las dificultades de algoritmizar la obtención de los resultados.

En nuestra intención de conectar las expresiones polinómicas unitarias y las fracciones, con significado de cociente, se propone a los estudiantes la Cuestión de Investigación número 4.

### VI.3.1. Cuestión Específica de Investigación número 4

<u>a) Propósitos de la indagación</u>

a) Queremos explorar cómo relacionan los alumnos dos sistemas simbólicos para números racionales positivos: el de la notación fraccionaria, que conocen de su etapa escolar, y las representaciones polinómicas unitarias, con las que han comenzado, recientemente, a trabajar en las sesiones de clase.

b) Interesa conocer el significado que conceden a distintas expresiones simbolizadas con la notación fraccionaria y si tal significado está asociado al modelo propuesto

c) Pretendemos explorar cómo justifican los estudiantes algunas relaciones de orden entre fracciones, interpretando su significado en el modelo propuesto

b) Trabajo propuesto.

Tarea 1: *a) ¿Por qué hay infinitas fracciones equivalentes a* $\frac{2}{5}$ *y una sola representación polinómica unitaria? Justifica la respuesta*

Tarea 2: *A partir del modelo, si* $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *indican dos repartos igualitarios, responde* ***justificadamente*** *a las siguientes cuestiones a) ¿Qué significado tiene la expresión* $\frac{a+c}{b+d}$? *b) ¿Es cierta la desigualdad* $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *sabiendo que* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ?

Tarea 3: *A partir del modelo, si* $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *indican dos repartos igualitarios, responde* ***justificadamente*** *a las siguientes cuestiones a) ¿Qué significado tiene la expresión* $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$? *b) ¿Es cierta la desigualdad* $\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$ *sabiendo que* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ?

Tarea 4: *A partir de las expresiones* $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *calcula los repartos* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ y $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$

*Da una explicación razonada de por qué ambos repartos no son iguales*

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado IV.7.2 con los siguientes criterios:

**1.- Interpretación correcta o bastante probable**

**2.- Interpretación dudosa o incompleta**

**3.- Interpretación errónea o inadecuada**

d) Datos obtenidos

Los datos de cada uno de los futuros profesores para esta Cuestión de Investigación, según los criterios y apartados considerados, se recogen en el Anexo V.1.6. Los resultados globales se recogen en el siguiente cuadro, indicando para cada Unidad de Análisis las frecuencias **(porcentajes)** de cada uno de los criterios utilizados. El número de estudiantes que realizaron cada una de las tareas varía entre 39 y 41.

| Criterios valoración / Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| CEI. XI.1 | 5 (**12**) | 34 (**83**) | 2 (**5**) |
| CEI. XI.2 | 13 (**32**) | 6 (**15**) | 22 (**53**) |
| CEI. XI.3 | 19 (**49**) | 4 (**10**) | 16 (**41**) |
| CEI. XI.4 | 2 (**5**) | 17 (**44**) | 20 (**51**) |
| CEI. XI.5 | 22 (**57**) | 9 (**23**) | 8 (**20**) |
| CEI. XI.6 | 15 (**38**) | 7 (**18**) | 17 (**44**) |
| CEI. XI.7 | 0 (**0**) | 32 (**82**) | 7 (**18**) |

Tabla VI.4. Resultados de la Cuestión Específica de Investigación número 4

e) Análisis e interpretación

CEI.XI.1: Sobre la equivalencia de fracciones

- Los estudiantes han abandonado el modelo para buscar argumentos sobre la infinitud de las fracciones equivalentes; de este modo, los conocimientos previos han significado un obstáculo para la conceptualización de la fracción como resultado de un reparto igualitario. Los alumnos han recurrido a su experiencia escolar para indicar que se puede multiplicar numerador y denominador por un mismo número para obtener una fracción equivalente, se han limitado a plasmar una técnica que manejan con destreza.
- Detectamos dos fenómenos dignos de destacar:
  i) El significado de la fracción como relación parte-todo obstaculiza la comprensión de la fracción como resultado de un reparto igualitario

  *La representación polinómica unitaria es una representación de una unidad, cogiendo la mayor parte posible, se dividen en un número de partes, que es el denominador, de las cuales coges un determinado número de ellas, que es el numerador* (alumno nº 51).

  ii) La equivalencia de fracciones, entendidas como reparto, se identifica con la reiteración de un proceso, no como igualdad de resultados de repartos distintos

  *Fracciones equivalentes, en este caso a 2/5 que serian 4/10, 6/15, 8/20, .. pueden ser infinitas. Por ejemplo el resultado de un reparto 2/5 puede ir incrementándose. Cada día se lleva 2/5 así pues el tercer día su parte será 3 x 2/5, el sexto 6x2/5 y así sucesivamente* (alumno nº 49a).

CEI.XI.2: Sobre la unicidad de la representación polinómica unitaria

- Los alumnos utilizan el modelo propuesto de forma mayoritaria, posiblemente porque la propia denominación del sistema de representación les aleje del uso de las fracciones. Pero resulta destacable el hecho de que aparezcan conocimientos personales erróneos a pesar de llevar varios días trabajando con el modelo.
  i) No se admite la equivalencia de resultados de repartos porque si hay que tomar la mayor parte, esto significa que hay que actuar sobre la fracción más pequeña:

  *El reparto de (2:5) es solamente igual a 2/5 porque aunque 10/25 sea equivalente no es resultado del reparto porque siempre hay que seguir la regla de coger la mayor parte posible a la hora de repartir* (alumno nº 18).

  ii) Confundir la unicidad con la finitud del proceso de reparto

  *Porque al hacer el reparto llegará un momento en que se acabarán y no habrá más partes a repartir* (alumno nº 37).

  iii) Ausencia de significado para la noción de reparto equivalente

  *Como 2/5 es el resultado de un reparto, solo habrá un reparto que dé este mismo resultado ya que los demás serán repartos equivalentes* (alumno nº 43).

CEI.XI.3: Sobre el significado de la expresión (a+c)/(b+d)

- Casi la mitad de los estudiantes interpretan que la expresión propuesta corresponde a un reparto diferente de los iniciales, que se realiza juntando los objetos y personas participantes en los repartos iniciales.

- Es de destacar la importante cantidad de alumnos que han respondido de forma incorrecta. En este tipo de respuestas se niega el significado de la expresión propuesta con dos tipos de argumentos:

    i) No se admite la expresión porque no es igual a la suma de repartos

    $\frac{a+c}{b+d}$ *No tiene significado. Para que lo tuviera tendría que expresarse como suma de 2 repartos independientes* $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$ (alumno nº 21).

    ii) No se admite porque no se puede realizar la suma

    *Según el modelo, la expresión* $\frac{a+c}{b+d}$ *no tiene sentido; a/b es una fracción que indica un reparto distinto del que representa c/d. Y para sumar dos repartos, el número de personas que intervienen en ambos tiene que ser el mismo y en este caso tenemos "b" personas en el primer reparto y "d" personas en el segundo. Luego la expresión propuesta no tiene sentido ya que el número de personas no es el mismo en los dos casos* (alumno nº 43).

CEI.XI.4: Sobre cómo justificar las relaciones a/b < (a+c)/(b+d) < c/d , si a/b < c/d

- El escaso acierto en las repuestas de los estudiantes se entiende desde una doble perspectiva:

  * Los estudiantes no están habituados a justificar resultados generales, por lo que consideran que el cumplimiento de las relaciones de orden en algunos casos particulares tiene validez como resultado general.

  * La tarea exigía hacer una reflexión sobre el significado de la expresión (a+c)/(b+d) y comparar dicho significado con los de los repartos a/b y c/d, si el primer significado estaba confuso o no se establecían las comparaciones oportunas las respuestas no podían ser correctas.

- Tan solo se han detectado dos estudiantes que intentasen probar la veracidad de la propuesta utilizando sus conocimientos sobre fracciones, sin embargo pensamos que los intentos no han sido más generales por no estar habituados al manejo de desigualdades.

CEI.XI.5: Sobre el significado de la expresión [a/b + c/d]/2

- Antes de realizar esta tarea los alumnos recibieron explicaciones del profesor sobre la tarea 2, utilizando el modelo y argumentando sobre las cantidades recibidas en diferentes repartos y las relaciones entre ellas. Las repuestas correctas mayoritarias citan a dos personas que participan en repartos diferentes y se vuelven a repartir lo que les ha correspondido; aunque hay alumnos que sitúan a la misma persona en dos repartos distintos y, posteriormente, vuelve a repartir con alguna persona

    *Y ahora resulta que llego a casa con lo que me han dado en las dos fiestas, pero como soy muy generosa decido repartirlo con mi hermana, así que tendré que dividir las dos cantidades entre dos* (alumno nº 24).

CEI.XI.6: Sobre justificar las relaciones $a/b < [a/b + c/d]/2 < c/d$ , si $a/b < c/d$

- Hay un porcentaje elevado de alumnos que no justifican las relaciones de orden que se proponen porque no encuentran argumentos válidos y se limitan a comentar que son ciertas. Las argumentaciones correctas se apoyan en el modelo

*Podemos interpretar que como a/b < c/d, las personas del primer reparto reciben menos que las del 2º reparto. Entonces ahora juntamos lo que se lleva una persona del primer reparto con una del 2º con lo cual obtenemos una cantidad mayor a repartir a/b + c/d > a/b ,, a/b + c/d > c/d*

*Suponemos que ahora repartimos esa cantidad entre 2 individuos (uno procedente del primer reparto y uno procedente del 2º reparto), entonces uno (el que se llevaba más al principio) se va a llevar un poco menos en favor del segundo (el que se llevaba menos al principio) que se llevará un poco más* (alumno nº 22).

- Aun cuando las explicaciones, en general, se basaban en el modelo hubo un alumno (nº 42), que justificó las relaciones propuestas utilizando relaciones entre fracciones.

CEI.XI.7: Sobre cómo relacionar $(a+c)/(b+d)$ y $[a/b + c/d]/2$

- La realización correcta de la tarea exigía tener en cuenta relaciones de proporcionalidad subyacentes a las dos expresiones que se debían de analizar. Los resultados muestran claramente que los estudiantes no han percibido tales relaciones y que, en consecuencia, se han limitado a describir las dos expresiones y a justificar que sus significados son diferentes y, por tanto, los resultados han de ser distintos.

f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes

- Los alumnos abandonan el modelo cuando tienen oportunidades de trabajar con fracciones consideradas como entes numéricos desprovistos de referencias a medidas de magnitud. Y, en este sentido, los alumnos no tienen dificultades para aplicar técnicas de construcción de fracciones equivalentes, que en modo alguno relacionan con acciones de repartir en el modelo propuesto.
- Hay estudiantes que manifiestan algunas dificultades en la interpretación de los resultados de un reparto igualitario y en la simbología con la que se representa. Esto sugiere que para esos alumnos las experiencias no han sido suficientes y, en consecuencia, necesitarían un trabajo más dilatado en el tiempo para asumir las peculiaridades de las acciones que se realizan en el modelo, así como las exigencias sintácticas y semánticas características del sistema simbólico utilizado
- La tarea de interpretar en el modelo la expresión $(a+c)/(b+d)$ ha puesto de manifiesto que hay muchos alumnos que realizan la tarea con corrección, que entienden que se trata de un nuevo reparto en el que se juntan las unidades a repartir y los individuos intervinientes. Pero también ha servido para que aparezcan interpretaciones erróneas de la simbología, y para que se identifique erróneamente esta expresión con la suma de repartos. La reflexión sobre estos aspectos es necesaria para consolidar la comprensión.
- La justificación de resultados generales presenta dificultades para los alumnos;

posiblemente la falta de práctica con el método de trabajo de las matemáticas sea el motivo de esta situación.

- Cuando los alumnos conocen la potencialidad del modelo para buscar argumentos justificativos de relaciones de orden, son capaces de utilizarlos en situaciones similares y razonan correctamente sobre las acciones realizadas, sin tener que recurrir a la manipulación de expresiones literales, que tantas dificultades provocaron si no se sustentaban en algún modelo. El modelo se muestra muy eficaz para trabajar relaciones de orden entre números racionales positivos, hasta tal punto que las argumentaciones no necesitan la manipulación de representaciones simbólicas; el uso adecuado de razonamientos derivados de la realización de acciones sobre el modelo son suficientes para la generalización de resultados.

g) Resultados

Los resultados más destacables de la Cuestión Específica de Investigación número 4 son:

1. Los conocimientos previos sobre la fracción como relación parte-todo obstaculizan el significado de fracción como cociente.
2. Los símbolos de la notación fraccionaria alejan a los estudiantes de su interpretación en el modelo propuesto, simplemente se limitan a utilizar la simbología en el sentido operatorio, sin importar su semántica.
3. Es necesario que los estudiantes tengan experiencias de interpretar las fracciones en términos del modelo, como cociente, mostrando que es a través del modelo como se pueden interpretar las relaciones simbólicas

No procede aquí realizar una nueva reflexión sobre la comprensión de las fracciones con significado de resultado del reparto igualitario ya que, al tener el Tercer Tema una sola cuestión específica, ambas reflexiones coinciden.

## VI.4. Observación y Reflexión del cuarto tema: sistema de representación polinómico decimal

La introducción de variaciones en la técnica del reparto produce la aparición de un sistema simbólico nuevo. Para desarrollar la comprensión del sistema polinómico decimal se proponen a los estudiantes las Fichas 5 y 6 y las Cuestiones de Investigación números 5 y 6, que presentamos en el orden en que se trabajaron en el aula

### VI.4.1. Ficha de trabajo número 5

a) Trabajo propuesto

| |
|---|
| *Actividad 1: Escribir en el sistema de representación polinómica decimal:*<br>*a) 1/2 ;; b) 3/5 ;; c) 5/8 ;; d) 7/16 ;; e) 65/32 Comparar los resultados con los que se obtienen en la representación polinómica unitaria.*<br>*Actividad 2: Escribir en el sistema de representación polinómica decimal:*<br>*a) 1/3 b) 2/7 c) 9/13*<br>*Comparar los resultados con los que se obtienen en la representación polinómica unitaria.* |

b) Observaciones sobre las respuestas de los estudiantes

- En la actividad 1, los estudiantes muestran gran destreza en la representación polinómica decimal, y también unitaria, en las situaciones propuestas, debido a su experiencia anterior con la representación polinómica unitaria
- Los estudiantes destacan algunas características propias de este sistema:

  i) La representación polinómica decimal facilita la tarea del reparto por cuanto hay una técnica de fraccionamiento que no varía, aunque ello exija de un proceso más laborioso

  *Que en la representación polinómica decimal cuesta más hacerlo pero es menos difícil perderte porque al estar las fracciones en 10 el tamaño de las partes va disminuyendo progresivamente* (alumno nº 5).

  ii) La representación polinómica decimal está próxima a la notación decimal

  *La representación polinómica decimal es más larga que el resultado de la representación polinómica unitaria; pero a la hora de ver el resultado de la fracción, con la representación polinómica decimal se ve claramente el número decimal que resulta, y sin embargo en la unitaria no* (alumno nº 34).

  iii) En la representación polinómica decimal subyace el proceso de la división decimal como extensión de la división entera

  *En la representación polinómica decimal las divisiones en trozos, aunque el proceso es más largo normalmente, se pueden seguir fácilmente a través de la operación de la división habitual ya que lo que se reparte siempre es el <u>resto</u> de una división normal* (alumno nº 22).
- En la actividad 2, los estudiantes encuentran que el proceso de reparto se hace infinito, aun cuando el profesor no detectó que ello provocase comentarios de ningún tipo; posiblemente porque los estudiantes estaban más preocupados en tratar de simbolizar un hecho novedoso.
- Todos los alumnos han realizado las tareas de forma simbólica. Pensamos que en ello han influido dos aspectos: el manejo de la nueva simbología no presenta dificultades (por ser muy similar a la ya utilizada en las representaciones polinómicas decimales), y que los estudiantes hayan podido "algoritmizar" la técnica de reparto al efectuar los fraccionamientos de la misma forma. De hecho, el alumno nº 38 se tiene que ayudar de gráficos en la representación polinómica unitaria y no en la decimal
- La simbolización de procesos de reparto en infinitas fases se resolvió con la utilización de puntos suspensivos en el caso en que todas las fases del reparto eran de la misma forma, en los demás casos fue indicar que después de varias fases se volvían a encontrar condiciones de reparto similares a las iniciales. En estos casos algunos alumnos trataron de dar una expresión general (al recordaro una sucesión numérica), mientras que ninguno de ellos recurrió a símbolos, como el arco, que les son familiares en la notación decimal.

c) Interpretación y valoración

- La experiencia con la simbolización de la expresiones polinómicas unitarias ha permitido introducir el nuevo sistema de representación modificando las acciones, sin más ajustes que la incorporación de las unidades de cada tamaño que corresponden a cada participante.

- Resultó de interés para los estudiantes observar cómo los sistemas de representación están asociados a acciones concretas sobre el modelo; así, una variación en éstas provoca unos resultados diferentes y, por tanto, una variación en la simbología utilizada.
- Los estudiantes no se sienten sorprendidos por el cambio tan importante que significa que en este sistema de representación sus expresiones no tengan siempre un número finito de sumandos.

d) Resultados

Los resultados más destacables de la ficha de Trabajo número 5 son:

1. Esta tarea pone de manifiesto la relación entre las acciones del modelo y el sistema de representación asociado; sin embargo, algunos estudiantes no se han percatado de que, al modificar la técnica de reparto, se han producido cambios importantes en el sistema de representación.
2. La aparición de expresiones polinómicas decimales con infinitos sumandos no resultó llamativa para los estudiantes; posiblemente sus preocupaciones se centraban en la simbolización del proceso, más que en su significado

### VI.4.2. Cuestión Específica de Investigación número 5

a) Propósitos de la indagación

a) Queremos explorar cómo gestionan los alumnos un sistema de representación asociado a un modelo físico sobre el que ya se ha trabajado.

b) Interesa averiguar los conocimientos personales de los alumnos acerca de las relaciones sintácticas y semánticas características de este sistema de representación.

b) Trabajo propuesto.

Tarea 1: *¿Tienen sentido expresiones como 3 : 3; 0 : 5; 7 : 0; 0 : 0?. Justifica tu respuesta utilizando la representación polinómica decimal y enuncia resultados generales poniendo las condiciones que deben cumplir a y b para que la expresión a : b se interprete como reparto igualitario.*

Tarea 2: *¿Por qué hay repartos que se escriben con un número infinito de sumandos? Justifica tu respuesta. ¿Que condiciones deben cumplir a y b para que, sin hacerlo, podamos determinar si la representación polinómica decimal del reparto a : b tendrá un número finito o infinito de sumandos?*

Tarea 3: *Justifica las igualdades siguientes*

$$a)\ (1:10)\left[\frac{1}{10}\right] = 1\left[\frac{1}{10^2}\right] = \frac{1}{10^2} \qquad b)\ \left\{1\left[\frac{1}{10}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{10p}\right]$$

$$c)\ (a:b)\left[\frac{1}{10}\right] = a:10b$$

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado IV.7.2 con los siguientes criterios:

**1.- Interpretación correcta o bastante probable**
**2.- Interpretación dudosa o incompleta**
**3.- Interpretación errónea o inadecuada**

d) Datos obtenidos

Los datos individuales obtenidos de los futuros profesores en esta Cuestión de Investigación, según los criterios y apartados considerados, se recogen en los Anexos V.1.7 y V.1.8.

Los resultados globales se recogen en el cuadro de la página siguiente, indicando para cada Unidad de Análisis las frecuencias **(porcentajes)** de cada uno de los criterios utilizados. El número de estudiantes que realizaron cada una de las tareas varía entre 37 y 39.

| Criterios valoración / Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| CEI. XII.1.1 | 38 (**100**) | 0 (**0**) | 0 (**0**) |
| CEI. XII.1.2 | 16 (**42**) | 1 (**3**) | 21 (**55**) |
| CEI. XII.1.3 | 35 (**92**) | 2 (**5**) | 1 (**3**) |
| CEI. XII.1.4 | 31 (**82**) | 6 (**15**) | 1 (**3**) |
| CEI. XII.2 | 8 (**21**) | 2 (**5**) | 28 (**74**) |
| CEI. XII.3.1 | 20 (**51**) | 16 (**41**) | 3 (**8**) |
| CEI. XII.3.2 | 5 (**13**) | 13 (**33**) | 21 (**54**) |
| CEI. XII.4.1 | 30 (**81**) | 6 (**16**) | 1 (**3**) |
| CEI. XII.4.2 | 16 (**43**) | 11 (**30**) | 10 (**27**) |
| CEI. XII.4.3 | 5 (**14**) | 10 (**27**) | 22 (**59**) |
| CEI. XII.5 | Anulada | Anulada | Anulada |

Tabla VI.5. Resultados de la Cuestión Específica de Investigación número 5

e) Análisis e interpretación

CEI.XII.1.1: Sobre el significado del reparto 3:3

- Esta tarea ha sido resuelta correctamente por todos los alumnos, situación que se había presentado en cifras similares en la Cuestión de Investigación 2

CEI.XII.1.2: Sobre el significado del reparto 0:5

- Resulta sorprendente que las respuestas correctas hayan descendido respecto a tareas similares planteadas con la representación polinómica unitaria (Cuestión de Investigación 2); este descenso de 19 puntos porcentuales ha puesto de manifiesto que las exposiciones del profesor y los debates entre alumnos no han conseguido modificar conocimientos personales erróneos de los estudiantes; antes bien, 5 alumnos han variado sus respuestas correctas anteriores y tan solo 1 ha modificado su respuesta incorrecta.
- La posición de los estudiantes reincide en el aspecto de la imposibilidad de una acción y, en consecuencia, la imposibilidad de ofrecer el

resultado de tal acción

*No tiene sentido porque si no tenemos nada para repartir es imposible hacer un reparto* (alumno nº 8).

CEI.XII.1.3: Sobre el significado del reparto 7:0

- Los resultados siguen siendo similares a los obtenidos con la misma tarea en la representación polinómica unitaria. Y sigue apareciendo el 0 como símbolo para expresar la imposibilidad de la acción, y no como cuantificación de una cantidad de magnitud.

*Tampoco tiene sentido esta expresión porque aunque exista algo que repartir, no hay personas para las que realizar el reparto 7:0 = 0* (alumno nº 48).

CEI.XII.1.4: Sobre el significado del reparto 0:0

- A pesar de los trabajos realizados, los resultados de esta tarea son similares a los alcanzados anteriormente. Y sigue persistiendo la presencia de 0 para indicar la imposibilidad de la acción

*(0:0) = 0. No tiene sentido repartir 0 unidades entre 0 personas* (alumno nª 18).

CEI.XII.2.: Sobre las condiciones para que a:b indique reparto

- No es significativo el resultado de esta tarea por cuanto hay una incidencia grande de alumnos que no dan respuesta (74% de la calificación 3).

CEI.XII.3.1: Sobre la justificación de la existencia de repartos con infinitos sumandos

- Los estudiantes han constatado previamente que hay expresiones polinómicas decimales con infinitos sumandos; sin embargo, hay muchos que no encuentran las razones de que así ocurra llegando incluso a determinar que la aparición de infinitos sumandos se debe a la no utilización del criterio de la mayor parte, confundiendo este resultado con la finitud de las representaciones polinómicas unitarias.

*Los repartos que se escriben con un número infinito de sumandos es porque en ellos no se sigue el criterio de la mayor parte ya que si lo seguimos siempre llega un momento en que sólo tenemos un trozo para repartir y aquí acabaría el reparto. Cuando no se sigue este criterio siempre tenemos una unidad para repartir, por muy pequeña que sea* (alumno 31).

CEI.XII.3.2: Sobre la caracterización de los repartos en infinitas fases

- Las razones de la infinitud de las representaciones polinómicas decimales son intuidos por algunos alumnos, pero se limitan a contemplar que el número de personas sea 5 o un múltiplo de 5, pues argumentan que al hacer las divisiones en 10 partes debe ocurrir que el proceso finalizará si los repartos se hacen para 5 personas. Hay otros estudiantes que establecen las condiciones para finalizar el reparto, pero no profundizan en el establecimiento de relaciones numéricas

*Cada vez que realizamos un reparto basándonos en una representación polinómica decimal, partimos o dividimos las unidades a repartir en 10 trozos, el reparto se acabará, las unidades a repartir (un número natural multiplicado por una potencia de 10 o 10) pueda ser dividido entre el número de personas que participan en el reparto. Si no ocurre esto, el reparto no acabará* (alumno nº 23).

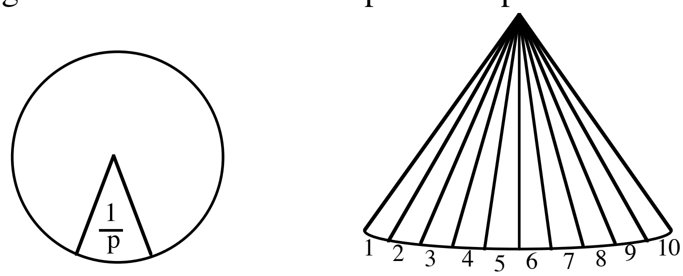
CEI.XII.4.1: Sobre la igualdad $(1:10)\left[\frac{1}{10}\right] = 1\left[\frac{1}{10^2}\right] = \frac{1}{10^2}$

- La práctica con tareas similares en la representación polinómica unitaria, un mejor conocimiento del modelo y, posiblemente, la ausencia de dificultades en la tarea, han producido un resultado bastante satisfactorio, encontrando argumentos como el siguiente

  *Si tenemos un reparto de una tortilla para 10 personas el resultado es un trozo de tamaño 1/10, pero si el reparto es de una tortilla de tamaño 1/10 para 10 personas el resultado es un trozo de tamaño 1/10 de un 1/10, es decir 1/10*$^2$ (alumno nº 15).

CEI.XII.4.2: Sobre la igualdad $\left\{1\left[\frac{1}{10}\right]\right\}\left[\frac{1}{p}\right] = 1\left[\frac{1}{10p}\right]$

- Hay un número considerable de alumnos que resuelven la tarea desde sus conocimientos operatorios sobre fracciones, aunque otros alumnos justifican la igualdad recurriendo al empleo de representaciones gráficas




  *Entendemos la segunda igualdad no como una multiplicación sino como una cantidad de una cantidad, como vemos en el gráfico el planteamiento de la igualdad es correcto* (alumno nº 15).

- Pero sigue habiendo un número considerable de alumnos que interpretan de forma errónea las relaciones semánticas subyacentes, y sin que ello obstaculice la justificación exigida en la tarea

  *Multiplicación de tamaños de reparto; multiplicamos el nº de tortillas y el nº de personas que intervienen por lo tanto será igual* (alumno nº 16).

CEI.XII.4.3: Sobre la igualdad $(a:b)\left[\frac{1}{10}\right] = a:10b$

- El resultado más numeroso es el de los alumnos que han utilizado los conocimientos sobre fracciones y la comprobación de la igualdad pedida, siendo su trabajo el de interpretar las fracciones con significado de repartos igualitarios.

  *Si entendemos a:b como una fracción entendida como reparto: a/b al multiplicarlo por el tamaño [1/10] nos quedará otra fracción a/10b que entendida como reparto será a:10b* (alumno nº 18).

<u>f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes</u>

- Esta tarea se propuso a los estudiantes después de realizar una similar con representaciones polinómicas unitarias y que hubiese un debate acerca de la mencionada tarea. Las respuestas correctas han sido ligeramente superiores a las de la Cuestión de Investigación 2, pero siguen existiendo errores que no han sido superados, lo que evidenciaría la persistencia de los conocimientos personales de los estudiantes.

En la próxima sesión el profesor expondrá los resultados haciendo especial hincapié en el significado de la representación, en la cuantificación de la cantidad y en la simbolización de las acciones de imposible realización.

- Los estudiantes han intuido relaciones de divisibilidad para que el proceso de reparto sea finito, pero en la mayoría de los casos no han delimitado con precisión tales condiciones, limitándose a la exigencia de que el número de personas sea múltiplo de 5. Aunque hay estudiantes que señalan que las sucesivas divisiones en 10 partes llevarán a la exigencia de que el proceso será finito si es exacta la división de la forma a. $10^n$ : b, no alcanzan a determinar dicha relación en términos de divisibilidad.
- La presentación de la fracción con significado de reparto igualitario ha puesto de manifiesto que los estudiantes, ante tareas de interpretación de la semántica subyacente a una expresión simbólica, tienden a aplicar sus conocimientos operatorios sobre fracciones. Por tanto, si se quiere que los estudiantes trabajen los significados en el modelo propuesto, las consignas para la realización de las tareas deben enunciarse con la exigencia de no utilizar las operaciones con fracciones (o de que se resuelvan utilizando los significados en el modelo en que se trabaja).

<u>g) Resultados</u>

1. Las dificultades de interpretación del símbolo 0 no se superan con este sistema de representación. Las ideas sobre la imposibilidad de las acciones y la inexistencia de la cantidad nula están fuertemente arraigadas.
2. La idea de repartos en infinitas fases se admite por los estudiantes como proceso formal, pero no como situación real derivada de las peculiaridades de la técnica del reparto.
3. Las limitaciones en el uso de la matemática demostrativa persisten en aquellos estudiantes que mostraron dichas limitaciones en tareas anteriores.

### VI.4.3. Ficha de trabajo número 6

<u>a) Trabajo propuesto</u>

*Actividad 1: Encuentra las condiciones iniciales de los repartos que dan lugar a las representaciones polinómicas siguientes*

*a)* $5\left[\frac{1}{10}\right]+3\left[\frac{1}{10^3}\right]$ *b)* $7\left[\frac{1}{10}\right]+3\left[\frac{1}{10^2}\right]+\dots$

*c)* $2+5\left[\frac{1}{10}\right]+7\left[\frac{1}{10^2}\right]+5\left[\frac{1}{10^3}\right]+7\left[\frac{1}{10^4}\right]+\dots$

*Actividad 2 Utilizando las representaciones polinómicas decimales, ¿son equivalentes las fracciones 3/11 y 12/44?, ¿por qué?*

*Escribe las condiciones que han de cumplir dos fracciones positivas para que sean equivalentes, utilizando la representación polinómica decimal*

*Actividad 3: Utilizando las representaciones polinómicas decimales,*

*a) Escribir 2 fracciones mayores que 9/20.*

*b) Escribir 2 fracciones menores que 5/11*

*c) Escribir 2 fracciones que cumplan la doble condición de ser mayores que 1/2 y menores que 3/4.*

*d) Escribir 2 fracciones que cumplan la doble condición de ser mayores que 4/7 y menores que 9/11.*

b) Observaciones sobre las respuestas de los estudiantes

- En la actividad 1, los estudiantes demandaron orientaciones del profesor, pues había una casuística diferente a la que se presentaba en la reconstrucción del reparto conocida su representación polinómica unitaria. Por ello, las respuestas de los estudiantes no reflejan sus pensamientos iniciales, sino el resultado de las orientaciones del profesor; así que nos limitamos a reseñar las orientaciones que se hicieron a los estudiantes:

  En la tarea a), el hecho de que no apareciesen las partes de tamaño $1/10^2$, significa que a cada uno de los asistentes no se les ha podido dar partes de ese tamaño, se les han dado 0 partes, pero el fraccionamiento de las partes ha existido y, por tanto, hay que tenerlo en consideración para determinar lo que ha ocurrido en la fase siguiente.

  En la tarea b) la aparición de una representación polinómica decimal con infinitos sumandos llevó inicialmente a los alumnos a realizar la misma técnica utilizada en el caso de que hubiese un número finito de sumandos, y dieron por finalizado el reparto cuando ya no aparecían más sumandos en el enunciado. En ese momento, los estudiantes plantearon al profesor que no sabían a que igualar las partes sobrantes, pues si seguían el proceso no acabarían nunca ya que había infinitos sumandos del mismo tipo. Las orientaciones del profesor se encaminaron a hacer reflexionar a los alumnos sobre las condiciones que producen los repartos infinitos (que se produzcan condiciones de reparto similares a las iniciales); y sobre el significado de repartos equivalentes.

  En la tarea c) hubo alumnos que observaron que la existencia de un reparto infinito no podía producirse por la aparición de condiciones de reparto equivalentes a las iniciales, pues existían elementos del reparto que no se repetían. Las indicaciones del profesor se encaminaron a que resolviesen la tarea en dos partes: una primera para averiguar las condiciones del reparto infinito y, una segunda y posterior, encaminada a resolver la situación de la parte que no se repetía. No obstante, hubo estudiantes (como el nº 8), que resolvieron la tarea en una sola actuación

- En la actividad 2, los estudiantes no hallaron dificultades para encontrar que las fracciones propuestas eran equivalentes puesto que sus representaciones polinómicas decimales eran iguales. Sin embargo, sí que mostraron extrañeza ante la exigencia de que formulasen un resultado general utilizando las representaciones polinómicas decimales, tal y como exigía el enunciado. Los alumnos resolvieron la tarea en términos de equivalencia de fracciones, de acuerdo con sus conocimientos previos, pero la respuesta parecía no convencerles y demandaron aclaraciones al profesor, quien les remitió a una nueva lectura del enunciado y, en consecuencia, a que formulasen la equivalencia de fracciones en nuevos términos. De este modo, las respuestas mayoritarias se expresaron de forma similar a la siguiente:

  > *Para que dos fracciones sean equivalentes se debe realizar la representación polinómica, y si son iguales los resultados, son equivalentes* (alumno nº 18).

  No obstante, hubo algunos alumnos, pocos, que mantuvieron sus posicionamientos en torno a los conocimientos previos

*(a : b) ≈ (c : d), así a.n=c ,, b.n=d., siendo n natural y n ≠1, n ≠ 0* (alumno nº 16).

- En la actividad 3 hay diferentes estrategias para abordar las tareas propuestas, que resumimos seguidamente

  a) Para encontrar representaciones polinómicas decimales mayores que una dada y que tiene un número finito de sumandos:

  - Aumentar el primer sumando (alumno nº 1).
  - Añadir sumandos (alumno nº 10).
  - Aumentar el segundo sumando (alumno nº 8).
  - Encontrar fracciones mayores que los datos y hallar su representación polinómica decimal (alumno nº 25).

  b) Para encontrar representaciones polinómicas decimales menores que una dada y que tiene un número infinito de sumandos:

  - Disminuir el segundo sumando y dejar la parte infinita como la del dato (alumno nº 18).
  - Quitar sumandos (alumno nº 3).
  - Quitar la parte infinita y disminuir los sumandos (alumno nº 10).
  - Encontrar fracciones menores que los datos y hallar su representación polinómica decimal (alumno nº 25).

  c) Para encontrar representaciones polinómicas decimales intercaladas entre otras dos dadas y que tienen un número finito de sumandos:

  - Aumentar los valores del primer sumando (alumno nº 7).
  - Disminuir los valores del segundo sumando (alumno nº 3).
  - Buscar fracciones con igual denominador e intercalar otras, de las que se obtiene su representación polinómica decimal (alumno 39).

  d) Para encontrar representaciones polinómicas decimales intercaladas entre otras dos dadas y que tienen un número infinito de sumandos:

  - Aumentar los valores del primer sumando (alumno nº 7).
  - Aumentar los valores del segundo sumando (alumno nº 3).
  - Aumentar el valor del primer sumando y añadir otros sumandos (alumno nº 8).
  - Aumentar solamente el primer sumando y mantener los sumandos infinitos tal y como aparecen en los datos de la fracción menor (alumno nº 10).
  - Buscar fracciones con igual denominador e intercalar otras, de las que se obtiene su representación polinómica decimal (alumno 39).

c) Interpretación y valoración

- Los trabajos de los estudiantes, en la tarea 1, se desarrollan completamente con representaciones simbólicas, ya no tienen que recurrir a representaciones gráficas; sin embargo, no hacen uso del modelo ante situaciones conflictivas puesto que el trabajo con entes numéricos les lleva a resolver sus inquietudes en este terreno, lo que produce algunos errores derivados de unas actuaciones operatorias en las que no se sienten seguros. Por ello, en sus intervenciones, el profesor hizo continuas llamadas a que los estudiantes manejasen las expresiones simbólicas con el referente del modelo que se ha propuesto, para que de este modo pudiesen asegurar que las operaciones realizadas tenían significado

- En la realización de tareas de orden hay muchos estudiantes que varían la estrategia para encontrar dos representaciones polinómicas decimales; es decir, la forma en que encuentran la primera no la utilizan para la segunda, sino que recurren a una estrategia diferente. Sirva de ejemplo el caso del alumno nº 21 que para encontrar un representación mayor que una dada lo que hace es aumentar el número de partes del primer sumando, pero para encontrar otra segunda representación añade nuevos sumandos a la representación dada; y de forma análoga, para encontrar una representación menor que la dada disminuye el primer sumando, mientras que para encontrar una segunda representación disminuye el número de sumandos de la representación dada.
- La reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto conocida su representación polinómica decimal se muestra como una herramienta potente para que los estudiantes revisen todos los aspectos de la técnica de reparto utilizada, y en la que deben controlar las cantidades a repartir, el fraccionamiento de las partes, las partes sobrantes, las condiciones del reparto en cada fase, y las condiciones de finalización del reparto. Además, las representaciones polinómicas decimales exigen una evaluación previa (si faltan partes de determinado tamaño, si la representación tiene un número finito o infinito de términos, cuáles son los sumandos que se repiten, ...), para determinar la forma de trabajo a seguir; situación que no se producía con las representaciones polinómicas unitarias
- En buena parte de los trabajos de los alumnos sobre relaciones de orden observamos que hay una tendencia a crear nuevas representaciones manteniendo la forma de los datos. Así por ejemplo, salvo el caso del alumno nº 51, no hay repuestas en las que se incorporen unidades enteras, pues los datos contienen representaciones en las que aparecen solamente partes de la unidad. También se observa que si los datos contienen representaciones con un número finito de sumandos, las respuestas tienden a mantener ese número de sumandos y, de igual forma, si las representaciones de los datos contienen un número infinito de sumandos los estudiantes también utilizan respuestas con los sumandos que se repiten. Pensamos que estas actuaciones pueden deberse a que algunos estudiantes tienen un control parcelado de las representaciones polinómicas decimales, que no tiene una visión global de la misma como una cantidad formada por la agregación de partes de la unidad.

d) Resultados

Los resultados más destacables de la Ficha de Trabajo número 6 son:

1. La técnica de reconstrucción del reparto a partir de su expresión polinómica decimal es compleja por la variedad de elementos intervinientes, por lo que se precisa de la intervención del profesor para mostrar algún ejemplo.

### VI.4.4. Cuestión Específica de Investigación número 6

a) Propósitos de la indagación

a) Queremos explorar el significado que conceden a la suma de expresiones polinómicas decimales, así como a las técnicas que utilizan para obtener el resultado de esa suma.

b) Interesa conocer el significado que conceden al producto de una expresión polinómicas decimal por un número entero, así como a las técnicas que utilizan para obtener el resultado de ese producto.

c) Pretendemos explorar el significado que dan los estudiantes al cociente entre una expresión polinómica decimal y un número entero, así como a las técnicas que utilizan para obtener el resultado de ese cociente.

b) Trabajo propuesto.

Tarea 1: *Si encuentras la suma de dos representaciones polinómicas decimales*

$$\left\{3\left[\frac{1}{10}\right]+5\left[\frac{1}{10^2}\right]\right\}+\left\{3\left[\frac{1}{10}\right]+3\left[\frac{1}{10^2}\right]+...\right\}$$

*¿cómo se interpreta en el modelo? ¿Cuál será la representación polinómica decimal que corresponda al resultado? Explica cómo lo has hecho.*

Tarea 2: *Escribe, en cada uno de los casos, la interpretación que corresponde a cada una de las operaciones en el modelo, y calcula el resultado*

$$a)\ \left\{4\left[\frac{1}{10}\right]+7\left[\frac{1}{10^2}\right]\right\}x\ 2\ \ ;;\ b)\ \left\{6\left[\frac{1}{10}\right]+2\left[\frac{1}{10^3}\right]\right\}:3$$

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado IV.7.2 con los siguientes criterios:

**1.- Interpretación correcta o bastante probable**

**2.- Interpretación dudosa o incompleta**

**3.- Interpretación errónea o inadecuada**

d) Datos obtenidos

Los datos obtenidos correspondientes a cada uno de los futuros profesores en esta Cuestión de Investigación, según los criterios y apartados considerados, se recogen en el AnexoV.1.9. Los datos globales se recogen en el siguiente cuadro, indicando para cada Unidad de Análisis las frecuencias **(porcentajes)** de cada uno de los criterios utilizados. El número de estudiantes que realizaron cada una de las tareas varía entre 29 y 34.

| Criterios valoración / Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| CEI. XIII.1. | 14 (**48**) | 10 (**35**) | 5 (**17**) |
| CEI. XIII.2 | 11 (**38**) | 14 (**48**) | 4 (**14**) |
| CEI. XIII.3 | 28 (**82**) | 1 (**3**) | 5 (**15**) |
| CEI. XIII.4 | 1 (**3**) | 32 (**94**) | 1 (**3**) |
| CEI. XIII.5 | 26 (**76**) | 5 (**15**) | 3 (**9**) |
| CEI. XIII.6 | 1 (**3**) | 31 (**91**) | 2 (**6**) |

Tabla VI.6. Resultados de la Cuestión Específica de Investigación número 6

<u>e) Análisis e interpretación</u>

CEI.XIII.1: Sobre el significado de la suma de expresiones polinómicas decimales

- Aun cuando el significado de la suma ya se trató entre expresiones polinómicas unitarias, sigue siendo alto el porcentaje de alumnos que se limitan a leer el signo de suma. Además, detectamos ideas erróneas persistentes en los aspectos siguientes:

  i) El fraccionamiento de la unidad no se hace de forma sistemática, sino que depende del número de participantes

  *Un niño en el día de su cumpleaños le dan una tarta que la divide en 10 partes por cada una de las personas que hay, y de lo que queda hace lo mismo* (alumno nº 11).

  ii) Confundir las fases del reparto con el resultado del reparto

  *Una misma persona ha participado en 2 repartos diferentes y suma la cantidad del primero mas la cantidad obtenida en el segundo reparto pero además se supone que esta persona participa ∞ veces en el segundo reparto* (alumno nº 38).

  iii) La suma se interpreta como agregación de magnitudes diferentes

  *En una fiesta, por ejemplo, se reparten tartas y tortillas entre los asistentes. A cada uno le corresponde* $3\left[\frac{1}{10}\right] + 5\left[\frac{1}{10^2}\right]$ *de tarta y* $3\left[\frac{1}{10}\right] + 3\left[\frac{1}{10^2}\right] + \ldots$ *de tortilla. ¿Cuánto le correspondería a cada uno entre tarta y tortilla* (alumno nº 21).

CEI.XIII.2: Sobre el cálculo de la suma de expresiones polinómicas decimales

- Los estudiantes, de forma mayoritaria, no han justificado las manipulaciones simbólicas en el modelo propuesto; se han limitado a señalar que debe efectuarse la suma de las partes del mismo tamaño sin justificar tal decisión.

CEI.XIII.3: Sobre el significado del producto de una expresión polinómica decimal por un número natural

- Los estudiantes, de forma muy mayoritaria, han interpretado correctamente la operación con el significado de suma reiterada de cantidades iguales o como operador que duplica una cantidad.
- Resulta llamativo que un alumno que asiste habitualmente a las sesiones de clase, el número 11, muestre una interpretación errónea del proceso de reparto, sosteniendo que se reparte una unidad en varias fases sucesivas, pero haciendo fraccionamientos de la parte sobrante, no de cada una de las partes sobrantes:

  *Un chico divide una tortilla en 10 partes de las que coge 4, y de las sobrantes las ha vuelto a dividir en 10 partes de las que ha cogido 7. Luego suma las partes. Coge otra tortilla y hace lo mismo con ella; el resultado lo suma al de la otra tortilla.* (alumno nº 11).

CEI.XIII.4: Sobre el cálculo del producto de una expresión polinómica decimal por un número natural

- De nuevo se pone de manifiesto que los estudiantes aplican sus conocimientos operatorios sin reflexionar sobre el significado de sus acciones. Solamente hay un alumno, el número 18, que da razones de la forma en que actúa, a partir del modelo.

CEI.XIII.5: Sobre el significado del cociente entre una expresión polinómica decimal y un número natural

- Las respuestas correctas son significativamente más numerosas que las de quienes no responden o las de quienes lo hacen limitándose a la lectura de la operación. Si estos resultados se comparan con los obtenidos para el producto de una expresión polinómica decimal por un número natural parece deducirse que algunos estudiantes han encontrado más dificultades en el momento de dar significado al cociente

CEI.XIII.5: Sobre el cálculo del cociente entre una expresión polinómica decimal y un número natural.

- De una forma casi general, salvo en el caso del alumno número 18, los alumnos que han obtenido el resultado del cociente propuesto lo han hecho sin justificar sus acciones, simplemente se han limitado a reflejar, con más o menos detalle, las acciones que han realizado.

<u>f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes</u>

• Aun cuando el significado de la suma se ha analizado y comentado en sesiones anteriores (al trabajar con repartos y al hacerlo con representaciones polinómicas unitarias), hay alumnos que no ven la necesidad de dar significado a tal operación entre representaciones polinómicas decimales; parece que su preocupación se centra en el cálculo del resultado; posiblemente sea consecuencia de una práctica escolar en la que priman las técnicas sobre los conceptos.

• Resulta llamativo que dos estudiantes (los números 10 y 38) asocien las representaciones polinómicas decimales de infinitos sumandos con el hecho de que un mismo individuo participe infinitas veces en un reparto. Debajo de esta interpretación parece surgir la noción de que los repartos no pueden hacerse en infinitas fases, que los repartos concluyen en un número finito de fases, y, sin embargo, si es posible pensar que un individuo participa un número infinito de veces en un mismo reparto. Esta situación pensamos que surge de que estos estudiantes no identifican la representación polinómica decimal como una misma entidad, como el resultado de un reparto, sino que la interpretan como la agregación de cantidades de magnitud recibida en diferentes repartos, uno por cada uno de los sumandos.

• Los estudiantes, de forma mayoritaria, manifiesta una correcta interpretación del significado del producto y cociente entre representaciones polinómicas decimales y números naturales. Sin embargo, volvemos a detectar una tendencia muy acusada a concebir las matemáticas como conjunto de técnicas operatorias realizadas entre entes numéricos descontextualizados. Los estudiantes, a pesar de que se reiteró las exigencias de la tarea, centran su preocupación en alcanzar los resultados, sin que ello les lleve a reflexionar sobre la viabilidad de su existencia o a justificar las acciones que realizan. Pensamos que la larga experiencia personal en el aprendizaje de las matemáticas no resulta fácilmente modificable por parte de los estudiantes.

g) Resultados

Los más destacables de la Cuestión Específica de Investigación número 6 son:

1. Hay algunos estudiantes que se resisten a dotar de significado a las operaciones en algún modelo, parecen tener asumido que las propias relaciones simbólicas son suficientes para garantizar la existencia de las operaciones.
2. La obtención del resultado de las operaciones se interpreta como un trabajo en el ámbito simbólico, de forma que no son necesarias las justificaciones de las actuaciones realizadas.

**VI.4.5. Reflexión sobre la comprensión del sistema polinómico decimal.**

- Los alumnos abandonan las representaciones gráficas y se limitan a trabajar con el lenguaje simbólico. Sin embargo, sí que utilizan el modelo para reflexionar sobre el significado de las manipulaciones simbólicas, con lo que la instrucción se muestra eficaz en la conexión entre modelo y sistema de representación.
- En este tema los estudiantes han vivenciado la influencia que tienen las acciones en el modelo sobre el sistema de representación asociado. De hecho, una modificación en las acciones produce el sistema polinómico decimal que tiene similitudes con el polinómico unitario, pero también presenta diferencias cualitativamente importantes.
- La utilización de la simbología presenta dificultades iniciales porque se precisa indicar el número de partes recibidas en cada fase, y porque hay que simbolizar una suma infinita.
- La presencia del símbolo 0 continúa generando dificultades de interpretación aun utilizando el propio modelo. La idea errónea más persistente es la de utilizar el símbolo 0 para indicar que la acción no se puede realizar.
- Las tareas diseñadas sirven para que los estudiantes reflexionen sobre la importancia de las normas sintácticas de los sistemas de representación y, de hecho, han sido cuidadosos desde el principio.
- La presencia de expresiones con infinitos sumandos ha puesto de manifiesto ideas erróneas sobre el infinito, tales como que la suma de cantidades infinitas produce una cantidad infinita, o como que tal reparto no existe porque se termina en número finito de pasos debido a la "pequeñez" de las partes.
- Las actividades de determinar los elementos del reparto conocida su expresión polinómica unitaria, resultan muy adecuadas para que los estudiantes reflexionen sobre las características semánticas que subyacen en este sistema de representación, sobre todo en las expresiones con infinitos sumandos.
- El significado del orden en el modelo aparece con gran nitidez, pues basta comparar cantidades de magnitud medidas con la misma unidad. Y también es palpable la potencia del sistema de representación para comparar con facilidad

dos expresiones polinómicas decimales.

- Al realizar tareas referentes a dotar de significado a las operaciones los estudiantes han mejorado los resultados a lo largo de este tema, aunque todavía hay algunos que no se ocupan del significado de la operación, simplemente se ocupan de la realización de los cálculos necesarios para obtener el resultado.
- Persisten las dificultades de hacer justificaciones de resultados generales. Su origen parece ubicarse en la utilización de expresiones algebraicas en las que las letras son interpretadas como nombres de objetos, no como parámetros.
- Este tema sirve para incrementar los conocimientos personales de los alumnos sobre los números racionales. Y también se ha mostrado como un medio apropiado para que los futuros maestros reflexionen acerca de sus conocimientos personales sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje.

## VI.5. Observación y reflexión del quinto tema: expresiones polinómicas decimales y expresiones decimales

Después de haber introducido la representación polinómica decimal y haber establecido conexiones con la notación fraccionaria, interesa conocer si los estudiantes amplían sus conocimientos previos sobre números escritos con notación decimal en términos de repartos igualitarios.

### VI.5.1. Cuestión Específica de Investigación número 7

a) Propósitos de la indagación

a) Queremos explorar los significados que conceden a diferentes números escritos con notación decimal.

b) Pretendemos conocer las relaciones entre las expresiones fraccionaria y decimal, con especial atención a las expresiones fraccionarias en las que aparece el valor 0.

c) Interesa explorar cómo establecen relaciones de orden entre expresiones decimales en los casos en que los números a comparar sean periódicos.

d) Queremos conocer el significado de operaciones expresadas con notación decimal, así como las estrategias de cálculo que utilizan los estudiantes.

b) Trabajo propuesto.

Tarea 1: *i.- Explica,* ***de todas las formas posibles****, lo que entiendes en cada uno de los casos siguientes:* a) 12 ;; b) 6,23 ;; c) 0,99999..... ;; d) $9,81\overline{437}$

*ii.- En cada uno de los casos siguientes, escribe los símbolos con notación decimal, justificando la respuesta* a) $\frac{35}{5}$ ;; b) $\frac{7}{7}$ ;; c) $\frac{2}{0}$ ;; d) $\frac{0}{8}$ ;; e) $\frac{0}{0}$

Tarea 2: *Encuentra todas las expresiones decimales situadas entre las que se proponen*

a) entre $3,5$ y $3,\overline{5}$ b) entre $4,\overline{27}$ y $4,\overline{28}$

| Tarea 3: *En cada apartados tienen que indicar el significado de la operación que se propone, la forma de obtener el resultado y cómo se justifica ese resultado* *a)* $3,98 - 3,\overline{97}$ ;; b)$0,25 \times 4,367$ ;; c) $4,\overline{2} \times 0,\overline{543}$ ;; e) $2,\overline{36} : 4$ |
|---|

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado IV.7.2 con los siguientes criterios:

**1.- Interpretación correcta o bastante probable**
**2.- Interpretación dudosa o incompleta**
**3.- Interpretación errónea o inadecuada**

d) Datos obtenidos

Los datos se recogen en los Anexos V.1.10 y V.1.11. Los datos globales se resumen en el siguiente cuadro, indicando para cada Unidad de Análisis las frecuencias **(porcentajes)** de cada uno de los criterios utilizados.

El número de estudiantes que realizaron cada una de las tareas varía entre 29 y 34.

| Criterios valoración / Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| CEI. XIV.1 | 16 (**50**) | 1 (**3**) | 15 (**47**) |
| CEI. XIV.2 | 22 (**69**) | 2 (**6**) | 8 (**25**) |
| CEI. XIV.3 | 24 (**75**) | 2 (**6**) | 6 (**19**) |
| CEI. XIV.4 | 24 (**75**) | 2 (**6**) | 6 (**19**) |
| CEI. XV.1 | 32 (**100**) | 0 (**0**) | 0 (**0**) |
| CEI. XV.2 | 32 (**100**) | 0 (**0**) | 0 (**0**) |
| CEI. XV.3 | 21 (**81**) | 2 (**6**) | 4 (**13**) |
| CEI. XV.4 | 26 (**81**) | 0 (**0**) | 6 (**19**) |
| CEI. XV.5 | 19 (**59**) | 8 (**25**) | 5 (**16**) |
| CEI. XVI.1 | 11 (**31**) | 20 (**55**) | 5 (**14**) |
| CEI. XVI.2 | 5 (**14**) | 8 (**22**) | 23 (**64**) |
| CEI. XVII.1 | 21 (**60**) | 8 (**23**) | 6 (**17**) |
| CEI. XVII.2 | 12 (**34**) | 5 (**14**) | 18 (**52**) |
| CEI. XVII.3.1 | 12 (**34**) | 5 (**14**) | 18 (**52**) |
| CEI. XVII.3.2 | 7 (**20**) | 21 (**60**) | 7 (**20**) |
| CEI. XVII.4.1 | 3 (**9**) | 6 (**17**) | 26 (**74**) |
| CEI. XVII.4.2 | 6 (**17**) | 4 (**11**) | 25 (**72**) |
| CEI. XVII.5 | 21 (**60**) | 2 (**6**) | 12 (**34**) |
| CEI. XVII.6 | 8 (**23**) | 12 (**34**) | 15 (**43**) |

Tabla VI.7. Resultados de la Cuestión Específica de Investigación número 7

e) Análisis e interpretación

CEI.XIV.1: Sobre la interpretaciones del número 12

- La mitad de los estudiantes no dan mas que un significado a este número que, mayoritariamente, interpretan en términos de sus relaciones semánticas en el sistema de numeración posicional decimal; un grupo más reducido de estos alumnos interpreta dicho número como resultado de un reparto. De los estudiantes que dan más de un significado, son mayoría los que lo hacen en términos operatorios

*Es el resultado de un reparto donde cada individuo recibe 12 tortillas. Suma de 2 o mas repartos donde al final obtienen 12 tortillas. Resta de 2 o mas repartos donde al final obtienen 12 tortillas. Resultado obtenido al realizar un reparto de un reparto. Es un número natural* (alumno nº 15).

- Como errores en la tarea hemos detectado que algunos estudiantes no tienen claramente delimitadas las características del conjunto de los números naturales. Así, el alumno nº 11, interpreta el número 12 como *número natural, positivo y entero*.

CEI.XIV.2: Sobre las interpretaciones del número 6,23

- Estas respuestas presentan diferencias con respecto al apartado anterior y no son solamente de tipo cuantitativo. Las respuestas de 2 o más significados han disminuido, hay que considerar que son muchos los estudiantes que formulan su única respuesta en términos descriptivos

*6,23 es un número decimal compuesto por 6 unidades 2 décimas y 3 centésimas 6 + 0,2 + 0,03* (alumno nº 21).

CEI.XIV.3: Sobre las interpretaciones del número 0,99999.....

- La interpretación de números periódicos ha significado una reducción en el número de estudiantes que dan dos o más significados a este número. Además, hay que indicar que las respuestas han sido de tipo descriptivo; en unos casos utilizan el sistema de numeración decimal y en otros casos el resultado de un reparto igualitario

*Expresa el resultado de un reparto que nunca se acaba ya que siempre va a quedar una mínima parte, que por pequeña que sea, se va a poder repartir. Por tanto el individuo nunca recibirá una cantidad exacta, sino aproximada a la unidad* (alumno nº 22).

- Cabe reseñar que tan solo tres alumnos mencionan que este número está próximo a la unidad, pero ninguno de los estudiantes identifican este número como 1 simbolizado con notación decimal periódica.

CEI.XIV.4: Sobre las interpretaciones del número $9,814\overline{37}$

- Al comparar los resultados de este número con los del número 0,999... se observa que son iguales, lo que nos muestra que los estudiantes tienen las mismas dificultades al dar significado a los números periódicos, sean puros o mixtos.

CEI.XV.1: Sobre las interpretaciones del número 35/5

- La totalidad de las respuestas de los alumnos son correctas. Sin embargo, hay que reseñar las respuestas de algunos alumnos que dejan entrever que su conocimiento personal de la notación decimal debe ir asociado a la escritura de la coma decimal, seguida de un cero; incluso se llega a entender como periódico el resultado

*35/5 =* $7,\overline{0}$ *se pone cero periodo porque siempre la parte decimal será cero. Esto viene de dividir los dos números y el resultado es la parte entera mas lo* *que sobre para la unidad en la parte entera* ($\overline{0}$) (alumno 11).

CEI.XV.2: Sobre las interpretaciones del número 7/7

- Los alumnos resuelven correctamente la tarea, pero mantienen las mismas dificultades de simbolización indicadas en el apartado anterior

$\frac{7}{7} = 1,000... = 1,\overline{0}$ *piden notación decimal que es utilizando la separación mediante una coma de la parte decimal de la entera* (alumno nº 19).

CEI.XV.3: Sobre las interpretaciones de la expresión 2/0

- Es alto el porcentaje de alumnos que responden correctamente a la pregunta; sin embargo, seguimos encontrando alumnos que tienen dificultades de interpretación de la simbología propuesta. Entre los errores detectados unos provienen de una incorrecta interpretación de las acciones que se realizan y los resultados que se obtienen, por lo que la imposibilidad de realizar la acción se simboliza con 0

$\frac{0}{2} = 0$ *no se efectúa ningún reparto, pues tengo objetos para repartir pero no hay participantes, así que me quedarán los mismos objetos y el reparto es nulo* (alumno nº 19).

- Y hay otros errores que son provocados por no trasladar al modelo las expresiones simbólicas propuestas; de este modo los alumnos consideran esas expresiones como números y, desde esta posición, actúan de acuerdo con sus conocimientos previos sobre sucesiones de números, dando respuestas del tipo $\frac{2}{0} = \infty$ (alumno nº 18) o bien de indeterminación, como es el caso del alumno nº 39 que justifica su respuesta indicando que *no tiene sentido dividir entre 0.*

CEI.XV.4: Sobre las interpretaciones del número 0/8

- Uno de cada cinco alumnos tiene dificultades de interpretar esta tarea, que es similar a otras realizadas con anterioridad; y de nuevo vuelven a ponerse de manifiesto las dificultades de interpretación de 0 como medida de una cantidad de magnitud nula. Hay alumnos que siguen considerando que no se puede actuar, que no hay posibilidad de imaginar un reparto de 0 unidades

$\frac{0}{8}$ *Como en el caso anterior (se refiere a la expresión* $\frac{2}{0}$*), el reparto no tiene sentido porque lo que significa es que no se reparte nada para 8 personas, por lo que tampoco habrá símbolos para la notación decimal* (alumno nº 41).

CEI.XV.5: Sobre las interpretaciones de la expresión 0/0

- Los alumnos cometen errores derivados de la interpretación de la simbología como entes numéricos sobre los que se puede actuar de acuerdo con conocimientos previos (sobre todo de sucesiones numéricas o funcionales), lo que les lleva a dar respuestas como indeterminación (alumno nº 10) o de • (alumno nº 18). Mientras que para otros alumnos, que han recurrido al modelo, sus errores provienen de una inadecuada interpretación de las acciones y de la simbolización del resultado

$\frac{0}{0} = 0$ *Este reparto es todavía más evidente que los casos anteriores, pues aquí no tenemos ni objetos ni participantes, lo que significa que no hay "nada"* (nº 24).

CEI.XVI.1: Sobre las relaciones de orden entre 3,5 y $3,\overline{5}$

- Aun cuando el porcentaje de aciertos ha sido escaso, hay que tener en cuenta que la mayoría de las respuestas eran incompletas, pues las exigencias de la tarea indicaban que había que encontrar todos los números, y las respuestas de los alumnos se limitaban a señalar que había infinitos y a poner algunos ejemplos. De este modo, las respuestas correctas quedaban limitadas a las que contemplaban alguna estrategia que abarcase diferentes posibilidades de enumerar el conjunto pedido, como el intento del alumno nº 26

  *Busco todos los números decimales con dos decimales: 3,51 -3,52 - 3,53 - 3,54 Hay 4*
  *Con tres decimales: 3,501, 3,502, 3,503 ... 3,555 Hay 54*
  *Con cuatro decimale: 3,5001 .... 3,5555 Hay 554*
  *Observamos que habrá infinitos números decimales, pero una manera de calcularlos con 5, 7, 8 decimales sería n = (n-2 cincos) y un 4. Eje. con 7 decimales habría 555554 números decimales.*

- Hemos de reseñar que no ha habido ningún alumno que haya recurrido al empleo de técnicas ya utilizadas en sesiones anteriores, cuando se mostraba la densidad respecto del orden de los números racionales positivos, como la de utilizar la semisuma de dos números, o el valor intermedio entre ambos.

- De inesperadas podíamos calificar las respuestas erróneas de algunos estudiantes, pues pensábamos que las tareas de orden no debían ocultar conocimientos personales inadecuados. Sin embargo, detectamos creencias sobre la forma de los números periódicos:

  *Entre 3,5 y $3,\overline{5}$ es decir, entre 3,500000...0 y 3,555555...5 se encontrarían todos los números decimales infinitos que van desde 3.50000...1 hasta 3,5555...4* (alumno nº 42).

- Además, esta respuesta encierra otra creencia sobre la densidad de los números racionales positivos que también subyace en las respuestas de otros alumnos; y ésta es la de que los números periódicos forman un conjunto separado del conjunto de los números decimales, en el sentido de que entre dos números periódicos no se contempla la existencia de números decimales: los números mayores o menores que los que tienen infinitas cifras decimales han de tener también infinitas cifras decimales.

CEI.XVI.2: Sobre las relaciones de orden entre $4,\overline{27}$ y $4,\overline{28}$

- El porcentaje de aciertos es muy reducido (uno de cada 7 alumnos), lo que pone de manifiesto las dificultades del orden entre expresiones decimales periódicas, pero han aparecido errores que pensábamos habían sido abordados en tareas anteriores relativos a la densidad respecto del orden; así, encontramos respuestas en las que surge la idea de siguiente, idea que se sustenta en una interpretación de las cifras del periodo como números naturales en los que desaparece la noción de valor posicional

*No hay expresiones decimales situadas entre los 2 porque son dos números periódicos, el* $4,\overline{27}$ *es siempre 4,27272727 ... y nunca podrá añadirse ningún número porque es siempre 4,27272727..* (alumno 12).

- El alumno nº 24 amplia la visión anterior de la constitución de los números periódicos y lo hace en el sentido de que los números periódicos y los decimales se han de considerar como entes separados, y en los que el orden de los decimales es una traslación del orden entre números naturales:

  *En este caso ninguna expresión decimal tendrá significado, por lo tanto, no se encuentra ninguna situada entre los dos números periódicos puros, pues no podemos poner decimales antes de la parte decimal, ni entre medio, ni al final, porque el número pierde su pleno significado.*

  *Pero si no tenemos en cuenta la periodicidad podemos encontrar los siguientes numeros decimales 4,273, 4,274, 4,275, 4,276, 4,277, 4,278, 4,279.*

  *La única normativa que deben cumplir es que el tercero y cuarto nº decimal sea mayor a 27, pues si tenemos en cuenta que* $4,\overline{27}$ *es periódico puro los siguientes decimos serán 27, así que 4,271 no cumplirá la condición de ser mayor a* $4,\overline{27}$

- Hay otro tipo de errores, que ya habían aparecido con expresiones decimales periódicas, que consisten en añadir cifras al final del período

  $4,\overline{27} < 4{,}272727........28$ *(en el infinito* ) (alumno nº 8).

  $4,\overline{27} < 4{,}272727........28 < 4{,}272727...29 < 4{,}272727...30 < .....<$
  $< 4{,}27282727...< 4{,}272827...< 4{,}2729..< ...< 4,\overline{28}$ (alumno 19).

- Finalmente, cabe destacar las respuestas de alumnos que han realizado bien la comparación entre un número decimal y uno periódico, pero que cometen errores producidos por no controlar la constitución del número que oculta la simbolización con las rayas que marcan el periodo. Así el alumno nº 15 incluye como valores mayores que $4,\overline{27}$ a 4,272, 4,2722, 4,273, 4,27233.

CEI.XVII.1: Sobre las interpretaciones de la operación 3,98 - $3,\overline{97}$

- Los alumnos, de forma mayoritaria tienden a dar significado a la resta con el sentido de resta de cantidades de magnitud, o bien con sentido de orden, como la cantidad que separa a una cantidad de otra mayor. Hay un alumno que considera a ambos números como resultado de medidas aproximadas:

  *Teniendo en cuenta que el 2º número se acerca o aproxima al 1º, imaginemos una situación concreta: una máquina de peso que no es exacta en su medición pero su error se encuentra entre ambos números, por lo tanto sabemos que es un error de décimas* (alumno nª 25).

CEI.XVII.2: Sobre los argumentos para el cálculo del resultado de 3,98 - $3,\overline{97}$

- La mayoría de los alumnos tiende a obtener el cálculo recurriendo a sus conocimientos operatorios sobre números decimales, pues la simbología utilizada invita a que así se haga. Sin embargo, son minoritarios los alumnos que ante las dificultades encontradas recurren a la simbolización con la notación fraccionaria (como el alumno nº 10).
- Entre los estudiantes que realizan la resta utilizando el algoritmo de la

resta de números decimales algunos encuentran problemas para simbolizar el resultado, ofreciendo justificaciones poco convincentes:

*Se calcula el resultado restando.*

$$\begin{array}{r} 3{,}980000000000\ldots \\ \underline{-\ 3{,}9797979797\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0{,}000202\ \ldots. \end{array}$$

*Como es periódica el 3 será 2 porque hay más factores* (alumno nº 1).

- El alumno nº 22 utiliza la representación polinómica decimal para realizar la operación, buscando la representación infinita de 3,98 llegando a utilizar la representación polinómica decimal de 3,979999 ...
- En la justificación del resultado encontramos en el alumno nº 51 una confusión en el orden, que le lleva a suponer el resultado con el conocimiento de la proximidad de dos números: *como el número decimal más cercano a* $3,\overline{97}$ *es 3,98. El resultado sería 0, bueno no exactamente, pero sería un número tan pequeño que sería 0*

CEI.XVII.3.1: Sobre las interpretaciones de la operación 0,25 x 4,367

- La conceptualización de la multiplicación propuesta solamente ha sido resuelta con éxito por la tercera parte de los alumnos. Para éstos, la interpretación es la de operador (por ejemplo, alumno nº 21); la de reparto reiterado al considerar el factor 0,25 como 1/4 (por ejemplo el alumno nº 22); y otros estudiantes que recurren al modelo de área como producto de dos longitudes (alumno nº 23), posiblemente recordando el modelo utilizado en su etapa escolar precedente.
- Resulta llamativo que algunos alumnos interpreten la multiplicación propuesta como suma reiterada, aun cuando ello les cree dificultades para expresarlo:

  *Tienes un reparto que te han dado y recibes 0,25 y al día siguiente te dan el reparto que te había tocado 0,25 4,367 veces ¿Cuánta tortilla tenemos en total?* (alumno nº 12).

  *Si se supone que la multiplicación es una suma reiterada de elementos, esto indicaría que tienes un reparto de 4,367 y lo multiplicas, es decir, lo obtienes varias veces, en concreto 0,25 pero no tiene mucho sentido* (alumno nº 43).

CEI.XVII.3.2: Sobre las justificaciones para obtener el resultado de la operación 0,25 x 4,367

- Los estudiantes, de forma mayoritaria, han calculado el resultado de la operación utilizando sus conocimientos previos sobre las operaciones con números decimales. Tan solo algunos estudiantes han trabajado con la notación fraccionaria, mientras que otros hacen la sugerencia de pasar de la notación decimal a la representación polinómica decimal, reconstruir las condiciones de los repartos y realizar el producto de repartos.

CEI.XVII.4.1: Sobre las interpretaciones de la operación $4,\overline{2} \times 0,\overline{543}$

- La mayoría de los estudiantes elude la cuestión de dar significado a la operación propuesta o lo hacen de forma inadecuada, como interpretar el producto con el significado de suma reiterada (alumno nº 1).
- Las respuestas correctas interpretan dicho producto como parte de parte

(alumno nº 26) o como operador (alumno nº 21); en ambos casos una de las expresiones decimales se ha de considerar como una fracción y la otra como una cantidad de magnitud.

CEI.XVII.4.2: Sobre las justificaciones para obtener el resultado de la operación $4,\overline{2} \text{ x } 0,\overline{543}$

- Los estudiantes que resuelven bien la tarea utilizan la notación fraccionaria (como el alumno nº 10), para lo cual utilizan sus conocimientos previos sobre la búsqueda de fracciones generatrices.
- Hay otros alumnos que intentan operar como números decimales, pero sus actuaciones quedan limitadas a denunciar la imposibilidad de realizar la operación, sin ofrecer alternativa alguna:

  *No se puede hacer porque los números decimales serían infinitos al igual que los factores que multiplicamos* (alumno nº 8).
- Hay otros estudiantes que han trabajado con números decimales y, en la creencia de que el resultado de las operaciones con números periódicos debe ser un número periódico, han creado una normativa:

  $4,\overline{2}$ *x* $0,\overline{543} = 2,\overline{2806}$ *Lo he multiplicado como un número natural y al resultado le he añadido tantos decimales (período) como tuvieran entre los dos números multiplicados. Empezando por la derecha.* (alumno nº 11).

CEI.XVII.5: Sobre las interpretaciones de la operación $2,\overline{36}:4$

- Es importante el número de alumnos que dan significado al cociente como reparto reiterado, aunque hay un número destacado de estudiantes que, a pesar de las repetidas llamadas hechas por el profesor, eluden la cuestión de dotar de significado a la operación.
- Merece comentarse que en la realización de la tarea se han explicitado conocimientos personales erróneos sobre el significado de las infinitas cifras del período, que ha hecho que algunos alumnos lo interpreten como un número infinito o como una cantidad infinita de unidades de magnitud:

  *Tiene poco sentido porque intentamos repartir un número periódico de tortillas, o lo que es lo mismo un número infinito entre 4 personas. El único resultado que podemos obtener es aproximado al no tener en cuenta en la realización del reparto que es un número periódico* (alumno nº 39).

  *Como* $2,\overline{36}$ *tiene infinitas cifras, el reparto también tendrá una representación polinómica unitaria infinita, de forma que llegado el momento habrá que indicar que el resultado también es infinito. De todas formas, nos encontramos ante un reparto que puede realizarse como cualquier otro, salvo la excepción de que repartimos una cantidad infinita de tortillas* (alumno nº 41).

CEI.XVII.6: Sobre las justificaciones para obtener el resultado de la operación $2,\overline{36}:4$

- Los alumnos que resuelven correctamente la tarea suelen utilizar la notación fraccionaria, o bien ampliar el algoritmo de la división para números decimales:

  *Hemos operado como una división normal y como 36 se repite hasta* *el infinito, por lo que el resultado también será infinito y periodo porque dividimos siempre la misma cantidad entre las mismas personas* (alumno nº 5).

f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes

- De las respuestas de los alumnos parece deducirse que, para ellos, los números escritos en notación decimal no tienen más significado que el que se deriva de reconocer las relaciones sintácticas y semánticas subyacentes al sistema de numeración decimal. De este modo, el significado de estos símbolos se traduce, para la mayor parte de los alumnos, en una descripción de los elementos que los componen. Es más, no hemos encontrado respuestas en las que la notación decimal aparezca como resultado de una medida, ámbito de trabajo que es familiar para los estudiantes.
- Por otra parte, en estas mismas respuestas podemos observar que para los estudiantes el significado de la simbología de la notación decimal cobra sentido como resultado de un reparto igualitario realizado con criterios y técnicas desarrolladas en las sesiones de clase precedentes. Sin embargo, no es una apreciación que pueda trasladarse a la totalidad del alumnado, o al menos así se desprende de las producciones del alumnado.
- También hemos podido detectar, tanto en las respuestas a las tareas como en las preguntas formuladas al profesor, que los estudiantes no tienen una noción clara y precisa de las características de los conjuntos numéricos, ni de las relaciones de inclusión entre ellos; de hecho, la mayoría de los alumnos clasifican a los números en un solo conjunto.
- Los estudiantes también denominan números decimales a los números periódicos, por lo que el profesor se vio en la necesidad de hacer algunas precisiones al respecto:
    - Los números decimales son los racionales de la forma $n/10^m$ siendo n entero y m natural (Bauvier y George, 1984, pág 229). El conjunto de los números decimales, con la suma y el producto, es un anillo conmutativo y unitario, pero no es un cuerpo.
    - Las operaciones entre números decimales se pueden efectuar mediante una extensión de los algoritmos de los números enteros.
    - Los números decimales permiten aproximarse a otros números.
    - Aparecen símbolos específicos para representar los números racionales no decimales, los números periódicos.
    - Los algoritmos de cálculo de los números decimales no son directamente aplicables a los números periódicos.
- La aparición del número 0,99999... no tuvo ningún significado especial para los estudiantes; tan solo uno de ellos (el número 51) llega a su identificación con el número 1, aunque previamente negase tal identificación: *un número menor a la unidad, que está muy cerca de ella, pero no es la unidad. Generalizando sería igual a 1.* Esto hace suponer que los estudiantes desconocen la escritura de los números decimales como números periódicos de periodo 9
- La aparición de números con infinitas cifras ha hecho emerger ideas erróneas

sobre la constitución de dichos entes pues hay alumnos que admiten la existencia de cifras más allá de la "posición infinito", como si infinito constituyese un número de orden muy grande pero que ocupa un lugar determinado en un conjunto numerable. En este sentido hay que reseñar que la representación polinómica decimal tampoco sirvió para combatir esta idea errónea; antes bien, los estudiantes dicen admitir que, tal y como resulta de la simbolización, el proceso de reparto tiene infinitas fases pero que en la realidad tal supuesto no tiene sentido puesto que si hay una cantidad finita de magnitud el reparto debe finalizar tras un número finito de fases; que no se puede estar repartiendo infinitamente pues las cantidades serían tan pequeñas que el reparto finalizaría en una determinada fase.

- Otro aspecto reseñable sobre la constitución de los números periódicos fue detectada en alumnos que conciben el periodo como un solo número, como un ente numérico global en el que el valor posicional ha perdido su identidad; emerge de esta forma una noción de número periódico en el que se desvanece la idea de densidad respecto del orden; de este modo, como señalan algunos alumnos, entre números cuyas cifras periódicas sean 27 y 28 no puede existir ningún otro número, pues éstos son consecutivos. Y ante la pregunta concreta del profesor al alumno nº 12 sobre si los números $4,\overline{27}$ y $4,\overline{28}$ eran consecutivos, el alumno afirmó que sí lo eran, puesto que entre ellos no cabía ningún otro número
- La notación decimal se presenta para los estudiantes con más dificultades de las que pudiésemos suponer a priori, pues son estudiantes que han usado esta notación durante 10 cursos escolares; además, es una notación presente en la vida cotidiana y habitual en otras disciplinas como física o química. Parece que las dificultades surgen de una práctica calculística con números decimales (reforzada por el uso habitual de calculadoras y ordenadores), que elude la reflexión profunda sobre la naturaleza de las expresiones decimales infinitas.
- Los estudiantes son capaces de dar significado a las operaciones de resta y de cociente de un número periódico por un número natural; además lo suelen hacer dentro del modelo. La multiplicación, tanto de números decimales como de números periódicos, presenta dificultades de conceptualización para los alumnos (aunque algunos de ellos recurren a otros modelos, como el del área); sin embargo, resulta llamativo que algunos estudiantes mantengan el significado de suma reiterada, "tantas veces como", a pesar de que encontrasen dificultades para expresar tal situación en las operaciones propuestas.
- El resultado de las operaciones con expresiones decimales lo han obtenido la mayoría de los alumnos a través de los conocimientos operatorios con números decimales. Ello ha exigido que tuviesen que hacer algunas suposiciones que les permitiesen definir el período del resultado; esta forma de trabajo se ha mostrado más o menos eficaz en todos los casos propuestos, salvo en el caso del producto de dos números periódicos que ha provocado abandonos de la tarea o suposiciones erróneas. Parece deducirse que los

estudiantes no están habituados a utilizar otros sistemas de representación diferente al que se usa en las tareas propuestas; antes bien, los estudiantes han introducido estrategias de simbolización del resultado en vez de utilizar la notación fraccionaria o de realizar los cálculos a partir de las condiciones de los repartos.

- Al justificar las operaciones y la forma de obtener el resultado ha propiciado la aparición de conocimientos personales de los alumnos sobre el significado de la expresión decimal infinita en el sentido de representar números infinitos o de representar cantidades infinitas de magnitud. De nuevo aparecen las dificultades de interpretación de una simbología que es familiar al alumno, pero sobre la que hace falta una reflexión más pausada por parte de los mismos.
- Posiblemente por una falta de práctica reflexiva hay una creencia generalizada entre los estudiantes de que la naturaleza de los resultados de las operaciones con expresiones decimales mantiene las características de los datos; sobre todo, y por contraposición con las experiencias con los números decimales, mantienen que los resultados de las operaciones con números periódicos deben ser números periódicos.
- Con la utilización de las calculadoras para obtener resultados de operaciones entre números periódicos, se abre un nuevo terreno de trabajo con peculiaridades específicas: hay que escribir como números decimales los datos que están dados como números periódicos, hay que obtener el resultado de la operación con números decimales, y hay que trasladar ese resultado de acuerdo con las características de los datos. Como consecuencia de estas actuaciones hemos detectado que los alumnos encuentran dificultades derivadas de las cifras que admitan las calculadoras y el modo de truncamiento de éstas, puesto que el resultado puede sugerir un número periódico o un número decimal si las últimas cifras diluyen la idea de periodicidad. Además, surgen dificultades sobre la interpretación de resultados en el caso en que las cifras que aparecen en la pantalla no se repitan, lo que unos alumnos interpretan como un número decimal mientras que para otros alumnos esta situación sugiere la referencia a números irracionales.

g) Resultados

Los resultados más destacables de la Cuestión Específica de Investigación número 7 son:

1. Los conocimientos personales de los estudiantes obstaculizan la significación de las expresiones decimales en el modelo propuesto; y tampoco se conceptualizan en otro modelo. Además, los estudiantes encuentran más dificultades para dotar de significado a los números periódicos.
2. Tampoco la notación decimal ofrece argumentos para que algunos estudiantes superen las dificultades de interpretación del símbolo 0, que ya fueron señaladas con anterioridad

3. La traslación de significados de orden entre números naturales a los números periódicos provoca resultados erróneos, que los estudiantes no cuestionan porque no los interpretan en algún modelo.
3. Las operaciones entre números periódicos se intentan resolver mediante la extensión de los algoritmos de cálculo con números decimales, lo que provoca la aparición de resultados erróneos.

Puesto que en el Tema 5 solamente hemos propuesto una cuestión especifica de investigación, la reflexión sobre la comprensión de las relaciones entre expresiones polinómicas decimales y expresiones decimales se considera ya realizada en el apartado f) anterior.

## VI.6. Prueba final

Una vez que se completó la fase de implementación de la etapa primera, quisimos disponer de una visión global de la comprensión de los estudiantes para maestros sobre los tópicos trabajados en las sesiones de clase. Con tal fin se realizó una prueba final, que también tendría relevancia en la calificación de los estudiantes en la asignatura. El contenido de la prueba se recoge en el ANEXO V.2.1, aun cuando en este apartado vamos a indicar las tareas que corresponden a cada unidad de análisis.

La prueba contiene preguntas directas a los estudiantes para maestros y preguntas que demandan la interpretación de ideas mostradas por supuestos escolares; de esta forma, atendemos a la doble perspectiva de formación personal y profesional de estos estudiantes.

En la elaboración de esta prueba se atendió a aquellos aspectos de nuestra propuesta que consideramos esenciales como son la interpretación de la acción en el modelo propuesto, la simbolización del resultado del reparto, la reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto, las relaciones de orden y la densidad respecto del orden, la interpretación de repartos con infinitos sumandos y el significado de las operaciones. La limitación de tiempo nos obligó a ir alternando las preguntas sobre cada uno de los dos sistemas de representación utilizados. En los siguientes apartados figuran las preguntas realizadas y su intencionalidad.

<u>a) Aspectos de la compresión de los contenidos que se quieren analizar</u>

a) Queremos conocer el modo de interpretar el modelo propuesto para los repartos igualitarios de una cantidad.
b) Pretendemos conocer el significado que otorgan al reparto en el supuesto de que la cantidad a repartir sea nula.
c) Interesa conocer los modos en que los estudiantes interpretan los elementos intervinientes en la representación polinómica unitaria
d) Queremos observar las actuaciones y argumentos de los estudiantes para justificar las características sintácticas y semánticas de la

representación polinómica decimal.

e) Interesa conocer las interpretaciones que hacen los estudiantes de las representaciones polinómicas decimales formadas por un número infinito de sumandos.

f) Queremos conocer los procedimientos empleados por los estudiantes para reconstruir las condiciones iniciales de un reparto a partir de su representación polinómica decimal, tanto si ésta contiene un número finito de sumandos, como en el caso de que sea un número infinito.

g) Interesa conocer las interpretaciones que hacen los estudiantes de las relaciones de orden entre representaciones polinómicas decimales, así como de la densidad respecto del orden.

h) Pretendemos reflexionar sobre el significado que los estudiantes otorgan a operaciones con números simbolizados con la notación decimal, así como la forma de obtener los resultados de dichas operaciones.

<u>b) Tareas propuestas y unidades de análisis en cada caso</u>

CCF.I. Interpretación del modelo.

**Propuesta de trabajo**

Se presentan las siguientes definiciones de reparto igualitario. Para cada una de las ellas hay que dar una respuesta **justificada** sobre su veracidad o falsedad

I) **a:b** significa que tenemos **a** tortillas para **b** individuos, realizamos el reparto y les toca a cada una de las **b** personas **a** tortillas.

II) **a:b** significa que tenemos **a** tortillas para **b** individuos, realizamos el reparto y les toca a cada una de las **b** personas **a** partes de tortilla.

III) **a:b** es la cantidad de tortilla que recibe el individuo **b** que participa en un reparto de **a** tortillas.

IV) **a:b** significa que dividimos la unidad en **b** partes iguales y cada uno de los individuos se llevan **a** partes de unidad.

CCF.I.1: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la definición I.

CCF.I.2: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la definición II

CCF.I.3: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la definición III.

CCF.I.4: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la definición IV.

CCF.II. Interpretación del reparto 0:4 a través de respuestas de hipotéticos alumnos

**Propuesta de trabajo**

A continuación aparecen escritas las respuestas que dos alumnos dan a la pregunta:

*¿Cuánto reciben 4 personas que se reparten 0 tortillas?*

Alumno A: Como no hay tortilla para repartir no puede hacerse el reparto. No tiene sentido y, por lo tanto, es cero.

Alumno B: No puede saberse, porque no puedo fraccionar 0 tortillas, y para repartir necesito fraccionar previamente.

Para cada una de las respuestas, se pide:

- a) Indicar si la respuesta es correcta o no.
- b) Realizar un juicio crítico de los razonamientos de los alumnos.

CCF.II.1: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la afirmación del alumno A

CCF.II.2: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la afirmación del alumno B.

CCF.III. Interpretación de los elementos intervinientes en la representación polinómica unitaria.

**Propuesta de trabajo**

Supuesto que a < b, vamos a cuantificar el resultado del reparto igualitario a:b, al aplicar el criterio de «la mayor parte» realizando el reparto en sólo DOS fases.

Si en la primera fase ha sido necesario fraccionar la unidad de tortilla en $n_1$ partes iguales, siendo $n_1 \neq 10$, se pregunta para esta primera fase:

a.1) ¿De qué tamaño son las partes repartidas?
a.2) ¿Cuántas de esas partes recibe cada individuo?
a.3) ¿Cuántas partes quedan por repartir y de qué tamaño son?.
a.4) ¿Qué relación existe entre $n_1$, a y b?

Si en la segunda y última fase ha sido necesario fraccionar la unidad de tortilla en $n_2$ partes iguales. Se pregunta para esta segunda fase:

a.5) ¿De qué tamaño son las partes repartidas?
a.6) ¿Cuántas de esas partes recibe cada individuo?
a.7) ¿Cuántas partes quedan por repartir? ¿De qué tamaño son?

Además, se pide:

a.8) Indicar qué relación existe entre $n_1$ y $n_2$. Y justificar tal relación.

a.9) Simbolizar el reparto mediante la representación polinómica unitaria.

CCF.III.1: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para simbolizar la primera fase de un reparto igualitario utilizando el criterio de la mayor parte:

CCF.III.2.: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para simbolizar la segunda y última fase de un reparto igualitario utilizando el criterio de la mayor parte.

CCF.IV. Interpretación de las características de la representación polinómica decimal.

**Propuesta de trabajo**

Tarea 1. En el sistema de representación polinómica decimal, demostrar que el número de partes iguales que recibe cada individuo en cada una de las fases del reparto está comprendido entre 0 y 9, incluidos ambos valores.

A continuación aparecen escritas las respuestas que dos alumnos dan a la pregunta:

*¿Qué significa que la representación polinómica decimal de un reparto sea infinita?*
Alumno A´: Que un mismo individuo participa en infinitos repartos
Alumno B´: Que cada uno de los participantes recibe una cantidad infinita de tortilla puesto que hay infinitos sumandos
Alumno C´: No se puede saber lo que recibe cada uno de los participantes porque el resultado tiene infinitos sumandos
Para cada una de las respuestas, se pide:
- a) Indicar si la respuesta es correcta o no.
- b) Realizar un juicio crítico de los razonamientos de los alumnos.

CCF.IV.1: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para justificar la tarea 1
CCF.IV.2; Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la afirmación del alumno A'.
CCF.IV.3: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la afirmación del alumno B'.
CCF.IV.4: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para analizar la verdad o falsedad de la afirmación del alumno C'.

CCF.V. Reconstrucción de las condiciones del reparto conocida su expresión polinómica decimal.

**Propuesta de trabajo**

Dadas las siguientes representaciones polinómicas decimales

A´´: $3+6\left[\frac{1}{10^2}\right]+9\left[\frac{1}{10^3}\right]$

B´´: $3+6\left[\frac{1}{10^2}\right]+8\left[\frac{1}{10^3}\right]+6\left[\frac{1}{10^4}\right]+8\left[\frac{1}{10^6}\right]+\ldots$

a) Encontrar los repartos de los que proceden cada una de ellas.
b) Ordenar los repartos A´´ y B´´. Justificar la respuesta.
c) Justificar la existencia de infinitas representaciones polinómicas decimales entre las de los los repartos A´´ y B´´

CCF.V.1: Argumentaciones que esgrimen los alumnos en el caso A´´
CCF.V.2: Argumentaciones que esgrimen los alumnos en el caso B´´.

CCF.VI. Interpretación del orden y de la densidad respecto del orden entre expresiones polinómicas decimales
CCF.VI.1: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para determinar el orden entre A´´ y B´´
CCF.VI.2: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para justificar que entre A´´ y B´´ hay otras infinitas expresiones polinómicas decimales.

CCF.VII. Interpretación de operaciones entre notaciones decimales y razonamientos utilizados para obtener el resultado.

**Propuesta de trabajo**

> *Para cada una de las operaciones que se proponen:*
> *a)* $0,3\overline{814} + 9,6\overline{29}$ *b)* $3,0\overline{868} : 3$
> *a) Enuncia un problema cuya respuesta se obtiene con la operación anterior*
>
> *b) Obtener el resultado de dicha operación*
> *c) Justificar la forma de forma de proceder en el apartado anterior*

CCF.VII.1: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para dotar de significado a la suma a)
CCF.VII.2: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para dotar de significado al cociente b)
CCF.VII.3: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para obtener el resultado de la suma a)
CCF.VII.4: Argumentaciones que esgrimen los alumnos para obtener el resultado del cociente b)

c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.

Valoramos cada una de las Unidades de Comprensión del Contenido, explicitadas en el apartado anterior con los siguientes criterios:

**1.- Da argumentos correctos o probables.**
**2.- Da argumentos correctos aunque incompletos**
**3.- Da argumentos erróneos o no da argumentos.**

d) Datos obtenidos

Los datos obtenidos por los futuros profesores en esta Prueba Final, según los criterios y apartados considerados, se recogen en el Anexo V.3.

En la página siguiente resumimos, en la tabla VI.8, los datos globales en los que se señala, por cada Cuestión de Investigación, las frecuencias **(porcentajes)** de cada una de los criterios señalados.

La prueba fue realizada por 37 estudiantes.

| Criterios valoración / Unidades de Análisis | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| CCF. I.1 | 31 (**84**) | 6 (**16**) | 0 (**0**) |
| CCF. I.2 | 4 (**11**) | 21 (**57**) | 12 (**32**) |
| CCF. I.3 | 12 (**32**) | 3 (**8**) | 22 (**60**) |
| CCF.I.4 | 9 (**24**) | 14 (**38**) | 14 (**38**) |
| CCF.II.1. | 6 (**16**) | 19 (**52**) | 12 (**32**) |
| CCF.II.2 | 22 (**59**) | 7 (**19**) | 8 (**22**) |
| CCF.III.1. | 15 (**41**) | 13 (**35**) | 9 (**24**) |
| CCF.III.2 | 18 (**49**) | 13 (**35**) | 6 (**16**) |
| CCF.IV.1. | 10 (**27**) | 12 (**32**) | 15 (**41**) |
| CCF.IV.2 | 31 (**84**) | 5 (**13**) | 1 (**3**) |
| CCF.IV.3 | 18 (**49**) | 10 (**27**) | 9 (**24**) |
| CCF.IV.4 | 6 (**16**) | 23 (**62**) | 8 (**22**) |
| CCF.V.1. | 19 (**51**) | 1 (**3**) | 17 (**46**) |
| CCF.V.2 | 14 (**38**) | 0 (**0**) | 23 (**62**) |
| CCF.VI.1. | 19 (**51**) | 13 (**35**) | 5 (**14**) |
| CCF.VI.2 | 12 (**32**) | 11 (**30**) | 14 (**38**) |
| CCF.VII.1 | 25 (**68**) | 3 (**8**) | 9 (**24**) |
| CCF.VII.2 | 21 (**57**) | 4 (**11**) | 12 (**32**) |
| CCF.VII.3 | 10 (**27**) | 14 (**38**) | 13 (**35**) |
| CCF.VII.4 | 11 (**30**) | 14 (**38**) | 12 (**32**) |

Tabla VI.8. Resultados de la Comprensión del Contenido en la Prueba Final

e) Análisis e interpretación

CCF.I.1: Sobre las interpretaciones de la definición A

- Las respuestas correctas son mayoritarias. Y en ello es posible que influya la redacción de la pregunta puesto que indica una situación imposible, salvo que se introduzcan interpretaciones inadecuadas derivadas de no considerar la globalidad de la acción, sino solamente su resultado:

  *Falso, porque puede que no haya a tortillas exactas para las b personas, ¿y entonces qué? (Partes de tortilla)* (alumno nº 26).

CCF.I.2: Sobre las interpretaciones de la definición B

- Las respuestas correctas son minoritarias, mientras que son muchos los estudiantes que dan una respuesta incompleta, pues no mencionan la igualdad de las partes en que hay que fraccionar la unidad.
- Entre los errores detectados encontramos confusiones derivadas del empleo de las expresiones literales y en las que los alumnos asignan a las letras un único significado:

  *Pienso que tampoco es correcta esta definición porque a las b personas no les puede tocar a partes de tortilla puesto que a es el total de tortillas que queremos repartir por tanto les podrá tocar n partes de a* (alumno n º 2).
- Aparece una confusión entre las partes que les toca a los individuos, y que

debe simbolizarse con un número natural, y la cantidad de magnitud recibida, que debe expresarse como un número racional; pero dicho número racional, simbolizado con una fracción se entiende como un ente global, no como una suma de partes alícuotas de la unidad:
*Es falsa ya que lo que les toca son a/b partes de tortilla a partes de tortilla no tiene sentido ya que a es el número de tortillas, lo que les corresponderá será a/b, el resultado de ese reparto, la cantidad de tortilla a/b que es lo que les toca a cada una de las personas* (alumno nº 10).

CCF.I.3: Sobre las interpretaciones de la definición C

- El alto porcentaje de estudiantes que han contestado de forma incorrecta ponen de manifiesto que las expresiones literales presentan dificultades de interpretación para buena parte de ellos ya que interpretan la letra b con un significado exclusivamente cualitativo, en este caso personas, pero no interpretan su referencia a una cantidad. Esta interpretación incorrecta se ha producido incluso entre estudiantes que han mostrado un buen rendimiento en las tareas realizadas con anterioridad:
*Es correcta ya que, pero habra que aclarar que no solo el individuo b (a no ser que solo exista un individuo en el reparto) sino cada uno de los b individuos que aparecen en el reparto* (alumno nº 15).

CCF.I.4: Sobre las interpretaciones de la definición D

- La intención de la pregunta era detectar si los estudiantes eran conscientes de que los repartos exigen del fraccionamiento de la unidad, pero que tal acción exige la división de la unidad en partes iguales. Los resultados vuelven a poner de manifiesto, como ya ocurrió en la cuestión I.2, que la exigencia de hacer partes iguales de la unidad no la explicitan los estudiantes, aunque posiblemente la tengan en consideración.
- Y de nuevo surgen dificultades con las expresiones literales, incluso en estudiantes de alto rendimiento en las tareas previas. Los estudiantes se aferran a un único significado de las letras:
*Falso porque b nos indica la cantidad de personas que participan en el reparto y no las partes iguales en que se divide la unidad* (alumno nº 51).

CCF.II.1: Sobre las interpretaciones del alumno A

- La mayoría de los estudiantes se han limitado a dar sus argumentos sobre la que debería ser la respuesta correcta, pero no han entrado en el análisis de la respuesta del alumno hipotético. Unos pocos alumnos han entrado a considerar el significado de 0 en esa respuesta:
  *No es correcto. Porque si no puedo hacer el reparto no me dará ningún resultado, es decir, que no tengo tortilla para repartir y no lo reparto, el resultado será indeterminado, pero no cero. El niño relaciona la cifra cero con algo que no tiene sentido* (alumno nº18).
- También hay que reseñar que esta tarea ha mostrado que hay estudiantes (un número importante), para los que no tiene sentido el reparto en las condiciones propuestas:
  *La respuesta de este alumno es incorrecta puesto que la respuesta no es cero, sino que no tiene sentido. Está bien cuando dice que el reparto no se puede hacer pero no cuando dice que es cero, él posiblemente pensó que el resultado es cero porque no hay nada, o sea cero, pero no es así puesto que*

*no es cero y tampoco es infinito, no se puede hacer* (alumno nº17).

CCF.II.2: Sobre las interpretaciones del alumno B

- En esta segunda respuesta, y posiblemente porque las posiciones de los estudiantes ya habían sido manifestadas en las respuestas II.1, hay una mayoría que entra a analizar la respuesta del alumno, bien de forma correcta o de forma incompleta. Sin embargo, siguen apareciendo respuestas incorrectas que vuelven a reiterar alumnos que tienen convicciones personales muy arraigadas.

CCF.III.1: Sobre la primera fase del reparto

- El número de respuestas correctas está disminuido porque los estudiantes ofrecen respuestas incompletas debido a que no se contemplan todos los elementos que intervienen en la acción, sobre todo en la simbolización de las partes sobrantes.
- Hay otros errores que provienen de una inadecuada interpretación de la simbología empleada; así, las partes quedan confundidas con el tamaño (alumno nº 12) o las partes recibidas vienen dadas por el número de partes en que se ha fraccionado la unidad (alumno nº 17).
- También la utilización de expresiones literales ha provocado que algunos estudiantes trabajasen con ejemplos numéricos concretos (alumno nº 28) o que no se estableciesen relaciones adecuadas con las letras que se proponen, sino que se introdujese la letra x con el valor de un número sin determinar: *cada individuo recibirá x partes* (alumno nº 2).
- Por último, indicar que hay un estudiante (el nº 1) que limita el fraccionamiento de las unidades a valores comprendidos entre 2 y 9, ambos inclusive; pensamos que ha interpretado que el tamaño de la parte que corresponde a cada participante solamente podía tomar valores menores que 10, aunque en el enunciado se indicaba que fuese distinto de 10.

CCF.III.2: Sobre la segunda fase del reparto

- Los resultados son similares a los de la primera fase, aunque son algo mejores; pensamos que la tarea era más sencilla por cuanto en esta fase se acaba el reparto y, por tanto, no hace falta expresar las partes sobrantes.
- También hay que indicar que la mayoría de las respuestas incompletas se deben a que los estudiantes no han controlado que en esta segunda fase se debería de acabar el reparto, que ya no había más fases. Buena parte de estas respuestas pueden estar producidas por una lectura apresurada del enunciado.

CCF.IV.1: Sobre cómo justificar la tarea 1

- Casi la tercera parte de los estudiantes, y recurriendo al modelo, han respondido correctamente a la cuestión planteada. Los argumentos empleados han sido, de forma unánime, los de la imposibilidad de dar más de 9 partes de un tamaño determinado, pues en caso contrario se contravendría el criterio de la mayor parte. Tan solo el alumno nº 27 recurre a la notación decimal para dar respuesta a la cuestión planteada.

- Aquellos estudiantes cuya tarea se considera incompleta no han tenido en cuenta que la pregunta contemplaba una doble exigencia, y han omitido los argumentos para justificar que el número de partes debe ser 0 o mayor que 0.
- Hay un importante número de estudiantes que no se han enfrentado a la propuesta, posiblemente por sus dificultades con el manejo de expresiones algebraicas. Y unos pocos se han limitado a hacerlo con casos particulares, como es el caso del alumno nº 12.

CCF.IV.2: Sobre cómo justificar la respuesta del alumno A´

- De forma muy mayoritaria los estudiantes señalan que la representación polinómica decimal puede contener infinitos sumandos, pero que ello se debe a las peculiaridades de la acción de un solo reparto. Hay dos estudiantes (los números 12 y 35), que entienden que la técnica del reparto implica la existencia de infinitas fases del reparto, pero que en cada una de ellas se hace un reparto de las cantidades sobrantes en la fase anterior.
- El estudiante nº 2 admite como correcta la respuesta guiado por un resultado de tipo operatorio

  *La respuesta es correcta. Si hay* $\infty$ *tortilla y hay x individuos* $\frac{\infty}{x} = \infty$ *puesto que de cada tortilla recibe algún trozo*

CCF.IV.3: Sobre cómo justificar la respuesta del alumno B´

- Los estudiantes que responden de forma correcta hacen referencia, mayoritariamente, a las condiciones iniciales del reparto argumentando que si se reparte una cantidad finita el resultado del reparto no puede ser una cantidad infinita. Por su parte el alumno nº 11 indica la imposibilidad de repartir una cantidad infinita de tortilla.
- Hay dos alumnos, los números 15a y 31 que admiten como correcta la respuesta del enunciado, asumiendo que la suma de infinitos sumandos tiene que ser una cantidad infinita

  *Respuesta correcta porque la R.P.D. es el resultado del reparto, indica lo que toca a cada uno de los que participan en el reparto y si la R.P.D. es infinita la cantidad que toca a cada uno también será infinita aunque llegará un momento en que se repetirá* (alumno nº 31).

CCF.IV.4: Sobre cómo justificar la respuesta del alumno C´

- La mayor parte de los estudiantes ofrecen respuestas incompletas en el sentido de indicar las dificultades de precisar la cantidad de magnitud, pero no ofrecen sistemas de simbolización alternativos que permitan hacer viable la medida de dicha cantidad de magnitud.
- Y hay algunos estudiantes que encuentran dificultades para admitir la continuidad de medida

  *No es correcto porque se puede redondear el resultado ya que llega un momento que los tamaños de los repartos son tan sumamente pequeños que no se pueden precisar* (alumno nº 1).

CCF.V.1: Sobre la reconstrucción de las condiciones del reparto en el caso A´´

- Solamente dos estudiantes han intentado la tarea utilizando la notación decimal, y de ellos el número 10 lo hace correctamente, mientras que el número 31 lo hace de forma incorrecta ya que no tiene en cuenta la ausencia de partes de tamaño 1/10.
- Entre los estudiantes que han cometido errores unos provienen de no tener en cuenta que no hay partes de tamaño 1/10 (como el número 1) y otros por no considerar la parte entera (como el número 31)

CCF.V.2: Sobre la reconstrucción de las condiciones del reparto en el caso B´´

- Al comparar estos resultados con los de la cuestión anterior (apartado V.1) se pone de manifiesto que el trabajo con representaciones polinómicas decimales de infinitos sumandos encierran más dificultades que las que tienen un número finito de sumandos.
- Los errores que han aparecido se producen por no tener en cuenta la parte entera (como el caso del número 17), por no atender al tamaño de las partes (caso del número 8) y por interpretaciones inadecuadas de los sumandos que se repiten (como el número 11).

CCF.VI.1: Sobre las argumentaciones para determinar entre A´´ y B´´

- Aun cuando la mayoría de los estudiantes dan las respuestas correctas justificando su decisión a través de la representación polinómica decimal, una tercera parte de los mismos se encuentran más cómodos reconstruyendo los repartos y operando con ellos, o bien a través de la notación fraccionaria (igualando los denominadores).
- A pesar de que en las sesiones de clase se mostró la lectura directa de las relaciones de orden entre representaciones polinómicas decimales basando tal resultado en el criterio de la mayor parte, los resultados muestran que algunos estudiantes se encuentran más cómodos razonando sobre repartos en los que hay igual número de participantes.

CCF.VI.2: Sobre las argumentaciones para justificar que hay infinitas expresiones entre las A´´ y B´´

- En comparación con la cuestión del orden anteriores, se observa que hay un mayor número de estudiantes que no afrontan la tarea, sobre todo los que han tenido un menor índice de asistencia a las clases.
- De los estudiantes que resuelven correctamente el trabajo, la mitad lo hacen utilizando las representaciones polinómicas decimales, mientras que la otra mitad lo hacen reconstruyendo las condiciones iniciales del reparto, o bien recurriendo a la notación fraccionaria, siendo un sólo alumno, el nº 27, el que lo hace con la notación decimal.
- El alumno nº 53 intenta hacerlo con la notación decimal pero no tiene en cuenta los resultados de su propuesta:

  *Existen infinitas representaciones polinómicas decimales entre los repartos A y B, tantas como infinito es el período del número* $3{,}0\overline{68}$*Siempre se puede añadir una milésima, una diezmilésima, etc. al número* $3{,}0\overline{68}$ *haciéndolo así un número intermedio, pero como las cifras son infinitas, infinitas son las posibilidades de actuación*

CCF.VII.1: Sobre las argumentaciones para dotar de significado a la suma a)

- Los estudiantes responden correctamente y de forma mayoritaria utilizando la acción de repartir y considerando la suma como unión o agregación de cantidades extensivas.
- Algunos estudiantes dejaron la pregunta sin respuesta. Además, hemos detectado que el alumno nº 11 trabaja con cantidades intensivas y no se da cuenta de que la operación planteada no tiene sentido, aunque en ello influya el que no utiliza las unidades de medida, sino que se limita a la consideración de números no medida:

  *Un corredor lleva una velocidad constante de* $0,3\overline{814}$ *y un compañero una velocidad constante de* $9,6\overline{29}$; *se quieren sumar las velocidades para luego obtener la media.*

CCF.VII.2: Sobre las argumentaciones para dotar de significado al cociente b)

- La mayoría de los estudiantes sigue utilizando el modelo para dar significado a la operación propuesta, y lo hacen como reparto reiterado, como reparto de un reparto.
- Es destacable que haya aumentado el número de alumnos que no dan respuesta a la pregunta formulada; ello vendría a indicar que hay algunos alumnos que encuentran más dificultades en dar significado al cociente por un natural, del que encontraron en la suma.
- Entre las respuestas inadecuadas cabe mencionar la del alumno nº 3, en la que se detecta la primacía del número sobre la magnitud, además de una interpretación del cociente en la que no se exige la igualdad de las cantidades repartidas

  *Tres chicos se reparten unas monedas y a cada niño les toca* $3,0\overline{68}$ *monedas. Si quieren saber cuánto tendrán cada día que les dure tres días, ¿qué tendrán que hacer?*

  - También cabe destacar la respuesta del alumno nº 43 en la que se advierte un argumento aditivo para dar sentido al cociente:

  *4 amigos preparan una excursión al campo y deciden comer tortillas. Llega la hora de la comida y se reparten todas las tortillas y les toca a cada uno la cantidad de* $3,0\overline{68}$ *Pero justo antes de comerse esos trozos aparecen por sorpresa 3 amigos más, que a última hora deciden ir al campo. Ahora que están más amigos ¿cuánta tortilla comerá cada uno?*

CCF.VII.3: Sobre las argumentaciones para calcular la suma a)

- Casi la tercera parte de los estudiantes utilizan la notación decimal para calcular la suma; para ello van añadiendo cifras de los periodos hasta que consiguen entrever el periodo que configura el resultado.
- Entre las respuestas erróneas que se han producido al utilizar la notación decimal encontramos la del alumno nº 28 que se limita a sumar las cifras no periódicas y las del primer periodo y señalar en el resultado tantas cifras periódicas como tenía el periodo de mayor número de cifras periódicas; de este modo $0,3\overline{814}+9,6\overline{29}=10,0\overline{104}$
- También resulta llamativa la respuesta del alumno nº 16 que tras varios ensayos con sumas en las que intervienen diferente número de cifras

decimales y no encontrando el periodo toma la decisión de una respuesta que contraviene sus propias observaciones, como lo demuestra esta reproducción de su trabajo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0'38148148 | | 0'381481 | | 0'3814814 |
| + 9'62929 | ;; | + 9'629292 | ;; | + 9'6292929 |
| 10'01077 | | 10'01077~~3~~ | | 10'010774~~3~~ |

*El resultado es* $10,010\overline{77}$

- Igualmente resulta sorprendente la respuesta del alumno nº 17 que, posiblemente por presuponer dificultades en las operaciones con números periódicos, toma la decisión de aproximar los datos con números decimales y trabajando con estos.
- Los alumnos que han abandonado la notación decimal suelen recurrir a utilizar la representación polinómica decimal y reconstruir los repartos, mientras unos pocos estudiantes trabajan con la notación fraccionaria. En la mayor parte de los casos se limitan a indicar el reparto o fracción resultante, pero no expresan tal resultado con la notación decimal. Y entre quienes lo han intentado cabe destacar la respuesta del alumno nº 15 quien señala que la respuesta es 10'010774 que proviene del paso a la notación decimal de la fracción 4950378/494505 y dicho alumno argumenta que lo ha obtenido con ayuda de la calculadora. Este alumno no percibe la posibilidad de que el resultado pueda ser un número periódico, pues el resultado proporcionado por la calculadora no induce a pensar que así ocurra.

CCF.VII.4: Sobre las argumentaciones para calcular el cociente b)

- Los estudiantes han respondido de forma similar a como lo han hecho para el caso de la suma, en el sentido de que han recurrido a las mismas técnicas allí empleadas. Tan solo un alumno utiliza la notación decimal para el caso de la suma y la reconstrucción del reparto para el caso del cociente.
- Las respuestas de los estudiantes han puesto de manifiesto que los estudiantes tienden a adaptar técnicas ya conocidas a situaciones nuevas, dando lugar a respuestas como las siguientes:
    * Utilizar el algoritmo de la división hasta que aparece un 0 en el resto, en cuyo caso se da por terminada la operación y la respuesta viene dada por el cociente así obtenido (alumno nº 1)

```
3'06868......   ⊥ 3
006              1'0228956
  08
   26
    28
     16
      18
       0
```

* Utilizar solamente las cifras del periodo (alumno nº 28)

$$\begin{array}{ll} 3{,}0\overline{68} & \underline{\perp\quad 3\quad} \\ 006 & 1'02266.... \\ \quad 08 & \\ \quad\; 20 & \\ \quad\quad 28 & \\ \quad\quad\; 20 & \\ \quad\quad\quad 2 & \end{array}$$

* Utilizar un número decimal en el dividendo, sin justificar tal decisión

*3'0686868 : 3 = 1'02289333 ... =* $1{,}02289\overline{3}$ (alumno nº 5).

- El alumno nº 43 no advierte la posibilidad de que la respuesta sea un número periódico, pues comienza con el algoritmo de la división y comenta que *de esta forma no se terminaría pues el dividendo tiene infinitas cifras y podría añadir en el resto siempre más cifras por lo que no obtendrías un cociente ya que este tiene muchas cifras después de la coma por lo que estaría incompleto*
- La utilización de la calculadora produce resultados en los que no se tiene en cuenta la posibilidad de que el resultado sea un número periódico (alumno 15)

f) Reflexión sobre el trabajo realizado por los estudiantes

• La presencia de expresiones algebraicas ha supuesto un obstáculo importante para determinar si los estudiantes mostraban una adecuada comprensión del modelo en que se ha trabajado. De hecho, la mayor parte de los errores de interpretación de las definiciones propuestas tenían su origen en la fijación que hacen los alumnos de un único significado para las letras.

• Otro hecho destacable es que los estudiantes no hagan menciones explícitas a la división de la unidad en partes iguales. Las observaciones de sus tareas si que muestran una técnica correcta del fraccionamiento de la unidad, pero parece que este hecho no deban destacarlo, como si no constituyese un aspecto esencial en la correcta realización de las acciones de reparto.

• La pregunta II pone de manifiesto que hay estudiantes que tienen dificultades en la interpretación del símbolo 0. Es más, las tareas realizadas en las clases tampoco han conseguido desarraigar, en algunos alumnos, los errores que tenían anteriormente; incluso habría que indicar que la utilización del modelo ha supuesto una reafirmación de sus conocimientos personales en el sentido de que la cantidad de magnitud que se representa por 0 no admite la acción.

• Aun cuando los estudiantes admiten las expresiones polinómicas decimales con infinitos sumandos, su verificación en el modelo les lleva a pensar que tales resultados son más teóricos que reales, pues el modelo les induce a sostener que el proceso de reparto no puede efectuarse pues la cantidad de magnitud se agota en un número de fases finito.

• En las tareas del apartado III se ha puesto de manifiesto que los estudiantes tienden a identificar la cantidad de magnitud y la medida de la misma; de tal suerte que las dificultades de medición producen modificaciones en la cantidad de magnitud; son escasos los estudiantes que modifican el proceso de medida para determinar la cantidad de magnitud.

- La reconstrucción de las condiciones del reparto conocida su representación polinómica decimal ha sido asumida por los estudiantes como una técnica. De hecho, los alumnos con un alto índice de absentismo no han intentado la tarea o si lo han hecho han cometido errores notables; mientras que los estudiantes que asisten con regularidad a las clases han hecho la tarea de forma muy satisfactoria.

  Pero como tal técnica exige atender a las peculiaridades de cada situación y al control de todos los elementos intervinientes, como se ha puesto de manifiesto en aquellos casos en los que algunos de estos elementos no se ha tenido en consideración. Además, el tratamiento de los casos en que el número de sumandos es finito o infinito presentan notables diferencias, por lo que los resultados en el caso de infinitos sumandos se ha mostrado con mayor grado de dificultad para los estudiantes..

  Los estudiantes han utilizado de forma muy mayoritaria el modelo en que se trabaja y aquellos alumnos que han intentado trabajar con números decimales no han sido capaces de resolver la tarea en el caso de los números periódicos.

- Resulta llamativo que algunos estudiantes no utilicen las expresiones polinómicas decimales para establecer relaciones de orden, puesto que tales relaciones se establecen de forma inmediata. Pensamos que la aplicación del criterio de la mayor parte no la consideran una herramienta que sea tan convincente para la comparación como la de argumentar sobre repartos en los que el número de participantes es el mismo. Aun cuando se hizo especial énfasis en la determinación de las relaciones de orden entre expresiones polinómicas, tanto unitarias como decimales, algunos estudiantes siguen aferrados a argumentos que justifican las relaciones de orden entre fracciones. Lo que resulta más llamativo de esta situación es que estos estudiantes establezcan relaciones de orden entre expresiones decimales mediante su transformación en fracciones, y no parecen considerar la técnica de comparar las cifras que ocupan la misma posición.

- Unos pocos alumnos encuentran dificultades para dar significado a operaciones con expresiones decimales, hasta tal punto que evitan la tarea o la realizan de forma deficiente.

  En cuanto a la obtención del resultado, se han puesto de manifiesto las dificultades que tienen los estudiantes con números periódicos, posiblemente derivadas de no estar habituados a las técnicas operatorias con este tipo de números. De hecho, surgen errores producidos por la adaptación de técnicas de cálculo con números decimales a las operaciones con números periódicos.

  También hay que señalar que la presencia de la calculadora introduce nuevos elementos para que aparezcan errores en las operaciones con números racionales, sobre todo si el resultado debe ser un número periódico, o si alguno de los operandos es también periódico.

g) Resultados

A lo largo del proceso de implementación de la propuesta didáctica se han detectado algunas tendencias de los estudiantes; en esta prueba final se han mantenido algunas de ellas que comentamos seguidamente:

1. Existen dificultades en la interpretación de las expresiones literales, pues se otorga a las letras un valor cualitativo y no cuantitativo.
2. La acción del reparto por fases y aplicando el criterio de la mayor parte no es aplicada correctamente porque se olvida la exigencia del fraccionamiento en partes iguales.
3. Se mantienen concepciones erróneas sobre el símbolo 0, al que se le da el valor de imposibilidad de la acción; o bien se rechaza como medida de cantidad de magnitud.
4. La posibilidad de que el reparto de cantidades infinitas de magnitud se haga en infinitas fases se admite exclusivamente como proceso formal, pero no se admite como proceso real; no se admite la continuidad de la magnitud superficie.
5. Los estudiantes muestran más destrezas en el manejo de técnicas (aunque sean tan complejas como las de reconstruir las condiciones del reparto a partir de su expresión polinómica), que en los conceptos.
6. Los estudiantes van asentando paulatinamente los conocimientos que reciben y lo hacen de forma secuencial, como lo demuestra el hecho de que el orden entre expresiones polinómicas decimales no se haga con una lectura directa de las mismas, sino a través de los conocimientos precedentes sobre el orden entre repartos igualitarios.
7. La conceptualización de las operaciones en el modelo no es objeto del interés de algunos estudiantes; centran su atención en la obtención del resultado de las mismas.
8. Dotar de significado, en el modelo, a la suma de expresiones decimales resulta más sencillo para los estudiantes, que hacerlo con la división de una expresión decimal entre un número natural.
9. Los estudiantes tienden a calcular el resultado de operaciones en las que intervienen expresiones decimales periódicas por medio de los algoritmos de cálculo de los números decimales.

### VI.6.1. Reflexión sobre la comprensión de los estudiantes en la prueba final

La Prueba Final se elaboró para hacer indagaciones sobre la comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes para maestro. Dicha Prueba pretendía cubrir unos propósitos que fueron enunciados al inicio del punto VI.6 de este capítulo, y para cuya indagación se elaboraron siete Unidades de Análisis de la comprensión de los contenidos, cada una de las cuales fueron desglosadas en unidades de análisis parciales.

En el punto anterior se han analizado cada una de esas unidades parciales; nuestra intención en este apartado es hacer un análisis global de los siete objetivos en base a los que fue diseñada la Prueba Final y que se concretaron en otras tantas Unidades de Análisis. Para ello, se han evaluado conjuntamente todas las preguntas de la prueba final correspondientes a cada una de esas Unidades de acuerdo con los siguientes criterios de valoración:

**1.- Da argumentos correctos o probables.**
**2.- Da argumentos correctos aunque incompletos**
**3.- Da argumentos erróneos o no da argumentos.**

Seguidamente se revisan cada una de dichas Unidades en la que se aportan datos separados de los estudiantes que asistieron al menos al 75% de las sesiones (asistencia regular) y los que asistieron a menos del 75% de las sesiones (asistencia irregular). Se hace esta división porque en nuestra propuesta se insistía en el aula como lugar adecuado para la formación del conocimiento. En el ANEXO V.4 se recogen las valoraciones que corresponden a cada uno de los 37 estudiantes que realizaron la Prueba Final. En cada cuadro se incluye el número total de estudiantes y, entre paréntesis y en negrita, el porcentaje correspondiente.

CCF.I: Interpretación del modelo

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| asistencia regular | 6 (**16**) | 13 (**35**) | 6 (**16**) |
| asistencia irregular | 3 (**8**) | 4 (**11**) | 5 (**14**) |
| **TOTAL** | 9 (**24**) | 17 (**46**) | 11 (**30**) |

Tabla VI.9. Resultados en la Unidad de Análisis CCF.I, según el nivel de asistencia a las clases

A los estudiantes se les pregunta por la interpretación genérica de la acción de repartir definida en el modelo, pues se considera que es un aspecto de considerable importancia en la utilización del modelo. Y resulta destacable que solamente la cuarta parte de ellos resuelva satisfactoriamente la tarea, a pesar de que se han desarrollado 20 sesiones de clase en torno a esta idea.

Este bajo porcentaje de respuestas correctas no se corresponde con las producciones de los estudiantes en las sesiones de clase; lo que ocurre es que casi la mitad de ellos no explicitan la igualdad de partes del fraccionamiento, aunque sí lo tienen en cuenta en sus trabajos.

Ese 30% de alumnos que responden de forma incorrecta lo hacen por la inadecuada interpretación de las expresiones literales, en las que las letras no se consideran con valor de parámetro; pero en sus producciones anteriores sí suelen responder adecuadamente cuando actúan en casos particulares.

CCF.II: Interpretación del reparto con presencia del 0

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| asistencia regular | 14 (**38**) | 10 (**26**) | 1 (**3**) |
| asistencia irregular | 1 (**3**) | 4 (**11**) | 7 (**19**) |
| **TOTAL** | 14 (**41**) | 17 (**37**) | 8 (**22**) |

Tabla VI.10. Resultados en la Unidad de Análisis CCF.II, según el nivel de asistencia a las clases

El número de estudiantes que responde adecuadamente no alcanza la mitad, a pesar de que se hicieron trabajos similares en varias ocasiones y se realizó una sesión de debate al respecto.

Resulta muy llamativo que los alumnos que no han asistido de forma regular a las clases han obtenido un porcentaje de aciertos muy reducido, lo que cabe interpretar en el sentido de que las tareas realizadas en las clases sí que han influido sobre los conocimientos personales de los asistentes.

En todo caso, no podemos obviar el hecho de que existe una fuerte tendencia entre este alumnado a interpretar el 0 con el sentido de indicar que la acción no se puede realizar. Y que para la cuarta parte del alumnado el 0 no se admite como medida de cantidad de magnitud

CCF.III: Interpretación de la simbología empleada

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| asistencia regular | 15 (**41**) | 7 (**19**) | 3 (**8**) |
| asistencia irregular | 1 (**3**) | 5 (**13**) | 6 (**16**) |
| **TOTAL** | 16 (**44**) | 12 (**32**) | 9 (**24**) |

Tabla VI.11. Resultados en la Unidad de Análisis CCF.III, según el nivel de asistencia a las clases

La tarea de simbolizar las acciones del reparto exige del empleo de una técnica compleja en la que se tienen que considerar todos los elementos intervinientes. Esta técnica puede ayudarse con el modelo en casos particulares, pero una formulación general de la misma exige de una abstracción del proceso y de una adecuada utilización de las expresiones literales.

A la vista de estos resultados podemos señalar que el 44% de los estudiantes conoce la técnica de la simbolización del reparto por fases; que el 32% comete errores al desarrollar esa técnica con el empleo de expresiones literales y que casi la cuarta parte de los estudiantes tienen dificultades en expresar con carácter general el resultado del reparto.

Los resultados de los que tienen una asistencia irregular pone de manifiesto que esta técnica también necesita de ejercicios de práctica que consoliden el proceso de simbolización con carácter general.

CCF.IV: Interpretación de características semánticas de la representación polinómica decimal

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| asistencia regular | 11 (**30**) | 12 (**32**) | 2 (**5**) |
| asistencia irregular | 3 (**8**) | 5 (**14**) | 4 (**11**) |
| **TOTAL** | 14 (**38**) | 17 (**46**) | 6 (**16**) |

Tabla VI.12. Resultados en la Unidad de Análisis CCF.IV, según el nivel de asistencia a las clases

La interpretación de expresiones polinómicas decimales con infinitos sumandos es interpretada de forma correcta por algo más de la tercera parte de los estudiantes; entre los cuales son mayoría los que tienen una asistencia regular a las clases.

Sin embargo, casi la mitad de los estudiantes tienen dificultades en aceptar un resultado que, en su opinión, es más teórico que real pues les resultan dificilmente aceptables las sucesivas particiones de una magnitud continua. Posiblemente los conocimientos personales de los números naturales y sus experiencias con medidas en el sistema métrico decimal les obstaculicen la comprensión de la continuidad de la magnitud superficie.

Hemos de admitir que el modelo propuesto no se ha mostrado eficaz para superar los obstáculos de los estudiantes, antes bien, el fraccionamiento de los objetos del modelo confirma a los estudiantes en la creencia de que en un número finito de fases se habrá completado el proceso de reparto.

Es significativo que para la sexta parte del alumnado la suma de cantidades de magnitud infinitésimas dé como resultado una cantidad infinita, lo que hace pensar que estos estudiantes priman el número de sumandos frente a la cantidad que indica cada uno de ellos. Para superar esta idea errónea el modelo si se muestra eficaz puesto que estos estudiantes admiten de inmediato su error cuando reflexionan sobre las condiciones del reparto: si se reparte una cantidad finita de magnitud es imposible que les toque una cantidad infinita a cada uno de los participantes.

CCF.V: Reconstrucción de las condiciones del reparto conocida su expresión polinómica decimal

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| asistencia regular | 15 (**41**) | 3 (**8**) | 7 (**19**) |
| asistencia irregular | 2 (**5**) | 0 (**0**) | 10 (**27**) |
| **TOTAL** | 17 (**46**) | 3 (**8**) | 17 (**46**) |

Tabla VI.13. Resultados en la Unidad de Análisis CCF.V, según el nivel de asistencia a las clases

La reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto exige de una técnica en la que hay que contemplar todos los aspectos intervinientes en cada una de las fases del reparto.

Esta técnica es más compleja si se trata de expresiones polinómicas decimales con un número infinito de sumandos y si hay partes que no se repiten, como ocurría en la pregunta formulada.

Se observa que los estudiantes se dividen en dos grupos de un número similar de componentes: los que responden de forma correcta y los que lo hacen de forma incorrecta. Pero en su composición destaca que los resultados de los estudiantes de asistencia irregular tienen resultados sensiblemente peores que los que asisten habitualmente a las clases. De nuevo se constata que las técnicas hay que utilizarlas en situaciones diferentes y que hay que practicarlas un buen número de veces.

Los resultados erróneos provienen de no tener en cuenta que en alguna fase los participantes no reciben cantidad alguna, reciben 0 partes, y de no atender a las condiciones que provocan la repetición de las condiciones del reparto que dan lugar a la suma de infinitos sumandos.

CCF.VI: Interpretación del orden y la densidad respecto de dicho orden entre expresiones polinómicas decimales

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| asistencia regular | 13 (**35**) | 5 (**14**) | 7 (**19**) |
| asistencia irregular | 1 (**3**) | 2 (**5**) | 9 (**24**) |
| **TOTAL** | 14 (**38**) | 7 (**19**) | 16 (**43**) |

Tabla VI.14. Resultados en la Unidad de Análisis CCF.VI, según el nivel de asistencia a las clases

El criterio de la mayor parte se muestra como herramienta muy útil para las relaciones de orden entre expresiones polinómicas, y así lo han entendido los propios estudiantes en el desarrollo de las clases. Sin embargo, la presencia de expresiones polinómicas con infinitos sumandos provoca que las tareas sean resueltas de forma adecuada por el 38% de los estudiantes.

Es destacable el hecho de que los resultados más elevados se den entre los alumnos que resuelven las tareas de forma inadecuada, entre los que cabe citar a los que no asisten regularmente a las clases que omiten la respuesta de intercalar infinitas expresiones polinómicas entre otras dos dadas.

CCF.VII: Interpretación y cálculo de operaciones entre expresiones decimales

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| asistencia regular | 16 (**42**) | 4 (**11**) | 5 (**14**) |
| asistencia irregular | 3 (**8**) | 4 (**11**) | 5 (**14**) |
| **TOTAL** | 19 (**50**) | 8 (**22**) | 10 (**28**) |

Tabla VI.15. Resultados en la Unidad de Análisis CCF.VII, según el nivel de asistencia a las clases

La mitad de los estudiantes realizan la tarea de forma correcta, y de ellos son muy mayoritarios los que asisten regularmente a las sesiones de clase. Ello se explica porque en el proceso de implementación de esta propuesta didáctica se ha insistido en dotar de significado a las operaciones a través de acciones realizadas en el modelo propuesto.

Pero hay otra mitad de los estudiantes que encuentran dificultades para dotar de significado a las operaciones, en su mayor parte debidas a deficiencias en el uso de magnitudes medibles.

En cuanto al cálculo del resultado de las operaciones cabe indicar que la mitad de los estudiantes tienden a trabajar las expresiones periódicas como números decimales, haciendo ajustes para encontrar el período del resultado. A pesar de disponer de la representación polinómica decimal y de la notación fraccionaria, estos estudiantes prefieren idear métodos particulares de cálculo con números decimales antes de utilizar otros sistemas de representación.

### VI.6.2. Decisiones al concluir la Fase de Reflexión

Una vez finalizada la Primera Etapa de nuestro estudio, la etapa que tiene por objetivo incrementar las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, hemos de atender al ámbito profesional de la formación de futuros profesores de matemáticas.

Nuestra preocupación se centra en determinar si la etapa de formación personal como maestros incide en las tareas de ayuda a los escolares en la construcción de los conocimientos sobre números racionales. En este sentido, interesa observar si las actuaciones de los futuros profesores atienden a aquellos aspectos sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje que se han destacado en la primera etapa de nuestro estudio.

El interés de nuestras indagaciones, tal y como se va a detallar en el Capítulo VII, se concreta en estudiar la gestión que hacen los futuros maestros de los aspectos que han sido esenciales en la formación de los conocimientos sobre números racionales:

- Las fracciones y las expresiones decimales pueden interpretarse como cantidades de magnitud que resultan al hacer repartos igualitarios.
- En la formación de conceptos juegan un papel esencial los modelos.
- Los sistemas de representación surgen al simbolizar los resultados de las acciones realizadas en un modelo.
- Los sistemas de representación, como vehículos de comunicación de ideas matemáticas, están sujetos a unas normas sintácticas inflexibles.
- Toda expresión simbólica tiene sentido si se puede evaluar semánticamente
- El modelo es un medio idóneo para testar la veracidad o falsedad de las expresiones simbólicas.
- Las relaciones de orden y densidad respecto del orden entre expresiones simbólicas se justifican al comparar cantidades de magnitud en el modelo.
- Las operaciones entre expresiones simbólicas tienen sentido en tanto en cuanto representan acciones plausibles en el modelo.

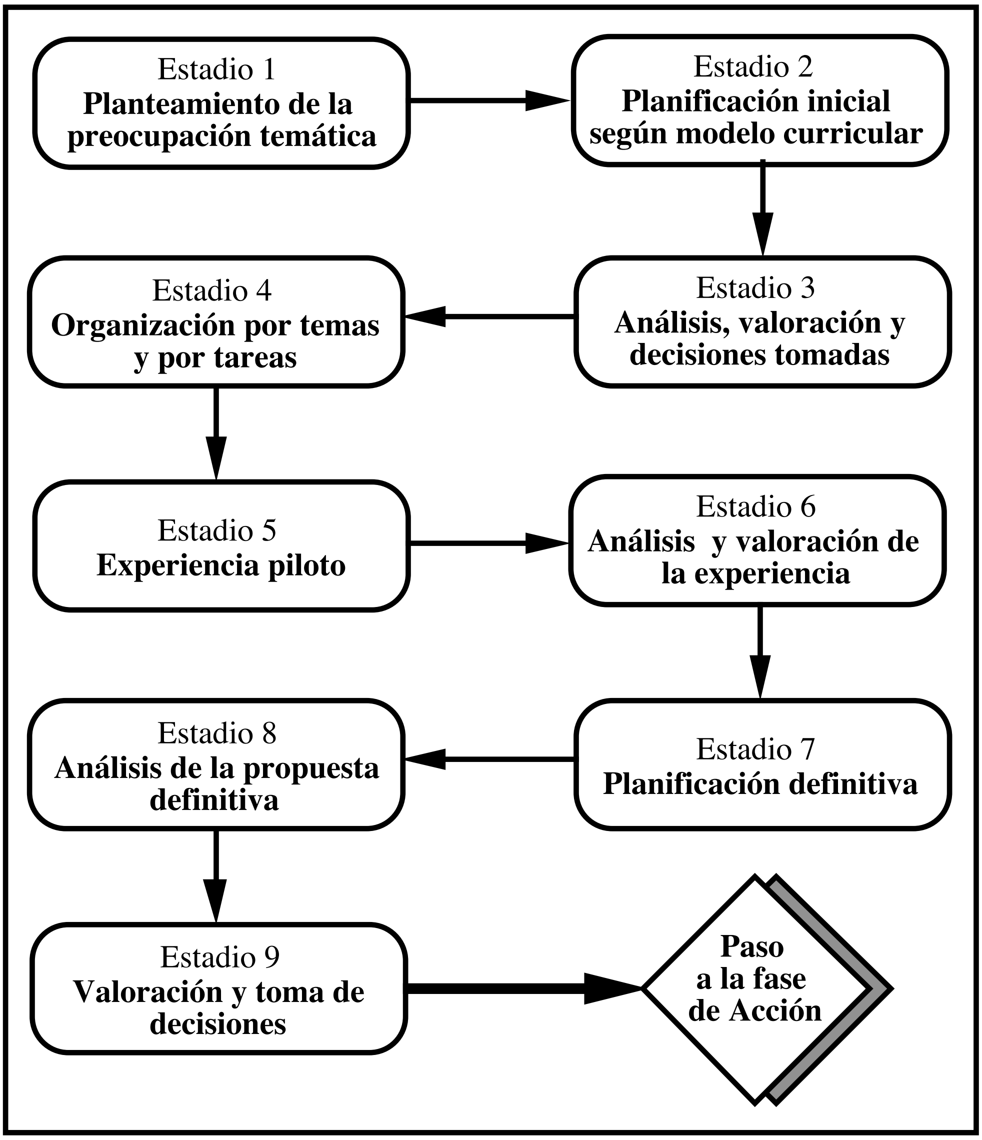
Para estudiar el modo en que la propia experiencia como aprendices influye en la realización de tareas como profesores, tomamos la decisión de realizar una Segunda Etapa en nuestro estudio. Las fases de esta nueva etapa, así como el desarrollo de las mismas, se recoge en el siguiente capítulo.

## VI.7 Balance final de la Primera Etapa de la investigación

Nuestra intención al planificar la secuencia didáctica fue la de ofrecer a los futuros profesores unos conocimientos matemáticos, novedosos para ellos, con la finalidad de que incrementasen las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales.

Finalizadas las cuatro fases del proceso de Investigación-Acción que hemos seguido en esta Primera Etapa, conviene resumir los logros y hallazgos, así como las dificultades más destacables que se han encontrado.

El trabajo realizado en la **Fase de Planificación** se estructura en nueve estadios o avances parciales, tal y como se recoge en el siguiente gráfico. Queda así delimitado el modo en que se lleva a cabo, de forma consensuada, el plan de actuación de nuestro estudio y que culmina con la decisión del grupo investigador de pasar a la fase siguiente,




Cuadro VI.1. Los distintos estadios abordados en la Fase de Planificación

Esta planificación final debe valorarse desde la perspectiva que ofrece el análisis del proceso global de Investigación-Acción, una vez que ha concluido el mismo. Es desde esta perspectiva que hacemos algunas acotaciones a la propuesta inicial:

- El **modelo** constituye una herramienta conceptual importante para el desarrollo de la propuesta didáctica elaborada en esta Primera Etapa de nuestro estudio, y así se percibió por buena parte de los estudiantes. No obstante, la implementación de la propuesta ha puesto en evidencia que el diseño mejorará el rendimiento de dichos estudiantes si se toman en cuenta estas observaciones:
  - El modelo resulta menos intuitivo de lo previsto inicialmente ya que los estudiantes necesitan utilizar la idea del resultado de una división partitiva, lo que crea dificultades para establecer relaciones y

operaciones entre repartos igualitarios. Estas dificultades están originadas porque el modelo exige actuar sobre expresiones de la forma a:b en las que la importancia reside en la consideración conjunta de los valores a y b, y no en su valoración individual. Así, por ejemplo, el estudiante para comparar los repartos 2:3 y 4:5 debe pensar en las relaciones, que están ocultas, entre esos pares de números; es decir, los "datos" del problema no son los que se necesitan para su resolución.

- El modelo juega el doble papel de posibilitar la formación de conceptos matemáticos y de soporte físico para validar ideas formuladas en lenguaje simbólico. El segundo de estos papeles no se asume con facilidad por parte de los futuros maestros; para ellos resulta natural que las tareas propuestas en lenguaje simbólico se resuelvan en el mismo lenguaje.
- Existen dificultades en la formulación de resultados generales ocasionadas por las deficiencias en la interpretación y uso del lenguaje algebráico por parte de algunos estudiantes. En este sentido, hemos constatado, con carácter más general, que las letras tienden a interpretarse como valores cualitativos (tortillas, personas, ...), y no como valores cuantitativos, como parámetros.

En consecuencia, consideramos que la propuesta didáctica ha de contemplar más tareas para incrementar la comprensión del modelo propuesto, más exhaustividad en las explicaciones del profesor sobre la utilidad del modelo en el aprendizaje, y arbitrar una secuencia inductiva en la utilización del lenguaje algebráico.

• En el **Primer Foco de Investigación** se quiere conceptualizar la fracción como cociente y mostrar una estructura polinómica subyacente. Para ello se construye el sistema de representación polinómico unitario, desde el que se revisan relaciones y operaciones entre expresiones simbolizadas en este sistema. La implementación de la propuesta didáctica ha puesto de manifiesto logros y dificultades que reseñamos a continuación:

- En la citada propuesta el sistema de representación polinómico unitario se construye para simbolizar las acciones realizadas en el modelo, en este caso para simbolizar el resultado del reparto igualitario aplicando el criterio de la mayor parte. Este proceso de simbolización es complejo porque se deben controlar un número importante de elementos distintos; pero las dificultades se han incrementado porque un importante número de estudiantes actuaban de manera errónea al cuantificar la medida de partes de la unidad de medida.
- El carácter de generalidad y universalidad que caracteriza a los sistemas de representación provoca que el cumplimiento de las normas sintácticas sea inflexible. Este aspecto de la "rigurosidad matemática" fue admitido por los propios estudiantes en términos de exigencias para la correcta comunicación de las acciones realizadas.
- La utilización del lenguaje simbólico puso de manifiesto que las

expresiones utilizadas, aunque sean sintácticamente correctas, solamente son válidas si se pueden evaluar semánticamente en términos del modelo. Esta evaluación realizada sobre producciones de los propios estudiantes sirvió para alertar a los futuros maestros sobre la necesidad de conectar el aprendizaje al mundo de los objetos físicos.

- El criterio de la mayor parte se mostró como herramienta conceptual potente para establecer relaciones de orden entre expresiones polinómicas unitarias sin más requisitos que la comparación ordenada de fracciones unitarias. Y también permitió presentar la densidad respecto del orden mostrando que el orden de los naturales permite hablar de anterior y siguiente, pero no ocurre lo mismo entre expresiones polinómicas que admiten infinitas entre dos dadas.
- Desde el modelo los estudiantes pudieron advertir que hay operaciones que tienen sentido como resultados de determinadas acciones; mientras que hay otras operaciones cuyo significado en términos del modelo no es posible. Además, los estudiantes también pudieron comprobar que la existencia de una operación no significa que exista un algoritmo de cálculo asociado.
- La noción de fracción como relación parte-todo obstaculiza la comprensión de la fracción como resultado de un reparto igualitario, pues algunos estudiantes representan el resultado del reparto como una parte de unidad y dejan otra parte de unidad; pero no tienen en cuenta que en el reparto "desaparece" la totalidad de la cantidad de magnitud a repartir, haciendo corresponder a cada uno de los participantes una cantidad igual de magnitud.

En consecuencia, la propuesta se mejora al introducir tareas en las que la fracción como cociente aparezca como un significado que no anula ni sustituye al significado de fracción como relación parte-todo. Es más, si el reparto se hace en varias fases, la fracción ordinaria queda conformada como una suma de fracciones unitarias entre las que hay establecidas unas ciertas condiciones de divisibilidad.

• En el **Segundo Foco de Investigación** se trabaja la representación polinómica decimal como resultado del reparto en varias fases, haciendo fraccionamientos en 10 partes iguales y aplicando el criterio de la mayor parte. Al simplificar la simbolización utilizada, recurriendo al valor posicional, surge la notación decimal con el mismo significado que la representación decimal y construida a partir del mismo modelo utilizado para las fracciones. Los logros y dificultades detectados son los siguientes:

- La aparición de procesos de reparto en infinitas fases es admitido por los estudiantes como consecuencia de exigir los fraccionamientos en 10 partes iguales. Sin embargo, esos estudiantes no admiten la continuidad de la medida en la magnitud superficie, puesto que entienden que el tamaño reducido de las partes provocará la finalización del reparto, ya que es impensable el fraccionamiento de cantidades pequeñas de magnitud.

- Las notaciones fraccionaria y decimal surgen del mismo modelo: ambas se pueden concebir como resultados de repartos igualitarios realizados por procedimientos diferentes.
- El criterio de la mayor parte es una herramienta importante para establecer relaciones de orden entre expresiones polinómicas decimales; y al extender esta noción a las expresiones decimales el orden se establece por comparación ordenada de las cifras.
- Los estudiantes pudieron advertir que las operaciones entre expresiones polinómicas decimales con un número finito de sumandos, presentan facilidades para obtener el resultado; en consecuencia, las operaciones entre números decimales son fácilmente algoritmizables. Sin embargo, las operaciones entre expresiones polinómicas decimales con infinitos sumandos, o las operaciones con expresiones decimales periódicas, presentan dificultades operatorias, por lo que hay que expresarlas en otro sistema de representación, la notación fraccionaria, en el que los cálculos de las operaciones sí son algoritmizables.

Por consiguiente, la propuesta didáctica puede y debe mejorarse incidiendo en el significado de la notación decimal como resultado de un reparto igualitario; además, conviene resaltar que las relaciones de orden entre notaciones decimales no se establecen de la misma forma que entre números naturales. Asimismo hay que incidir en que los algoritmos de cálculo con expresiones decimales finitas no son aplicables al caso de expresiones decimales periódicas.

Finalizada la fase de Planificación, el equipo investigador decide implementar la propuesta didáctica con un grupo natural de estudiantes para Maestros de Educación Primaria, que cursen la asignatura de 2º curso "El currículum de Matemáticas en Educación Primaria". Asimismo se decide que la metodología a utilizar esté sustentada por trabajos individuales de los estudiantes; después, y desde la revisión de dichos trabajos, habrá exposiciones del profesor, así como debates colectivos, para institucionalizar el conocimiento.

Sobre la fase siguiente, la **Fase de Acción**, señalamos los aspectos más significativos en relación al desarrollo de las clases:

- Las sesiones de clase que se habían planificado, 13 sesiones de 2 horas cada una, se incrementaron en otras 7 sesiones. Este incremento de más del 50% de las previsiones se debe a la introducción de sesiones de debate y a las dificultades de comprensión por parte de los estudiantes, tal y como puede verse con mayor detalle en el apartado V.3.2. El método de Investigación-Acción nos ha permitido introducir estas modificaciones como resultado de un trabajo de reflexión permanente sobre el desarrollo de las sesiones de clase.
- La metodología utilizada se mostró eficaz por cuanto los estudiantes para maestro tuvieron oportunidad de reflexionar, a posteriori, sobre sus propias

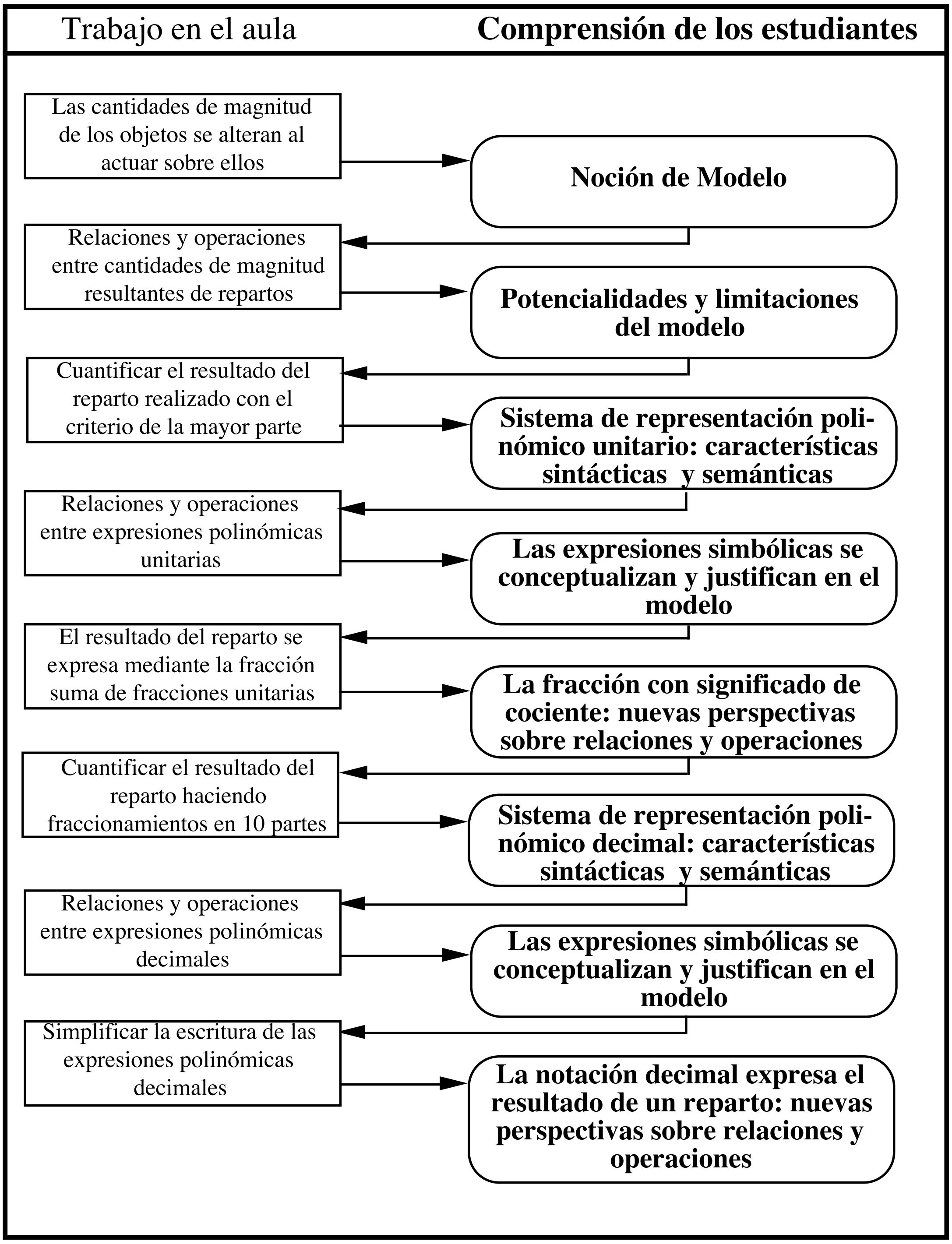
producciones, analizando aquellos aspectos del conocimiento que presentaban dificultades de interpretación y observando cómo sus compañeros ofrecian enfoques y resultados diferentes ante una misma tarea.

- Los estudiantes mostraron ciertas reticencias iniciales a la utilización del modelo propuesto; inicialmente consideraban que era más apropiado trabajar con expresiones simbólicas, pero en el desarrollo de las sesiones admitieron que el modelo era un terreno adecuado para visualizar las ideas.
- Aun cuando no estaba previsto en la fase de Planificación, el equipo investigador decidió introducir dos sesiones de debate colectivo: una sobre la cuantificación del resultado del reparto y otra sobre el significado del símbolo 0. Ambas sesiones se concibieron para que, de forma colectiva, se pudiesen subsanar los errores y dificultades que los estudiantes encontraron en su trabajo individual.
- Las experiencias positivas sobre la construcción compartida del conocimiento, que se evidenció en los debates colectivos, aconsejan extenderlas a otros aspectos del conocimiento matemático que presentaron dificultades de conceptualización: la continuidad de la medida de la magnitud superficie, la interpretación de resultados de repartos con infinitos sumandos y la generalización de resultados mediante expresiones algebráicas.

Acerca de la fase siguiente, la **Fase de Observación**, queremos señalar como significativos los aspectos siguientes:

- En la recogida de datos mediante grabaciones de audio y de vídeo se han producido algunas deficiencias causadas por la inexperiencia del investigador, que pueden subsanarse con un investigador más experimentado o recurriendo a la ayuda de expertos en la materia.
- La Unidades de Análisis diseñadas para la Organización de los Contenidos y para la Comprensión de los Contenidos han permitido el estudio posterior de forma satisfactoria.
- Las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica, como ya se señaló en el Capítulo IV, fueron adaptadas de las que utilizó en su estudio Romero (1995) con estudiantes de enseñanza secundaria. Hay que hacer una revisión de estas unidades en el sentido de analizar aquellas unidades que han tenido frecuencia 0 en nuestro estudio, para determinar si son propias de los estudiantes universitarios objeto de la experimentación.

Con respecto a la **Fase de Reflexión** hemos recogido en el cuadro siguiente nuestra valoración sobre la comprensión alcanzada por los estudiantes en el proceso de interacción didáctica detectada a través de sus producciones.




Cuadro VI.2. Comprensión mostrada por los estudiantes en las tareas propuestas en la clase

Los diferentes aspectos recogidos en este cuadro permiten hacer una valoración del proceso instructivo desde la comprensión mostrada por los futuros maestros sobre los conocimientos impartidos:

1.- La formación de conceptos matemáticos resulta más asequible al trabajar con objetos familiares y tangibles desde los que pueden alcanzarse ideas abstractas. Al trabajar con objetos del mundo físico podemos concretar algunos de ellos (tortillas), así como una magnitud reconocible en los mismos (superficie), y también acciones (como repartir) que transforman la cantidad inicial de magnitud.

2.- La noción de **modelo** es una herramienta conceptual importante para la construcción de conocimientos matemáticos. El modelo de trabajo debe estar plenamente delimitado en sus elementos fundamentales: objetos, magnitud medible y acciones a realizar.

3.- A partir de los objetos del modelo se pueden establecer relaciones y operaciones entre cantidades de magnitud. Dichas relaciones y operaciones tendrán validez en tanto en cuanto indiquen acciones factibles de realizar sobre los objetos: el modelo tiene unas **potencialidades** y unas **limitaciones** producidas por las características de sus componentes. Delimitar dichas potencialidades y limitaciones es esencial para evaluar su utilidad instructiva.

4.- El resultado del reparto es una cantidad de magnitud medible y por tanto cuantificable con respecto a una unidad de medida; dicha medida vendrá determinada por la técnica utilizada en la acción de repartir.

5.- El empleo del criterio de la mayor parte permite simbolizar de forma única el resultado del reparto mediante una suma finita de fracciones unitarias. El sistema de **representación polinómico unitario** surge desde el modelo propuesto para simbolizar el resultado del reparto y constituye un medio de comunicación entre personas con exigencias de generalidad y universalidad; en consecuencia, está sometido a unas reglas sintácticas precisas y permite validar las expresiones simbólicas mediante evaluaciones semánticas.

6.- Las relaciones de equivalencia y orden, así como la densidad respecto del orden, entre expresiones polinómicas unitarias tienen el significado de repartos iguales o diferentes. Las características del sistema de representación permiten comparar expresiones polinómicas mediante la comparación ordenada de fracciones unitarias.

7.- Las operaciones entre expresiones polinómicas unitarias tienen significado en tanto en cuanto representen acciones factibles de realizarse en el modelo: la escritura simbólica de operaciones debe evaluarse semánticamente en el modelo en que se trabaja. La cuantificación de los resultados, en los casos en que tengan sentido las operaciones, no son algoritmizables.

10.- La fracción, como suma de cantidades de magnitud recibidas en cada fase del reparto, tiene el significado de **cociente**; dicho significado no anula otros como el de relación parte-todo. La fracción como cociente indica el resultado del reparto igualitario de las unidades de magnitud señaladas en el numerador, entre los individuos indicados en el denominador; además, dicha fracción admite una descomposición única como suma de fracciones unitarias, cuyos denominadores guardan determinadas relaciones de divisibilidad.

11.- Las relaciones y operaciones entre fracciones pueden interpretarse como resultados de acciones de reparto, lo que ofrece una nueva perspectiva tanto de significados como de justificación de los cálculos de los resultados de las citadas operaciones.

12.- Al modificar la técnica de reparto y exigir fraccionamientos exclusivos en 10 partes iguales produce una variación al expresar el resultado del reparto: el sistema de **representación polinómico decimal** tiene características sintácticas y semánticas propias. La aparición de expresiones polinómicas decimales con infinitos sumandos es imputable a la exigencia de utilizar el número 10 para los fraccionamientos.

13.- Al mantener el criterio de la mayor parte, las relaciones de orden entre expresiones polinómicas decimales se realiza por comparación ordenada de los sumandos que conforman cada una de ellas.

14.- Las operaciones entre expresiones polinómicas decimales tienen sentido si representan acciones realizables en el modelo. Los resultados de las operaciones son algoritmizables en el caso de expresiones con un número finito de sumandos; en el caso de un número infinito de sumandos hay que recurrir a otro sistema de representación.

15.- Criterios de economía en la simbolización de las expresiones polinómicas decimales hacen surgir la **notación decimal**: las expresiones decimales pueden concebirse como simbolización de los resultados de repartos igualitarios. En las expresiones decimales el valor de las cifras de cada posición decimal indican las partes que corresponden a distintas fases del reparto.

16.- Las relaciones de orden entre expresiones decimales vienen determinadas por la comparación ordenada de las cifras que ocupan cada posición.

17.- Las operaciones entre expresiones decimales tienen sentido como resultados de acciones realizadas en el modelo propuesto; los resultados de las operaciones entre expresiones decimales con un número finito de cifras son algoritmizables, pero si el número de cifras es infinito hay que utilizar la notación fraccionaria.

### VI.7.1. Conclusiones

La Primera Etapa de nuestro estudio tiene la intencionalidad de incrementar la comprensión sobre los números racionales de los futuros maestros. Finalizadas las cuatro fases resumimos las dificultades y logros que, respecto a la comprensión de los contenidos, se han detectado.

**Dificultades:**

i.- Interpretar el símbolo 0 como representación de una acción que no se puede llevar a cabo.

ii.- Interpretar el símbolo 0 para representar la ausencia de cantidad de magnitud.

iii.- Utilizar las expresiones literales con valor cualitativo, con valor de denominación de objetos, y no con valor cuantitativo, con valor de parámetro.

iv.- El significado de la fracción como relación parte-todo obstaculiza la comprensión de la fracción como cociente.

v.- Las relaciones de orden entre números naturales se trasladan a las relaciones de orden entre expresiones simbólicas de números racionales.

vi.- Resistencia a dotar de significado a las expresiones simbólicas en un modelo físico.

vii.- La negación de la continuidad de la medida de la magnitud superficie obstaculiza la comprensión de los repartos en infinitas fases.
viii.- Resistencia a dotar de significado a las expresiones decimales como resultados de repartos igualitarios.

**Logros**:
i.- Consolidar la noción de modelo como entorno físico manipulable desde el que se construyen sistemas de representación y como medio en el que validar las expresiones simbólicas.
ii.- Poner de manifiesto que los sistemas de representación surgen al comunicar los resultados de las acciones realizadas en el modelo, así como la importancia que tiene el cumplimiento de las reglas sintácticas; además, se comprende la necesidad de evaluar semánticamente las expresiones simbólicas.
iii.- Comprender que las relaciones entre expresiones polinómicas tienen significado como acciones en el modelo y, en consecuencia, vienen caracterizadas a partir de dichas acciones.
iv.- Entender que las operaciones entre expresiones polinómicas existen en tanto en cuanto tienen significado en el modelo, y que el cálculo del resultado no siempre es algoritmizable.
v.- Concebir la fracción como cociente permite reelaborar los conocimientos personales sobre las relaciones y operaciones entre fracciones.
v.- Ampliar el significado de las expresiones decimales a resultados de repartos igualitarios permite comprender que las notaciones fraccionaria y decimal son formas diferentes de simbolizar una misma acción.
vi.- Dotar de significado de reparto a las expresiones decimales obliga a ampliar los significados sobre sus relaciones y operaciones.

En cuanto al propio proyecto hay que constatar que el método de Investigación-Acción, tal y como se ha estructurado en esta Primera Etapa de nuestro trabajo, se ha mostrado como un método de alto potencial heurístico, que nos ha permitido, como se ha reseñado con anterioridad, determinar aquellos aspectos de cada una de las fases que resultan positivos, así como aquellos aspectos que deben mejorarse.

Finalizada esta Primera Etapa del trabajo, la que contempla el aspecto de formación matemática de los futuros maestros, interesa indagar sobre la formación profesional de estos estudiantes.

En el siguiente capítulo se desarrolla el plan de investigación sobre la influencia que las producciones previas de los estudiantes para maestro tienen en la revisión de tareas realizadas por escolares.

# CAPITULO VII

# SEGUNDA ETAPA DE LA INVESTIGACION

## VII.1. Presentación

Al comienzo de este estudio enunciamos dos objetivos generales para nuestra investigación (Apartado I.8 ), en el segundo de ellos nos proponíamos: "Analizar los modos en que el nuevo dominio de conocimientos sobre los números racionales de los futuros profesores, les afectan en las tareas de planificación del proceso de enseñanza sobre el tópico en estudio".

En el Apartado IV.1. señalamos las dos etapas que configuran el diseño general de este estudio y las finalidades que corresponden a cada una de esas etapas. Para atender a la consecución del segundo objetivo general antes enunciado, nos planteamos la realización de una Segunda Etapa de la investigación, cuya finalidad general consistía en "hacer indagaciones sobre las relaciones que se pueden detectar entre las posiciones manifestadas en las sesiones de clase (por los estudiantes para maestro), sobre la naturaleza de las matemáticas y la construcción del conocimiento matemático y las reflexiones de estos mismos estudiantes al proponerles tareas relacionadas con la instrucción de escolares."

Como ya se ha indicado en el Capítulo IV, apartado IV.3, esta Segunda Etapa es complementaria de la Primera, y trata de profundizar sobre el conocimiento profesional conectado con la innovación curricular sobre números racionales; en ella se utiliza una técnica metodológica diferente: la entrevista. Nuestros informantes son tres alumnos, seleccionados entre los que han seguido con regularidad la Primera Etapa del estudio.

Aunque las dos etapas del estudio están conectadas, esta Segunda Etapa no tiene como finalidad la confirmación del estudio hecho en la etapa anterior sino que continúa la exploración antes emprendida, orientada en este caso hacia el conocimiento profesional de los estudiantes para profesores de Educación Primaria y centrada sobre un tópico concreto.

La técnica de investigación utilizada en esta etapa es la entrevista, con un contenido especificado por el objetivo de investigación antes enunciado y con la finalidad de proporcionarnos acceso al conocimiento que tienen unos estudiantes para profesor sobre determinadas competencias profesionales.

Siguiendo los trabajos de Cohen y Manion (1990) sobre el procedimiento del método de entrevista, ya hemos presentado detalladamente en el apartado IV.3 del Capítulo IV el objetivo de la investigación, así como la tipificación de las entrevistas como semiestructuradas, prospectivas y directivas.

En este capítulo nos proponemos completar la secuencia de pasos señalados por los autores mencionados: el programa de las entrevistas (apartado VII.2), la planificación y dirección de las entrevistas (apartado VII.3), la realización de las entrevistas (apartado VII.4), la recogida de datos y su codificación (apartado VII.5), y el análisis e interpretación de los datos (apartado VII.6); finalmente se reseñan las conclusiones en el apartado VII.7.

## VII.2. Programa de las entrevistas.

Las entrevistas que se van a realizar se articulan en torno a 5 tareas realizadas por escolares y que se muestran a cada uno de los estudiantes entrevistados y sobre las que se realizan las preguntas. Estas tareas están completamente descritas en el Anexo III.2.

Los ejercicios y cuestiones que articulan las tareas sobre las que tienen que reflexionar y responder estos profesores en formación se han seleccionado a partir de los tópicos estudiados en la Fase de Acción de la Primera Etapa de nuestro estudio. Son respuestas hipotéticas de escolares de Educación Primaria a las preguntas de un profesor sobre los siguientes contenidos matemáticos:

i.- Relaciones de orden entre repartos

ii.- Justificación del algoritmo de la suma de fracciones.

iii.- Simbolización del reparto mediante el sistema simbólico que hemos denominado representación polinómica unitaria.

iv.- Paso de la notación fraccionaria a la decimal mediante el algoritmo de la división, incluyendo el caso de denominador igual a 0.

v.- Significado y obtención del resultado del cociente entre un número periódico y un número natural.

La estructura de las tareas es común a todas ellas: cada una comienza por una pregunta o problema planteado por el profesor a sus escolares y, a continuación, figuran una o más respuestas dadas por dichos escolares; como puede verse en el siguiente ejemplo

**Actividad propuesta por el profesor**

Calcula el resultado de la suma siguiente $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta

**Respuesta del niño B**

El resultado es $\frac{6}{8}$ He contestado así porque he pensado que 2/3 indica que se reparten 2 tortillas entre 3 personas y que 4/5 indica que se reparten 4 tortillas entre 5 personas. Así que junto las tortillas y las personas y así ya sé cuanto recibe una persona que hubiese participado en los dos repartos por separado

Desde el análisis de estas tareas y a través de las entrevistas, se pretende que el futuro profesor realice estas actividades:

1º: esgrimir argumentaciones y juicios sobre los resultados de las tareas escolares;

2º: justificar las explicaciones que elaboran para ayudar a los niños a partir de las observaciones anteriormente realizadas, y justificar el tipo de expresiones utilizadas;

3º: justificar las decisiones adoptadas en el diseño de las tareas que, como resultado de las actuaciones anteriores y desde una posición docente, propondrían a los escolares.

Una vez formuladas cada una de las cinco tareas que se proponen a los entrevistados, las respuestas que se demandan provienen de sus actuaciones en una doble dirección:

- En primer lugar, el futuro maestro debe analizar y valorar las respuestas de los escolares de Educación Primaria, atendiendo a los siguientes aspectos:
  a) Precisar si la respuesta es correcta o incorrecta.
  b) Valorar/enjuiciar la calidad del proceso seguido para obtener la respuesta.
  c) Justificar/explicar las causas que provocan el error en cada caso, si resulta pertinente.

  Este análisis viene orientado por el entrevistador que formula preguntas del siguiente tipo:
  - ¿Consideras que la respuesta es correcta o incorrecta?
  - ¿Has detectado alguna incorrección?, ¿en qué parte de la respuesta?
  - ¿Consideras que la respuesta presenta algún error importante?, ¿cuál es ese error?, ¿por qué es importante?
- En segundo lugar, el futuro maestro debe proponer alguna actividad al hipotético alumno para que éste pueda proseguir el proceso instructivo, bien sea en el sentido de ofrecerle alguna explicación sobre los resultados que ha obtenido, bien sea en el de proponerle un nuevo ejercicio o pregunta. Para ello debe elegir una de las siguientes alternativas:

  Alternativa I: Si la tarea del alumno se considera que es correcta, o que el error cometido no tiene importancia, el futuro profesor debe proponer a dicho alumno una nueva actividad con la que proseguir el proceso instructivo

  Alternativa II: Si la tarea se considera incorrecta, el estudiante para profesor debe ofrecer una explicación al escolar para que éste pueda superar dicho error.

  El esquema desde el que actúa el estrevistador para que el estudiante opte por una de las alternativas es el siguiente:

  ¿Le darías al niño alguna explicación para ayudarle?
  - Si el estudiante responde afirmativamente, el investigador, en las 3 primeras tareas, hará la siguiente propuesta: *aquí te muestro 3 posibles explicaciones para el niño A; elige la que tu le expondrías a ese niño*. Realizada la elección por parte del estudiante el entrevistador le demandará justificaciones acerca de la explicación que ha elegido y sobre las razones

que le han llevado a rechazar las otras alternativas. En las dos últimas tareas será el estudiante quien elabore completamente la explicación que ofrece al escolar

- Si el estudiante responde de forma negativa, el entrevistador le formulará preguntas del siguiente tipo: ¿le propondrías al niño alguna nueva actividad?, ¿cuál?, ¿por qué propones esta actividad?, ¿qué finalidad se persigue con la propuesta?, ¿en qué modelo haces la propuesta?, ¿por qué utilizas esa representación?

## VII.3. Diseño y dirección de las entrevistas

Son tres los aspectos que desarrollamos en este apartado: la planificación y puesta en práctica de la entrevista, la selección de los informantes y el papel del entrevistador.

### VII.3.1. Planificación y realización de la entrevista.

Una vez que se han elaborado los materiales a utilizar en las entrevistas, se procede a planificar su desarrollo:

- Seleccionar 3 estudiantes para maestros que hayan mostrado distintos niveles de comprensión de los conocimientos trabajados en las sesiones de clase en la Primera Etapa de nuestra investigación. Esta selección se hará de acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba final y atendiendo a un solo aspecto conceptual: la interpretación del modelo sobre el que se construyen los sistemas de representación polinómica.
- Delimitar las actuaciones que se llevan a cabo en las cuatro fases clásicas que comprende el desarrollo de la entrevista:
    * En la fase de preparación se acuerda que el espacio para llevar a cabo las entrevistas sea una de las aulas-seminario existentes en el centro, y que conocen los alumnos.
    - En el inicio de la entrevista se reducirá la incertidumbre del futuro maestro en relación a los objetivos, el proceso y el contenido de la entrevista, procurando crear un clima de confianza en el que se explicite la absoluta confidencialidad de todo el desarrollo de la sesión.
    - El cuerpo de la entrevista tiene la finalidad de recabar toda la información posible del estudiante, así como la identificación de la naturaleza y contexto de los problemas que éste manifieste, por lo que el entrevistador, además de las preguntas preestablecidas, realizará aquellas otras que considere oportunas en tal sentido.
    - El final de la entrevista servirá para agradecer al estudiante su colaboración, presentarle un resumen de lo realizado y permitirle que aclare dudas o que realice comentarios sobre el trabajo efectuado.
- Para la recogida de datos se determina la utilización de una grabadora que se colocará sobre la mesa en la que se lleva a cabo la entrevista.

**VII.3.2. Selección de los estudiantes entrevistados.**

En esta Segunda Etapa el trabajo de investigación se concreta en la realización de entrevistas a 3 de los futuros maestros que han recibido instrucción durante la Fase de Acción de la primera etapa. En la selección de estos 3 estudiantes se han tenido en cuenta los siguientes criterios:

i.- Asistencia a las sesiones de clase de los alumnos seleccionados, que debe ser de, al menos, el 75%, lo cual significa haber realizado 27 o más de las tareas propuestas.

ii.- Los grados de Comprensión del Contenido referidos a la interpretación y simbolización de la acción de repartir de forma igualitaria, puesto que consideramos que éste es un aspecto esencial para interactuar con el modelo de trabajo que se ha propuesto en las sesiones de clase. Los grados considerados son:

- mostrar una correcta interpretación del modelo,
- interpretar de forma incompleta el modelo,
- hacer interpretaciones inadecuadas del modelo.

El instrumento utilizado para determinar los grados de comprensión del modelo mencionado se construye a partir de las respuestas dadas por los futuros maestros en la Unidad de Comprensión del Contenido I de la Prueba Final; en esta tarea los estudiantes debían de ofrecer argumentos para certificar la verdad o falsedad de 4 definiciones diferentes sobre la noción de reparto igualitario. De acuerdo con el número de respuestas correctas, establecemos los siguientes criterios de valoración:

| | |
|---|---|
| 0 respuestas: | Interpretación inadecuada del modelo |
| 1 respuesta: | Interpretación deficiente del modelo |
| 2 respuestas: | Interpretación incompleta del modelo |
| 3 respuestas: | Interpretación aceptable del modelo |
| 4 respuestas: | Interpretación correcta del modelo |

Estos criterios han permitido seleccionar a tres estudiantes en los que se considera como variable única la comprensión del contenido referida a la acción del reparto igualitario, puesto que comprender la acción es esencial en la construcción del modelo que permite el desarrollo de las secuencias de enseñanza diseñadas en la Fase de Acción I de nuestra investigación. En el caso de que hubiese dos o más estudiantes con las mismas condiciones iniciales, se optaba por el que había realizado un mayor número de tareas; en caso de proseguir el empate, la elección recae en el estudiante que tenga una calificación más alta en la mencionada Prueba Final.

De acuerdo con los criterios de selección preestablecidos, los estudiantes para maestro que se han seleccionado son los siguientes:

Estudiante A: muestra una correcta interpretación de la acción en las 4 situaciones que se le han planteado, lo que le permite analizar y resolver, por medio del modelo, aquellas cuestiones que le son planteadas mediante diferentes sistemas simbólicos de representación. Es el número 34 de la lista de clase.

Estudiante B: interpreta correctamente la acción en dos de las cuatro situaciones planteadas; es un alumno que no utiliza con seguridad el modelo propuesto pues aunque identifica correctamente los elementos intervinientes en el reparto, confunde el número de partes y su tamaño. En estas condiciones posiblemente encontrará dificultades en aquellas tareas en las que sea importante discernir si los números expresan la cardinalidad o la medida de una cantidad de otra magnitud. Hacemos referencia al alumno número 10 de la lista de clase.

Estudiante C: da respuestas incorrectas en las cuatro interpretaciones de la acción de reparto que se le propusieron. Se trata de un alumno que no dispone de un modelo mediante el cual analizar y resolver aquellas tareas que se le presentan mediante distintos sistemas simbólicos de representación. Se trata del alumno nº 24 de la lista de clase.

### VII.3.3. Papel del entrevistador.

El entrevistador es el investigador de este trabajo y es el profesor de la asignatura en la que se ha llevado a cabo, en la Primera Etapa, la implementación de la propuesta didáctica; por tanto, conoce a cada uno de los estudiantes seleccionados y también conoce el grado de comprensión de los contenidos de cada uno de los entrevistados.

Teniendo en cuenta que la entrevista es prospectiva, el entrevistador juega un papel prioritario de recabar toda la información del entrevistado para llegar al conocimiento más objetivo posible de la situación. En este sentido, sus actuaciones tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

- Comunicar a los estudiantes seleccionados el interés en hacerles una entrevista. Puesto que tal comunicación se produce en una sesión de clase, se procurará hacer la comunicación de forma confidencial y dejando entrever la finalidad de la misma.
- Todas las respuestas del entrevistado han de ser razonadas. Tiene que preguntar las razones que impulsan al entrevistado a elegir una de las opciones que se le presentan, y tiene que demandar justificaciones del entrevistado sobre las decisiones que tome en la organización de la secuencia instructiva,
- El entrevistador tiene que eludir las opiniones personales o juicios de valor sobre las respuestas del entrevistado, de modo que las informaciones proporcionadas por el entrevistado no se vean influidas por la actuación del entrevistador.
- El profesor entrevistador tiene que reducir la incertidumbre inicial de cada

entrevistado, indicándole que la entrevista tiene la finalidad de ayudarle a la plena comprensión de los contenidos de las sesiones de clase y a sus tareas como futuro profesional. Además, se le hace saber al estudiante que la correcta realización de las tareas que se le proponen redundará positivamente en la calificación de la prueba final.

- Dependiendo de las respuestas de cada estudiante, el entrevistador hará las oportunas indagaciones para lograr la plena identificación y naturaleza de las ideas erróneas que hayan surgido.
- Al finalizar la sesión, el entrevistador agradecerá al estudiante su colaboración, le resumirá los aspectos más importantes de la entrevista y le permitirá que aclare las dudas que tenga sobre el contenido de la entrevista.

## VII.4. Realización de las entrevistas.

La transcripción completa de las entrevistas se encuentra en el Anexo VI. Se describen en este apartado las distintas sesiones empleadas para realizar las entrevistas, tomando como base el diario del profesor, las producciones escritas de los entrevistados y las grabaciones realizadas en las sesiones de clase. El desarrollo de cada una de las sesiones se organiza del modo siguiente:

1.- Ejecución
2.- Aspectos actitudinales
3.- Valoración.

***Primera entrevista: Día 20-3-98***

• Ejecución

- La sesión se plantea en términos de ayuda al profesor en la planificación de futuras sesiones de clase; se invita al estudiante a que, una vez finalizadas las tareas, emita juicios de valor sobre las ventajas e inconvenientes que presentan las tareas comentadas respecto a las actividades que se hacen habitualmente en las clases. El estudiante acepta de muy buen grado la colaboración que se le pide.
- Aun cuando estaba previsto hacer un descanso intermedio, el estudiante entrevistado, el nº 34, prefirió proseguir con el trabajo, pues no se encontraba cansado. La sesión duró 1 hora y 45 minutos.
- Hubo ligeras interrupciones motivadas por problemas con la grabadora, hasta que su funcionamiento irregular aconsejó cambiarla por otra transcurridos 15 minutos desde el inicio de la sesión.

• Aspectos actitudinales

- El alumno manifestó su deseo inicial de que la grabadora no se hiciese funcionar, pues ello le coaccionaba; a cambio proponía que se tomasen notas manuscritas. El profesor-investigador le argumentó que la riqueza y variedad de matices se perdían al tomar notas; además la comodidad de la grabadora permitía centrarse más en la tarea, sin perder ningún dato para el análisis posterior de toda la información producida. Finalmente el estudiante aceptó el uso de la grabadora, aunque al finalizar la sesión indicó que la presencia del aparato le había cohibido en algún momento.

- Hay que destacar que el estudiante manifestó estar muy interesado en la enseñanza de las matemáticas, pues es la materia que más le gusta; además, su experiencia como alumno de prácticas durante 3 semanas le sirvió para aumentar sus deseos de mejorar su formación como profesor de matemáticas, pues detectó las dificultades de aprendizaje que tienen los escolares con esta materia.

Valoración.

- La tarea propuesta resultó de interés para el estudiante entrevistado en tanto en cuanto se identificó con la figura de un profesor interesado en la detección y corrección de los errores de los escolares.

***Segunda entrevista: Día 23-3-98***

• Ejecución

- La sesión se plantea en términos de ayuda al profesor en la planificación de futuras sesiones de clase. Se le indica al estudiante que esta sesión servirá para completar las calificaciones obtenidas en las sesiones de clase precedentes. El estudiante acepta de muy buen grado la colaboración que se le pide, sin entrar a negociar la cuantía de su calificación.
- Aun cuando estaba previsto hacer un descanso intermedio, el estudiante entrevistado, el nº 10, prefirió proseguir con el trabajo, pues no se encontraba cansado. La sesión duró 1 hora y 40 minutos.

• Aspectos actitudinales

- El estudiante no mostró ningún inconveniente a la presencia de la grabadora, ni tampoco hizo notar que en algún momento se hubiese sentido coaccionado por la presencia del aparato.
- El estudiante manifestó en varios momentos que tenía dificultades de comprensión de las matemáticas y, a pesar de haber estudiado esta disciplina tanto en bachillerato como en C.O.U., manifestó que siempre le costó un esfuerzo muy notable conseguir superar la asignatura. No obstante, mostró un grado de colaboración excelente.

• Valoración.

- El estudiante manifestó, una vez acabada la sesión, que le resultaban un tanto complejas estas tareas de revisión de trabajos de escolares, pues no sólo había que determinar los posibles errores de los niños, sino que había que determinar qué tipo de error habían cometido.

***Tercera entrevista: Día 1-4-98***

• Ejecución

- La sesión se plantea en términos de ayuda al profesor en la planificación de futuras sesiones de clase; además, se le indica al estudiante que esta sesión servirá para completar las calificaciones obtenidas en las sesiones de clase precedentes. El estudiante acepta de muy buen grado la colaboración que se le pide, sin entrar a negociar la cuantía de su calificación.

- Aun cuando estaba previsto hacer un descanso intermedio, el estudiante entrevistado, el nº 24, prefirió proseguir con el trabajo, pues no se encontraba cansado. La sesión duró 1 hora y 45 minutos.

• Aspectos actitudinales

- El estudiante para maestro no mostró ningún inconveniente a la presencia de la grabadora, ni tampoco hizo notar que en algún momento se hubiese sentido coaccionado por la presencia del aparato.
- Este estudiante manifestó su interés por la educación, aun cuando su intención inicial era la de haber estudiado la especialidad de Educación Física, porque en ella se encontraría más a gusto.
- El estudiante manifestó, una vez finalizada la entrevista, que tenía dificultades de comprensión de las matemáticas que el llamaba iniciales; no obstante, cursó matemáticas en 3º y 4º de E.S.O, y también en los dos cursos de bachillerato hizo las matemáticas para Ciencias Sociales. Esgrime que tanto en E.S.O. como en bachillerato ha superado siempre bien la asignatura (aun cuando haya tenido que realizar un esfuerzo grande), pero que siempre le ha quedado la impresión de que falla en las cuestiones de la matemática elemental, que tiene algunos conocimientos sobre las matemáticas de Primaria poco asentados; es decir, que sabe hacer las cosas, pero que no sabe las causas de hacerlo así, que se encuentra como si sus conocimientos se limitasen al empleo de muchas técnicas que ha memorizado, pero en modo alguno ha comprendido.

• Valoración.

- La tarea propuesta resultó de interés para el estudiante entrevistado, aunque mostró vacilaciones y silencios repetidos que provocaron más intervenciones del profesor de las que inicialmente se habían previsto; pero sirvió para que el estudiante revisase algunos de sus conocimientos personales sobre los números racionales.

## VII.5. Recogida de datos y su codificación.

A lo largo de las entrevistas, se producen informaciones sobre aspectos relativos a la comprensión de los contenidos, e informaciones sobre las decisiones que toma el entrevistado; informaciones que deben ser lo más exhaustivas y fiables para su posterior análisis e interpretación. En este sentido se utilizan como fuentes de información las grabaciones en audio de las entrevistas (se transcriben en el Anexo VI), las producciones escritas de los estudiantes y las anotaciones que haga el entrevistador durante las sesiones.

Estas informaciones servirán a nuestra intención indagatoria de determinar las interacciones que se producen entre la comprensión mostrada por los estudiantes seleccionados y la realización de las tareas que se proponen; con tal fin se han elaborado, a priori, unas unidades de análisis (epígrafe VII.4.1) de la actuación profesional, que denominamos Cuestiones de Investigación Profesional, para estudiar las relaciones entre las producciones previas de los estudiantes y la actuación docente con escolares.

Por medio de estas unidades de análisis presentamos, en el epígrafe VII.4.2, los resultados de cada una de las cinco tareas propuestas a los tres estudiantes entrevistados.

### VII.5.1. Unidades de Análisis para la Segunda Etapa.

En el apartado IV.7.2 quedaron delimitadas las Unidades de Análisis de comprensión del contenido correspondiente a una secuencia instructiva sobre los Números Racionales desarrollada en la Primera Etapa de este estudio; nuestra intención en esta Segunda Etapa se centra en delimitar las relaciones existentes entre la comprensión mostrada en las actividades previas por 3 de los estudiantes para profesor (que han completado la Primera Etapa de este estudio), y el modo en que estos mismos estudiantes abordan la realización de determinadas tareas profesionales. Nos interesa, por tanto, buscar información detallada de las conexiones existentes entre la comprensión mostrada por estos estudiantes y la realización de las tareas sobre trabajos de escolares que se proponen.

A tal fin se han elaborado unas Unidades de Análisis sobre la actuación como profesionales, para estudiar las relaciones entre las actividades previas de los estudiantes y la actuación docente con escolares. Estas unidades están elaboradas antes de la celebración de las entrevistas y son fruto de la experiencia del investigador y del análisis y observaciones en la Primera Etapa de nuestra investigación. Seguidamente hacemos una descripción de esas unidades de análisis, que denominamos Cuestiones de Investigación Profesional, y a las que nos referiremos con las siglas CIP.

<u>1.- Relación de orden entre fracciones.</u>

En la Primera Etapa los estudiantes seleccionados tuvieron oportunidad de dar significado a la fracción como reparto igualitario; para ello se definió un modelo y se caracterizaron dos sistemas simbólicos de representación que conectaban significados de las fracciones con el modelo propuesto.

Nuestro interés se centra en analizar si la comprensión mostrada en las tareas previas por los estudiantes seleccionados se relaciona con en el modo en que estos mismos estudiantes abordan la revisión de una tarea escolar errónea sobre el orden de fracciones; también queremos observar la conexión que se produce con las propuestas de trabajo que, como consecuencia del análisis anterior, realizan para ese escolar.

Con ese fin definimos la siguiente Cuestión de Investigación Profesional:

CIP.I. Interpretaciones que dan los futuros maestros a las respuestas de los escolares sobre una relación de orden entre fracciones positivas.

<u>2.- Suma de fracciones positivas.</u>

El uso de técnicas es un aspecto importante del quehacer matemático, pero el uso incorrecto de las mismas presupone una inadecuada interpretación de dichas técnicas y, en consecuencia, demanda al docente para que ayude al escolar a la superación de sus deficiencias. De aquí que nuestro interés sea el de indagar acerca de las relaciones entre la comprensión que el estudiante seleccionado mostró en las tareas que realizó en la Primera Etapa y las tareas o reflexiones que propone al escolar cuyas respuestas analiza.

Con ese fin definimos la siguiente Cuestión de Investigación Profesional:

CIP.II. Interpretaciones que dan los los futuros maestros a las respuestas de los escolares sobre la suma de fracciones positivas.

3.- Sobre la representación polinómica unitaria.

Los estudiantes seleccionados han participado en la construcción de este sistema de representación, sustentado en la simbolización de las acciones realizadas en un modelo; asimismo, han reflexionado acerca de las repercusiones que se derivan de no cumplir las exigencias sintácticas y semánticas de tal sistema. De aquí que estemos interesados en indagar si existen relaciones entre las producciones de los estudiantes seleccionados y su actuación frente a una utilización inadecuada del sistema de representación que hace un escolar.

Con ese fin definimos la siguiente Cuestión de Investigación Profesional:

CIP.III. Interpretaciones que dan los futuros maestros a las respuestas de los escolares sobre la utilización del sistema de representación polinómico unitario.

4.- Paso de la notación fraccionaria a la decimal.

En la fase de implementación de la Primera Etapa, los estudiantes seleccionados tuvieron oportunidad de establecer nuevas conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. Queremos disponer de información acerca de las relaciones entre las actuaciones previas de los estudiantes seleccionados y sus actuaciones como docentes cuando analizan la tarea de un escolar que contiene aciertos y errores al simbolizar 3 fracciones con la notación decimal. Surge así la siguiente Cuestión de Investigación Profesional:

CIP.IV. Interpretaciones que dan los futuros maestros a las respuestas de los escolares sobre la escritura decimal de las notaciones fraccionarias.

5.- Sobre el significado de una operación.

Los estudiantes para maestros han reflexionado acerca del significado de las operaciones entre fracciones y entre expresiones decimales; y es el modelo propuesto el vehículo que permite certificar la viabilidad de las relaciones operatorias entre expresiones simbólicas. De aquí nuestro interés en indagar sobre las relaciones que establecen los estudiantes seleccionados entre sus producciones anteriores y los enunciados que ofrecen dos escolares para dar sentido al cociente entre un número periódico y un número decimal.

Con tal fin tenemos la siguiente Cuestión de Investigación Profesional:

CIP.V. Interpretaciones que dan los futuros maestros a las respuestas de los escolares sobre el cociente entre un número periódico y un número natural.

Teniendo en cuenta los criterios de valoración de cada una de las Cuestiones de Investigación Profesional, se definen las 15 Unidades de Análisis que utilizaremos en esta segunda etapa de nuestra investigación. Estas unidades son las que aparecen en el siguiente cuadro VII.1:

| Criterios de valoración / Unidades de Inv. Profesional | Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta: | Justificaciones sobre el tipo de explicación elegida: | Razonamientos sobre la actividad propuesta al escolar |
|---|---|---|---|
| Interpretaciones sobre una relación de orden entre fracciones positivas **CIP.I** | **CIP.I.1** | **CIP.I.2** | **CIP.I.3** |
| Interpretaciones sobre la suma de fracciones positivas **CIP.II** | **CIP.II.1** | **CIP.II.2** | **CIP.II.3** |
| Interpretaciones de la representación polinómica unitaria **CIP.III** | **CIP.III.1** | **CIP.III.2** | **CIP.III.3** |
| Interpretaciones de la escritura decimal de fracciones **CIP.IV** | **CIP.IV.1** | **CIP.IV.2** | **CIP.IV.3** |
| Interpretaciones del cociente entre un número periódico y un número natural **CIP.V** | **CIP.V.1** | **CIP.V.2** | **CIP.V.3** |

Cuadro VII.1. Unidades de Análisis para la Segunda Etapa

### VII.5.2. Resultados de las entrevistas.

Analizamos las producciones de los tres estudiantes seleccionados, a los que se han propuesto cinco trabajos escolares sobre los que deben realizar las siguientes tres tareas:

Tarea 1: evaluar las respuestas de los escolares;
Tarea 2: ofrecer explicaciones al escolar, si su respuesta contiene errores;
Tarea 3: diseñar tareas que permitan seguir la secuencia instructiva.

Presentamos los resultados de los trabajos propuestos a los estudiantes ordenados de acuerdo con cada una de las Unidades de Análisis preestablecidas. En cada una de dichas Unidades se contemplan los siguientes aspectos: propósitos de la indagación, trabajo propuesto, criterios de valoración, resultados, análisis e interpretación y reflexión.

#### *VII.5.2.1. Cuestión de Investigación Profesional número 1.*

*a) Propósitos de la indagación*

a) Queremos explorar cómo evalúan los estudiantes una tarea escolar en la que hay errores sobre el orden de repartos.
b) Interesa averiguar la capacidad de los estudiantes para determinar el origen de dichos errores
c) Pretendemos indagar sobre las razones que esgrimen los estudiantes para elegir una de las tres explicaciones que se ofrecen.

d) Queremos indagar sobre las relaciones entre la actuación de cada estudiante y sus producciones en la primera etapa

*b) Trabajo propuesto*

| Actividad propuesta por el profesor |
|---|
| Tienes que decir cuál de los repartos 3:5 y 4:7 es el mayor. Utiliza el signo adecuado<br>Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta |

| Respuesta del niño A |
|---|
| Se cumple que 3:5 < 4:7<br>He contestado así porque 4 tortillas son más que 3 tortillas, y si se reparte más tortilla cada uno recibe una parte más grande |

*c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.*

Valoramos cada una de las unidades de análisis elaboradas para las Cuestiones de Investigación Profesional (CIP), establecidas en el apartado VII.5.1. de acuerdo con los siguientes criterios:

CIP.I.1. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar

1.- Interpretación correcta o bastante probable
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación errónea o inadecuada

CIP.I.2. Justificaciones acerca de la explicación elegida para exponerla al niño.

1.- Argumentos correctos en el modelo de la 1ª etapa
2.- Argumentos correctos en otros modelos.
3.- Argumentos erróneos o inadecuados

CIP.I.3. Argumentaciones sobre la actividad que se propone al escolar.

1.- Argumentos correctos en el modelo de la 1ª etapa
2.- Argumentos correctos en otros modelos.
3.- Argumentos erróneos o no se dan argumentos

*d) Resultados obtenidos*

Los resultados alcanzados por cada uno de los estudiantes entrevistados se recoge en el siguiente cuadro, en el que las filas indican los valores logrados por cada uno de los estudiantes identificados con el número asignado:

| Alumno<br>Cuestión Investig. | **34** | **10** | **24** |
|---|---|---|---|
| CIP.I.1 | 1 | 1 | 1 |
| CIP.I.2 | 2 | 2 | 3 |
| CIP.I.3 | 3 | 3 | 3 |

Tabla VII.1. Resultados de la Cuestión de Investigación Profesional Nº 1

*c) Análisis e interpretación*

Tarea 1: evaluar las respuestas de los escolares

• El estudiante nº 34 identifica claramente el error cometido por el escolar y lo explicita con precisión:

*Simplemente que este crío sólo se ha fijado en que a mayor número de tortillas puede tocar mayor parte; y no se piensa en las personas entre las que reparte.*

Como se observa, este futuro maestro analiza el trabajo del escolar trabajando en el mismo modelo en que lo hace el niño y manteniendo el sistema de representación que allí figura. Además, este estudiante identifica como importante el error del escolar y, en consecuencia, que no se puede realizar otra actividad mientras no se haya ofrecido al escolar una reflexión o explicación del trabajo que ha realizado.

• El estudiante nº 10 detecta inmediatamente el error y determina con claridad cuál es el origen de tal error

*El razonamiento que hace, dice que 4 tortillas son más que 3 tortillas, pero el número de gente para el que lo reparte en uno es 5 y en otro 7; entonces no tiene mucho que ver*

Este futuro maestro percibe que el error del niño es grave por cuanto no tiene en cuenta los dos elementos que intervienen en el reparto, pues como él mismo indica habría *que explicarle que en el reparto influye todo; o sea, lo que se reparte y el número de personas que participan en el reparto*.

• El estudiante nº 24 da inicialmente por correcta la respuesta del escolar y admite como adecuada su justificación. Sin embargo, más adelante percibe el error del escolar, así como su origen:

*No es verdad porque en éste hay más tortillas pero hay más individuos para repartir; entonces, el chico simplemente se ha fijado en que había más tortillas en el segundo reparto que en el primero; y entonces se ha dejado llevar por la cantidad de tortilla que había, pero no por los individuos que participaban*

Este estudiante percibe la importancia del error del escolar, señalando la necesidad de que en el reparto se contemplen los elementos intervinientes.

Tarea 2: ofrecer explicaciones al escolar, si su respuesta contiene errores.

Las explicaciones que se ofrecen a los estudiantes para maestros para que seleccionen una y se la den al escolar, están recogidas en el Anexo III.2 y presentan las siguientes características:

* la explicación I contiene la formulación de la técnica habitual para comparar repartos y está enunciada de forma similar a como se hace con las fracciones;
* la explicación II conlleva un cambio de modelo, los repartos se interpretan como fracciones y después éstas se comparan por medio de los gráficos usuales en la interpretación de la fracción como relación parte-todo;
* la explicación III incorpora una reflexión dentro del modelo en que se trabaja, sin modificar la simbología empleada y que cuestiona el resultado de dos repartos en los que el número de tortillas difiere en una unidad, mientras que el número de personas intervinientes son muy dispares.

• El estudiante nº 34, rechaza la explicación I porque la percibe como una técnica descontextualizada:

*Te da simplemente una fórmula y si el crío no ha entendido lo que es el concepto, aunque le des una fórmula tampoco lo va a entender*

También rechaza la explicación III porque entiende que al escolar se le ofrece una situación similar a la que provocó su error, no la percibe como una invitación a que el niño reflexione sobre la no consideración de todos los elementos intervinientes en un reparto igualitario:

*Es que es lo mismo, lo que pasa que cambiando los números ... le estás planteando el mismo problema o parecido; el problema es parecido, pero con otros números*

El estudiante opta por la explicación II, abandona el modelo en el que detectó el error del escolar y selecciona la explicación que, posiblemente, le resulte más adecuada a sus propios conocimientos personales en los que la idea predominante es la de la fracción como relación parte-todo:

*Si tengo que elegir, elegiría ésta; pero tampoco. Esta pero ... si acaso poniendo las dos representaciones juntas, una encima de otra, para que vea en cuál hay más*

En las justificaciones esgrimidas por el estudiante se percibe también que sus creencias acerca de la enseñanza no se han modificado con la experiencia personal acumulada en la Fase de Acción de la Etapa Primera. En efecto, este estudiante para maestro no le propone al escolar una situación problemática, sino que sugiere una explicación en la que aparezca completamente explicitado el modo de comparar dos fracciones.

• El estudiante nº 10 rechaza la explicación I porque no le convence la multiplicación en cruz porque le parece más adecuada una representación gráfica.

Igualmente rechaza la explicación III por comparación con la representación gráfica, aun cuando entiende que esta explicación pudiera ser útil al escolar:

*No es que no me convenza, también se podría explicar así; pero que no, yo pienso que se liaría más con esta, yo lo veo mejor gráficamente. Bueno, así también se podría, pero no se vería tan bien como aquí: 1 tortilla entre 2 personas y luego aquí hay más tortillas, repartir 3 tortillas a 100 personas; es que aquí se vería claro que 1 entre 2 le toca a 1/2, pero luego si tienes 3 tortillas entre 100 personas les va a tocar a muy poco; o sea aquí se vería no se, es que ésta no está muy clara ¿no?*

En consecuencia, este estudiante se inclina por elegir la explicación II porque entiende que la representación gráfica es la que permite al escolar ver más fácilmente el origen de su error.

• El estudiante nº 24 manifiesta que la explicación que ofrecería al niño es la III, que es una explicación rechazada por los otros estudiantes entrevistados. Y admite esta explicación porque a él le ha resultado clarificadora, omitiendo referencias a que tal explicación incida en el origen del error del escolar:

*Me convence porque se ve más claro que si una tortilla la repartes entre 2 se ve claro que les toca a la mitad; pero si tienes una tortilla más y hay 100 personas; o sea el cambio de situación ya es muy... yo pienso que ya se vería claro: añades una tortilla más, pero añades muchísimas personas más.*

Este estudiante rechaza la explicación I porque entiende que se limita a exponer una técnica no justificada:

*Porque es muy sistemática; o sea, no le hace razonar. Simplemente aplica una regla, que si no le explicas el sentido de la regla, o no se da cuenta él, más adelante, de que existe esa posibilidad más rápida, pues simplemente* *se quedará con la idea de multiplicar en cruz*

También rechaza la explicación II porque no ve con claridad que las representaciones gráficas permitan encontrar la respuesta adecuada. Pero tales dificultades no son contempladas desde la posición del escolar, sino que son dificultades que encuentra este estudiante para maestro como consecuencia de las dificultades que él mismo encontró en la resolución de la tarea, y por sus dificultades en la gestión del significado de la fracción en el que interfieren interpretaciones de reparto y de relación parte-todo:

*A:Pero no se ve tan claro; no se ve claro porque aquí le sobran 3 y aquí le sobran 2, aunque estas son más pequeñas que estas.*

*P: ¿Y si se las pusiésemos una al lado de la otra?*

*A:¿Una debajo de otra? Sí*

*P: Así que si que le iría bien, si le pusiésemos una debajo de otra. ¿O te sigue sin convencer esta explicación?*

*A:Me sigue sin convencer porque la idea de esto es la de 3 tortillas entre 5 personas, no 3/5 de tortilla*

Tarea 3: diseñar tareas para seguir la secuencia instructiva.

- El alumno nº 34 considera que antes de la propuesta de actividades nuevas hay que dar una explicación al escolar que le permita superar el error previamente detectado.
- El estudiante nº 10 no elabora ninguna propuesta nueva de trabajo por cuanto su interés se centra en explicar al escolar cuál es el motivo de que su respuesta no sea adecuada.
- También el estudiante nº 24 se limita a dar explicaciones al escolar sobre el error detectado en la revisión de sus respuestas.

*f) Reflexión sobre el trabajo de los estudiantes.*

- El alumno nº 34, que en sus trabajos previos mostró una buena comprensión del modelo, introduce cambios en el sistema de representación utilizado y en la interpretación del reparto de acuerdo con el desarrollo de la tarea propuesta: inicialmente detecta y justifica los errores del escolar en el modelo en que trabaja el niño, pero introduce otro modelo para dar una explicación al escolar. Posiblemente sus conocimientos previos acerca de las tareas de un profesor de matemáticas le lleven a elegir aquellas explicaciones que ofrezcan al escolar una revisión completa de sus trabajos, aunque para ello deba modificar el modelo de trabajo; no obstante, también puede pensarse que ante exigencias profesionales recurra a aquellos conocimientos personales sobre la materia en los que se encuentra más seguro y que deseche recurrir a conocimientos recientemente adquiridos con los que no está tan familiarizado.
- El estudiante nº 10 en sus trabajos previos puso de manifiesto una comprensión insuficiente del modelo: comprende algunos aspectos y no comprende otros. Por tanto, no es de extrañar que ante la respuesta del escolar opte por darle una explicación que no hace referencia al modelo en el que se realiza el trabajo, sino que plantea la respuesta en un modelo diferente, un modelo que se corresponde con la idea de fracción como relación parte-todo; idea que no

se ha utilizado en los trabajos previos, sino que corresponde a sus conocimientos personales anteriores a la secuencia curricular desarrollada en la primera etapa.
Este estudiante entiende que la explicación que se ofrece es suficiente, que no necesita modificarse en el sentido de invitar al escolar a comparar las dos superficies rayadas. Suponemos que este estudiante ha resuelto la tarea y da por supuesto que el escolar también la va a resolver de la misma forma.

• El estudiante nº 24 tiene dificultades iniciales para interpretar las respuestas del escolar, presumiblemente porque sus producciones previas indican que no es diestro en el manejo del modelo en que se producen las mencionadas respuestas; aunque una revisión posterior sí le permite determinar el error cometido por el escolar. Pensamos que las limitaciones de este futuro maestro en el manejo de un modelo novedoso le impiden discernir claramente las posiciones erróneas.
Este comportamiento parece contradecirse con el hecho de que haya elegido la explicación que utiliza precisamente el modelo en que se siente inseguro. Pero de las justificaciones que ofrece el estudiante nº 24, se deduce que la elección no la hace en función de afrontar el origen del error del escolar, sino que lo hace en función de las dificultades personales que encuentra en las otras explicaciones. Este estudiante actúa de acuerdo con sus propios conocimientos personales, de modo que ofrece al escolar aquel discurso que para él mismo le ha resultado más comprensible.

### *VII.5.2.2. Cuestión de Investigación Profesional número 2.*

*a) Propósitos de la indagación*

a) Queremos explorar cómo evalúan los estudiantes una tarea escolar en la que hay errores sobre la suma de fracciones positivas.
b) Interesa averiguar la capacidad de los estudiantes para determinar el origen de dichos errores
c) Pretendemos indagar sobre las razones que esgrimen los estudiantes para elegir una de las tres explicaciones que se ofrecen.
d) Queremos indagar sobre las relaciones entre la actuación de cada estudiante y sus producciones en la primera etapa

*b) Trabajo propuesto*

Actividad propuesta por el profesor

Calcula el resultado de la suma siguiente $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta

Respuesta del niño B

El resultado es $\frac{6}{8}$

He contestado así porque he pensado que $\frac{2}{3}$ indica que se reparten 2 tortillas entre 3 personas y que $\frac{4}{5}$ indica que se reparten 4 tortillas entre 5

> personas. Así que junto las tortillas y las personas y así ya sé cuanto recibe una persona que hubiese participado en los dos repartos por separado

*c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.*

Valoramos cada una de las unidades de análisis elaboradas para las Cuestiones de Investigación Profesional (CIP), establecidas en el apartado VII.5.1. de acuerdo con los siguientes criterios:

CIP.II.1. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar

1.- Interpretación correcta o bastante probable
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación errónea o inadecuada

CIP.II.2. Justificaciones acerca de la explicación elegida para exponerla al niño.

1.- Argumentos correctos en el modelo de la 1ª etapa
2.- Argumentos correctos en otros modelos.
3.- Argumentos erróneos o inadecuados

CIP.II.3. Argumentaciones sobre la actividad que se propone al escolar.

1.- Argumentos correctos en el modelo de la 1ª etapa
2.- Argumentos correctos en otros modelos.
3.- Argumentos erróneos o no se dan argumentos

*d) Resultados obtenidos*

Los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes entrevistados se recoge en el siguiente cuadro, en el que en las filas figura el número asignado a cada uno de los estudiantes entrevistados:

| Alumnos<br>Cuestión Investig. | **34** | **10** | **24** |
|---|---|---|---|
| CIP.I.1 | 1 | 2 | 3 |
| CIP.I.2 | 2 | 1 | 1 |
| CIP.I.3 | 3 | 3 | 3 |

Tabla VII.2. Resultados de la Cuestión de Investigación Profesional Nº 2

*c) Análisis e interpretación*

Tarea 1: evaluar las respuestas de los escolares

- El estudiante nº 34 percibe con rapidez que la actuación del escolar es incorrecta en el empleo de la técnica de suma de fracciones:

  *Que no sabe sumar ... la suma está mal hecha, eso está clarísimo.*

  Sin embargo, en la lectura de las explicaciones que ofrece el escolar este futuro maestro encuentra dificultades para precisar el origen del error detectado: si bien acepta que el niño tiene clara la idea de fracción como resultado del reparto igualitario, no está tan seguro de la idea de suma que ofrece el escolar:

  *Pero es que no juntas las tortillas y las personas. ... Al sumar lo piensas en una cantidad que le correspondería a una persona que participa en los dos repartos por* *separado. Si, si es cuanto recibe una persona que participa en los dos repartos por separado, pero no es juntar las tortillas o juntar las personas. Lo que significa la suma si lo entiende, pero hacer la suma no sabe*

Ante esta situación confusa el estudiante para maestro recurre a conocimientos personales con los que seguramente esté más familiarizado; de este modo desecha el trabajo en el modelo del escolar y retoma la idea de fracción como relación parte-todo:

*Bien, pero si lo piensa como trozo de tortilla, entonces es cuando puede ... En vez de pensarlo como reparto que lo piense como, que vea la fracción como trozo de tortilla para poder sumarlas. Es un trozo de tortilla que de 3 partes coge 2, de una tortilla que de 3 partes coge 2; de otra tortilla que de 5 parte coge 4 y entonces lo suma. Pero claro, también podría decir hay 8 partes y coger 6 ... si le da por hacerlo así; pero si lo mira como trozos de tortilla y los junta ...*

- El estudiante nº 10 comienza de forma titubeante a analizar la tarea del escolar, dando muestras de no comprender el tipo de respuesta que debe ofrecer dicho escolar:

  > *(Lee) Ya se lo que hubiese recibido una persona que hubiese participado en los dos repartos por separado ... No tendría que haberlo sumado, si participa en dos repartos por separado ... A ver, no las tendría que sumar, se tendría que quedar así (señala 2/3 + 4/5), ¿no?, este resultado*

  Tras las precisiones del profesor-entrevistador en orden a delimitar cuál era la pregunta del profesor y cuál es la respuesta del escolar, este estudiante para maestro encuentra dificultades para determinar si el escolar actúa correctamente; pensamos que estas dificultades aparecen como consecuencia de que la técnica de sumar fracciones no conlleva un conocimiento personal de la tecnología que la sustenta:

  *No se, por el ... Es que si por ejemplo le dicen que esos son tortillas y que son lo que recibe una persona que participa en dos repartos, pues tendría que haberlo, o sea no tendría que haberlo hecho asi, no se, yo, ¡así no se hace! ¿No se hace con el mínimo, o sea sacando el mínimo común múltiplo y todo eso? O sea, lo que ha hecho ha sido sumar el numerador y el denominador para saber lo que ha recibido en total la persona, pero no se pueden juntar las tortillas de los dos repartos y las personas. Tendría que calcular el resultado de esto de aquí (señala 2/3 + 4/5), más que nada, para saber lo que ha recibido la persona*

  En el transcurso de la entrevista este estudiante manifiesta sus dudas acerca del significado que tiene la suma en el modelo de reparto: *Si, no, no se. Si que puede que una persona participe en dos repartos y luego para saber lo que tiene lo..., pero que no.* Y esas dudas se acrecientan en el momento en que este estudiante para maestro confronta la idea de suma y la forma en que lo resuelve el escolar; aunque finalmente llega a formular la actuación errónea del escolar:

  *Que una persona ha participado en los dos repartos por separado, eso si que lo ha cogido; lo que no ha hecho bien es lo de juntar las tortillas y las personas que participan en los dos*

- Ante la respuesta del escolar el estudiante nº 24 pone de manifiesto que la idea de reparto no está asociada a la fracción, pues entiende que el reparto ha de simbolizarse con dos puntos:

*Está mal porque la fracción así te indica la cantidad de tortilla que coge el individuo, o* *sea cada uno lo que le toca; entonces, el chico simplemente se ha dejado guiar por el numerador, que para él indican tortillas, y el denominador que indican individuos. O sea, que el caso aquí es el contrario, la fracción le indica la situación que sería, bueno que se pondría con dos puntos. O sea, él se hubiera acercado más si hubiera hecho la suma, hubiera tenido más coherencia si hubiera sido la situación de (escribe (2:3) + (4:5) )*

Este estudiante entiende que el escolar tiene una idea correcta de la suma de fracciones, pero comete errores al calcularla; sin embargo, no percibe el origen de tal error, simplemente apela a la necesidad de que el cálculo de la suma pase por la presencia del mismo denominador:

*Hombre, la idea que no tiene clara es la de la suma de fracciones, pero la suma es, en cierta manera, lo que dice sí que tiene su lógica para él, porque si te dice que suma un reparto con otro y te suma las tortillas por un lado... Lo que no tiene claro es la suma de fracciones. La idea para justificárselo sería decirle que, ... bueno lo que tiene que hacer es llegar a un reparto en el que los individuos que participen sean los mismos. Entonces, de esa forma ...*

Tarea 2: ofrecer explicaciones al escolar, si su respuesta contiene errores.

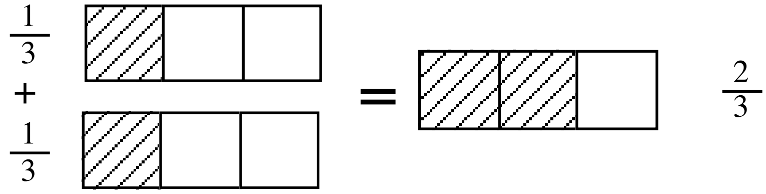
En esta tarea se ofrecen tres explicaciones diferentes:

* la explicación I hace referencia a la exigencia de utilizar denominadores comunes como parte de la técnica de sumar fracciones;
* la explicación II conlleva un cambio de modelo, los repartos se interpretan como fracciones y después éstas se representan gráficamente como partes de superficies de rectángulos de iguales dimensiones;
* la explicación III incorpora una reflexión dentro del modelo en que se trabaja, sin modificar la simbología empleada y que pone de manifiesto el significado de la acción que manifiesta el escolar.

• Aun cuando la grabación se interrumpe, de las notas del entrevistador se obtiene que el estudiante nº 34, rechaza la explicación III porque la percibe como una información que no ayuda al escolar a realizar su tarea.

El estudiante no acepta la elección de una única explicación. Decide utilizar las gráficas que aparecen en la explicación II con la intención de que el alumno pueda entender que la suma de fracciones exige que tengan el mismo denominador. En sus producciones escritas este futuro profesor incorpora una primera explicación para que el escolar haga la suma de fracciones con ayuda de representaciones gráficas, en el modo siguiente:

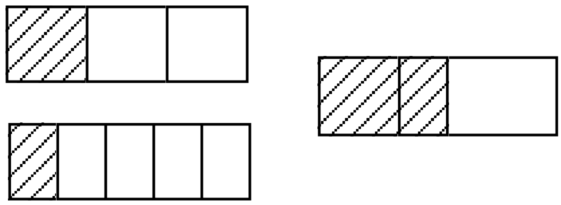
<u>Primera parte de la explicación</u>: suma de fracciones de igual denominador a partir de estos gráficos




<u>Segunda parte de la explicación</u>: necesidad de hacer divisiones iguales para reconstruir la unidad, pues de lo contrario no se puede saber la fracción que

representa la suma de fracciones de diferente denominador; se expone con ayuda de estos gráficos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$



Tercera parte de la explicación: insistir en la necesidad de buscar el denominador común de las fracciones que se quieren sumar, tal y como se recoge en el explicación número I

Puede observarse que la propuesta de este estudiante es coherente con la realizada en la tarea 1, en el sentido de que su modelo de actuación profesional incorpora explicaciones exhaustivas de todo el proceso; no se pronuncia por explicaciones que demanden del escolar la resolución de situaciones problemáticas que inciden en el origen de sus producciones erróneas previamente detectadas.

- El estudiante nº 10 elige la explicación III seguida de la explicación I para ofrecérsela al escolar. La unión de estas dos explicaciones persigue mostrar al escolar qué resultado obtiene con su forma de operar y, posteriormente, se le muestra el modo de actuar correcto:

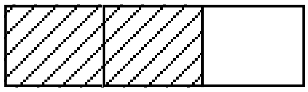
> *Sí, le explicaría que lo que ha hecho es un nuevo reparto entre todas las personas que estaban en los dos repartos iniciales, lo que ha puesto; o sea, que por qué no lo ha hecho bien y luego le explicaría que para sumarlo hay que buscar el denominador común.*

Se observa que este estudiante ha modificado las estrategias metódicas con respecto a la tarea 1, por cuanto en este caso considera conveniente actuar de modo que, en primer lugar, se muestre al escolar las razones por las que su respuesta es incorrecta y que esto se haga en el modelo en que trabaja el niño; situación que no se produjo en la tarea 1 en la que este estudiante para maestro optó por ofrecer al escolar una reflexión en un modelo diferente al que el niño utilizaba.

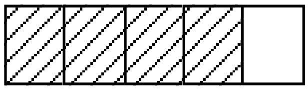
Por otra parte, resultaba llamativo que este estudiante opinase que la explicación gráfica de la tarea 1 era más fácil de entender por parte del escolar; y que, sin embargo, en esta segunda tarea rechazase la explicación que contenía la representación gráfica. La revisión de las actuaciones del futuro maestro ilustran sobre su forma de proceder

*P: ¿Y la II no te convence?*
*A: Veo cómo se representa cada fracción, pero no se, para calcular la suma cómo explicárselo.*
*P: O sea, que de esos dos dibujos sacar la suma es complicado*
*A: Es que no ...*
*P: O sea, que esa no le ayudaría al chico*
*A: ....*
*P: Intenta hacer tú la suma*
*A: ¿La del ejercicio?*

P: *Sí, a partir de estos dibujos ¿Cómo harías la suma?*
A: *Lo pondría así (dibuja en un folio el siguiente gráfico)*

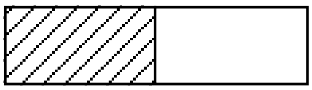


$\frac{2}{3}$



$\frac{4}{5}$

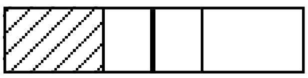
*Y ahora haríamos que más o menos es el mismo trozo*
P: *Tú lo que tienes que encontrar es el resultado. A ver, a partir del gráfico ¿cómo representarías la suma?*
A: *.....*
P: *¿Lo ves difícil eso de hacer la suma?*
A: *Es que para mi es muy difícil*
P: *¿Y el chico? ¿también piensas que sería difícil?*
A: *Tal y como está sí, porque, vamos es que no; para mi es difícil porque veo que representan el mismo trozo pero luego a la hora de sumarlo no sabría cómo hacerlo; porque aquí esta parte equivale a 4 de un trocito así, y aquí esta parte equivale a 2 de un trozo así, pero es que no se, no lo se hacer*
P: *¿Piensas que si al chico en la explicación le pusieses estos dibujos también tendría dificultades para hacerlo?*
A: *Yo creo que sí, porque a la hora de sumarlo puede poner un trozo así, pero a la hora de ...*
P: *Ponte 1/2 + 1/3 a ver si eso se puede hacer gráficamente*
A: *(Dibuja el siguiente gráfico)*



$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

P: *Si fuese ese ejemplo ¿sería más fácil para que el chico hacer la suma?*
A: *Pues es que no lo se, yo creo que no*
P: *O sea, ¿que tampoco para ese caso le valdría al chaval?*
A: *Yo es que no se. También se le podría hacer si por ejemplo éste lo pusiéramos aquí (dibuja sobre la figura de 1/3 una raya que corresponde a 1/2)*



*Haríamos, pues esto es así. ... Pero tampoco. Que no. Que yo lo veo muy difícil esto*
P: *No olvides que lo que estamos pensando es en el chico*
A: *No, no, yo no*
P: *No se lo pondrías porque piensas que el chico tendría dificultades en hacerlo.*

De la lectura del protocolo precedente se deduce que el estudiante entrevistado no es capaz de hacer la suma a partir de las representaciones gráficas; y tal imposibilidad se manifiesta si el resultado de la suma es mayor que la unidad o si dicho resultado es menor que la unidad. En consecuencia, el estudiante rechaza una explicación que demanda conocimientos que él mismo no tiene; y supone que sus limitaciones son compartidas por el escolar.

- El estudiante nº 24 rechaza la explicación I porque entiende que en ella se recuerda una técnica sin justificación. Está actuando de forma similar a como lo hizo en la tarea 1; su actitud es coherente: no acepta la aplicación de técnicas que no estén debidamente justificadas.

*La I no me gusta porque es lo mismo, es aprender de memoria el buscar el común denominador y sumar los numeradores; o sea, aplicar unas reglas. Si, una técnica que está bien, pero es preferible cuando se de cuenta de lo que significa*

Tampoco admite la explicación II, que es la que contiene una representación gráfica, porque, al igual que le ocurrió con la tarea 1, el propio estudiante no sabe resolverla:

*A:La II es que pienso que no le ayuda nada .... Yo por lo menos no ...*
*P: Porque tú a partir de esos gráficos ¿sabrías hacer la suma?*
*A : ......*
*P: Aquí lo que propone es decirle, mira aquí tienes lo que representa cada fracción y ahora a ver cómo lo sumarias*
*A:No*
*P: Tú no sabrías sumarlos*
*A:No*

En cuanto a la explicación III este futuro profesor la acepta no por convencimiento, sino que pensamos que actúa por eliminación, pues no está convencido de que sea sencilla de entender, pues él mismo establece que esta explicación le hará comprender la necesidad de buscar denominadores comunes, supuesto que no se deduce de la explicación:

*La veo complicada la explicación, pero quizás es la que más le acerque a pensar el por qué tiene que buscar un reparto común para los dos, porque tienen que participar unas mismas personas y a partir de ese reparto común juntar un reparto nuevo que participen las mismas personas, y de esa forma se repartirán las tortillas que hay*

Tarea 3: diseñar tareas para seguir la secuencia instructiva.

- Ante la evidencia de que el escolar mostraba un error importante en el empleo de la técnica de sumar fracciones, el estudiante nº 34 centró su trabajo en el diseño de las explicaciones que ofrecería al escolar, y no en la propuesta de nuevas actividades.
- La detección de errores en aspectos operatorios en el escolar llevó al estudiante nº 10 a utilizar explicaciones para subsanarlos; en consecuencia, no se planteó la necesidad de diseñar nuevas actividades para avanzar en la instrucción del escolar.
- Tampoco el estudiante nº 24 propone nuevas actividades puesto que ha señalado la necesidad de dar una explicación al escolar.

f) Reflexión sobre el trabajo de los estudiantes.

- El alumno nº 34, que en sus trabajos previos mostró una buena comprensión del modelo, utiliza parcialmente este modelo para determinar si el escolar interpreta de forma adecuada la fracción como resultado de un reparto. Sin embargo, ante las dificultades que el propio estudiante encuentra para determinar el origen del error utilizando el modelo en que argumenta el escolar, abandona ese modelo y recurre a interpretar la fracción como relación parte-todo. Se pone de manifiesto, como ya ocurrió en la tarea 1, que a este estudiante no le importa sacar al niño del modelo en que está trabajando y llevarlo a otro diferente, pero en el que el futuro maestro se desenvuelve con mayor seguridad.

En cuanto a la actuación profesional del futuro maestro señalar que es similar a la observada en la tarea 1, por cuanto interpreta que debe ofrecer al escolar explicaciones completas de la tarea y en las que el niño se limite a ser receptor pasivo de la información que proporciona el profesor.

• La propuesta formulada por el estudiante nº 10 respecto a la tarea 1 hacía suponer que éste estudiante se identificaba con la idea de fracción como relación parte-todo, y que sus argumentaciones se sustentaban en las representaciones gráficas. Sin embargo, en la tarea 2 se ha puesto de manifiesto que la actuación de este futuro maestro se adecúa a sus conocimientos personales, de tal modo que la elección de las explicaciones que ofrece al escolar se hace en función de su propia comprensión.

También creemos haber detectado que este estudiante conoce la técnica de suma de fracciones, pero ese conocimiento personal se limita a su aplicación y no atiende a las razones que validan su aplicación. De hecho, este estudiante contempla como aspecto esencial en la aplicación de la técnica la exigencia previa de que los denominadores de las fracciones sean iguales; sin embargo, no sabe justificar esa exigencia.

• El estudiante nº 24 actúa de forma similar a como lo hizo en la tarea 1: rechaza las explicaciones que describen técnicas, rechaza las explicaciones en las que él mismo encuentra dificultades y elige la explicación que resta. Justifica su decisión argumentando que la explicación elegida es la que pone de manifiesto al escolar el modo en que tiene que proceder.

Puesto que en sus producciones previas este estudiante mostró una débil comprensión del modelo, encuentra dificultades en su actuación profesional: considera que los escolares deben conocer la tecnología que sustenta las técnicas y encuentra dificultades para explicitar dicha tecnología, puesto que sus conocimientos personales no se lo permiten. Es más, la inseguridad en el manejo del modelo le impide completar o modificar la explicación que dice va a ofrecer al escolar, a pesar de que no la considera sencilla de entender.

### *VII.5.2.3. Cuestión de Investigación Profesional número 3.*

*a) Propósitos de la indagación*

a) Queremos explorar cómo evalúan los estudiantes una tarea escolar en la que hay errores sobre la representación polinómica unitaria.

b) Interesa averiguar la capacidad de los estudiantes para determinar el origen de dichos errores

c) Pretendemos indagar sobre las razones que esgrimen los estudiantes para elegir una de las tres explicaciones que se ofrecen.

d) Queremos indagar sobre las relaciones entre la actuación de cada estudiante y sus producciones en la primera etapa

*b) Trabajo propuesto*

| Actividad propuesta por el profesor |
|---|
| Calcula el reparto **5 : 7,** expresando el resultado con una representación polinómica unitaria<br>Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta |

| Respuesta del niño C |
|---|
| El resultado es $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{28}$<br>El resultado me ha ido saliendo de esta forma<br>Al principio cada uno recibe $\frac{1}{2}$ de tortilla y quedan 3 trozos por repartir<br>En la segunda fase hago el reparto 3:7 y me sale $\frac{1}{3}$, pero no de tortillas enteras sino de trozos de tamaño $\frac{1}{2}$ Así que cada uno recibe $\frac{1}{6}$ de tortilla y sobran 2 trozos.<br>En la tercera hago el reparto 2:7 y me sale $\frac{1}{4}$, pero no de tortillas enteras sino de trozos de tamaño $\frac{1}{3}$ Así que cada uno recibe $\frac{1}{12}$ de tortilla y sobra 1 trozo.<br>Al final reparto el trozo que me queda y cada uno recibe $\frac{1}{7}$ pero de un trozo de tamaño $\frac{1}{4}$, por lo que en esta fase cada uno recibe $\frac{1}{28}$ de tortilla |

*c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.*

Valoramos cada una Cuestiones de Investigación Profesional (CIP), establecidas en el apartado VII.5.1. de acuerdo con los siguientes criterios:

CIP.III.1. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar

1.- Interpretación correcta o bastante probable
2.- Interpretación dudosa o incompleta
3.- Interpretación errónea o inadecuada

CIP.III.2. Justificaciones acerca de la explicación elegida para exponerla al niño.

1.- Argumentos correctos con símbolos
2.- Argumentos correctos con objetos gráficos
3.- Argumentos erróneos o inadecuados

CIP.III.3. Argumentaciones sobre la actividad que se propone al escolar.

1.- Argumentos correctos en el modelo de la 1ª etapa
2.- Argumentos correctos en otros modelos.
3.- Argumentos erróneos o no se dan argumentos

*d) Resultados obtenidos*

Los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes entrevistados se recoge en el siguiente cuadro, en el que las filas figura el número asignado a cada uno de los estudiantes entrevistados:

| Alumnos<br>Cuestión Investig. | **34** | **10** | **24** |
|---|---|---|---|
| CIP.I.1 | 1 | 3 | 1 |
| CIP.I.2 | 2 | 3 | 2 |
| CIP.I.3 | 3 | 1 | 3 |

Tabla VII.3. Resultados de la Cuestión de Investigación Profesional Nº 3

*c) Análisis e interpretación*

Tarea 1: evaluar las respuestas de los escolares

- El estudiante nº 34 anota en un papel la respuesta que él obtiene. Su intención es la de comparar sus resultados con los que ofrece el escolar: esta actitud no apareció en las tareas previas, posiblemente porque en aquellas tareas el estudiante para maestro era capaz de resolver mentalmente el trabajo propuesto. Una vez cotejada la respuesta del escolar con la que ha escrito en su papel, encuentra el error con rapidez, aunque le cuesta explicitarlo:

  *Pues, ya está mal en la primera fase que hace; pero no dice que sobran dos trozos para repartir.... La segunda, dice .... aquí en el 2 trozos no dice que es de tamaño 1/6. ...Pero, 1/4 de tortillas enteras, pero no tiene en cuenta que el cuarto no es de tamaño 1/3 sino de 1/6, que se lo ha dejado por aquí. Es decir, 1/6 de tortilla y sobran 2 trozos de tamaño 1/6, porque serán 1/3 de 1/2, 1/6. O me he confundido yo, vamos. .*

  En sucesivas aproximaciones a las diferentes partes que componen el trabajo del escolar, el futuro maestro va detectando un comportamiento erróneo pero regular por parte del niño:

  *Es que con eso ya arrastra todo, porque se deja la parte inicial; que cada vez coge menos trozo de tortilla, pero no solo en las partes que le quedan sino en todas; se deja que el tercio que coge de los ... Dice en la segunda fase hago el reparto 3 entre 7 y me sale 1/3, pero no de tortilla entera sino de tamaño 1/6, vale; recibe 1/6 de tortilla y sobran 2 trozos, pero no dice que sobran 2 trozos que son también de tamaño 1/3, que esos trozos de tamaño 1/3 son de tamaño 1/2. ....*

  Finalmente el estudiante nº 34 logra encontrar una formulación del comportamiento del niño, referida a que no considera que se tiene que tomar en consideración el tamaño de las partes con las que se trabaja en cada una de las fases:

  *Es que solo toma el tamaño que le ha salido antes, el tamaño de la misma fase en la que está*

  El propio estudiante clasifica como importante este error ya que de no superarse la cuantificación del reparto no puede hacerse de forma adecuada, puesto que olvidar el tamaño desde el principio es importante:

  *Porque si no lo llevas arrastrando desde el principio cada vez coges un trozo distinto, o te dejas trozos por ahí, o coges más de lo que hay.*

- El estudiante nº 10 interpreta que la respuesta del escolar es correcta. Tal afirmación la realiza este estudiante tras la lectura de la respuesta del escolar. En ningún momento de dicha lectura hace anotación alguna, ni tampoco desarrolla él la tarea para efectuar comparaciones posteriores. En consecuencia, no hay explicitaciones de posibles errores en la tarea del escolar.

• El estudiante nº 24 resuelve la tarea antes de revisar la respuesta del escolar. En su resolución este estudiante incurre en errores similares a los que comete el escolar, pues no controla adecuadamente el tamaño de las partes con las que trabaja.

Además, presenta un esquema de trabajo que es original, en el sentido de que no fue utilizado en las sesiones de clase de la Primera Etapa, pero que potencialmente conlleva a resultados erróneos por cuanto controla las partes que sobran en cada fase del reparto pero no controla el tamaño de las mismas. Como puede observarse en la reproducción de la tarea de este estudiante, hace los repartos en cada una de las fases utilizando unidades enteras de magnitud, su preocupación primordial es la de controlar las partes que corresponden a cada individuo y las partes que sobran en el reparto, pero no atiende al tamaño de las partes con las que trabaja, aun cuando hace una referencia al tamaño de las partes que no explicita en su trabajo, por lo que no hay constancia de cuál es su mecanismo de control de la medida de las partes

$$(5:7) = \frac{1}{2} + (3:7)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{4} + (5:7)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + (5:7) \qquad\qquad 5:7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} + (3:7)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3$$

$$\frac{1}{4} + (5:7)$$

Aun cuando su solución no es correcta, este estudiante detecta y explicita con precisión los errores del escolar; además, ello le permite detectar que su propio trabajo estaba mal hecho:

*A:* *Si, 1/2. Entonces, en la segunda fase lo plantea bien, o sea dice que le quedan 3 trozos, pero no son enteras sino de tamaño 1/2; así que hace esa multiplicación, que es necesaria porque las tortillas no son de una unidad sino mitades, ¿no? Pero, sin embargo, en la segunda también entiende que hay que coger 1/4, que no son tortillas enteras y que son de tamaño 1/3; pero solamente tiene en cuenta que son de tamaño 1/3 por las anteriores, pero no las de tamaño . ; o sea, las anteriores a su vez eran de tamaño 1/2, entonces tiene que multiplicar no solamente por 1/3 sino por el 1/2 de la fase anterior, de la primera*

P: *Eso es lo que hace en la tercera*
A: *Y en la cuarta se deja ya, pues toda*
P: *Es lo mismo, también se fija solamente en la anterior*
A: *Se fija solamente en la fase que acaba de realizar, pero sin tener en cuenta que en la siguiente pues tenia también no tortillas enteras sino trozos de tortilla de 1/2, 1/3, ... Entonces, solamente le ha salido bien la primera porque solamente había trozos de 1/2, pero en las siguientes, al no tener en cuenta las fases anteriores, se ha equivocado*
P: *¿Eso es grave?*
A: *Sí, porque entonces no lo ha fraccionado correctamente. O sea, aquí tenía que haber salido 1/24 y en la otra 1/24 por 4*
P: *¿A ti te había salido eso?*
A: *No, porque lo había hecho mal.*

Tarea 2: ofrecer explicaciones al escolar, si su respuesta contiene errores.

Al igual que en las dos tareas precedentes se ofrecen a los estudiantes para maestros tres explicaciones diferentes:

* la explicación I tiene en cuenta un aspecto sintáctico de la representación polinómica unitaria que se trató en las sesiones de clase de la etapa primera;
* la explicación II contiene representaciones gráficas de las distintas fases que componen el reparto y de las que el niño debe escribir su representación simbólica;
* la explicación III detalla las dos primeras fases del proceso expresadas exclusivamente con la notación simbólica adecuada.

• El estudiante nº 34 desecha de inmediato la explicación número I por considerar que *no le explica nada del proceso*, que se limita a enunciar un criterio sobre las relaciones que tienen que cumplir las diferentes fracciones. Por tanto, este estudiante no valora la explicación I como vehículo para hacer reflexionar al estudiante sobre la correcta realización de la actividad y las exigencias sintácticas del sistema de representación.
Tampoco admite que se utilice únicamente la explicación II, pues considera que los dibujos ayudan en la tarea; pero esta ayuda debe completarse con la explicación III, en tanto en cuanto esta última informa sobre el sistema simbólico utilizado. Para el estudiante nº 34 es esencial que las explicaciones contengan la descripción gráfica de las acciones y su paralela simbolización: *si lo ve en un dibujo y lo tiene escrito yo creo que lo entiende mejor*.

• El estudiante nº 10 no detecta errores en el escolar y, por tanto, no se suscita la elección de posibles explicaciones para el escolar.

• Siguiendo con su forma de actuar en las tareas precedentes el estudiante nº 24 rechaza la explicación I porque considera que es una técnica lo que se expone al escolar, aun cuando no interpreta que en realidad no se trata de una técnica sino de una reflexión sobre la sintaxis del sistema simbólico:

A: *La I no me convence porque es muy técnica. O sea, es aplicar unas reglas, como las otras veces.*
P: *Estas reglas ¿le sirven para calcularlo?*
A: *Sí, lo que pasa es que no teniendo clara la idea, es preferible que piense o reflexione sobre el por qué se hace eso que no lo aprenda de memoria; y*

*que aprendiéndolo de memoria tampoco le vea el sentido.*

La explicación III la rechaza inicialmente por considerar que conlleva una utilización de símbolos importante, aunque éste estudiante no usa tal desarrollo simbólico. Es decir, el rechazo puede provenir de que el propio estudiante no utiliza esta representación simbólica, posiblemente porque no ha comprendido el significado de cada uno de los símbolos empleados:

*La III no me gusta, o sea, yo lo entiendo pero pienso que para un chico de E.G.B. tampoco, es muy complicado de entender; o sea, ver tantos paréntesis, corchetes, igual te lleva un poco a confundir*

Este estudiante elige la explicación II porque se desarrolla directamente en el modelo y, en consecuencia, permite hacer un seguimiento completo de un proceso de simbolización complejo:

> *Porque es más gráfica. Y entonces se ve claramente que hay tantas tortillas y que han sobrado estas 3, que son mitades; entonces, de esas mitades hace otro nuevo reparto, entonces se da cuenta de que no lo hace de una unidad sino que lo hace de mitades. De ahí ve a su vez que le quedan 2 trocitos que no son unidades, simplemente son 1/3 de la mitad. Entonces, otra vez lo mismo, y así lo ve de forma más gráfica*

En el desarrollo de la entrevista este estudiante pone de manifiesto que la explicación que se debe dar al escolar ha de desarrollarse de acuerdo con su propia experiencia como aprendiz: la utilización del modelo es esencial para la construcción del sistema simbólico; además, son necesarias pautas verbales que controlen el proceso:

P: *O sea, que este para el niño le ayudaría porque va viendo de forma gráfica y cómo se simbolizan las fracciones*

A: *Si de forma más real, ver que te quedan 1/3 que a lo mejor aquí no lo ves tan claro; si lo ves con las tortillas dibujadas ves más claro que hay 1/3, que es verdad que ocurre así... Primero haría esta, para que lo viera más claro que ocurre eso porque es verdad, o sea tú repartes y te quedan tantos trozos, pero no son de unidad sino que son mitades. Y luego esta la veo que estaría bien, pero con una explicación; o sea, el por qué de que esto lo pones en corchetes y esto en paréntesis*

P: *O sea, que habría que especificar los símbolos que se utilizan qué están representando*

A: *Si, y acompañados de algo hablado. O sea, yo por ejemplo, cuando hacía estos repartos siempre me ayudaba hablando porque tenía que entender que esto es 1/3 de tortilla, y que esto es 2 tortillas entre 7 personas; pero acordándome que todas esas eran de tamaño 1/3; entonces, acompañándola de un lenguaje oral ...*

P: *O sea, tu propuesta sería que él lo viese gráficamente para que se diese cuenta el tamaño de lo que queda. Y una vez se hubiese familiarizado con eso pasarlo aquí (se refiere a la explicación III), pero acompañado de pautas verbales*

A: *Si. Que se diera cuenta, porque tienes que ir atendiendo a las fases siguientes; entonces, si lo ha visto primero gráfico luego en lo escrito se acordará de que en la primera fase la tortilla era de 1/2, en la otra era de 1/3. Y luego ya, a lo mejor, la explicación más técnica*

P: *Esta explicación tiene un lenguaje muy técnico, muy abstracto a lo mejor (se refiere a la explicación III)*

*A: Yo, por ejemplo, hasta que lo tuve que entender es que tenía que hacerlo viendo la situación y lo tenía que ir hablando a la vez que lo escribía, porque sino me complicaba.*
*P: Pero yo he visto que al hacerlo en el papel no lo has dibujado.*
*A: No, bueno, antes de llegar a aprender esto me lo dibujaba.*
*P: Ahora ya no te hace falta*
*A: A veces sí. Bueno ahora me he dado cuenta de que sí porque se me ha olvidado*

Tarea 3: diseñar tareas para seguir la secuencia instructiva.

- El estudiante nº 34 entiende que los errores que muestra el escolar exigen de una explicación, no se puede pasar a proponer otra actividad mientras no se le haya hecho reflexionar sobre los resultados obtenidos.
- El estudiante nº 10, que no ha detectado errores en el trabajo del escolar, propone una secuencia de enseñanza similar a la que ha recibido, en el sentido de que después de tareas relativas a la representación polinómica unitaria deben hacerse otras sobre la representación polinómica decimal:

  *Pues por ejemplo, si esto lo ha hecho por la mayor; o sea, dándole al niño; o sea, si hacemos el reparto teniendo en cuenta que a la persona que participa se le da la mayor parte, pues ahora que no se le de la mayor parte, y por ejemplo, como en clase, hacerlo para 10 personas; y hacer la presentación para pasarnos ya al sistema decimal, para repartirlo entre; en vez de repartirlo cogiendo la mayor parte, pues dividirlo para 10, suponiendo que el trozo que tuviéramos lo dividiésemos en 10 partes*

  Este estudiante muestra algunas imprecisiones en la comprensión de las ideas utilizadas en las sesiones de clase, como asociar únicamente el criterio de la mayor parte con la representación polinómica unitaria, o como asociar la representación polinómica decimal con el reparto entre 10 personas en vez de hacerlo con el fraccionamientos en 10 partes iguales. Estas ideas confusas son consecuentes con sus producciones previas, en las que mostraba un conocimiento incompleto del modelo de trabajo; además de que el paso del tiempo seguramente habrá influido para que este estudiante haya olvidado algunos aspectos de la propuesta curricular desarrollada en la Primera Etapa.

  Pero así como este estudiante tiende a emular la secuenciación de los conocimientos en la forma en que se le mostraron a él, no ocurre así con la metodología, pues se aleja de la que se utilizó en la instrucción:

  *Es que antes de ponerle ya el problema, ahora le explicaría: vamos a hacerlo ahora teniendo en cuenta que en vez de tomar 1/2 vamos a dividir esto. O sea, le explicaría lo de la representación polinómica decimal, antes que ponerle el problema que lo hiciera él. Luego le diría esto se llama representación polinómica decimal y se hace así*

  Aquí muestra este estudiante que las explicaciones preceden a las propuestas de trabajo, situación que no se produjo en la metodología utilizada en las sesiones de clase en las que las explicaciones surgían como consecuencia de la revisión de los trabajos de los estudiantes. Parece, por tanto, que este estudiante adopta estrategias metódicas similares a las vividas en experiencias anteriores.

- El estudiante nº 24 no ofrece nuevas actividades para el escolar puesto que su trabajo se centra en la explicación sobre los errores detectados

*f) Reflexión sobre el trabajo de los estudiantes.*

- Aun cuando el alumno nº 34 muestra destreza en la cuantificación del reparto mediante la representación polinómica unitaria, encuentra dificultades para determinar con precisión el tipo de errores que comete el escolar.

  En esta tarea el estudiante para maestro sugiere que la explicación que daría al escolar se asemeje al proceso instructivo que este estudiante ha seguido; de este modo, interpreta que la representación polinómica unitaria debe aparecer íntimamente unida al modelo en que se actúa. El hecho de que este estudiante para maestro diese la respuesta correcta utilizando exclusivamente representaciones simbólicas, así como sus propias producciones previas, nos induce a pensar que el entrevistado asocia el aprendizaje a un desarrollo paralelo de las acciones y su simbolización; a que el escolar supere los errores detectados a través de un aprendizaje constructivista.
- El estudiante nº 10 no detecta errores en el trabajo del escolar., porque la tarea a revisar era compleja, porque el estudiante no resuelve la tarea a partir de sus conocimientos personales, o porque este estudiante cometa errores como los de el escolar; en cualquier caso, el desarrollo de la entrevista no permite determinar en que posición se encuentra este futuro maestro.

  Lo que sí se pone de manifiesto es que este estudiante tiende a reproducir sus experiencias como alumno; en ese sentido reproduce la secuencia de enseñanza en la forma en que recibió los conocimientos, y reproduce aquellas estrategias metódicas que ha vivido durante mayor tiempo, o que entiende más adecuadas; pero lo que no ha mantenido asociados han sido la secuencia de enseñanza y la metodología en que se desarrolló.

  Este estudiante no se cuestiona la complejidad de la técnica y, en consecuencia, la necesidad de que los escolares practiquen la misma; simplemente acepta que el trabajo está bien hecho y que, por tanto, hay que avanzar en la presentación de nuevos contenidos. Tampoco se cuestiona la posibilidad de proponer tareas al escolar en las que se reconstruyan la condiciones del reparto a partir de su representación polinómica decimal, tareas que exigen la revisión de todo el proceso de reparto, así como la adecuada interpretación del sistema simbólico de representación que se viene utilizando; es decir, proponer al escolar tareas bidireccionales, en el sentido de que no solo vaya del modelo a la representación simbólica, sino que también vaya de la representación simbólica al modelo. Puede pensarse que este estudiante concibe una enseñanza en la que predomine la presentación de nuevos conocimientos frente a la consolidación de los ya presentados.
- El estudiante nº 24 pone de manifiesto que ante una tarea compleja, tanto por la diversidad de símbolos como por la de pasos necesarios, el modelo es imprescindible en los primeros estadios del aprendizaje, de forma que las representaciones simbólicas han de estar íntimamente relacionadas con la

manipulación de los objetos; además, también señala que las pautas verbales son necesarias para el control de todas las actuaciones necesarias.

En cuanto a su actuación profesional cabe señalar que este estudiante pone de manifiesto que su propio proceso de aprendizaje es el que deben seguir los escolares. Esta situación, que no se producía en las tareas precedentes, resulta comprensible en tanto en cuanto nos encontramos ante un contenido que dicho estudiante ha adquirido recientemente; no ha actuado de la misma forma en los contenidos de las tareas anteriores porque los adquirió hace largo tiempo y, en consecuencia, no recuerda sus propias experiencias como aprendiz.

También es destacable el papel que otorga este estudiante a la verbalización de las acciones, pues por su experiencia personal la conexión entre las acciones en el modelo y su simbolización deben realizarse por medio de pautas verbales, que considera imprescindibles para controlar la simbolización que utiliza; y como este procedimiento ha sido esencial en su aprendizaje también lo contempla como tal en el proceso de aprendizaje de los escolares

### *VII.5.2.4. Cuestión de Investigación Profesional número 4.*

*a) Propósitos de la indagación*

a) Queremos explorar cómo evalúan los estudiantes una tarea escolar en la que hay errores y aciertos en la escritura decimal de tres fracciones.

b) Interesa averiguar la capacidad de los estudiantes para detectar el origen de dichos errores.

c) Pretendemos indagar sobre las razones que esgrimen los estudiantes para elegir una de las tres explicaciones que se ofrecen.

d) Queremos indagar sobre las relaciones entre la actuación de cada estudiante y sus producciones en la primera etapa

*b) Trabajo propuesto*

| Actividad propuesta por el profesor |
|---|
| 1) Cada una de las siguientes fracciones tienes que escribirla con notación decimal a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{0}$ c) $\frac{11}{3}$<br><br>2) Justifica el resultado que has obtenido<br><br>3) Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta |

| Respuesta del niño D |
|---|
| 1) Los resultados son a) 0'5 b) 0 c) $3,\overline{6}$ |
| 2) El caso a) quiere decir que si reparto una tortilla para 2 personas cada una se lleva la mitad de la unidad, que también se puede escribir como 0'5 que son 5 décimas partes de la unidad; en el caso b) como no hay personas no se puede repartir y por eso hay que poner 0; y el caso c) significa que si se parten las tortillas en 3 trozos iguales cada persona se lleva 11 de esos trozos. Y al pasarlo a la notación decimal quiere decir que el reparto hay que hacerlo de otra forma pues cada unidad o parte de unidad se divide en 10 partes iguales, entonces cada una de las personas recibe infinitos trozos de tortilla, o sea una cantidad infinita de tortilla. |
| 3) Lo que he hecho ha sido efectuar la división del numerador entre el denominador de cada una de las fracciones. En el caso a) la división sale enseguida; en el caso b) he puesto 0 porque no se puede hacer la división; y en el caso c) he puesto periodo porque el resultado se repetía. |

*c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.*

Valoramos cada una de las unidades de análisis elaboradas para las Cuestiones de Investigación Profesional (CIP), establecidas en el apartado VII.5.1. de acuerdo con los siguientes criterios:

CIP.IV.1.1. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar sobre 1/2 y 0.5

CIP.IV.1.2. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar sobre 4/0 y 0

CIP.IV.1.3. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar sobre 11/3 y $3,\overline{6}$

Para estas tres unidades de análisis los criterios son:

1.- Interpretación correcta o bastante probable

2.- Interpretación dudosa o incompleta

3.- Interpretación errónea o inadecuada

CIP.IV.2.1. Justificaciones sobre el tipo de explicación que se piensa ofrecer al niño respecto a la identificación de 1/2 y 0,5

CIP.IV.2.2. Justificaciones sobre el tipo de explicación que se piensa ofrecer al niño respecto a la identificación de 4/0 y 0

CIP.IV.2.3. Justificaciones sobre el tipo de explicación que se piensa ofrecer al niño respecto a la identificación de 1/3 y $3,\overline{6}$

Para estas tres unidades de análisis los criterios son:

1.- Argumentos correctos en el modelo

2.- Argumentos correctos en otros modelos

3.- Argumentos erróneos o inadecuados

CIP.IV.3. Argumentaciones sobre la actividad que se propone al escolar.

1.- Argumentos correctos en el modelo de la 1ª etapa

2.- Argumentos correctos en otros modelos.

3.- Argumentos erróneos o no se dan argumentos *d) Resultados obtenidos*

Los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes entrevistados se recoge en el siguiente cuadro, en el que las filas figura el número asignado a cada uno de los estudiantes entrevistados:

| Alumnos<br>Cuestión Investig. | **34** | **10** | **24** |
|---|---|---|---|
| CIP.IV.1.1 | 1 | 2 | 1 |
| CIP.IV.1.2 | 1 | 1 | 3 |
| CIP.IV.1.3 | 1 | 2 | 3 |
| CIP.IV.2.1 | 1 | 3 | 3 |
| CIP.IV.2.2 | 1 | 2 | 3 |
| CIP.IV.2.3 | 1 | 3 | 3 |
| CIP.IV.3 | 3 | 3 | 3 |

Tabla VII.4. Resultados de la Cuestión de Investigación Profesional Nº 4

*c) Análisis e interpretación*

Tarea 1: evaluar las respuestas de los escolares

**i) Sobre la igualdad entre 1/2 y 0,5**

- El estudiante nº 34 entiende que el escolar establece correctamente la relación entre los dos números, aunque inicialmente no determina el sentido de división que aparece en la respuesta:

  *Los resultados de la primera sí; la justificación .... hay que verlo como reparto, ¿no? ¿o como división? Es que mezcla reparto con división ... Es que si hace la división yo creo que está bien*

  Este estudiante para maestro admite que el escolar utiliza la división con sentido de reparto y también como división cuotitiva, aun cuando que este último significado no lo tiene claro:

  *Hombre, si pone la división no entiende lo que hace, simplemente hace una división y ya está.*

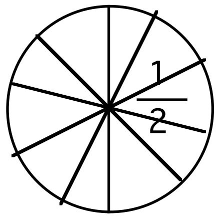
- El estudiante nº 10 tiene serias dudas en la interpretación de la notación decimal que hace el escolar

  *Yo creo que si porque es como si hubiera dividido la unidad en 10 partes y cada uno se lleva 5 décimas partes, o sea 5 trocitos de, de; lo que pasa que no, tal y como está .. ; no está mal, pero de aquí no viene ese resultado, simplemente sería que cada uno se lleva 1/2, no lo de 5 décimas partes de la unidad. Esto yo creo que esto lo ha hecho explicando lo del 0,5. No está mal porque es el mismo resultado*

  Este estudiante no asocia la notación decimal a modelo alguno, ni utiliza las representaciones gráficas que le son familiares en la notación fraccionaria. Es a lo largo de la entrevista como llega a comprobar la igualdad de las cantidades de magnitud que representan los números 1/2 y 0,5 por medio de la constatación de la igualdad de dos superficies

  *Y luego dice que también se puede escribir como 0,5 que son 5 décimas partes de la unidad. Lo que ha hecho es tomar esto; o sea, ha hecho la división, o sea, 1/2 es igual a 0,5 y luego lo ha explicado como que esto son*

*10*




*y esto es 5*

- El estudiante nº 24 relaciona de inmediato la fracción con la mitad de una unidad, pero se necesita que el entrevistador le oriente el trabajo para que identifique 1/2 como 0,5. Finalmente identifica ambos números, del modo en que actúa el escolar, por lo que admite como correcta su respuesta:

  *Porque si un redondo, que es la tortilla, vale 1, si tú la divides por la mitad .... A ver .... Porque una unidad, claro, si él te habla de décimas, para él en una unidad ... En una unidad, para él hay, hay 10 décimas; entonces, por la explicación que dice aquí, entonces si una unidad son 10 décimas lo divide por la mitad y entonces, para él, una parte son 5 décimas y la otra son otras 5*

**ii) Sobre la igualdad entre 4/0 y 0**

- El estudiante nº 34 entiende que el escolar comete un error al simbolizar la expresión 4/0 con notación decimal y que dicho error proviene de las exigencias escolares:

  *Está mal porque no se puede hacer un reparto si no hay personas. ... Entiende que no hay personas y no se puede repartir, lo que pasa es que dice que hay que poner 0 porque hay que poner un resultado*

- El estudiante nº 10 entiende que el escolar está en un error al representar como 0 el resultado de un reparto en el que no hay personas:

  *Pues sí, si que no hay personas, pero no daría 0 porque no podemos hacer el reparto; no es que no se lleven nada, yo creo que habría que explicarle que no hay que poner 0; habría que ponerle al revés 0/4 a ver cómo lo haría*

  Y también entiende este estudiante que la división es incorrecta si el divisor vale 0, aun cuando tal imposibilidad la justifica recurriendo al modelo:

  *Porque no se puede hacer la división, pero no hay que poner 0 cuando no se puede hacer la división; no se puede hacer pero no significa que no le toque a nadie nada, es que no hay para repartir, o sea no hay personas*

  Vemos que el estudiante nº 10 entiende que el escolar comete un error tanto si la expresión fraccionaria la interpreta como reparto, como si la interpreta como división numérica. Sin embargo, no explicita el origen del error; no interpreta que el error del escolar está en asociar la medida de la cantidad de magnitud nula a la no realización de las acciones.

- El estudiante nº 24 se identifica plenamente con la respuesta del escolar, en el sentido de que la imposibilidad del reparto ha de simbolizarse con 0. También admite como correcto el resultado 0 si el divisor es 0, y escribiendo que

$$\begin{array}{l|l} 4 & \underline{\;0\;\;\;\;} \\ 0 & 0 \end{array}$$

Ante las reiteradas preguntas del entrevistador sobre la corrección o incorrección de sus resultados este futuro maestro guarda silencio, por lo que no se tiene la certeza de que lo admita como correcto el resultado, ni de que lo rechace.

**iii) Sobre la igualdad entre** 11/3 y $\boxed{3,\overline{6}}$

- El estudiante nº 34 entiende que el resultado que dice el escolar es correcto, y lo admite como resultado de la división del numerador entre el denominador:

  *El resultado está bien. ... Es que él simplemente hace la división.*

- El estudiante nº 10 entiende que el paso de la notación fraccionaria a la decimal es correcto, pero no admite la explicación que ofrece el escolar:

  *La explicación esta. Dice que si se parten las tortillas en 3 trozos iguales cada persona se lleva 11 de esos trozos; sería que tenemos, sería el resultado de un reparto en el que tenemos 11 tortillas y se dividen en 3 trozos iguales, y cada persona se lleva 11 partido para 3 trozos iguales; no, si se parten las tortillas en 3 trozos iguales cada persona se lleva 11 de esos trozos, ¿no?, no estaría bien*

  Este estudiante pone de manifiesto la confusión que le ocasiona el uso de dos ideas de fracción diferentes; por una parte entiende la fracción como reparto y luego interpreta esa misma fracción como relación parte-todo, pero no conecta tales significados pues entiende que si las 11 tortillas se dividen en 3 partes cada persona *no puede llevarse 11 partido para 3* de esas partes, tal y como señala el escolar.

  Tampoco comparte las explicaciones del escolar respecto a la notación decimal, pues para el estudiante nº 10, lo esencial de esa notación decimal no es la cantidad que representa sino la precisión en la medida de tal cantidad:

  *¿Aquí que ha hecho? Dice que cada unidad se divide en 10 partes iguales, entonces cada uno, pero ¿por qué recibe infinitos trozos de tortilla .. ¿al salirle el 3,6 periodo? ... No significa que cada una de las personas reciba infinitos trozos de tortilla, sino que no podemos dar un resultado exacto y cada uno se llevará 3,666666 trocitos; pero no sabemos exactamente el trozo que se llevará, pero eso no significa que sea infinito.*

- El estudiante nº 24 efectúa la división del numerador entre el denominador y obtiene el resultado del escolar, pero no admite la explicación que ofrece dicho escolar:

  *En este caso se ha dejado llevar por la intuición, porque dice se parten las tortillas en 3 trozos iguales. O sea, el ya supone que como número entero da 3, o sea que se pueden coger 3 tortillas enteras.*

Tarea 2: ofrecer explicaciones al escolar, si su respuesta contiene errores.

En esta tarea no se ofrecen explicaciones para que el estudiante entrevistado seleccione la que considere más oportuna; simplemente se le pregunta por la intervención que haría. De este modo, el futuro maestro tiene que detallar la explicación que daría al escolar, si fuese necesaria, o describir la actividad que le propondría para proseguir con el proceso instructivo. Seguidamente analizamos el comportamiento de los estudiantes entrevistados en cada una de las 3 partes que conforman la actividad propuesta al escolar

**i) Sobre la igualdad entre 1/2 y 0,5**

- El estudiante nº 34 tiene dudas sobre el modo de ofrecer al escolar alguna explicación, sobre el modo de conectar los dos sistemas simbólicos:

*La división en sí la entiende. Pasar a notación decimal lo sabe porque hace la división y la hace bien, pero la justificación yo creo que se la inventa intentando justificarla con la representación*

Este estudiante considera que es oportuno ayudar al escolar para que identifique las dos cantidades que se representan de forma diferente; sin embargo, encuentra dificultades para ayudar al escolar. A lo largo de la entrevista sugiere diferentes aproximaciones:

- que el reparto se haga dividiendo la unidad en 10 partes iguales: que utilice la representación polinómica decimal.
- que se le ayude con representaciones gráficas: representar la fracción 1/2 y representar la parte que corresponde a cada uno si la unidad se divide en 10 partes iguales; finalmente habría que juntar las dos representaciones para que el escolar comprobase visualmente la igualdad de las dos áreas, la igualdad de las cantidades de magnitud que representan ambos números.

- El estudiante nº 10 ha descubierto a lo largo de la entrevista que por medio de representaciones gráficas se puede ver la igualdad de las cantidades de magnitud que representan los números 1/2 y 0,5; por tanto, no entiende que sea necesario dar una explicación al escolar.
- El estudiante nº 24 ha admitido, sin recurrir a representaciones gráficas, que la explicación del escolar es correcta y, por tanto, no tiene que ofrecerle explicación alguna.

**ii) Sobre la igualdad entre 4/0 y 0**

- El estudiante nº 34 no tiene dudas sobre la explicación que hay que ofrecer al escolar a partir de la fracción con significado de reparto:

*Dice que no se puede repartir, dice que hay que poner 0 porque tiene que responder, por poner alguna respuesta; porque a él le piden una respuesta numérica, entonces él pone una respuesta numérica; para él no se puede hacer el reparto pues a cada persona le corresponde 0 partes.*

Y también entiende este futuro maestro que la imposibilidad de las acciones hay que patentizarla, que no necesitan justificación:

*Claro, pone 0 porque no se puede hacer la división. Hay que decirle que si no se puede hacer la división no se puede hacer la división, no tiene resultado, no es 0.*

- El estudiante nº 10 ofrece al escolar una explicación sobre el origen de su error basada en la imposibilidad de conocer el resultado de un reparto que no se puede efectuar, pero no le menciona la distinción entre la no realización de las acciones y la medida del resultado de ellas:

*Que no se puede hacer el reparto porque faltan las personas, pero no se puede poner 0 porque no sabemos si es que le va a tocar a 0; o sea, no sabemos cuánto le va a tocar a cada una*

Posteriormente, y ante la insistencia del entrevistador, este estudiante ofrece al escolar una explicación en la que se manifiesta que la no realización del reparto no puede estar asociada a un resultado: *Que como no hay personas y no se puede realizar el reparto no podemos poner el resultado; porque como él dice que si no hay personas no podemos repartir, entonces ¿por qué pones el 0 si no has podido realizar el reparto?; o sea, es como si ya lo hubiésemos hecho, que no les toca a nada. No podemos dar un resultado*

En cuanto al error que comete el escolar al señalar que el resultado de la división es 0 porque no se puede efectuar, el estudiante nº 10 piensa que el escolar ha puesto 0 porque eso le saldría en el resto de la división; y la explicación que le ofrece para superar el error la hace en términos de imposibilidad de realizar la operación:

> *Le explicaría que no nos iba a salir nunca un resultado, porque cualquier número que pongamos aquí (se refiere al cociente), siempre nos va a dar un 0. Y siempre vamos a tener el mismo, el mismo dividendo*

- El estudiante nº 24 comparte totalmente las explicaciones del escolar, tanto si las expone en términos de reparto, como si lo hace a través del algoritmo de la división; en consecuencia, no caben elaborar explicaciones para ofrecérselas al escolar

**iii) Sobre la igualdad entre** $11/3$ y $3,\overline{6}$

- Al comparar las justificaciones que ofrece el estudiante nº 34 en este apartado, con las que expuso en apartado a) anterior se pone de manifiesto sus dudas personales sobre el significado de la fracción como reparto. En efecto, al encontrar la fracción 11/3 le otorga significado de relación parte-todo, por lo que no le da el mismo significado que en el apartado a):

> *El resultado está bien. La parte a) la ve como reparto, reparte 1 tortilla entre 2 personas; pero la parte c) ya no la ve como reparto de 11 tortillas entre 3 personas, ¿no? ..., piensa en reparto pero no de la misma manera que en el a), cambia de idea.*
>
> *Si parte las tortillas en 3 trozos iguales, cada persona se lleva 11 de esos trozos; 11 trozos de tamaño 1/3 .... Este último está mal, la justificación del resultado está mal porque aquí no tiene claro el concepto; en el primero ve un reparto, un reparto de 1 tortilla entre 2 personas, pero en el segundo ve que ..., primero lo ve bien, que hay, .. bueno, no dice cuantas tortillas hay. Esta mezclando, yo creo que mezcla la explicación de la unitaria, bueno lo que sería la unitaria, bueno la unitaria tampoco.... mezcla dos cosas .*

No es que el escolar mezcle dos cosas, simplemente ocurre que este estudiante ha impuesto su conocimiento personal predominante de la fracción como relación parte-todo (que él intenta identificar con la representación polinómica unitaria), ante la respuesta del escolar que alude al conocimiento reciente del futuro maestro de la fracción como resultado de un reparto igualitario. Tal y como manifiesta este estudiante, el significado de fracción, que denomina el concepto, hace referencia al significado como relación parte-todo: *el concepto que se da inicialmente de fracción que es que si tu divides la unidad en las partes*

Este futuro maestro entiende que el escolar se limita a utilizar la técnica de la división, pero que no justifica adecuadamente la igualdad resultante. Pero la explicación que se debe ofrecer al escolar no encuentra el origen de las dificultades del escolar:

*Si, habría que explicarle algo pero no se el qué, pero habría que explicarle algo. Al explicarle la representación polinómica decimal, pues puede que entendiese como se van dividiendo las tortillas, al igual que la unitaria, cómo se van dividiendo las tortillas, los trozos que salen, por lo de los infinitos trozos de tortilla, claro. Claro, pero es que entonces no sale cómo se repite.*

Aun cuando este estudiante ha visto como adecuado el recurso de hacer representaciones gráficas para el caso de identificar 1/2 y 0,5, en este caso la aparición de cifras periódicas le hacen evidenciar las limitaciones derivadas de sus propios conocimientos personales sobre el infinito potencial y el infinito actual. Todo ello provoca en este estudiante una duda irresoluble entre la necesidad de ofrecer una explicación al escolar y la imposibilidad de encontrar tal explicación:

A: *Sí, gráficamente; con la decimal no acabarías, siempre te iba a quedar un trozo para repartirlo; entonces ... un poco mal. Bueno, también podrías hacerlo, como sabe dividir, pues que si lo hace por la representación unitaria, lo que le saliese luego podría pasarlo a fracción y luego sumarlo todo; o pasar esto a decir simplemente que es 3 más 2/3 ...*
*Claro, es que aquí no le va a salir igual la gráfica decimal que la gráfica unitaria; porque en la unitaria se acaba, no es infinita y en la decimal, en este caso, le va a salir infinita; entonces ...*

*P:¿Crees que es un problema que cuando se haga más mayor a lo mejor lo entiende?, ¿que para niños es muy complicado?*

*A:Supongo que habría que explicárselo, no dejarlo.*

*P:Y tú dices que lo de utilizar la unitaria y luego la decimal no resolvería el problema porque no se acaba nunca. En el fondo habría que ver es que este número y este están representando lo mismo, ¿no?, que es lo que has sugerido tú para el primer caso.*

*A:Pero en este caso este número es periódico; que si no acaba nunca en un dibujo no puedes hacer que no acabe nunca.*

*P:O sea, que ves que los recursos gráficos no son posibles y que los simbólicos no son tampoco adecuados.*

- El estudiante nº 10 entiende que la igualdad de los dos números tiene *dificultades para hacerlo gráficamente*. Pero las dificultades también aparecen al intentar establecer esa igualdad en términos simbólicos:

*Tendría que hacer la división y luego también se lo explicaría así, o sea también le podría poner este ejemplo pero no.. ; decirle que esto equivaldría a* $0,\overline{6}$ *pero que no... Es que como un número periódico no sabemos exactamente; o sea, se aproxima mucho a un número, que podría ser 2/3, o sea que es 2/3, pero que como no es exacto, porque esto sería 2/3, pero ....*

En consecuencia, este estudiante no encuentra la forma de ayudar al escolar en la identificación de los números escritos con notaciones diferentes. Y esa dificultad surge como consecuencia de que en la notación decimal aparecen infinitas cifras decimales.

- El estudiante nº 24 manifiesta que no entiende la explicación que da el

escolar por lo que el entrevistador se ve en la necesidad de orientar a este estudiante en la interpretación de que el reparto produce infinitos trozos para cada participante. En una primera parte este estudiante, por medio de representaciones gráficas que va construyendo el propio estudiante, entiende que el escolar tiene razón en la primera parte de su justificación:
*Que se habrá dado cuenta de que cada uno recibe 3 tortillas enteras,. Luego, de todo eso le habrán sobrado ... A ver, luego se habrá dado cuenta de que le sobran 2 tortillas enteras, que tiene que repartir entre 3 personas. Entonces, lo que ha hecho ... es que lo de las 10. ... Luego lo ha dividido cada una en 10 partes. Es que eso no lo entiendo mucho .... Es que la última parte no ....*
En una fase posterior el entrevistador, entre silencios del estudiante y con ayuda de representaciones gráficas que construye el propio estudiante, entiende que hay un proceso de reparto que contempla un número infinito de fases:

> *Sería 3 tortillas enteras y luego .... de lo que queda se haría un nuevo reparto, infinitos repartos ...*

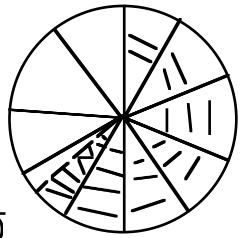
A continuación este estudiante para maestro pone de manifiesto dificultades en la interpretación de los números periódicos; sus conocimientos personales aluden a la aproximación de dicho número mediante números decimales:

*P: ¿Esto es lo mismo que 3,6?*
*A: No es lo mismo*
*P: Pues este número ¿a qué es igual?*
*A: ....*
*P: No es 3,7, no es 3,6*
*A: Estaría entre estos dos*
*P: ¿Y el número 3,66?*
*A: Sí*
*P: Este sí que es*
*A: No, se aproximaría*
*P: ¿Y número el 3,666?*
*A: Tampoco. O sea, es que serían aproximaciones, pero exacto no.*

En la secuencia de la entrevista este estudiante encuentra dificultades con la representación gráfica de los números periódicos, por lo que el entrevistador sugiere que trabaje con números decimales; en estas tareas se observa que este estudiante no sabe representar 0,45, simplemente dice que es menos de la mitad. Sus dificultades surgen al controlar el tamaño de las partes que dibuja, y de la no consciencia de fraccionar la unidad o sus partes en 10, situaciones que son el producto de una idea inicial de asociar las cifras de números decimales con fracciones unitarias: 0,6 indica 1/6; así se pone de manifiesto al sugerirle el entrevistador que hiciese una representación gráfica del número 0,66:

*P: ¿Ese último trozo que has pintado, ¿más o menos qué representa?,*
*A: ....*
*P: ¿Cómo lo has obtenido?, ¿por qué no lo has pintado más grande o más pequeño?*
*A: Representa, a ver ... 1/6 de 1/5 que sería 1/30 (lo escribe junto la figura)*

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$$



P: *O sea, eso es lo que hace referencia a este 6, ¿no? (se refiere al 6 de las centésimas en 3,66). Porque tú aquí has pintado 6*

A: *6 trozos de 1/5. He cogido 6 trozos de 1/5 y luego el que me queda pues de 1/5 lo he dividido en 6 partes.*

P: *O sea, que cuando hay que representar decimales tú lo que haces es dividir en 5 partes, ¿no la unidad?*

A: *No, la mitad. La unidad en 10*

P: *O sea, estás dividiendo la unidad en 10. Entonces, tú aquí has cogido 6 y luego este otro lo que haces es dividirlo en otras 6 partes*

A: *No en 10 también. Aquí quedarían 4.*

Con el recurso de las representaciones gráficas, el estudiante admite la estructura aditiva subyacente al número periódico propuesto, por lo que admite que el escolar ha respondido adecuadamente al señalar que cada participante recibe infinitos trozos de tortilla, que son de tamaños 0,6; 0,66; 0,666 , ... Y finalmente este estudiante nº 24 acepta que la suma de esos infinitos trozos de tortilla dará como resultado una cantidad infinita.

El detalle de la actuación de este futuro maestro pone en evidencia que sus conocimientos personales sobre la notación decimal le han impedido interpretar la respuesta del escolar y que, en consecuencia, la entrevista se ha concretado en explicitar el contenido de la respuesta del escolar, que este estudiante admite como correcta.

Tarea 3: diseñar tareas para seguir la secuencia instructiva.

- El estudiante nº 34 no entró a diseñar actividades nuevas para el escolar por cuanto las dificultades de ofrecerle explicaciones cubrió todas sus expectativas de actuación como profesional.
- El estudiante nº 10 tampoco ofrece ninguna nueva actividad al escolar por cuanto no ha sido capaz de dar explicaciones satisfactorias sobre la identificación de los dos números del último apartado.
- Puesto que el estudiante nº 24 admitió como correctas todas las respuestas del escolar, el entrevistador le propuso que elaborase una nueva actividad para ese chico. Pero este estudiante, y a pesar de la reiteración de la propuesta, no elaboró ninguna nueva tarea; simplemente se limitó a guardar silencio.

*f) Reflexión sobre el trabajo de los estudiantes.*

- Se observa que el alumno nº 34 manifiesta una idea predominante de la fracción como relación parte-todo, a la que incluso denomina como concepto o concepto inicial de fracción. Esta noción la asocia a la representación polinómica unitaria como consecuencia, pensamos, de un proceso de acomodación o fase de conexión de conocimientos personales bien asentados y de conocimientos recientemente adquiridos.

Por otra parte esta tarea ha puesto de manifiesto las propias dificultades que tiene este futuro maestro en la conexión no operatoria entre las notaciones fraccionaria y decimal, sobre todo en el momento en que aparecen las notaciones periódicas. En efecto, la conexión entre las fracciones decimales y la notación decimal puede establecerla este estudiante por medio de representaciones gráficas que conecten los resultados de repartos expresados mediante los sistemas simbólicos que denominamos representación polinómicas unitaria y decimal; y también admite este estudiante dicha conexión, por medio de representaciones gráficas, si la fracción decimal se interpreta como relación parte-todo y por medio de una representación polinómica decimal. Sin embargo, la aparición de fracciones no decimales impide al estudiante conectar las notaciones fraccionaria y decimal, imposibilidad que se produce tanto si se usan representaciones gráficas, como representaciones simbólicas; en este caso está en juego la transición entre el infinito potencial y el infinito actual.

A lo largo de esta tarea se han puesto de manifiesto diferentes actitudes de este futuro maestro en su actuación profesional:

- En el caso de la escritura decimal de las fracciones decimales este estudiante ha reconstruido una explicación para el escolar basada en producciones anteriores; reconstrucción que, posiblemente, tuvo que improvisar (ante las exigencias del entrevistador) a partir de los conocimientos personales adquiridos en la Primera Etapa, en su fase de ampliación de conocimientos matemáticos.
- En el apartado b) han sido sus propias convicciones personales las que le han llevado a no explicitar lo que considera como obvio. Este estudiante dispone de conocimientos personales firmemente asentadas que le llevan a actuar con seguridad omitiendo las justificaciones; posiblemente este estudiante no considere necesario hacer notar al escolar la importancia de hacer distinciones entre las acciones realizadas y la medida de las cantidades de magnitud resultantes de dichas acciones.
- En el apartado c) el estudiante para maestro se ve imposibilitado de dar al escolar argumentos justificados porque no los encuentra entre sus conocimientos personales, o porque los conocimientos recientemente adquiridos no están suficientemente conectados con los anteriores.

• El estudiante nº 10 tiene vacilaciones sobre el modelo en que trabajar, se reflejan en sus respuestas mezclas de dos significados de fracciones como reparto o como relación parte-todo. Sin embargo, es capaz de utilizar un significado si se le exige una clarificación de sus razonamientos.

Este futuro maestro ha puesto de manifiesto que en sus conocimientos personales sobre la notación decimal no aparece asociada a modelo alguno; de ahí que no sea capaz de visualizarlo como número medida. Esta situación le impide utilizar recursos gráficos para conectar las notaciones fraccionaria y

decimal, que son mucho más acusadas en el caso de números periódicos.
Como consecuencia de ello, este estudiante no dispone de argumentos que ofrecer al escolar; es a lo largo de la entrevista que él descubre la posibilidad de utilizar representaciones gráficas para visualizar cantidades de magnitud asociadas a números decimales. Y también la imposibilidad de utilizarlas en el caso de los números periódicos; situación que le lleva a conectar las notaciones fraccionaria y decimal a través del algoritmo de la división, pues los conocimientos recientes sobre la representación polinómica decimal no están plenamente comprendidos.
Se dibuja, por tanto, una actuación profesional en la que el estudiante nº 10 prioriza la manipulación operatoria con números que no hacen referencia a magnitudes, pues no dispone de un modelo consistente en el que actuar con números medida.

- Los conocimientos personales del estudiante nº 24 no le permitieron detectar ningún error en la respuesta del escolar; antes, al contrario tuvo dificultades al interpretar los argumentos del niño referidos a los números periódicos y, en consecuencia, los aceptó como correctos.
  No era la intención de esta parte de nuestro trabajo el indagar sobre los conocimientos personales de los estudiantes, sino sus posicionamientos como profesionales de la docencia. En este sentido la entrevista puso de manifiesto los siguientes aspectos:
  - Los errores de este estudiante no se modifican al revisar las tareas escolares erróneas; aunque queda por determinar cuál será la actitud de este estudiante si encuentra tareas realizadas por alumnos diferentes en las que unas contienen errores y otras son correctas; es este caso ¿tendería a que los alumnos respondiesen de acuerdo con las ideas erróneas del profesor?, o bien ¿se modificarían las ideas erróneas del profesor al interpretar respuestas correctas de sus alumnos?.
  - Este estudiante no tiene asociado un modelo con el sistema simbólico de la notación decimal, por lo que no sólo tiene dificultades de interpretación de este sistema simbólico sino que tampoco utiliza ningún modelo en sus actuaciones profesionales. Podemos suponer que este futuro maestro trata de reproducir en su actuación profesional los procesos instructivos que él mismo ha experimentado.
  - No han influido en este futuro profesor las sesiones de clase de la Primera Etapa; parece que sus conocimientos personales no se han modificado con el proceso instructivo. Es más, las permanentes referencias al trabajo con un modelo tampoco han influido en la modificación de un esquema de aprendizaje; este estudiante asocia sus conocimientos personales anteriores a la metodología con que los adquirió.
  - Las dificultades que encuentra este estudiante con la comprensión de los números periódicos le impiden organizar una secuencia de enseñanza para los escolares; parece que estos conocimientos forman un compartimento estanco y no se conectan con otros tópicos matemáticos.

### *VII.5.2.5. Cuestión de Investigación Profesional número 5.*

*a) Propósitos de la indagación*

a) Queremos explorar cómo evalúan los estudiantes una tarea escolar en la que hay errores en la formulación de un problema de división por parte de dos escolares.

b) Interesa averiguar la capacidad de los estudiantes para determinar el origen de dichos errores

c) Pretendemos indagar sobre las razones que esgrimen los estudiantes para elegir una de las tres explicaciones que se ofrecen.

d) Queremos indagar sobre las relaciones entre la actuación de cada estudiante y sus producciones en la primera etapa

*b) Trabajo propuesto*

| Actividad propuesta por el profesor |
|---|
| Invéntate un problema que se resuelva con la operación $6{,}1\overline{37}:6$<br>Después, calcula el resultado<br>Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta |

| Respuesta del niño A |
|---|
| Unos amigos se reparten las tortillas que llevaban para la excursión y a cada uno de ellos le tocan $6{,}1\overline{37}$ tortillas. Y justo cuando se van a comer sus tortillas llegan 6 amigos más con los que deciden compartir su comida. Ahora que están más amigos, ¿cuánta tortilla comerá cada uno? |
| Respuesta del niño B |
| Un corredor lleva una velocidad constante de $6{,}1\overline{37}$ para recorrer 6 kilómetros, ¿cuál es la velocidad en cada uno de los kilómetros? |

*c) Criterios de valoración de las unidades de análisis.*

Valoramos las unidades de análisis elaboradas para las Cuestiones de Investigación Profesional (CIP) que aquí se contemplan, establecidas en el apartado VII.5.1., de acuerdo con los siguientes criterios:

CIP.V.1.1. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar A

CIP.V.1.2. Argumentaciones sobre la adecuación o incorrección de la respuesta del escolar B

Para estas dos unidades de análisis consideramos las opciones:

1.- Interpretación correcta o bastante probable

2.- Interpretación dudosa o incompleta

3.- Interpretación errónea o inadecuada

CIP.V.2.1. Justificaciones sobre el tipo de explicación que se piensa ofrecer al escolar A

CIP.V.2.2. Justificaciones sobre el tipo de explicación que se piensa ofrecer al escolar B

Para estas dos unidades de análisis consideramos las opciones:

1.- Argumentos correctos en el modelo

2.- Argumentos correctos en otros modelos

3.- Argumentos erróneos, inadecuados o inexistentes

CIP.V.3.1. Argumentaciones sobre la actividad que se propone al escolar A

CIP.V.3.2. Argumentaciones sobre la actividad que se propone al escolar B

1.- Argumentos correctos en el modelo que utiliza el escolar

2.- Argumentos correctos en otros modelos.

3.- Argumentos erróneos o no se dan argumentos.

*d) Resultados obtenidos*

Los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes entrevistados se recoge en el siguiente cuadro, en el que las filas figura el número asignado a cada uno de los estudiantes entrevistados:

| Alumnos / Cuestión Investig. | **34** | **10** | **24** |
|---|---|---|---|
| CIP.V.1.1 | 1 | 3 | 3 |
| CIP.V.1.2 | 2 | 3 | 1 |
| CIP.V.2.1 | 1 | 3 | 3 |
| CIP.V.2.2 | 2 | 3 | 1 |
| CIP.V.3.1 | 3 | 3 | 1 |
| CIP.V.3.2 | 3 | 3 | 1 |

Tabla VII.5. Resultados de la Cuestión de Investigación Profesional Nº 5

*e) Análisis e interpretación*

Tarea 1: evaluar las respuestas de los escolares

**i) Sobre la respuesta del escolar A**

- El estudiante nº 34 acepta inicialmente la respuesta del escolar como correcta y la interpreta como reparto de un reparto:

  *A ver, lo del A la veo bien, porque el numerador que sería la fracción inicial la ve como un reparto, lo ve como un reparto de otro reparto. Entonces, yo lo veo bien*

  Posteriormente, al revisar la respuesta del escolar determina con claridad que dicha respuesta no hace referencia a un reparto de un reparto:

  *Está mal planteado el problema; si hubiese que uno de los amigos reparte su tortilla para 6 personas, incluyéndose él claro, pues entonces sí que está como un reparto de un reparto, pero ahora no; es que el no lo ve, él sí que lo ve como un reparto de un reparto, pero no está bien.*

- El alumno nº 10 interpreta que la respuesta es correcta, entendiendo que la idea de división es la de reparto:

  *Y dice que cuánta tortilla comerán cada uno, ve que de aquí va a salir una* *solución que es la porción que se comerá cada uno de tortilla; o sea que yo creo que sí que está bien, que es el resultado de un reparto*

Este estudiante no hace mención alguna a que la cantidad a repartir no sea entera sino que acepta que hay un reparto, posiblemente porque su no completa comprensión del modelo le lleve a fijarse exclusivamente en el sentido que da a la división el escolar, pero no tiene en cuenta que las condiciones del reparto exigen el uso de números enteros: *un reparto en el que participan unas personas y que se reparten en este caso tortillas*

- El estudiante nº 24 encuentra anomalías en la expresión de una cantidad de magnitud mediante un número periódico y que, suponemos, provienen de las ideas que este futuro maestro explicitó en el sentido de que los número periódicos son inexistentes, que más bien se aproximan por números decimales:

*En la primera el planteamiento del problema no está mal, pero no es una situación lógica el decir que a cada uno les tocaba 6,137 tortillas, eso no se dice; se puede decir 6 tortillas y 1/2, pero no 6,1 con 37*

Posteriormente, y con reticencias, admite que la tarea está bien resuelta por el escolar, entendiendo la división como reparto:

*Sí, el planteamiento es correcto porque si que implica la división de una parte; o sea, el tener esta tortilla y luego repartirla entre otras 6 personas. Si, porque te dice que cada uno tiene estos trozos de tortilla y que luego vienen 6 amigos y lo vuelven a repartir. O sea, no es una situación muy real, pero la operación se haría*

**ii) Sobre la respuesta del escolar B**

- El estudiante nº 34 acepta como correcta la respuesta de este escolar, aunque advierte diferencias con la interpretación del escolar A:

*El B, si son los 6 coma esto por kilómetro..... Lo plantea un poco raro. Lo entiende como como una división sin más, sí. El primero lo entiende como un reparto de un reparto y el segundo como una división.*

Este estudiante entiende que el significado de la división que ofrece el escolar tiene puntos oscuros; sin embargo, no entra a analizar el contexto del problema, no analiza las magnitudes que utiliza el escolar, no advierte, en suma, que los puntos oscuros del escolar provienen de utilizar la magnitud velocidad constante, que no da significado a la división.

- El estudiante nº 10 acepta la explicación del escolar y aun cuando inicialmente intenta darle el significado de reparto, después interpreta como correcta la respuesta pero con un significado cuotitivo:

*No, para él es, vamos a ver ... Un reparto que sería ...Una división en la que tiene una cantidad, esa cantidad se divide para un número y sabe ... ; o sea yo más bien lo vería como si fuera una recta y le dan que lo divida entre un número y entonces; o sea, un número de partes iguales, como una unidad y luego diferentes partes iguales, entonces al dividir toda esa unidad en el número de partes, lo que mide, por decirlo así, cada parte.*

- El estudiante nº 24 da inicialmente como correcta la respuesta, pero modifica su criterio al tratar de explicar el sentido que tiene la división:

*No. En la primera es idea de reparto; o sea, para él la idea de división es* *repartir un trozo de tortilla entre unas personas; mientras que en la otra es saber que si lleva este ritmo, esta velocidad, durante todos los kilómetros que hace, pues si hace 6 kilómetros en un kilómetro ¿cuánto ... Espera a ver ... No, esto estaría mal, porque si te dice que lleva una velocidad constante quiere decir que en todos los kilómetros lleva esta velocidad; entonces, luego el te pregunta que cuál es la velocidad en cada uno de los kilómetros: en cada uno de los kilómetros es esta*

Tarea 2: ofrecer explicaciones al escolar, si su respuesta contiene errores.

En esta tarea tampoco se ofrecen explicaciones para que el estudiante entrevistado seleccione la que considere más oportuna; simplemente se le pregunta por la intervención que haría.

**i) Sobre la respuesta del escolar A**

- El estudiante nº 34 cubre una primera etapa en la que identifica como correcta la respuesta de este escolar, pero en una segunda etapa necesita previamente el origen de la respuesta que ahora considera errónea:

  *Si, como reparto de reparto sí lo ve; sí, porque tiene el resultado de un reparto y ahora lo va a volver a repartir entre 6 más. Bueno, entre 6 más ... entre no se cuántos más; si porque ahora hay más amigos, si antes había 5 ahora hay 11 ... Si es un reparto de un reparto, pero no está bien planteado el problema*

  Y una vez que ha explicitado el error de este escolar considera oportuno hacer alguna observación a ese niño:

  *Que el que vuelve a repartir su tortilla es uno solo, una sola persona no todos los que están. Y la vuelve a repartir entre 6 persona.*
- El estudiante nº 10 no da ninguna explicación por cuanto entiende que la respuesta del escolar es correcta.
- Tampoco el estudiante nº 24 ofrece explicaciones ante una tarea que considera está bien resuelta.

**ii) Sobre la respuesta del escolar B**

- El estudiante nº 34 entiende que es correcta la respuesta de este escolar, aun cuando hay aspectos que no le satisfacen:

  *Este problema yo lo veo muy raro. Vale, yo entiendo su idea, yo entiendo que lleva una velocidad no se qué y que en 6 kilómetros; vale yo su idea la entiendo.*

  De nuevo la noción de este estudiante sobre la división como partición de una cantidad en partes iguales, prevalece sobre el análisis previo de la magnitud a que se refiere dicha cantidad. En estas condiciones, el estudiante entrevistado considera que la respuesta del escolar es correcta, pero advierte sobre la necesidad de instruir a dicho escolar sobre otros significados de la división, como es el reparto:

  *Si yo quiero explicar esto como un reparto y no simplemente como una división, sí. Le haría ver que si es un reparto las unidades tiene que ser un número entero, y entonces eso tendría que provenir de otro reparto.*
- El escolar nº 10 no menciona las explicaciones al escolar puesto que ha dado por correcta la interpretación que hace del cociente.
- El estudiante nº 24 considera que al escolar hay que hacerle una reflexión

sobre lo que ha contestado y, posteriormente, sugerirle la rectificación de la respuesta de dicho escolar

> *Pues que en la situación que ha planteado no sería correcto, porque si él dice que la velocidad constante es ésta, quiere decir que durante todos los kilómetros lleva la mima velocidad, o sea no cambia. Entonces, si tú quieres saber cuál es la velocidad en un kilómetro, durante un kilómetro, sabes que es 6 coma 1 con 37, porque la velocidad no te cambia durante todo el camino.*
>
> *Pues que un corredor ha llegado a la meta en un tiempo, en este tiempo, se supone que el ritmo que ha llevado es el mismo durante todo el trayecto, y queremos saber en cada kilómetro cuánto tiempo tardaba*

Tarea 3: diseñar actividades para seguir la secuencia instructiva.

**i) Sobre la respuesta del escolar A**

- El estudiante nº 34 no entró a diseñar actividades nuevas para el escolar por cuanto considera suficiente darle una explicación sobre su trabajo.
- El estudiante nº 10 quiere proponer una nueva actividad, un problema, a los escolares con la intención de que ambos interpreten la división con los dos significados que han aparecido:

> *Pero cada uno tiene que comprender que no es solamente un reparto, sino que también ..O sea, que cada uno entiende la división de una manera; pero sí, sí que saben lo que es la división. Otra visión de como se hace, no como se hace sino cómo interpretar de otra manera la división*

Sin embargo, ante la sugerencia del entrevistador, entiende que dichos escolares otorgan el mismo significado a la división y que, en consecuencia, no hay que proponerles ninguna tarea más:

*O sea, que son diferentes interpretaciones, pero que a la hora de la pregunta, por decirlo así, lo que entienden al final, es que es una parte de una unidad. Pero yo creo que los dos lo interpretan de la misma manera, que es lo mismo; porque aquí lo que dice es ¿cuánta tortilla comerá cada uno?, o sea lo ve como un todo dividido para 6; y éste también lo ve como un todo dividido para 6, y sabe que también , o sea es como si también dice ¿cuál es la velocidad en cada uno?, sabe que es una parte sólo. O sea, que yo creo que no habría que, que lo saben y no habría que ponerles más, simplemente, a lo mejor, explicarles que se pueden hacer otros problemas; pero es que no sé.*

- El estudiante nº 24 interpreta que los dos escolares analizados tiene situaciones diferentes: el escolar A tiene la idea de división como reparto, mientras que el alumno B ha necesitado una explicación para superar el error que había cometido. Este estudiante propone a ambos escolares la resolución de un nuevo problema, que enuncia en los términos siguientes:

> *Un hombre va a una gasolinera y llena su depósito entero (50 cavidad) y le cuesta 5500 ptas. ¿Cuánto vale cada cavidad por separado?*

El propio estudiante reconoció de inmediato que el enunciado no era muy ortodoxo, pero según dijo era debido a que no sabía como se decía; no se acordaba de la medida de capacidad.

La intencionalidad de esta propuesta está bien clara en opinión de este estudiante:

> *P: ¿Con qué intención se lo pones al alumno A?*
>
> *A: Para que esté en una situación diferente a la de repartir*

**ii) Sobre la respuesta del escolar B**

- El estudiante nº 34 considera suficiente hacerle reflexionar al escolar sobre el significado de la división como reparto igualitario; sin embargo, no diseña las actividades que propondría.
- El estudiante nº 10 no ofrece ninguna actividad por cuanto estima que este escolar entiende la idea de dividir
- El estudiante nº 24 propone un nuevo problema al estudiante B,

*Para ver si lo ha entendido*

*f) Reflexión sobre el trabajo de los estudiantes.*

- El alumno nº 34 ofrece al escolar A argumentos sustentados en el modelo en que actúa; no ha necesitado modificar el modelo, como hizo en las tareas 1 y 2, sino que sus buenos conocimientos personales (que ya puso de manifiesto en sus producciones anteriores), le permiten encontrar los razonamientos adecuados para hacer reflexionar al escolar sobre el origen de sus errores.

  En la interpretación de la respuesta del escolar B no encuentra errores, aun cuando manifiesta su extrañeza por la forma en que se expresa dicho escolar. Nos inclinamos a pensar que este futuro maestro acepta como adecuada una respuesta que esté acorde con unos conocimientos en los que la idea de cociente se sustenta en la acción de hacer agrupamientos iguales, pero que no contempla las características de las magnitudes sobre las que se actúa, ni la coherencia de las acciones que se realizan. Esto lo expresa el estudiante como una rareza del escolar, pero sin hacer un análisis semántico, sino que prioriza una idea primitiva de asociar operaciones y acciones. Este comportamiento resulta llamativo por cuanto en su actuación con el escolar A ha considerado un modelo de trabajo y no procede de igual forma con el otro escolar B; posiblemente esta actitud provenga de sus conocimientos personales sobre una idea anterior de división, en el caso del alumno B, mientras que en el caso del alumno A haya actuado de acuerdo con los conocimientos personales recientemente adquiridos; y que tal cambio de actitud venga provocado por unas respuestas de los escolares que le llevan al futuro maestro a poner en juego las diferentes ideas que conviven entre sus conocimientos personales.
- El estudiante nº 10 acepta inicialmente como correctas las respuestas de los dos escolares, aunque admite que otorgan significados diferentes a la división. Posteriormente admite que ambas ideas son iguales: partición de una unidad. De sus producciones previas deducimos que, posiblemente, su deficiente manejo del modelo le haya inducido a abandonar la noción de reparto y asociar dicha idea con la de partición del total en partes iguales.

  Se observa que este estudiante está más preocupado por atender a la acción de fraccionar que al análisis de las magnitudes con las que se trabaja y, en consecuencia, a situar las acciones en el mundo de las magnitudes. Seguramente esta actitud sea consecuencia de que sus conocimientos personales sobre la división no hayan surgido como consecuencia del trabajo

con magnitudes dentro de un modelo.
En sus decisiones como profesional no considera importante que los escolares realicen tareas similares a las ya realizadas con la finalidad de asentar los conocimientos; el hecho de que la tarea, en su opinión, esté bien realizada implica que los conocimientos de los escolares ya han sido adquiridos, que no son necesarias tareas de consolidación de los mismos. Este posicionamiento no es el que se correspondería con unas experiencias personales en las que la reiteración de tareas similares forma parte del proceso instructivo.

- El estudiante nº 24 muestra, en esta tarea, una actitud profesional de mayor seguridad al compararla con lo que hizo en tareas anteriores. Posiblemente unos conocimientos personales más sólidos en el tema le hayan permitido discernir cuál es la finalidad que tienen sus explicaciones y sus propuestas de nuevas actividades.

## VII.6. Análisis e interpretación.

En este apartado tenemos el propósito de comparar las actuaciones de los estudiantes entrevistados con la intención de establecer, si existen, conexiones entre las producciones previas de estos estudiantes y su actuación en la detección de errores en trabajos de escolares, el tratamiento de los mismos y el diseño de actividades para proseguir la secuencia didáctica. Por tanto, este estudio comparativo lo haremos desde la triple perspectiva:

* del análisis de las tareas de escolares,
* desde las explicaciones que ofrecen a los escolares, y
* desde las propuestas de actividades a los escolares.

<u>I.- Actuación de los futuros profesores ante la revisión de las tareas de los escolares</u>

Del análisis de las entrevistas realizadas obtenemos las siguientes conclusiones:

1.- En la detección de errores producidos por los escolares, el comportamiento de los estudiantes entrevistados presenta notables diferencias, como se pone de manifiesto en el siguiente gráfico, en el que se recogen los criterios de valoración de cada una de las unidades de análisis definidas al efecto

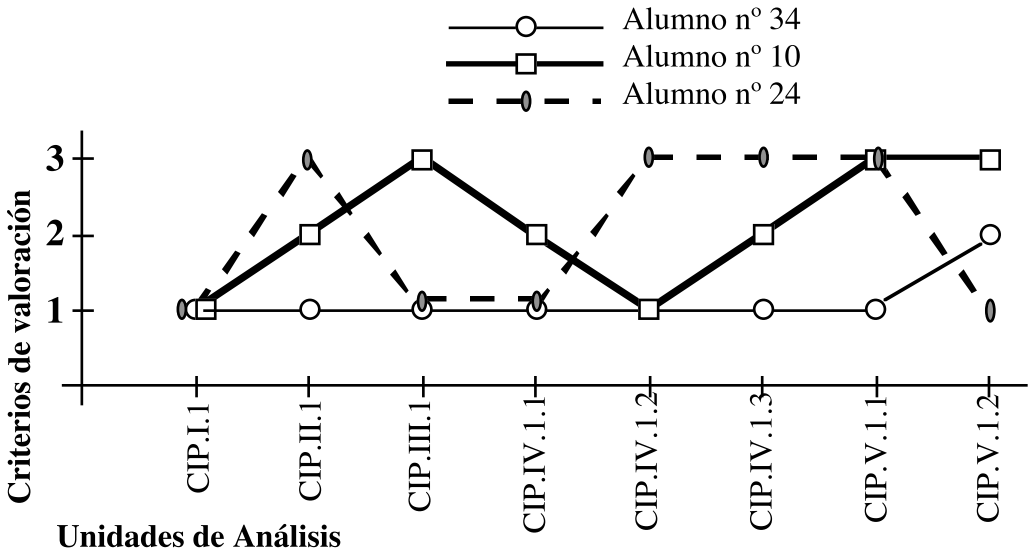



Gráfico VII.1. Actuación de los entrevistados en la revisión de tareas

Se observa que el estudiante nº 34 (que mostró una mayor comprensión del modelo), es el que mantiene un comportamiento más regular; mientras que el estudiante nº 24 (mostró una deficiente comprensión del modelo propuesto en la etapa primera), es el que ofrece más respuestas incorrectas.

2.- Con independencia de los conocimientos detectados en las producciones previas, todos los estudiantes tratan de revisar las tareas de los escolares en el modelo en que dichos escolares trabajan.

3.- Si los futuros maestros entienden los argumentos de los escolares, entonces detectan los errores que cometen, las causas que los originan y la importancia que tienen para la comprensión de los contenidos.

4.- Si las ideas matemáticas de los escolares se presentan con argumentos que los futuros maestros interpretan con dificultad, se detectan actitudes diferentes en la actuación de éstos:

- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo intenta interpretar la respuesta del escolar desde otro modelo.
- Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo intenta encontrar justificaciones dentro del mismo modelo que el escolar, pero sin tener seguridad en sus actuaciones.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo acepta los errores del escolar como resultados correctos.

5.- En la revisión de tareas en las que se requiere de los escolares el uso de un sistema simbólico de representación, los estudiantes para maestro muestran actitudes diferentes:

- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo certifica la bondad del resultado resolviendo previamente la tarea. Al cotejar sus producciones con las del escolar determina los errores que ha cometido y el origen de los mismos.
- Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión

del modelo acepta la respuesta del escolar como correcta, sin hacer más comprobaciones que la lectura de los trabajos del escolar.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo resuelve previamente la tarea; pero sus resultados no le confieren certificado de garantía: tiene que revisar la actuación del escolar puesto que sus métodos de trabajo difieren.

6.- Al revisar las tareas de los escolares sobre la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal, los futuros maestros aceptan la utilización del algoritmo de la división, pero en la interpretación de los argumentos justificativos de los escolares presentan comportamientos diferenciados:
- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo certifica la bondad del resultado si se trata de números decimales, pero tiene dificultades con los números periódicos; además entiende que si una acción es inviable no hay que simbolizarla como 0, tanto si se está en el modelo como si se utiliza la división de numerador entre denominador.
- Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo tiene dificultades para seguir los argumentos del escolar tanto con números decimales como con números periódicos; además detecta el error del escolar en la simbolización de 4/0, pero no encuentra su origen.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo no entiende los argumentos del escolar por cuanto no dispone de un modelo en que trabajar con las notaciones decimales; además comparte las posiciones erróneas del escolar en cuanto al significado de 4/0.

7.- Al revisar las tareas de los escolares sobre el significado que de la división tienen 2 niños, los futuros maestros tienen comportamientos diferenciados:
- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo encuentra errónea la respuesta del escolar A, mientras que admite como correcta la respuesta del escolar B.
- Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo entiende que el escolar A utiliza la división con el significado de reparto, mientras que el escolar B lo hace con sentido de división como agrupamiento; pero ambas respuestas son aceptadas como correctas.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo acepta como correcta la respuesta del escolar A, mientras que rechaza la respuesta del escolar B.

A la vista de estas consideraciones, podemos afirmar que la actuación profesional de los estudiantes para maestro condiciona la revisión de las tareas escolares; de modo que cuanto más débil es la comprensión del modelo por parte de estos estudiantes, más deficiente es la detección de los errores cometidos por los escolares.

II. Sobre las explicaciones que ofrecen a los escolares

1.- En el gráfico siguiente aparecen las valoraciones de los trabajos de los estudiantes entrevistados; en el gráfico se recogen los criterios de valoración de cada una de las ocho unidades de análisis definidas al efecto

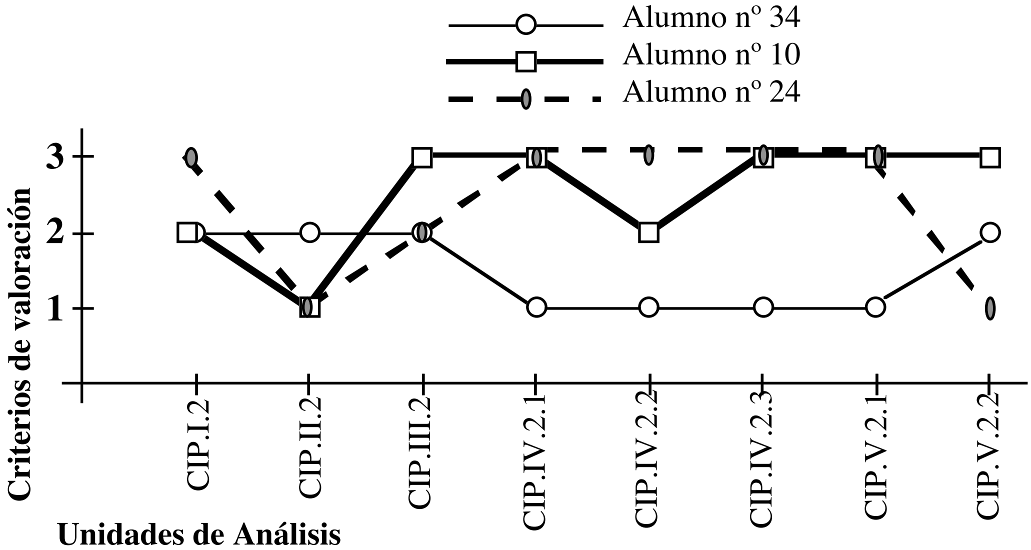



Gráfico VII.2. Actuación de los entrevistados al ofrecer explicaciones

El comportamiento más regular es el del estudiante nº 34 (mostró una adecuada comprensión del modelo propuesto en la etapa primera), mientras que los otros estudiantes no ofrecen argumentos o lo hacen de manera incorrecta.

2.- Con independencia de los conocimientos detectados en las producciones previas, todos los estudiantes tratan de ofrecer a los escolares explicaciones exhaustivas para erradicar el error detectado, explicaciones en las que todo el discurso corresponde al estudiante entrevistado; estos estudiantes no hacen sugerencias para que el propio escolar reflexione sobre los argumentos que ha expuesto.

3.- Entre las explicaciones que darían los estudiantes entrevistados a los escolares para corregir los errores de tipo conceptual de los estudiantes, quedan descartadas aquellas explicaciones que contienen únicamente la descripción de técnicas sin justificar. Esta actuación es independiente de las producciones previas de los estudiantes entrevistados,

4.- Ante la elección de explicaciones para los escolares, entre las tres opciones que ofrece el entrevistador, los estudiantes muestran actitudes distintas:
  - Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo elige la explicación más cercana al mundo de los objetos, aunque esos objetos no correspondan al modelo que utiliza el escolar.
  - Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo elige una explicación basada en objetos manipulables en otro modelo si él mismo entiende dicha explicación; pero si no entiende la explicación la rechaza y elige la que utiliza el modelo del escolar, aunque no le satisfaga.

- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo rechaza explicaciones basadas en la manipulación de objetos, porque él mismo no las sabe gestionar; la elección viene forzada a explicaciones que utilizan el modelo del escolar, aunque no las asuma plenamente.

5.- Al ofrecer explicaciones a los escolares para corregir los errores detectados en el empleo de un sistema de representación simbólico, los estudiantes para maestro muestran actitudes diferentes:
   - Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo el estudiante ofrece al escolar, de forma secuencial, las explicaciones que contienen la manipulación de los objetos y las que utilizan el lenguaje simbólico; para este estudiante el trabajo en el modelo irá paralelo a la simbolización de las acciones.
   - Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo ofrecerá al escolar las explicaciones que reflejen su propia experiencia como aprendiz: las manipulaciones en el modelo, la simbolización de las acciones y las pautas verbales que controlan el proceso de simbolización.

6.- Para explicar las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, los futuros profesores presentan comportamientos diferenciados:
   - Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo entonces utiliza las representaciones gráficas para mostrar la igualdad de cantidades de magnitud en el caso de números decimales; en el caso de números periódicos pone de manifiesto la dificultad de la tarea, tanto con recursos gráficos como con simbólicos.
   - Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo entonces no encuentra argumentos tanto en el caso de números decimales como en el de números periódicos.
   - Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo no ofrece ayuda al escolar debido a las deficiencias en sus conocimientos personales.

7.- Si los estudiantes para maestro detectan errores en la interpretación que hacen los escolares de expresiones simbólicas inexistentes, las explicaciones que ofrecen a los escolares son distintas:
   - Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo ofrece al escolar explicaciones sobre el origen de su error.
   - Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo, explica al escolar que su actuación es errónea, pero no incide en las causas que la provocan.

A la vista de estas indagaciones, podemos afirmar que la actuación profesional de los estudiantes para maestro cuando ofrecen explicaciones a los escolares con las que corregir resultados erróneos que han sido previamente detectados, vienen determinadas por sus producciones previas: en la selección de explicaciones propuestas cuanto más robusta es la comprensión del modelo más se opta por explicaciones que incidan en el origen del error; mientras que cuanto más débil es la comprensión del modelo más se actúa en función de los conocimientos personales de los futuros profesores, de manera que se selecciona por eliminación de aquellas explicaciones que no son entendidas. Y de modo similar en la construcción de explicaciones para los escolares inciden más en el origen del error cuanto mayor es la comprensión; mientras que una débil comprensión conlleva a ofrecer explicaciones que se limitan a mostrar los resultados correctos.

III. Sobre las actividades que proponen a los escolares

En el estudio de las entrevistas realizadas ya señalamos que los futuros maestros no tuvieron muchas oportunidades de diseñar actividades para los escolares, puesto que el interés de su trabajo se centró en la detección y corrección de errores.

1.- No obstante, y con las limitación propia de una gran escasez de datos, podemos obtener algunos resultados, que se reflejan en el siguiente gráfico, donde se recogen los criterios de valoración de cada una de las seis unidades de análisis definidas al efecto:

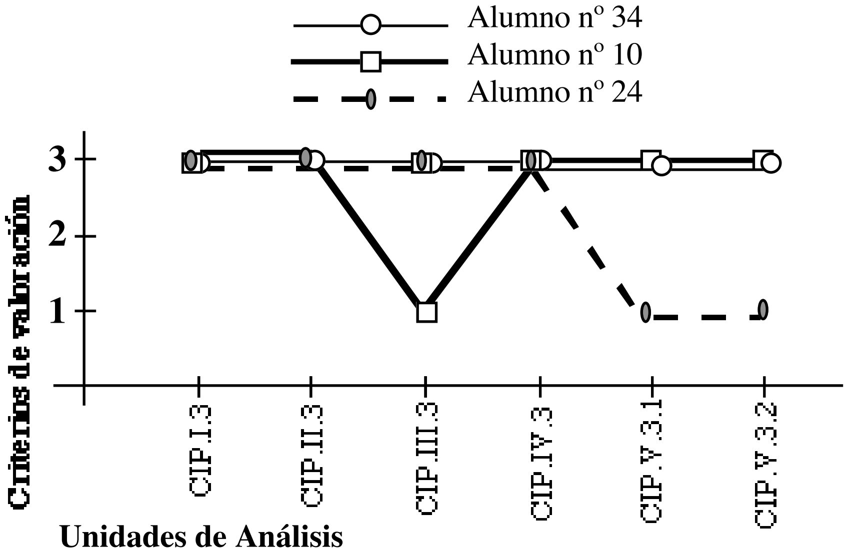



Gráfico VII.3. Actuación de los entrevistados al proponer nuevas actividades.

Se observa que los estudiantes entrevistados solamente en tres trabajos han ofrecido alguna sugerencia sobre las actividades que propondrían a los escolares para proseguir la secuencia instructiva.

2.- Con independencia de los conocimientos detectados en las producciones previas, todos los estudiantes ofrecen a los escolares una secuencia de enseñanza similar a la que ellos recuerdan como aprendices; si no recuerdan esta secuencia quedan bloqueados para proponer nuevas actividades a los escolares.

3.- Los futuros maestros no valoran la necesidad de proponer actividades de refuerzo o de comprobación de los conocimientos personales de los escolares; el realizar de forma correcta una tarea se considera suficiente para avanzar a otros nuevos conocimientos.

Podemos señalar que los futuros maestros tiene pocos recursos para elaborar propuestas de trabajo para los escolares; su propia experiencia como aprendices es el único referente que utilizan para la secuenciación del aprendizaje.

## VII.7. Conclusiones

A lo largo de esta Segunda Etapa se ha puesto de manifiesto que la actuación de los futuros maestros en la realización de tareas escolares no es uniforme, que las producciones previas de los estudiantes entrevistados producen comportamientos diferenciados en las tareas. Así observamos que:

- Un alto grado de comprensión del modelo propuesto por parte de los futuros maestros, facilita el diagnóstico sobre la tipología y origen de los errores cometidos por los escolares.
- Una débil comprensión del modelo propuesto se proyecta en la revisión de los trabajos de los escolares posibilitando que algunos errores se acepten como resultados correctos, o dificultando que se determine el origen de los errores detectados.
- El método seguido en la revisión de técnicas utilizadas por escolares es el de resolver previamente las tareas y contrastarlas con las respuestas del escolar, en el caso de que se comprenda bien el modelo; mientras que en el caso de una débil comprensión se opta por una lectura directa de las producciones de los escolares.
- Con independencia del grado de comprensión del modelo, todos los estudiantes entrevistados entienden que la superación de los errores se alcanza con las explicaciones del profesor; ninguno de ellos intenta que los escolares superen los errores mediante la reflexión personal guiada sobre la tarea propuesta, o mediante la realización de otras tareas que evidencien sus posiciones erróneas.
- Ante la posibilidad de elegir entre tres explicaciones para que el escolar supere sus errores, un alto grado de comprensión del modelo lleva a elegir aquella que se sustenta en el mundo de los objetos; mientras que una débil comprensión del modelo lleva a la elección de aquella que el futuro maestro entiende mejor, sin que en su elección se considere la utilidad que tenga para el escolar.
- Independientemente del grado de comprensión sobre el modelo, si en dicho modelo no se encuentran recursos suficientes los futuros maestros ofrecen a los escolares explicaciones sustentadas en conocimientos previos, aunque tales explicaciones estén descontextualizadas del discurso del escolar.
- La revisión de tareas realizadas por escolares no exige la superación de las deficiencias conceptuales personales que tienen los futuros maestros.
- Sea cual sea el grado de compresión del modelo, los futuros maestros tienden a reproducir en los escolares la misma secuencia instructiva sobre la que se realizó su aprendizaje.

# CAPITULO VIII

# REFLEXION FINAL Y CONCLUSIONES

## VIII.1. Introducción

Esta memoria de investigación responde, desde sus inicios, a una preocupación del investigador por conjugar la dimensión teórica y la dimensión práctica en el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática. Dentro de dicha área nuestro trabajo se inserta en la linea de estudio denominada Pensamiento Numérico (apartado I.2), y se concreta en el campo conceptual de los Números Racionales.

Sobre este campo conceptual hay abundancia de estudios, pero el tópico objeto de nuestro trabajo presenta diferencias significativas con respecto a ellos, por cuanto en las investigaciones precedentes:

a) no se han diseñado modelos adecuados para presentar y dar significado a los dos sistemas simbólicos de representación que se contemplan en nuestra investigación, así como para justificar sus correspondientes reglas sintácticas;

b) no se han estudiado las relaciones entre los dos sistemas simbólicos de representación considerados en nuestra investigación;

c) no se ha planificado la instrucción sobre esos dos sistemas simbólicos de representación, ni se han contemplado secuencias de enseñanza con estudiantes para maestros;

e) no se ha evaluado la eficacia de un programas de enseñanza para profesores de primaria basado en estos sistemas simbólicos;

f) no se ha abordado la discusión de las concepciones de partida de los estudiantes para profesor;

g) no han tratado la utilidad de una aproximación al tema mediante el planteamiento de conflictos cognitivos y situaciones didácticas que permitan la evolución de dichas concepciones,

h) no se han indagado las relaciones entre los trabajos previos de los estudiantes para profesor y su práctica profesional.

El primer objetivo que enunciamos en nuestra investigación fue: *Experimentar con estudiantes de la Diplomatura de Maestro de Primaria una propuesta curricular innovadora que contemple el análisis sintáctico y semántico de dos sistemas simbólicos de representación para los números racionales positivos*" (apartado 1.9). Para ello hemos seguido el proceso constructivo que desarrollan los estudiantes para maestros en torno al concepto de Número Racional positivo en la situación de enseñanza en que dicho proceso tiene lugar. Nuestro interés no se ha centrado en explicar los procesos cognitivos subyacentes a la adquisición de dichos conceptos, sino que hemos priorizado el contexto en que se desarrolla el proceso instructivo atendiendo a la riqueza y la multiplicidad de variables que lo conforman.

El segundo objetivo enunciado era: "*Analizar los modos en que un nuevo dominio de los conocimientos sobre Números Racionales afecta a los futuros profesores en las tareas de planificación del proceso de enseñanza para escolares del sistema educativo y sobre el tópico mencionado*" (apartado 1.9). En este sentido hemos indagado sobre las relaciones entre las producciones previas de los futuros maestros y su práctica profesional con escolares, por lo que nuestro interés se ha centrado en establecer conexiones entre la comprensión de los estudiantes para maestro y sus actuaciones en la revisión de tareas de escolares y en la propuesta de nuevas actividades.

A cada uno de estos objetivos hemos dedicado una de las etapas de nuestra investigación. Las consideraciones mencionadas nos han llevado a adoptar un modelo de Investigación-Acción para el desarrollo de la Primera Etapa de nuestro trabajo, en la que el Investigador asume la función de profesor experto en contenido y en didáctica de las matemáticas, y cuyo antecedente encontramos en Castro (1994) y Romero (1995); en esta etapa hemos explorado vías para incrementar la compresión de los Números Racionales positivos entre estudiantes para maestros.

En la Segunda Etapa del estudio hemos trabajado con la técnica de la entrevista para explicitar la competencia profesional adquirida por los profesores en formación; en este caso el investigador asume el papel de entrevistador. En esta segunda etapa indagamos sobre la relación entre los resultados de las tareas previas de los futuros maestros y la realización de trabajos propios de docentes.

En la Primera Etapa realizamos un análisis teórico del problema general apoyándonos en dos componentes del campo conceptual de los Números Racionales: la estructura de este conjunto numérico y las funciones o competencias cognitivas asociadas a dicho conjunto numérico. Para abordar los aspectos estructurales hicimos un estudio sobre la forma en que algunas culturas, con sistemas de numeración diferenciados, resuelven la tarea de representar cantidades de magnitud no enteras; destacando los obstáculos y rupturas conceptuales, y enfatizando los distintos significados que abarca, así como los diferentes sistemas de representación utilizados. Para realizar el estudio cognitivo partimos de la noción de comprensión de Hiebert y Carpenter (1992), matizada por las tareas de conversión destacadas por Duval (1993). A continuación nos centramos en la construcción de dos sistemas simbólicos de representación asociados a un modelo bien definido sobre el que se realizan acciones de reparto igualitario con dos técnicas diferenciadas; en estos sistemas simbólicos se abordaron aspectos referidos a la sintaxis y a la semántica, así como las relaciones y operaciones con expresiones simbólicas; además, se establecieron y estudiaron las relaciones entre estos dos sistemas y las notaciones fraccionaria y decimal ya conocidas por los estudiantes.

En la Segunda Etapa abordamos el estudio de las relaciones que establecen estos maestros en formación entre sus producciones previas y las tareas relacionadas con su futura profesión de educadores matemáticos; en ella tienen que revisar tareas de escolares y actuar de acuerdo con las observaciones realizadas.

A partir de estos análisis previos fue posible delimitar y enunciar los Objetivos Específicos de la investigación y enunciar las Hipótesis que se quieren contrastar con nuestro estudio.

## VIII.2. Elementos básicos de la investigación

Los supuestos en los que se sustenta la investigación que se presenta en esta memoria quedaron enunciados en el Capítulo I en los términos que se reseñan a continuación:

1.- Los trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión de los números racionales.

2.- Al establecer conexiones más fuertes y amplias entre los dos sistemas simbólicos de representación habituales en la enseñanza obligatoria, notación fraccionaria y notación decimal, se incrementará la comprensión de los futuros maestros del conjunto de los Números Racionales.

3.- Se precisa de un medio físico y natural como escenario idóneo para la formación de conceptos y como área de aplicación de los mismos.

4.- Para que los estudiantes incrementen sus conocimientos es necesario que los esfuerzos se centren en la resolución de situaciones problemáticas que tengan sentido para dichos estudiantes y que sean generadoras de conflictos que favorezcan el sentido del número y no que favorezcan habilidades rutinarias y reglas para su aplicación.

5.- Para que los estudiantes reflexionen sobre la adquisición de sus conocimientos, es necesario fomentar un aprendizaje intencionado, en el que la construcción del conocimiento sea un proceso abierto y que los estudiantes tomen responsabilidades sobre su propio aprendizaje.

6.- La preparación profesional de los futuros maestros demanda que éstos reflexionen sobre el aprendizaje y que se indague sobre el modo en que estos profesores en formación proyectan sus conocimientos personales en procesos instructivos con escolares.

A partir de estos supuestos, los dos Objetivos Generales de nuestra investigación quedaron desglosados en objetivos específicos:

**1. Explorar dificultades y potencialidades que presenta el trabajo en los Números Racionales positivos para estudiantes de Maestros, en la especialidad de Educación Primaria, utilizando una propuesta didáctica caracterizada por:**

**1.1. Contemplar los objetivos parciales ya señalados en el Capítulo I: caracterizar un modelo para el aprendizaje; priorizar la fracción como cociente de números naturales; construir los sistemas de representación polinómicos unitario y decimal; y explicitar las características sintácticas y semánticas de estos dos sistemas.**

**1.2. Reelaborar los conocimientos personales de los estudiantes sobre las relaciones y sobre las operaciones entre números racionales positivos, redefiniendo los conceptos a partir de los dos sistemas simbólicos de representación construidos.**

**1.3. Potenciar las conexiones de estos dos sistemas de representación con las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, poniendo de manifiesto que las fracciones admiten una representación polinómica similar a la que subyace en nuestro sistema de numeración.**

**1.4. Emplear una metodología que prioriza el trabajo personal de los estudiantes y que potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.**

**2.- Establecer relaciones entre los conocimientos personales de los futuros profesores sobre la propuesta didáctica y el desempeño de determinadas tareas como profesionales, a través de:**

**2.1. El cumplimiento de los objetivos parciales marcados en el capítulo I: detección y valoración de los errores producidos por los escolares; explicaciones que ofrecen a dichos escolares; y elaboración de tareas para el aprendizaje.**

**2.2. El uso de los modelos sobre los que construir el conocimiento matemático de los escolares.**

**2.3. El tratamiento de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación utilizados por los escolares.**

De este modo, quedaron explicitados en el Capítulo III, apartado III.5, los subobjetivos específicos que concretan cada uno de los dos objetivos que se persiguen en nuestra investigación. Con la explicitación de estos Objetivos enunciamos, en el mismo apartado III.5, las Hipótesis de nuestra investigación en los siguientes términos:

**Sostenemos que:**

**Uno: Es viable una propuesta con las condiciones enunciadas que nos permita profundizar en el conocimiento del conjunto de los Números Racionales con un grupo de estudiantes de la Diplomatura de Maestro, en la especialidad de Educación Primaria. Además, el desarrollo en el aula de la mencionada propuesta permitirá recoger información relevante de la comprensión de estos estudiantes sobre el conjunto de los Números Racionales**

**Dos: Existen relaciones entre los conocimientos personales sobre los Números Racionales de los estudiantes para maestros y el conocimiento personal profesional de esos mismos estudiantes, que se expresan en las decisiones y orientaciones que adoptan ante determinadas tareas escolares.**

## VIII.3. Consecución de los objetivos

De acuerdo con el diseño general de la investigación, que fue presentado en el Capítulo IV, se establecen dos etapas de desarrollo que se corresponden con los dos objetivos generales de nuestro trabajo:

- En la Primera Etapa se define un esquema de Investigación-Acción que permite la puesta en práctica y el control de la propuesta didáctica sobre el tópico de los Números Racionales positivos; se trata de estudiar la consecución del objetivo general número 1.
- En la Segunda Etapa nos interesamos por indagar en las relaciones entre las producciones previas de los futuros maestros y su práctica profesional con escolares; se trata de estudiar la consecución del objetivo general número 2.

La **PRIMERA ETAPA** se estructura en torno a las cuatro fases características de la metodología de Investigación-Acción: planificación, acción, observación y reflexión. Una vez completado el recorrido por estas cuatro fases hacemos un estudio de la concreción y del grado de consecución de los objetivos específicos que concretan el objetivo general número 1.

- La Fase de Planificación culmina con el diseño de una propuesta didáctica, que se encuentra completamente desarrollada según el modelo curricular en el Capítulo V.

  Dicha propuesta se articula en torno a los resultados de los Capítulos II y III sobre la delimitación de un modelo y la construcción de dos sistemas simbólicos de representación de Números Racionales positivos, que permiten la consecución de los **objetivos específicos 1.1 y 1.2**, tal y como queda reflejado en el cuadro siguiente en el que se detalla la localización de cada uno de los objetivos parciales contemplados en los correspondientes apartados de la presente memoria de investigación:

| Objetivos parciales | Localiza. |
|---|---|
| **Objetivo 1.1** | |
| Caracterización de un modelo | II.9 |
| Construcción sistema polinómico unitario | III.1 |
| Características sintácticas y semánticas | III.1.1 |
| Construcción sistema polinómico decimal | III.2 |
| Características sintácticas y semánticas | III.2.1 |
| Significado de la fracción como cociente | III.1.10 |
| **Objetivo 1.2** | |
| Relaciones de orden entre expresiones poli. unitarias | III.1.7 |
| Densidad respecto del orden entre exp. pol. unitarias | III.1.8 |
| Operaciones entre expresiones polinómicas unitarias | III.1.9 |
| Relaciones de orden entre expresiones poli. decimales | III.2.2 |
| Densidad respecto del orden entre exp. pol. decimales | III.2,2 |
| Operaciones entre expresiones polinómicas decimales | III.2.6 |

Cuadro VIII.1. Localización de los objetivos específicos 1.1 y 1.2

• En la Fase de Acción se implementa la propuesta didáctica, lo que permite la consecución del **objetivo específico 1.3**, cuyos objetivos parciales quedan localizados del siguiente modo:

- en el apartado V.6.1 del Capítulo V se recoge una análisis sobre el grado de aceptación por parte de los estudiantes sobre el primer foco de investigación; sobre la estructura polinómica subyacente a las fracciones y puesta de manifiesto al considerarlas con significado de cociente.
- en el apartado V.6.2 del mismo capítulo se analiza la comprensión mostrada por los estudiantes en torno al segundo foco de investigación; en torno a las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los Números Racionales positivos. Dichas conexiones se establecen al utilizar un mismo modelo sobre el que construir el sistema de representación polinómico decimal cuya estructura polinómica es similar a la del sistema de numeración decimal, y mostrar que la notación decimal surge como sistema simbólico que economiza la escritura de las expresiones polinómicas decimales.

• El desarrollo de las fases de Observación y Reflexión se recoge en el Capítulo VI de esta memoria, y en el que se recoge la consecución del **objetivo específico 1.4**, tal y como se detalla en el apartado VI.7. En efecto, la confirmación sobre la Hipótesis Uno sobre la viabilidad de la propuesta didáctica ya mencionada, pone de manifiesto que la metodología basada en la priorización del trabajo personal y en la consideración del aula como espacio natural para la construcción del conocimiento, se ha seguido a lo largo de todo el proceso de implementación de la misma.

En la **SEGUNDA ETAPA** de la investigación nuestros propósitos se centraron en establecer relaciones entre las producciones previas de los estudiantes para maestros y sus actuaciones como profesionales de la educación matemática, es decir, en el logro del objetivo general 2. Para ello fue necesario seleccionar a 3 estudiantes de acuerdo con dos criterios: el índice de asistencia a las sesiones de clase y el nivel de comprensión del modelo de trabajo. La técnica de investigación utilizada fue la entrevista; todo el proceso de indagación seguido viene desarrollado en el capítulo VII.

De la realización de las entrevistas, de la recogida de datos y su posterior análisis e interpretación se deriva la consecución de los objetivos específicos señalados para el objetivo general 2; el siguiente cuadro recoge la localización de cada uno de los objetivos parciales

| | |
|---|---|
| **Objetivo 2.1:** detección y valoración de los errores de los escolares, explicaciones ofrecidas y elaboración de tareas para el aprendizaje | VII.4 |
| **Objetivo 2.2:** utilización de modelos para la construcción del conocimiento matemático de los escolares | VII.5.2 |
| **Objetivo 2.3:** tratamiento de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación | VII.6 |

Cuadro VIII.2. Localización de los objetivos específicos 2.1, 2.2 y 2.3

## VIII.4. Conclusiones de la Primera Etapa de la Investigación

La propuesta didáctica que se contempla en la Primera Etapa de esta investigación fue diseñada para que su implementación fuera viable con un grupo natural de estudiantes de la asignatura *El currículum de Matemáticas en Educación Primaria*, asignatura que tiene carácter de troncal para los alumnos de la Diplomatura de Maestro en la especialidad de Educación Primaria en la Escuela de Profesorado de la Universidad de Zaragoza. Esta propuesta se acomoda al horario de 2 sesiones semanales de 2 horas de duración cada una; y su temporalización inicialmente prevista era de 13 sesiones, que finalmente se alargó a 20 como resultado de distintos hechos: introducir sesiones de debate no previstas, incrementar el tiempo inicialmente señalado para la revisión de tareas y atención a acontecimientos imprevistos.

La propuesta didáctica que se implementa contempla unas estrategias metódicas basadas en la reflexión sobre las respuestas que ofrecen los futuros maestros a las tareas que se realizan en las sesiones de clase; por tanto, consideramos que la construcción del conocimiento de los estudiantes se realiza fundamentalmente en las clases presenciales. Pero hemos constatado que solamente la mitad de los 56 estudiantes que forman el grupo han asistido por lo menos al 75% de las sesiones; mientras que la cuarta parte de los estudiantes han realizado menos de 15 de las 37 tareas propuestas.

Hay que destacar la buena disposición de los estudiantes a realizar las tareas propuestas, aun cuando esa disposición no se mantuvo al mismo nivel ante los requerimientos del profesor para que realizasen intervenciones públicas en defensa de algunos de los resultados obtenidos. Ello motivó que, de acuerdo con el director de esta tesis, se realizasen tres sesiones de debate en torno a aspectos conceptuales que presentaban dificultades de comprensión por parte de algunos estudiantes; en estas sesiones, como se detecta a través de las unidades de interacción didáctica, los estudiantes mostraron una gran madurez en la realización de actividades de tipo dialéctico, pues fueron mayoritarias las actuaciones estudiantiles en las que se produce la valoración de propuestas de compañeros, o la formulación de propuestas propias.

Con los matices anteriores sostenemos que la primera hipótesis de la investigación sobre viabilidad de la Propuesta Didáctica tiene respuesta afirmativa. La implementación de la propuesta para incrementar las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los Números Racionales positivos de los estudiantes para maestros presenta unas potencialidades y dificultades, que reseñamos seguidamente.

### VIII.4.1. Potencialidades más importantes detectadas.

<u>1.- Sobre la comprensión de los estudiantes sobre la utilidad de un modelo.</u>

A lo largo de la implementación los futuros profesores van admitiendo el modelo como herramienta para representar y validar las relaciones simbólicas. Este proceso de aceptación es paulatino puesto que los estudiantes prefieren el trabajo con notaciones simbólicas en las que el número aparece como ente abstracto desligado de la medida de magnitudes. Así se pone de manifiesto ante expresiones de reparto en la que alguno de los componentes es nulo, puesto que para algunos estudiantes el resultado se debe expresar con el número 0, o bien con expresiones como infinito que provienen de conocimientos personales previos sobre límites de sucesiones o de funciones. El modelo también se muestra útil para facilitar la reflexión de los estudiantes en torno a las acciones que se realizan y al uso de los números para representar cantidades de magnitud, y en este sentido algunos estudiantes apreciaron que expresiones de la forma a:0 no tienen sentido por cuanto no se puede realizar la acción de reparto y, en consecuencia, no hay que dar el valor 0 por cuanto si no hay acción no se tiene resultado de la misma.

En el modelo la equivalencia de repartos adquiere significado como igualdad de cantidades de magnitud de los participantes en dos o más repartos, lo que queda caracterizado porque uno de los repartos sea una reiteración de otro reparto; de este modo se justifica la equivalencia de las expresiones a:b y na:nb sin más argumentos que la evidencia de la lógica del razonamiento sobre el modelo. Sin embargo, hay estudiantes que identifican equivalencia y reparto igualitario cuando no están habituados al trabajo con el modelo.

El modelo se ha mostrado también eficaz para justificar las relaciones de orden entre repartos, puesto que surgen como evidencias las comparaciones entre repartos que tengan igual número de unidades a repartir, o que tengan igual número de participantes. Por tanto, los estudiantes constatan que el modelo es el medio con el que construir las relaciones simbólicas que caracterizan las relaciones de orden, y que dichas relaciones se pueden reconstruir en el momento en que las precisen; además, desde dicho modelo resulta muy sencillo el trabajo de buscar repartos mayores o menores que uno dado.

También resultó eficaz el modelo para presentar la noción de densidad respecto del orden, aun cuando en sus producciones los estudiantes para maestro recurran a la simbolización de los repartos intermedios por medio de sistemas de representación más familiares, como son la notación fraccionaria o la notación decimal. Sin embargo, a través de la desigualdad a:b < (a+c):(b+d) < c: d, los estudiantes comprenden más fácilmente la existencia de infinitos repartos entre otros dos dados, puesto que la mencionada desigualdad es fácilmente justificable en el modelo y permite crear repartos intermedios con suma facilidad.

Aun cuando los estudiantes tuvieron dificultades iniciales para dar significado a las operaciones entre repartos, posiblemente derivadas de la no realización de tareas de este tipo, el modelo se mostró como herramienta eficaz para dar significado a algunas operaciones; igualmente mostró la imposibilidad de que otras operaciones alcanzasen significado a partir de acciones sobre el modelo, aun cuando se pudiese simbolizar el resultado de tales operaciones.

A la vista de todas estas reflexiones cabe indicar que el modelo tiene una potencialidad importante para introducir y revisar significados sobre relaciones y operaciones; sin embargo, hay que hacer notar que la implementación de la propuesta didáctica puso de manifiesto que los futuros profesores necesitan adaptarse al proceso instructivo propuesto, puesto que su dilatada experiencia como estudiantes de matemáticas les impulsa a priorizar las manipulaciones simbólicas sobre los significados; y en este sentido hemos constatado la necesidad de explicitar el papel que juega el uso de modelos en la construcción de los conocimientos matemáticos sobre los números racionales.

2.- Sobre la representación polinómica unitaria

La cuantificación del reparto igualitario realizado por fases y aplicando el criterio de la mayor parte sirvió para que los estudiantes advirtiesen cómo los sistemas de representación surgen de la necesidad de simbolizar las acciones realizadas en el modelo; además, esta actividad evidenció la importancia del cumplimiento de las exigencias sintácticas y semánticas de un sistema de representación creado para facilitar la comunicación de ideas matemáticas. Consideramos esencial que esta forma de trabajo sea conocida por los estudiantes para maestro en tanto que sirve para que, en sus tareas profesionales, atiendan a la construcción del conocimiento matemático de los números racionales desde la definición de un modelo mediante el cual se visualizan las relaciones simbólicas.

La obtención de la expresión polinómica unitaria a partir de las unidades a repartir y los individuos intervinientes es un proceso complejo por cuanto hay varios aspectos a controlar (tamaño de las partes que se hacen, número partes que se entregan a los participantes, número de partes que quedan por repartir y tamaño de las mismas, condiciones de finalización del reparto, ..), y una diversidad de notaciones y signos (fracciones, signos de suma, paréntesis, corchetes, ...). Para los estudiantes es un trabajo basado en una técnica y, por tanto, resulta cercano a sus producciones matemáticas anteriores, a pesar de que se necesite un tiempo para consolidar esta técnica. El trabajo resulta especialmente interesante para conectar la comprensión de las ideas matemáticas con las manipulaciones de los objetos del modelo, y es a través de dichas conexiones cómo los estudiantes perciben los números racionales asociados a la medida de cantidades de magnitud, medida que ha de expresarse con respecto a una unidad y, por tanto, hay que referir las fracciones a la unidad de medida. Esta concreción es un hecho relevante, por cuanto detectamos que los futuros maestros nombraban las fracciones como entes abstractos, sin que les preocupase la unidad a la que se refieren.

Las características de unicidad y finitud son aceptadas por los estudiantes puesto que son justificables en términos de acciones sobre los objetos; sin embargo, encuentran grandes dificultades al hacer tal justificación a través de las manipulaciones simbólicas puesto que ello exige la utilización de expresiones algebraicas que caractericen el criterio de la mayor parte, además de obtener conclusiones mediante el trabajo con desigualdades algebraicas.

3.- Sobre las relaciones y operaciones entre expresiones polinómicas unitarias.

La equivalencia de repartos se convierte en la identidad de sus expresiones polinómicas unitarias, lo cual permite establecer la unicidad del resultado de repartos equivalentes mediante la identificación de fracciones unitarias.

El criterio de la mayor parte se muestra como herramienta eficaz para ordenar expresiones unitarias; de este modo, el sistema simbólico solamente precisa de comparaciones entre fracciones unitarias. De nuevo es el trabajo en el modelo el que permite ordenar expresiones, buscar expresiones mayores o menores que una dada o intercalar expresiones entre dos dadas; y todos los resultados son fácilmente justificables por medio de razonamientos lógicos sustentados por las acciones realizadas.

En cuanto a la suma de expresiones polinómicas unitarias el modelo permite dar el significado de suma de cantidades de magnitud, cantidades que pertenecen a un mismo individuo que participa en dos repartos o bien a dos individuos que participan en un mismo reparto. Ahora bien, al pretender cuantificar la cantidad de magnitud resultante el futuro maestro se encuentra con las limitaciones que impone la sintaxis del sistema y la inexistencia de procesos algorítmicos que permitan pasar de los datos al resultado; de este modo, el estudiante se enfrenta a situaciones novedosas en tanto en cuanto una operación que tiene un significado preciso no puede efectuarse, situación que permite a estos estudiantes reflexionar acerca de sus propias ideas sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

El modelo se muestra adecuado para dar significado a otras operaciones entre expresiones polinómicas unitarias, como son la resta, el producto por un número natural, el cociente entre un número natural y el producto por una fracción.

4.- Sobre las relaciones entre la representación polinómica unitaria y la notación fraccionaria.

La representación polinómica unitaria se concibe como fracción en tanto en cuanto es el resultado operatorio de una suma de fracciones unitarias. Sin embargo, no se produce la conexión de significados en sentido inverso, de modo que a la fracción no se le concede significado de reparto igualitario, puesto que las ideas personales sobre la fracción como relación parte-todo obstaculizan la interpretación como reparto. Pensamos que la aceptación de la fracción con el significado de reparto necesita un periodo de tiempo más largo, para que los propios estudiantes puedan reacomodar los nuevos y viejos conocimientos.

El modelo se mostró útil para dotar de significado a las expresiones simbólicas que contienen fracciones si los estudiantes interpretan dichas fracciones con significado de reparto, aun cuando algunos estudiantes mantienen las dificultades que ya se detectaron sobre la interpretación y manipulación de expresiones algebraicas. De hecho, estos estudiantes actúan de forma diferente dependiendo de que el trabajo se haga con expresiones literales o con expresiones numéricas: interpretan el símbolo de fracción como reparto si la fracción contiene expresiones literales; pero si en la misma aparecen expresiones numéricas los alumnos interpretan la fracción con significados diferentes, fundamentalmente como relación parte-todo.

5.- Sobre la representación polinómica decimal

Al introducir variaciones en la forma de realizar las acciones sobre el modelo, los estudiantes han podido constatar que estas variaciones alteran también la composición de la cantidad resultante en el reparto, aunque no varía dicha cantidad. Por tanto, una variación en las acciones se traduce en la aparición de un sistema de representación diferente.

Cada sistema de representación demanda de unas relaciones sintácticas y semánticas propias, que en algunos aspectos pueden coincidir con otros sistemas (como ocurre con la unicidad en el caso de las expresiones polinómicas unitaria y decimal), pero que también presenta aspectos diferenciados; en este sentido como característica diferenciadora de los sistemas polinómicos unitario y decimal cabe señalar la finitud o infinitud del proceso de reparto.

En el trabajo con este sistema de representación los estudiantes pusieron de manifiesto que el modelo no necesita ser manipulado en todos los casos; la familiaridad con el mismo permite que se eliminen las acciones físicas sobre los objetos, y se pueda actuar desde expresiones mentales. De hecho, los estudiantes no recurren a representaciones gráficas de las acciones sino que trabajan exclusivamente con notaciones simbólicas, aun cuando son capaces de verbalizar las manipulaciones de objetos que subyacen en las notaciones simbólicas.

6.- Sobre el significado de la notación decimal

Aquellos estudiantes que han conectado la notación decimal con la expresión polinómica decimal han sido capaces de trasladar los resultados ya obtenidos respecto del los números periódicos y de los números decimales. Sin embargo, hay otros estudiantes que, al aparecer la notación decimal, prefieren trabajar con entes numéricos abstractos, sin referencia a la medida. En estas condiciones ofrecen respuestas inadecuadas porque actúan con relaciones numéricas que recuerdan, pero sobre las que no tienen certeza de su validez. Posiblemente los ritmos diferentes de asimilación de nuevos conocimientos hayan producido que algunos estudiantes no hayan conectado la notación decimal con los sistemas de representación trabajados a lo largo de las sesiones de clase, y esto ha provocado que trabajen exclusivamente con entes numéricos.

De los trabajos de algunos estudiantes parece deducirse que éstos no tienen más significado para los números escritos en notación decimal que el de reconocer las relaciones sintácticas y semánticas subyacentes al sistema de numeración decimal; es más, no hemos localizado ninguna respuesta en la que la notación decimal aparezca como resultado de una medida, ámbito de trabajo que es familiar para los estudiantes. Por otra parte, en estas mismas respuestas podemos observar que, para la mayor parte de los estudiantes, el significado de la notación decimal cobra sentido como resultado de un reparto igualitario realizado con criterios y técnicas desarrolladas en las sesiones de clase.

Para algunos estudiantes la notación decimal está asociada a un tipo de números en los que no tienen cabida otros conjuntos numéricos tratados con anterioridad, y así entienden que la escritura decimal de un número entero debe asociarse a la de un decimal periódico de periodo 0. Esta situación no se produce entre aquellos estudiantes que asocian la notación decimal con el modelo en que se ha trabajado, pues como resultado de un reparto se representa por un número entero, por un número decimal o por un número periódico.

Para aquellos estudiantes que interpretan los números periódicos en el modelo propuesto no hay ninguna dificultad en establecer relaciones de orden entre notaciones decimales, periódicas o no, pues el criterio de la mayor parte se muestra como herramienta potente y eficaz. Sin embargo, para aquellos estudiantes que trabajan con entes numéricos abstractos surgen dificultades en la comparación de notaciones periódicas, puesto que sus argumentos son débiles y con el orden de los números naturales como único referente. En estas condiciones, los estudiantes que no se apoyan en el modelo tienen dificultades para comprender el significado de la densidad respecto del orden en los números racionales, ya que todos los números tienen anterior y siguiente.

7.- Sobre las operaciones con notaciones decimales

Los estudiantes son capaces de dar significado, dentro del modelo, a operaciones entre notaciones decimales. La operación más conflictiva es la multiplicación, tanto de números decimales como de números periódicos, (aunque algunos de ellos recurren a otros modelos, como el del área); no obstante, encontramos trabajos de estudiantes en los que permanece el significado de la multiplicación de naturales, de suma reiterada o "tantas veces como", aun cuando encontrasen dificultades para expresar tal situación con los números que se proponen.

A pesar de que en el trabajo previo se había indagado sobre el cálculo del resultado de operaciones con expresiones polinómicas decimales, los estudiantes que aceptan el modelo de trabajo tienden, de forma mayoritaria, a trabajar con la notación fraccionaria. El resto de los estudiantes obtienen los resultados a través de los conocimientos personales sobre cálculo de operaciones con números decimales; y en esta tesitura, han encontrado dificultades cuando los operandos son números periódicos; en el caso del producto de dos números periódicos, hay alumnos que no ofrecen resultados, mientras que quienes lo hacen trasladan técnicas operatorias de los números decimales: el resultado tiene en el período tantas cifras como la suma de las cifras de los priodos de los dos factores.

### VIII.4.2. Dificultades más importantes detectadas.

1.- Sobre la simbolización de las acciones efectuadas en el modelo

Inicialmente se presentaron a los estudiantes tareas relacionadas con el reparto de objetos indivisibles, por lo que identificaron las nociones de reparto y división por agrupamiento; además, en las tareas siguientes se utiliza el signo a:b para indicar el reparto igualitario de **a** unidades entre **b** personas. En consecuencia, las propias tareas refuerzan la asociación de las nociones de repartir y dividir en partes iguales o fraccionar, hecho que obstaculizó la interpretación del reparto como cantidad de magnitud recibida por uno cualquiera de los intervinientes en el reparto y cuya medida se efectúa por la adición de las partes de unidad resultantes del fraccionamiento de la unidad o de partes de la unidad.

Pensamos que estas dificultades desaparecen, o al menos quedan mitigadas, si se eliminan las tareas de repartos de objetos indivisibles y se inicia la propuesta didáctica con tareas de reparto de unidades fraccionables; además, consideramos conveniente que la simbolización del reparto se haga por medio de pares de números enteros **(a,b)**, con **b** no nulo, y cuya interpretación sea la de cantidad de magnitud que corresponde a cada una de las **b** personas entre las que se reparten de forma igualitaria **a** unidades de magnitud.

Se han detectado dificultades en algunos estudiantes en el paso de resultados concretos a resultados generales. Estas dificultades aparecen al interpretar expresiones literales o al realizar tareas de simbolización de resultados generales a partir de observaciones particulares. Para algunos estudiantes las letras no se consideran parámetros, sino que se interpretan como descriptores de objetos; de este modo para los mencionados estudiantes si a:b indica el reparto de a objetos entre b individuos b:a indica el reparto de b personas entre a objetos; y aun cuando la situación creada sea claramente inadecuada estos estudiantes tratan de dar sentido a dicha situación en lugar de modificar sus interpretaciones de las expresiones literales, como se refleja en la interpretación de este estudiante: *en el caso b:a el orden se invierte y lo que* *repartimos son un nº determinado de niños para tantas raquetas. La respuesta daría el nº de niños que han de jugar con la misma raqueta.* Y esta misma idea se vuelve a encontrar al interpretar expresiones de la forma a:a, como se pone de manifiesto en el texto de un estudiante *a:a quiere decir que a se reparte o se divide entre a, es decir, que una cosa se divide o se reparte en la misma cosa.*

En todo caso, estas dificultades que algunos alumnos encuentran con las expresiones algebraicas no son imputables a la propuesta didáctica que se formula en nuestra investigación; lo que sí se pone de manifiesto es que dicha propuesta exige de los estudiantes reflexionar sobre sus conocimientos personales inadecuados en el uso de expresiones literales.

<u>2.- Sobre la simbolización del resultado de un reparto.</u>

Se ha detectado que hay una práctica casi generalizada entre los estudiantes de utilizar entes numéricos sin referencia a la medida de alguna cantidad de magnitud; los estudiantes recurren a la fracción-número, pero no hacen referencia a la fracción medida. Este hecho constatado provocó la aparición de dificultades en la simbolización del resultado del reparto por medio de una expresión polinómica unitaria, puesto que dicha tarea exige de los estudiantes la medida de cantidades de magnitud que son partes de partes de la unidad y, en consecuencia, es esencial referir todas las cantidades de magnitud a la única unidad de medida; de modo que los estudiantes han de imbricarse en procesos de medida, pues de lo contrario la manipulación de entes numéricos facilita la aparición de resultados incorrectos.

Además, surgen dificultades al simbolizar las acciones realizadas en el modelo por cuanto el proceso es complejo y todos los aspectos deben estar controlados. Así, surgen dificultades provinientes de no aplicar el criterio de la mayor parte, de no controlar las cantidades repartidas y sin repartir, de no controlar el tamaño de las partes, de confundir los términos fraccionar y repartir, de confundir los elementos intervinientes número de unidades y número de individuos y de no realizar el reparto en distintas fases. Estas dificultades, que no solo son de tipo técnico, exigieron de unas sesiones de debate en las que el interés estribaba en combatir los errores desde la manipulación de los objetos en el modelo y la simbolización de las acciones realizadas. Estos debates ponen en evidencia que los ritmos de aprendizaje son variados y que el proceso conlleva fases de avances y retroceso, fases de control de algunos elementos simbólicos y descontrol de otros. Las mayores dificultades aparecen al determinar el tamaño de las partes de partes de unidad, posiblemente derivadas de una experiencia anterior en la que la fracción aparece desligada de la medida de magnitudes y, en consecuencia, de no contemplar de forma sistemática la unidad de medida.

La aparición del símbolo 0 provoca, por parte de los estudiantes, dudas y errores de interpretación; entre ellas la de identificar la cantidad de magnitud y la unidad de medida, la de considerar que si el reparto no es posible el resultado es 0, la de no admitir el reparto de una cantidad de magnitud expresada por 0, la de admitir resultados numéricos con independencia de su verificación en situaciones reales o la de primar los cálculos operatorios sobre sus significados. A lo largo de la implementación han sido distintas las tareas que se han propuesto a los estudiantes en las que se implicaba el símbolo 0; no hemos podido determinar si alguno de los sistemas de representación utilizado permitía erradicar errores, lo que nos lleva a constatar que los conocimientos personales de los estudiantes son difíciles de modificar por cuanto no hay objetos, o representaciones gráficas de ellos sobre los que visualizar las acciones realizadas.

Los estudiantes encuentran dificultades en las tareas de justificación de relaciones sintácticas y semánticas. Estas dificultades provienen, de una parte, de una corta o nula experiencia personal en tareas de demostración matemática; y, de otra parte, de las dificultades que tienen en el manejo de expresiones algebráicas. Como consecuencia, estos estudiantes aceptan como ciertas sus propias intuiciones y no entienden la necesidad de que haya que ratificarlas por medio de razonamientos formales.

3.- Sobre las relaciones y operaciones entre expresiones polinómicas unitarias.

Aun cuando la potencialidad del modelo es evidente para establecer relaciones de orden entre expresiones polinómicas unitarias, el orden de los números naturales obstaculiza, en algunos estudiantes, la comprensión de la densidad respecto del orden, pues a estos estudiantes les resulta adecuada la tarea de encontrar la expresión siguiente o anterior a una dada; no califican la tarea como de realización imposible, aun cuando admiten su error si hay una argumentación del profesor sobre la existencia de expresiones intermedias entre la dada y la que los estudiantes proponen como siguiente.

Hay una tendencia acusada entre el alumnado a concebir las matemáticas como conjunto de técnicas operatorias realizadas entre entes numéricos descontextualizados. Item más, estos estudiantes no conciben la imposibilidad de obtener el resultado de una operación, por lo que recurren a aplicar cualquier conocimiento personal previo sin valorar su adecuación o su aplicabilidad en contextos diferenciados.

4.- Sobre las relaciones entre la representación polinómica unitaria y la notación fraccionaria.

Al aparecer la fracción con el significado de reparto igualitario algunos alumnos hicieron emerger sus creencias sobre el significado único de la fracción como relación parte-todo, considerando que la fracción tenía el sentido de tomar unas partes de aquellas en las que se ha dividido la unidad y, por tanto, que era impensable que otros individuos participantes en el reparto se pudiesen llevar partes iguales de la unidad. Establecer conexiones entre dos significados para una misma representación simbólica, conexión que implique ampliación de significados y no superposición de unos sobre otros, necesita de explicaciones del profesor en las que se utilicen representaciones gráficas en paralelo con las representaciones simbólicas.

Hay una tendencia generalizada entre el alumnado a primar las manipulaciones de entes numéricos sobre la interpretación del significado de los entes numéricos y de las relaciones que se estudian. De este modo, los estudiantes que encuentran dificultades para justificar relaciones de orden entre fracciones, intentan utilizar sus conocimientos operatorios sobre las mismas en vez de trasladar sus significados a un modelo en el que poder actuar sobre objetos.

5.- Sobre la representación polinómica decimal.

La aparición de un proceso de reparto que se realiza en infinitas fases es aceptado por los estudiantes, aunque no se asume. No se asume por cuanto hay posicionamientos personales que no comparten la continuidad de las magnitudes, no admiten que cualquier cantidad de magnitud se vuelva a repartir: cuando los trozos sean muy pequeños ya se termina el reparto, porque no se puede trabajar con cantidades tan pequeñas.

Pensamos que los conocimientos personales de los estudiantes sobre la noción de infinitésimo obstaculizan la comprensión de los procesos de reparto en infinitas fases. Si bien admiten la existencia de entes numéricos muy pequeños, tal situación se desvanece cuando hace su aparición el número-medida, cuando tales entes numéricos se asocian a cantidades de magnitud continua; en estos casos los estudiantes se limitan a aceptar resultados "teóricos", pero que no son reales. Este conflicto que se plantea a los estudiantes ante una expresión infinita de medidas finitas y delimitadas, es difícil de solucionar, como señala Romero (1995).

6.- Sobre el significado de las notaciones decimales

La aparición de números con infinitas cifras ha hecho emerger ideas erróneas sobre la constitución de dichos entes pues hay alumnos que admiten la existencia de cifras más allá de la "posición infinito", como si infinito constituyese un número de orden muy grande pero que ocupa un lugar determinado, así consideran como adecuada expresiones del tipo 3,5000 ... 1. Hay que reseñar que la representación polinómica decimal tampoco sirvió para combatir esta idea errónea; antes bien, los estudiantes que la contemplan como correcta dicen admitir que, tal y como resulta de la simbolización, el proceso de reparto tiene infinitas fases pero que en la realidad tal supuesto no tiene sentido, puesto que si hay una cantidad finita de magnitud el reparto debe finalizar tras un número finito de fases.

Otro aspecto reseñable sobre la constitución de los números periódicos fue detectada en alumnos que conciben el periodo como un solo número, como un ente numérico global en el que el valor posicional ha perdido su identidad; emerge de esta forma una noción de número periódico en el que se desvanece la idea de densidad respecto del orden; de este modo, como señalan algunos alumnos, entre números cuyos periodos sean "27" y "28" no puede existir ningún otro número, pues éstos son consecutivos.

De las producciones de algunos estudiantes puede deducirse que sus conocimientos personales sobre la notación decimal periódica contempla la existencia de unos entes numéricos "especiales", que mantienen ligeras conexiones con otros entes numéricos y sobre los que elaboran ideas erróneas: entre dos números periódicos no hay números decimales y viceversa, los números enteros adquieren estatuto de número decimal si se acompaña del periodo 0, los números periódicos contienen infinitas cifras decimales aun cuando existe una última cifra decimal que es reconocible, los números periódicos están formados por dos números enteros uno antes de la coma y otro detrás de la misma, ... Y, sobre todo, estos estudiantes no asocian los números decimales a modelo alguno, con lo cual no tienen seguridad con las ideas o resultados que alcanzan.

7.- Sobre las operaciones con notaciones decimales

Posiblemente por una falta de práctica reflexiva, hay una creencia generalizada entre los estudiantes de que los resultados de las operaciones con notaciones decimales mantienen las características de los datos. Sobre todo, y por extensión de las experiencias con los números decimales exactos, mantienen que las operaciones con números periódicos producen como resultado un número periódico. En consecuencia, sus estrategias operatorias se centran en trabajar con expresiones decimales periódicas y definir el periodo que ha de figurar en el resultado.

La utilización de las calculadoras para la obtención de resultados de operaciones entre números periódicos abre un nuevo terreno de trabajo con peculiaridades específicas: hay que escribir como números decimales los datos que están dados como números periódicos, hay que obtener el resultado de la operación con números decimales, y hay que trasladar ese resultado de acuerdo con las características de los datos. De este modo la calculadora, que en principio iba a facilitar la tarea, provoca la aparición de situaciones inesperadas que el alumno resuelve como puede. Estas situaciones se producen porque la pantalla ofrece un número limitado de cifras decimales y no resulta evidente determinar el periodo (por ejemplo ante el resultado 3,59090909, hay estudiantes que dan como periodo 90, mientras que otros utilizan 09); también se producen conflictos al obtener el resultado con diferentes calculadoras, o cuando se introducen números distintos de cifras decimales; y también surgen conflictos si en la calculadora no aparecen cifras que se repitan de forma periódica.

8.- Sobre la interpretación del símbolo 0

En la propuesta didáctica hemos mantenido una especial dedicación a observar las interpretaciones que daban los estudiantes al número 0 en expresiones simbólicas referidas a actuaciones de reparto. Y en ese sentido hemos propuesto tareas para que manifestasen los significados que concedían a las expresiones a:0, 0:b y 0:0 desde tres sistemas de representación diferentes: representación polinómica unitaria, representación polinómica decimal y notación fraccionaria. Aun cuando los alumnos que han realizado las tareas no son exactamente los mismos, un análisis porcentual de las respuestas puede ser indicativo de la evolución experimentada en la comprensión de este aspecto del conocimiento. Hay que recordar que en el desarrollo de la acción se incluyó una sesión específica, después de introducir la representación polinómica unitaria, en la que se fomentó la discusión entre los alumnos sobre diferentes interpretaciones de repartos en los que algún elemento era 0

a) Interpretaciones del símbolo a:0 (porcentajes)

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Rep. Polinómica Unitaria | 85 | 0 | 15 |
| Notación Fraccionaria | 81 | 13 | 6 |
| Rep. Polinómica Decimal | 92 | 3 | 5 |

Cuadro VIII.3. Interpretación desde distintos sistemas del símbolo a:0

(1.- Interpretación correcta o bastante probable; 2.- Interpretación errónea; 3.- Se explicita un resultado)

Se observan ligeras variantes en el porcentaje de aciertos, que se pueden atribuir a la variación de los alumnos que contestan. En consecuencia, podemos inferir que las diferentes estrategia metódicas utilizadas no han sido suficientes para desterrar ideas erróneas de los estudiantes que parecen estar firmemente asentadas. La evolución más destacada parece producirse en el apartado 3, que sospechamos como una modificación de las respuestas de alumnos que inicialmente interpretaban 0 como el resultado de manipulaciones numéricas ya conocidas (sucesiones numéricas o funcionales). En todo caso, para este grupo de alumnos parece que sus experiencias escolares previas les llevan a obviar el trabajo en el modelo propuesto, a pesar de las reiteradas llamadas de atención que, en tal sentido, hizo el profesor.

b) Interpretaciones del símbolo 0:b (porcentajes)

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Rep. Polinómica Unitaria | 61 | 33 | 6 |
| Notación Fraccionaria | 81 | 19 | 0 |
| Rep. Polinómica Decimal | 42 | 55 | 3 |

Cuadro VIII.4. Interpretación desde distintos sistemas del símbolo 0:b

(1.- Interpretación correcta o bastante probable; 2.- Interpretación errónea; 3.- Se dan justificaciones correctas, pero no se explicita el resultado)

Hay una notable variación en el porcentaje de aciertos según el tipo de expresión en la que se trabaje y, en este sentido, parece que la más adecuada es la notación fraccionaria, pensamos que debido en gran medida a la exigencia de la tarea de simbolizar el resultado con notación decimal. Esta exigencia, a la que hay que unir la reiteración de tareas similares, se tradujo en que los estudiantes interpretasen la notación decimal como división, lo cual produjo un alto índice de aciertos.

Por otra parte, es de destacar los porcentajes tan altos de respuestas erróneas que se producen cuando los alumnos trabajan con las expresiones polinómicas, tanto unitarias como decimales. Pensamos que, en este caso, el modelo ha sido un elemento que ha obstaculizado el éxito de los estudiantes puesto que para ellos no tiene sentido el trabajo con la cantidad de magnitud 0; de este modo se presentan respuestas en las que se identifica la imposibilidad de la acción con el número 0, así como respuestas en las que se justifica el sinsentido de la acción porque la cantidad de magnitud disponible es 0. Cualquiera de ambas posiciones no ha sido eficazmente combatida desde el modelo propuesto; posiblemente debido a que el propio modelo es muy exigente en la interpretación de las acciones, así como en la apreciación de los aspectos del resultado que deben ser considerados; en consecuencia, pensamos que estas ideas erróneas se combatirán desde el modelo cuando éste sea plenamente comprendido.

c) Interpretaciones del símbolo 0:0 (porcentajes)

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| Rep. Polinómica Unitaria | 79 | 0 | 21 |
| Notación Fraccionaria | 59 | 16 | 25 |
| Rep. Polinómica Decimal | 82 | 3 | 15 |

Cuadro VIII.5. Interpretación desde distintos sistemas del símbolo 0:0

(1.- Interpretación correcta o bastante probable; 2.- Interpretación errónea; 3.- Se explicita un resultado)

Al contrario de los resultados del apartado anterior, el porcentaje de aciertos es sensiblemente inferior si el trabajo se realiza desde la notación fraccionaria; entre las causas de que esto así ocurra hay que citar, a nuestro entender, la consideración de la fracción como un ente numérico sobre el que se opera para su simbolización con la notación decimal; de este modo, surgen errores debidos a los conocimientos previos sobre el cálculo de límites de sucesiones o de funciones.

También resulta llamativo el porcentaje de alumnos que incluyen algún resultado, en cualquiera de los tres sistemas de representación utilizados. De nuevo hay que reseñar que el modelo se ha mostrado como obstaculizador para aquellos alumnos que no lo han interpretado de forma adecuada, sino que han considerado aspectos parciales del mismo o lo han utilizado de manera incorrecta.

A la vista de este análisis podemos concluir que las ideas erróneas sobre el significado del 0 no se han erradicado totalmente con ninguno de los sistemas de representación utilizados. Sería necesario, por tanto, abordar el problema desde otra perspectiva para que la interpretación del 0 como medida de cantidad de magnitud se impusiese sobre la interpretación como imposibilidad de realizar acciones.

## VIII.5. Conclusiones de la Segunda Etapa de la Investigación

La hipótesis número dos de nuestra investigación la formulamos en los siguientes términos: existen relaciones entre los conocimientos personales sobre los Números Racionales de los estudiantes para maestros y el desarrollo de su trabajo como futuros profesores.

Para verificar esta hipótesis diseñamos la Segunda Etapa del estudio, en la cual realizamos entrevistas personales a 3 estudiantes seleccionados de acuerdo con sus producciones previas y al porcentaje de sesiones de clase a las que habían asistido a lo largo de la implementación de la propuesta didáctica contemplada en el Primera Etapa.

El desarrollo de las sesiones así como el análisis de las entrevistas se han recogido en el Capítulo VII. El estudio de las informaciones obtenidas en la Segunda Etapa nos permiten confirmar las relaciones entre los conocimientos personales de los futuros maestros y su actuación profesional, en el sentido de que en un mayor y mejor dominio conceptual se corresponde con una mayor competencia en determinadas tareas profesionales. Estas relaciones presentan características diferenciadas en función de la tarea profesional que desarrollan ante los escolares y de acuerdo con las precisiones que reseñamos a continuación:

<u>I.- Sobre la revisión de las tareas de los escolares</u>

La actuación profesional de los estudiantes para maestro condiciona la revisión de las tareas escolares; cuanto más débil es la comprensión del modelo por parte de estos estudiantes, más deficiente es la detección de los errores cometidos por los escolares.

Si los futuros maestros entienden los argumentos de los escolares, entonces detectan los errores que cometen éstos y las causas que los originan, pero cuando los futuros maestros interpretan con dificultad los argumentos esgrimidos por los escolares, sus actitudes difieren:

- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo intenta interpretar la respuesta del escolar desde otro modelo, distinto del que utiliza el escolar, pero en el que este estudiante se desenvuelve con seguridad.
- Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo intenta encontrar justificaciones dentro del mismo modelo que el escolar, pero mostrando inseguridad en las observaciones que realiza.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo acepta los errores del escolar como resultados correctos.

<u>II. Sobre las explicaciones que ofrecen a los escolares</u>

Con independencia de los conocimientos detectados en las producciones previas, los estudiantes para maestro tratan de ofrecer a los escolares explicaciones exhaustivas; no aceptan hacer sugerencias para que el propio escolar reflexione sobre sus argumentaciones; también rechazan las explicaciones que sean meras descripciones de técnicas.

Sin embargo, cuando los futuros maestros tienen que explicitar las explicaciones que ofrecen para que los escolares superen los errores que se han detectado, los estudiantes para maestro actúan de manera diferente en función de sus conocimientos personales:

a:- Ante la tarea de seleccionar una explicación entre las tres que se proponen, los estudiantes para maestros actúan de forma diferenciada: cuanto más robusta es la comprensión del modelo más se opta por explicaciones que incidan en el origen del error; mientras que cuanto más débil es la comprensión del modelo más se actúa por eliminación de aquellas explicaciones que no son entendidas.

- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo elige la explicación más cercana al mundo de los objetos, aunque el modelo que se utiliza sea diferente al que ha usado el escolar en sus argumentaciones.
- Si el estudiante para maestro mostró alguna deficiencia en la comprensión del modelo elige una explicación basada en objetos manipulables en otro modelo si él mismo entiende dicha explicación; pero si no entiende la explicación la rechaza y elige la que utiliza el modelo del escolar, aunque no le satisfaga.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo rechaza explicaciones basadas en la manipulación de objetos, porque él mismo no las sabe gestionar; la elección viene forzada a explicaciones que utilizan el modelo del escolar, aunque no las asuma plenamente.

b.- Ante la tarea de elaborar una explicación para que el escolar supere el error de comprensión que manifiesta, las actuaciones de los futuros maestros son distintas: se incide más en el origen del error cuanto mayor es la comprensión; mientras que una débil comprensión conlleva a ofrecer explicaciones que solo contienen los resultados correctos:

<u>III. Sobre las actividades que proponen a los escolares</u>

En nuestro trabajo de indagación en este aspecto no obtuvimos datos suficientes por cuanto los futuros maestros primaron la detección y corrección de errores frente al diseño de actividades para proseguir el proceso instructivo. Las informaciones disponibles tan solo permiten aseverar que los futuros maestros tiene pocos recursos para elaborar propuestas de trabajo para los escolares; su propia experiencia como aprendices es el único referente que utilizan para la secuenciación del aprendizaje.

## VIII.6. Implicaciones para futuras investigaciones.

A partir de los resultados de nuestro trabajo indicamos posibles puntos de avance para investigaciones futuras

<u>a. La construcción de conjuntos numéricos.</u>

El sistema de representación polinómica unitaria se configura al simbolizar el resultado de las acciones realizadas en un modelo bien definido; así se construye un conjunto de entes numéricos formados por sumas de fracciones unitarias, con la exigencia sintáctica de que los denominadores cumplan condiciones de orden entre sus factores y con relaciones semánticas sustentadas en las manipulaciones del modelo. De este modo, cada par de números naturales (a,b) con b no nulo, viene determinado de forma única por una suma finita de fracciones unitarias.

a.1.- La construcción del conjunto de los Números Racionales positivos.

Este sistema simbólico de representación permitiría la introducción de los Números Racionales positivos a partir de los inversos de los números naturales, entendiendo 1/n como la cantidad resultante de dividir la unidad en n partes iguales; de tal modo que un número racional se entiende como la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los individuos que participan en un reparto igualitario, realizado por fases y atendiendo al criterio de la mayor parte. Se abre, por tanto, una nueva perspectiva para la construcción de $Q^+$ en la que cada elemento se configura con una estructura polinómica, lo que ofrece una dimensión diferente a la de otras construcciones de este conjunto.

De este modo, y como ya se pudo observar en el capítulo III de nuestra investigación, esta construcción facilitaría el estudio de las relaciones de orden y de la densidad respecto de dicho orden, que redundarían en la comprensión de la estructura topológica de este conjunto numérico. Ahora bien, esta forma de introducir este conjunto numérico necesita de un estudio para superar los obstáculos que ya detectamos en la definición de las operaciones de suma y producto entre expresiones polinómicas unitarias, pues de lo contrario se encontrarían dificultades en la construcción algebraica del conjunto de los Números Racionales.

a.2. La construcción del conjunto de los Números Reales positivos.

Considerando cada expresión polinómica unitaria como una entidad numérica disociada de la medida de magnitudes, disponemos de entes numéricos abstractos que, cumpliendo unas normas sintácticas, permiten la construcción del conjunto numérico de los Números Racionales positivos. Pensamos que si se mantienen las exigencias sintácticas y se varía la condición de finitud de las representaciones simbólicas, puede aparecer un nuevo camino en la construcción del conjunto de los Números Reales positivos. De este modo, nuestra perspectiva se sitúa en el estudio de expresiones numéricas de la forma siguiente:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_1 n_2}} + \ldots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_1 n_2 \ldots n_p}} \mathbf{+ \ldots\ldots} \quad n_i \text{ natural y } n_i + 0 \text{ y } n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_{p-1}$$

Hay entidades numéricas de este tipo que provienen de sumas de progresiones geométricas ilimitadas de razón una fracción unitaria y cuyo primer término sea 1; o bien que el primer término sea una fracción unitaria menor o igual que la razón. De estas sumas sabemos su convergencia a un número racional, expresado como fracción unitaria o como fracción ordinaria:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i} = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} \qquad a_1 = \frac{1}{n} = r \text{ (n natural)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n.\, m^{i-1}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{m}{n(m-1)} \qquad a_1 = \frac{1}{n}, \; r = \frac{1}{m}, \quad m > n \text{ (m,n naturales)}$$

Pero también encontramos otras sumas de fracciones unitarias, que cumplen las características sintácticas señaladas, y cuya convergencia ya no es a un número racional, como pueden ser el caso de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Por tanto, se abre una vía de estudio de sumas que cumplan las exigencias sintácticas demandadas y que convergen a números no racionales. Se vislumbra una posibilidad de afrontar el estudio de $R^+$, a partir de una construcción diferente de $Q^+$, que hace presumir una dimensión distinta de este conjunto numérico. Este campo de estudio debe contemplar no sólo la manera en que se configura la construcción de ese conjunto numérico, sino que también han de atender a las perspectivas diferentes que ofrecen respecto a otras construcciones, así como los aspectos que ocultan con respecto a esas otras construcciones.

Pensamos que el sistema de representación polinómica decimal no ofrece perspectivas diferentes en la construcción de $R^+$ de las que produce la notación decimal, pues son sistemas de representación cuyas diferencias residen en aspectos sintáctico justificados, básicamente, desde la economía de trabajo; de este modo, la construcción de dicho conjunto numérico se haría de forma similar a como se aborda desde la notación decimal (Romero, 1995).

b. Incrementar la comprensión de los Números Racionales.

La idea de introducir en escolares la fracción con el significado de reparto ha sido objeto de un exhaustivo trabajo de Streefland (1991). Sin embargo, en nuestra propuesta se encuentran diferencias significativas al hacer el reparto en fases y aplicando el criterio de la mayor parte; lo que permite mostrar una estructura polinómica subyacente de las fracciones que no aparece en el trabajo mencionado. Se abren, por tanto, nuevas vías de estudio sobre la posibilidad de adaptar nuestra idea de fracción para escolares, en la que se contemple el modelo en el que trabajar y la simbolización de las acciones resultantes.

En esta línea de trabajo son elementos importantes a considerar:

a) el sistema de representación que se utiliza, por cuanto el que se contempla en nuestra propuesta curricular parte del supuesto de que los destinatarios son estudiantes familiarizados con los símbolos algebraicos y con recursos tipográficos combinados,
b) las potencialidades de conexión de la idea de fracción como resultado de un reparto con otras ideas de fracción contempladas en los currícula vigentes; o con la idea de razón que aparece desligada de las fracciones,
d) el modo en que se favorecen las comprensión entre los escolares de las notaciones decimales periódicas, pues es un terreno en el hemos detectado múltiples y frecuentes errores.

c. Formación del Profesorado.

La propuesta didáctica que desarrollamos en este trabajo se implementa en unas condiciones determinadas y se analiza desde la construcción de unas herramientas particulares. Se abre la posibilidad de nuevas indagaciones que profundicen en la repercusión y utilidad de la información obtenida, así como elaborar nuevas herramientas que permitan profundizar en la comprensión del contenido.

También se contempla la viabilidad de reformular la propuesta didáctica aquí desarrollada con la intención de incrementar la comprensión del conjunto de los Números Racionales entre estudiantes para maestros de otras especialidades, entre maestros en ejercicio a través de sus actividades de formación permanente, y entre estudiantes para profesores de Educación Secundaria.

## VIII.7. Reflexión final.

El trabajo que se presenta en esta memoria nos ha permitido conectar las dimensiones teórica y práctica de la investigación en Didáctica de la Matemática. Centrados en el tópico de los Números Racionales hemos podido avanzar en la observación de los procesos de aprendizaje, en la manera en que evoluciona la comprensión desde unas nuevas perspectivas, en la detección de los obstáculos que se encuentran en el proceso de construcción del conocimiento y en la explicitación de las potencialidades que presenta esta propuesta didáctica para conectar los viejos conocimientos con otros nuevos.

Al elaborar nuestra propuesta didáctica hemos tenido que hacer una revisión histórica del concepto de Número Racional y de los sistemas de representación que se han utilizado. Esto nos ha permitido explorar, detectar, organizar y delimitar los problemas y potencialidades que se presentan en la comprensión por parte de los estudiantes del concepto que nos ocupa y preocupa.

Toda esta información nos ha permitido crear un modelo del que emergen dos sistemas de representación de los Números Racionales positivos, con los que conectar las habituales notaciones fraccionaria y decimal. Además, hemos posibilitado que los futuros maestros, desde una posición de aprendices de la materia, tengan la oportunidad de reflexionar sobre la construcción de un conjunto numérico; de cómo los sistemas de representación surgen al actuar en el modelo y de cómo las manipulaciones simbólicas se confirman o desechan a través de su virtualidad en el modelo. Desde nuestra preocupación como formadores de futuros maestros, la propuesta objeto de este trabajo tiene la intencionalidad de mostrar a los estudiantes una visión personal sobre la naturaleza de la matemática y sobre la naturaleza de su aprendizaje.

Esperamos que nuestro trabajo haya contribuido a caracterizar, delimitar, analizar y clarificar el campo conceptual de los Números Racionales y el campo más amplio del Pensamiento Numérico.

# BIBLIOGRAFIA

ABRAIRA, C. F. y FRANCISCO, M. A. (coord.), (1997). **II Simposio.El curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Area de Matemáticas.** Facultad de Educación, Universidad de Leon.

ADLER,. P. A. y ADLER, P. (1994). Observational techniques. En Denzin, N. y Lincoln, Y. (edit.): **Handbook of Qualitative Research.** Sage Publications, California.

ARGUELLES, J. (1989). **Historia de la Matemática**. Akal, Madrid

ARNAL, J. DEL RINCON, D. y LATORRE, A. (1992). **Investigación educativa. Fundamentos y metodología.** Labor, Barcelona.

ARTIGUE, M. (1990). Epistemologie et Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 10, pág. 241-286.

ARMSTRONG, B. E. y NOVILLIS, C. (1995). Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitioned rectangles. **Journal for Research in Mathematics Education**. (26), 1.

AVENDAÑO, J. (1859). **Lecciones de aritmética.** Imprenta de Luís García, Madrid.

BABINI, P. y REY PASTOR, J. (1973). **Historia suscinta de la matemática.** Espasa, Madrid.

BALL, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions. En En Carpenter, T. p., Fennema, E. y Romberg, T. A.: **Rational Numbers. An integration of Research**. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hilldale, New Jersey.

BASSO, M. y BONOTTO, C. (1996). A didactic experience of the integration of reality, children's intuition and mathematical concepts: proportion and the multiplicative structure of decimals. En Keitel, C. et al. (edit.): **Mathematics (education) and common sense: The challenge of social change and technological development**. Universidad de Berlín.

BAUERSFELD, H. (1994). Theorical perspectives on the interaction in the mathematics classroom. En Biehler, R. y otros (edit.): **Didactic of Mathematics as a scientific discipline**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BAUVIER, J. y GEORGE, P.**Diccionario de Matemáticas**. Akal, Madrid

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T. y LESH, R. (1993). Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct. En Carpenter, T. p., Fennema, E. y Romberg, T. A.: **Rational Numbers. An integration of Research**. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hilldale, New Jersey.

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R. y SILVER, E. A. (1983). Rational number concepts. En Lesh y Landau (edit.) **Acquisition of mathematics concepts and processes.** Academic Press Orlando, Florida.

BELL, A. (1997). Algunas notas acerca de la representación mediante puntos de números, series y funciones. **Enseñanza de las Ciencias,** Vol 15, nº 3, pág. 373-376.

BENOIT, P., CHEMLA, K y RITTER, J. (editores) (1992). **Histoire de fractions, fractions d'historie**. Birkhäusen Verlag, Berlin.

BEZUK, N. S. y ARMSTRONG, B. E. (1993). Understanding Fraction Multiplication. **Mathematics Teacher,** (85), 9, pág. 43-46.

BEZUK, N. S. y ARMSTRONG, B. E. (1993). Activities: Understanding Division of Fractions. **Mathematics Teacher,** (86), 1, pág. 729-744.

BEZUK, N. S. y BIECK, M. (1993) Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers. En Owens, d. t. (edit.) **Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics**. Macmillan Publishing Company, New York.

BISQUERRA, A. (1989). **Métodos de investigación educativa**. Ceac, Barcelona.

BLANCO, L. (1992). Aproximación al conocimiento práctico personal de los profesores de matemáticas de E.G.B.. **Enseñanza de las ciencias**, 10(2), pág 195-200.

BLANCO, L. y CRUZ, M. C. (coord.), (1997). **Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Area de Matemáticas.** I.C.E., Universidad de Leon.

BLANDO, J.; KELLY, A.; SCHNEIDER, B. y SLEEMAN, D. (1989). Analyzing and modeling arithmetic errors. **Journal for Research in Mathematics Education.**, 20, pág. 301-308.

BOYD, B. (1992). **The relationship between mathematics subject matter knowledge and instruction: a case study**. Tesis no publicada. San Diego State University, California.

BOYER, C. B. (1986). **Historia de la Matemática.** Alianza Editorial, Madrid.

BROTHERSON, M. J. (1994) Interactive focus group interviewing: a qualitative research method in early intervention. En **Topics in Early Childhood Special Education**, 14 (1), pág. 101-118.

BROUSSEAU, G. y BROUSSEAU, N. (1987). **Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatorie**. I.R.E.M. de Bordeaux I

BROUSSEAU, G. (1993). **Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales.** Universidad de Córdoba, Argentina

BROUSSEAU, G.; DAVIS, R. y WERNER, T. (1986). Observing students at work. En Christiansen, B.; Howson, G. y Otte, m. (edit.), **Perspectives on Mathematics Education**. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

BROWN, C. A. (1993). A critical analysis of teaching rational number. En Carpenter, T., Fennema, E. y Romberg, T. A. (edit) **Rational Numbers. An Integration of Research.** Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Hillsdale, New Jersey.

BROWN, C. A. y BAIRD, J. (1993). Inside the teacher: Knowledge, beliefs and attitudes. En Wilson, P. S (edit) **Research ideas for the classroom. High school mathematics**. Macmillan Publishing Company, New York.

BROWN, J. y BORKO, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher. En Grouws, D. A. **Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning**. Macmillan Publishing Company, New York.

BUNT, L. N. H.; JONES, P. S. y BEDIENT, J. D. (1987). **Le radice storiche delle matehematiche elementari.** Cm4-Zanichelli, Bologna.

CAJORI, F. (1985). **A history of Mathematical notations** (2 vol.). Open Court Press, Illinois.

CALDWELL, J. H. (1995). Communicating About Fractions with Pattern Blocks. **Teaching Children Mathematics,** (2), 3 pág.156-161.

CAMPBELL, D.M. y HIGGINS, J. (editores) (1984). **Mathematics. People.Problems. Results**. Wadworth international, Belmont (California).

CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. y ROMBERG, T. A. (edit.) (1993). **Rational Numbers. An Integration of Research**. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersey.

CASSELL, C. y SYMON G. (Eds.) (1994). **Qualitative methods in organizacional research**. Sage, Londres.

CASTRO, E. (1994). **Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).** Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

CASTRO, E. y CASTRO, E. (1997). Representación y modelización. En Rico, L. (coord.), **La educación matemática en la enseñanza secundaria**, I.C.E. Universitat de Barcelona-Horsori, Barcelona,.pág 95,1242.

CASTRO, E., RICO, L. y ROMERO, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. **Enseñanza de las Ciencias,** Vol 15, nº 3, pág 361-371.

CENTENO, J. (1988). **Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?** Síntesis, Madrid.

CHACE, A. B. (1986). **The Rind Mathematical Papyrus.** The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, virginia

CHAPELL, M. F. y THOMPSON, D. R. (1994). Modeling the NCTM Standars: Ideas for Initial Teacher Preparation Programs. En Aichele, D. B. y Coxford, A. F.: **Professional Development for Teachers of Mathematics**. N.C.T.M., Reston, Virginia, pág, 186-199.

CLEMENTS, K. y LEAN, G. A., (1989). **'Discrete' fraction concepts and cognitive structure**. Comunicación presentada al Twelfth annual conference of the International Group of Mathematics Education (PME).

COHEN, L. y MANION, L. (1990). **Métodos de investigación educativa**. La Muralla, Madrid.

COLLETTE, J. P. (1985). **Historia de las matemáticas**. Siglo XXI de España, Madrid.

COOB, P. (1987). Information-processing psychology and mathematics education. A constructivist perspective. **The Journal of Mathematics Behavior**, 6(1), pág. 3-40.

COOK, T. D. y REICHARD, CH. S. (1982). **Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.** Morata, Madrid.

CROSSLEY, J. N. (1987). **The emergence of number**. World Scientific, Singapore.

DAHAN-DALMENICO, A. y PEIFFER, J. (1986). **Une histoire des mathématiques**. Editions du Seuil, Paris.

DAY, R. (1996). Case Studies of Preservice Secondary Mathematics Teachers' Beliefs: Emerging and Evolving Themes. **Mathematics Education Research Journal** (8), 1, pág 5-22.

DENZIN, N. y LINCOLN, Y. (edit). (1994). **Handbook of Qualitative Research**. Sage Publications, California.

DORGAN, K. (1994). What Textbooks Offer for Instruction in Fraction Concepts. **Teaching Children Mathematics**, (1), 3. pág. 150-155.

DHOMBRES et al. (1987). **Mathématiques au fil des ages**. I.R.E.M., Groupe Epistemologie et Historie, Gauthier-Villars, París.

DIENES, Z. P. (1972). **Fracciones**. Teide, Barcelona.

DUVAL, R. (1993). Semiosis e noesis. *Lecturas en didáctica de la Matemática: Escuela francesa*. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang, S.A., Bern.

EDITORIAL ESCUELA ESPAÑOLA. S.A., (1987) **Programas Renovados de Educación Preescolar y Ciclo Inicial,** Madrid

EDITORIAL ESCUELA ESPAÑOLA. S.A, (1988) **Programs Renovados de la Educación General Básica. Ciclo Medio** (cuarta edición), Madrid

EDITORIAL ESCUELA ESPAÑOLA. S.A, (1988) **Programs Renovados de la Educación General Básica. Ciclo Superior** (cuarta edición), Madrid

EDITORIAL LUIS VIVES, (1947) **MATEMATICAS**. Primer Curso. Zaragoza.

EISENHART, M.; BORKO, H.; UNDERHILL, R.; BROWN, C.; JONES, D. y AGARD, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. **Journal for Research in Mathematics Education**, 2491), pág 8-14.

ELLIOT, J. (1990). **La Investigación-Acción en Educación**. Morata, Madrid.

ELLIOT, J. (1991). Estudio del Curriculum Escolar a través de la Investigación Interna. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado**, nº 10.

ERIKSON, D. K. (1993). **Middle School Mathematics Teachers' Views of Mathematics and Mathematics Education, Their Planning and Classroom Instruction, and Student Beliefs and Achievement**. Comunicación presentada al Annual Meeting of the American Educational Research Association.

ESCUELA ESPAÑOLA (1988). **Programas renovados de la Educación General Básica. Ciclo medio** (cuarta edición). Madrid.

ESCUELA ESPAÑOLA (1987). **Programas renovados de la Educación General Básica. Ciclo Superior.** Madrid

EUCLIDES (1991). **Elementos. Libros V a IX**. Editorial Gredos, Madrid

EVES, H. (1969). **History of mathematics** (tercera edición). Holt, Rinehart y Winston, New York

FAUVEL, J y GRAY, J. (Editores). (1992) **The History of Mathematics. A reader**. (tercera edición).Macmillan Press - The Open University, London.

FEFERMAN (1989). **The number systems. Foundations of Algebra and Analysis**. Chelsea Publishing Company, New York.

FENEMA, E. y FRANKE, M. L. (1992). Teachers´ knowledge and its impact. En Grouws, D. A. (edit.): **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Macmillan, New York.

FEY, J. (1990). Quantity. En Steen, L. (edit.). **On the shoulders of giants. New approaches to numeracy**. National Academy Press, Washington.

FIGUERAS, O. (1988). **Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales**. Matemática educativa, Cinvestad, Méjico

FILSTEAD, W.J. (1986). Una experiencia necesaria en la investigación evaluativa. En Cook y Reichard (edit.) **Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa**. Morata, Madrid

FIRESTONE, W. (1993). Alternative arguments for generalizing from data as applied to qualitative research. **Educational Researcher**, 22, pág 16-23.

FISCHBEIN, E. (1987). **Intuition in Science and Mathematics**. Reidel Publishing Company. Dordrecht.

FLEGG, G. (1989). **Numbers through the ages**. Macmillan-The Open University, London.

FLORES, P. (1996). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. **Uno, revista de didáctica de las matemáticas**, (8), pág. 103-111.

FLORES, P. GODINO, J. D. (1995). Aproximación a las concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas mediante el comentario de un texto. **Revista de educación de la Universidad de Granada**, vol (8), pág. 47-61.

FONTANA, A. y FREY, J.H. (1994). Interviewing, the art of science. En Denzin, N.K. y Lincoln, Y. S. (edit.), **Handbook of qualitative research**. Sage, Thousand Oaks and London

FREUDENTHAL, H. (1983). **Didactical phaenomenology of mathematics structures.** Reidel, Dordrecht.

GAIRIN, J. (1987). **Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática**. PPU, Barcelona.

GAGATSIS, A. y PATRONIS, T. (1990). Using Geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. Pág, 29-54.

GARCIA BLANCO, M.M. (1997). **Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje.** GIEM, Universidad de Sevilla.

GARCIA BARROS, et al. (1989). La formación del maestro. **Cuadernos de Pedagogía**, 175, pág. 46-48.

GARDINER, A. (1992). On the Egyitian concept of part. En Fauvel, J y Gray, J. (Edit.) **The History of Mathematics. A reader**. (tercera edición).Macmillan Press - The Open University, London. Pág 22.

GAVILAN, M. (1896). **Elementos de Matemáticas**. Universidad de Valladolid

GIL, J., VAZQUEZ, C. y MASCARO, J. (1983). **Matemáticas 6. Educación General Básica**. Santillana, Madrid.

GILLINGS, R. J. (1982). **Mathematics in the time of the pharaohs**. Dover Publications, New York.

GIMENEZ, J. (1991). **Innovación metodológica de la didáctica especial del número racional positivo. Diagnosis cognitiva y desarrollo metodológico.** Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

GIMENEZ, J. (1990). Orientaciones de los items y habilidades en fracciones. **Educar**, (17), pág. 162-181.

GOETZ, J. P. y LECOMPTE, M. D. (1988). **Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.** Morata, Madrid.

GOLDING, G. (1993). The IGPME Working Group of Representations. **Proceedings of the seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Univesidad de Tsukuva.

GONZALEZ, J. L. (1995). **El campo conceptual de los números naturales relativos.** Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

GOYETTE, G. y LESSARD-HEBERT, M. (1988). **La investigación-acción. Funciones, fundamentos e instrumentación**. Laertes, Barcelona.

GRAEBER, A.; TIROSH, D. y GLOVER, R. (1989). Preservice teachers´ misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education**, 20(1), pág. 95-102.

GRATTAN-GUINNES (editores) (1994) **Companion enciclopedia of the history and fhilosophy of the mathematical sciences.** Vol 1. Routledge, London.

GROFF, P. (1996). Is Teaching Fractions a Waste of Time? **The Clearing House. A Journal for middle schools, junior and senior schools.** (69), 3, pág.. 177-179.

GUNTTENPLAN, S. (1994). **A Companion to the Philosophy of Mind**. Blackwell, Oxford.

HAROLD, T. D. (1989). The history of computation. En NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, **Historical topics for the Mathematics Classroom.** N.C.T.M., Reston, Virginia.

HASEMANN, K. (1987). Pupils' individual concepts of fractions and the role of conceptual conflict in conceptual change. **Articles on mathematics education**, pág. 25-39.

HIEBERT, J. A. (1993). Benefits and costs of research that links teaching and learning mathematics. En Carpenter, T. P.; Fennema, E. y Romberg, T. A. **Rational numbers. An integration of research**. Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.

HIEBERT, J y LEFEVRE, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En Hiebert, J (edit) **Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics**. Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

HIEBERT, J. A. y CARPENTER, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grows, D. A. (edit.) (1992). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics.** Macmillan Publishing Company, New York.

HIEBERT, J. y WEARNE, D. (1986). Procedures over concepts: the adquisition of decimals numbers kwnowledge. En Hiebert, j. (edit.): **Conceptual and procedural kwnowledge: The case of mathematics.** Erlbaum, Hisdalle.

HITT, F. (1988). Systemes Sémiotiques de Représentation liés au Concept de Fonction. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, vol 6, pág 7-26.

HOWARD, A. C. (1991). Addition of Fractions: The Unrecognized Problem. **Mathematics Teacher,** (84), 9, pág. 710-713.

HOWSON, G. y WILSON, B. (1991). ¿Qué clase de profesores tendremos para la enseñanza de las matemáticas? Posibilidades y alternativas. **Comunicación y Lenguaje**, (11-12), pág. 113-120.

HUNTING, R. P. y KORBOSKY, R. K., (1990). Context and process in fraction learning. **International Journal of Mathematics Education Science and Technology**, (21), 6, pág. 929-948.

I.C.M.I. (1977). **Proceedings of the III I.C.M.E**. Athen, H y Hunkle, H. edittores. Z.D.M. Karlsruhe

I.C.M.I. (1987). **Las matemáticas en Primaria y secundaria en la década de los 90.** Mestral, Valencia.

IFRAH, G. (1987). **Las cifras.** Alianza Editorial, Madrid.

JACOB, E. (1987). Qualitative research traditions: a review. **Review of Educational Research**, 57 (1), pág. 1-50.

JACOB, E. (1988). Clarifying qualitative research: a focus on traditions. **Educational Researcher**, 17 (1), pág. 16-24.

JANESICK, V. (1994). The dance of cualitative research design. En Denzin, N. y Lincoln, Y. (edit.): **Handbook of Qualitative Research**. Sage Publications, California.

JANVIER, C. (edi.) (1987). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.

JIMENEZ , L. y GONZALEZ, A. (1977). **Matemáticas 6.** Anaya, Madrid.

KAMII, C. (1994). **Equivalent Fractions: An Explanation of Their Difficulty and Educational Implications**. Comunicación presentada al National Council for Teachers of Mathematics Research Pre-session.

KAPUT, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier, C. (edit.) **Problems of representation in the teaching and learning of matematics**. Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.

KAPUT, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. **Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning**. Macmillan Publishing Company, New York.

KEMIS, S. y MCTAGGART, R. (1988). **Cómo planificar la investigación-acción.** Laertes, Barcelona

KERSLAKE, D. (1986). **Fractions: Children´s strategies and errors**. NFER-NELSON, Windsor (England).

KIEREN, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En, Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. **Ratinal Numbers. An Integration of Research**. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale (New Jersey)

KIEREN, T. E. (1995). Creating Spaces for Learning Fractions. En SOWDER, J. T. y SHAPPELLE, B. P. (edit.) **Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades.** State University of New York Press, New York.

KILPATRICK, J. (1992). BA Histiry od Research in Mathematics Education**.** En Grouws, D. A. **Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning**. Macmillan Publishing Company, New York.

KILPATRICK, J. (1993). Beyond face value: assessing research in Mathematics Education. En Nissen, G. y Blomhoj, M. (edit) **Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics**. Roskilde University, Denmark.

KLINE, M. (1978). **La pérdida de la certidumbre**. Siglo XXI, Madrid.

KLINE, M. (1992). **El pensamiento matemático de la Antiguedad a nuestros dias, I**. Alianza Universidad, Madrid.

LERMAN, S. (1989). Constructivism, mathematics and mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, 20, pág. 211-223.

LESH, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. **Enseñanza de las Ciencias,** vol 15, nº 3, pág. 377-391.

LESH, R., LANDAU, M. y HAMILTON, E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. En Lesh, R. y Landau, M. (edit.) **Acquisition of Mathematics concepts and Processes**. Academic Press, Orlando, Florida

LESH, R.; POST, T. y BEHR, M. (1987). Representacions and translation among representation en Mathematics learning and Problem Solving. En **Problems of Representation in the teaching and learning of Mathematics**. Janvier, C. (ed.). LEA, Hillsdale, New Jersey.

LLINARES, S. (1990). Creencias de los profesores de matemáticas. **Investigación en la escuela**, (11), pág. 61-69.

LLINARES, S. (1993). Aprender a enseñar. Reflexiones sobre la formación inicial de profesores de matemáticas. **Revista de enseñanza universitaria**, (5), pág. 111-126.

LLINARES, S. y SANCHEZ, M. A., (1988). **Fracciones**. Síntesis, Madrid.

LLINARES, S. y SANCHEZ, M. V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En Linares, s y Sánchez, M. V. (edit.): **Teoría y práctica en Educación Matemática**. Alfar, Sevilla.

LLINARES, S. y SANCHEZ, M. V. (1991). Kwoledge about unity fraction tasks of prospective elementary teachers. En Furinghetti, F. (edi.) **Proceeding XV P.M.E. conference**. Assisi, Italia.

LLINARES, S. y SANCHEZ, M. V. (1996). Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales para profesores de Primaria. En Giménez, Llinares y Sánchez (edit.) *El proceso de llegar a ser profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Colección Mathema, Granada, España.

LLINARES, S. y SANCHEZ, M. V. y GARCÍA, M. (1994). Conocimiento de Contenido Pedagógico del Profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación*, nº 304, pág. 199-225.

MACK, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. **Journal for Research in Mathematics Education**. (21), 1, pag 16-32.

MACK, N. K. (1993). Learning Rational Numbers with understanding: Case of Informal Knowledge. En, Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. **Ratinal Numbers. An Integration of Research**. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale (New Jersey).

MARCK, N. K. (1995). Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge. **Journal for Research in Mathematics Education,** (26 ), 5, pág. 422-441.

MARKOVITS, Z. y SOWDER, J. (1994). Developing number sense: an intervention study in grade 7. **Journal for Research in Mathematics Education**. (25), 1, pag 4-29.

MARSHALL, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: a schema-based aproach. En Carpenter, T., Fennema, E. y Romberg, T. A. (edit) **Rational Numbers. An Integration of Research**. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Hillsdale, New Jersey.

MARTINEZ, J, PEREZ, E., OTAÑO, J.L., HERNANDO, V. y FERNANDEZ, V. (1983). **6º curso. Cálculo. Educación General Básica.** S.M. Ediciones, Madrid.

MARTORELL, M.C. (1997). Aspectos formales de la entrevista. En Martorell, M.C. y Gozáles, R. (edit.), **Entrevista y consejo psicológico.** Síntesis, Madrid.

MAURIN, C. y JOHSUA, A. (1993). **Les structures numériques á l´école primaire**. Ellipses, París.

MCNERNEY, C. (1994). A model preservice program for the praparation of Mathematics Specialist in the Elementary School. En Aichele, D. B. y Coxford, A. F.: **Professional Development for Teachers of Mathematics**. N.C.T.M., Reston, Virginia, pág, 144-151.

MCNIFF, J. (1992). **Acción Research: Principles and Practice**. Routledge, Canadá.

MICHALOWICZ, K. D. (1996). Fractions of Ancient Egypt in the Contemporary Classroom. **Mathematics Teaching in the Middle School** (1), 10, pág. 786-789.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1984) **Programas renovados de la Educación General Básica. Ciclo Medio**. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1985) **Programas renovados de la Educación General Básica. Ciclo Superior**. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1986) **Informe sobre la formación permanente del profesorado de enseñanza básica y secundaria**. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1987) **Proyecto para la reforma de la enseñanza. Propuesta para debate**. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1989) **Diseño Curricular Base. Educación Primaria**. Madrid

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1989) **Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria I**. Madrid

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1989) **Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria II**. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA, (1990). **Decreto curricular de Primaria. Area de Matemáticas**. Suplemento al número 152 del B.O.E.

MOVSHOVITZ_HARDAR, N.; ZASLAVKSY, O. y INBAR, S. (1987). An empirical clasification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education.**, 18, pág. 3-14.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICAS, N.C.T.M., (1989). **Curriculum and evaluation standars for school mathematics.** Reston, Virginia.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). **Historical topics for the mathematics classroom**. N.C.T.M., Reston (Virginia).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICAS, N.C.T.M., (1991). **Professional standars for teaching mathematics.** Reston, Virginia.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (N.C.T.M.) (1991). **Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática**. Sociedad andaluza de educación matemática "Thales", Sevilla.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL, (1989). **Everybody Counts: A report to the nation on the future of Mathematics education.** Natinal Academic Press, Washington.

NEGRO, A. y BENEDICTO, C. (1993). **Diseño Curricular para el área de Matemáticas. Enseñanza Secundaria Obligatoria**. Síntesis, Madrid.

NEUGEBAUER, O. (1969). **The Exact sciences in antiquity**. (segunda edición). Dover Publications, New Yok

NEWMAN, J.R. (1980). **Sigma. El mundo de las matemáticas.** Vol 1. Grijalbo, Barcelona.

NICKSON, M. (1992). The culture of the mathematics classroon: an unknown quantity?. En Grouws, D. A. (edit) **Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning**. Macmillan Publishing Company, New York.

NOVILLIS-LARSON, C. (1980). Locating proper fraction on number lines: Effect of length and equivalence. **School Science and Mathematics**, 53(5), pág. 423-428.

OLIVERAS, M. L. (1976). **Introducción del número racional en E.G.B. mediante el concepto de operador. Análisis comparativo con la introducción tradicional**. Tesina de Licenciatura. Universidad de Granada

OTT, J. M. et al, (1991). Understanding Partitive Division of Fractions. **Arithmetic Teacher,** (39), 2, pág. 7-11

OWENS, D. T. (edit), (1993). **Research ideas for the classroom. High school mathematics.** Macmillan Publishing Company, New York.

OWENS, D. T. y SUPER, D. B., (1993). Teaching and Learning Decimal Fractions. En Owens, D. (edit.): **Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics**. Natinal Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

PATTON, M. (1991). Qualitative research on college students: philosophical and methodological comparisons with the quantitative approach. **Journal of College Student Development,** 32 (5), pág. 389-96.

PHILIPPOU, G. y CHRISTOU, C. (1994). Prospective elementary Teachers´ Conceptual and Procedural Knowledge of Fractions. Proceedings XVIII PME, Lisboa, Portugal

PINTO; M y TALL, D. (1996). Prospective elementary Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Fractions. En **Proceedings XVIII PME.** Lisboa, Portugal.

PITKETHLY, A. y HUNTING, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. **Educational Studies in Mathematics.** (30), 1, pág. 5-38.

POST, T.R., HAREL, G., BEHR, M.J. y LESH, R. (1991). Intermediate teachers´ knowledge of rational number concept. En Fennema, E., Carpenter, T.P. y Lamon, S.J. (edit.), **Integrating research on teaching and learning mathematics.** SUNY, Albany, New York.

PUIG, L. y CALDERON, J. (1996). **Investigación y Didáctica de las Matemáticas**. Ministerio de Educación y Ciencia-CIDE, Madrid.

RADATZ, H. (1980). Student´s errors in the mathematical learning: a survey. **For the Learning of Mathematics**, 1(1), pág. 1-20.

RAMOS, A. (direct); GIL, J; VÁZQUEZ, C. y MASCARÓ, J. (1987). Matemáticas 6. Educación General Básica. Santillana, Madrid.

RAMOS, A. (direct); GIL, J. y GARCÍA, P. (1988). Matemáticas 4. Educación General Básica. Santillana, Madrid

RATSIMBA-RAJOHN, H. (1981). **Etude de deux méthodes de mesures rationalles: la commensuration et le fractionnement de l´unité, en veu d´élaboration de situations didactiques.** Tesis Doctoral, Universidad de Bordeaux I.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS. (1990). Exactas, Físicas y Naturales. **Vocabulario Científico y Técnico**. Espasa Calpe, Madrid.

RESNICK, L. B.; NESHER, P.; LEONARD, F.; MAGONE, M.; OMANSON, S. y PELED, I. (1989). Conceptual bases of artihmetic errors: the case of decimal fracctions. **Journal for Research in Mathematics Education.**, 20, pág. 8-27.

RESNICK, L. B. y FORD, W. W. (1991). **La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos**. Paidós-M.E.C., Barcelona.

RICHARDSON, V. (1994). Conducting research on practice. **Educational Researcher**, 23, pág. 5-10.

RICO, L. (1995). **Conocimiento numérico y formación del profesorado**. Universidad de Granada, Granada.

RICO, L. (1990a). Diseño curricular en Educación Matemática: Elementos y evaluación. En LLinares, S. y Sánchez, M. V. (edit.): **Teoría y práctica en Educación matemática**. Alfar, Sevilla.

RICO, L. (1990b). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En LLinares, S. y Sánchez, M. V. (edit.): **Teoría y práctica en Educación matemática**. Alfar, Sevilla.

RICO, L. (1994). Componentes básicos para la formación del profesor de matemáticas de secundaria. **Revista interuniversitaria de formación del profesorado**, (21), pág. 33-44.

RICO, L. y SAENZ, O. (1982). Programación del bloque de las fracciones en el ciclo medio de E.G.B.. En **Actas de las II J.A.E.M., tomo II**, Sociedad Andaluza de profesores de matemáticas Thales, Sevilla.

RICO, L. et al. (1984). **Estudio metodológico del número fraccionario en el 6º nivel de E.G.B**.. Epsilón, 3, Diciembre, pág. 3-24

RICO, L. y CASTRO, E. (1995). Pensamiento numérico en Educación Secundaria Obligatoria, en **Aspectos didácticos de Matemáticas. 5.** Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza.

RICO, L.; CASTRO, E. y ROMERO, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. **Proceedings 20 International Conference for the Psychology of Mathematics Education.** Valencia, España.

RITTER, J. (1992). Métrologie et préhistorie des fractions. En Benoit, P., Chemla, K y Ritter, J. (editores) (1992). **Histoire de fractions, fractions d'historie**. Birkhäusen Verlang, Berlin

ROCKE, J. (1995). A Common-Cents Approach to Fractions. **Teaching Children Mathematics**, (2), 4, pág. 234-236.

ROMBERG, T. (1992). Perspectives on Scholarschip and Research Methods. En Grouws, D. A. **Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning**. Macmillan Publishing Company, New York.

ROMERO, I. M. (1995). **Introducción del Número Real en Educación Secundaria**. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada

SABRAS GURREA, Amós (1917). **Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría.** Primera Edición. Tipografía de Vázquez y Prieto, Granada.

SANCHEZ, M. V. (1995). La formación de los profesores y las matemáticas. Algunas implicaciones prácticas de las investigaciones teóricas. **Revista de educación**. (306), pág. 397-426.

SANCHEZ, M. V. y LLINARES, S. (1992). Prospective elementary teachers' pedagogical content kwoledge obout equivalent fractions. En Greslin, W. y Graham, K. (edit.) **Proceedings XVI P.M.E. conference**. Durham, N. H.

SANCHEZ VIDAL, Bernardino (1866). **Lecciones de aritmetica.** Imprenta de F. Martínez García, Madrid.

SEMINARIO DIDACTICO "BRUÑO" DE MATEMATICAS. (1978). **Base 6 matemáticas**. Editorial Bruño, Madrid.

SCARDAMALIA, M., BEREITER, C., MCLEAN, R. S., SWALLOW, J. y WOODRUFF, E. (1989). Computer-supported intentional learning enviroments. **Journal of Educational Computing Research**, 5(1), pág. 51-68.

SCHOENFELD, A. H. (1988). When good teaching leads bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. **Educational Psychologist**, 23(2), pág. 145-166.

SIMON, M. A. (1992). **Learning Mathematics and Learning To Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education**. Comunicación presentada al Annual Meeting of the American Educational Research Association.

SIMON, M. (1993). Prospective elementary Teachers´ Kowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 24, nº 3, pág. 233-254

SIMON, M. (1994). Learnig Mathematics and Learning to Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education. Educational Studies in Mathematics, 26, pág. 71-94.

SINICROPE, R. y MICK, H. W. (1992). Multiplication of Fractions through Paper Folding. **Arithmetic Teacher,** (40), 2, pág.116-121

SMITH, D.E. (1953). **History of Mathematics**, Vol. II. Dover, New York

SMITH, M y GLASS, G. (1987). **Research and evaluation in education and social sciences**. Prentice-Hall, New Jersey.

SOCAS, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (coord.), **La educación matemática en la enseñanza secundaria**, I.C.E. Universitat de Barcelona-Horsori, Barcelona,.pág 125, 154.

SOWDER, J.T. (1995). Instructing for rational number sense. En SOWDER, J. T. y SHAPPELLE, B. P. (edit.) **Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades.** State University of New York Press, New York.

SOWDER, J.T, BEZUK, N y SOWDER, L.K. (1993). Using principles from cognitive psychology to guide rational number instruction for prospective teachers. En, Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. **Rational Numbers. An Integration of Research**. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale (New Jersey).

SOWDER, J. T.; PHILIPP, R. A.; FLORES, A. y SCHAPPELLE (1995). Instructional effects of kowledge of and about mathematics. a case study. En Sowder y Schapelle (edit.) **Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades.** State University of New York Press, Albany.

STAKE, R. (1994). Case studies. En Denzin, n. y Lincoln, Y. (edit.): **Handbook of Qualitative Research**. Sage Publications, California.

STENHOUSE, L. (1984). **Investigación y desarrollo del Currículo.** Morata, Madrid.

STREEFLAND, L. (1991). **Fractions in realist mathematics education. A paradigm of developmental research.** Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

TALL, D. y VINNER, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. En **Educational Studies in Mathematics**, 12, pág. 151-169.

TAYLOR S.J. y BOGDAM R. ( 1990). **Introducción a los métodos cualitativos de investigación**. Paidós, Buenos Aires.

THOMPSON, S. (1995). Notation, convection and quantity in elementary mathematics. En Sowder y Schapelle (edit.) **Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades**. State University of New York Press, Albany.

THOMPSON, P. y THOMPSON, A. (1994). Talking About Rates Conceptually, Part I: A Teacher´s Strunggle. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 25, nº 3, pág. 279-303.

THOMPSON, P. y THOMPSON, A. (1996. Talking About Rates Conceptually, Part II: Mathematical Knowledge for Teaching. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 27, nº 1, pág. 2-24.

THOMPSON, C. y WALKER, V. (1996). Connecting Decimals and Other Mathematical Content. **Teaching Children Mathematics,** (2), 8, pág. 496-502.

VALLEJO, J. M., (1821). **Tratado elemental de matemáticas.** Tercera edición. Imprenta del Gobierno político superior, Barcelona.

VAN LUIT, J.E.V. (edit.) (1994). R**esearch on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school**. Graviant Publishing Company, Doetinchem, Holanda.

VERGNAUD, (1990) Théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** 10, pág. 47-56.

VIDAL, E. y GIGANTE, B. G. (1989). Algunos aspectos de la Didáctica de la Matemática en la formación de maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, volumen extra III Congreso, Tomo I

WATSON, G. A. (1995). **Middle School Mathematics Teacher Change: Social Constructivism Climbs a Step**. Comunicación presentada al Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics.

WEARNE, D.; HIEBERT, J. y TABER, S. (1991). Four grades´ gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. **Elementary School Journal**. 91(4), pág. 321-341

WEISS, I. R. (1995). **Mathematics Teachers' Response to the Reform Agenda: Results of the 1993 National Survey of Science and Mathematics Education.** Comunicación presentada al Annual Meeting of the American Educational Research Association.

WIGGENSTEIN, L. (1988). **Investigaciones filosóficas**. Crítica, Barcelona.

WITTROCK, M. (1990). **La investigación en la enseñanza, III. Profesores y alumnos**. Paidós Educados, Madrid.

## ANEXO I.1 Demostración de que los repartos a:b y ap:bp tienen la misma representación polinómica unitaria

Para demostrar este resultado vamos a partir de la representación polinómica unitaria de a:b y tratamos de encontrar la representación polinómica unitaria de pa : pb siendo $p > 0$ y $p \in N$

$$\text{Sea } a : b = c + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + ... + \frac{1}{n_1 n_2 ... n_p} \qquad (1)$$

• Supongamos que $a : b = c + (r : b)$; por el resultado de (1) sabemos que $a = bc + r \Rightarrow$ $pa = pbc + pr \Rightarrow pa : pb = c + (pr : pb)$ Por tanto, en los repartos a:b y pa:pb cada uno de los participantes recibe en la primera fase la misma cantidad de magnitud, c

• Por la igualdad (1), existe $n_1 \in N$ tal que $n_1 r \geq b > (n_1\text{-}1)r$, y se cumple

$$\{(n_1 r - b) : b\}\left[\frac{1}{n_1}\right] = \frac{1}{n_1} + \{r_1 : b\}\left[\frac{1}{n_1}\right],, \quad r_1 = n_1 r - b$$

Por ser $p > 0$ y $p \in N$, de $n_1 r \geq b > (n_1\text{-}1)r$, se obtienen que

$n_1\, pr \geq p\, b > (n_1\text{-}1)\, pr \Rightarrow$ (por el principio de la mayor parte)

$$pr : pb = \frac{1}{n_1} + \{(n_1 pr - pb) : pb\}\left[\frac{1}{n_1}\right] = \frac{1}{n_1} + \{pr_1 : pb\}\left[\frac{1}{n_1}\right],, \quad r_1 = n_1 r - b$$

Por tanto, en los repartos a:b y pa:pb cada uno de los participantes recibe en la segunda fase la misma cantidad de magnitud, $\frac{1}{n_1}$

• Por la igualdad (1), existe $n_2 \in N$ tal que $n_2\, r_1 \geq b > (n_2\text{-}1)\, r_1$, y se cumple

$$r_1 : b = \frac{1}{n_2} + \{(n_2 r_1 - b) : b\}\left[\frac{1}{n_2}\right] = \frac{1}{n_2} + \{r_2 : b\}\left[\frac{1}{n_2}\right],, \quad r_2 = n_2 r_1 - b$$

Por ser $p > 0$ y $p \in N$, de $n_2\, r_1 \geq b > (n_2\text{-}1)\, r_1$ se obtienen que

$pn_2\, r_1 \geq p\, b > p(n_2\text{-}1)\, r_1 \Rightarrow$

$$pr_1 : pb = \frac{1}{n_2} + \{(pn_2 r_1 - pb) : b\}\left[\frac{1}{n_2}\right] = \frac{1}{n_2} + \{pr_2 : pb\}\left[\frac{1}{n_2}\right],, \quad r_2 = n_2 r_1 - b$$

Por tanto, en los repartos a:b y pa:pb cada uno de los participantes recibe en la tercera fase la misma cantidad de magnitud, $\frac{1}{n_2}$

Siguiendo este proceso, se comprueba que las representaciones polinómicas unitarias de los repartos a:b y pa:pb están formadas por sumandos iguales y por tanto son iguales.

## ANEXO I.2. Demostración de que los repartos

**(A)** $(pa : b)\left[\frac{1}{pn}\right] = \left\{\frac{1}{m} + \{(mpa - b) : b\}\left[\frac{1}{m}\right]\right\}\left[\frac{1}{pn}\right] =$ **y (B)** $(\mathbf{a : b})\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right]$ **difieren en el tamaño de las partes que recibe cada participante y en el número de sumandos (o fases) del reparto.**

Realizamos dichos repartos en las formas siguientes y recordamos que se efectúan con el criterio de la mayor parte

$$(pa : b)\left[\frac{1}{pn}\right] = \left\{\frac{1}{m} + \{(mpa - b) : b\}\left[\frac{1}{m}\right]\right\}\left[\frac{1}{pn}\right] =$$

$$= \frac{1}{mpn}\{(mpa - b) : b\}\left[\frac{1}{mpn}\right] ;; \quad mpa \geq b \succ (m-1)pa \quad (1)$$

$$(a : b)\left[\frac{1}{n}\right] = \left\{\frac{1}{s} + \{(sa - b) : b\}\left[\frac{1}{s}\right]\right\}\left[\frac{1}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{sn} + \{(sa - b) : b\}\left[\frac{1}{sn}\right] \;;; \quad sa \geq b \succ (s-1)a \qquad (2)$$

analizamos cada una de las posibilidades que pueden presentarse:

a) Supongamos que map - b = 0 $\Rightarrow$ map = b

$$(pa : b)\left[\frac{1}{pn}\right] = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{pn}\right] = \frac{1}{mpn}$$

$$(a : b)\left[\frac{1}{n}\right] = (a : map)\left[\frac{1}{n}\right] = (1 : mp)\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{mpn}$$

$$(a : b)\left[\frac{1}{n}\right] = (a : map)\left[\frac{1}{n}\right] = (1 : mp)\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{mpn}$$ (puesto que los repartos a: amp y 1:mp son equivalentes) Por tanto, mp = s. Es decir, las dos expresiones (A) y (B) tienen el mismo número de sumandos, y ambos son iguales.

b) map - b = 1

Las igualdades (A) y (B) se convierten en las siguientes

$$(pa : b)\left[\frac{1}{pn}\right] = \left\{\frac{1}{m} + (1 : b)\left[\frac{1}{m}\right]\right\}\left[\frac{1}{pn}\right] =$$

$$= \frac{1}{mpn} + (1 : b)\left[\frac{1}{mpn}\right] \;;;\quad mpa \geq b > (m-1)pa \qquad (1')$$

$$(a : b)\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{sn} + ((sa - b) : b)\left[\frac{1}{sn}\right] \;;;\quad sa \geq b > (s-1)a \qquad (2')$$

De map-b=1 y $a > 0$, $mp = \frac{1+b}{a} > \frac{b}{a}$ y por (2´) $a \geq b/s$

$$\Rightarrow mp > \frac{b}{a} \geq \frac{b}{b/s} = s.$$ Por tanto, **mp > s.**

c) map - b > 1

De a>0, $mp > \frac{1+b}{a} > \frac{b}{a}$ y de (2´) $a \geq b/s \Rightarrow mp > \frac{b}{a} \geq \frac{b}{b/s} = s \Rightarrow$ **mp > s**

De las desigualdad **mp > s** de los apartados b) y c) se llega a los siguientes resultados:

i.- Siendo mp > s y n positivo, mpn > sn y, por tanto, $\frac{1}{sn} > \frac{1}{mpn}$

Volviendo a las repartos (A) y (B) y comparando los desarrollos de (1) y (2), este resultado indica que modificar el tamaño de las partes provoca que los individuos reciben, en la primera fase, una cantidad de unidad mayor que si no se modifica ese tamaño.

ii.- Siendo mp > s y a positivo, mpa > sa y mpa - b > sa - b

Esta desigualdad trasladada a las situaciones (A) y (B) iniciales indica que, después de la primera fase del reparto, en el reparto (A) habrá igual o mayor número de fracciones unitarias que en el caso (B), pues en (A) existen más unidades a repartir entre el mismo número de individuos.

En consecuencia, la técnica de modificar el tamaño de las partes produce alteraciones en el tamaño de las partes y en el número se sumandos.

## ANEXO I.3. Demostración de que para comparar las representaciones polinómicas de dos repartos es suficiente comparar ordenadamente las correspondientes fracciones unitarias; en cuanto una fracción unitaria sea mayor, la correspondiente representación polinómica unitaria también es mayor.

Sean $a : b = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + ... + \frac{1}{n_p}$ $\qquad c : d = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + ... + \frac{1}{m_q}$

Vamos a probar que si $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{m_1}$ entonces, $a : b > c : d$

Por la propiedad fundamental del orden (apartado III.1.3, Capítulo III), sabemos que cada sumando es mayor que todos los que le siguen, en particular tendremos que

$$\frac{1}{n_1} < a : b = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + ... + \frac{1}{n_p} < \frac{1}{n_1 - 1} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{m_1} < c : d = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + ... + \frac{1}{m_q} < \frac{1}{m_1 - 1} \qquad (2)$$

Puesto que $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{m_1} \Rightarrow m_1 > n_1$ Vamos a suponer que $m_1 = n_1 + p$

De (1), $(a:b) > \frac{1}{n_1} = \frac{1}{(n_1+p)-1+1-p} = \frac{1}{m_1-1-(p-1)} > \frac{1}{m_1-1}$

De (2), $\frac{1}{m_1-1} > c:d$ Por tanto, $a:b > c:d$

Nótese que este resultado seguiría siendo igualmente válido al comparar fracciones unitarias que ocupen cualquier posición, no necesariamente la primera. En efecto:

Supongamos que $\frac{1}{n_1} = \frac{1}{m_1}$ y que se cumple $\frac{1}{n_2} > \frac{1}{m_2}$ Sea $m_2 = n_2 + p$

$$\frac{1}{n_2} < (a:b) - \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + ... + \frac{1}{n_p} = \frac{1}{n_2-1} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{m_2} < (c:d) - \frac{1}{m_1} = (c:d) - \frac{1}{n_1} = \frac{1}{m_2} + ... + \frac{1}{n_q} = \frac{1}{m_2-1} \qquad (2)$$

De (1) se tiene $(a:b) - \frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_2} = \frac{1}{(n_2+p)-1+1-p} = \frac{1}{m_2-1-(p-1)} > \frac{1}{m_2-1}$

De (2) se tiene $\frac{1}{m_2-1} > (c:d) - \frac{1}{n_1}$

Por tanto, $(a:b) - \frac{1}{n_1} > (c:d) - \frac{1}{n_1}$ de donde $(a:b) > (c:d)$

A la vista de estos resultado, podemos enunciar que la forma general de comparar dos representaciones polinómicas unitarias se hace del siguiente modo:

- Si $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{m_1}$ entonces, $(a:b) > (c:d)$ ( si $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{m_1}$ entonces $(a:b) < (c:d)$ )
- Si $\frac{1}{n_1} = \frac{1}{m_1}$ , comparar las siguientes fracciones unitarias:
  - Si $\frac{1}{n_2} > \frac{1}{m_2}$ entonces, $(a:b) > (c:d)$ ( si $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{m_2}$ entonces$(a:b) < (c:d)$ )
  - Si $\frac{1}{n_2} = \frac{1}{m_2}$ , comparar las siguientes fracciones unitarias.

De este modo se siguen comparando las fracciones unitarias que ocupen el mismo lugar en las dos representaciones polinómicas unitarias. En cuanto aparezca una de esas fracciones unitarias que sea mayor (o menor) que la correspondiente fracción unitaria ya se puede determinar cuál de las dos representaciones polinómicas unitarias es mayor; en el caso en que todas las fracciones unitarias sean iguales, las correspondientes representaciones polinómicas unitarias son también iguales.

## ANEXO I.4. Reflexiones acerca del cálculo de la suma de dos representaciones polinómicas unitarias

Para buscar un mecanismos de cálculo que permita obtener la representación polinómica unitaria suma de otras dos, se requiere atender a los aspectos siguientes:

1.- Sumar los enteros de cada representación

2.- Si aparecen dos fracciones de tamaño 1/2, sustituirlas por 1.

3.- Ordenar las fracciones restantes en orden decreciente y si hay pares de fracciones unitarias iguales aplicar las siguientes igualdades:

- si n es par $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n/2}$
- si n impar $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)/2} + \frac{1}{n(n+1)/2}$

4.- Reducir las fracciones unitarias aplicando los siguientes resultados:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ • $\frac{1}{a} + \frac{1}{ap} = \frac{1}{bp}$ siendo a = (p+1) b

5.- Una vez que todas las fracciones unitarias son diferentes, se han reducido en lo posible y están ordenadas en orden decreciente, hay que buscar la fracción mayor, la mayor parte. Para ello, se toman las dos primeras fracciones unitarias, 1/n y 1/p y se actúa de la forma siguiente:

a) Si $p \geq n^2$ la fracción mayor es 1/n

b) Si $p < n^2$ la fracción mayor, 1/m, se obtiene con la condición de que se cumpla
$m(n+p) \geq n.p > (m-1)(n+p)$

6.- Una vez que se conoce cuál debe ser la fracción unitaria mayor, la mayor parte, hay que establecer relaciones entre las fracciones unitarias disponibles y la que se busca. Para ello, pueden utilizarse relaciones como las siguientes:

- $\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$
- $\frac{1}{n-p} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n(n-p)}{p}}$ siendo p divisor de n
- $\frac{1}{pq} = \frac{1}{(p+1)q} + \frac{1}{p(p+1)q}$

7.- Queda toda una compleja tarea de transformación de las otras fracciones unitarias para que el resultado se vaya configurando como fracciones cuyos denominadores serán múltiplos de la parte mayor. Y esta tarea no hemos encontrado el modo de hacerla siguiendo pautas generales de comportamiento.

## ANEXO I.5. Procedimientos para la reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto conocida su expresión polinómica decimal, en los supuestos de que dicha expresión contenga un número finito o infinito de sumandos

Caso a: Hay un número finito de sumandos.

PROCEDIMIENTO I: **reconstruir el proceso desde el final**

Sea la representación polinómica decimal siguiente:

$$c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] \;;;\; 0 \leq a_1, a_2, ..., a_s \leq 9$$

El objetivo es el de reproducir las condiciones iniciales del reparto que han ocasionado esta expresión. Para ello, recordemos que el resultado del reparto se obtiene en distintas fases y, por tanto, hay que conocer lo que ocurrió en cada una de ellas; así que habremos de transformar la representación inicial:

i) $$c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^3}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] =$$
$$= c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + \left\{a_2\left[\frac{1}{10}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^{s-1}}\right]\right\}\left[\frac{1}{10}\right]$$

ii) $$a_2\left[\frac{1}{10}\right] + a_3\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^{s-1}}\right] =$$
$$= a_2\left[\frac{1}{10}\right] + \left\{a_3\left[\frac{1}{10}\right] + a_4\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^{s-2}}\right]\right\}\left[\frac{1}{10}\right]$$

Y así sucesivamente,

s-2) $$a_{s-2}\left[\frac{1}{10}\right] + a_{s-1}\left[\frac{1}{10^2}\right] + a_s\left[\frac{1}{10^3}\right] = a_{s-2}\left[\frac{1}{10}\right] + \left\{a_{s-1}\left[\frac{1}{10}\right] + a_s\left[\frac{1}{10^2}\right]\right\}\left[\frac{1}{10}\right]$$

s-1) $$a_{s-1}\left[\frac{1}{10}\right] + a_s\left[\frac{1}{10^2}\right] = a_{s-1}\left[\frac{1}{10}\right] + a_s\left[\frac{1}{10}\right]\left[\frac{1}{10}\right]$$

Ahora hay que calcular el reparto del que procede esta última expresión, pero teniendo en cuenta que dicho reparto está finalizado, que $a_s\left[\frac{1}{10}\right]$ admite un reparto sin resto, $a_s$:10, o reparto equivalente.

Recordando como se procede para obtener la representación polinómica decimal, esto significa que estamos ante la igualdad $x : b = a_{s-1}\left[\frac{1}{10}\right] + (a_s:10)\left[\frac{1}{10}\right]$ Bastará calcular el valor de x, en

$10\,x = b\, a_{s-1} + a_s \;;;\; b=10$

Si x no fuese entero, ello significa que el reparto no procede de x:b sino de otro equivalente, px:pb, con lo que el valor de x se obtendrá de la igualdad $x : pb = a_{s-1}\left[\frac{1}{10}\right] + (pa_s:p10)\left[\frac{1}{10}\right]$

Y una vez encontrada esta fracción, hay que ir recorriendo los pasos en orden inverso, en cada uno de los cuales hay que encontrar la fracción cuya representación polinómica decimal está compuesta por dos fracciones. Así, en el paso s-2 llegaríamos a $a_{s-2}\left[\frac{1}{10}\right]$

$$a_{s-2}\left[\frac{1}{10}\right]+\left\{a_{s-1}\left[\frac{1}{10}\right]+a_s\left[\frac{1}{10^2}\right]\right\}\left[\frac{1}{10}\right] = a_{s-2}\left[\frac{1}{10}\right]+(x:pb)\left[\frac{1}{10}\right]$$

En el último paso encontraríamos las condiciones iniciales del reparto

$$A : z= c + (y:z)\left[\frac{1}{10}\right] = 10c\left[\frac{1}{10}\right] + (y:z)\left[\frac{1}{10}\right]$$

De donde, 10A = 10c + y (o bien, 10A=10qc+qy, en el caso de que A no sea un número entero)

PROCEDIMIENTO II: **reconstruir el proceso en orden secuencial**

Sea la representación polinómica decimal

$$c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_s\left[\frac{1}{10^s}\right] \;;;\; 0 \le a_1, a_2, ..., a_s \le 9$$

Y vamos a reconstruir el proceso de reparto en la forma en que se produjo, para lo que vamos a recorrer las diferentes fases, desde la fracción inicial:

1) $a : b = c + (a\text{-}bc) : b$

2) $(a\text{-}bc) : b = a_1\left[\frac{1}{10}\right] + [(10a\text{-}10bc\text{-}ba_1) : b]\left[\frac{1}{10}\right]$

3) $(10a\text{-}10bc\text{-}ba_1) : b = a_2\left[\frac{1}{10}\right] + [(10^2a\text{-}10^2bc\text{-}10ba_1\text{-}ba_2) :b]\left[\frac{1}{10}\right]$

3) $(10^2a\text{-}10^2bc\text{-}10ba_1\text{-}ba_2):b = a_3\left[\frac{1}{10}\right] + [(10^3a\text{-}10^3bc\text{-}10^2ba_1\text{-}10ba_2\text{-}ba_3):b]\left[\frac{1}{10}\right]$

................

p-1) $(10^{p-2}a\text{-}10^{p-2}bc\text{-}10^{p-3}ba_1\text{-} ... \text{-} ba_{p-2}) : b =$

$= a_{p-1}\left[\frac{1}{10}\right] + [(10^{p-1}a\text{-}10^{p-1}bc\text{-}10^{p-2}ba_1\text{-} ... \text{-} 10ba_{p-2}\text{-}ba_{p-1}) : b]\left[\frac{1}{10}\right]$

p) $(10^{p-1}a\text{-}10^{p-1}bc\text{-}10^{p-2}ba_1\text{-} ... \text{-} 10ba_{p-2}\text{-}ba_{p-1}) : b =$

$= a_p\left[\frac{1}{10}\right] + [(10^pa\text{-}10^pbc\text{-}10^{p-1}ba_1\text{-}...\text{-}10ba_{p-1}\text{-}ba_p) : b]\left[\frac{1}{10}\right] = a_p\left[\frac{1}{10}\right] + (0 : b)\left[\frac{1}{10}\right]$

De donde $10^pa\text{-}10^pbc\text{-}10^{p-1}ba_1\text{-} ... \text{-} 10ba_{p-1}\text{-}ba_p = 0$

Por tanto, $a : b = (10^pc+10^{p-1}a_1+ ... +10a_{p-1}+a_p) : 10^p$

<u>Caso b: hay un número infinito de sumandos</u>

Utilizaremos únicamente el procedimiento de reconstrucción secuencial del reparto, pues el de hacerlo desde el final es similar al empleado en el caso de un número finito se sumando, pues al aparecer infinitos sumandos tiene que repetirse las condiciones del reparto en alguna fase.

Describimos la técnica de reconstrucción en las dos situaciones que pueden presentarse: se repiten las cantidades de las partes desde el principio, o se repiten a aprtir de un número finito de sumandos:

*b.1. Todas las partes (de distintos tamaños) se van repitiendo siguiendo el mismo orden.*

Sea una expresión polinómica decimal de este tipo

$$a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10p}\right] + a_{p+1}\left[\frac{1}{10^{p+1}}\right] + a_{p+2}\left[\frac{1}{10^{p+2}}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^{2s}}\right] + ...$$

De acuerdo con la construcción de la r.p.d., a esta expresión se llega desde

$$a : b = c + a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^p}\right] + (a : b)\left[\frac{1}{10^p}\right] \qquad (1)$$

Reconstruyendo el proceso se tendrá

1) $a : b = a_1\left[\frac{1}{10}\right] + (10a\text{-}ba_1) : b\left[\frac{1}{10}\right]$

2) $(10a\text{-}ba_1) : b = a_2\left[\frac{1}{10}\right] + [10(10a\text{-}ba_1)\text{-}ba_2] : b\left[\frac{1}{10}\right] = a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + [(10^2a\text{-}10ba_1\text{-}ba_2) : b]\left[\frac{1}{10}\right]$

3) $(10^2a\text{-}10ba_1\text{-}ba_2) : b = a_3\left[\frac{1}{10}\right] + [(10^3a\text{-}10^2ba_1\text{-}10ba_2\text{-}ba_3):b]\left[\frac{1}{10}\right]$

................

p-1) $(10^{p-2}a-10^{p-3}ba_1- ... - ba_{p-2}) : b$ =

$= a_{p-1} \left[\frac{1}{10}\right] + [(10^{p-1}a-10^{p-2}ba_1- ... - 10ba_{p-2}-ba_{p-1}) : b] \left[\frac{1}{10}\right]$

p) $(10^{p-1}a-10^{p-2}ba_1- ... - 10ba_{p-2}-ba_{p-1}) : b$ =

$= a_p \left[\frac{1}{10}\right] + [(10^{p}a-10^{p-1}ba_1- ... - 10ba_{p-1}-ba_{p}) : b] \left[\frac{1}{10}\right]$

Y al comparar con (1), $(10^{p}a-10^{p-1}ba_1- ... - 10ba_{p-1}-ba_{p}) : b \sim a : b$

De donde $a : b \sim (10^{p-1}a_1+ ... + 10a_{p-1}+ a_p) : (10^p - 1)$

Así quedan establecidas las condiciones iniciales del reparto **o las de un reparto equivalente**

NOTA: En el caso de que la representación decimal no comience por la primera potencia de 10, que sea de la siguiente forma

$$a_1\left[\frac{1}{10^{q+1}}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^{q+2}}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^{q+p}}\right] + a_1\left[\frac{1}{10^{q+p+1}}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^{q+2p}}\right] +...$$

bastará tener en cuenta la igualdad

$$a:b = \left\{a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^p}\right] + (c:d)\left[\frac{1}{10^p}\right]\right\}\left[\frac{1}{10^p}\right]$$

Y, una vez calculado el reparto que aparece entre llaves, m:n, se tiene que

$a:b=(m:n) \left[\frac{1}{10^p}\right] = m : (10^q\, n)$ por el resultado del apartado anterior.

*b.2. A partir de una fracción de la expresión polinómica decimal hay fracciones decimales que se van repitiendo en el mismo orden.*

$$a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^p}\right] + b_1\left[\frac{1}{10^{p+1}}\right] + b_2\left[\frac{1}{10^{p+2}}\right] + ... + b_q\left[\frac{1}{10^{p+q}}\right] +$$
$$+ b_1\left[\frac{1}{10^{p+q+1}}\right] + b_2\left[\frac{1}{10^{p+q+2}}\right] + ... + b_q\left[\frac{1}{10^{p+2q}}\right] + ...$$

Las condiciones iniciales del reparto se harán en dos pasos:

1º Encontrar el reparto c:d que corresponde a la representación

$$c:d = + b_1\left[\frac{1}{10^{p+q+1}}\right] + b_2\left[\frac{1}{10^{p+q+2}}\right] + ... + b_q\left[\frac{1}{10^{p+2q}}\right] + ...$$

Reparto que se puede obtener con lo expuesto en el apartado inmediatamente anterior.

2º. Encontrar el reparto que produce

$$a : b = a_1\left[\frac{1}{10}\right] + a_2\left[\frac{1}{10^2}\right] + ... + a_p\left[\frac{1}{10^p}\right] + (c:d)\left[\frac{1}{10^p}\right]$$

Los valores de a y b se encontrarán tal y como se indicó para el caso que la representación polinómica decimal tenga un número finito de sumandos.

# ANEXO II

## Diario de Clase

El desarrollo de cada una de las sesiones de clase se organiza atendiendo a los aspectos siguientes:

1.- Plan previsto
2.- Ejecución
3.- Aspectos actitudinales
4.- Aspectos relacionados con la comprensión.
5.- Valoración.
6.- Toma de decisiones

**Día 28-10-97**

<u>Plan previsto.</u>

Exposición de modelos y sistemas de representación.
Propuesta de trabajo: Ficha 1, actividades 1 y 2
Presentar la representación a:b
Propuesta de trabajo: Ficha 1, actividad 3.

<u>Ejecución</u>

- La primera sesión se alargó hasta 1 hora con la intención de profundizar, mediante la explicitación de ejemplos, en las nociones de sistema de representación externa, para lo que se utilizaron sistemas de representación orales, simbólicos y gráficos de los números naturales.
- La segunda sesión demandó 1 hora para hacer las actividades 1 y 2 propuestas en las ficha 1.

<u>Aspectos actitudinales</u>

- Se recordó a los estudiantes que los trabajos que realizasen en clase serían tenidos en cuenta para la calificación final, en las condiciones establecidas al inicio del curso. Los estudiantes mostraron una excelente disposición para el trabajo.

<u>Aspectos relacionados con la comprensión.</u>

- En la actividad 1 los estudiantes manifestaron dificultades en la comprensión de la tarea puesto que pretendían emular los ejemplos expuestos en las explicaciones del profesor y que se referían a los números naturales. Se alertó, de forma pública, que la tarea consistía en realizar la acción que se sugería en la actividad y, posteriormente, elaborar, mediante representaciones gráficas, un medio de comunicar a sus compañeros lo que habían obtenido. Con esta advertencia los alumnos completaron la tarea, aun cuando aparecieron varias respuestas en las que las representaciones gráficas iban acompañadas de algún texto escrito.
- En la utilización de un sistema de representación simbólico los estudiantes encuentran más dificultades que en el sistema gráfico, derivadas de una preconcepción de no recurrir a símbolos conocidos. De hecho, quienes optaron por simbolizar el reparto con una división escribieron textos explicativos. Otros estudiantes utilizan representaciones gráficas en las que los objetos son identificados con números o con letras.
- Al realizar las tareas propuestas en la actividad 3, se pusieron de manifiesto limitaciones en la interpretación de la expresión literal a:b. Aunque tal expresión fue presentada como representación de un reparto cualquiera de a unidades de magnitud entre b individuos, algunos estudiantes asociaron cada letra a un significado muy concreto, de modo que la letra a iba asociada a unidades de magnitud, mientras que la letra b hacía siempre referencia a individuos; es decir, no interpretaron las letras como parámetros sino como elementos identificativos de una clase de objetos. De este modo les resultaban carentes de sentido expresiones como a:a pues entendían que esa expresión representaba el reparto de a unidades entre a unidades.
- Aun cuando algunos estudiantes indican la división como representación simbólica del reparto, hay diferencias sintácticas y semánticas. Hay alumnos que utilizan la clásica caja de división y la interpretación que dan a la misma es la de división euclídea; mientras que otros alumnos utilizan dos puntos e interpretan la misma como división racional señalando que les corresponde a cada jugador 3 raquetas y un trozo de raqueta.

<u>Valoración.</u>

- La tarea propuesta resultó dificultosa porque se exigía un sistema de representación que contemplase tres elementos: las unidades a repartir, el número de participantes en el reparto y el resultado del reparto. Y los ejemplos que se habían comentado a los estudiantes hacían referencia a la representación de un único elemento, el número de objetos de una colección.

- La utilización de expresiones literales puede provocar errores de interpretación en algunos estudiantes, por lo que habrá que ser cuidadoso en la exposición de resultados generales.

**Día 30-10-97**

Plan previsto.

Definición del modelo (tortillas, repartir de forma igualitaria, superficie).

Propuesta de trabajo: Cuestión de Investigación 1

Ejecución

- Se utilizaron 2 horas para realizar las 5 tareas. Algunos alumnos finalizaron las mismas con 10 minutos de antelación.

Aspectos actitudinales

- Los estudiantes mostraron una buena predisposición para el trabajo, aunque al final de la misma algunos de ellos pusieron de manifiesto, sin atisbos de acritud alguna, que la sesión les resultó algo fatigosa.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- En la tarea 1 los estudiantes preguntaron de forma casi generalizada sobre el significado de la expresión repartos equivalentes. Solamente se hicieron referencias a que se ese término tiene un uso frecuente en matemáticas y en algunos aspectos de la vida cotidiana.
- En la tarea 2 se hizo una intervención general por parte del profesor para indicar que lo que se pedía en la última parte de la la actividad era la simbolización de 5 repartos que cumpliesen la doble condición de ser mayores de 2:3 y menores de 4:5

Valoración.

- Los estudiantes parecen más habituados a la utilización de técnicas algorítmicas que a la interpretación de las mismas. Por ello, no encuentran utilidad al modelo propuesto, o cuando menos, no les sirve para formular las justificaciones que se les exigen. Posiblemente habría que dedicar más tiempo a la familiarización con el modelo.
- La simbología utilizada no es aceptada por los estudiantes, por cuanto muchos de ellos interpretan las expresiones a:b como divisiones, mientras que para otros muchos esta simbología queda anulada por la notación fraccionaria habitual. Es un elemento a revisar, en el sentido de sustituir el signo : por otro que no sea habitual en las tareas escolares, como por ejemplo #, o bien recurrir al empleo de pares de números naturales (a,b); en cuanto al uso de la notación fraccionaria cabe la posibilidad de plantear a los estudiantes la inoportunidad de utilización de otros símbolos distintos de los que se presenten en el aula.

Toma de decisiones

- Se acuerda iniciar la próxima sesión recordando a los alumnos el significado de un modelo y el papel que juega en la construcción de los significados; en revisar la sintaxis y las características semánticas de la notación utilizada, así como las concepciones matemáticas de los estudiantes y el modo en que pueden modificarse.

**Día 4-11-97**

Plan previsto.

Revisión del modelo y posibilidades que ofrece: relaciones de equivalencia y orden, así como su caracterización; significado de las operaciones y obtención del resultado.

Iniciación a la representación del resultado del reparto igualitario.

Propuesta de trabajo: Ficha de trabajo 2

Aspectos actitudinales

- La asistencia fue más reducida que en sesiones anteriores debido a que algunos estudiantes tenían que preparar sus intervenciones para presentar trabajos en otras asignaturas.
- La disposición al trabajo por parte de los estudiantes sigue siendo excelente; sin embargo, no se ha conseguido crear un foro de discusión en el aula, pues los estudiantes no quieren manifestar sus opiniones o discrepancias, se limitan a asentir cuando habla el profesor.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- Buena parte de la sesión sirvió para que el profesor reforzara el sentido que tiene la utilización de un modelo y las exigencias sintácticas y semánticas de un sistema de representación.
- Las impresiones percibidas por el profesor denotan que los estudiantes comprendían la potencialidad del modelo y el modo en que la la simbología utilizada permite representar las acciones realizadas en el modelo.
- Un alumno sugirió que se sustituyese la representación propuesta por las notación fraccionaria habitual, puesto que las fracciones también indican divisiones. No pudo establecerse discusión, a pesar de que se le propuso que mantuviese su propuesta, por cuanto las razones esgrimidas por el profesor fueron aceptadas por el alumno.

Valoración.
- Los estudiantes van aceptando que la potencialidad del modelo les permite la construcción del conocimiento; además, tal construcción la observan como elaboración propia, como resultado de una reflexión sobre las acciones que les garantiza la veracidad o falsedad de las afirmaciones que realizan.
- Hay que atender a la evolución de la forma de trabajo de los estudiantes, prestando atención a la utilización del modelo y al uso correcto de la simbolización propuesta.

**Día 6-11-97**

Plan previsto.

Delimitar la técnica de reparto por fases, describiendo los elementos que deben tomarse en consideración.

Simbolización del reparto por fases: el tamaño de las partes y el reparto de partes de unidad.

Propuesta de trabajo: Ficha de trabajo 3

Ejecución
- La mayoría de los estudiantes no completaron en su totalidad las tareas propuestas en la ficha 3, debido a que el tiempo de que dispusieron no se correspondía con el que realmente hubiesen necesitado.

Aspectos actitudinales
- La asistencia fue más reducida que en sesiones anteriores debido a que algunos estudiantes tenían prevista una salida al exterior en otra asignatura.
- Es prácticamente inexistente el debate colectivo; los estudiantes asienten ante el discurso del profesor y, aunque se les invita, no argumentan ante las pocas preguntas de algún compañero.
- Los estudiantes muestran una mejor comprensión de las tareas propuestas, tanto es así que no formularon ninguna pregunta en tal sentido cuando se les entregó la ficha 3

Aspectos relacionados con la comprensión.
- La sesión sirvió para que el profesor mostrara las técnicas de reparto que los estudiantes habían utilizado en las actividades de la ficha 2, así como las peculiaridades de los distintos sistemas de representación utilizados.
- Los estudiantes admitieron que las representaciones habladas no las habían utilizado, tan solo había descrito el proceso; posiblemente se debía a que los alumnos, como consecuencia de su práctica escolar, no están tan habituados a las representaciones orales como lo están a las gráficas y a las simbólicas
- Es muy bajo el número de estudiantes que introdujeron el procedimiento del reparto por fases, posiblemente ello ocurre como consecuencia de su experiencia con fracciones, que siempre aparecen divididas en un número igual de partes.
- Resulta llamativo que los estudiantes no hagan referencia a la unidad de medida con la que están trabajando, a pesar de que en la presentación del modelo se señaló que la igualdad en el reparto venía indicada por la igualdad de la cantidad de magnitud recibida.
- Los errores detectados en las representaciones simbólicas tienen un origen importante en la no explicitación de la unidad de medida que se utiliza, así como a las relaciones de esta unidad con las partes en que se fracciona.
- Cuando el profesor exponía la necesidad de hacer referencia a la unidad con la que se medía la cantidad de magnitud el estudiante nº 40 formuló la siguiente pregunta:

*Pero, el numerador de una fracción no tiene que ser siempre...., corresponder a la unidad, sino que puede corresponder a varias unidades, a lo que se llama un todo discreto*

El profesor hizo notar al alumno que el modelo en el que se trabaja la magnitud es continua y la observación fue admitida de inmediato por el alumno.

Valoración.
- Tanto si los estudiantes trabajan con fracciones, como si lo hacen con la simbología del reparto, no tienen en cuenta la unidad a que hacen referencia. Será conveniente mostrar a los estudiantes los errores que se cometen como consecuencia de ello; y que seguramente se hubiesen reducido con una revisión de los resultados obtenidos en las tareas.
- La aparición de los repartos en varias fases no se ha producido en la cantidad esperada; posiblemente una variación en las consignas dadas para la realización de las tareas (como indicar que dividir las tortillas en 5 partes y dar 1 a cada uno es equivalente a dividirla en 10 partes y dar dos partes a cada una de los personas), hubiese mejorado los resultados.

Toma de decisiones
- La tarea se considera de utilidad para los estudiantes, tanto por la relación entre diferentes sistemas de representación, como por el esfuerzo de simbolización de las acciones realizadas sobre el modelo. Habrá que analizar si en la tarea siguiente los estudiantes mejoran los sistemas de representación.

**Día 11-11-97**

Plan previsto.

Analizar algunos errores cometidos en la realización de la ficha 3, en concreto se tienen previstas 4 cuestiones para desarrollar en la sesión.

Desarrollar el debate entre los alumnos

Ejecución

- Solamente se puedo debatir en torno a la primera de las cuestiones previstas, porque los alumnos emplearon más de 20 minutos en interpretar y realizar la tarea prevista y porque el debate posterior llevo a la confrontación de dos concepciones diferentes, sin que los argumentos esgrimidos llevasen a la unanimidad de criterios.

Aspectos actitudinales

- Los estudiantes mostraron una actitud huidiza ante la presencia de la cámara; dicha actitud desaparecía en el momento en que el alumno se implicaba abiertamente en el debate, aun cuando permanece la duda de si la presencia de la cámara impidió que fuesen más alumnos los que se implicasen en el debate.
- Ante la dificultad de mantener argumentaciones exclusivamente orales tres alumnos aceptaron la invitación de utilizar el encerado para hacer representaciones gráficas y simbólicas ante sus compañeros.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- La cuestión propuesta para el debate se centró en dos aspectos específicos, que aparecieron de manera secuenciada:
    • el primero sirvió para poner de manifiesto los errores producidos al hacer reiteradas divisiones de partes de la unidad sin tener en cuenta la medida con respecto a la unidad de dichas partes;
    • el segundo, más extenso, sirvió para que un grupo de alumnos buscase argumentos que convenciesen a otro grupo de compañeros que tenían la convicción de que repartir tiene el significado de fraccionar.

Valoración.

- Tanto en opinión del profesor, como en la de los alumnos con los que el profesor conversó al finalizar la sesión, la experiencia se mostraba enriquecedora por cuanto quedó patente la dificultad que entraña modificar los conocimientos personales de otra persona; así como por la exigencias del debate de buscar argumentos distintos para ofrecer visiones diferentes de una misma idea.
- La bondad de la experiencia aconseja completar el trabajo hasta que se finalice la discusión de las 4 cuestiones que estaban inicialmente propuestas. En consecuencia, la próxima sesión se utilizará para debatir las propuestas pendientes.

**Día 13-11-97**

Plan previsto.

Continuar el análisis de 3 tareas realizadas por los estudiantes y que no se finalizaron en la sesión precedente.

Desarrollar el debate entre los alumnos.

Introducir la técnica de reparto por fases utilizando el criterio de la mayor parte.

Ejecución

- El desarrollo de los debates limitó grandemente el tiempo inicialmente pensado para presentar el criterio de la mayor parte, de tal forma que se expusieron los aspectos esenciales, pero no dio tiempo a plasmarlo en un ejemplo, tal y como se había pensado.

Aspectos actitudinales

- Lo estudiantes mostraron una predisposición para el debate menos participativa que el día anterior. Aparte de motivos de posible cansancio, el debate no fue tan intenso debido a que la composición de los grupos era distinta, puesto que, a diferencia de la sesión precedente, en cada uno de los grupos había algún alumno con sólidos conocimientos del tema y, en consecuencia, no hubo discrepancias entre alumnos pues en cada uno de los grupos la discusión interna había llevado a la uniformidad de respuestas correctas. No obstante, sí que aparecieron aspectos dignos de consideración.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- En la Cuestión de debate nº 2, todos los grupos manifestaron que en la solución no figuraba el reparto de la parte que sobraba en la tercera fase, es decir 1/144. Para llegar a esa respuesta los estudiantes habían reproducido el proceso de reparto valiéndose de representaciones gráficas.
- En la cuestión nº 3 se planteo un debate sobre la forma de correcta de simbolizar el reparto. Unos alumnos defendían la simbolización (3 : 7) $\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right]$ mientras que para otros la formulación correcta debía ser (1 : 7) $\left[\frac{3}{5}\right]$ La discusión permitió mostrar la equivalencia de ambas formulaciones.

El alumno nº 40 también planteó la incorrección de la respuesta que figuraba en el trabajo en base a que no se debía admitir la simbolización $(3:7)\left[\frac{3}{5}\right]$ pues en ella no se reflejaba el resultado del reparto; en su opinión debería aparecer $\frac{3}{7}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right]$

- La cuestión nº 4 suscitó menos debate pues los distintos grupos manifestaron que los errores eran producidos por no tener en cuenta el tamaño de las partes que se reparten en la segunda fase.

A propuesta del profesor, se suscitó un pequeño debate en torno a la sintaxis: si era admisible escribir $\frac{5}{6}$ [1] :7 . Los alumnos, ante las propuestas de otros compañeros, observaron la incorrección ocasionada por no repartir un número entero de unidades.

Valoración.

- El debate colectivo no fue tan enriquecedor como el de la sesión precedente, debido, en buena parte, a que la sesión anterior había servido para que los alumnos pudiesen superar las concepciones erróneas que tenían.

No obstante, las discusiones en pequeño grupo, y debido a la composición de los mismos, permitió que los estudiantes pudiesen debatir sus concepciones con otros compañeros y llegar (como se puso de manifiesto en el debate general), a las respuestas correctas.

**Día 18-11-97**

Plan previsto.

Recoger la actividad 1 de la ficha 4

Introducir el procedimiento de reparto por fases utilizando el criterio de la mayor parte. Practicar dicha técnica de reparto

Propuesta de trabajo: ficha 4

Ejecución

- Se realizaron las tareas previstas

Aspectos actitudinales

- Debido a que la sesión anterior tuvo una asistencia reducida y a que algunos alumnos tuvieron que abandonarla antes de su finalización (para preparar exposiciones que debían realizar en otra asignatura), la actividad 1 de la ficha 4 la entregaron 24 alumnos.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- Un estudiante planteo la posibilidad de introducir ligeras modificaciones en la representación simbólica, cual era el uso indiferente de paréntesis o corchetes. Se le hizo saber que los símbolos que se utilizan en la representación de las acciones tienen asignado un significado preciso; en nuestro caso, la utilización de corchetes se reserva para indicar el tamaño de las partes, con relación a la unidad. El alumno mostró su conformidad con la justificación ofrecida por el profesor.

Valoración.

- Los alumnos realizaron las tareas sin hacer preguntas al profesor. Pensamos que las tareas referidas a la práctica de técnicas están más cercanas a su experiencia de aprendizaje de las matemáticas, que las tareas referidas a la explicitación de significados.
- Las actividades propuestas se consideran oportunas por cuanto con ellas se ha consolidado la introducción de una representación simbólica en la que mostraron dificultades, tanto en aspectos sintácticos como semánticos.

**Día 20-11-97**

Plan previsto.

Realizar las cuestiones de investigación nº 2

Ejecución

- En la primera parte de la sesión se realizaron las tareas 1 y 2. En la segunda, solamente se pudo realizar la tarea 3, pues los alumnos emplearon más tiempo del que en principio se preveía y, a falta de 10 minutos para acabar la sesión, no se consideró oportuno iniciar la tarea 4 puesto que el tiempo disponible era muy reducido; además, los alumnos daban muestra de cansancio.

Aspectos actitudinales

- La asistencia fue algo menor que la sesión anterior. Entre las causas puede citarse que al día siguiente se celebraba la fiesta del centro y que algunos estudiantes estaban implicados en la organización de la misma.

Aspectos relacionados con la comprensión.
- Los alumnos preguntaron, en las tareas 1 y 2, si los repartos se realizaban con el criterio de la mayor parte a pesar de que se había señalado tal circunstancia al presentar las tareas. También preguntaron, en la tarea 3, por el significado de los corchetes, aun cuando tal simbología venía utilizándose habitualmente.
- Algunos alumnos preguntaron si era posible hacer justificaciones con casos particulares, pues les resultaba dificultoso dar argumentos generales.
- Los alumnos, cuando así lo exigía el trabajo, tendían a utilizar resultados operatorios con fracciones. El profesor tuvo que hacer una intervención pública para reorientar la tarea, en el sentido de que lo que se exigía era interpretar y justificar en el modelo propuesto.

Valoración.
- Se ha puesto de manifiesto que los estudiantes explicitan sus deficiencias conceptuales ante tareas como las propuestas, tales como el significado de las acciones, el contenido semántico de la representación simbólica o la poca atención que se concede a la sintaxis (se tiende a sustituir por la notación fraccionaria)
- Tanto por las preguntas formuladas al profesor, como por la comunicación establecida entre compañeros, pensamos que la propuesta es adecuada para consolidar aspectos conceptuales.

**Día 25-11-97**

Plan previsto.

Determinar las condiciones del reparto conocida su representación polinómica unitaria
Realizar la tarea 4 de las Cuestiones de investigación 2

Ejecución
- Los alumnos solicitaron autorización para realizar una asamblea informativa, por lo que la sesión se redujo en 40 minutos

Aspectos actitudinales
- Los alumnos hicieron preguntas al profesor, en número mayor que el de otras ocasiones, debido a las dificultades que encontraron en la realización de la segunda parte de la tarea, pues debían utilizar repartos equivalentes.

Aspectos relacionados con la comprensión.
- A los estudiantes se les presentó la tarea con la exigencia de que reconstruyesen el proceso de reparto en orden inverso a como se había trabajado para obtener la representación polinómica unitaria. En ese sentido se indicó que no se admitirían como respuesta la comprobación de respuestas que hayan intuido o que hayan conocido a través de sus compañeros.
- La tarea puso de manifiesto que hay alumnos que todavía encuentran dificultades en dotar de significado a los símbolos que se vienen utilizando. Ello provocó que algunos estudiantes no entendiesen las manipulaciones realizadas para que apareciesen expresiones de la forma 1/x + (a:b) [1/x], a pesar de que eran necesarias para la reconstrucción del reparto.
- El alumno nº 6 preguntó por la posibilidad de que la forma en que realizaba la tarea era la admitida o no. El citado alumno actuaba del siguiente modo

$$\mathbf{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}} + (\mathbf{6:6})\left[\frac{1}{6}\right] = \mathbf{\frac{1}{2}} + (\mathbf{2:6})\left[\frac{1}{2}\right] =$$
$$= (6:6)\left[\frac{1}{2}\right] + (2:6)\left[\frac{1}{2}\right] = (8:6)\left[\frac{1}{2}\right] = (4:6)[1] = 2:3$$

Este estudiante recurre a la modificación de partes para realizar una suma de repartos. El profesor le respondió que su trabajo no era el que se pedía por cuanto no se tiene en cuenta el proceso de reparto, tal y como figuraba en la propuesta de la tarea. Además, el profesor consideró conveniente eliminar esta técnica por cuanto la posibilidad de que se modifiquen las partes producirá efectos no deseados en la representación polinómica decimal, como son los de que puedan aparecer partes que son de tamaños distintos de las potencias de 10.

Valoración.
- La actividad ha resultado muy positiva puesto que ha obligado a los estudiantes a reflexionar sobre los conocimientos trabajados en estas sesiones de clase; y, sobre todo, para revisar las conexiones entre la simbología utilizada y el modelo propuesto
- Igualmente es destacable la utilidad de la tarea para que los alumnos advirtiesen el significado de los repartos equivalentes, puesto que encontraron que el resultado de un reparto no podía corresponderse con las condiciones que ellos suponían, sino con las de alguno de los repartos equivalentes que debían analizar.

**Día 27-11-97**

Plan previsto.

Exposición de un técnica de reconstrucción del reparto conocida su representación polinómica unitaria.

Debatir sobre el significado de 0.

Comentar las respuestas de los alumnos a la tarea 2 de la Cuestión de Investigación 2

Ejecución

- El debate propuesto se desarrolló en grupos pequeños, pero no se realizó la puesta en común debido a que se produjo una notable disminución del alumnado debido a convocatorias de movilizaciones reivindicativas, que no fueron seguidas de forma mayoritaria. Por ello, y debido a que el debate resultaba de gran interés, se propuso retomar este debate en posteriores situaciones (cuando se presente el sistema de representación polinómica decimal)

Aspectos actitudinales

- Hubo una asistencia propia de situaciones confusas, con alumnos que se preguntan si las clases se van a desarrollar con normalidad, alumnos que se incorporan iniciada la sesión, alumnos que se ausentan a la segunda parte de las sesión, ...

Aspectos relacionados con la comprensión.

- Las exposiciones del profesor, tanto sobre la técnica de reconstrucción de un reparto conocida su representación polinómica unitaria, como las que hizo acerca de las respuestas dadas por los alumnos en la tarea 2 de la Cuestión de Investigación 2, fueron admitidas por los estudiantes, puesto que se hicieron pocas preguntas y manifestaron su asentimiento cuando fue requerido por el profesor.

- El debate sobre la utilización de 0 en contextos diferentes se mostró enriquecedor: sirvió para que los alumnos se cuestionasen posiciones contrapuestas sobre la admisión o no de un reparto en el caso 0:5

Valoración.

- La intervención del profesor fue necesaria porque las tareas realizadas por los alumnos no se hicieron correctamente. Además, los resultados mostraban que los alumnos necesitaban abordar aspectos el método de justificación matemática, y la explicitación, en forma simbólica, de sus correctas concepciones sobre la mayor parte.

**Día 2-12-97**

Plan previsto.

Comentarios del profesor sobre la tarea 3 de la Cuestión de Investigación 2.

Realizar las tareas 1 y 2 de la Cuestión de Investigación 3

Ejecución

- El desarrollo de la sesión se ajustó completamente a las previsiones

Aspectos actitudinales

- Los estudiantes formularon distintas observaciones a la exposición del profesor y discutieron aquellos aspectos en los que tenían dudas.

- En la tarea 1 los estudiantes demandaron aclaraciones sobre la tarea que se les propuso, debido a que no están habituados a trabajar con las representaciones polinómicas unitarias.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- En la exposición del profesor hubo estudiantes que pusieron inconvenientes a aceptar que las expresiones [1/b] y 1/b fuesen iguales. En sus argumentaciones indicaban que con el corchete indica unidad de medida y que no hace referencia a cantidad de magnitud. Se utilizaron frases del tipo "es que eso indica como centímetros, pero si no va acompañado de un número no se puede hablar de una longitud". Consideramos que en estas posiciones de los alumnos subyace una deficiente interpretación del significado de la medida de magnitudes, así como del proceso de realización de la misma y el papel que juega la unidad de medida y su relación con otras unidades de medida de la misma magnitud.

- Los alumnos, que inicialmente aceptaban el producto de magnitudes superficie sin cuestionar su pertenencia al conjunto en el que se trabajaba, también aceptaron las indicaciones del profesor en tal sentido. También aceptaron la exposición del profesor de que el producto es una aplicación lineal, como parte de parte, como la transformación de una cantidad de magnitud en otra cantidad de magnitud.

- Algunos estudiantes, en la exposición que hizo el profesor de la tarea 3, demandaron justificaciones complementarias para aceptar el proceso de reconstrucción de la unidad, sobre todo la igualdad de las cantidades de tortilla (1/b de 1/n) y (1/bn). Pensamos que algunos estudiantes tienen dificultades en la reconstrucción de la unidad en situaciones particulares.

- En la propuesta de trabajo de la tarea 1 de la Cuestión de Investigación 3, los estudiantes demandaron, de forma casi unánime, que se explicitara el enunciado de la tarea. Las preguntas se formulaban en el sentido de que si debían de reconstruir el reparto, encontrar un reparto mayor o menor y, posteriormente, escribir la representación polinómica unitaria de los repartos hallados. Los estudiantes no están habituados a trabajar con representaciones polinómicas unitarias como entidades numéricas ; pero tras las oportunas aclaraciones del profesor los estudiantes realizaron la tarea sin formular ninguna otra pregunta.

Valoración.

- La simbología utilizada contiene matices que los alumnos no perciben plenamente, por ello era necesario realizar algunas precisiones que serán necesarias en el proceso instructivo.
- Favorece el proceso expositivo del profesor la metodología utilizada, pues el hecho de que los alumnos hayan realizado previamente las tareas favorece la interpretación de los argumentos empleados en la exposición, a la vez que invita a los alumnos a explicitar las concepciones que emplearon en la realización de la tarea previamente realizada.
- Desde la perspectiva de la formación de futuros profesores esta sesión ha servido para introducir reflexiones acerca de las exigencias sintácticas y semánticas de los sistemas de representación y cómo su aprendizaje demanda de una permanente revisión del significado de la manipulación de símbolos. Los estudiantes reconocen que este tipo de situaciones ayuda a comprender la posición en que se encuentran los niños que, en situaciones de enseñanza, deben aprender y utilizar el sistema de numeración decimal, que desde la perspectiva de nuestros alumnos aparece como de una simplicidad meridiana.

Toma de decisiones.

En futuras sesiones se contempla la exposición del profesor de diferentes resultados obtenidos en las tareas de la Cuestión de Investigación 3, pues en estas se recogen aspectos relacionados con los conceptos y procedimientos relativos al orden y a las operaciones con representaciones polinómicas unitarias. En estas exposiciones se harán referencias a resultados obtenidos por los estudiantes y a otros que no se hayan surgido en los trabajos de estos.

**Día 4-12-97**

Plan previsto.

Exposición, por el profesor, de las argumentaciones empleadas para determinar las relaciones de orden entre representaciones polinómicas unitarias.

Justificación de la propiedad fundamental del orden.

Explicitación, por parte del profesor, de la densidad respecto del orden de las representaciones polinómicas unitarias.

Realizar las tareas 2 y 3 de la Cuestión de Investigación 3

Aspectos actitudinales

- La asistencia fue notablemente inferior a la de la sesión precedente debido, en parte, a la proximidad de pruebas de examen de diferentes asignaturas.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- Los alumnos reconocieron sus "despistes", en el momento de la escritura de representaciones polinómicas unitarias; tal despiste señalaron era producto de priorizar su atención en las relaciones de orden entre fracciones. Asimismo admitieron que los despistes conllevaban la transgresión del principio de la mayor parte y que, en consecuencia, las relaciones de orden establecidas se sustentaban en la simple comparación de fracciones.
- Algunos estudiantes mostraron su extrañeza ante la utilización de representaciones polinómicas unitarias que contuviesen un solo sumando; sus reparos desaparecieron al mostrarse repartos cuya representación fuese como la indicada.
- Algunos estudiantes requirieron explicaciones complementarias para admitir el principio fundamental del orden pues, desde la perspectiva de las fracciones, les resultaba poco evidente que una fracción siempre fuese mayor que la suma de todas las que le siguen en la representación polinómica unitaria. Al mostrales la interpretación del criterio de la mayor parte se disiparon sus dudas.
- En la presentación de la tarea 3 el profesor puso de manifiesto que la interpretación que se solicitaba debía de formularse como una situación problemática cuya solución condujese a la operación representada en la tarea; es más, se hizo pública la advertencia que interpretaciones como "la suma de dos repartos" no era admisible.

Valoración.

- El procedimiento de la mayor parte se mostró como herramienta eficaz para establecer relaciones de orden y para estudiar la densidad respecto del orden.
- El resultado fundamental del orden no se demostró, tan solo se justificó en ejemplos concretos. Esta decisión se tomó como consecuencia de haber valorado como prioritaria su comprensión desde el modelo y porque la demostración encierra manipulaciones simbólicas entre desigualdades que presentan dificultades de comprensión para muchos alumnos.
- Los alumnos mantienen la creencia de que las relaciones de orden establecidas entre números naturales

son extensibles a cualquier otro conjunto numérico. Después de que admitiesen representaciones polinómicas unitarias anteriores y posteriores a una dada (que fueron unánimemente admitidas por el alumnado), se mostró eficaz la utilización del principio fundamental de orden para que admitiesen su error, en el sentido de que entre dos representaciones existían infinitas y, consecuentemente, ello no permitía hablar de anterior y siguiente. La posterior referencia a los resultados de la prueba inicial sobre este aspecto, facilitó que los estudiantes admitiesen que el orden entre números naturales tenía peculiaridades que le diferenciaban del orden entre elementos de otros conjuntos numéricos. No obstante, el significado de la densidad respecto del orden es un aspecto al que dedicaremos un seguimiento especial en sesiones posteriores.

**Día 9-12-97**

Plan previsto.

Comentarios del profesor sobre las tareas 3 y 4 de la Cuestión de Investigación 3

Presentación, por parte del profesor, de la relación entre representaciones polinómicas unitarias y notaciones fraccionarias

Propuesta de trabajo: Cuestión de Investigación nº 4

Ejecución

- La realización de las tareas 1 y 2 se alargó más de los previsto, por lo que las tareas 3 y 4 no se realizaron, quedando pospuestas para la próxima sesión

Aspectos actitudinales

- Algunos estudiantes manifestaron que las tarea les resultaban bastante complicadas y, en comparación con otras actividades realizadas, señalaron su preferencia por retomar los trabajos sobre la resolución de problemas

Aspectos relacionados con la comprensión.

- En las exposiciones del profesor un alumno demandó una explicación más exhaustiva sobre la reconstrucción del reparto conocida su representación polinómica unitaria. Aun cuando se había expuesto en sesiones anteriores tal pregunta sugiere la sospecha de que puede haber estudiantes que no tengan suficiente experiencia en el manejo de la técnica comentada.

- Al aparecer la fracción con el significado de reparto igualitario algunos alumnos hicieron emerger sus creencias sobre el significado único de la fracción como relación parte-todo, en el sentido de que la fracción tenía el sentido de tomar unas partes de las que se ha dividido la unidad y, por tanto, que era impensable que otros individuos participantes en el reparto se pudiesen llevar partes iguales de la unidad. Las exposiciones sobre la ampliación del significado de la notación a/b, sin anular los conocimientos previos, acompañadas de conexiones gráficas y simbólicas con la noción de reparto igualitario no suscito más preguntas de los alumnos.

- Al plantear la tarea 2, en las que se señalaba que las dos fracciones indicaban repartos igualitarios, algunos estudiantes preguntaron si el sentido de igualitarios era el de que ambas fracciones indicaban un "mismo número"

Valoración.

- Parece emerger entre los estudiantes un obstáculo para concebir la fracción como reparto igualitario; tal obstáculo procede de la interpretación única de la fracción como relación parte-todo y surge en el momento en que se quiere dar un nuevo significado a un símbolo ya conocido. Es de destacar que tal obstáculo no aparece cuando los estudiantes están manipulando la notación fraccionaria habitual, lo que hace suponer que el símbolo a/b está asociado a entes numéricos de los que conocen técnicas para las operaciones y relaciones, y que, en caso de necesitarlo, tales entes tienen un significado preciso y concreto.

- La introducción del significado de resultado de un reparto igualitario en la notación fraccionaria es posible que necesite para su aceptación un periodo de tiempo largo, que no se supere el obstáculo de la relación parte-todo de forma inmediata. Por tanto, será conveniente hacer una reflexión pública sobre todo el trabajo realizado hasta el momento, incidiendo en la relación entre la simbología utilizada y la notación fraccionaria.

**Día 11-12-97**

Plan previsto.

Revisión de las tareas referentes a la Cuestión de Investigación 4

Exposición-resumen por parte del profesor de los contenidos correspondientes al Primer Foco de Investigación

Ejecución

- Además de las exposiciones del profesor los alumnos tuvieron que realizar las tareas 3 y 4 que no se pudieron concluir en la sesión anterior.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- La realización de las tareas hizo emerger algunas concepciones erróneas en ciertos estudiantes acerca del significado del reparto, más concretamente sobre el significado de los símbolos a:b y a/b como expresión de las cantidades que recibe cada uno de los asistentes a un reparto igualitario.
- En la realización de la tarea 3 de la Cuestión de Investigación 4 los alumnos interpretaban el símbolo de fracción como reparto si la fracción contiene expresiones literales, pero si en la misma aparecen expresiones numéricas los alumnos interpretan la fracción con significados diferentes. Esta transformación de significados les imposibilitaba dar una respuesta correcta a la tarea; la intervenciones del profesor con alumnos particulares permitió que éstos interpretasen las fracciones que contienen expresiones numéricas como repartos con condiciones particulares.
- Hay alumnos que siguen centrando su preocupación en la realización de técnicas de cálculo, pues en la resolución de las tareas 3 y 4 sus preguntas se formulaban en el sentido de si era necesario realizar los resultados de los repartos, cálculo que era innecesario para resolver las citadas tareas.

Valoración.

- Las tareas propuestas en la Cuestión de Investigación 4 se han manifestado útiles para hacer reflexionar a los estudiantes sobre el significado del reparto igualitario, así como las relaciones de orden entre este tipo de repartos.
- Los estudiantes muestran algunas reticencias a utilizar el modelo para responder a las tareas propuestas, prefieren recurrir a sus conocimientos sobre la manipulación de símbolos que a analizar el significado de tales símbolos en el modelo. Esta disposición les dificulta la realización de las tareas propuestas, pues la manipulación de símbolos con expresiones literales, así como el empleo de desigualdades, no es el trabajo en el que muestran una mayor habilidad; sin embargo, sus creencias sobre el trabajo matemático posiblemente les impida reflexionar sobre acciones realizadas en un modelo manipulable.
- A lo largo de la exposición del profesor en la que se enmarcaba todo el trabajo realizado ninguno de los alumnos demandó aclaraciones o manifestó discrepancias, lo que hace suponer que la exposición aclaró puntos que pudieran estar confusos, como la densidad de los números racionales positivos que quedó clarificada al mostrar que entre dos fracciones siempre es posible encontrar otras muchas y que pueden obtenerse con facilidad utilizando los resultados de la tarea 2.

Toma de decisiones

- A lo largo de estas sesiones se ha puesto de manifiesto que los alumnos que han faltado a algunas clases tienen más dificultades para la realización de las tareas, lo que hace suponer que su nivel de comprensión es menor que el de los compañeros que asisten con regularidad. Por ello, se ha invitado de nuevo a los alumnos a que acudan a revisar sus trabajos en las horas de tutoría, haciéndose notar que en las sesiones posteriores será necesario disponer de los conocimientos que se han utilizado en las clases; además, se ha puesto de manifiesto que estos conocimientos no están recogidos en publicación alguna, por lo que el asesoramiento del profesor será el vehículo para cubrir las lagunas que tengan pendientes.

**Día 16-12-97**

Plan previsto.

Revisión de las tareas 3 y 4 de la Cuestión de Investigación 4.
Presentación de la representación polinómica decimal.
Realizar la Ficha 5

Aspectos actitudinales

- Hubo una asistencia sensiblemente inferior a la de la sesión precedente. Las razones esgrimidas por los asistentes es que existe un examen parcial de otra asignatura y sus compañeros lo están preparando.
- La tarea 2 se recogió al finalizar la sesión y varios estudiantes manifestaron que no la habían concluido. A pesar de ello les fue retirada porque los aspectos esenciales ya habían sido tratados con las dos actividades iniciales y, por tanto, el que no hubiesen realizado la tercera no era sustancial.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- Los alumnos interpretaron correctamente el significado que se introduce en la acción empleada en el modelo y que dio lugar a la surgimiento de la representación polinómica unitaria. A través de un ejemplo, realizado por el profesor, los estudiantes no hicieron preguntas ni demandaron información complementaria sobre el resultado de la acción de fraccionar siempre en 10 partes iguales; asimismo admitieron la simbolización que se presentaba.
- En la realización de la tarea 1 hubo alumnos que preguntaron sobre la forma de resolver la situación problemática que les creaba al hacer el reparto (1:32) pues la división de la unidad en 10 partes no era suficiente para efectuar el reparto. Las sugerencias del profesor para que volviesen a fraccionar las partes fue suficiente para que los estudiantes realizasen la tarea.
- En la tarea 2 surgió, tal y como se pretendía, la pregunta sobre la forma de representar repartos que

tenían infinitas fases, los repartos "que se vuelven a repetir", tal y como manifestaban los estudiantes. El profesor se limitó a señalar que la pretensión era la de incorporan decisiones para ampliar un sistema de representación que debía ser útil para todas las situaciones. Los alumnos recurrieron, en su mayor parte, al empleo de puntos suspensivos.

Valoración.

- Las tareas son adecuadas por cuanto permiten a los estudiantes afianzar unas técnicas que son necesarias para familiarizarse con un sistema de representación con características similares a las ya estudiadas para la representación polinómica unitaria, pero que también presenta diferencias significativas con ellas, y sobre las que habrá de reflexionar en sesiones posteriores.

Toma de decisiones.

- De acuerdo con el profesor Escolano, decidimos entregar a los estudiantes una serie de tareas que hiciesen referencia a todos los aspectos que se habían trabajado en el Foco de Investigación 1, la representación polinómica unitaria. Las tareas incorporan una pequeña información para ubicar al alumnos en las coordenadas en que ha de responder a las preguntas que se formulan.
- Con estos trabajos, que tienen carácter voluntario para los alumnos, se pretende que hagan una reflexión sobre los conocimientos que se han utilizado y que dispongan de material para un trabajo personal de revisión y reflexión y del que pueden surgir dudas o preguntas, que se revisarán después del periodo vacacional. El texto del trabajo de reflexión que se entregó a los estudiantes se recoge en el ANEXO V.1.

**Día 18-12-97**

Plan previsto.

Realizar las tareas 1, 2 y 3 de la Cuestión de Investigación 5

Aspectos actitudinales

- La proximidad de las vacaciones de Navidad hacía flotar en el ambiente un aroma festivo que dificultaba la realización de las tareas. A pesar de ello, y venciendo cierta resistencia de los alumnos, el trabajo previsto pudo concluirse, aunque para ello el profesor tuviese que animar continuamente a alumnos para que avanzasen en las tareas.

Aspectos relacionados con la comprensión

- Las tareas propuestas a los estudiantes tenían enunciados similares a otras realizadas con anterioridad por lo que no existieron preguntas o demandas de información para delimitar las tareas propuestas.
- En dos ocasiones el profesor tuvo que atender a alumnos que señalaban que la aplicación de la representación polinómica decimal al reparto 3:3 no tenía sentido, pues ese reparto daba 1 y no se entiende el que haya que dividir la unidad en 10 partes iguales. Las explicaciones del profesor fueron suficientes para clarificar que al utilizar el criterio de la mayor parte no había necesidad de fraccionar la unidad.

Valoración

- Las tareas se consideran necesarias puesto que la ante un sistema de representación novedoso es conveniente que el alumno reflexione sobre características sintácticas y semánticas de ese sistema
- Se considera conveniente que el profesor haga una exposición pública de las analogía de los sistemas de representación polinómica unitaria y decimal, para explicitar los aspectos que son similares y los que son diferenciadores. De este modo, pensamos que los estudiantes profundizarán en el conocimiento de estos sistemas analizando las causas que provocan la persistencia de algunas características y la modificación de otras.

**Día 8-1-98**

Plan previsto.

Hacer un estudio paralelo de las características de los dos sistemas de representación utilizados hasta el momento.

Propuesta de trabajo: Ficha número 6

Ejecución

- Las explicaciones sobre las técnicas de reconstrucción de las condiciones del reparto a partir de la representación polinómica unitaria se alargaron más de lo previsto; esta demora vino producida porque los estudiantes demandaron más explicaciones del proceso alegando no recordar las tareas realizadas con anterioridad. De este modo, el profesor tuvo que exponer en la pizarra un ejemplo de cada una de las dos técnicas empleadas.
- Solamente dio tiempo a realizar la actividad 1 de la Ficha nº 6, pues los alumnos encontraron dificultades en su realización y demandaron apoyos continuos por parte del profesor.

Aspectos actitudinales

- Esta sesión coincidía con la primera clase a la que asistían los estudiantes después del periodo

vacacional. Además, esta sesión se celebraba en jueves y los estudiantes debían realizar un examen de otra asignatura al día siguiente; en consecuencia, la asistencia fue inferior a la de otras sesiones
- Los alumnos mostraron, inicialmente, cierta desgana en la realización de las tareas propuestas, por lo que el profesor tuvo que actuar de animador para que los estudiantes comenzasen con sus trabajos; una vez que aceptaron la tarea mostraron una actitud muy positiva para el trabajo.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- Los estudiantes encontraron dificultades en la realización de las tres actividades propuestas, pues cada una de ellas atendía a situaciones diferenciadas
- En la primera tarea, en la que aparecía una representación polinómica decimal finita, los estudiantes percibieron que en la segunda fase del reparto cada uno de los participantes no recibía cantidad alguna de magnitud, por lo que no realizaban esta fase. El profesor hubo de advertir que aunque no se repartía cantidad alguna de magnitud, sí que había que tener en cuenta esta fase pues ello afectaba al tamaño de las partes resultantes. No hubo intervenciones de los estudiantes y concluyeron la tarea sin demandar ninguna explicación suplementaria.
- En la segunda tarea los estudiantes encontraron la dificultad de que la representación polinómica decimal era infinita. Inicialmente trataron de realizar el trabajo como si se tratase de una representación finita y de la que contemplaban la posibilidad de extender el resultado mediante una generalización del proceso. El profesor tuvo que atender a las continuas preguntas de los estudiantes en el sentido de que los resultados que perseguían no eran fáciles de obtener ni de expresar. Las intervenciones del profesor giraron en torno a la reflexión sobre las causas que provocan la aparición de representaciones infinitas y al significado de los repartos equivalentes. Después de conducir estas reflexiones los estudiantes finalizaron la tarea sin realizar más preguntas.
- Las dificultades que encontraban los estudiantes ante la tercera tarea venían provocadas por el hecho de que la representación polinómica, que era infinita, contuviese un elemento que no se repetía. Bastaron las intervenciones del profesor en el sentido de que la tarea la subdividiesen el dos partes, para que los estudiantes realizasen el trabajo sin demandar informaciones suplementarias.

Valoración.

- Las tareas propuestas son de gran utilidad para hacer una revisión de los conceptos subyacentes en la simbolización de un reparto con las condiciones impuestas. Además, estas tareas exigen que los estudiantes utilicen de forma reflexiva la técnica de reparto atendiendo especialmente al tamaño de las partes, a las partes que se entregan, a las partes sobrantes y a la finalización del reparto.
- La elección de las tareas también se muestra eficaz por cuanto las mismas recogen toda la casuística que puede presentarse; de este modo, los estudiantes advierten las distintas formas de actuación que son necesarias de acuerdo con las características particulares de cada representación polinómica decimal. Además, toman conciencia de las diferencias existentes entre las formas de trabajo con los dos sistemas de representación propuestos.

**Día 13-1-98**

Plan previsto.

> Exposición de técnica de reconstrucción del reparto conocida su representación polinómica decimal.
> Propuesta de trabajo: Ficha 6, actividades 2 y 3
> Propuesta de trabajo: tareas 1 y 2 de la Cuestión de Investigación 6.

Ejecución

- La exposición del profesor se alargó más de lo previsto debido a que los alumnos demandaron informaciones aclaratorias de los resultados que iban apareciendo en la pizarra.

Aspectos actitudinales

- Los estudiantes manifestaron que se encontraban bastante cansados debido a que la finalización del cuatrimestre les exigía la entrega de muchos trabajos pendientes y la preparación de exámenes que estaban convocados en fechas inmediatas.
- La preparación de estos exámenes, y los trabajos pendientes, influyó en un notable descenso en la presencia de alumnos en las sesiones previstas, pues solamente asistieron 29 estudiantes.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- En la exposición del profesor acerca de la reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto conocida su representación polinómica decimal infinita y con partes de unidad que no se repiten, suscitó diversas intervenciones de los estudiantes para que se aclarasen la forma de realizar diferentes operaciones. La mayor parte de las intervenciones venían producidas por el empleo de notaciones literales, mostrando algunos alumnos dificultades que desaparecían al utilizar expresiones numéricas; esta situación hizo surgir dudas en el profesor acerca de la comprensión de las notaciones algebraicas entre estos estudiantes

- En la actividad 2 de la ficha 6 algunos alumnos tenían dificultades en la interpretación de la tarea de generalizar el resultado que habían logrado en casos particulares. Las observaciones del profesor fueron suficientes para finalizar la tarea
- Resultó sorprendente para el profesor que algunos estudiantes preguntasen si habían realizado bien la tarea 3 de la ficha 6, en la que se exigía encontrar representaciones polinómicas mayores, menores o intercaladas entre otras dadas. Las intervenciones del profesor fueron en el sentido de que utilizasen el modelo y que, a través del mismo, pudiesen razonar sobre la bondad de sus resultados.
- Al realizar la tarea 1 de la cuestión de investigación 6 un número considerable de estudiantes manifestó que la tarea de sumar representaciones polinómicas decimales no podía realizarse por cuanto las representaciones polinómicas unitarias ya habíamos manifestado que las operaciones no eran algoritmizables. Fue necesario que el profesor hiciese notar a los alumnos que recurriesen al modelo y a dar significado a las representaciones simbólicas que se presentaban; posteriormente debían decidir si era factible la realización de la operación propuesta, con independencia de resultados que se hubiesen presentado en otros sistemas de representación.

Valoración.

- La tarea de reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto conocida su representación polinómica decimal resulta de interés por cuanto se consolida la técnica de reparto que, aunque parecida a la de la representación unitaria, presenta diferencias importantes.
- Los estudiantes no tuvieron dificultades para establecer la equivalencia de representaciones polinómicas decimales y admitieron la reflexión a posteriori sobre la unicidad de las representaciones de este tipo y que observaron coincidía con la equivalencia de representaciones polinómicas unitarias.
- Nos parece conveniente ni necesario que los estudiantes realicen tareas sobre relaciones de orden entre expresiones numéricas sin hacer referencia a un modelo en el que poder testar sus resultados.

Toma de decisiones.

- La aparición de dificultades en la interpretación de las expresiones literales se hará explícita para aquellos alumnos que las tengan, y se les sugerirá que realicen más ejercicios como los propuestos y que recurran a las tutorías para que el profesor pueda observar el grado de superación de sus dificultades. Consideramos que los problemas particulares merecen ser considerados como tales y, en consecuencia, actuar sobre los alumnos afectados y no sobre la totalidad de la clase.
- Conjuntamente con el Profesor Rafael Escolano se decide que los alumnos no realicen la actividad 4 de la ficha nº 6, puesto que el tema de la densidad respecto del orden de los números racionales ya ha sido tratado anteriormente y, de este modo, se ganaría tiempo para las actividades previstas antes de la fecha del examen.

**Día 15-1-98**

Plan previsto.

Exposición del profesor sobre las características del orden entre representaciones polinómicas decimales

Propuesta de trabajo: tarea 2 de la Cuestión de Investigación 6

Exposición del profesor para presentar la notación decimal como sistema simbólico derivado del sistema de representación polinómica decimal.

Propuesta de trabajo: tarea 1 de la Cuestión de Investigación 7.

Ejecución

- El plan previsto fue ejecutado en su totalidad

Aspectos actitudinales

- La asistencia a las sesiones de clase se mantiene en niveles bajos, en comparación con otras precedentes. Las razones de que esto ocurra hay que encontrarlas en las tareas y exámenes de final de cuatrimestre. A pesar de ello, los alumnos siguen mostrando una excelente predisposición para realizar las tareas propuestas

Aspectos relacionados con la comprensión.

- En la tarea 2 de la Cuestión de Investigación nº 6 algunos estudiantes escribían 2/3 como número de partes de un determinado tamaño. Ante las preguntas del profesor, los estudiantes manifestaban que lo escribían de este modo porque en la simbolización utilizada en la pregunta interpretaban que : indica una división; es decir, que no interpretan dicho signo con significado de reparto.
- En la tarea 1 de la Cuestión de Investigación 1 y en su apartado i, algunos estudiantes demandaron que se aclarase la expresión "de todas las formas posibles", puesto que, en su forma de entender la pregunta, solamente se debería hacer referencia al modelo de reparto en que estamos trabajando. Después de que el profesor indicase que la pregunta hacía referencia a todos los significados que se les ocurriese, que no había limitación en el modelo, los estudiantes completaron la tarea.

- En la parte ii de la actividad 1 hubo preguntas de distintos alumnos en las que las dudas se centraban en la escritura de la expresión 35/5 con notación decimal, pues no admitían que el símbolo 7 fuese el adecuado.

Es reseñable la demanda de un alumno que lleva un largo periodo ausente de las clase (alumno nº 5), en la que requirió al profesor para que le certificase que la expresión 0/8 no tiene significado.

- Resultó sorprendente para el profesor que algunos estudiantes preguntasen si habían realizado bien la tarea 3 de la ficha 6, en la que se exigía encontrar representaciones polinómicas mayores, menores o intercaladas entre otras dadas. Las intervenciones del profesor fueron en el sentido de que utilizasen el modelo y que, a través del mismo, pudiesen razonar sobre la bondad de sus resultados.

Valoración.

- A pesar de la insistencia en las exposiciones del profesor cuando se revisan las tareas y a pesar de las sesiones de clase los alumnos no recurren al modelo en cuanto aparecen expresiones numéricas; en este caso priorizan sus conocimientos operatorios descontextualizados. Ello explica que la lectura más significativa del signo : sea el de división.
- Los estudiantes muestran una cierta despreocupación por mantener las exigencias sintácticas y semánticas de los sistemas de representación. Posiblemente una experiencia dilatada en esta práctica haya mitigado el efecto de unas breves sesiones de clase en las que se ha tratado de mantener vigilantes a los alumnos sobre el cumplimiento cuidadoso de las normas sintácticas, así como de la interpretación de las normas semánticas subyacentes.

Toma de decisiones.

- En la revisión de estas tareas, en la próxima sesión de clase, el profesor reiterará las llamadas de atención sobre el uso de sistemas de representación, haciendo especial hincapié en la escritura de la forma 2/3 para indicar un número entero, el número de partes de un determinado tamaño.

**Día 20-1-98**

Plan previsto.

Realización de las tareas 2 y 3 de la Cuestión de Investigación 7

Exposición del profesor de un resumen-síntesis de los distintos sistemas de representación para Números Racionales positivos y la conexión entre ellos

Ejecución

- Las dificultades encontradas por los estudiantes al realizar las tareas propuestas ocasionó una demora en el tiempo previsto para su finalización; en consecuencia, la exposición del profesor fue pospuesta para la siguiente sesión

Aspectos actitudinales

- Ante la acumulación de exámenes y de finalización de plazos de entrega de trabajos, los alumnos están notablemente más inquietos que en sesiones anteriores. El profesor tuvo que hacer llamadas de atención al inicio de la sesión para que los estudiantes se centrasen en el trabajo. Una vez que comenzaron a resolver las tareas el clima de trabajo fue el habitual.
- Los estudiantes mostraron una inseguridad que era imprevisible inicialmente, pues el trabajo se realizaba con la notación decimal, que ya es conocida por los estudiantes. Por ello, las preguntas realizadas al profesor fueron más numerosas que en sesiones precedentes.

Aspectos relacionados con la comprensión.

- En la tarea 2 las primeras preguntas iban encaminadas a que el profesor demarcase el tipo de sistema de representación que debía de usarse. El profesor precisó que el trabajo debería hacerse con la notación decimal, pero que si hubiese alguna necesidad de cambiar a otro sistema de representación que lo hiciesen indicando las causas por las que adoptaban ese nuevo sistema de representación.
- Los alumnos que entregaban la tarea número 2 se limitaban a indicar que existían infinitos números comprendidos entre los dos dados y ponían algunos ejemplos. El profesor les devolvía la tarea indicándoles que fuesen más explícitos en sus apreciaciones, que indicasen algún método para encontrar esos infinitos números.
- Otro tipo de demandas hechas al profesor en la tarea 2 fueron en el sentido de que certificase los supuestos de que entre $4,\overline{27}$ y $4,\overline{28}$ no existía ningún número; en este sentido resulta interesante reflejar la pregunta formulada por el alumno número 12, que se produjo en términos similares a los siguientes:

> *Yo sé que entre 4,27 y 4,28 hay infinitos términos, pero ¿verdad que entre* $4,\overline{27}$ *y* $4,\overline{28}$ *no hay ningún número?, porque en el primer caso es 27, 27, 27, ... y en el segundo 28, 28, 28, .... y no se puede poner ningún número enmedio.*

Las respuestas del profesor se hicieron en el sentido de remarcar que las preguntas iban dirigidas a los estudiantes y que, en consecuencia, ellos debían escribir sus propias conclusiones; de lo contrario, y en este caso particular, en los escritos de los estudiantes aparecerían los conocimientos personales del profesor.

- Como prototipo de otro conjunto de preguntas formuladas por algunos estudiantes sobre la sintaxis de la notación decimal reproducimos la que, aproximadamente, formula el alumno nº 7

*¿Tiene sentido escribir el número* $4,\overline{27}\mathbf{1}$ *?*

El profesor preguntó a este alumno, y a los que formularon preguntas similares, cuál era su interpretación de las cifras periódicas y el lugar que debería ocupar esa cifra 1 colocada después del periodo. Las reflexiones que hicieron los alumnos no provocaron nuevas preguntas en este sentido.

- El apartado a de la tarea 3 provocó una nueva tanda de preguntas al profesor acerca del modo en que deberían escribir el resultado de la operación propuesta. Entre ellas volvieron a aparecer nuevas formulaciones sobre la sintaxis que ya habían surgido en la tarea 2, como la de la legalidad de la escritura del número $0,00\overline{0}23$, o sobre el modo de indicar que la última cifra del resultado debía de ser un 3. En ningún caso el profesor ofreció a los estudiantes una respuesta, sino que se limitó a proponerles reflexiones sobre el contenido semántico de su simbolización. El análisis de los resultados permitirá una reflexión sobre las decisiones que finalmente tomaron los alumnos.

- A pesar de las indicaciones previas del profesor sobre los tres aspectos que conformaban la pregunta que se hacía en la tarea 2, el profesor, en los casos que lo detectó, tuvo que indicar a los estudiantes la necesidad de que, en primer lugar, propusiesen alguna situación para determinar si la operación indicada tenía significado o no. Incluso tuvo que advertir al alumno nº 22 que debía revisar su tarea (en la que indicaba que la multiplicación no tenia significado), en el sentido de buscar situaciones en las que sí tuviese significado y que, lógicamente, deberían ser diferentes de las que proponía como producto de repartos.

- Al realizar el apartado c de la tarea 2 el alumno nº 15a requirió que el profesor le ayudase puesto que se encontraba atascado. Su problema provenía de que interpretaba el producto con el sentido de los números naturales y, en consecuencia, encontraba dificultades para sumar $4,\overline{2}$ veces un determinado número. Las indicaciones del profesor se encaminaron a que, en primer lugar, diese sentido a la operación que se le proponía, puesto que si el alumno la concebía como composición de operadores sus problemas habrían desaparecido.

- La utilización de la calculadora provocó la aparición de problemas inesperados para el profesor y producidos por por las peculiaridades del aparato; más concretamente surgieron tres tipos de preguntas en torno a la escritura de números periódicos a partir de los resultados obtenidos con la calculadora y que son números decimales:

a) El alumno nº 8 realizó la siguiente pregunta sobre la determinación del periodo a partir de una expresión decimal obtenida al operar números decimales con la calculadora

*Al hacer la operación* $2,\overline{36}:\mathbf{4}$ *con la calculadora me aparece 0,590909, ¿cómo debo escribir el resultado* $0,\overline{590}$ *o como* $0,59\overline{09}$ *?*

b) El alumno nº 1 hace una pregunta en torno al modo de interpretar diferentes resultados que aparecen como consecuencia de utilizar diferentes calculadoras, sin tener en cuenta la capacidad de las mismas y, por tanto, sin controlar la aproximación decimal que utilizan para la escritura en la calculadora del número periódico que figura en la operación propuesta. En términos aproximados la pregunta que formuló al profesor fue la siguiente:

*Hemos hecho la operación* $2,\overline{36}:\mathbf{4}$ *cada uno con su calculadora y han salido resultados diferentes como 0,590909, 0,590909075 y 0,59090909091, ¿verdad que aunque al final salgan números diferentes el resultado que hay que poner es* $0,5\overline{90}$ *?*

c) La creencia de que las operaciones con números de infinitas cifras tiene como resultado un número de infinitas cifras, unido al hecho de que el resultado de la calculadora no ofrezca cifras susceptibles de conformar un período, llevó al alumno nº 23 a mantener con el profesor un diálogo que se desarrolló en términos similares a los siguientes

*A.- Cómo se llaman los números que tienen infinitas cifras decimales y no tienen periodo?*
*P.- Explícame cómo has encontrado ese número*
*A.- Es que no se pueden multiplicar números infinitos entre sí, por lo que he buscado la fracción de la que proceden y he efectuado la operación. Entonces me encuentro con la operación* $\dfrac{\mathbf{543}}{\mathbf{999}}\,x\,\dfrac{38}{9}$ *y al hacerlo con la calculadora me sale este número (señala la calculadora en la que aparece 2,2949614) que no tiene periodo, pero que yo se que es infinito.*

- A pesar de la numerosas preguntas formuladas por los alumnos, que fueron contestadas siempre por el profesor, los estudiantes no se encuentran satisfechos del trabajo realizado, por lo que demandan al profesor que en la próxima sesión sea éste el que "corrija" las tareas propuestas.

Valoración.

- Nos ha resultado muy sorprendente la inseguridad mostrada por los alumnos en un tema en el que, suponíamos, los estudiantes tenían conocimientos bien asentados. La experiencia ha resultado altamente positiva por cuanto hemos podido descubrir que los conceptos y procedimientos que los estudiantes tienen sobre los números decimales les dificulta el trabajo con números periódicos.
- Se abre un terreno para la indagación de alto interés por cuanto el tópico de las expresiones periódicas es la base sobre la que se suele construir el conjunto de los números reales. Y en este sentido aparecen algunos aspectos sobre los que caben algunas preguntas que no eran contempladas a priori en el tema de nuestra investigación, como las siguientes:
    - ¿Qué significados conceden los estudiantes a las notaciones decimales con infinitas cifras periódicas? ¿Qué sentido tiene un número que contiene alguna cifra después de las del periodo?
    - ¿Los estudiantes contemplan las cifras del periodo como un sólo número? ¿Se pierde el sentido del valor posicional ante la aparición de números periódicos?
    - ¿Facilita la notación decimal la comprensión del orden entre números racionales? ¿Ocurre lo mismo con los números periódicos?
    - ¿Las operaciones entre números periódicos tienen que dar como resultado un número de infinitas cifras decimales? ¿El resultado de operar dos números decimales puede contener un número infinito de cifras periódicas o no?
    - ¿Las operaciones entre números periódicos se deben hacer como operaciones entre números decimales? ¿Los resultados de las operaciones con números periódicos se obtienen al dotar de periodo a los resultados de operar las aproximaciones decimales de los operandos?
    - ¿El uso de la calculadora potencia, entre los alumnos, las prácticas operatorias erróneas con números periódicos? ¿La calculadora imposibilita el empleo de otros recursos en las operaciones con números periódicos?
    - ¿Qué uso de la calculadora puede hacerse para incrementar los conocimientos de los estudiantes sobre las notaciones decimales periódicas?
    - ¿Cuáles son las concepciones sobre los números decimales que se proyectan en los futuros Maestros a través de la notación decimal?

# ANEXO III.1 TAREAS PROPUESTAS EN LA ETAPA PRIMERA

## a.1. Representación polinómica unitaria.

Seguidamente aparecen la Planificación realizada para el trabajo con un sistema de representación. Previamente resulta ineludible la presentación de un modelo, con variables bien definidas, y sobre el que los estudiantes han de construir significados y sistemas de representación.

En el trabajo hay dos bloques bien diferenciados: delimitación de un modelo para Números Racionales y sistema de representación polinómica unitaria. Cada uno de los bloques tiene asignado un número de sesiones y se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, actividades propuestas, metodología y valoración. La presentación se hace de forma secuencial, en el mismo orden en que se propusieron a los estudiantes; en cada una de las sesiones los objetivos van numerados y esa numeración es la que se tiene en cuenta en cada uno de las otras cuatro componentes curriculares.

### SESION 1: *Introducción* (1/2 hora)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Dar información sobre el contenido y la metodología (metas, tipos de actividades, valoración, ...)
2.- Explicitar actitudes y concepciones de partida con respecto a la asignatura.
3.- Justificar la metodología de trabajo.
4.- Revisar conocimientos sobre:
- La construcción de los números naturales.
- Sistemas de representación de los Números Naturales

**II. CONTENIDOS**

4.1.- Modelos y representación
i.- Las tareas de contar, ordenar, .. y los números naturales:
ii.- Sistemas de representación de los números naturales: orales, escritos y gráficos.
4.2.- Relaciones sintácticas y semánticas en sistemas de representación de los números naturales.
i.- Elementos utilizados.
ii.- Sintaxis
iii.- Relaciones sintácticas

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.
2.- Recordatorios del profesor sobre las concepciones manifestadas por los alumnos acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.
4.- Discusión colectiva

**V. VALORACION**

Diario del profesor

### SESION 2: *Concreción del modelo* (1,5 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Tomar contacto con la metodología de trabajo.
2.- Explicitar conocimientos sobre:
- El reparto de unidades no fraccionables
- Significado de la división entera.
- Distintos procedimientos de reparto.

3.- Consensuar la representación simbólica del reparto.

**II. CONTENIDOS**

2.1.- Modelos y representación
i.- Las tareas de contar, ordenar, .. y los números naturales:
ii.- Sistemas de representación de los números naturales: orales, escritos y gráficos.
iii.- Una nueva tarea: repartir

2.2.- Distintas formas de reparto
i.- Los contextos del reparto

ii.- Criterios: heredero universal, igualitario, proporcional, ..

2.3.- Simbolización del reparto igualitario

i.- Elementos utilizados.

ii.- Sintaxis

iii.- Relaciones semánticas

**III. ACTIVIDADES**

2.3. **FICHA 1**

*Actividad 1: Hay que repartir de forma igualitaria 15 raquetas de tenis entre 3 jugadores*
*Utiliza un SISTEMA GRAFICO y un SISTEMA SIMBOLICO*

SISTEMA GRÁFICO

SISTEMA SIMBOLICO:

*Actividad 2: A la vista de los sistemas utilizados, señala ventajas e inconvenientes que encuentras en cada uno para el reparto de estos casos:*
*a) Repartir 3634 raquetas entre 23 niños*
*b) Repartir 23 raquetas entre 7 niños*

*Actividad 3: Da respuestas justificadas para indicar el significado de cada una de las expresiones simbólicas*
*a) (a : b) y (b : a)* *b) a : a* *c) a : 0*
*d) 0 : a* *e) 0 : 0*

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.

2.1.- Exposición del profesor

2.2.- Exposición del profesor

2.3. Trabajo individual.

Discusión colectiva

**V. VALORACION**

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

## SESION 3: *Potencialidad del modelo* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Adoptar la simbología a:b como resultado del reparto igualitario de a unidades en b partes iguales.

2.- Explicitar conocimientos sobre:

• La equivalencia de repartos
• Relaciones de orden entre repartos.
• Operaciones con repartos.

**II. CONTENIDOS**

2.1.- La equivalencia de repartos como los que producen partes de igual cantidad

i.- Varias formas de representar un mismo resultado

ii.- Caracterizar los repartos equivalentes.

2.2.- Un reparto es mayor que otro si su resultado ofrece una cantidad mayor de magnitud.

i.- Simbolizar de la relación de orden

ii.- Caracterizar el orden entre repartos

iii.- Interpretación de la densidad respecto del orden

2.3.- Significado y obtención del resultado de repartos igualitarios.

i.- Suma de repartos: significado y resultado.

ii.- Resta de repartos: significado y resultado

iii.- Producto de un número natural por un reparto, como suma reiterada de repartos: obtención del resultado.

iv.- Cociente de un reparto por un número natural, como reparto reiterado: obtención del resultado.

v.- Dificultades al conceptualizar la multiplicación y división de repartos igualitarios

**III. ACTIVIDADES**

Los alumnos deben realizar las cuestiones de investigación que se presentan en forma de tareas secuenciadas.

**CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 1**

2.1. Tarea 1:

*¿Puede haber repartos equivalentes?. Justifica tu respuesta.*
*Escribe, de forma simbólica, dos repartos equivalentes.*
*Generaliza la escritura de repartos equivalentes*

2.2. Tarea 2:

*¿Hay repartos que sean mayores que otros?. Justifica tu respuesta.*
*Escribe, de forma simbólica, que un reparto es mayor que otro. Generaliza el resultado.*
*Escribe 5 repartos entre (2:3) y (4:5)*

2.3.i. Tarea 3:

*¿Cómo se interpreta, en el modelo en que venimos trabajando, la expresión (a : b )+ (c : d)? ¿Cómo se obtiene el resultado de esa suma,*

2.3.iii y iv Tarea 4:

*a) Justifica, en el modelo, la expresión n x (c : d), siendo n un número natural. Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : n, siendo n un número natural. Calcula el resultado.*

2.3.v Tarea 5:

*a) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) x (c : d). Calcula el resultado.*
*b) Justifica, en el modelo, la expresión (a : b) : (c : d). Calcula el resultado.*

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.
2.- Trabajo individual de los alumnos. Las tareas se entregan de forma secuencial, al finalizar una tarea se recoge y se entrega la siguiente
Discusión colectiva sobre cada una de las tareas trabajadas individualmente.

**V. VALORACION**

Diario del profesor
Producciones escritas de los estudiantes.

## SESION 4: *Cuantificar el resultado del reparto* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Cuantificar el resultado del reparto de unidades fraccionables,. mediante la introducción del procedimiento de repartir por fases.
2.- Simbolizar gráfica, oral y simbólicamente el resultado del reparto:
• La suma de partes.
• La parte de parte.
3.- Poner de manifiesto que los sistemas de representación tienen reglas sintácticas y semánticas diferenciadas.

**II. CONTENIDOS**

1.- *El procedimiento de reparto* que se adopta para lo sucesivo es *por fases*, lo que exige llevar el control, en cada una de las fases, de las cantidades que se entregan a cada individuo, de las que se entregan en total y de las que restan por repartir. Además, hay que controlar las condiciones de finalización del proceso, y las cantidades que, en total, recibe cada individuo
2.- El resultado del reparto por fases aparece como la suma de las cantidades que corresponden a cada una de las fases, hay una suma de partes, cada una de las cuales es un partes alícuota de la unidad por lo que puede representarse por una fracción unitaria.
En las fases segunda y sucesivas, las partes a repartir deben medirse con la unidad inicial, lo que produce la aparición de partes de partes, del producto de fracciones unitarias.
3.- Las diferentes formas de representación utilizadas exigen de expresiones diferenciadas aunque

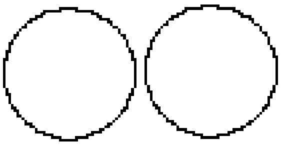
relacionadas. Interesa mantener la sintaxis propia de cada sistema haciendo las oportunas traducciones entre ellas.

**III. ACTIVIDADES**[1]

1.- **FICHA 2**

*Se reparten, en partes iguales, 2 tortillas entre 5 personas. Indicar la parte de tortilla que recibe cada una de ellas, expresando el resultado en las diferentes formas que se piden*

Reparto primero:

| Forma gráfica | Forma habladas | For. simbólicas |
|---|---|---|
|  | 1 ______________________________ | 1 ______________ |
| | 2 ______________________________ | 2 ______________ |
| | 3 ______________________________ | 3 ______________ |

Reparto segundo: Reparto tercero: Reparto cuarto:

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.

2.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar el sistema de representación a utilizar

**V. VALORACION**

Diario del profesor

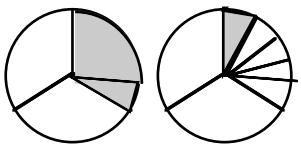
Producciones escritas de los estudiantes.

Grabación en audio.

---

[1] Se ha barajado la posibilidad de orientar el trabajo de los alumnos ejemplificando el significado de la tarea, es decir, hacer un reparto y representar su resultado mediante las formas gráficas, habladas y simbólicas. Más concretamente, se estudió la posibilidad de introducir la siguiente respuesta para el reparto de 2 tortilla entre 5 personas:

Forma gráfica: en el dibujo está señalada la parte de tortilla que corresponde a una persona



Formas habladas:

- un tercio más un quinceavo.
- la tercera parte y la quinceava parte.
- la tercera parte y la quinta parte de la tercera parte.

Formas simbólicas:

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
- $\frac{1}{3} + [\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{3}]$

A la vista del tipo de información que se proporciona se excluye la posibilidad de mostrar un ejemplo por cuanto que con ello se podría mediatizar las actuaciones de los estudiantes, anulando la posibilidad de otras simbolizaciones.

La presentación del ejemplo se sustituye por la atención individualizada a aquellos alumnos que manifiesten sus deseos de superar las dificultades que encuentren en el momento de expresar en formas hablada o simbólica las imágenes gráficas que han construido.

## SESION 5: *Representación simbólica* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Consolidar el procedimiento de reparto por fases, delimitar las informaciones necesarias para controlar el proceso y unificar los símbolos con los que representar el proceso.

2.- Adquirir destreza en el uso y relaciones de las representaciones del proceso en las formas gráfica, oral y simbólica

**II. CONTENIDOS**

1.- En el reparto igualitario por fases hay informaciones relevantes que deben controlarse:

- La representación del concepto está unida al proceso seguido y ha de reflejar lo que ocurre en tal proceso.
- Se ha de simbolizar en cada fase:
  - las partes en que se fracciona la unidad;
  - la parte de unidad que corresponde a cada uno de los individuos;
  - el total de la cantidad ya repartida;
  - las condiciones del reparto de la fase siguiente.
- Puesto que se hacen repartos igualitarios seguiremos usando el símbolo : con similares características a las utilizadas para unidades no fraccionables, ampliando su significado al reparto completo, a que no queden restos sin repartir.
- Al escribir a:b= indicamos lo que recibe cada uno de los que participan en el reparto y que representa una cantidad de magnitud expresada en las unidades iniciales.
- Como los individuos reciben cantidades de unidad que no son enteras, es factible recurrir a notaciones ya conocidas para su simbolización, como es el sistema de notación fraccionaria. Así, si en la fase primera la parte que corresponde a cada uno de los asistentes se representa por 1/n (la enésima parte de la unidad, una parte alícuota de la unidad inicial), escribimos a:b= 1/n + ..?..
- Con la decisión de fraccionar la unidad en partes iguales se consigue que haya más unidades que individuos y, en consecuencia, que el reparto se pueda hacer con técnicas de recuento, que se pueda trabajar con números naturales. Así, por ejemplo, al fraccionar las 2 unidades en 8 partes iguales se consigue disponer de 16 unidades para repartir entre 5 individuos. Es por tanto esencial, controlar el tamaño de las partes que se hacen, el tamaño de las unidades con las que se trabaja; estas unidades solamente pueden medirse con la unidad de medida inicial, en nuestro caso una tortilla. De este modo, tendremos que indicar que se reparten 16 partes de tortilla y que cada una de ellas es de tamaño 1/8 de tortilla.
- En general: si inicialmente existen *a* unidades y se fraccionan en *n* partes iguales se dispone de *n.a* de esas partes; posteriormente se entregan algunas de esas partes a cada uno de los b individuos participantes y se controla la totalidad ya repartida. En el caso más simple de entregar 1 de esas partes a cada uno de los b individuos, se reparte un total de b partes **de tamaño 1/n de unidad**, y quedan por repartir na-b partes, **de tamaño 1/n de unidad.**
- En la fase siguiente hay que repartir las mencionadas na-b partes de unidad entre los b individuos. Se puede simbolizar en la forma $((na\text{-}b):b]\left[\frac{1}{n}\right] = (a_1 : b)\left[\frac{1}{n}\right]$
- Lo que reciba cada individuo vendrá dado como la agregación, la suma, de la cantidad recibida en la primera fase y lo que resulte del reparto de lo que ha sobrado. Por tanto, se puede simbolizar en la forma $a : b = \frac{1}{n} + ((na\text{-}b):b)\left[\frac{1}{n}\right] = (a_1 : b)\left[\frac{1}{n}\right]$
- En los trabajos sobre la ficha 2 aparecen expresiones como 1/15 ; 1/5 de 1/3 ; 1/3 de 1/5 ; 1/3 . 1/5 ; 1/5[1/3]. *Justificaremos que todas son iguales*

**III. ACTIVIDADES**

2.- **FICHA 3**

> *Hacer los repartos que se indican de TRES formas diferentes y representar el proceso de forma gráfica, hablada y simbólica*
> *i) 2 tortillas entre 7 personas ii) 3 bizcochos entre 5 personas*
> *iii) 4 : 9 iv) 24 : 5*

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.

2.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar el sistema de representación a utilizar

**V. VALORACION**

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

## SESION 6: ***La técnica de la mayor parte*** (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Delimitar el procedimiento de "la mayor parte".

2.- Adquirir destreza en la representación polinómica unitaria.

**II. CONTENIDOS**

1.- La disparidad de formas de representar el resultado del reparto nos induce a introducir un criterio unificado:

- Se adopta el criterio de que en cada fase del reparto la unidad se divida en el menor número de partes posible; es decir, que se entregue a cada uno de los participantes la mayor cantidad de unidad posible. Denominamos a este procedimiento "***de la mayor parte***"
- Ante cualquier reparto a : b, el conocer las partes en que hay que dividir la unidad es equivalente a encontrar el número natural n que cumpla la condición $na \geq b > (n-1)a$. De este modo, estaremos en condiciones de hacer el reparto puesto que ya hay más unidades que individuos; además será el modo de fraccionar la unidad inicial en el menor número de partes.

**III. ACTIVIDADES**

2.- **FICHA 4**

*ACTIVIDAD 1*

*Utilizando el procedimiento de "la mayor parte" hacer los repartos que se indican y representar el proceso de forma gráfica, hablada y simbólica*

*i) 5 tortillas entre 7 personas ;, ii) 23 bizcochos entre 5 personas*

*iii) 7 : 11 ;; iv) 43 : 17*

*ACTIVIDAD 2*

*Ahmés fue un escriba del antiguo Egipto al que se atribuye la autoría de uno de los más valiosos documentos matemáticos que han llegado hasta nuestros días, el conocido como Papiro de Rind, que está datado en el año 1650 A.C. En ese Papiro, además de las soluciones de problemas, aparece una tabla, conocida como Recto (Gillings, 1982), que recoge los resultados que obtenían los egipcios para los repartos de la forma 2 : n, siendo n impar y con valores entre 3 y 101. Constituye la tabla más completa y extensa de las que han llegado hasta nosotros.*

*En la escritura original, las fracciones unitarias vienen indicadas por una raya encima del denominador,* $\overline{n}$*, lo que les permite seguir utilizando los mismos símbolos con lo que representan las cantidades enteras para representar cantidades fraccionarias: las que resultan de dividir la unidad en n partes iguales. En el Papiro no aparecen los signos + que figuran en el cuadro ya que su sistema de numeración aditivo conlleva que la presencia de dos símbolos seguidos se interprete como la suma de las cantidades que cada uno representa.*

*En el cuadro adjunto aparecen algunos resultados de Ahmés. Indica si siguen el procedimiento de "la mayor parte", y en caso de no ser así señala el resultado que debería figurar*

| Reparto | Escritura egipcia | | Reparto | Escritura egipcia |
|---|---|---|---|---|
| 2 : 5 | $\overline{3}$ $\overline{15}$ | | 2 : 7 | $\overline{4}$ $\overline{28}$ |
| 2 : 11 | $\overline{6}$ $\overline{66}$ | | 2 : 23 | $\overline{12}$ $\overline{276}$ |
| 2 : 9 | $\overline{6}$ $\overline{18}$ | | 2 : 18 | $\overline{10}$ $\overline{30}$ |
| 2 : 21 | $\overline{14}$ $\overline{42}$ | | 2 : 25 | $\overline{15}$ $\overline{75}$ |
| 2 : 13 | $\overline{8}$ $\overline{52}$ $\overline{\mathbf{104}}$ | | 2 : 17 | $\overline{12}$ $\overline{51}$ $\overline{\mathbf{68}}$ |
| 2 : 19 | $\overline{12}$ $\overline{76}$ $\overline{\mathbf{114}}$ | | 2 : 31 | $\overline{20}$ $\overline{124}$ $\overline{\mathbf{155}}$ |

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.

2.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar el sistema de representación a utilizar

**V. VALORACION**

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

## SESION 7: *Representación polinómica unitaria* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Caracterizar el procedimiento de "la mayor parte"

2.- Definir el sistema simbólico que denominamos representación polinómica unitaria.

3.- Reconocer las características sintácticas de dicho sistema.

4.- Estudiar propiedades semánticas de ese sistema

5.- Adiestrar a los alumnos en el manejo de la técnica del reparto y en su simbolización en el sistema de representación introducido.

**II. CONTENIDOS**

1.- Aparece un sistema de representación del resultado de un reparto igualitario asociado a una técnica concreta:

• El sistema de representación de los repartos no es novedoso, pues se ha visto que ya lo utilizaron los egipcios hace 4000 años. Ya se ha observado que no siempre utilizaron el procedimiento de "la mayor parte"; ello es debido a su necesidad de efectuar repartos reales y, en consecuencia, a la búsqueda de fraccionamientos de la unidad más sencillos, fundamentalmente en múltiplos de 2 y 3.

2.El sistema de representación de las cantidades resultantes de un reparto igualitario le vamos a denominar como representación polinómica unitaria

• Se denomina **representación polinómica unitaria** a la simbolización del reparto hecho por fases y utilizando el procedimiento de "la mayor parte"

En este sistema de representación todo par de números naturales (a,b), b + 0, admite una representación de la forma:

$$
\begin{array}{lll}
0 & & \text{si } a=0 \\
\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_1 n_2} + ,,, + \dfrac{1}{n_1 n_2 \ldots n_p} & n_i \text{ natural} \quad n_i \neq 0 & \text{si } a \neq 0
\end{array}
$$

**III. ACTIVIDADES**

Los alumnos deben realizar las cuestiones de investigación que se presentan en forma de tareas secuenciadas.

**CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 2**

1 y 2. Tarea 1:

*¿Tienen sentido expresiones como 3 : 3; 0 : 5; 7 : 0; 0 : 0?. Justifica tu respuesta utilizando la representación polinómica unitaria y enuncia resultados generales poniendo las condiciones que deben cumplir a y b para que la expresión a : b se interprete como reparto igualitario.*

3. Tarea 2:

*¿Hay repartos que se escriben con un número infinito de sumandos?. Justifica tu respuesta.*

*¿Hay repartos que admiten dos representaciones polinómicas unitarias distintas?. Justifica tu respuesta.*

*En la igualdad a : b =* $\frac{1}{c} + \frac{1}{cd}$ *¿por qué d tiene que ser mayor o igual que c?*

4. Tarea 3:

*Justifica las igualdades siguientes*

*a)* $(1 : b)\left[\frac{1}{n}\right] = \left[\frac{1}{bn}\right]$ ;; *b)* $\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{1}{p}\right] = \left[\frac{1}{np}\right]$ ;; *c)* $(a : b)\left[\frac{1}{n}\right] = a : bn$

5. Tarea 5:

*Encuentra las condiciones iniciales de los repartos que dan lugar a las representaciones polinómicas siguientes:*

*a)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ;; *b)* $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$ ;; *c)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

**IV. METODOLOGIA**

1 y 2.- Exposición del profesor.

3,4,5.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar el sistema de reconstrucción de las condiciones iniciales del reparto conocida su representación polinómica unitaria

**V. VALORACION**

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

## SESION 8: *Relaciones y operaciones* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Estudiar las relaciones de orden.

2.- Reconocer la densidad, respecto del orden, en el conjunto de las representaciones polinómicas unitarias.

3.- Conceptualizar operaciones de suma y resta de representaciones. Dificultades de obtención del resultado

4.- Conceptualizar operaciones de multiplicación (división) de números naturales por representaciones. Dificultades de obtención del resultado

**II. CONTENIDOS**

1.- En el sistema de representación simbólico estudiaremos algunas relaciones y operaciones, que deberán conceptualizarse en el modelo de reparto.

**III. ACTIVIDADES**

Los alumnos deben realizar las cuestiones de investigación que se presentan en forma de tareas secuenciadas.

**CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 3**

1. Tarea 1

*Encontrar representaciones polinómicas unitarias* ***mayores y menores*** que

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}$ *La respuesta debe estar debidamente justificada*

2. Tarea 2:

*Encontrar las representaciones polinómicas unitarias* ***anterior*** *y* ***siguiente*** *a*

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}$ *La respuesta debe estar debidamente justificada*

3. Tarea 3:

*Si encuentras la suma de dos representaciones polinómicas unitarias*

$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}\right]$ *¿cómo se interpreta en el modelo?*

*¿Cuál será la representación polinómica unitaria que corresponda al resultado? Explica cómo lo has hecho.*

4. Tarea 4:

*Escribe, en cada uno de los casos, la interpretación que corresponde a cada una de las operaciones en el modelo.*

*a)* $\mathbf{3}\ x \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right]$ ;; *b)* $\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right]:\mathbf{7}$ ;; *c)* $\frac{3}{4}\ x \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\right]$

**IV. METODOLOGIA**

1,2,3 y 4.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar los significados de las operaciones y las dificultades operatorias

**V. VALORACION**

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

## SESION 9: *Representaciones y notación fraccionaria* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Establecer la igualdad de significados de los símbolos a:b y $\frac{a}{b}$

2.- Revisar relaciones sintácticas en la notación fraccionaria

3.- Revisar las concepciones sobre las relaciones de orden entre notaciones fraccionarias.

4.- Justificar las siguientes desigualdades entre fracciones positivas:

• si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces a) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ;; b) $\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$

**II. CONTENIDOS**

1 y 2. En estas sesiones se ha definido un sistema de representación a partir de un modelo en que la acción era de repartir de forma igualitaria y sobre el que conviene hacer algunas reflexiones:

- Hemos visto que la representación polinómica unitaria indica una suma finita de cantidades de la misma magnitud y expresadas en la misma unidad, por tanto se pueden operar y el resultado nos vendrá dado en la misma unidad, la unidad inicial. Pero, como ya es conocido, la suma de un número finito de fracciones da una fracción
- Los símbolos a : b y $\frac{a}{b}$ están representando la misma cantidad, por tanto esos símbolos se pueden utilizar indistintamente. En consecuencia, los resultados de los repartos igualitarios se pueden simbolizar la fracción con la notación fraccionaria
- Una fracción $\frac{a}{b}$ también se puede concebir como el resultado del reparto igualitario de a unidades entre b individuos: una fracción indica una división partitiva.
- En todos los resultados encontrados hasta ahora se puede escribir $\frac{a}{b}$ en vez de a : b; sin embargo, hay que saber controlar los dos significados que tiene un mismo símbolo, las dos concepciones distintas de la fracción que se utilizan.
- Existe la posibilidad de simbolizar cualquier número racional mediante la notación fraccionaria o utilizando la representación polinómica unitaria. Por tanto, se amplia la concepción de la fracción como entidad única -las partes que se toman de una unidad fraccionada- También la fracción se representa mediante la suma de partes de unidad, cada una de las cuales se ha obtenido como parte de parte de unidad; es decir, la fracción tiene una estructura polinómica subyacente.

3 y 4. Por las características de la representación polinómica unitaria la comparación de dos fracciones se limita a comparar ordenadamente los sumandos de ambas; siendo mayor aquella que tenga mayor el primero de los sumandos que sea distinto al que ocupe el mismo lugar en la representación de la otra fracción. Esta característica nos abre nuevas perspectivas para la ordenación de números escritos con la notación fraccionaria, pues podemos obtener su representación polinómica unitaria y aplicar lo conocido para este sistema

**III. ACTIVIDADES**

Los alumnos deben realizar las cuestiones de investigación que se presentan en forma de tareas secuenciadas.

**CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 4**

1. Tarea 1:

a) ¿Por qué hay infinitas fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ y una sola representación polinómica unitaria? Justifica la respuesta

3 y 4. Tarea 2:

A partir del modelo, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ indican dos repartos igualitarios, responde **justificadamente** a las siguientes cuestiones a) ¿Qué significado tiene la expresión $\frac{a+c}{b+d}$? b) ¿Es cierta la desigualdad $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ sabiendo que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$?

3 y 4. Tarea 3:

A partir del modelo, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ indican dos repartos igualitarios, responde **justificadamente** a las siguientes cuestiones a) ¿Qué significado tiene la expresión $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$? b) ¿Es cierta la desigualdad $\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$ sabiendo que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ?

3 y 4. Tarea 4:

A partir de las expresiones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ calcula los repartos $\frac{a+c}{b+d}$ y $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$

Da una explicación razonada de por qué ambos repartos no son iguales

**IV. METODOLOGIA**

1, 3 y 4.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar los significados de las operaciones y las dificultades operatorias

**V. VALORACION**

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

## a.2. Representación polinómica decimal

Recogemos en este anexo las sesiones de clase relativas a un sistema de representación que tiene propiedades similares a la representación polinómica unitaria, aunque también presenta diferencias sustanciales

El desarrollo de las sesiones de clase se organizan en torno a las cinco componentes curriculares: actividades propuestas, objetivos, contenidos, metodología y valoración. La presentación se hace de forma secuencial, en el mismo orden en que se propusieron a los estudiantes.

### SESION 10: *Representación polinómica decimal* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Definir un sistema de representación simbólico originado al variar la técnica del reparto en el modelo.

2.- Analizar las características del sistema "representación polinómica decimal"

3.- Establecer comparaciones con las representaciones polinómicas unitarias.

**II. CONTENIDOS**

1.- Después de trabajar con el sistema de representación polinómica unitaria se han puesto de manifiesto que sus características sintácticas y semánticas diferentes de las de la notación fraccionaria se traducen en la aparición de técnicas de trabajo distintas de las conocidas.

Este sistema de representación conlleva la exigencia de que en cada fase del reparto la unidad se divida en un número de partes que deben calcularse "por tanteo". Es claro que la técnica resultará más simple si facilitamos esos cálculos previos.

En ese sentido, una alternativa es la de utilizar sistemáticamente fraccionamientos en un número fijo de partes. Y como ello es posible, ¿cuál debiera ser ese número? Pues bien, como existe un sistema de numeración de base 10 con el que se trabajan los números naturales, y puesto que las fracciones vienen dadas por pares de números naturales, la propuesta es hacer siempre DIVISIONES EN 10 PARTES IGUALES.

Por tanto, se mantiene el principio de hacer repartos atendiendo al procedimiento de "la mayor parte", pero al introducir esta variación aparecerá un nuevo sistema de representación, que denominamos **representación polinómica decimal** que, evidentemente, tendrá características diferenciadas del sistema de representación polinómica unitaria.

A modo de ejemplo, veamos cómo se representará 3/4 en este sistema:

i.- Hay que repartir 3 unidades entre 4 individuos y cada unidad se divide en 10 partes iguales. Se tiene 30 partes de unidad, de tamaño 1/10, a repartir entre 4 individuos; manteniendo el principio de "la mayor parte", a cada uno de ellos le corresponden 7 partes de tamaño 1/10 y sobran 2 partes de ese tamaño.

En forma simbólica, $\frac{2}{4} = \frac{7}{10} + \frac{2}{4}\left[\frac{1}{10}\right]$

ii.- Ahora hay que afrontar la tarea del reparto indicado por la fracción 2/4, teniendo en cuenta que ese reparto no se hace sobre unidades sino sobre partes de unidad de tamaño 1/10.

Se hace el este reparto manteniendo las divisiones en 10 partes y sale $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$

iii.- Agrupando los resultados de las dos fases que hemos seguido se alcanza el siguiente siguiente resultado:

$$\frac{3}{4} = \frac{7}{10} + \frac{5}{10}\left[\frac{1}{10}\right] = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$$

**III. ACTIVIDADES**
2.- **FICHA 5**

> *Actividad 1: Escribir en el sistema de representación polinómica decimal:*
> *a) 1/2 b) 3/5 c) 5/8 d) 7/16 e) 65/32*
> *Comparar los resultados con los que se obtienen en la representación polinómica unitaria.*
> *Actividad 2: Escribir en el sistema de representación polinómica decimal:*
> *a) 1/3 b) 2/7 c) 9/13*
> *Comparar los resultados con los que se obtienen en la representación polinómica unitaria.*

2 y 3.- Se propone unas cuestiones de investigación sobre relaciones entre notaciones representaciones polinómicas decimales, que deben hacer de forma secuenciada:

**CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 5**

Tarea 1:

*¿Tienen sentido expresiones como 3 : 3; 0 : 5; 7 : 0; 0 : 0?. Justifica tu respuesta utilizando la representación polinómica decimal y enuncia resultados generales poniendo las condiciones que deben cumplir a y b para que la expresión a : b se interprete como reparto igualitario.*

Tarea 2:

*¿Por qué hay repartos que se escriben con un número infinito de sumandos? Justifica tu respuesta.*
*¿Que condiciones deben cumplir a y b para que, sin hacerlo, podamos determinar si la representación polinómica decimal del reparto a : b tendrá un número finito o infinito de sumandos?*

Tarea 3:

*Justifica las igualdades siguientes* *a)* $(1:10)\left[\frac{1}{n}\right]=\left[\frac{1}{10^2}\right]=\frac{1}{10^2}$

*b)* $\left[\frac{1}{10}\right]\left[\frac{1}{p}\right]=\left[\frac{1}{10p}\right]$ ;; *c)* $(a:b)\left[\frac{1}{10}\right]=a:10b$

**IV. METODOLOGIA**

1.- Exposición del profesor.
2 y 3.- Trabajo individual de los alumnos.
Discusión colectiva para delimitar el sistema de representación a utilizar

**V. VALORACION**

Diario del profesor
Producciones escritas de los estudiantes.
Grabación en audio.

## SESION 11: *Relaciones entre representaciones polinómicas decimales* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Adquirir destreza en el manejo de la representación polinómica unitaria.
2.- Estudiar la equivalencia de representaciones polinómicas decimales.
3.- Caracterizar el orden entre representaciones polinómicas decimales.
4.- Analizar la densidad de Q a partir de la representación polinómica decimal

**II. CONTENIDOS**

2. Se dispone de un sistema de representación del que conocemos sus características sintácticas y semánticas. Ahora hay que analizar las relaciones de equivalencia y orden entre estas representaciones.
3. Como ya se vio en las representaciones polinómicas unitarias, para buscar una fracción comprendida entre otras dos basta sumar numeradores y denominadores. Así se cumple que $a/b \leq (a+c)/(b+d) \leq c/d$. Al buscar esa relación utilizando las representaciones polinómicas decimales se puede recurrir a la equivalencia de fracciones; en este caso algún alumno suele observar que la equivalencia de fracciones no se mantiene, pues hay subyacentes relaciones de proporcionalidad

que conviene explicitar [2]

**III. ACTIVIDADES**
1, 2 y 3.- **FICHA 6**

*Actividad 1: Encuentra las condiciones iniciales de los repartos que dan lugar a las representaciones polinómicas siguientes*

a) $5\left[\frac{1}{10}\right]+3\left[\frac{1}{10^3}\right]$ b) $7\left[\frac{1}{10}\right]+7\left[\frac{1}{10^2}\right]+\ldots$

c) $2+5\left[\frac{1}{10}\right]+7\left[\frac{1}{10^2}\right]+5\left[\frac{1}{10^3}\right]+7\left[\frac{1}{10^4}\right]+\ldots$

*Actividad 2 Utilizando las representaciones polinómicas decimales, ¿son equivalentes las fracciones 3/11 y 12/44?, ¿por qué?*
*Escribe las condiciones que han de cumplir dos fracciones positivas para que sean equivalentes, utilizando la representación polinómica decimal*
*Actividad 1: Utilizando las representaciones polinómicas decimales,*
*a) Escribir 2 fracciones mayores que 9/20.*
*b) Escribir 2 fracciones menores que 5/11*
*c) Escribir 2 fracciones que cumplan la doble condición de ser mayores que 1/2 y menores que 3/4.*
*d) Escribir 2 fracciones que cumplan la doble condición de ser mayores que 4/7 y menores que 9/11.*

**IV. METODOLOGIA**
2.- Exposición del profesor.
1,3 y 4.- Trabajo individual de los alumnos.
Discusión colectiva para delimitar las relaciones de equivalencia y orden en este sistema

**V. VALORACION**
Diario del profesor
Producciones escritas de los estudiantes.
Grabación en audio.

---

2 Se verifica la desigualdad $1/2 \le 4/7 \le 3/5$
Si se consideran las equivalencias 1/2= 5/10 y 3/5 = 6/10, se llegaría a las desigualdades $5/10 \le 11/20 \le 6/10$. Pero las fracciones intermedias 4/7 y 11/20 no son iguales, ¿por qué?
Los argumentos no son evidentes: repartir una tortilla entre 2 individuos es equivalente a repartir 5 tortillas entre 10 individuos y lo mismo se puede argumentar de las fracciones 3/5 y 6/10, pero al hacer los repartos de la totalidad salen las fracciones 4/7 y 11/20 que deberían ser equivalentes. Las razones de esa desigualdad tienen su justificación en la proporcionalidad, pues si bien es cierto que dos fracciones equivalentes indican que los repartos dan a cada individuo una cantidad igual, al hacer repartos conjuntos y compensar los excedentes de unos individuos con los déficits de otros sí que importa el número de individuos que participan, sí que depende del número de individuos para que los excedentes sean mayores.
La igualdad de resultados es cierta en el caso de que las fracciones iniciales se sustituyan por fracciones equivalentes que se hayan obtenido multiplicando numerador y denominador de las fracciones iniciales por el mismo número. Así si 1/2=5/10 y 3/5= 15/25, las fracciones resultantes de agrupar los repartos dan lugar a 4/7 y 20/35 que sí son equivalentes.
Por medio del lenguaje algebraico también se obtiene el resultado:

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{na}{nb} \text{ y } \frac{c}{d} = \frac{mc}{md} \text{ , entonces } \frac{a+c}{b+d} = \frac{na+mc}{nb+md} \quad \text{si } n = m$$

## SESION 12: *Operaciones* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Conceptualizar operaciones de suma y resta de representaciones. Procedimientos para la obtención del resultado

2.- Conceptualizar operaciones de multiplicación (división) de números naturales por representaciones. Dificultades de obtención del resultado

**II. CONTENIDOS**

1.- En el sistema de representación simbólico estudiaremos algunas operaciones, que deberán conceptualizarse en el modelo de reparto. La obtención del resultado puede obtenerse a partir de la modelización.

**III. ACTIVIDADES**

Los alumnos deben realizar las cuestiones de investigación que se presentan en forma de tareas secuenciadas.

**CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 6**

1. Tarea 1:

*Si encuentras la suma de dos representaciones polinómicas decimales*

$$\left\{3\left[\frac{1}{10}\right]+5\left[\frac{1}{10^2}\right]\right\}+\left\{3\left[\frac{1}{10}\right]+3\left[\frac{1}{10^2}\right]+...\right\}$$

*¿cómo se interpreta en el modelo?*

*¿Cuál será la representación polinómica decimal que corresponda al resultado?*

*Explica cómo lo has hecho.*

2. Tarea 2:

*Escribe, en cada uno de los casos, la interpretación que corresponde a cada una de las operaciones en el modelo, y calcula el resultado*

$$a)\ \left\{4\left[\frac{1}{10}\right]+7\left[\frac{1}{10^2}\right]\right\} x\ 2\ \ ;;\ \ b)\ \left\{6\left[\frac{1}{10}\right]+2\left[\frac{1}{10^3}\right]\right\} : 3$$

**IV. METODOLOGIA**

1 y 2.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar los significados de las operaciones y las dificultades operatorias

**V. VALORACION**

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

Grabación en audio.

## SESION 13: *Representaciones y notación decimal* (2 horas)

**I. OBJETIVOS:**

1.- Interpretar la notación decimal

2.- Ejercitar la técnica de paso de la representación polinómica decimal a la notación decimal.

3.- Analizar la densidad de Q en la notación decimal

4.- Dar significado y calcular el resultado de operaciones con notaciones decimales

**II. CONTENIDOS**

La escritura de las fracciones como suma de fracciones decimales resulta un tanto molesta porque en muchas ocasiones hay que escribir varios sumandos, por ejemplo la fracción 7/16 se escribe como 4/10 + 3/100 + 7/1000 + 5/10000

Vamos a orientar el trabajo en orden a simplificar esta escritura. Para ello, asumimos el siguiente convenio de símbolos, que os resulta familiar: $\frac{a}{10^n} = 0,00 ...\ a$

Aun cuando es un convenio ya conocido, será conveniente reflexionar qué es lo que se está representando. Por ejemplo, ¿qué indica la igualdad 4/10 = 0,4?

El primer miembro, la fracción 4/10 indica la parte de unidad que recibe cada uno de los 10 individuos entre los que se reparten 4 unidades. Ahora bien, según hemos manifestado, lo que hacemos es dividir cada unidad en 10 partes iguales y dar a cada individuo la mayor cantidad posible de unidad; en consecuencia, cada individuo recibe 4 partes de tamaño 1/10 de unidad.

Por otra parte 0,4 es la escritura de una cantidad en el sistema de numeración decimal, 4 décimas; es decir representa 4 de las 10 partes en que se ha dividido la unidad.

Por tanto 4/10 y 0,4 representan la misma cantidad, la que recibe cualquiera de los individuos que participan en un reparto, aunque la notación fraccionaria o decimal nos remita a contexto diferenciados.

## III. ACTIVIDADES

Los alumnos deben realizar las cuestiones de investigación que se presentan en forma de tareas secuenciadas.

### CUESTIONES DE INVESTIGACION Nº 7

1 y 2. Tarea 1:

*i.- Explica,* **de todas las formas posibles**, *lo que entiendes en cada uno de los casos siguientes:*

a) 12 b) 6,23 c) 0,99999..... d) $9,814\overline{37}$

*ii.- En cada uno de los casos siguientes, escribe los símbolos con notación decimal, justificando la respuesta*

a) $\frac{35}{5}$ b) $\frac{7}{7}$ c) $\frac{2}{0}$ d) $\frac{0}{8}$ e) $\frac{0}{0}$

3. Tarea 2:

*Encuentra todos las expresiones decimales situadas entre las que se proponen*

a) entre 3,5 y $3,\overline{5}$ b) entre $4,\overline{27}$ y $4,\overline{28}$

4. Tarea 3:

*En cada uno de los apartados tienen que indicar el significado de la operación que se propone, la forma de obtener el resultado y cómo se justifica ese resultado*

*a)* $3,98 - 3,\overline{97}$ *b)* $0,25 \times 4,367$

*c)* $4,\overline{2} \times 0,5\overline{43}$ e) $2,\overline{36} : 4$

## IV. METODOLOGIA

2 y 3.- Trabajo individual de los alumnos.

Discusión colectiva para delimitar los significados de las operaciones y las dificultades operatorias

## V. VALORACION

Diario del profesor

Producciones escritas de los estudiantes.

Grabación en audio.

# ANEXO III.2: TAREAS PROPUESTAS EN LA SEGUNDA ETAPA

## TAREA 1

**I. OBJETIVOS:**

1.- Anticipar la metodología de trabajo que se va a seguir en la sesión.
2.- Explicitar, por parte del estudiante, sus conocimientos personales sobre:
• las relaciones de orden entre repartos igualitarios
3.- Justificar la elección de la explicación propuesta al escolar

**II. CONTENIDOS**

La relación de orden entre resultados de repartos igualitarios
La explicación I utiliza una técnica; la explicación II conlleva un cambio de modelo; y la explicación III sugiere una reflexión sobre el mismo modelo.

**III. ACTIVIDADES**

1.- He aquí una tarea propuesta a un niño de una escuela y la respuesta que ha dado. Lee los textos que corresponden al profesor y al niño A y cuando finalices te haré algunas preguntas al respecto.

| Actividad propuesta por el profesor |
|---|
| Tienes que decir cuál de los repartos 3:5 y 4:7 es el mayor. Utiliza el signo adecuado<br>Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta |

| Respuesta del niño A |
|---|
| Se cumple que 3:5 < 4:7<br>He contestado así porque 4 tortillas son más que 3 tortillas, y si se reparte más tortilla cada uno recibe una parte más grande |

2.- Una vez que el futuro maestro indica que ya ha leido ambos textos, el investigador realiza al estudiante algunas preguntas, que se formulan en los términos siguientes:

- ¿Consideras que la respuesta es correcta o incorrecta?
- ¿Has detectado alguna incorrección?, ¿en qué parte de la respuesta?
- ¿Consideras que la respuesta presenta algún error importante?, ¿cuál es ese error?, ¿por qué es importante?
- ¿Le darías al niño alguna explicación para ayudarle?
    - Si el estudiante responde afirmativamente el investigador hará la siguiente propuesta: *aquí te muestro 3 posibles explicaciones para el niño A; elige la que tu le expondrías a ese niño*. Realizada la elección por parte del estudiante el entrevistador le demandará justificaciones acerca de la explicación que ha elegido y sobre las razones que le han llevado a rechazar las otras alternativas.
    - Si el estudiante responde de forma negativa el entrevistador le formulará preguntas del siguiente tipo: ¿le propondrías al niño alguna nueva actividad?, ¿cuál?, ¿por qué propones esta actividad?, ¿qué finalidad se persigue con la propuesta?, ¿en qué modelo haces la propuesta?, ¿por qué utilizas esa representación?

Las explicaciones entre las que debe de optar el futuro maestro están escritas en tres folios diferentes y están redactadas en los siguientes términos:

Explicación I

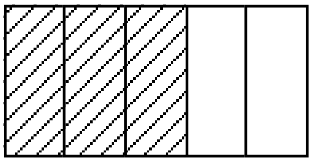
Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Para saber cuál de dos repartos es mayor hay que multiplicar en cruz y comparar los resultados obtenidos 3x7 y 5x4, ¿cuál es mayor?*

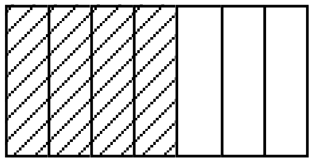
Explicación II

Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Como ya sabemos que los repartos también se representan por fracciones, mira el dibujo en el que aparecen rayadas las fracciones 3/5 y 4/7 y decide si tu respuesta es correcta*



**3/5**



**4/7**

Explicación III

Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Suponte que se reparte 1 tortilla entre 2 personas*

*Y después hacemos un reparto el que hay más tortilla, vamos a repartir 3 tortillas, pero ahora hay 100 personas.*

*¿En cuál de los dos repartos reciben más tortilla las personas?*

## TAREA 2

### I. OBJETIVOS:

1.- Explicitar, por parte del estudiante, sus conocimientos personales sobre:

- la suma de fracciones

2.- Justificar la elección de la explicación propuesta al escolar

### II. CONTENIDOS

Suma de fracciones positivas

La explicación I utiliza una técnica; la explicación II conlleva un cambio de modelo; y la explicación III sugiere una reflexión sobre el mismo modelo.

### III. ACTIVIDADES

1.- He aquí una tarea propuesta a un niño de una escuela y la respuesta que ha dado. De igual forma que en la tarea anterior debes leer los textos que corresponden al profesor y al niño B y a continuación te formularé algunas preguntas

Actividad propuesta por el profesor

Calcula el resultado de la suma siguiente $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta

Respuesta del niño B

El resultado es $\frac{6}{8}$

He contestado así porque he pensado que $\frac{2}{3}$ indica que se reparten 2 tortillas entre 3 personas y que $\frac{4}{5}$ indica que se reparten 4 tortillas entre 5 personas. Así que junto las tortillas y las personas y así ya sé cuanto recibe una persona que hubiese participado en los dos repartos por separado

2.- El investigador realiza al estudiante preguntas similares a las que se hicieron en la tarea 1:

- ¿Consideras que la respuesta es correcta o incorrecta?
- ¿Has detectado alguna incorrección?, ¿en qué parte de la respuesta?
- ¿Consideras que la respuesta presenta algún error importante?, ¿cuál es ese error?, ¿por qué es importante?
- ¿Le darías al niño alguna explicación para ayudarle?

- Si el estudiante responde afirmativamente el investigador hará la siguiente propuesta: *aquí te muestro 3 posibles explicaciones para el niño A; elige la que tu le expondrías a ese niño*. Realizada la elección por parte del estudiante el entrevistador le demandará justificaciones acerca de la explicación que ha elegido y sobre las razones que le han llevado a rechazar las otras alternativas.

- Si el estudiante responde de forma negativa el entrevistador le formulará preguntas del siguiente tipo: ¿le propondrías al niño alguna nueva actividad?, ¿cuál?, ¿por qué propones esta actividad?, ¿qué finalidad se persigue con la propuesta?, ¿en qué modelo haces la propuesta?, ¿por qué utilizas esa representación?

Las explicaciones entre las que debe de optar el futuro maestro están escritas en tres folios diferentes y están redactadas en los siguientes términos:

Explicación I

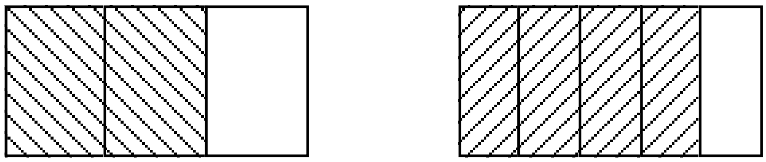
Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Te recuerdo que para sumar dos fracciones primero hay que buscar el denominador común y después sumar los numeradores*

Explicación II

Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Aquí tienes un dibujo con las fracciones, que te puede ayudar a calcular la suma que te he propuesto*



**2/3** **4/5**

Explicación III

Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Ese resultado que tu has puesto indica que la fracción 6/8 está comprendida entre 2/3 y 4/5, que es mayor que 2/3 y menor que 4/5, porque lo que tu propones es un nuevo reparto entre todas las personas que estaban en los dos repartos iniciales.*

## TAREA 3

### I. OBJETIVOS:

1.- Explicitar, por parte del estudiante, sus conocimientos personales sobre:
- la cuantificación del reparto igualitario

2.- Que el estudiante elabore una explicación para que los niños revisen su trabajo

### II. CONTENIDOS

Obtención de la representación polinómica unitaria de un reparto

La explicación I hace referencia a la sintaxis del sistema de representación; la explicación II utiliza una representación gráfica; y la explicación III sugiere una reflexión utilizando el lenguaje simbólico.

### III. ACTIVIDADES

1.- Aquí tienes una nueva propuesta del profesor y la respuesta que ofrece el alumno C. Lee ambas y después te hago unas preguntas

| Actividad propuesta por el profesor |
|---|
| Calcula el reparto **5 : 7,** expresando el resultado con una representación polinómica unitaria<br>Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta |

| Respuesta del niño C |
|---|
| El resultado es $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{28}$<br><br>El resultado me ha ido saliendo de esta forma<br>Al principio cada uno recibe $\frac{1}{2}$ de tortilla y quedan 3 trozos por repartir |

En la segunda fase hago el reparto 3:7 y me sale $\frac{1}{3}$, pero no de tortillas enteras sino de trozos de tamaño $\frac{1}{2}$ Así que cada uno recibe $\frac{1}{6}$ de tortilla y sobran 2 trozos

En la tercera fase hago el reparto 2:7 y me sale $\frac{1}{4}$, pero no de tortillas enteras sino de trozos de tamaño $\frac{1}{3}$ Así que cada uno recibe $\frac{1}{12}$ de tortilla y sobra 1 trozo.

Al final reparto el trozo que me queda y cada uno recibe $\frac{1}{7}$ pero de un trozo de tamaño $\frac{1}{4}$ , por lo que en esta fase cada uno recibe $\frac{1}{28}$ de tortilla

2.- El investigador realiza al estudiante preguntas similares a las que se hicieron en las tareas 1 y 2:
- ¿Consideras que la respuesta es correcta o incorrecta?
- ¿Has detectado alguna incorrección?, ¿en qué parte de la respuesta?
- ¿Consideras que la respuesta presenta algún error importante?, ¿cuál es ese error?, ¿por qué es importante?
- ¿Le darías al niño alguna explicación para ayudarle?

  - Si el estudiante responde afirmativamente el investigador hará la siguiente propuesta: *aquí te muestro 3 posibles explicaciones para el niño A; elige la que tu le expondrías a ese niño*. Realizada la elección por parte del estudiante el entrevistador le demandará justificaciones acerca de la explicación que ha elegido y sobre las razones que le han llevado a rechazar las otras alternativas.
  - Si el estudiante responde de forma negativa el entrevistador le formulará preguntas del siguiente tipo: ¿le propondrías al niño alguna nueva actividad?, ¿cuál?, ¿por qué propones esta actividad?, ¿qué finalidad se persigue con la propuesta?, ¿en qué modelo haces la propuesta?, ¿por qué utilizas esa representación?

Las explicaciones entre las que debe de optar el futuro maestro están escritas en tres folios diferentes y están redactadas en los siguientes términos:

Explicación I

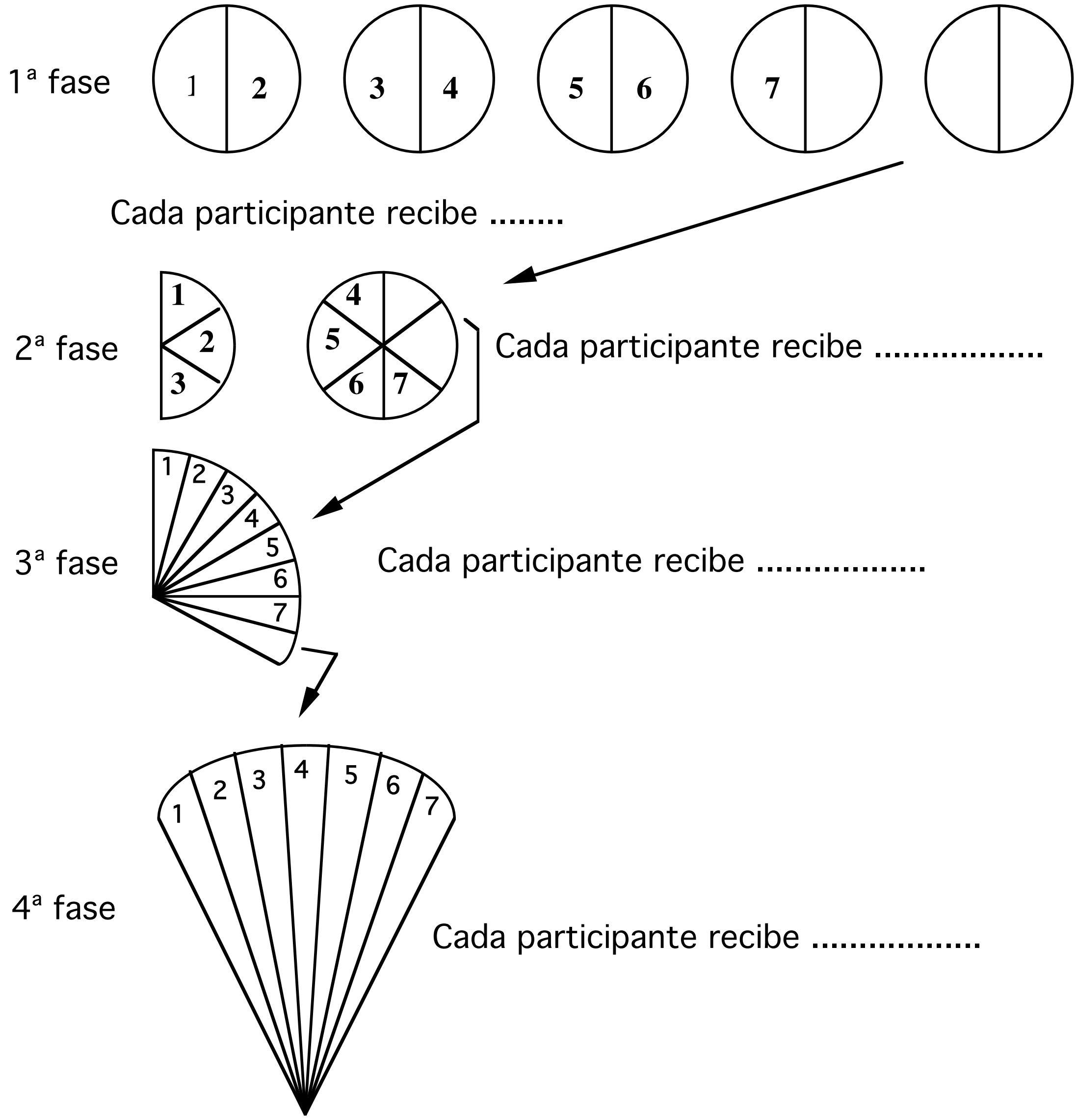
Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Te recuerdo que cuando escribimos una representación polinómica unitaria los denominadores tiene que cumplir una condición: que cada uno sea un múltiplo del denominador de la fracción anterior. Seguramente será porque el tamaño de las partes no esta bien controlado.*

Explicación II

Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

*Te muestro unos dibujos en los que aparece el reparto*




Explicación III

Te voy a hacer una reflexión y después tu repasas lo que has escrito para que decidas si está bien o mal

Cuando hay varias fases en un reparto hay que ir haciéndolo *cada fase por separado y teniendo en cuenta el tamaño de las partes. Yo te hago las dos primeras fases*

$$5:7 = \frac{1}{2} + (3:7)\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$3:7 = \frac{1}{3} + (2:7)\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$5:7 = \frac{1}{2} + (3:7)\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + (2:7)\left[\frac{1}{3}\right]\right\}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + (2:7)\left[\frac{1}{6}\right]$$

## TAREA 4

### I. OBJETIVOS:

1.- Explicitar, por parte del estudiante, sus conocimientos personales sobre:
- el paso de la notación fraccionaria a la notación decimal

2.- Que el estudiante elabore una explicación para que el niño revise su trabajo

### II. CONTENIDOS

Paso de la notación fraccionaria a la notación decimal

**III. ACTIVIDADES**

1.- En esta tarea también se recogen los textos que corresponden a la actividad propuesta por un profesor y la respuesta de un niño D. Lee las dos y después pasaremos a las preguntas

> Actividad propuesta por el profesor
>
> 1) Cada una de las siguientes fracciones tienes que escribirla con notación decimal
>
> a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{0}$ c) $\frac{11}{3}$
>
> 2) Justifica el resultado que has obtenido
>
> 3) Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta

> Respuesta del niño D
>
> 1) Los resultados son a) 0'5 b) 0 c) $3,\overline{6}$
>
> 2) El caso a) quiere decir que si reparto una tortilla para 2 personas cada una se lleva la mitad de la unidad, que también se puede escribir como 0'5 que son 5 décimas partes de la unidad; en el caso b) como no hay personas no se puede repartir y por eso hay que poner 0; y el caso c) significa que si se parten las tortillas en 3 trozos iguales cada persona se lleva 11 de esos trozos. Y al pasarlo a la notación decimal quiere decir que el reparto hay que hacerlo de otra forma pues cada unidad o parte de unidad se divide en 10 partes iguales, entonces cada uno de las personas recibe infinitos trozos de tortilla, osea una cantidad infinita de tortilla.
>
> 3) Lo que he hecho ha sido efectuar la división del numerador entre el denominador de cada una de las fracciones. En el caso a) la división sale enseguida; en el caso b) he puesto 0 porque no se puede hacer la división; y en el caso c) he puesto periodo porque el resultado se repetía.

2.- El investigador realiza al estudiante preguntas similares a las que se hicieron en las tareas precedentes:

- ¿Consideras que la respuesta es correcta o incorrecta?
- ¿Has detectado alguna incorrección?, ¿en qué parte de la respuesta?
- ¿Consideras que la respuesta presenta algún error importante?, ¿cuál es ese error?, ¿por qué es importante?
- ¿Le darías al niño alguna explicación para ayudarle?

  - Si el estudiante responde afirmativamente tiene que desarrollarla completamente sobre un papel. Las posteriores preguntas del entrevistador serán del tipo: ¿en qué aspectos de la comprensión quieres incidir?, ¿cuál es el modelo en que trabajas?, ¿por qué utilizas esa representación?
  - Si el estudiante responde de forma negativa el entrevistador le formulará preguntas del siguiente tipo: ¿le propondrías al niño alguna nueva actividad?, ¿cuál?, ¿por qué propones esta actividad?, ¿qué finalidad se persigue con la propuesta?, ¿en qué modelo haces la propuesta?, ¿por qué utilizas esa representación?

# TAREA 5

**I. OBJETIVOS:**

1.- Explicitar, por parte del estudiante, sus conocimientos personales sobre:

• significado del cociente de un número periódico y un número natural

2.- Que el estudiante elabore una explicación para que los niños revisen su trabajo

**II. CONTENIDOS**

Significado del cociente entre un número periódico y un número natural.

**III. ACTIVIDADES**

1.- He aquí una tarea propuesta a un niño de una escuela y la respuesta que ha dado. Tu trabajo consiste en decir, de forma justificada, si tal respuesta es correcta o incorrecta.

> Actividad propuesta por el profesor
>
> Invéntate un problema que se resuelva con la operación $6,1\overline{37} : 6$
>
> Después, calcula el resultado
>
> Escribe en lo que te has basado para dar la respuesta

| Respuesta del niño A |
|---|
| Unos amigos se reparten las tortillas que llevaban para la excursión y a cada uno de ellos le tocan $6,1\overline{37}$ tortillas. Y justo cuando se van a comer sus tortillas llegan 6 amigos más con los que deciden compartir su comida. Ahora que están más amigos, ¿cuánta tortilla comerá cada uno? |

| Respuesta del niño B |
|---|
| Un corredor lleva una velocidad constante de $6,1\overline{37}$ para recorrer 6 kilómetros, ¿cuál es la velocidad en cada uno de los kilómetros? |

2.- Por cada una de las respuestas de los niños A y b, el investigador realiza al estudiante preguntas similares a las que se hicieron en las tareas precedentes:

- ¿Consideras que la respuesta es correcta o incorrecta?
- ¿Has detectado alguna incorrección?, ¿en qué parte de la respuesta?
- ¿Consideras que la respuesta presenta algún error importante?, ¿cuál es ese error?, ¿por qué es importante?
- ¿Los errores de los niños A y B son similares?, ¿qué diferencias presentan?
- ¿Le darías al niño alguna explicación para ayudarle?
    - Si el estudiante responde afirmativamente tiene que desarrollarla completamente sobre un papel. Las posteriores preguntas del entrevistador serán del tipo: ¿en qué aspectos de la comprensión quieres incidir?, ¿cuál es el modelo en que trabajas?, ¿por qué utilizas esa representación?
    - Si el estudiante responde de forma negativa el entrevistador le formulará preguntas del siguiente tipo: ¿le propondrías al niño alguna nueva actividad?, ¿cuál?, ¿por qué propones esta actividad?, ¿qué finalidad se persigue con la propuesta?, ¿en qué modelo haces la propuesta?, ¿por qué utilizas esa representación?

## ANEXO III.3: Resultados y comentarios a la prueba inicial

1.- Sobre actitudes y creencias

• Dificultad de las matemáticas

PREGUNTA: Las matemáticas son fáciles o difíciles de aprender

| Respuesta | **N/C** | **Fáciles** | **Difíciles** |
|---|---|---|---|
| Alumnos | 2 | 19 | 26 |
| Porcentaje | 4% | 41% | 55% |

Más de la mitad de los estudiantes señalan la dificultad de comprensión de las matemáticas; aunque también es destacable que para el 40% de ellos resulten fáciles de entender.

• Aprecio de la asignatura

PREGUNTA: Las matemáticas: Te gustan Te desagradan Las odias

| Respuesta | **Gustan** | **Desagrad.** | **Odias** |
|---|---|---|---|
| Alumnos | 27 | 19 | 1 |
| Porcentaje | 57% | 41% | 2% |

Los estudiantes señalan de forma mayoritaria, el 57%, que es una disciplina que les gusta, aunque les disgusta al 40% y solamente hay 1 alumno que indica que las odia.

• Naturaleza de las matemáticas

PREGUNTA: Para ti las matemáticas son: una ciencia exacta que trabaja sobre verdades inmutables o una obra humana y como tal sometida a cambios constantes

| Respuesta | **C. exacta** | **C. human** |
|---|---|---|
| Alumnos | 27 | 20 |
| Porcentaje | 57% | 43% |

En cuanto a la naturaleza de las matemáticas los estudiantes tienen una concepción dominante (el 57%), de una ciencia exacta y de verdades inmutables; mientras para un 40% de los estudiantes es una creación de la mente humana.

2.- Utilidad de las matemáticas

• Sobre sus usos en la vida cotidiana

PREGUNTA: Escribe 5 situaciones (fuera del ámbito de la enseñanza) en las que utilices las matemáticas

| Respuesta | **Alumnos** | **Porcentaje** |
|---|---|---|
| Comercio | 44 | 94 |
| Banca | 26 | 55 |
| Medida | 24 | 51 |
| Jugar | 19 | 40 |
| Indagar | 6 | 13 |
| Repartir | 5 | 11 |
| Orient. Esp. | 2 | 4 |

Advertimos que el número de respuestas es superior al de encuestados (47) debido a que se podían dar hasta 5 respuestas diferentes. Es de destacar que casi todos los encuestados reconocen ser utilizan en el comercio y la banca, mientras que la mitad ven su utilidad en la medida y el juego; sin embargo, se concede poca utilidad en la orientación espacial.

• Sobre el uso de los tópicos del currículum.

PREGUNTA: Valora los siguientes temas según los hayas necesitado en tu vida como ciudadano, utilizando el código: **0** Innecesario; **1** Poco necesario (sólo a veces); **2** Bastante necesario **3** Imprescindible

| Temas | **Inneces** | **Poco nec** | **Bast. nec.** | **Impresc.** |
|---|---|---|---|---|
| N. Naturales | 0 | 0 | 3 | 45 |
| N. Enteros | 0 | 1 | 25 | 21 |
| N. Racionales | 0 | 14 | 21 | 12 |
| N. Irracionales | 18 | 23 | 5 | 1 |
| Sistemas de medida | 0 | 1 | 5 | 41 |
| Geometría del plano | 3 | 15 | 21 | 8 |
| Geometría del espacio | 2 | 19 | 19 | 7 |
| Ecuaciones y sistemas | 4 | 14 | 20 | 9 |
| Regla de tres | 0 | 1 | 16 | 30 |
| Teoría de conjuntos | 5 | 31 | 10 | 1 |
| Estadística | 1 | 13 | 28 | 5 |

Los encuestados manifiestan de forma muy destacada que los números naturales son imprescindibles en la vida (94%). Esa situación varía notablemente con los números enteros, pues los estudiantes les conceden la calificación de imprescindibles en el 45% de las respuestas y son bastante necesarios para el 53%.

Resulta llamativo que los estudiantes den más importancia, en cuanto a su uso, a los números enteros que a los racionales; en efecto, para el 30% de estos estudiantes los números racionales son poco necesarios y son imprescindibles solamente para el 26%; además, los consideran bastante necesarios el 43%.

En cuanto a los números reales resultan innecesarios para el 38% y poco necesarios para el 49%, siendo imprescindibles solamente para el 2% de los alumnos.

Los sistemas de medida es un tópico que los alumnos contestan que es imprescindible para el 85% y bastante necesario el 11% de los encuestados. Pero parece que esa importancia de los sistemas de medida se debe a su empleo con medidas de longitud, masa o capacidad, pues la geometría del plano no es tan necesaria como lo demuestra el hecho de que solamente para el 17% les resulta imprescindible, mientras que para el 32% resulta adecuada en alguna ocasión. Y respuestas similares se producen con la geometría del espacio en la que solamente el 13% la califica como imprescindible y el 40% como necesaria en alguna ocasión.

Nos ha resultado sorprendente que las calificaciones del tópico de ecuaciones y sistemas no se corresponda con la utilización que suelen hacer los alumnos en la resolución de problemas: resulta imprescindible para el 20% y bastante necesario para el 42%, mientras que el 8% de los alumnos contestan como innecesario. Parece, por tanto, que este tópico se muestra de gran utilidad en el ámbito escolar, pero de escasa utilidad fuera de dicho ámbito.

Las respuestas que aparecen en la regla de tres, que los estudiantes utilizan de forma mayoritaria en situaciones de proporcionalidad, se corresponde con los porcentajes del 63% y del 34% en las calificaciones de imprescindible y bastante necesario, respectivamente. Estos resultados ponen de manifiesto que la regla de tres es la técnica que más usan estos estudiantes en sus trabajos de la vida cotidiana.

La teoría de conjuntos tiene respuestas del 10% y del 65% en los apartados de innecesario y adecuado en alguna ocasión, lo que nos indicaría el poco uso que hacen de este tópico.

La estadística se percibe como bastante necesaria o imprescindible para el 70% de los estudiantes; este resultado viene a confirmar que los estudiantes asumen la creciente importancia que tiene el tópico en la sociedad actual.

3.- Sobre el aprendizaje

PREGUNTA: Valora las acciones que abajo se indican según sean adecuadas para aprender matemáticas, utilizando el código:**0** No sirve para aprender;**1** Es adecuada en alguna ocasión; **2** Es bastante necesaria; **3** Es imprescindible

| Recursos/tareas | **No sirve** | **Poco adec** | **Bast. nec.** | **Impresc.** |
|---|---|---|---|---|
| Disponer de libros | 0 | 2 | 6 | 39 |
| Explicaciones profesor | 0 | 0 | 11 | 36 |
| Problemas libro | 0 | 0 | 29 | 18 |
| Discusiones | 0 | 22 | 17 | 8 |
| Supervisar tareas | 0 | 3 | 23 | 21 |
| Resolver problemas | 1 | 4 | 15 | 27 |
| Ejercicios cálculo | 1 | 9 | 20 | 17 |
| Hacer investigaciones | 3 | 28 | 14 | 2 |
| Calculadora/ordenado r | 2 | 20 | 15 | 10 |
| Memorizar definición. | 14 | 23 | 8 | 2 |
| Salir a la pizarra | 9 | 16 | 23 | 7 |
| Material manipulable | 1 | 16 | 23 | 7 |

Los alumnos reflejan unas concepciones sobre el aprendizaje acordes con sus propias vivencias. Así los porcentajes en las respuestas son casi del 100% en las calificaciones de imprescindible y bastante necesario el disponer de buenos libros o apuntes, el escuchar con atención las explicaciones del profesor, el resolver los problemas del libro de texto y el que se supervise su trabajo. También hay un alto índice de respuestas imprescindible o muy necesario para las tareas de resolver problemas (89%) y hacer ejercicios de cálculo (79%)

De otra parte, los alumnos califican como innecesarios o adecuado en alguna ocasión a las discusiones de clase (47%), a los trabajos de investigación (66%) y a salir a la pizarra (70%).

Para casi la mitad de los alumnos tanto las calculadoras y ordenadores (47%), como la utilización de material manipulable (36%), no son necesarios o son escasamente adecuados

Finalmente, destacar que la memorización de las definiciones es poco o nada necesario en el aprendizaje de las matemáticas para el 77% de los alumnos; resultado que resultó indicativo de la escasa importancia que concede la enseñanza preuniversitaria a las exigencias de la matemática demostrativa.

4.- Sobre el conocimiento matemático

PREGUNTA: Valora qué conocimientos de los abajo descritos permiten decir que una persona sabe matemáticas, utilizando el código: **0** No es indicativo de saber matemático; **1** Es poco indicativo; **2** Es bastante indicativo; **3** Es totalmente indicativo

| Capacidades | **No indica** | **Poco ind** | **Bast. ind.** | **Tot. indi** |
|---|---|---|---|---|
| Relacionar conceptos | 3 | 8 | 22 | 14 |
| Conocer fórmulas | 1 | 6 | 18 | 22 |
| Generalizar | 1 | 7 | 20 | 19 |
| Manejar símbolos | 0 | 8 | 21 | 18 |
| Resolver problemas | 0 | 1 | 17 | 29 |
| Calcular bien | 1 | 13 | 23 | 10 |
| Buen cálculo mental | 2 | 12 | 25 | 8 |
| Comprender demostr | 0 | 5 | 20 | 22 |
| Formular conjeturas | 1 | 7 | 29 | 10 |

Los alumnos no destacan un aspecto por encima de los otros, puesto que conceden altas puntuaciones a los diferentes aspectos de saber matemáticas. Así entre las calificaciones de totalmente indicativo y bastante indicativo de saber matemáticas se obtienen los siguientes porcentajes: resolver problemas (98%), comprender las demostraciones (89%), conocer bien las fórmulas y resultados matemáticos (85%), generalizar (83%), conocer y manejar los símbolos (83%), hacer conjeturas (81%), relacionar conceptos (77%), hacer bien los cálculos (72%) y aplicar el cálculo mental (70%).

5.- Sobre el significado de la fracción

PREGUNTA: Escribe todo lo que entiendas cuando ves el símbolo $\frac{5}{7}$

| Significados | **1ª respu.** | **2ª respu.** | **3ª respu.** | **4ª respu.** |
|---|---|---|---|---|
| Parte-todo | 15 | 21 | 5 | 0 |
| Cociente | 2 | 4 | 3 | 2 |
| Otros | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Rarezas/errores | 2 | 9 | 6 | 1 |
| Lectura/descripción | 28 | 12 | 16 | 4 |
| No contesta | 0 | 1 | 16 | 40 |

De las cuatro posibles respuestas, de las cuatro posibles interpretaciones de la fracción que se pide a los alumnos, el 34% escribe solamente 2 respuestas y el 85% no da más que 3. El dato resulta más significativo si se tiene en cuenta que en el primer curso de la Diplomatura, en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I, se les explicaron los distintos constructos de fracción, incluyendo los de medida, relación parte-todo, cociente, razón y operador. Parece intuirse que la instrucción han respecto queda oculta bajo los conocmientos personales de la educación obligatoria

Como primera respuesta los alumnos, en un 60% de los casos, se limitan a clasificarlos (fracción, número racional, expresión decimal, ..) o a su lectura. Y el 32% da la interpretación de relación parte-todo.

En la segunda opción el 45 % de las respuestas se refiere a la fracción como relación parte-todo y tan sólo un 9% indica la noción de fracción como cociente.

Resulta llamativo que estos estudiantes no identifiquen más significados de la fracción que la relación parte-todo o el cociente. Ninguno llega a mencionar la medida o el operador.

De las respuestas hay una que indica que el número de arriba está contenido en el de abajo, que puede indicar la no aceptación de las fracciones impropias. Y la respuesta "*Depende del contexto, en un contexto deportivo puede ser un resultado entre dos equipos*" el alumno posiblemente haya confundido el modelo escolar de las fracciones con el de los números enteros.

6.- Sobre el significado de las expresiones decimales decimales.

PREGUNTA: Escribe todo lo que entiendas cuando ves el símbolo 2.04

| Significados | **1ª respu.** | **2ª respu.** | **3ª respu.** | **4ª respu.** |
|---|---|---|---|---|
| Fracción/cociente | 0 | 8 | 4 | 1 |
| Lectura/descripción | 46 | 23 | 13 | 3 |
| Rarezas/errores | 1 | 4 | 0 | 1 |
| No contesta | 0 | 12 | 30 | 42 |

Un 25% de los alumnos no da más que una respuesta de las 4 posibles, de las cuatro interpretaciones diferentes que se piden sobre las expresiones decimales; mientras que el 64% da solamente 2 respuestas y el 9% no da más que tres.

De la primera respuesta, el 53% se limita a clasificarlo como número decimal o número racional; y un 32% interpreta dicho número como extensión del sistema de numeración. El 13% restante engloba respuestas como número positivo, número compuesto de unidades y decenas, ...

En la segunda respuesta, el 26 % lo clasifica como fracción o número decimal y el 13% lo interpreta como extensión del sistema de numeración.

Resultan llamativas las respuestas de dos estudiantes que transportan significados de los números naturales

"*Dos (personas, cosas, ...) cero cuatro*"

"*Que cada unidad se compone de un cierto número de unidades que al llegar a un cierto número, se le suma otra unidad a la primera (99, 999, ....).*"

7.- Sobre la relación entre las notaciones fraccionaria y decimal.

PREGUNTA: Escribe distintas formas de justificar que los números 0,375 y $\frac{3}{8}$ son iguales

| Justificación | 1ª respu | 2ª respu | 3ª respu |
|---|---|---|---|
| División | 35 | 4 | 0 |
| Paso a fracción | 5 | 10 | 1 |
| Rarezas/errores | 6 | 15 | 3 |
| No contesta | 1 | 18 | 43 |

De las tres justificaciones que se piden, de los tres argumentos diferentes que deben esgrimir para justificar la igualdad entre una fracción y su correspondiente expresión decimal, los alumnos solamente dan una justificación en el 38% de los casos, y solamente dos en el 61% de los casos.

De las respuestas ofrecidas en primer lugar, el 74% utiliza como justificación el algoritmo de la división, mientras que un 11% lo justifica mediante el paso a fracción.

En la segunda respuesta, aparece en el 21% de los casos una comprobación mediante el producto del decimal por el denominador de la fracción

No hemos encontrado respuestas que utilicen argumentos no operatorios, salvo casos excepcionales que comentan, sin apoyos gráficos, que ocupan el mismo punto de la recta numérica o que ambos números representan la misma cantidad de superficie.

Respuestas que resultan llamativas

a) $\frac{0,375 \, . \, 6}{3} = \frac{3}{8} . 6 = \frac{18}{8} = 2{,}22 - 2,250$

b) $0,375 \, . \, x = \frac{3}{8} x \; ; \; \frac{0,375 \, . \, 8}{3} = \frac{x}{x} \; ; \; \frac{0,375 \, . 8}{3} = 1$

c) Con una regla de tres. d) $\frac{0,375}{1} = \frac{3}{8}$ ; 3 = 3

e) Si $\frac{8}{8}$ es igual a la unidad, $\frac{3}{8}$ es igual a 0,375.

8.- Sobre la densidad de los números racionales

PREGUNTA: Escribe los números siguientes a los que se dan:

a) 2,3; b) 0,567; c) 1,222. d) $\frac{1}{12}$ e) -2 f) 0,9999 ...

Resulta sorprendente que los estudiantes no hayan respondido sobre la imposibilidad de realizar la tarea propuesta. Aun cuando pueda pensarse que los estudiantes han contestado en función de que las tareas matemáticas siempre se culminan, la lectura de las respuestas de los estudiantes parece confirmar que los números racionales se comportan como un conjunto discreto.

a) Número siguiente a 2,3

| Respuesta | **2,4** | **2,31** | **2,301** | **2,300...1** |
|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 31 | 11 | 2 | 2 |
| Porcentaje | 66% | 23% | 6% | 4% |

Para el 66% de los alumnos el número siguiente es 2,4 y para el 23% el número siguiente es 2,31. Tan sólo 2 estudiantes señalan el número 2,30.....1 como el siguiente al dado.

b) Número siguiente a 0,567

| Respuesta | **0,568** | **0,6** | **0,5671** | **0,5678** | **0,5670...1** |
|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 40 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| Porcentaje | 85% | 2% | 9% | 2% | 2% |

En el caso de escribir el número siguiente a 0,567 es el 85% el porcentaje de estudiantes que ofrece la respuesta 0,568 y el 9% la 0,5671.

c) Número siguiente a 1,2222...

| Respuesta | **1,23** | **1,222..** | **1,3** | **1,2223** | **1,333..** | **1,2...3** | **1,21** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 16 | 1 | 12 | 9 | 4 | 3 | 1 |
| Porcentaje | 34% | 2% | 26% | 19% | 9% | 6% | 2% |

No hay tanta unanimidad en el caso del número periódico 1,233, pues para el 34% la respuesta es 1,23; mientras que el 26% da como respuesta 1,3, el 19% opta por 1,223 y el 6% opta por 1,22...3

d) Número siguiente a 1/2

| Respuesta | **1** | **2/2** | **0,6** | **0,51** | **3/5** | **1/3** | **3/4** | **0,50..1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 17 | 5 | 2 | 4 | 12 | 3 | 1 | 1 |
| Porcentaje | 36% | 11% | 4% | 9% | 26% | 6% | 2% | 2% |

Es destacable la respuesta 3/5 que exige de los alumnos pasar 1/2 a la notación decimal, 0,5, buscar el número siguiente, 0,6, y pasar este número a fracción, 3/5

e) Número siguiente a -2

| Respuesta | **-3** | **-1** | **-1,9** | **-1,99** | **#** |
|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 10 | 31 | 3 | 2 | 1 |
| Porcentaje | 21% | 66% | 6% | 4% | 2% |

La respuesta señalada con # resulta llamativa por cuanto el alumno indica que pueden ser dos los números siguientes pues dice que sería -3 si se toma en sentido descendente (hacia abajo, sic) y -1 si se hace en sentido ascendente (hacia arriba, sic).

La mayoría de los estudiantes han considerado que el orden se contempla en el conjunto de los números enteros; aun en este caso una parte importante de ellos, el 21%, considera el orden como si se tratase de números naturales precedidos del signo menos.

Los estudiantes que consideran el orden en los números racionales incluyen en errores detectados para números positivos, pero actúan con independencia del significado de números negativos.

f) Número siguiente a 1,9999....

| Respuesta | **1** | **0,999...** | **0,100** |
|---|---|---|---|
| Alumnos | 45 | 1 | 1 |
| Porcentaje | 96% | 2% | 2% |

Es destacable que ninguno de los estudiantes identifique el número propuesto como escritura periódica de 1.

9.- Sobre el orden en la notación fraccionaria

PREGUNTA: Escribe distintas formas de justificar que la fracción $\frac{3}{5}$ es mayor que $\frac{4}{7}$

| Justificación | **1ª respu** | **2ª respu** | **3ª respu** |
|---|---|---|---|
| Pasar a decimal | 22 | 15 | 1 |
| Igualar denominado | 16 | 10 | 3 |
| Operar las fraccio | 1 | 1 | 0 |
| Rarezas/errores | 8 | 7 | 4 |
| No contesta | 0 | 14 | 39 |

Para la mayoría de los encuestados, las relaciones de orden entre fracciones no admiten más de dos justificaciones diferentes, pues el 63% de los alumnos no ofrece más que dos respuestas. Y para casi un tercio de los alumnos, exactamente el 30%, no hay más de 1 respuesta.

De las respuestas obtenidas, tanto en la primera opción como en la segunda, el orden entre fracciones se hace por medio de la notación decimal, el 47% en primera opción y el 34% en la segunda opción.

Manteniendo la notación fraccionaria el orden se establece mediante la búsqueda de fracciones equivalentes con igual denominador 34% en primera opción y 21% en la segunda.

Dos alumnos indican que se podría hacer gráficamente, aunque no lo describen y otros dos alumnos establecen criterios de proporcionalidad utilizando una regla de tres.

Es de destacar la concepción errónea que aparece en 1 respuesta de la primera opción, 4 de la segunda y 1 de la tercera, en la que el orden se determina exclusivamente en función del tamaño del denominador "*Partimos de la base que si tenemos una unidad y si la dividimos en 5 partes iguales, éstas serán mayores que si las dividimos en 7*".

10.- Sobre el orden en la notación decimal.

PREGUNTA: Escribe distintas formas de justificar que el número 0,468 es mayor que 0,35

| Justificación | **1ª respu** | **2ª respu** | **3ª respu** |
|---|---|---|---|
| Pasar a fracción | 6 | 8 | 0 |
| Valor posicional | 17 | 2 | 0 |
| Operar los decimal | 4 | 2 | 0 |
| Rarezas/errores | 16 | 3 | 3 |
| No contesta | 4 | 32 | 44 |

Para la mayoría de los encuestados, las relaciones de orden entre notaciones decimales no admiten más de dos justificaciones diferentes, pues el 23% de los alumnos no ofrece más que dos respuestas. Y para casi dos tercios de los alumnos, exactamente el 68%, no ofrecen más de 1 respuesta. Resulta llamativo que el 9% de los alumnos no dé respuesta alguna y que para el 11% de los encuestados no haya que justificar la evidencia.

La respuesta más amplia, el 36%, es la de aplicar la técnica de comparación de notaciones decimales de "observar el primer decimal"

El 13% de los alumnos pasa los decimales a naturales, multiplicando ambos por 100, y los compara como tales números. Y un porcentaje igual resuelve la tarea pasando a fracciones los números propuestos.

Hay 3 alumnos que utilizan técnicas basadas en las operaciones (restar o dividir los números). Y son 2 los estudiantes que utilizan la proximidad a un número entero (a 0 ó a 1).

11.- Sobre el orden en las notaciones fraccionaria y decimal

PREGUNTA: Escribe distintas justificaciones de que el número 0,9292... es menor que $\frac{15}{16}$

| Justificación | **1ª respu** | **2ª respu** | **3ª respu** |
|---|---|---|---|
| Pasar a decimal | 39 | 1 | 0 |
| Pasar a fracción | 4 | 9 | 0 |
| Operar | 1 | 2 | 2 |
| Rarezas/errores | 1 | 2 | 1 |
| No contesta | 2 | 33 | 44 |

Tan sólo 2 alumnos (el 4%), completan las 3 opciones propuestas y el 70% de los estudiantes no ofrece más que 1 respuesta. No hemos podido delimitar si la escasa respuesta puede venir condicionada por el cansancio, por ser la última pregunta del cuestionario. La respuesta mayoritaria en la primera opción (83%), es la de comparar los dos números escribiéndolos con la notación decimal. En la segunda opción los estudiantes indican que se haría comparando ambos números escritos con notación fraccionaria, pero no explicitan las mencionadas fracciones (19%).

Hay dos respuestas que transcribimos literalmente, por poner de manifiesto dos nociones similares basadas en la proximidad a uno como elemento determinante de la magnitud de los números:

> "*Vemos que 16/16 será 1 entonces 15/16 estara muy cerca del 1 y sera mayor que 0,9292*".
>
> "*15/16 se aproxima a 16/16 que es la unidad, por lo tanto el número decimal siempre será más pequeño que 0,9..... que será la división de 15/16*".

# ANEXO IV.1

Trabajo propuesto a los estudiantes para que, con carácter voluntario, sirva para revisar el trabajo correspondiente a las representación polinómica unitaria.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
El Curriculum de Matemáticas en la Educación Primaria. Curso 97/98.

***Cuestiones para la reflexión sobre el trabajo con repartos.***

*Siguiendo con nuestro modelo habitual (tortillas, repartir, superficie) responde a las siguiente cuestiones:*

1.- Significado de la representación a:b de un reparto igualitario.

1.1. Realiza un juicio crítico sobre las definiciones de reparto que se enuncian. Si alguna definición es incorrecta propón otra alternativa.

a) **a:b** significa que tenemos **a** tortillas entre **b** individuos, realizamos el reparto y les toca a cada una de las **b** personas **a** tortillas.

b) **a:b** significa que tenemos **a** tortillas entre **b** individuos, realizamos el reparto y les toca a cada una de las **b** personas **a** partes de tortilla.

c) **a:b** es la cantidad de tortilla que recibe el individuo **b** que participa en un reparto de **a** tortillas.

d) **a:b** significa que realizamos un reparto entre **b** individuos que se reparten **a** tortillas.

e) **a:b** significa que dividimos la unidad en **b** partes y cada uno de los individuos se llevan **a** partes.

f) **a:b** significa que fraccionamos la unidad en **b** partes y nos llevamos **b** de esas partes.

1.2. Indica los valores que pueden tomar **a** y **b** para que **a:b** represente un reparto igualitario.

2.- Significado de la equivalencia y orden de los repartos.

2.1. ¿Cuándo dos repartos son equivalentes?

¿Qué condición se deben cumplir los valores a, b, c y d para que los repartos a:b y c:d sean equivalentes?

2.2. ¿Cuándo decimos que el reparto a: b es mayor que el reparto c:d?

¿Qué condición se deben cumplir los valores a, b, c y d para que el repartos a:b sea mayor que el reparto c:d?

3.- Operaciones con repartos. Significado y resultado.

Dados los repartos a:b y c:d, y sea n un número natural distinto de cero

3.1. Indicar el significado de las operaciones: 2 x [(a:b) - (c:d)] ;; [(a:b) + (c:d)]: n

3.2. Calcula el resultado de las anteriores operaciones.

4.- Cuantificar el resultado de un reparto.

4.1. Explica en qué consiste el procedimiento de reparto por fases.

4.2. Explica en qué consiste el procedimiento de reparto por fases, aplicando el procedimiento de la mayor parte.

4.3. Utilizar el procedimiento de mayor parte para calcular los repartos:

a) 9:25 b) 1:11 c) 1109:330 d) 38:11

5.- La representación polinómica unitaria

Siguiendo el procedimiento de la mayor parte construimos otro sistema simbólico de representación del resultado de un reparto: la representación polinómica unitaria

$$a : b = c + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} + \ldots + \frac{1}{n_1 n_2 n_3 \ldots n_p}$$

a) Indica qué significado tiene $n_1$. Y expresa de forma simbólica las condiciones que debe cumplir $n_1$.

b) Justifica de forma razonada que $n_1 \le n_2 \le n_3 \le ....... \le n_p$

6.- En el sistema de representación polinómica unitaria lo que recibe cada uno de los individuos que participan en el reparto viene dado como suma de las cantidades recibidas en cada fase del reparto y, a su vez, éstas cantidades vienen simbolizadas por fracciones unitarias.
Encontrar las condiciones iniciales de los repartos que dan lugar a las representaciones polinómicas siguientes:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}$

c) $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{90}$ d) $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{99}+\frac{1}{1089}$

Hacerlo de dos formas diferentes

7.- El orden en la representación polinómica unitaria del reparto.

a) Compara los repartos cuyas representaciones polinómicas unitarias son las dadas en la pregunta anterior.

b) Encuentra 3 repartos intermedios entre los repartos citados en la pregunta anterior.

c) ¿Es cierta la siguiente desigualdad?

$$\frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} + ... + \frac{1}{n_1 n_2 n_3 ... n_p}$$

8.- Representaciones del reparto y la notación fraccionaria.

Dado que los símbolos a:b y $\frac{a}{b}$ están representando la misma cantidad, podemos utilizarlos indistintamente para simbolizar el resultado de un reparto igualitario. Una fracción $\frac{a}{b}$ también puede interpretarse como el resultado del reparto igualitario de **a** unidades entre **b** individuos. De esta forma la fracción tiene una estructura polinómica subyacente.

Continuando con nuestro modelo señala, para cada uno de los casos siguientes, el sentido que das a los símbolos empleados y justifica la respuesta:

a) $\frac{12}{4}$ b) $\frac{4}{4}$ c) $\frac{8}{0}$ d) $\frac{0}{4}$ e) $\frac{0}{0}$

9.- Relaciones de orden en la notación fraccionaria en el modelo propuesto.

a) Encontrar 5 repartos comprendidos entre $\frac{5}{12}$ y $\frac{6}{13}$

b) Justificar razonadamente la verdad o falsedad de las siguientes desigualdades

i) $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+1}$ ii) $\frac{a+b}{b} < \frac{a}{b}$ iii) si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b}+\frac{a}{a} > \frac{c}{d}+\frac{c}{c}$

iv) si a > c y b > d entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

c) Dados los repartos $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$ Hallar sus representaciones polinómicas unitarias y ordenarlos de menor a mayor

d) Justificar que hay infinitas representaciones polinómicas unitarias mayores y otras infinitas menores que la de $\frac{3}{4}$

# ANEXO IV.2

Transcripciones de los debates en pequeño y gran grupo celebrados en la fase de Implementación de la ETAPA 1. Están secuenciados de acuerdo como se desarrollaron en las sesiones de clase

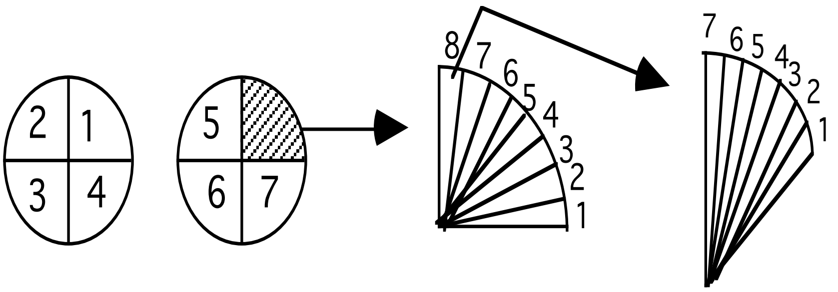
## ANEXO IV.2.1. Cuestión de debate número 1

<u>Tarea propuesta</u>

Hacer una representación gráfica y una representación simbólica para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas. El reparto ha de hacerse por fases.

<u>Respuesta del alumno X</u>

a) Representación gráfica




b) Representación simbólica

$$2:7 = \frac{1}{4}[1] + (1:8)\left[\frac{1}{4}\right] + (1:7)\left[\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{56}$$

***Puntos de debate:***

1.- Determinar si la respuesta es correcta o errónea.
2.- Analizar la sintaxis empleada.
3.- Estudiar la verdad o falsedad de las relaciones semánticas utilizadas.
4.- En caso de desacuerdo con el trabajo del alumno X, formular la respuesta que debería haber dado.

## DEBATE COLECTIVO

En la transcripción del debate se han utilizado las unidades de análisis para la Interacción Didáctica de Romero (1995)

| | | |
|---|---|---|
| 2. PP/g | **P** | ¿Allí? |
| 3.AVI/rs | **A** | No es correcta |
| 3.PVI/ar | **P** | No es correcta |
| 1.PO/d | | Vamos a ir por partes. Vamos a ver, estas ... |
| 1.PO/s | | Por favor, ahora vamos a intentar organizarnos |
| 3.PIS/cl | | Allí, decís que no sale, ¿por qué? |
| 2.PO/p | | Entonces, para separar las cuestiones, en lugar de dar respuestas globales primero sobre la representación gráfica, ¿es correcta o no? |
| 3.AVI/ar | **A** | Es correcta |
| 3.PIS/i | **P** | ¿Por qué? |
| 3.AAI/ai | **A** | Se podía haber evitado una fase, pero él ha querido hacer dos, haciendo que en la primera fase se repartan 8 trozos; como son 7 personas, el otro, el trozo que queda se reparte otra vez entre siete. Pero ya podía haber hecho directamente el trozo que quedaba al principio entre siete y así hubiese acabado el reparto; pero así también vemos que es correcto, en más fases pero bueno. |
| 3.PVI/ar | **P** | Osea, que eso es correcto. |
| 3.PIS/e | | ¿Vosotros decís que es incorrecto? |
| 3.AVI/rs | **A1** | La gráfica sigue valiendo lo mismo. |
| 3.PVI/ar | **P** | Bueno. |
| 1.PO/d | | Entonces vamos por partes. |
| 3.PIS/cl | | A ver, ¿Hay alguien que diga que la gráfica no está bien?¿es correcta la gráfica? ¿la |

| | | |
|---|---|---|
| | | representación gráfica? |
| 3.AVI/rs | **A** | Si, si, .. |
| 1.PO/p | **P** | Pasamos a la representación simbólica. Vamos a ver |
| 3.PIS/e | | Por favor. ¿Vosotros seguis diciendo que es incorrecta? |
| 3.AVI/ar | **A1** | Correcta |
| 3.PIS/e | **P** | Correcta. ¿la simbólica? |
| 3.AIS/a | **A** | ¿La? |
| 2.PE/a | **P** | La simbólica, la segunda parte |
| 3.AVI/rs | **A** | No |
| 3.PVI/ar | **P** | No es correcta |
| 3.PIS/e | | ¿Vosotros? |
| 3.AVI/rs | **A** | Si es correcta |
| 3.PVI/ar | **P** | Si es correcta |
| 3.PIS/e | | ¿Vosotros? |
| 3.AVI/rs | **A** | No es correcta |
| 3.PVI/ar | **P** | No es correcta, .. no es correcta, .. , correcta, ... , |
| 3.AVI/rs | **A** | Correcta, no es correcta |
| 3.PVI/s | **P** | A ver allí si os aclarais |
| 3.PIS/cl | **P** | ¿Es correcta o no? |
| 3.AVI/rs | **A** | Si, si |
| 3.PVI/ar | **P** | Si es correcta. |
| 3.PIS/i | | Vamos a ver. Contadnos porque es correcta. |
| 3.AMC/j | **A** | Porque aunque se salta una fase el resultado es el mismo que si no se la saltase. El resultado está bien. |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Aquellos? |
| 3.AMC/j | **A** | La asumo, las fases, hombre, las fases que ha hecho están bien en la representación gráfica. Pero la representación simbólica también; aparte que lo único, es como el otro día , que no se pueden multiplicar trozos por trozos. Osea que lo ha simplificado y esa simplificación está bien |
| 3.PDC/d | **P** | Estamos hablando de la respuesta, ¿eh? |
| 3.AIS/a | **A** | Pero de la simbólica, ¿no? |
| 2.PE/a | **P** | Si, si |
| 3.AMC/j | **A** | Pues eso, ... es correcta. Las compañeras dicen que sí. |
| CA/i | | Cruce de voces |
| 3.PVI/ad | **P** | Osea, le falta la referencia a las unidades. Si pusiese de tortilla sería correcta. |
| 3.PIS/e | | ¿Y vosotros? |
| 3.AVI/rs | **A** | Pues eso, que no es correcta. |
| 3.PVI/ar | **P** | No es correcta |
| 3.AMC/j | **A** | Al hacer la simplificación; sobre todo si .. |
| CA/i | | Cruce de voces |
| 1.PA/r | **P** | Venga, por favor. |
| 3.PVI/aa | | ¿Habeis escuchado lo que dice la compañera?¿Es correcta, o no? |
| 3.AVI/rs | **A** | No es correcta. |
| 3.PIS/i | **P** | Decidme por qué no |
| 3.AMC/j que | **A** | No es correcta porque al representar lo que dice el dibujo, en el tercer paso, en lo pone 1/7 de 1/8 pues realmente no es de 1/8, es de, bueno es de 1/8 pero está dentro de 1/4 del paso de antes... Osea, donde pone 1/7 de 1/8, es 1/7 de 1/8 pero es dentro de 1/4, del de antes; entonces no es correcto lo que está ahí puesto. Entonces tendría que poner 1/7 de 1/8 de 1/4, para que estuviera bien lo que está representado arriba. |
| 3.AIS/j | **A1** | Entonces tendría que ser también 1/8 de 1/4 de una unidad, ¿si o no? |
| CA/i | | Cruce de voces |
| 3.AVI/rj | **A1** | Pero no, entonces está bien; si especificas eso tienes que decir, que especificar lo otro |
| CA/r | | Cruce de voces discrepantes |
| 3.AVI/ad | **A1** | Pues entonces está bien; da igual poner 1/7 de 1/8, es lo mismo. |
| CA/r | | Cruce de voces discrepantes |
| 3.AIS/j | **A1** | Pero si lo que divides es 1/8, no lo que divides, .. ¿no se si me entiendes? |
| 3.AVI/rs | **A** | Pero haces, haces eso para 1/56 |
| CA/r | | Ruido |
| 3.AVI/rj | **A** | La multiplicación por el número que tú dices; ya sé que estamos haciendo lo mismo. |
| CA/r | | Ruido |
| 3.AVI/rj | **A1** | Yo, está bien lo que tú dices, lo que pasa es que yo haría de uno, ¿no?. Pero es que |

| | | |
|---|---|---|
| | | al especificarlo no da .. |
| 3.AIS/j | **A** | 1/7 de 1/8 de 1/4 es lo mismo, ¿no? |
| 3.AVI/ar | **A1** | Claro |
| 3.AIS/j | **A** | Entonces, tendrías que decir ... |
| 3.AVI/ad a | **A2** | Y después hay que meter 1/7 de 1/8 de 1/4 de 1. Pero es que multiplicar por 1 te va dar lo mismo. |
| 3.AVI/rj | **A** | Ya, es que eso me parece bien; pero es casi lo mismo ¿no?. También sería lo mismo. |
| 3.AVI/rj | **A2** | No, porque es que ... no es lo mismo 1/8 que 1/56 |
| 3.AVI/rj | **A1** | Pero el que divides, el que divides, .. osea, divides 1/8 en 7 partes. Eso está bien, aunque sea de 1/4. |
| 3.AVI/rj | **A3** | No. Tú, cuando multiplicas un número por 1, ese dará lo mismo. |
| 3.AVI/ar | **A1** | Sí, que si |
| 3.AAI/ai | **A3** | Si el número ese lo multiplicas por una fracción, el número cambia. |
| 3.AIS/a | **A1** | Bien. Pero lo que está haciendo aquí es dividir 1/7 de 1/8, es lo que está haciendo, ¿no? |
| 3.AVI/rj | **A2** | Pero ese octavo es dentro de un trozo, que es 1/4 |
| 3.AMC/j | **A1** | Bien |
| 3.AAI/ai | **A3** | Pues ya está, lo tienes que poner. Se llevan decimales ... |
| 3.AMC/j | **A1** | Ya, nosotros también hemos hecho las operaciones antes, desde el principio al final, y al principio y al final nos sale lo mismo. |
| 3.AIS/j | **A2** | ¿Qué os sale? Pero si, ..., pero si hubieses puesto 1/8 os sale lo mismo |
| CA/r | | Ruido |
| 2. PP/g | **P** | A ver, ¿vosotros lo teníais escrito? |
| 2.AV/a | **A4** | Sí |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Y lo que están contando por ahí? |
| 3.AVI/v | **A4** | No, es que habíamos puesto que era correcta, lo que pasa que al decir eso pues estamos ahora comprobando |
| 3.PIS/e | **P** | Qué comprobais, ¿lo que dice vuestra compañera? |
| 3.AVI/v | **A4** | Realmente es 1/8 de 1/4, ... pero no sabemos ... |
| 3.PVI/v | **P** | Creen que debe ser verdad, pero .. no se lo acaban de creer. |
| 2.PO/p | | ¿Vuelves a explicarles el punto este? |
| CA/b | **A2** | (sonríe) |
| 2.PO/p | **P** | Preguntadle las dudas que tengais vosotras. |
| 3.AIS/i | **A4** | Es de suponer que en la primera parte, cuando el resultado tienes que representar todo, también tendrías que poner de la unidad. Y aquí, cuando pone 1:8 de 1/4 también tendría que poner de la unidad. |
| 3.AVI/rs | **A2** | Pero es que luego lo multiplicas |
| CA/r | | Ruido |
| 3.AAI/os | **A4** | Es que está mal expresado |
| 3.AAI/ai | **A5** | Pero, entonces está bien. Es 1:8 de 1/4 que te sobra, y eso es 1:7 |
| 3.AVI/rj | **A6** | No, pero es 1/8 de 1/4, no 1/8 de la unidad. |
| 3.AVI/rj | **A5** | Pero a tí lo que te ha sobrado de 1/4 es 1/8. Entonces 1/8 lo divides entre 7 trozos. |
| 3.AVI/ad | **A6** | 1/8 de 1/4 de la unidad. Si te vas dejando la unidad .. |
| 3.AVI/rj | **A2** | Si te dejas la unidad, como hay 1 no influye para nada. |
| 3.AVI/rj | **A4** | Pues entonces se tendría que poner igual. |
| 3.AVI/rj | **A2** | Pero es que luego pone que digas si está bien y algo tendrás que decir, ..., que está mal. Pero el 1 no influye para nada. |
| 1.PO/p | **P** | ¿Por qué no se lo cuentas en la pizarra? Es que no acaban de convencerse. |
| 2.AE/j | **A1** | (sale a la pizarra y escribe 2:7=1/4 (1) + 1/8(1/4)(1) + 1/7(1/8)(1/4)(1) |
| 1.PO/s | **P** | A ver. Que os lo cuenta. |
| 3.AAI/d | **A2** | Pues eso, que lo que dices tú no será el uno este (señala en 1/8(1/4)(1)); pero es que, como es un 1, osea, está mal puesto. Se tendría que escribir así, a nuestro parecer. Entonces, como es 1 no nfluye para nada, porque al multiplicar una cosa por 1 te va a seguir saliendo lo mismo. Entonces aquí, (señala en 1/7 (1/8)(1/4)(1)), si multiplicas este 1/8 por el 1/4 anterior no te va a salir lo mismo. Entonces hay que ponerlo. |
| 3.PIS/e | **P** | Pero, ¿por qué hay que poner 1/4? |
| 3.AAI/os | **A2** | Por que es de la parte .... |
| 1.PO/d | **P** | Dibuja las partes. |
| 3.AAI/d | **A2** | Bueno, las 7 partes estas. Tú coges una parte, ¿no?, es 1/7 pero de una parte de |

las 8 que tienes de antes dibujadas. Pero es que esas 8 partes que tienes aquí dibujadas son de las 4 de antes, que también lo tienes que reflejar. Que sólo es del trocito este, que sólo es de este.

1.PO/d **P** Házselo desde el principio, porque se lo has hecho hacia atrás y parece que no se han enterado.

2.AV/a **A2** Bueno (dibuja el reparto desde el principio)

2.AV/r **A4** No hace falta

2.PE/j **P** De lo que se trata es de que se aclare. No hay que hacer concesiones, hay que comprender.

2.AV/a **A2** Ya

1.PO/d **P** Vuélvelo a contar

3.AAI/d **A1** Pues eso. Que ahora cogemos de 1/4 ..

3.AMC/c **A4** Ya lo hemos entendido

3.PIS/cl **P** ¿De donde sale ese 1/4 que pone ahí arriba?

3.AMC/j **A4** Porque es 1/8 de 1/4. El cuarto lo divides en 8 partes y de esas 8 partes coges 7 y te sobra 1

3.PIS/cl **P** ¿Ya lo tiene claro todo el mundo?, ¿si?

3.CA/b **A2** (Se sienta sonriente)

...............

1.PO/s **P** Vamos a ver. Pregunto en general.

3.PIS/cl Queríamos una representación gráfica, ¿verdad? De acuerdo con las exigencias, ... lo que pedía esto era dar el resultado.¿En la representación gráfica figura el resultado?

3.AAI/os Alumnos: No, no, ..

3.PIS/cl **P** La representación gráfica ¿es correcta o incorrecta? ¿Entendeis la pregunta?

3.PDC/c La tarea, tal como está enunciada, dice: expresar el resultado en forma gráfica y simbólica. Ahora nos fijamos en la forma gráfica,

3.PIS/e ¿Qué es lo que tendría que haber figurado ahí?

3.AVI/s **A6** !Ajá!

3.AMC/c El 1/4, que es lo que le pertenece, el 1/8 y el 1/244.

3.PVI/aa **P** Eso es lo que tendría que haber dado como respuesta, ¿no?

3.PIS/cl O bien, ¿habría sobre el dibujo alguna otra forma?

3.AVI/ad **A7** Lo que corresponde a cada uno rayarlo

3.PVI/aa **P** Habría que haber rayado o haberlo separado. Y habíais dicho todos que era correcta, ¿no?

................

2.PO/d **P** Pregunto de nuevo.

3.PIS/cl ¿La formulación final que ha puesto vuestra compañera en la pizarra, es la que coincide con la que habíais puesto vosotros?

3.AAI/os Alumnos. Sí, sí

3.AIS/r **A** Es que nosotros hemos tenido una duda que ahora no sabemos si es verdad o mentira. Al poner 1:8 él lo que hace es repartir ese trozo entre 8 personas. Pero tal y como se pone en el enunciado, tiene que repartir entre 7 personas.Entonces, hemos considerado que eso también era un fallo.

3.PIS/e **P** ¿Vosotros lo habeis considerado?

Desaparece el sonido de la grabación

3.AVI/rj **A2** 1:8 significa lo que ha dicho ella, que es una cosa entre 8 personas. Pero sólo la reparte entre 7 porque sobra un trozo.

3.AVI/rj **A** Al principio también le sobraba un trozo y pone 2:7.

3.AVI/rs **A2** Pero si se escribe así (señala la pizarra). Así escrita está bien.

1.PO/d **P** Al grupo del final.

3.POC/e Pregunto: lo que dicen los compañeros de estos grupos es que 1:8, que figura en la representación simbólica, está mal escrito, no debería de figurar.

2.AP/p **A7** ¿Uno?

2.PE/a **P** Uno repartido entre 8

2.AP/p **A7** ¿La segunda parte?

2.PE/a **P** Sí

3.AVI/rj **A1** Es que sería más normal dividir las tortillas en cuartos y luego, en vez de dividir el cuarto que queda en 8 partes, sería más razonable dividirlo en 7 directamente.

3.PVI/ar **P** Bueno, eso sería un planteamiento.

3.PDC/j Pero lo que estamos viendo es lo que ha hecho un compañero vuestro aquí. Y lo que se pregunta es si hay incorrecciones en lo que ha hecho.La forma de repartir puede ser diferente. Pero la pregunta en concreto es sobre la cuestión (1:8) [1/4] (y lo

escribe en la pizarra)
3.AVI/ad **A1** Si ha dividido el cuarto en 8 partes estará bien.
3.AVI/rj **A** Pero al principio también ha dividido en 8 partes, cuando ha sacado los 8 cuartos, y ha puesto un 7. Aquí también ha dividido en 8 trozos y ha puesto un 7; por esa misma regla de tres también tendría que haber puesto 8.
3.AVI/rj **A1** No
3.AVI/rs **A** Si lo divide en 8 trozos tendría que haber puesto 2:8
3.AVI/rj **A1** No. La cuestión es que divide las 2 tortillas para 7 personas.
3.AVI/rj **A** Aunque haga 8 trozos, como aquí, lo reparte entre 7 personas. Aquí tendría que poner un 7.
3.AVI/rj **A1** Luego, aparte del trozo que ha cogido, el 1/4, el lo ha dividido en 8 partes; y luego, cada parte lo ha dividido en 7. Es que es lo mismo
3.AVI/rj **A8** Pero que no es que esta forma de repartir esté mal. Es la forma de expresarse que no es como la del principio. Al principio empieza 2:7

**Anexo IV.2.1.1. DEBATE EN PEQUEÑO GRUPO.**
**GRUPO 1**

A. ¿Es correcta o incorrecta?
A1. Yo creo que ese + que está detrás del reparto entre 8 sobra.... Reparte un cuarto y le queda un trozo de tamaño un cuarto. Después lo divide en 8 partes y le queda un trozo para repartir entre 7. !Ah, no!, que está bien. Yo creo que esto está bien.
....
A2. Pero, ¿está bien o no está bien?
A1. Se puede dividir entre 8 y luego el que le queda a ese 8, como no hay se lo reparten entre 7, ¿entiendes?
A2. Vale, vale
A1. Pero yo esto no sé si esto está bien o no está bien.
......
A3. A ver, lo voy a hacer yo también porque si no....Una preguntita, ¿por qué no lo puedes dividir para 7? ¿Cómo lo harías?
A1. Yo esto lo repartiría en 4 y después lo que sobra lo repartiría entre 7.
A3. Pero sería .., sería un trozo, sería 1 dividido entre 7 de un cuarto
A1. !Ah, claro!, si nos sale esto igual que lo otro estará bien. Porque aquí ha trabajado más de la cuenta, pero si sale lo mismo estará bien.
....
Sería un veintiochoavo. Ahora sumamos esto y si nos da lo mismo ha trabajado más de la cuenta. Si está bien tiene que salir lo mismo.
............................
P. ¿Habeis llegado a alguna conclusión?, ¿Es correcto?
A. Que es correcto, pero ...
P. ¿Es correcto?
A. Bueno no lo sabemos, estamos esperando a que termine.
A1. ¿Pero aquí no ha trabajado más de la cuenta?¿Por qué lo divide en 8 y no en 7?
P. Porque lo quiere dividir en 8
A2. Pero, se lo ha complicado
P. Bueno, ... porque quiere hacerlo así, pero la cuestión es saber si está bien o está mal, contestar a la pregunta: si hay errores, si la respuesta es errónea o es correcta.
...........................
P. ¿Todavía estais con la primera pregunta? ¿estais de acuerdo con ese resultado o no lo estais?, ¿cómo podeis comprobar que el resultado es correcto? Esa es la pregunta que os lanzo
A. No es correcto, eh. No porque esto, esto es lo que le tocaría a una persona, si lo multiplicamos por 7 entonces nos saldría esto, que al dividirlo nos sale 2 coma seten...
A1. Osea, que falta tortilla
A. Que sobra tortilla
A1. Y, ¿dónde está el fallo?
A3. Es incorrecto, eh chicas. Porque el último trozo es. Es un cuarto más un octavo de un cuarto, más un séptimo de un octavo de un cuarto. Le falta una parte.

**GRUPO 2**

A. Esto es lo que ha hecho él. Y tenemos que decir si está bien o está mal
A1. Yo creo que sí que está bien

A3. Hay que corregir si está bien o está mal.
A1. Entonces, es un trozo para cada uno; y de este ha sacado otros 8, ha repartido entre 7; queda uno y ese uno lo ha repartido otra vez entre 7. Sí que está bien.
A. Eso sí, pero ahora falta ver esto
A1. Un cuarto de la unidad
A3. Muy bien
A1. Un cuarto de la unidad, de la medida unidad, un cuarto a cada uno. Más, un trozo para 8 de la medida un cuarto, porque ha partido la unidad en 4. Y luego, un séptimo de la ... Esto no está bien.
A3. Lo que no sé si es un octavo porque sería un cuarto por un octavo, que sería un treintaidosavo. Sería un treintaidosavo.
A2. Esto sería treintaidosavo
A3. Esto sería un treintaidosavo. .... No, no, esta medida sería un treintaidosavo. En vez de un octavo, un treintaidosavo. Es un séptimo de un treintaidosavo, que es este 8 de aquí
A. Sí, pero a lo mejor se refiere a la magnitud anterior.
A1. Entonces la medida del último sería un treintaidosavo.
A3. Entonces esto sería un cuarto, más un treintaidosavo, más un séptimo por un treintaidosavo, siete por...un 224.
A2. Eso no lo he entendido
A. Es un trozo para 7 personas entre un treintaidosavo, porque es esta parte de aquí ...
A3. Mira por partes. Eso se hace por partes. Osea un cuarto, le sobra un cuarto, ¿no? Osea, tienes un cuarto más, esto de aquí, esto dividido, esto dividido en 8 partes de un cuarto; el cuarto lo divido en 8 partes y te queda un treintaidosavo, un treintaidosavo. Entonces te queda que tienes que dividir, y el treintaidosavo, que es lo que está mal aquí, aquí pone un octavo, lo divide en 7
A2. Eso es lo que tengo yo la duda. Si será esto realmente .. no hará referencia a la medida anterior, porque dices medida uno, entonces este un cuarto hace referencia a este uno
A3. A este cuarto.
A2. Sí, es este cuarto. Bien. Entonces, este cuarto es .. si hace referencia a este quizás, porque entonces no es que esté mal si hace referencia a la medida anterior. Eso es lo que no sé, si quiere hacer una referencia a lo anterior o a la unidad.
A3. Ella dice que si el octavo es del cuarto o el octavo es del uno
A2. Si fuera el octavo del cuarto estaría bien dicho
A3. Claro. Es un octavo de este cuarto o es un octavo del círculo entero.
A1. Vamos a suponer que es del círculo entero. Un cuarto de tamaño uno, osea de la unidad, para cada uno, que son donde están los numeritos; y entonces te queda lo rayado. Y eso ahora lo divido en 8, que no sé por qué lo ha dividido en 8, lo podía haber hecho directamente en 7, pero bueno, bueno pues en 8. Entonces, toca, al hacer esa división, .. , espera,
A3. A cada uno le corresponde un octavo de la medida un cuarto
A1. Y como sobra 1, el del 8, se vuelve a dividir. Entonces, es uno entre siete ..
A2. ¿Y por qué se divide en 8?
A1. Espera. Entonces es uno entre siete de tamaño ..
A3. Un octavo. Aquí te dice un octavo de esa cuarto, ¿sabes?. Esto es un cuarto y lo ha dividido en 8 partes. Es un octavo de cuarto, pero de la tortilla en general es un treintaidosavo.
A1. De todas maneras, !ojo!. Estos trozos son de tamaño un treintaidosavo, pero estos aun son más pequeños, porque lo que es todo esto, ..
A3. No, no, Ya, ya. Pero la unidad es la misma. El treintaidosavo este, el treintaidosavo ese es esto de aquí entero, pero esta unidad pequeñita no la utilizas para nada, ¿sabes?. Esta unidad pequeña es el resultado de esto
A4. Osea. Un sesenta y cuatroavo sería si cogieran eso, según dice el enunciado
A3. No un treintaidosavo es esto de aquí.
A4. Todo. Un treintaidosavo es todo
A3. Un treintaidosavo es lo pequeñito, no, este uno, uno. Y luego es un treintaidosavo y luego uno de estos
A1. Cada vez que lo divides, cuando lo divides en 7 cada uno de estos es un cincuentaiseisavo
A4. Y, ¿por qué se divide en ocho esto?
A3. Porque le da la gana, como si lo divide en nueve
A1. Que no es un cincuentaiseisavo.
A2. !Claro que no!. Es mucho más
A1. Mira es. Cada persona de estas, cada parte de estas se divide en 7, que son siete por ocho cincuentaiseis y por cuatro ....
A2. Es un cincuentaiseisavo de un cuarto, no es un cincuentaiseisavo de la unidad.

A1. Pero yo lo estoy haciendo con la tortilla entera
A3. Mira que lío
A1. Entonces, si lo medimos todo con la tortilla entera ..
A3. Un cincuentaiseisavo ¿qué estais diciendo?, ¿ésto de aquí?
A4. Es que luego cogen y dicen, damos uno, un trozo para siete personas de un octavo. Entonces hacen y cogen un cincuentaiseisavo. Multiplican a cada persona por la parte
A3. Pero este cincuentaiseisavo no está igual que el cuarto, si es eso. Este cincuentaiseisavo del cuarto de aquí
A2. Es que lo toma como medida de un cuarto y no como medida de la unidad.
....
A1. Yo lo haría todo en relación a la unidad. ¿Lo escribimos todo con relación a la unidad?
A2. No, pero es que si lo hacemos con relación a la unidad nos sale un resultado distinto porque eso tiene que estar mal; porque es un cincuentaiseisavo de un cuarto, mientras que aquí estás hablando de la tortilla entera
A1. Hay cincuentaiseis en un cuarto, pero no en la tortilla entera
A3. En la tortilla entera hay 224
A1. Yo lo pondría un cuarto, Ahora les queda esto, a repartir. Y de eso les toca uno para siete de tamaño
A2. Pero si lo hacemos con el dibujo es uno para ocho
A4. Pero yo no le encuentro relación por qué ha sacado 8, si son 7 para repartir
A3. Porque le ha dado la gana
A4. Pero aquí no se trata de que repartais, aquí lo ha dividido, pero sigue repartiendo entre 7
A2. Lo divides entre 7, pero repartes un cuarto
..........
A3. Uno partido para 8 de medida un cuarto. Esta medida de un cuarto la has dividido entre 8
A2. Pero, entonces ya no sería medida de un cuarto, sería .. ocho por cuatro, sería medida de un treintaidosavo de la unidad
A3. Si. Pero lo que repartes para 8 es el cuarto. No lo que te queda
A1. Bueno, hemos llegado a la conclusión que esto está mal. Porque lo sumas, y no te da el resultado. Esa es la conclusión que tenemos.
A2. Es que allí lo ha puesto en función de un cuarto y nosotros lo queremos poner en función de la unidad.
.....
A3. Tú lo que dices es poner siempre entre paréntesis siempre el uno, siempre la unidad. Entonces eso te cambia.
A1. No, no
A3. Pues entonces estaba bien. Es poner un cuarto de uno, ¿vale?. Un cuarto que es éste, el de los numeritos
A2. Vamos a ir poco a poco y enterándonos todos, porque si no ..
...
A1. Repartimos 2 tortillas para 7 personas. Entonces un cuarto de una unidad, de una tortilla, más
A3. Mas, el cuarto que te queda lo divides en 8 partes. Osea que tienes que dividir uno entre 8 de tamaño un cuarto
A2. Hasta aquí lo dominamos todos.
A4. Bien. Una cosa, debajo justo ¿por qué no vas poniendo un cuarto, un treintaidosavo, y otro lo que salga, para ir comparando?
A3. Ya lo veremos al final, que nos perdemos
A1. Más
A3. Mas. Y te queda un cacharrito que es el cuarto dividido entre 8, ¿no?, es lo que nos queda.Que es un cuarto dividido entre ocho, que eso es un treintaidosavo
A2. Espera, espera. Si y ahora lo dividimos entre 7
A1. Ahora es: uno dividido entre siete personas, de tamaño
A3. Un treintaidosavo
A1. Un treintaidosavo.
A3. Que son ocho, que es un cuarto, por cuatro cuartos que tiene la tortilla
A4. Yo no estoy de acuerdo en eso
A3. Si. Tienes el cuarto, ¿no? Hasta aquí de acuerdo.Luego este cuart, este trein, este, ay, tenemos, ¿esto que era?, ¿un treintaidosavo para cada uno?. Espera que me estoy
A2. Si tienes 8 rayas, ocho por cuatro 32, porque una raya es un treintaidosavo.
........
A4. Espera. Esta es la tortilla entera. Nos queda un cuadrado. Nos queda el cuarto. Bien. Volvemos

a dividirlo. Hacemos esta división.

A1. Que es uno para ocho de un cuarto

A4. Bien

A1. Y ahora nos queda un trozo para siete, de un treintaidosavo

A4. Pero esto no es un treintaidosavo

A3. Sí porque este, mide esto de aquí. Esto de aquí

A4. En referencia a la tortilla es

A3. En referencia a la tortilla es ocho por cuatro. Ocho, hay ocho en un cuarto

A4. Entonces hay una operación más. Nos saldría una operación de más

A3. Hay ocho en un cuarto, ¿no?. Pues ocho en un cuarto, en dos cuartos habrá dieciseis

A4. Un momento. Un cuarto le ha tocado uno a cada uno, queda esto.

A3. Queda un cuarto. Bien

A4. Queda un cuarto. Bien. Ese cuarto lo dividimos en 8 partes. Repartimos ese cuarto entre 8 de tamaño un cuarto y nos queda este trozo, que en referencia a la tortilla entera

A3. Es un treintaidosavo

A4. Y en el paso siguiente habrá que multiplicar por 7

A1. Ya esta ¿no?. Ya está todo hallado

A4. No

A1. Del treintaidosavo lo has dividido para siete y de ese siete

A3. No, no. Del treintaidosavo, esto es un treintaidosavo, este es el que ha salido de aquí, lo has dividido para siete

A4. ¿Y con esto no se hace nada?

A3. De esto se queda uno cada uno

A4. !Ah sí!. Claro

A1. Entonces te toca un treintaidosavo, divides un treintaidosavo para siete personas, divides uno para siete de un treintaidosavo y sale uno divivido para 224

A2. Así que sale un cuarto, más un treintaidosavo, más un doscientos veinticuatroavo

A3. Claro. Esto es un cuarto, esto un treintaidosavo y esto un doscientos veinticuatroavo

A4. Bueno, pues ya está bien. Sabemos que es errónea.

.....

P. Habeis llegado a alguna conclusión

A1. Hemos llegado a la conclusión de que hasta aquí está mal. Nosotros nos hemos centrado en llevar todo el rato la misma unidad

P. Bien. Y, ¿no os ha sorprendido nada más?

A2. Que al tener el cuarto en vez de dividirlo directamente para siete, lo divida para ocho para sacar otra, otras siete.

.........

P. Y ese 8 ¿a qué haría referencia?

A1. ¿Este?. Haría referencia a que el cuarto lo ha dividido entre 8, entre 8 partes

A2. Es un cuarto de la unidad. Hasta ahí bien. Pero este cuarto que le queda para 8 personas. En teoría sería para 8 personas.

P. Pero, ¿no tenía 7 personas?

A3. Sí. Pero que hará 8

P. ¿Tenía 7 o tenía 8 personas?

Todos. Siete, siete personas

P. ¿Por qué pone ahí que se reparte para 8?

A3. Es que nosotros, nos hemos centrado, partiendo del dibujo hemos hecho, que esto estaba mal. Osea, hemos seguido el dibujo a la hora de seguir esto. Y, claro, no sé por qué ha hecho 8 o por qué ha hecho 4 y no ha hecho 7 directamente. Hemos seguido el dibujo.

## ANEXO IV.2.2. Cuestión de debate número 2

<u>Tarea propuesta</u>

Utilizar representaciones simbólicas para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 4 tortillas entre 9 personas. El reparto ha de hacerse por fases.

Justificar el resultado.

<u>Respuesta del alumno X</u>

*1) Tenemos en cuenta que lo que vamos a dividir son 4 tortillas entre 9 personas, por tanto, cogemos como unidad la tortilla y repartimos entre 9 personas*

*2) Cada una coge 1/4 de tortilla y después, de lo que queda, se les da a cada una de las personas un octavo de tortilla y un dieciseisavo de tortilla.*

3) $4:9=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

***Puntos de debate:***

1.- Determinar si la respuesta es correcta o errónea.
2.- Analizar la sintaxis empleada.
3.- Estudiar la verdad o falsedad de las relaciones semánticas utilizadas.
4.- En caso de desacuerdo con el trabajo del alumno X, formular la respuesta que debería haber dado.

## DEBATE COLECTIVO

| | | |
|---|---|---|
| 3.PIS/e | **P** | ¿Que es lo que falla en ese grupo?, ¿qué es lo que falta? |
| 3.AAI/os | **A** | El pedazo que falta |
| 3.PVI/ar | **P** | Falta un trozo. |
| 3.PIS/e | | ¿Y allí? |
| 3.AAI/os | **A1** | Aquí también nos parece que falta un trozo |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Allí? |
| 3.AAI/os | **A2** | Falta un trozo |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Qué trozo falta? |
| 3.AAI/os | **A2** | La primera parte. |
| 3.AAI/os | **A1** | 1/144 |
| 3.AAI/os | **A** | 1/144 |
| 3.PIS/e | **P** | En el grupo del final, ¿qué falta? |
| 3.AAI/ai | **A1** | 1/144. Y las primeras fase, que si no .. |
| 3.AVI/rj | **A4** | No, y las fases del medio. Eso es el resultado |
| 3.AVI/ad | **A** | Bueno, pero pide un resultado, ¿no? |
| 3.AVI/ad | **A5** | Tiene que poner las unidades bien |
| 3.AVI/rj | **A1** | Las unidades las pone. Tenemos en cuenta que vamos a dividir 4 tortillas entre 9 personas. Por lo tanto, tomamos como unidad la tortilla |
| 3.AVI/rj | **A5** | Pero, al final tendría que poner de tortilla |
| 3.AVI/ar | **A1** | Vale, bien, vale |
| 1.PO/d | **P** | Sal aquí y nos escribes la solución que habiais puesto vosotros |
| 2.AE/j | **A1** | (Sale a la pizarra y escribe) $4:9=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{144}$ |
| 3.CA/r | | Ruido |
| 2.AE/j | **A1** | (Tacha la expresión de tortilla y escribe) $4:9=\frac{1[1]}{4}+\frac{1[1]}{8}+\frac{1[1]}{16}+\frac{1[1]}{144}$ |
| 3.AVI/rs | **A6** | Eso te lo estás inventando |
| 3.AMC/j | **A1** | Da lo mismo poner una cosa que otra |
| 3.PIS/e | **P** | Vosotros, ¿lo escribis así? |
| 3.AVI/ar | **A6** | Si. |

**Anexo IV.2.2.1. DEBATE EN PEQUEÑO GRUPO.**
**GRUPO 1**

(Este grupo de alumnos entendió que eran tres respuestas diferentes y resolvió cada una de ellas con independencia de los otros apartados)

A. Aquí pone, utilizar la representación simbólica para expresar el resultado. Y para empezar, esto no es una representación simbólica.
A1. Una representación simbólica sería esto
A2. Pues vale, está mal porque no es una representación simbólica
A2. Un cuarto entre nueve personas
A3. Está mal, porque un cuarto de, si divides entre nueve ...
A4. Si divides la unidad entre nueve, no puede coger un cuarto.
A2. Ese es el que hicimos el otro día
A5. ¿Qué decimos?, ¿qué salía?, que estaba mal.
A2. Eran 2 entre 7. El otro día es que eran 2 tortillas para 7 personas. Entonces, cogía las dos tortillas y las dividía en cuatro partes; para el uno, para el dos, para el tres, el cuatro, el cinco, el seis y el siete. Y ese trozo, lo repartía en 8 trozos iguales. uno, dos, tres, ...
A6. Pero, siempre te va a sobrar uno.

A2. Y luego, el trozo que le sobraba lo dividía en 7
A6. Osea, pero esto lo hacía por alargarse, ¿no?. Porque vamos, si lo hubiese hecho a la primera.
A2. Lo hacía así. Y luego ponía que esto era igual ...
A3. Y por qué lo divide en 7 ya?
A2. A un cuarto de uno. Porque lo ha hecho en un paso más, que eso da igual. El resultado estaba bien ayer, había empleado un paso más pero el resultado era el mismo, da lo mismo dividirlo aquí entre 7 que dividirlo aquí entre 8 y luego entre 7. Da igual, ¿no?
A. Como si quieres dividirlo este entre 10 y luego repartir los 3 entre 7
A2. Bueno, pues ponía que esto era igual a esto, más un octavo ... ¿cuánto era? No. Sí, esto ponía un octavo de un cuarto
A1. Ya ya, porque es un cuarto esta parte
A2. Y luego era, un séptimo de un octavo. Esto es lo que puso él, entonces, estaba mal porque
A1. Por que faltaba un octavo de un cuarto.
A2. Y esto era un séptimo.. un séptimo de un octavo, pero este octavo era una octava parte de una cuarta parte y había que multiplicarlo. Osea, que el correcto era éste. ¿Entiendes?,
A6. Yo me he perdido al final
A2. Mira. El ponía ..
A. Lo de ayer da igual. Vamos a empezar desde el principio
A2. Es que es este mismo, es por eso.
......
A3. Si tenemos en cuenta que vamos a dividir 4 tortillas entre 9 personas, por tanto cogemos como unidad la tortilla y repartimos entre 9 personas
A. La tortilla. Un cuarto de tortilla.
A3. No, cogemos la unidad de tortilla y repartimos entre 9 personas
A4. Pero no pone que la dividamos en cuatro
A. No, pero eso es lo que estamos haciendo. Bueno, venga
A3. Divídelo para 9. Cada tortilla
A. Bueno, todas igual. Y uno para uno. ¿Vale?
A3. Y ahora dice el 2 (punto 2 del enunciado): cada uno coge un cuarto de tortilla, !de tortilla!
A1. Sí y luego que hace; dependiendo de lo que haga luego
A4. Pero no pone que lo divida en 4
A5. La tortilla la tienes que dividir en 9
A4. Pero no dice que la tortilla la parta en 9 partes. Pone que la tortilla la reparte entre 9 personas
A3. A ver. Que una tortilla, como unidad, la repartimos entre 9 personas, quiere decir que
A6. Que sí, que lo divides entre 9 partes
A. No, entre 9 partes no, es entre 9 personas
A3. Hombre, si tú coges una tortilla y la divides para 9 personas, ¿en cuanto lo divides?
A2. Esto es lo que falta, ¿no?. Dice que lo repartan 9 personas pero no dice que luego cada uno coja una parte
A4. Dice que lo reparte entre 9 personas y que cada uno coge un cuarto
A2. Que son ejercicios distintos. Este es uno, éste es otra forma de resolverlo y éste es otra forma de resolverlo.
A3. Vale. Entonces esto está bien. Cada tortilla lo divides entre 9 y que cada uno se coja uno
A. No, pero falta esto, falta esto
...
A3. Entonces a cada uno le tocan cuatro novenos.
A. Vale. Ahora sí que está claro
A3. ¿Vale? Cuatro novenos por 9, son treintaiseis cuartos, que son las 4 tortillas.
A2. Este está bien expresado, pero no está expresado en forma simbólica
A3. Se dice: el primero no está en forma simbólica. Y le falta el final
.........
A. Vamos al 2
A3. Lee el enunciado
A. Y se queda tan ancho
A2. A ver. Tenemos las 4 tortillas y les damos un cuarto
A3. Pero ahora dales un octavo a cada uno
A2. Y se les da un octavo a cada uno. Y queda
A3. Nos quedan 5. Y ahora un dieciseisavo de tortilla
A2. Entonces, esto lo volvemos a dividir
A3. No, ahí tienes 10
A2. Claro, pero dice un dieciseisavo de tortilla
A. Osea, que esto hay que dividirlo en 16

A2. Ocho y nueve. Está mal porque no reparte toda la tortilla., le falta un trozo de tortilla.
A2. El ejercicio está mal porque no está representado simbólicamente. Y luego, porque le queda 1/16 de tortilla por repartir.
...........
A4. Venga, el 3
A1. Cuatro dividido para 9 es igual a un cuarto. Esto es mentira.
........
A. ¿Cuánto has dicho que sale?
A3. 4/9 + 7/16
A4. Es que está mal porque no ha puesto las unidades, porque este 1/8 no es de 1/4
A2. Esta mal porque ha hecho lo mismo que el anterior. Es como el que hicimos el otro día.
.........
A2. Está bien por hacer la representación simbólica, pero la representación simbólica está mal
A3. El resultado de la representación simbólica es malo. Pon que este dieciseisavo que lo divida entre 9 y ya está bien, que es lo único que falta. Sobra 1/16, pues se divide para 9 y que cada uno coja una parte
..........
A3. Hay que escribir el resultado que debería figurar
A2. No sobra 1/4, son 7/4
A3. Para, para, te has colado. Has cogido un cuarto de uno ... un octavo. Sí, sí eran octavos, un octavo de esto. Sí, está bien. Y ahora, nos sobraban
A2. Nos sobran, si los contamos en octavos
A3. Nos sobran 6/8. Entonces tienes que poner 1/16 de 6/8
A2. 1/16 de 6/8 ¿de?
A3. De lo anterior
A2. ¿De 7/4?
A3. Ya está, de 6/8
A2. No. Es que los 6/8 son un resto anterior. Los 6/8 no son 6/8 que representen 6/8
A3. Pero teníamos 6/8 de tarta
A4. Después de hacer todo esto, aquí te quedaban 6/8 de esta tortilla. Tienes 6/8 de una
A5. Ya me he liado. Déjame la hoja que no veo nada
.......
A2. ¿Suponemos tortillas cuadradas, que nos da igual y es más fácil de repartirlas?
A1. Es mucho suponer ¿eh?, es un poco subrealista
............
A4. A ver, tú estas empezando ahora. Osea, 4 para 9
A2. Cuatro para 9. Estos los utilizamos, y esto también, ¿no?. Y de todo esto nos olvidamos
A4. Entonces, hemos cogido ..
A1. 9/4
A3. Espera, espera. Ve poniéndolo
A4. Has cogido 9/4 de tortilla, ¿no?
A2. Sí. Dos y cuarto
A1. 9/4 de una.
A4. Es 1/4, ¿no?. Aquí cada uno coge 1/4 de ..
A2. Cada uno coge 1/4
A4. Pues eso.
A2. Son 9/4.
A1. No, pero pon lo que coge cada uno. Pon lo que coge cada uno, pon 1/4.
A2. Es 1/4 pero de una tortilla.
A1. De una unidad
A2. Más, luego .... 1/8 de
A1. Ahora coge 1, 2, 3 ..... 1/8 de 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13.
A4. No, no. Es que no es así. A ver, es que lo ha tachado muy mal, ¿eh?. Está muy malamente. A ver, ¿dónde estaba tachado antes? .. Y quedaba esto, que hemos dividido en 1, 2, 3, 4, .. 7 y 8.
A1. Y 9.
A4. Osea, ahora coge 1/9
A1. Que van a coger 1/9
A1. Si cada tortilla la has dividido en 8
A4. Pero 1/9 de, de, de otra cosa.
A1. No señor. Has cogido 1/8
A2. No, no. Hasta ahora hemos representado de una tortilla

A1. Has cogido 1/8
A2. 1/4, 1/4
A6. (con tono sonriente) Yo lo haría de kilos
A1. Tú calla.
..........
A2. 1/4 de una tortilla. No han repartido las 4 tortillas
A1. Ha cogido cada uno. Sí.
A2. Entonces, es 1/8 de una tortilla
A4. Estamos poniendo lo que coge cada uno
A2. Claro. No nos tenemos que preocupar del resto. Coge 1/8 de tortilla, cada uno
A1. Claro. Yo estoy de acuerdo.
A4. Yo no. Osea, tú dices que ahora coge 1/8 de una
A1. Claro. Porque cada uno se lleva 1/8 de una tortilla
A2. 1/8. Coge 1/4 y 1/8, ¿si o no?
........
A2. A ver. Y ahora esto 1, 2, 3, ..
A1. Tiempo duro para 16 eso, ¿eh?
A2. Estaban divididos en 8 partes
A1. No, no. Estaban dividido en 8 pero nos quedan 5, ¿eh?
A4. Voy a hacérmelo yo... 4 tortillas para 9, ¿no?
A2. Entonces este es 1/16, este es el segundo dieciseisavo, este es el tercero ... dieciseisavo, el cuarto, el quinto, el sexto, el séptimo, el octavo y el noveno.
A1. Vale pues. Yo ya he cogido 1/16 de una. Y ahora, espera, más 1/16... No, tenemos que dividir eso entre 9, 1/9 de 1/16 de una
A2. 1/9 de 1/16, pues sería .. 16 por 9
A1. Bueno si. Pues eso es lo que tenemos que poner. Ya está.
A2. Espera. Que el otro día, no nos resultó así muy bien
A1. Mira. Coges 1/4 de una.
A2. Luego se lleva 1/8 de una
A1. Luego se lleva 1/16 de una. Y nos queda 1/16. Este dieciseisavo lo dividimos entre 9
A4. Entre 9, luego coges 1/9 de 1/16
A1. 1/9 de 1/16 de una
A4. Ya, ya. Y eso luego hay que comprobarlo
A1. Y esto tiene que salir
A2. Eso, eso es lo que quería hacer yo
A4. Mira a ver si sale.
A2. Cuatro entre 9 ...
A1. Igual a 1/4 + 1/8 + 1/16, más
P. ¿Lo habeis terminado?
A4. Sí, ahora ya sí
A1. Ahora estamos comprobando
.........
A2. Vamos a ver, 144. Entonces el cuadrado, se hace el cuadrado, ¿no? " al cuadrado, por 3 al cuadrado, que serían 2 a la cuarta por 3 al cuadrado....
A6. Yo dividiría

A4. La solución es correcta
......
A1. 4 entre 9 es igual a 1/4 de uno, más 1/8 de uno, más 1/16 de uno, más 1/9 de 1/16
A4. De uno
A1. De uno. Aquí habría que decir que falta.., osea, que sobra, sobra ¿no?, falta
A2. Sobra 1/16. No, si, sobra 1/16
A4. Que sobraba por repartir
...........
(intentan dar una respuesta simbólica a la segunda parte del enunciado, entendido como un problema diferente; siguen sin darse cuenta de que todo el enunciado se refiere a la misma solución del alumno)
A2. Cuatro repartido entre 9 es igual a 1/9, 1/9 de 4
A1. Claro, tienes que coger 4 veces 1/9
A4. Claro. Efectivamente. Pero
A6. Ahí va. Pero si esto sale 1. No me había dado cuenta

**GRUPO 2**

(La grabadora no funcionó hasta bien avanzada la discusión, porque estaba en la posición pause)

A. Falta de repartir un trocito

A1. (Hace un resumen para la grabación). Puntos del debate: Uno, hemos decidido que la respuesta es errónea. Dos, hemos deducido que faltaría una fase mínima para identificar la igualdad; está incompleta.

A2. Correcta pero incompleta

A1. Tres, estudiar la verdad o falsedad de las relaciones semánticas utilizadas. Falso, porque 4 dividido para 9, no es ...

A3. 4 tortillas

A1. 4 tortillas repartidas para 9 ... Personas

Ruido

A3. La igualdad, la igualdad que se escribe simbólicamente es errónea, ya que 4 dos puntos 9, no es lo mismo que 1/4 + 1/8 + 1/16

A. El error semántico es poner de la unidad.

A1. ¿De qué?

A. De la unidad

A2. Aparte, aparte de que falta poner aquí de tortilla. Al final debería constar la palabra de tortilla y no lo pone

A3. Hay que poner el error más grande, porque esto sí que está bien

A2. No, no está bien

A3. !Hombre!, claro, está mal hecho porque falta un trozo

A2. !Ah!, pero esto es como si pones 2+2=5; la igualdad es falsa

A2. !Toma!, claro

A. La igualdad no es cierta, nos falta ..

A2. Yo a lo que me refiero..

A. La semántica es el significado

A2. !Claro que lo sé que es erróneo! Pero es que los errores en cuanto a semántico ..

A. Bueno, otro error sería que falta de poner de tortilla

A2. De tortilla,.. de una tortilla, de la unidad

A. Bueno, de tortilla. Esto es el resultado final ya

A1. Faltaría escribir todo el proceso

A. Este es el resultado final, al que llega. Tú ..

A2. Falta lo de poner lo de un 1 entre paréntesis, ¿no?, de tortilla. ¿Sabes lo que te quiero decir?

A. ¿Esto es lo que quieres decir o no?

A2. Hay que poner de una tortilla, cada cosa de una tortilla

A1. Sí, exactamente; falta el proceso interno. Sí eso si. Entonces, falta el proceso interno y poner la unidad; osea, en este caso la tortilla, pero falta poner el 1 en medio solamente

A1. Bueno, nos falta la última

A3. Ya está, lo tenemos hecho aparte

A2. Hemos dicho esto, ¿no?. Lo de ..

A1. Sí

A. El resultado no lo hemos dicho.

A2. Eso quiero decir, hay que decir lo que es la cuarta

A. El resultado de repartir es 1/4 de tortilla, más 1/8 de tortilla, más 1/16 de tortilla, más 1/144 de tortilla, que le corresponderian a cada persona.

## ANEXO IV.2.3. Cuestión de debate número 3

<u>Tarea propuesta</u>

Utilizar representaciones simbólicas para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas. El reparto ha de hacerse por fases.

<u>Respuesta del alumno X</u>

*Para repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas dividimos cada tortilla en 5 trozos iguales*

$$2:7 = \frac{1}{5}[1] + (3:7)\left[\frac{3}{5}\right] = \frac{1}{5}[1] + \frac{3}{7}\left[\frac{3}{5}\right] = \frac{1}{5}[1] + \frac{9}{35}[1] = \frac{1}{5} + \frac{9}{35} \text{ de tortilla}$$

***Puntos de debate:***

1.- Determinar si la respuesta es correcta o errónea.

2.- Analizar la sintaxis empleada.

3.- Estudiar la verdad o falsedad de las relaciones semánticas utilizadas.

4.- En caso de desacuerdo con el trabajo del alumno X, formular la respuesta que debería haber dado.

## DEBATE COLECTIVO

En la transcripción del debate se han utilizado las unidades de análisis para la Interacción Didáctica de Romero (1995)

| | | |
|---|---|---|
| 3.PIS/e | **P** | Vosotros, ¿lo escribis así? |
| 3.AVI/ar | **A6** | Si. |
| 3.AVI/rj | **A7** | Es que eso está mal, dentro de un reparto se hace otro reparto. El 3:7 es un reparto. Eso está mal expresado |
| 1.PO/d | **P** | Allí al final, |
| 3.PIS/e | | ¿por qué decís que es correcto? |
| 3.AAI/nc | **A4** | No decimos nada. No sabemos, cuando pone 3 entre 7 de 3/5. Porque no sabemos si se refiere a 3 trozos para 7 personas, que la unidad en ese caso son los 3/5 que quedan. O si se refiere a 3 .. ¿cómo era? |
| 3.AAI/os | **A7** | A si 3 trozos los divides en 7 partes y coges 1/7 de cada uno, que son 3/7 |
| 3.AAI/nc | **A4** | Y la unidad sigue siendo 3/5 |
| 3.PV/r | **P** | No, dicen por aquí |
| 3.AVI/r | **A7** | Pues entonces está bien |
| 2.PE/a | **P** | No es que afirmen nada, es que tienen una duda |
| 3.AAI/nc | **A8** | Es que nosotras lo de 3 trozos que reparte entre 7 está bien, pero .. |
| 1.PA/r | **P** | Por favor |
| 3.AMC/j | **A8** | Pero en lugar de tomar 3/5 la unidad real es 1/5, lo que pasa es que son 3 trozos. Osea, es 1/5, lo que pasa es que sobran 3 trozos. No son 3/5. Por eso él ha puesto 3/5, pero en realidad tendría que poner 1/5. Cuando coges que la tarta entera es una unidad pones un 1. |
| 3.AVI/rj | **A9** | No, lo que tienes que coger es 1/7 de 3/5 |
| 3.AVI/rj | **A8** | No, serían 3/7 de 1/5 |
| 3.AVI/rj | **A9** | No, no, serían 1/7 de 3/5 |
| 3.AAI/os | Varios | Es lo mismo |
| 3.AVI/rj | **A9** | No, no sería lo mismo, ¿cómo va a ser lo mismo? |
| | **P**. | Yo aquí planteo lo que creo que habeis manifestado. Cuando decís 3/7, 1/7, se entiende que debería referirse a 3:7, 1:7, ¿o no? |
| 3.AAI/os | Varios | Sí, no |
| 2.PE/a | **P** | Es que lo que hay que hacer es seguir lo que ha escrito este muchacho (se refiere al enunciado de la tarea). Y habría una primera discrepancia que sería: si $(3:7)\left[\frac{1}{5}\right]$ es lo mismo que $(1:7)\left[\frac{3}{5}\right]$ |
| 3.AVI/rs | **A9** | No es lo mismo |
| 3.AVI/rj | **A8** | El resultado sí, pero no es lo mismo |
| 3.AAI/ai | **A10** | La norma también está bien |
| 3.CA/r | | Cruce de voces discrepantes : es lo mismo, no es lo mismo |
| 1.PO/d | **P** | Vayamos por partes |
| 3.AMC/j | **A1** | Pensamos que el correcto es el de abajo, porque al decir (3:7) de 1/5 si lo haces gráficamente estas repartiendo solamente 1/5, sólo 1/5. Y entonces te quedan 2/5 libres, que no los repartes |
| 3.AVI/rj | **A3** | Es que 1/5 no es lo que repartes, es la unidad que coges. Cada uno de los trozos es 1/5 y tienes 3, pero no repartes sólo 1 |
| 3.AVI/ad | **A1** | Sí, si, tienes razón. Tomas como unidad 1/5 y cada unidad la repartes entre 7 |
| 1.PO/p | **P** | A ver, las compañeras del final. |
| 3.PIS/e | | Esta es la discusión, ¿cuál está bien? |
| 3.AAI/os | **A7** | La de arriba. |
| 3.AAI/os | **A4** | La de arriba |
| 3.AAI/os | Otros | La de abajo |
| 3.AAI/ai | **A4** | Porque son 3 unidades para 7 personas, de 1/5 cada una |
| 3.PIS/cl | **P** | ¿Y la de abajo? |
| 3.AVI/rj | **A4** | Es que no divides una unidad para 7 |
| 3.AAI/ai | **A3** | Puedes verlo como un trozo grande a repartir entre 7, y ese trozo grande representa 3/5 de la unidad. |
| 3.AVI/rj | **A4** | Es que el 1, ese 1, no es un objeto. Se supone que si esos son objetos y esos son personas, son 3 objetos y no 1 |
| 3.AVI/rj | **A3** | Pero puedes verlo como 3 objetos o como 1 grande |
| 3.AMC/c | **A4** | Si, si |

..........

| | | |
|---|---|---|
| 3.PIS/e | **P** | ¿Qué opinais vosotros? |
| 3.AAI/os | **A5** | Que son 3/7 de 1/5. Osea, $(3:7)\left[\frac{1}{5}\right]$ |
| 3.AVI/rs | **A7** | Es que esa forma de ponerlo está mal. |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Cuál?, ¿esta o esta? (señala las dos expresiones escritas en la pizarra) |
| 3.AMC/j | **A7** | Están las dos mal. La primera porque hay que poner 3/7 y no (3:7), porque ahí haces el reparto de 3 tortillas entre 7 personas. Eso no indica el resultado de un reparto, lo que se lleva cada uno .. |
| 3.AVI/rs | **A10** | Son 3/35 |
| 1.PO/s | **P** | Vamos ver. |
| 3.PIS/cl | | Pregunto: cuando escribíamos habitualmente 3:2, ¿qué es lo que entendíamos? |
| 3.AAI/ai | **A4** | 3 tortillas entre 2 personas |
| 3.AAI/ai | **A11** | Coge 2, pero en general coge 2 o 3 trozos |
| 3.AVI/ad | **A1** | Sí, estoy de acuerdo. Pero si decimos que lo de la izquierda, entonces lo de la izquierda es correcto también, porque es lo mismo; pero en lugar de referirse a 1 tortilla se refiere a 1/5 de tortilla, o a 3/5 de tortilla, me da lo mismo. |
| 3.PDC/c | **P** | Aclaremos una primera cuestión. Cuando hablamos de reparto, aquí indicamos algún resultado, ¿o no?, con esta expresión. Es que eso será bueno aclararlo |
| 3.AAI/os | **A7** | No |
| 3.PIS/cl | **P** | Osea, que en esta forma de simbolizar los números esos, qué hay que entender, ¿que se reparten 3 tortillas entre 2? |
| 3.AAI/os | **A1** | Sí, 3 unidades |
| 3.PVI/ar | **P** | 3 unidades entre 2. |
| 3.PIS/e | | Y con eso, ¿lo que representamos también es lo que corresponde a cada uno?. |
| 3.PSC/e | | Decimos: vamos a repartir 3 unidades, o 3 tortillas, entre 2 personas; nos estamos refiriendo a lo que le corresponde a cada uno, ¿o no? |
| 3.AAI/os | **A3** | No es un resultado. |
| 3.PVI/ar | **P** | No es un resultado. |
| 3.PDC/c | | Tu opinión es que no deberían figurar ninguna de estas dos expresiones porque no indican un resultado. Tal como viene en el trabajo del muchacho éste (se refiere al de la tarea), va poniendo el reparto igual a esto, esto es igual a esto.. y hay un momento en el que para. |
| 3.PIS/cl | | ¿Formaría esto parte del proceso?. Para llegar al resultado final, ¿no habría que hacer cosas como estas? |
| 3.AVI/rs | **A7** | No |
| 1.PO/p | **P** | Sales un momento aquí y nos muestras cómo lo haces tú sin llegar a esos repartos. Así lo vemos todos |
| 3.AAI/ai | **A7** | (Sale a la pizarra y escribe $\frac{1}{5}[1]+\frac{3}{7}\left[\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{5}+\frac{3}{35}$ |
| 3.PIS/e | **P** | Pero ¿cómo has llegado a eso? |
| 2.AP/p | **A7** | ¿Qué cómo he llegado?, ¿lo hago gráficamente? |
| 2.PE/s | **P** | No se, tú tenías que repartir 2 tortillas entre 7 |
| 3.AMC/j | **A7** | (Dibuja dos círculos y los divide en 5 partes cada uno)<br>Entonces, tenemos 3/5 y de cada quinto lo dividimos en 7 partes, como indica esto. El denominador (señala el 7) indica en cuanto lo vamos a dividir cada (señala $\left[\frac{1}{5}\right]$), y esto (vuelve a señalar $\left[\frac{1}{5}\right]$) indica el trozo que lo cogemos y esto (vuelve a señalar el 7), el número de partes que lo vamos a dividir.<br>Divide tres partes de 1/5 en 7 partes cada uno) 1, 2, 3, ... y 7; y este es igual. Entonces, podemos ir haciendo como una operación de rellenado. A ver, si tenemos que coger entre 7 personas, cogemos uno de aquí ... |
| 3.AAI/ai | **A8** | O todo junto |
| 3.AVI/ad | **A7** | Bueno, o lo que vamos a coger de cada uno. Parece que me he liado. Cada uno se lleva esta parte, esta de ésta, esta de esta, ... |
| 2.PE/a | **P** | Osea, que lo que has rayado es lo que se lleva una persona |
| 3.AAI/ai | **A7** | Sí, se lleva 3/7 de 1/5 cada uno |
| 3.PIS/e | **P** | Eso es lo que ha puesto él ¿no?, 3/7 de 1/5 |
| 3.AAI/ai | **A7** | 1/5 lo he dividido en 7 partes y he cogido 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 3.PVI/ad | **P** | Bien, uno se lleva esas 3 partes que has rayado, ¿vale? Otra persona se llevaría otro tanto y así hasta 7. |
| 3.PIS/e | | ¿Sería posible? |
| 3.AAI/os | **A8** | No |
| 3.AVI/rj | **A7** | ¿Cómo que no?. 1, 2, 3, el 4. Al final lo rellenaría todo |
| 2.PP/j | **P** | Te vuelvo a repetir. Eso que has rayado, las 3 cosas que has rayado, ¿es lo que se lleva?. |
| 3.AMC/j | **A7** | Cada uno se lleva 3 y se lo llevan 7 personas, hasta que lo rellenan entero. |
| 3.AVI/s | **A8** | ¡Ah! |
| 2.PP/g | **P** | Vale. Entonces, el problema sería escribir 3/7 y estaría bien resuelto; ¿y escribir 3:7 sería incorrecto? |
| 3.AAI/os | **A7** | Yo creo que si |
| 3.AVI/rs | **A8** | No, es lo mismo |
| 3.AAI/nc | **A7** | Yo no lo entiendo así, osea, que no lo entiendo, que no le veo explicación |
| 3.AMC/j vale | **A8** | Son 3 unidades a repartir entre 7 personas y lo que hay entre corchetes es lo que cada unidad. Osea, de las 3 unidades una de ellas vale 1/5. Cada unidad vale 1/5 |
| 3.AVI/rj | **A7** | No puede valer 1/5, la unidad no puede valer 1/5 |
| 3.AVI/rj | **A8**. | El 3 significa los trozos que tienes a repartir, y el 7 las personas. Entonces, tienes que repartir 3 trozos entre 7 personas, pero ¿cuánto vale cada trozo?, 1/5 |
| 3.AIS/r | **A7** | Pero, ¿qué se lleva cada uno?, ¿cuanto se lleva cada uno? |
| 3.AAI/ai | **A8** | Pues multiplicas |
| 3.AVI/rj | **A7** | Luego, el 3/7, el 3:7 lo pasas .. Pero esto es un reparto. No significa un resultado. No es un resultado lo que se lleva cada persona |
| 3.AAI/ai | **A8** | Lo de esas personas lo pasas a fracciones, operas y te dará el resultado. |
| 3.AVI/rj | **A7** | Es que cualquier división lo puedes expresar como fracción.. No se, vamos yo me aclaro mejor con esta expresión |
| 3.PIS/e | **P** | Pero, para tí, si tu ves aquello escrito $(3:7)\left[\frac{1}{5}\right]$ ¿qué entenderías?, ¿qué interpretación das a esa expresión? |
| 3.AMC/j | **A7** | Yo unidades y que no expresa un resultado; yo creo que expresa eso. En todo caso caso, y como ha dicho ella, que es 3/5 dividido entre 7. Porque si esta es la unidad (1/5) y tengo 3 de esas unidades, será 3/5 lo que divido entre 7 |
| 3.AAI/os | **A8** | Es que es lo mismo. |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Es lo mismo o no es lo mismo? |
| 3.AAI/os | **A7** | Si es lo mismo |
| 3.AMC/j | **A8** | Por eso tienes la expresión de abajo que es lo mismo. Es una unidad a repartir entre 7. Pero, ¿cuánto vale esa unidad?, 3/5. Es verlo como un todo o como 3 partes. |
| 3.PIS/e | **P** | Entonces, ¿admites que es posible hacerlo en forma de reparto? |
| 3.AAI/os | **A8** | Sí |
| 3.PIS/e | **P** | Para los demás quedaría clara esta situación; da lo mismo escribir $\frac{3}{7}\left[\frac{1}{5}\right]$ ? |
| 3.AAI/os | Alumnos | Sí |
| 3.PSC/c | **P** | Entonces, en el ejercicio propuesto, eliminada esa parte, la parte que presentaba conflicto era $(3:7)\left[\frac{3}{5}\right]$, eso es lo que no debería de figurar, que habría que escribirlo de alguna de esas dos formas (señala la pizarra) |

**Anexo IV.2.3.1. DEBATE EN PEQUEÑO GRUPO.**

**GRUPO 1**

A1. Lo que viene entre corchetes, es, son, es las unidades que quiere representar, la parte que quiere representar

A. 2 tortillas para 7 personas es igual a 1/5 de una tortilla, más

A3. Hazlo gráficamente. Pedro, hazlo gráficamente porque si no nos vamos a liar

A. Aquí entre corchetes, ¿qué pone?

A3. A lo que se representa

A. Lo que se representa. ¿Y aquí? es lo que queda de repartir, ¿no?

A3. Esto es 3/5. Osea, esto son 3 para 7, pero de 3/5, no 3 para 7 de tortillas. ¿Sabes lo que te quiero decir?

A. Cada tortilla se divide en 5 partes.

A3. Sí, en 5 partes

........
A3. Sí, así está bien
A4. Es igual a 1/5
A3. Y le da un trozo a cada uno. Osea, 7. Chico, pon numerito por numerito, teníamos que haberlo mejorado. Pon 7, bueno, pon, táchalos o lo que sea, que si no luego nos confundiremos
A2. Hay que considerar hasta las 2 tortillas. Quedan 3
A1. Osea, que quedan 3/5, que es lo que te dice.
A2. Ahora hace, 3 entre 7. Divide esos 3 trozos entre 7, de tortilla
.........
A2. No, no. Cada trozo entre 7.
A4. Cada trozo entre 7. Y tocan a 3
A3. No, porque luego hace más cosas
A4. Sí, a 3/7 de 3/5
A3. A 3/7 de 3/5 ...
A4. Y tocan a 3
A5. Este también lo divides, este también lo divides. Y tocan a 3
A3. !Ah!. es lo mismo que, si, si. Es lo mismo que 1/5 de una tortilla, más 9/35 que es multiplicar esto por esto, 3 por 3, 9; 5 por 7, 35. Que es lo mismo que ..., bueno que esto mismo. Sí, si
.....
A3. A ver, pero esperad (lee de enunciado): utilizar representaciones simbólicas para .... Lo que le falla es que no explica las fases
A5. Que sí
A3. Las explica, bueno, las explica simbólicamente. Sí que las ha explicado simbólicamente. Esto está bien.
A3. Numéricamente lo explica bien, pero ...
A5. Yo creo que está bien
A3. Cuando te pregunta aquí que si el reparto por fases lo hace bien, numéricamente está bien hecho por fases, pero, evidentemente, verbalmente es muy pobre, no hace nada.
P. Pero lo que él trata es de responder bien a la pregunta
A3. Vale, vale.
P. Lo que le piden son representaciones simbólicas.
A3. Osea, que esto está admitido, entonces está bien de todas maneras. Entonces, (lee del enunciado): determinar si la respuesta es correcta o errónea
A1. Vamos a ver si es correcta, ¿eh?, primera parte
A3. ¿Que no estas seguro?
A1. No, no lo habré seguido bien. 2,28 es 2/7, ¿no?
A3. Hay que sumar 1/5 más 9/35
.......
A4. 16 entre 35 avos
A2. No se lo que estoy haciendo, me estoy volviendo loco
Ruido
A3. Divide 3 entre 7, osea
A2. 3/7 de cada 3/5
A3. Osea, 3/7 de 3/5
......
A1. Es correcta, ¿no?
A5. Yo creo que está bien
A2. Lo que habrá hecho mal es esto, ¿no?
A1. 3 por 3, 9, está bien, y 7 por 5, 35. Esta bien
<u>final de una cara de la cinta</u>
A3. Sería 1/5, que sale 0,2
A4. 3/35 más 1/5
A5. Saldría 1/5 más 3/35, que son ....
A. Fíjate. Aquí dice que son dos tortillas para 7 personas, ¿qué hay que poner? Dos tortillas para 7 personas
A2. Sale
A3. No, pero aquí te dice 3 tortillas para 7 personas, pero esto corresponde a 3/5. Entonces, lo único que está mal es esto, ¿no?
A. Osea, 3 trozos de 3/5 para 7 personas
A3. Lo que hace es dividir. Los 3/5 los divide en 7, no que cada quinto lo divide en 7, sino que los 3/5 los divide entre 7.

A. Sí, si
A3. Entonces, determinar si la respuesta es correcta o incorrecta.
A2. Errónea
A4. Errónea
A3. A ver, dilo más alto, que no se te oye.
A3. Analizar la sintaxis. ¿Qué es esto de la sintaxis?. Yo no diferencio la segunda pregunta de la tercera, porque es que dicen lo mismo.
A3. Aquí simplemente hay que decir que está mal. Aquí hay que decir ... ¿qué es lo que está mal?
A1. Aquí, fíjate que dice ..
A. Que el 3/7 está mal
A4. Pero, la sintaxis esta bien, ¿no?
A3. Bueno, entonces, ¿es falso?, ¿la sintaxis empleada es correcta?. El estudiar lo verdadero o falso ¿falla en que lo que está mal es esto, el 3/7? Tienes que escribir la respuesta correcta ¿tienes que poner 1/7 en lugar de 3/7?
A2. Pero lo que dijo también el otro día es que hay que utilizar las cosas diferentes, osea, es lo de las fracciones y lo de los repartos. Ahora, no se si estará bien
A3. Es que esto es una fracción, osea, esto es un reparto; esto es una fracción . Y esto vuelve a ser un ..
A4. Un reparto
A3. Este reparto no está mal escrito, son ... Hombre, no está mal escrito; lo que pasa es que como son 3 trozos entre 7 personas.
A. 3 trozos de 3/5 para 7 personas
A3. Osea, 3 trozos
A. De 3/5
A3. Osea, estos 3 trozos para 7 personas. Lo que está mal es esto, que ha puesto 3/7, pero ...
A5. Yo creo que esto también está mal. Ahí es un 1
A4. La fracción que te sale aquí es la misma que la de aquí
A2. Yo es que no me acabo de ...
A1. Sí, esto son 3 trozos para 7 personas y tiene que ser 1 trozo para 7 personas
A4. Un trozo para 7
A. Un trozo de 3/5, ¿no?
A3. !Ah!, un trozo de 3/5, sí, sí
A. Que es lo que ha hecho en realidad
A3. Vale, vale. Tienes razón. Osea, aquí es un 1 y aquí ...
A. Pero no lo escribas ahí, que igual hay que entregarlo luego

**GRUPO 2**

A. Empezamos así. Vamos a ver: 2 tortillas para 7 personas. Se divide en 5 trozos. Dividimos cada tortilla en 5 trozos. .......... Más, 3 repartido para 7..
A1. Ya no es la misma persona
A2. Esto está mal, está mal
Ruido
A3. Son 3 trozos dividido para 7, 3 trozos dividido para 7, y eso hay que cambiar de unidad
A1. Esto habrá que hacerlo con fracciones también
A. Es lo mismo que aquí, me parece, ¿no?, que también esto estaba mal
A3. Y, luego ¿cómo lo reparte?
A2. Reparte 3/5, ¿no?, reparte 3/5 entre 7 personas
A. Les toca 1/5 a cada uno
A2. Eso está bien. Ahora, esos 3/5 se dividen entre 7; que se supone que esto que ha puesto aquí
A1. Pues vamos a sacarlo aquí para no equivocarnos
A3. Yo creo que esto lo tenia que dividir, pero es que no llega
A2. ¿A 3 no llega?
A3. No
A2. 1, 2, ... Entonces, hay que dividirlo más
..........
A. Y estos, ¿cuanto son de tortilla?
A2. Si esto es 1/5. Y luego el quinto lo hemos dividido entre ...
..........
A1. Claro, es que esto son 3/5 de la tortilla y eso lo divides en 7 trozos, y ya está.
A4. ¿Qué haceis?
A2. Estos 3/5 hay que dividirlos ahora para 7 personas
A4. A 3, ¿no?, sobran 2 y luego a .. 2, y se quedará 1, que ... en 7, ¿no?

A2. Sobran 3
A4. Ahora a 3
A4. Y después, estos 3 los divides en 3. 3 cada uno
A2. Eso lo habíamos hecho antes.
A. Pero eso no es lo que hay que hacer
A4. !Ah!, que hay que hacer lo que hace allí
A1. Este 9 ¿de dónde lo has sacado?
A2. De 3 por 3
A. Si, pues aquí tendrá que poner 3/7 de 3/5. Si, porque 3/5 es lo que te sobra
A3. No, 1/7 de 3/5. Te sobran 3/5 y los tienes que repartir entre 7
A4. Serian, serian, ¿no sería 1/3?
A3. Serían 1/7 por 3/5, porque tienes que repartir 3..
A4. Sí, eso digo. !Ah!, ¿1/7?
A. Cada trozo dividirlo en 7 partes y coges, cada uno, una parte, osea cada uno 1/7. De los 3/5 coges 1/7
A4. Sí, si. 1/5 + 1/7 de 3/5
A. A mí me sale 3/35, porque esto es un 1. Está bien
A4. Aquí te sobra, ¿no?, ¿no sobraría?
A. No. Porque de este trozo no lo tienes que dividir en 3, en 3... sino que ese trozo de tortilla lo divides en 7, como te da la gana
A1. Cada trozo, ¿sabes?
A4. Pero, entonces, si coges ...
A1. Es como si estuviera todo junto y lo divides en 7. Ya está
A. Que no hay rayas
A4. Pero, entonces no sería de 3/5
A3. Si, esta es toda la tortilla y de estas 5 partes sólo vas a dividir estas 3.
A1. Si que son 3/5 porque es lo que te sobra. Tú coges 1/7 del resto, y esto son 3/5
A4. Osea, que es esto. Osea, que hay que dividirlo en 7, entonces serían 3/7. Pero, ¿esto se puede hacer?
A. Se ha confundido, ha puesto un 3
A4. Si, sí, claro. Lo que yo no sabía es que se pudiera hacer
A1. Analizar la sintaxis empleada
A2. Está mal lo del reparto, porque tenía que ser fracción y no...
Ruido y pausas
A. Las relaciones semánticas será, a lo mejor, lo de explicar lo de...
A1. ¿Qué hay que explicar?, ¿que un reparto no lo puedes multiplicar por una fracción?
A2. Está mal; un reparto por una fracción está mal
P. A ver. En la pizarra, si es lo que yo he escrito no está así. Es otra forma de repartir. (en la pizarra figura (1:7) [3/5] y (3:7)[1/5] )
A. Bueno. Entonces, yo digo que es esto, osea, esto, ¿vale?. Entonces, el resultado es lo mismo, pero no es lo mismo.
P. Explica porque esto no y esto sí
A. Vale. Yo digo que esto no es esto, porque si yo cojo y divido entre 7, 1/5, que es lo que hay dibujado ahí, 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7, ¿vale?, esto es 1/5. Entonces, yo tengo que coger 3, osea, 3 partes; entonces, cojo 1, 2 y 3 y me sobran 4, ¿vale?. Entonces, aun puedo coger otras 3 más, para otro, para otra persona. Porque esto es una persona y esto es la primera, pero es que me sobra 1 y lo tengo que empalmar con el otro 1/5
P. Vamos a ver qué es lo que queremos hacer aquí. ¿Tu que quieres representar? ¿3/7 de 1/5?
P. ¿Qué es 3/7 de 1/5 en el dibujo?
A. Pues, esto solo
P. Vale. Pero es que esto es lo que pone aquí. ¿y tú por qué dices que sigue repartiendo esto?
A. Hombre, porque tenemos que seguir completando para tener los 7 trozos.
P. Pero esto no es un reparto
A. ¡Ah!, osea, que tendría que estar 3 veces lo que... Vale. Ya está
P. Vale, pues ahora repartimos
A. Bueno. Entonces, cojo y 3
P. Ahora tienes que coger 3 unidades ...
A. 3 unidades
P. ¿De tamaño?
A. 1/5. Vale, 1, 2 y 3
P. Ahora las divides entre 7

......

P. Y ahora es cuando tu dices: yo reparto estas 3 unidades entre 7. Y ahora señala lo que les toca a cada uno de los 7.

A. Es esto, ¿vale?

P. Eso es. Vale. Y ahora pasemos al otro

A. ¿A cual?,¿a este?

P. Claro. El otro que decís que no ...

A. Pero es que yo lo que digo

P. Si todo esto, está indicando esa cantidad

A. Vale

P. Si lo hacemos de esta manera, esto vuelve a ser, vuelve a plantearnos la situación anterior donde poníamos una fracción de otra fracción, que eso tenía otro sentido. Si lo ponemos en forma de reparto, 1 entre 7, ¿no?, 1 entre 7 es lo que hay que repartir; pero esta unidad que repartimos es de tamaño 3/5, ¿vale?. Ahora repartirlo para 7

P. Todo, todo, hay que repartirlo todo. Lo que estamos cogiendo, lo que estamos repartiendo es esto

A1. Es que no lo estás haciendo bien, es que ese trozo hay que repartirlo entre 7

P. Bueno, como es difícil de repartir, ¿tú crees que saldrá lo mismo que antes

A1. No

P. Si tu divides eso en 7 partes, ¿una de esas partes no será igual que ésta?

A1. Si será la misma

A3. Sí que sale lo mismo, porque al multiplicarlo da 3/35

P. Recordad lo que dijimos al principio: dos repartos son equivalentes si cada uno de los que participan reciben la misma cantidad; luego esto y esto son equivalentes.

A. Osea, que está bien

P. Lo que ocurrirá es que dependerá de cómo se vea el proceso. Se han repartido las 2 tortillas; entonces se han hecho divisiones en 5 partes. Uno puede considerar que quedan 3 partes, de tamaño 1/5, que hay que repartirlo entre 7, y entonces lo escribe como 3 unidades de tamaño 1/5. Y otro puede considerar que todo esto es una sola unidad, pero de tamaño 3/5. ¿Vale?

A3. Yo no entiendo bien por qué tiene que estar aquí esto en un paréntesis

A3. Osea, aquí si ponía 3/7 no estaba bien, es lo que no entiendo

P. Yo le decía a tu compañera que si pone 3/7 de 1/5, lo que hay que entender es que eso es una fracción de otra fracción; y cuando ella ha ido a calcularlo ha dicho: 3/7 de 1/5 es esto, y ahora tengo que seguir repartiendo

A3. Ya, ya

P. No estamos en contextos de reparto, porque estamos diciendo una fracción de otra. Entonces, ahora sí; si yo digo: quiero repartir 3 entre 7, les voy a dar esto para los 7 y aún me quedará esto por repartir. Entonces sí

A3. Pero en este caso, por ejemplo, daría lo mismo

P. Yo lo que tengo que entender aquí, según la simbología utilizada, es que yo reparto un trozo entre 7, pero ese trozo no es una unidad entera; entonces no me va a salir 1/7, sino que tengo que ver de qué unidad estoy hablando. Y esto sería la séptima parte de este trozo

A3. Osea, eso se tiene que poner con determinadas unidades

P. 1 unidad repartida para 7 les tocaría a 1/7 a todos, a cada uno de ellos. Pero ese séptimo no hay que entenderlo como 1/7 de la unidad, sino que dependerá del tamaño de lo que yo esté repartiendo. Si reparto 1 unidad entre 7, a cada uno 1/7; si reparto 1 unidad, pero de tamaño 1/2, a cada uno le tocará 1/7, pero de la mitad de la tortilla. ¿Queda claro?

A3. Si. Gracias

..........

A. Es que así indica lo que estás repartiendo, si los pones los dos con fracciones indicas lo que le toca

A1. Claro

A3. Osea, que primero lo puedo poner con reparto y luego ya en fracciones

A2. Claro, aquí lo pones con dos puntos y aquí se lo cambias todo esto a fracciones

## ANEXO IV.2.4. Cuestión de debate número 4

<u>Tarea propuesta</u>

Utilizar las representaciones simbólicas para expresar el resultado de repartir de forma igualitaria 2 tortillas entre 7 personas. El reparto ha de hacerse por fases.

Describir el proceso.

Respuesta del alumno X

*Dividimos las tortillas en 6 partes*

*Cada uno recibe* $\frac{1}{6}[1]$ *y sobran* $\frac{5}{6}[1]$

$\frac{5}{6}[1] : 7 = \frac{5}{42}\left[\frac{5}{6}\right]$

$\frac{1}{6}[1] + \frac{5}{42}\left[\frac{5}{6}\right] = \frac{7+5}{42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

***Puntos de debate:***

1.- Determinar si la respuesta es correcta o errónea.

2.- Analizar la sintaxis empleada.

3.- Estudiar la verdad o falsedad de las relaciones semánticas utilizadas.

4.- En caso de desacuerdo con el trabajo del alumno X, formular la respuesta que debería haber dado.

## DEBATE COLECTIVO

En la transcripción del debate se han utilizado las unidades de análisis para la Interacción Didáctica de Romero (1995)

| | | |
|---|---|---|
| 3.PIS/cl | **P** | Cada uno se lleva 1/6, ¿sería correcto? |
| 3.AAI/os | Alumn. | Sí |
| 3.PIS/cl | **P** | ¿Sobran 5/6? |
| 3.AAI/os | Alumn. | Sí |
| 3.PIS/cl | **P** | Tercera linea, ¿eso es correcto? (escribe $\frac{5}{6}$ : 7 ) |
| 3.AAI/os | Alumn. | Sí, no |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Por qué dices que no? |
| 3.AIS/j | **A9** | ¿Cómo vas a dividir 5/6?, ¿qué es 5/6? |
| 3.AMC/c | **A11** | De tortilla, de la unidad |
| 3.PIS/cl | **P** | ¿Puedes repartirlo entre 7? |
| 3.AAI/os | **A9** | Sí |
| 2.PO/p | **P** | Por allí, |
| 3.PIS/cl | | ¿también decís que sí?, ¿por qué? |
| 3.AAI/os | **A1** | Porque es correcto |
| 3.PVI/rs | **P** | Llegados a este punto yo, como discrepante, he de decir que no es correcto |
| 3.AAI/os | **A12** | Nosotras hemos dicho que no |
| 3.PDC/p b | **P** | No es correcto por la sintaxis que venimos utilizando. Hemos decidido, desde hace algunos días, que cuando pongamos una expresión de este estilo (escribe (a:b)), a y b deben ser números enteros y 5/6 no es entero. Es incorrecto pues hay una falta de ortografía, eso sería un error sintáctico, ¿vale?. Si esto se plantease así (escribe (5:6):7), |
| 3.PIS/cl | | Si esto se plantease así (escribe (5:6):7) ¿sería correcto? |
| 3.AAI/os | **A1** | Sí |
| 3.AAI/os | **A3** | No |
| 3.AVI/rj | **A4** | No, porque la sintaxis que hemos utilizado no ha sido esa. |
| 3.AVI/rj | **A1** | Pero eso sí que es correcto, porque hay números enteros. 5 tortillas, no... Depende de las utilidades que aplique a eso. |
| 3.AAI/ai | **A7** | Son 7 personas. Serían 5 trozos que quedan entre 7 personas |
| 3.AVI/rj | **A1** | A eso le faltarian unidades, porque dice 5 tortillas entre 6 personas y luego entre 7; según lo que hemos establecido anteriormente .. |
| 3.AAI/os | **A7** | Eso está mal. |
| 3.AVI/rj | **A1** | Pero si pones unidades |

.........

| | | |
|---|---|---|
| 3.PIS/cl | **P** | ¿Cuál sería la sintaxis correcta? |
| 3.AMC/c | **A3** | (5 : 7) $\left[\frac{1}{6}\right]$ |
| 3.PDC/a | **P** | Teníamos que repartir entre 7 personas y ¿qué es lo que repartimos?, 5 trozos, que hay aquí, pero de tamaño 1/6. O también podíamos haber escrito (escribe en la pizarra (1 : 7) $\left[\frac{5}{6}\right]$ |

| | | |
|---|---|---|
| 3.AVI/ar | **A7** | Sí, eso está bien |
| 3.AVI/rj | **A12** | Pero lo anterior está bien, porque estas repartiendo otra vez lo que ya habíamos repartido. Eso está bien |
| 3.AVI/rs | **A3** | No |
| 3.AVI/rj | **A12** | Sí. Estas volviendo a repartir lo que habías repartido. Y según vimos el otro día, es así |
| 3.AVI/rj | **A3** | Pero es que tienes que repartir entre 7 personas |
| 3.AAI/os | **A1** | Lo de abajo está mal, pero esto otro está bien |
| 3.PIS/cl | **P** | ¿Esto está bien? (señala (5:6):7) |
| 3.AVI/rs | **A3** | No |
| 3.PDC/d | **P** | Este compañero dice que sí y por aquí dicen que no. La razón que esgrimen es que tenian que haber aparecido 7 personas. |
| 2.AP/j | **A12** | ¿Por qué?. Estás repartiendo ... |
| 3.AAI/os | **A3** | Aun así tampoco está bien. |
| 3.AVI/rj | **A1** | Por lo mismo |
| 3.PIS/cl | **P** | Aun así tampoco está bien, ¿por qué? |
| 3.AMC/c | **A3** | Estaría bien si hiciese referencia a la unidad, pero quitaría el 7 del final y ya te quedaría lo de arriba. |
| 3.PIS/cl | **P** | Pero, ¿dónde hago referencia a la unidad? |
| 3.AMC/c | **A3** | Pues detrás del paréntesis, no haces referencia a la unidad detrás de la primera división. |
| 3.PIS/cl | **P** | Pero si pongo este 1 aquí, ¿sería correcto? |
| 3.AVI/rs | **A3** | No |
| 2.PE/a | **P** | Aquí pongo 1 |
| 3.AVI/rj | **A3** | No, es que hay que poner 1/6 |
| 3.PIS/e | **P** | ¿Tu te mantienes en tu postura? |
| 3.AVI/ar | **A12** | Sí |
| 1.PO/d | **P** | Bueno, pues lo pensais. Seguimos. Vamos a terminar. |
| 3.PIS/e | | En la linea 4, ¿es correcto lo que hace? |
| 3.AAI/ai | **A7** | Porque tiene que multiplicar antes de sumar; son las reglas. |
| 3.AVI/ad | **A1** | No se pueden sumar chorizos y longanizas. |
| 1.PA/r | **P** | Venga. Esperad un momento. |
| 3.PIS/e | | Hay dos aspectos diferentes. Jorge dice que no se pueden sumar chorizos y tal, ¿a qué te refieres? |
| 3.PIS/e | **P** | A la segunda parte, ¿no? |
| 3.AMC/c | **A1** | (Asiente con la cabeza) |
| 3.PIS/e | **P ¿** | Y tu te refieres a la primera parte? |
| 3.AVI/ar | **A7** | Sí |
| 3.PSC/c | **P** | Bueno, pues vemos que las dos partes están mal hechas |

**Anexo IV.2.4.1. DEBATE EN PEQUEÑO GRUPO.**
**GRUPO 1**

A1. Doy a cada uno 1/6 y quedan 5/6. Si ahora cada de esto lo divides en 7 partes te quedan...
A2. 42
A3. 7, 14,... 35.
A1. Te quedan 35 ¿Pero son 35/6?.
A2. Son 35/42.
A1. Espera esto, lo está poniendo en fracción
A3. Esta todo mal, porque esta otra vez poniendo todo en fracción.
A1. ¿De dónde sacas tú el 35/42?.
A2. Yo es que, a ver, he llegado a que consigue 1/6 (es decir cada persona consigue 1/6) y luego con lo que sobra que son 5 partes; nos quedan 35 dividido para 7
A1. De tamaño 1/42
A2. De tamaño 1/42, claro.
A3. Y esto así ¿por qué no se puede poner?
A1. Claro, y en total, serían 35/6.
A2. Entonces tiene 1/6 más 7 por 5, pues son 5, de 1/42,.... ¿no?
A3. Creo que no es eso. Entonces que es 35 ¿o qué?.
A1. No sé, yo tampoco sé.
A2. Esto yo no lo entiendo. A ver. Cada uno recibe 1/6 y sobran 5/6...
A1. 5/6 de la segunda tortilla
A3. Eso, de la segunda tortilla

A2. Sobran 5/6 del total. Eso da igual.
A1. 5/6 de tamaño unidad, esto lo divide entre 7 personas. Entonces coge y hace una división de fracciones, producto de medios por producto de extremos, y entonces le sale 5/42 de tamaño 5/6.
A3. Eso es lo que yo no entiendo.
A1. Divide, en teoría, cada sexto en 7 partes entonces tiene 5/6, porque son 5/6 lo que le quedaba, dividido entre siete personas; pero aquí hace una división de fracciones y está utilizando las fracciones. Entonces le quedan 5/42 de tamaño 5/6.
A3. Al final, ¿a qué resultado llega?
A1. Entonces le queda un sexto de tamaño unidad más cinco cuarentaidosavos de tamaño cinco sextos; entonces hace 7 más 5
A4. El 7+5 ¿de dónde se lo ha sacado?
A1. Pues la suma, mira, que le ha dado por ahí.
A2. Yo creo que se ha puesto a operar con los números como le ha dado la gana. O sea, a mitad de problema se ha aburrido.
A2. ¡Ya está! Lo ha hecho con esto: mínimo común......
A1. Mínimo común múltiplo, 42 dividido para 6 a 7.
A2. Mínimo común múltiplo, 42 dividido para 6 a 7.
A4. Pero lo ha mezclado todo de buena manera, eh, guay.
A1. Lo podía haberlo hecho un poco más difícil, la persona esta, ¿no?.
A2. Entonces, al final, ¿a qué resultado llega?
A1. Dos séptimos, ¡pam!
A2. A ver, ha puesto que son doce cuarentaidosavos. Y voy a ver si esto es igual.
A4. Lo podíamos hacer primero de la forma que lo hacemos nosotras y luego miramos a ver como lo ha hecho él.
A1. Ha llegado al mismo resultado, lo que pasa es luego no sé como lo ha hecho. Pero si que ha llegado. Lo ha hecho bien la moza, pero......
A4. Oye, que el resultado le sale bien. Que sé hacer de todo.
A3. Ah, ¿qué el resultado le ha salido bien?
A4. Sí, porque si nosotros, la solución que ya él ha hecho que es un sexto más cinco de tamaño un cuarentaidosavos te queda cinco cuarentaidosavos y me llevo esto. Si fuera otro día no me quedaría jamón.
.....
A1. Bueno, entonces, ¿la cuestión es que?.
A2. A ver, tenemos 2 repartido para 7, si los dividimos en 6 tenemos 6 y 6, 12; 12 repartido para 7, 1/6, luego tenemos 7 repartido para 7 que son los que cogemos, de tamaño un sexto, más cinco repartido para 7, que son los que nos quedan por repartir, de tamaño 1/6.
A1. A ver, lo voy hacer yo.
A4. Si, si que le sale lo mismo.
A2. Sí, le sale bien. No sé como, pero le sale bien.
A3. Lo que pasa es que ha cambiado todo y lo ha hecho como fracciones, pero ha aplicado los lenguajes que se utilizan para fracciones. Por eso le ha salido bien. El resultado está bien. ¿Pegas en algún otro sitio?
A2. Entonces, tiene 1/6 más como reparte cada una de esas en 7, son 7 por 5, 35 dividido para 7. Un cuarentaidosavos porque como es un tortilla entera son siete más. Entonces, al final, me llevo 1/6 y el resultado de este reparto son 5 de 1/42....
A4. Pues no da lo mismo.
A2. ¡Hombre que no!
A1. Si tú sumas 1/6 más 5/42 igual 7 más 5 cuarentaidosavos que te sale 12/42 de mínimo común..... divides....
......
A1. Los fallos son que utiliza las fracciones y que cuenta... hace 5 cuarentaidosavos pero de tamaño 5/6, o sea que en teoría son 5 partes de cuarentaidos lo que le corresponde a cada uno.
A2. O sea, que tortillas por tortillas nada, allí no se puede. Esos son trozos y estos también.
A4. Y además lo hace mal porque empieza como si esto fuera el reparto original, 5/6 repartido para 7, y debería ser 6/6 repartido para 7 personas.
A2. No, 6/6 no, porque 1/6 de la segunda tortilla ya lo tiene cogido.
A4. A ver. A sí, claro.
A1. Lo que tiene que repartir son las dos tortillas entre 7 personas. Les corresponde dos séptimos.
A2. Cuidado, no te pases, tienes un sexto y quedan 5 trozos de tamaño 1/6, entonces cada trozo lo divides para 7 . Como son 5, 7 por 5, 35 a repartir entre 7 y el tamaño es un cuarentaidosavo.

Si son 7 y el total son 6, 6 por 7, 42.

P. Venga, contarme cosas

A2. En principio ya, porque utiliza la fracción y pasa como en el caso de antes que a l hora de multiplicar son trozos de tortilla por tortilla que no se sabe lo que es.

A3. O sea, eso uno. Y el resultado no da igual haciéndolo como lo hemos hacho nosotros

A2. Si que da igual. Da 2/7, porque si tu al final sumas fracciones te da dos séptimos.

A4. Transforma los repartos en fracciones y opera como si fueran fracciones.

A1. Hay una vez que hace división de fracciones. Para que le salga hace producto de medios por producto de extremos

**GRUPO 2**

A. Pero, como no le sobra 1/6 esta operación ya no tiene sentido

A1. Esto está bien, porque le daría lo mismo. Le daría lo mismo que aquí, 1/6 más 24/42 y eso ya está bien

A2. Esto está mal

A3. Además esto también está mal

A4. ¿Esto de abajo?

A2. Claro. Tendría que ser 1 para poder sacar 1/6 y lo demás está bien. Sería 42 entre 6, 7; 42 entre 2, osea, 42 entre 42, 1

Ruido

A4. ¿Hay que poner 1?

Se interrumpe la grabación

## ANEXO IV.2.5. Cuestión de debate número 5

<u>Tarea propuesta</u> 1.1.-

¿Tiene sentido la expresión 0 : 5?. Justifica tu respuesta.

<u>Respuesta del alumno X</u>

*No tiene sentido este reparto ya que tenemos un número nulo de tortillas para 5 personas. No existe nada para repartir. Hay que repartir 0 tortillas entre 5 personas*

$$\underset{\mathbf{1}}{0} : 5 = \underset{\mathbf{2}}{0} :5 [\underset{\mathbf{3}}{0}] = \underset{\mathbf{4}}{0}$$

<u>Tarea propuesta 1</u>.2.-

¿Tiene sentido la expresión 7 : 0?. Justifica tu respuesta.

<u>Respuesta del alumno X</u>

*Carece de sentido este reparto porque aunque existan 7 tortillas no tenemos ninguna persona a quien repartírselas.*

$$7 : \underset{\mathbf{5}}{0} = 7 :\underset{\mathbf{6}}{0} [1] = \underset{\mathbf{7}}{0}$$

***Puntos de debate:***

1.- Determinar si las respuestas son correctas o erróneas.

2.- La persona que resuelve las dos tareas utiliza el símbolo 0 en diferentes momentos. Analizar los significados del símbolo 0 que ha utilizado en las 7 ocasiones señaladas con números en negrita, y debatir sobre la pertinencia de su uso.

**Anexo IV.2.5.1. DEBATE EN PEQUEÑO GRUPO.**

**GRUPO 1**

A1. En los puntos de debate hay que determinar si las respuestas son correctas o erróneas, y la persona que resuelve las dos tareas utiliza el símbolo 0 en diferentes momentos. Analizar los significados del símbolo 0 que ha utilizado en las siete ocasiones señaladas, con números en negrita, y debatir sobre la pertinencia de su uso.

A2. Vamos a ver, entonces lo de este cero, ¿sería correcta?,

A1. ¿El cero que está marcado con el tres?.

A2. Este sería correcto

A1. Sí, porque es el que nos indica el reparto.

A2. Este también

A1. Sí, porque es lo mismo.

A2. El de las partes.... El de la unidad sería, y el del resultado. A ver, entonces, los dos primeros sí. Este...

A1. En teoría si te propones hacer el reparto las partes son cero, el tamaño de las partes es cero, pero puede tener sentido poner el cero aquí como las partes o no puede tener sentido porque si no tienes partes no puedes tener tamaño de partes a repartir.

A2. Si, si
A1. Y luego la tarea 1.2, ¿tiene sentido la expresión 7:0?. Justifica tu respuesta. Carece de sentido este reparto porque aunque existan siete tortillas no tenemos ninguna persona a quien repartírselas.
A2. Estaría bien, ¿no?
A1. Siete tortillas entre cero personas es igual a siete tortillas entre cero personas de tamaño unidad...
A2. Igual a cero porque no hay individuos.
A3. A ver, ¿qué pasa?, ¿qué?
A1. Que estamos aquí....
A3. Estos números, ¿qué son?
A2. Estos números son para decir si esos ceros están bien utilizados o no.
A1. Es que están numeradas las veces que sale el 0 como símbolo.
A2. Había que decir si este cero está bien puesto, este,... En este es el que más..... Porque algo de tamaño cero...
A1. Es que, en teoría, lo que ponemos entre corchetes es el tamaño de lo vamos a repartir.
A2 Pero, hombre, si aquí pones el tamaño cero sería con la segunda justificación que tu has dicho. O sea, esta respuesta no se correspondería a esto sino a la respuesta que falta.
A1. A la otra. Vale.
A2 Entonces, este cero estaría bien utilizado, este también,.... Estarían bien utilizados pero diciendo que sí se podría realizar el reparto. O sea, esto está mal.
A1. Intentando realizar el reparto.
A2. Esta bien pero aquí está dando dos soluciones diferentes: una escrita y otra simbólica.
........
A2. ¿Tiene sentido 7 entre 0?. Aquí, este cero estaría bien utilizado, este igual...
A1. Y este también
A2. ¿Esto sería correcto?
A1. Carece de sentido este reparto porque aunque existan 7 tortillas no tenemos ninguna persona a quien repartírselas
A3. Claro, en todo reparto debe haber individuos, pero igual que tiene que haber elementos para repartir.
A1. No se me ocurre ninguna cosa mejor.
A2. Es que ya está.
A1. Analizar los significados del cero que se han utilizado en las siete ocasiones y debatir sobre la pertinencia de su uso.
A2. O sea, este cero simboliza que no hay cosas para repartir, éste lo mismo, éste el tamaño de las partes y éste el resultado del reparto.

*Está señalando la expresión:*

$$\underset{1}{0} : 5 = \underset{2}{0} :5\ [\underset{3}{0}] = \underset{4}{0}$$

A2. Y éste igual: éste sería que no hay individuos, éste lo mismo...
A1 Y éste que no hay reparto.

*Está señalando la expresión:*

$$7 : \underset{5}{0} = 7 :\underset{6}{0}\ [1] = \underset{7}{0}$$

**GRUPO 2**

A1. Encuentro absurdo, si no hay nada para repartir no se puede repartir. En la tarea 1.2. lo veo claro, pero en la primera...
A2. ¿Esta si que tiene sentido, dices?.
A1. Esta sí, no hay nada, carece de sentido, vale. Entonces la primera,... yo creo que no tiene sentido pero si me decís que el tamaño es cero, pero el tamaño cero no es ningún tamaño. A mi si me lo dices me lo creeré, pero...
A3. Yo pienso que en el momento que hay una situación, aunque no haya reparto, en el momento que se cree la situación ya hay reparto, aunque no haya tal. Tu puedes decir vamos a repartir, tu puedes decir vamos a repartir algo entre cinco personas, por ejemplo, y dices no lo he traído.
A1. Vas a repartir algo. Algo quiere decir que tienes algo, un elemento mínimo.
A3. Pero tu dices, por ejemplo, vamos a repartir...
A1. No, no, eso no tiene sentido.
A3. Pero la situación exige un reparto, la situación es reparto.
A1. Tienes que tener algo, algo para confirmar lo que estás diciendo.

A2. Pero las tortillas no pueden decir algo, no pueden decir las tortillas: venga vamos a repartirnos.
A1. Que no, que no. Que sin haber algo no se cómo puede haber reparto. No lo veo lógico.
A3. Yo pienso que para que haya un reparto debe haber...
A1. Algo, algo que repartir y algo a quien repartir. Es repartir algo entre alguien, algo entre alguien, mínimo uno entre uno.
A3. Yo pienso que como situación de, por ejemplo, vamos a repartir. Como situación de estas 5 personas al hacer un reparto que no tienes, si que hay reparto, pero como tangible nada, claro, no hay. Pero yo creo que si que tiene sentido. ¿Os he convencido a alguien?

**GRUPO 3**

P. ¿Qué tal?. ¿Hay debate?
A1. Es que estamos de acuerdo en todo. El debate lo estableceremos con los otros grupos.
P. Pues contármelo. ¿Qué os parece la primera tarea?
A2. Según esto matemáticamente tiene sentido. Ha representado las unidades de tortilla, aquí el tamaño de las unidades, que es cero, el tamaño de las cero unidades es cero también, y el resultado del reparto que es cero.
A3. ¿Por qué el tamaño es cero?.
A2. Hombre, si no tiene unidades no tiene tamaño; por lo tanto el tamaño tiene que ser cero.
A4. Pero si el tamaño es cero, entonces esto no se podría hacer.
A1. Pero son cero cosas de tamaño cero, ¿no?.
A2. Nada cosas de tamaño nada, ningún tamaño.
P. Lo veis como no estáis de acuerdo.
A1. Estamos de acuerdo en que en un sentido práctico esto no se puede aplicar, o sea no, pero matemáticamente sí, el resultado daría cero.
P. Pero si matemáticamente lo podeís hacer, ¿por qué decís que no podeís hacer el reparto?.
A3. Algunas de nosotras si que creemos que sí hay un reparto aunque no haya ningún objeto, pero hay personas a repartir nada; lo que no hay objetos pero si que hay personas y podría haber un reparto: un reparto de cero en este caso, de nada. Pero, en cambio, en el otro pensamos que no está bien matemáticamente porque en la calculadora sale error; habeis dicho, ¿no?.
A1. Aquí no tendría que poner un cero de solución, porque da error.
A2. Esto no puede ser un reparto porque no hay individuos.
P. Estais de acuerdo en que no se podría hacer, ni siquiera, el reparto. En este caso, ¿qué sentido tendría el 0 que hemos numerado nosotros con el siete?
A2. El ha pensado que sí, que se podía realizar un reparto. Osea, que al haber cero individuos pues cada individuo... no tiene sentido. El ha pensado que si se podía un reparto, pero no se puede porque no hay individuos con los que repartir.
P. Ya, esto lo tienes claro. Y, ¿por qué piensas que esa persona ha puesto 0?.
A3. Porque les toca a cero cosas.
A2. Cero cosas no porque hay 7 cosas.
A3. Pero no se reparten nada; se reparten cero cosas. Cuando tu acabas de hacer el reparto si no hay individuos a quien repartir no puedes repartir nada.
A2. Entonces el resultado no es cero.
A4. El resultado total no es nada.
A1. La nada la representas por cero.
A3. Llegas a repartir nada porque no puedes repartir nada.
A1. Es que aquí no tendría que poner cero. Yo simplemente pondría que este reparto no es un reparto.
A2. El ha puesto cero por lo que dice ella, que no se ha conseguido realizar un reparto porque no hay nada que repartir y entonces ha representado la nada como 0.
A1. Por no dejarlo en blanco.

**GRUPO 4**

A. Primer punto de debate: determinar si las respuestas son correctas o erróneas. Bueno, entonces la primera, ¿qué pasa?
A1. A ver
A2. Yo creo que se ha colado
A1. Pero, ¿qué hay que contestar?
A. Te leo: Cuestiones para el Debate, tarea 1.1, ¿tiene sentido la expresión 0 : 5?, justifica tu respuesta. Y la respuesta del mozo es, o de la moza, la respuesta es: (lee la respuesta). Y te pone esta expresión
A1. Eso está mal, ¿no?
A. Entonces, yo creo que el gacho se ha colado. Osea, la expresión que escribe, de manera simbólica,

si que es correcta. Entonces, sí que tiene sentido
A3. No, si a mi de pequeña si que me acuerdo que esta expresión me han enseñado que está bien, pero yo es que no lo entiendo
A. Si, si; pero si contesta es que tiene sentido, ¿no?
A3. Pero, ¿por qué?, es que yo no lo entiendo
A. Porque si no tiene sentido no puedes hacer una operación. Si a tí te dan una multiplicación, que no puedes hacer porque no existe, no la puedes hacer; pero si la puedes hacer es que tendrá sentido, digo yo
A3. Pero a la hora de explicarlo, ¿cómo le pondrías el sentido?. Es que yo no lo veo
A4. Pero si tu tienes 1 tortilla para una persona, a la persona le toca una. Pero si tienes 0 para 5, a la una le toca 0; digo yo.
A2. Y, aparte de eso que acabas de explicar, si da 0 es correcto, ¿no?
A3. Es que para eso, ¿para qué hacer una operación?
A2. Entonces, que si eso daba 0 ¿no era correcto?, ya no quedaba nada por repartir. Entonces, si da 0 porque no tienes nada que repartir es correcto.
A5. Entonces, se supone que esto está bien
A. La expresión simbólica si
A1. Entonces si que tiene sentido
...........
A4. Esto sería como al final de la otra vez, que ya no queda nada más por repartir, sería el paso final
A2. Sí
A. La respuesta es incorrecta, ¿no?
A2. La respuesta que da el chico si.
A. Incorrecta, vale. Y ahora hay que decir que los ceros, señalados en negrita, (sigue leyendo el enunciado de la segunda pregunta del debate)
A3. ¡Ah!, es que ha continuado, es que no hemos leido todo
A4. Aquí se ha equivocado, aquí se ha colado. Aquí se ha colado porque este tendría que ser 1, ¿no?
A2. ¿Por qué?
A4. Porque la unidad que tomamos es la unidad de tortilla, no la unidad. Osea, nosotros estamos trabajando todos los días tomando como unidad una tortilla, entonces se ha equivocado, porque esto no es un 0, tendría que haber un 1
A2. Si, pero el resultado de todas maneras es igual, ¿no?
A4. Si, el resultado que da al final sí; pero es que lo que pone es analizar los ceros, ¿no?. Entonces, este 0 si que es correcto, este también y este también, pero este es el que ...
A2. Pero él ha tomado como la unidad el 0, ¿a eso te refieres tú?
A4. Pero tú no puedes tomar como la unidad algo que no existe
A2. Pues por eso.
A4. Pero la unidad que estamos trabajando todos los días es 1
A2. Por eso, por eso piensa que no es correcto, porque él piensa que se toma como unidad el 0
A3. Aunque no afecta al resultado, porque sale lo mismo.
A2. Por eso dice que no tiene sentido
A3. Da lo mismo multiplicar por 1 que por 0, el resultado es 0
A4. Al resultado no afecta, pero ...
A3. Si, ya,
A. Analizar el significado del símbolo 0
A2. El primer 0 es el número de tortillas que reparte entre las 5 personas
A3. Si, y el segundo igual
A1. Igual
A2. El segundo, sí, es lo mismo te dice 0 tortillas para tal. El tercer 0 es el que ...
A4. Yo creo que es incorrecto.
A1. Quiere decir la unidad, pero se ha equivocado
A4. Yo creo que ese 0 tendría que ser 1; creo yo, vamos
A1. í
A2. Y el último 0 es el resultado que también es correcto, ¿no?
A. Ya está, ya lo hemos analizado
...
A.Ahora la segunda. Tarea 1.2
A1. Esto ya no tiene sentido, pero espera a ver que ha dicho
A. (Lee completo el enunciado de la tarea 1.2)

A2. Hombre, la respuesta que da sí que es correcta, no tiene sentido, ¿no?
A1. Sí, aquí lo que emplea del sin sentido, si que esta bien
A2. Aquí el fallo que tiene con los ceros es este
A1. El resultado
A5. El resultado es el mismo, ¿no?;
A2. Pero el resultado es incorrecto
A6. Tú no puedes dividir 7 para 0, eso no existe
A. El resultado numérico que da al final es incorrecto
A6. No existe porque sigues teniendo tortillas
A5. Esto es un reparto, ¿no?
A. Siete algo ¿para que?
A5. Pero esto es lo que pone aquí, es lo mismo
A. No es lo mismo, en el anterior el resultado sabemos,.. al repartir 0 tortillas entre 5 personas sabemos que es 0, pero al repartir 7 tortillas entre 0 ..
A5. La persona no existe, es 0
A. No es 0, no existe
A2. Si es que repartir entre nada no es un reparto. No existe, no es 0, es que no existe
A4. Es que no haces reparto
A1. No es un reparto porque ni siquiera llegas a realizar el reparto
......
A. Luego, cuando nos pregunten, tú dices que no estas de acuerdo
A3. No, yo me baso en la expresión esa. De pequeña me enseñaron, vale, que eso existe y esto no. Pero esto realmente yo no lo entiendo, porque no puede ser así
A. Hombre, pues bueno, ..
A3. A mi no me habeis convencido
A. Pues vamos a intentar convencerte ahora. Imagínate que estamos aquí 5, bueno ¿cuántos estamos?, tres, cinco, ..
A3. 5 personas. Pero es que no tienes nada
A. Bueno, estamos aquí 7. Y viene el profesor y dice: os voy a repartir 0 caramelos, ¿a cuantos nos toca?, pues a 0
A3. Claro, pero es que como no hay reparto
A6. Acabas de contradecirte
A. No señor, porque estoy hablando de esto, estoy hablando de esto
A6. ¡Ah!, sí
A. El otro caso sería al contrario, que viene el profesor ...
A6. Como has dicho 7 para 0, vale, vale
A. Que viene el profesor con 7 caramelos para repartir y abre la puerta y no hay nadie; entonces no puede hacer el reparto
A3. Pero es que hablar de reparto,.. dice voy a repartir, pero hablar de reparto, pero si no reparte realmente nada no hace el reparto; digo yo
A. Entonces no te he convencido, ¿no?
A2. No hay reparto porque el profesor se quedaría todos los caramelos
A3. Si no reparte nada no puede hacer un reparto
A6. No te da la razón
A3. No, si yo por la expresión te la doy, la razón, pero no lo entiendo, ¿entiendes?, ¿por qué es?. Si yo, ... no se....
A. La respuesta que nos da en la segunda tarea es correcta, es correcta la respuesta que da. Luego, se ha equivocado en la expresión simbólica, pero la respuesta es correcta. Vamos a analizar los ceros
A2. Hombre, el significado de los ceros ... es que esto no lo se, porque esto no lo se, no lo puede repartir
A1. Pero lo dice en el sentido de que no hay ninguna persona, que no hay personas para repartir
A2. El pone que quiere repartir 7 para 0. Y lo pone. Y luego lo que dice que quiere repartir 7 para 0 y toma como unidad la tortilla. Pues está bien
A5. Lo que pasa es que se equivoca al dar el resultado por poner 0
A3.. Eso no se puede hacer
A. Luego el resultado sería que no existe. Y ya está
P. El orden del trabajo es: ¿la primera respuesta es correcta o no?
A. No
P. No. ¿Para todos?
A3. Es que yo, la expresión esta veo que es correcta. Pero si no tienes nada que repartir, para mi no puede haber un reparto

A. Pero que sí, porque tú repartes 0
A3. Pero es que si no tienes nada
A. Pues eso. Tu tienes nada
A3. Nada para 5 personas te da 0, vale. Pero es que si no tienes nada, no puedes repartir
A. Tu tienes 0 tortillas para 5 personas, pues el reparto es 0.
A3. ¿Pero si no repartes nada? No hay reparto
P. Tu cuando entregas un examen en blanco ¿qué te ponen?
A3. 0,... pero hombre
A. Te ponen 0 y si no te presentas es cuando no te lo corrigen
A2. Pero tienes un 0 también de nota, ¿no?
A. Si no te presentas no tienes un 0, si no te presentas tienes otra convocatoria
P. Si te pones en esa situación, ¿no?
A3. Si, si, si con lo del examen lo entiendo, pero si lo pones con yo que se ...
P. Planteamos la situación en la que estamos ahora. Las personas entran en una habitación y allí hay un juez que les reparte una serie de tortillas. Lo que indicamos ahí, lo que nos interesaría, es que cuando sale una persona, con preguntarle a una de ellas, ¿qué es lo que nos preocuparía?, ¿cuánto te ha tocado a tí? ¿no?, ¿vale? Eso es el significado que tendría el reparto. Pues ahora ponte en ese caso, ¿qué indicaría eso?: que entran 5 personas a una habitación y llegan allí y ¿qué ocurre?
A3. Que les toca a 0
P. ¿Que les toca a 0 o no les toca a 0?
A3. Claro, sí, el resultado si
A. Pues si les toca a 0 ya les ha tocado
A3. Vale, que les toque, pero ...
P. Entonces, ¿cuál es el problema?
A3. Es que yo esa palabra no la veo adecuada, eso de repartir, ... no lo se
A2. Lo que pasa es que si no hay nada que repartir es que no hay reparto.
P. Pero eso, en el lenguaje popular ocurre con frecuencia. Se ha muerto un pariente y ¿qué os ha dejado de herencia?
A3. Bueno, claro, si, pero es que estas formas de hablar
P. Pues habrá casos favorables en que haya dejado algo; casos desfavorables en que no haya dejado nada y otros ... negativos en que ha dejado deudas.
A3. Vale, vale
P. Aquí hay un tema de fondo. Cuando uno no tiene nada; cuando no ha hecho nada en el examen, ¿tu ves claro que hay que ponerle 0?
A3. Sí
P. Habrá que ponerle nada
A3. Bueno es porque eso ya, no se, eso ya .. es como una norma, ¿no? que la tienes ahí
P. Y si hace un poquito sólo le pones un 1, ¿eso es una norma?
A3. Si es que yo que se
P. Se utiliza la frecuencia la palabra nada, o ninguno, o .. Pero si lo tuvieses que representar ¿tú crees que eso sería correcto?
A3. Que no se, que no estoy muy convencida.
P. Esa es la clave: hasta que uno no consiga que le convenzan o convencer a los otros no se debe quedar satisfecho.
A3. Huy, pues hasta que me convenzan con lo cabezota que soy.
A. Vamos a intentarlo a ver
A1. Con lo del examen está muy claro
A3. Con el examen sí. Pero en cuanto me pones cualquier otro ejemplo de repartir caramelos ya no lo entenderé
A6. Fíjate lo que ha dicho de la herencia él. Un reparto, se muere un familiar y hay un reparto, ¿no?
A3. Ya, si, pero es que son ocasiones
A6. Y te toca 0. Eso es un reparto. A ti no te ha tocado nada, pero a otro le ha podido tocar mil millones, ¿no?
A5. A ti no te toca nada , pero al otro le pueden tocar mil millones
A2. En este caso no sería igualitario
A6. Pero seguiría siendo un reparto
A5. ¡Hombre!, pero no es igualitario.
A6. Imagínate que el hombre que se ha muerto no tiene nada, ¿me entiendes?. Nada repartido para 5 familiares 0

A3. Pues qué ganas de repartir, ¿no?
A5. Imagínate que tiene siete millones y no tiene familiares
A3. Este está claro, este ejercicio, pero lo que no entiendo es el de arriba
A. En la tarea 2 estamos todos de acuerdo, ¿no? Bueno, algo hemos conseguido. Tarea 2 concluida.
A5. Lo que tú dices es que esto debería ser igual que esto: no existe, ¿no?
A4. Que no existe ni el reparto
A1. Lo que no existe es la cantidad que te dan, pero el reparto si que existe. No existe en cuanto a que no te dan nada.
A3. ¡Hombre!, si consideras reparto a no dar nada.
A4. Imagínate que esto fuera 25, ¿vale? ¿Cuánto le tocaría a cada persona?, 5; si fuera 15 le tocaría 3; si fueran 0 ¿cuánto le tocaría a cada persona?, 0. Pues ya está. Es que aquí no llega a haber reparto, pero aquí sí que hay reparto, lo que pasa que vale 0.
A3. Es que a la hora de pensarlo, es que dices para qué voy a repartir. Yo veo que esto sí, que es 0; pero ...
A. Las 6 y 3 minutos. Ya es la hora del descanso.

**GRUPO 5**

P. Aquí aparecen varios ceros. Y lo que hay que hacer es decir qué significa cada uno
A. ¡Ah!, vale
P. Es un poco .. cosas que se escriben igual, a ver si siempre valen lo mismo ¿no?. Por eso van numerados, para que digáis el 1 significa, ..
A1. Venga.
A3. Si es verdad que no tiene sentido
A4. Tenemos que discutir
A2. Si estamos todos de acuerdo, ¿para qué vamos a discutir?
A. ¿Son correctas o erróneas las respuestas?
A4. Son correctas las dos
A5. Esta no
A2. La segunda está mal, no tiene sentido.
A1. No. Este paréntesis ¿cómo lo explicas?, el número 3
A2. Eso es de tamaño 0, de tamaño nulo.
...........
A1. Es que si fuera una tortilla ...
A2. 0 tortillas entre 5 es 0 ¿eh?. Pues ya está
A4. Aquí tienes 0 tortillas para repartir entre 5, pero de tamaño 0
A2. De tamaño 1
A4. De tamaño 0.
A2. De tamaño 1. Si lo que repartes son tortillas son de tamaño tortilla, aunque no tengas.
A5. Si que tiene sentido. Esta expresión es esta ¿eh?
A1. Que si, que no les toca nada a nadie.
A2. Si, pero las tortillas son de tamaño 1, de tamaño tortilla, vamos. Está bien.
A3. Por eso, esto lo ha puesto bien, pero al ver que da 0 ¿no?, pues eso
A1. ¡Ah!, ya se que me dices
A2. No, pero esto es 1, esto es tamaño una tortilla, aunque no tengas, pues ..
A4. ¿Y cuando pones 1/2?
A2. De tamaño 1/2
A4. Aquí repartes 0 tortillas
A3. Cada tortilla es de tamaño 1
A2. Entonces, y lo que ha puesto de que no existe ...
A4. Que lo del tamaño da igual
A2. Yo creo que si que tiene
A1. Pero lo tienes que poner igual a 0
A5. Aquí no puedes poner que es 1 tampoco
A3. No puedes poner 1 porque no tienes ninguna tortilla
A1. Pero es que ahí lo que pone no es el número de tortillas,
A2. Es como kilómetros, tienes 7 kilómetros ..
A1. Es el tamaño de cada tortilla. Ya se que el resultado es el mismo, pero es que hay que ponerlo todo bien
A4 Pero aquí no puedes poner un 1 tampoco, también estaría mal.
A1. Lo que está mal seguro es 0, porque una tortilla de tamaño 0 no existe
A2. Pero por eso, está mal por eso, te dice que no tiene sentido, así lo demuestra
A1. Que no, que lo que decimos que lo que no tiene sentido es lo que ha puesto dentro de este

paréntesis porque aquí tienes que poner el tamaño de la tortilla
A4. ¿Cómo que no va a tener sentido?
A. El primero, esta expresión existe
A4. ¿Cómo que existe esta expresión?
A1. Tienes que ponerlo bien, lo ha puesto mal
A. Aquí te pregunta: tiene sentido la expresión ... Decimos, sí
A2. Lo primero si que tiene sentido; lo segundo no tiene sentido
A5. Sí que existe.
A2. Si que existe, pero no tiene sentido en el caso que estamos tratando
A5. Si que existe y si que tiene sentido
A4. Un reparto de 0 cosas no tiene sentido
A5 Claro que tiene sentido
A3. Claro que tiene sentido,pero no te toca nada
A5. Lo que no tiene sentido es esta, esta no tiene sentido ¿ves?
A2. Lo que no tiene sentido es cuando no hay nadie para quien repartir.
A3. Exactamente, ésta
A2. Y lo que está mal es esto
A1. Pero puedes poner cualquier cosa menos 0. Puedes poner 1,1/2 o 4, pero no puedes poner un 0, porque el 0 está mal
A5. Una cuestión de mera nomenclatura.
A1. No, pero está mal
P. ¿Habeis resuelto las dos respuestas del alumno?
A3. Si
P. ¿Las habeis valorado ya?
A3. Si
A4. ¿Hay que valorarlo?
P. ¿No podeis llegar a acuerdos?
A1. No
P. Que esto es un grupo de trabajo, no un parlamento
A4. Es que no entran en razón
P. Pues será que el que quiere convencer no tiene argumentos
A2. Es que no se dejan convencer
P. O no os dejais convencer vosotros
A4. Pues ahora ..
P. Es que debeis dejar claro eso, porque en la resolución de la primera tarea entrarán cuestiones que volverán a aparecer en la segunda. Si no lo teneis claro en la primera, aquí volverán a aparecer
A2. Esto, esta expresión no existe pero tiene sentido
A1. No es que lo que estamos ya debatiendo es lo de los ceros ¿eh?
P. ¡Ah!, lo de los ceros
A3. Lo otro ya está bien, lo de arriba ya está bien
P. Ya lo teneis claro
A3. Si
A1. Ahora falta lo de los ceros
P. Entonces para que luego se puedan contrastar estas cuestiones ir por orden: el 0 uno ¿qué significa? ¿eh?
A4. Pues eso, el 0 uno significa que no hay nada
A1. 0 unidades
A4. El 0 dos
A1. 0 unidades
A4. El 0 tres
A5. Tamaño 0
A1. El tamaño de la unidad, que no puede ser tamaño 0
A5 Tamaño 0
A2. El tamaño 0 no existe, aunque no tenga las tortillas
A5. Representame básicamente el tamaño 0
A1. Una cosa es que tengas 0 unidades...
A2. Mira, tu tienes tortillas.y te las han quitado todas
A1. Puedes tener 0 unidades pero cada tortilla ser de tamaño ..
A2. Porque las tortillas son de tamaño tortilla, aunque no tengas
A3. Sí, pero no tienes

A5. ¿Y si tienes tortillas de tamaño 1/2?
A2. Pues pones 1/2
A4. Pero el tamaño 0 no existe.
A5. ¿Cómo que no existe?
A1. Podeis poner lo que querais menos 0, cualquier tamaño menos 0
A3. Pero aquí no puedes poner ningún tamaño porque no tienes nada
A1. Pues puedes poner n y luego poner n pertenece a los naturales
A3. Si, pero es que poner aquí un 1 por ponerlo no me sirve de nada
A. Aquí lo que estamos discutiendo es lo que significa cada cosa
A2. El 0 está mal, puedes poner cualquier tamaño menos
A1. Es que este 0 aquí no tiene sentido
A5. Es que este paso intermedio sobra ¿o qué?
A1. Vale, pero reconoce que no tiene sentido 0
A5. Es que sus características son de tamaño 0
A1. Es que el tamaño 0 no existe, cualquier cosa tiene un tamaño
........
A5. La nada existe ¿qué tamaño tiene la nada?
A1. Un millón, puedes ponerle el que quieras..... Pero que no exista no quiere decir que no tenga tamaño. Es más, no entremos en la nada, estamos con tortillas
A5. Es que el 0 representa la nada
A1. Bueno
...........
A2. Esta expresión no existe. ¡Si esto está mal!
A3. Está mal
A2. Si esto no existe, el denominador si no hay nadie para los que repartir entonces si que no existe
A4. La respuesta está bien
A2. Pero no es igual a 0, es igual a
A4. A no existe, vale
A. Lo que sobra es esto, es el último ¿no?
A5. Esa igualdad última no es cierta
A4. Pero esto está bien hecho
..........
A.A ver, ¿tiene sentido esta expresión?, si. ¿y esta?, también
A4. Esta no tiene sentido
A2. Está mal. Esto está mal
A. Pero hombre, lo que te pregunta si tienes sentido es esto
A2. ¿Esto o esto?
A. Esto
A2. Esto si que tiene sentido, pero la semántica digamos
A3. Que si tiene sentido es que si esto es correcto o no es correcto lo que dice
A. No no, que si tiene sentido el reparto que te ponen ahí..
A3. ¡Ah!, vale, vale
A2. ¿Y este?
A3. Este no
A. Este no existe
A3. Ya lo pone
A1. Pero el de arriba si que tiene sentido
A. Tiene sentido pero está mal expresado
A4. Pone que no tiene sentido
A1. Entonces, esto no es
A3. Aquí tiene que poner un si
A2. Esto no tiene sentido.
A. Si que tiene sentido
A3. Si que tiene sentido
A1. Que si, no ves que él dice que no tiene sentido. Osea, sabemos que tiene sentido, pero este pone que no tiene sentido y luego lo explica
A. ¿Lo entiendes?
A2. No tiene sentido
A. Sí que tiene
A4. Dice que no tiene sentido y lo justifica haciendo esto ..
A2. Claro, que es lo que hemos dicho.

# ANEXO IV.3.

Control de las actividades y tareas realizadas los alumnos en las sesiones de clase.

| Nº ALUMNO 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | TAREAS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P.I** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F1.1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F1-3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-2** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-3** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-4** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-5** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F2** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **F3** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **F4-1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **F4-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C2-1** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C2-2** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C2-3** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-3** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-4** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-2** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-4** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F5-1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F5-2** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F6-1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F6-2** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F6-3** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C6-1** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C6-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-2** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-3** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **P. FINAL** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | |
| **Tot.(1)** | **26** | **8** | **22** | **24** | **22** | **6** | **35** | **34** | **15** | **36** | **36** | **35** |
| **%** | **70** | **22** | **59** | **65** | **59** | **16** | **95** | **92** | **41** | **97** | **97** | **95** |

1 indica que realizó la tarea; 0 indica que la tarea no fue realizada

| Nº ALUMNO 13 | 14 | 15 | 15a | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | TAREAS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P.I** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F1.1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F1-3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-2** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-5** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F2** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F3** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F4-1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F4-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C2-1** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C2-2** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C2-3** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C3-4** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-3** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-4** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F5-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F5-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-3** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F6-1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **F6-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **F6-3** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **C6-1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **C6-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-3** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **P. FINAL** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | |
| **Tot.(1)** | **11** | **1** | **37** | **23** | **33** | **24** | **30** | **23** | **27** | **37** | **33** | **37** |
| **%** | **30** | **3** | **100** | **62** | **89** | **65** | **81** | **62** | **73** | **100** | **89** | **100** |

1 indica que realizó la tarea; 0 indica que la tarea no fue realizada

| Nº ALUMNO 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | TAREAS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P.I** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **F1.1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F1-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| **C1-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-4** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C1-5** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F2** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F3** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F4-1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **F4-2** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C2-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **C2-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **C2-3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **C3-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **C3-2** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **C3-3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **C3-4** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C4-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-2** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **C4-4** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **F5-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F5-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C5-1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C5-3** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F6-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F6-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F6-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C6-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C6-2** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C7-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **C7-3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **P. FINAL** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **Tot.(1)** | **32** | **3** | **21** | **35** | **29** | **30** | **10** | **28** | **15** | **20** | **34** | **34** |
| **%** | **86** | **8** | **57** | **95** | **78** | **81** | **27** | **76** | **41** | **54** | **92** | **92** |

1 indica que realizó la tarea; 0 indica que la tarea no fue realizada

| Nº ALUMNO 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | TAREAS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P.I** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **F1.1** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **F1-3** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C1-1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C1-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C1-3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C1-4** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C1-5** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **F2** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **F3** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **F4-1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **F4-2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **C2-1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C2-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C2-3** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C3-1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C3-2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C3-3** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C3-4** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C4-1** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C4-2** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **C4-3** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C4-4** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **F5-1** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **F5-2** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C5-1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C5-2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C5-3** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **F6-1** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **F6-2** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **F6-3** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C6-1** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C6-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C7-1** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C7-2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **C7-3** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **P. FINAL** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | |
| **Tot.(1)** | **23** | **23** | **36** | **24** | **17** | **20** | **28** | **29** | **6** | **1** | **33** | **15** |
| **%** | **62** | **62** | **97** | **65** | **46** | **54** | **76** | **78** | **16** | **3** | **89** | **41** |

1 indica que realizó la tarea; 0 indica que la tarea no fue realizada

| Nº ALUMNO<br>TAREAS | 48 | 49 | 49a | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | TOTAL Alumnos/tarea |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P.I** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **46** |
| **F1.1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | **33** |
| **F1-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **39** |
| **C1-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **42** |
| **C1-2** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **42** |
| **C1-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **42** |
| **C1-4** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **45** |
| **C1-5** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **45** |
| **F2** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | **29** |
| **F3** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | **32** |
| **F4-1** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **23** |
| **F4-2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **45** |
| **C2-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | **33** |
| **C2-2** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | **33** |
| **C2-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **31** |
| **C3-1** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **44** |
| **C3-2** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **41** |
| **C3-3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **38** |
| **C3-4** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **36** |
| **C4-1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **41** |
| **C4-2** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **39** |
| **C4-3** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **39** |
| **C4-4** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **40** |
| **F5-1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **27** |
| **F5-2** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **27** |
| **C5-1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **38** |
| **C5-2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **39** |
| **C5-3** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **37** |
| **F6-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **24** |
| **F6-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **29** |
| **F6-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **29** |
| **C6-1** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **29** |
| **C6-2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **34** |
| **C7-1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **32** |
| **C7-2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **36** |
| **C7-3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **35** |
| **P. FINAL** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | **37** |
| | | | | | | | | | |
| **Tot.(1)** | **28** | **17** | **11** | **36** | **34** | **14** | **29** | **1** | |
| **%** | **75** | **46** | **30** | **97** | **92** | **38** | **78** | **3** | |

1 indica que realizó la tarea; 0 indica que la tarea no fue realizada

# ANEXO V.1

Resultados de las Cuestiones Específicas de Investigación

**Anexo V.1.0. Resultados de la Cuestión de Investigación 1.Tareas 1 y 2**

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.I.1, CEI.I.2, CEI.I.2, CEI.II.1, CEI.II.2, CEI.II.3, CEI.III.1, CEI.III.2 y CEI.III.3, respectivamente)

| | R. I. | Ele. | Rep. | Equiv | Justific | Simboliz | Orden | Simboliz | Intercalar |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 6 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 7 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 8 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 10 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 12 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 16 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 17 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 18 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| 20 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 21 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 22 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 23 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 24 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 27 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| 28 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 29 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 31 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 32 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 33 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 34 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 35 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 36 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 38 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 39 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| 40 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 41 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 42 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 43 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 46 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 47 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 48 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 50 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 51 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 53 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| **TOT** | **44** | **44** | **44** | **44** | **44** | **44** | **44** | **44** | **44** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

**Anexo V.1.1. Resultados de la Cuestión de Investigación 1. Tareas 3 y 4**
(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.IV.1, CEI.IV.2, CEI.IV.3, CEI.V.1, CEI.V.2, CEI.V.3, CEI.V.2, CEI.V.4 y CEI.V.5, respectivamente)

| | Signific. | Resulta | Simbol | Sig. Pro | Resulta | Simboliz | Sig. Div | Resulta | Simboli |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 7 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| 8 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| 9 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 10 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 11 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 12 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 15 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 16 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 17 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 18 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 19 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 20 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 21 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 22 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 23 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 24 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 27 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 28 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 29 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 31 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 32 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 33 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 34 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 35 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 36 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 37 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 38 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 39 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 40 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 41 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 42 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 43 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 46 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 47 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 48 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 50 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 51 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 52 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 53 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **TOT** | **42** | **42** | **42** | **47** | **47** | **47** | **47** | **47** | **47** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

**Anexo V.1.2. Resultados de la Cuestión de Investigación 1. Tareas 5**

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.V.1, CEI.V.2, CEI.V.3, CEI.V.4, CEI.V.5 y CEI.V.6, respectivamente)

| | Sig. Pro | Resulta | Simbol | Sig. Div | Resulta | Simboliz |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 6 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 7 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 9 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 10 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 11 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 12 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 15 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 16 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 17 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 18 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 19 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 20 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 21 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 22 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 23 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 24 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 26 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 27 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 28 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 29 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 31 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 32 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 33 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 34 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 36 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 38 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 39 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 40 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 41 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 42 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 43 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 46 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 47 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 48 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 50 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 51 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 52 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 53 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **TOT** | **43** | **43** | **43** | **43** | **43** | **43** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

## Anexo V.1.3. Resultados de la Cuestión de Investigación 2. Tar. 1 y 2

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.VII.1.1, CEI.VII.1.2, CEI.VII.1.3, CEI.VII.1.4, CEI.VII.2, CEI.VII.3, CEI.VII.4 y CEI.VII.5, respectivamente)

| | 3 : 3 | 0 : 5 | 7 : 0 | 0 : 0 | Genaral. | Finitud | Unicidad | Rel Denm. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 10 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 12 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 23 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 24 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 26 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 |
| 27 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 28 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 29 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 31 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 32 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 33 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 35 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 38 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 39 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 41 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 46 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 48 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| 50 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 51 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 52 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 53 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| **TOT** | **35** | **35** | **35** | **35** | **35** | **36** | **36** | **36** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

**Anexo V.1.4. Resultados de la Cuestión de Investigación 2. Tareas 3**

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.VII.6.1, CEI.VII.6.2 y CEI.VII.6.3, respectivamente)

| | apartado a) | aparart. b) | aparart. b) |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 3 |
| 7 | 3 | 1 | 2 |
| 8 | 3 | 2 | 3 |
| 10 | 1 | 3 | 1 |
| 11 | 2 | 3 | 1 |
| 12 | 3 | 2 | 3 |
| 13 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 3 | 3 | 3 |
| 16 | 1 | 1 | 1 |
| 18 | 1 | 3 | 1 |
| 20 | 2 | 1 | 2 |
| 21 | 1 | 2 | 1 |
| 22 | 3 | 3 | 3 |
| 23 | 1 | 2 | 3 |
| 24 | 1 | 1 | 2 |
| 26 | 1 | 1 | 1 |
| 27 | 1 | 3 | 3 |
| 28 | 1 | 3 | 3 |
| 29 | 1 | 3 | 3 |
| 31 | 2 | 3 | 3 |
| 32 | 1 | 1 | 1 |
| 33 | 3 | 2 | 3 |
| 35 | 1 | 1 | 1 |
| 38 | 1 | 1 | 3 |
| 39 | 3 | 3 | 1 |
| 41 | 3 | 2 | 3 |
| 46 | 1 | 3 | 2 |
| 48 | 1 | 3 | 1 |
| 50 | 3 | 3 | 3 |
| 51 | 1 | 1 | 1 |
| **TOT** | **31** | **31** | **31** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

## Anexo V.1.5. Resultados de la Cuestión de Investigación 3.
## Tareas 1, 2, 3 y 4

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.VIII.1, CEI.VIII.2, CEI.IX.1, CEI.IX.2, CEI.XI.1, CEI.XI.2, CEI.XI.3, CEI.V.4 y CEI.V.5, respectivamente)

| | Mayor | Menor | Anterior | Siguiente | Sig Suma | Cal suma | nx R.P.U | R.P.U.:n | a/b x R.P.U. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 10 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 11 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 |
| 12 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 15 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 15a | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 16 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 17 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 18 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 20 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 21 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 22 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 23 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 24 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 27 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 28 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 29 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 30 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 31 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 32 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 34 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 35 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 36 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 37 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 38 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 39 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 40 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 41 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 42 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 43 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 46 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 47 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| 48 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 49 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 49a | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 1 |
| 50 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 51 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 52 | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 53 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **TOT** | **44** | **43** | **41** | **41** | **38** | **38** | **36** | **36** | **36** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas.

**Anexo V.1.6. Resultados de la Cuestión de Investigación 4. Tareas 1, 2, 3 y 4**

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.XI.1, CEI.XI.2, CEI.XI.3, CEI.XI.4, CEI.XI.5, CEI.XI.6 y CEI.XI.7, respectivamente)

| | Equivale. | Unicidad | Signif. 1 | Relaci. 1 | Signif 2 | Relac. 2 | No igual |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 7 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 8 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 9 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 11 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 12 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 15 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 15a | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 16 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 18 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 19 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 20 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 21 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 22 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 23 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 24 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 27 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 |
| 29 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 30 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 31 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 32 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 |
| 33 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 34 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 35 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 36 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 37 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 38 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 39 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 |
| 40 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 41 | 2 | 2 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 42 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 43 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 44 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 46 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 47 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 48 | 2 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 49 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 49a | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 51 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 52 | 2 | 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 53 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| **TOT** | **41** | **41** | **40** | **40** | **41** | **39** | **40** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

**Anexo V.1.7. Resultados de la Cuestión de Investigación 5. Tarea 1**
(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.XII.1, CEI.XII.2, CEI.XII.3, CEI.XI4.4 y CEI.XII.5, respectivamente)

Se ponen en negrita los resultados de esta tarea y en tipo normal los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas similares propuestas en la Cuestión de Investigación 2

| | 3 : 3 | 0 : 5 | 7 : 0 | 0 : 0 | Genaral. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/**1** | 2/**3** | 1/**1** | 1/**3** | 3/**2** |
| 3 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**1** |
| 4 | **1** | **3** | **1** | **1** | **3** |
| 5 | 1/**1** | 2/**3** | 1/**1** | 1/**1** | 3/**2** |
| 7 | 1/**1** | 1/**3** | 1/**3** | 1/**1** | 2/**2** |
| 8 | 1/**1** | 3/**3** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 10 | 2/**1** | 2/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**1** |
| 11 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 12 | 1/**1** | 2/**3** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**3** |
| 15 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** |
| 15a | **1** | **3** | **1** | **1** | **2** |
| 16 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**2** | 2/**2** |
| 17 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**1** |
| 18 | **1** | **1** | **1** | **2** | **2** |
| 19 | **1** | **3** | **1** | **1** | **2** |
| 20 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 21 | 1/**1** | 1/**3** | 1/**1** | 3/**1** | 2/**2** |
| 22 | 1/**1** | 1/**3** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 23 | 1/**1** | 2/**3** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 27 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 3/**2** |
| 28 | 1/**1** | 3/**2** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 31 | 1/**1** | 1/**3** | 1/**2** | 3/**2** | 2/**3** |
| 33 | 1/**1** | 1/**3** | 3/**1** | 3/**1** | 2/**2** |
| 34 | **1** | **3** | **1** | **1** | **2** |
| 35 | 1/**1** | 1/**3** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 36 | **1** | **3** | **1** | **2** | **1** |
| 37 | **1** | **3** | **1** | **1** | **2** |
| 38 | 1/**1** | 2/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**1** |
| 39 | 1/**1** | 2/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**1** |
| 42 | **1** | **3** | **1** | **1** | **2** |
| 43 | **1** | **3** | **1** | **1** | **2** |
| 46 | 1/**1** | 2/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 2/**2** |
| 48 | 1/**1** | 2/**3** | 3/**2** | 3/**1** | 2/**2** |
| 49 | **1** | **3** | **1** | **1** | **3** |
| 49a | **1** | **1** | **1** | **1** | **3** |
| 50 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** |
| 51 | 1/**1** | 1/**1** | 1/**1** | 1/**2** | 2/**2** |
| 53 | **1** | **1** | **1** | **2** | **2** |
| **TOT** | **38** | **38** | **38** | **38** | **38** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

**Anexo V.1.8. Resultados de la Cuestión de Investigación 5. Tareas 2 y 3**

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.XII.3.1, CEI.XII.3.2, CEI.XII.4.1, CEI.XII.4.2 y CEI.XII.4.3, respectivamente)

| | Infinitud | Caracteriz. | apartad. a) | apartad. b) | apartad. c) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 10 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 11 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 15 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 15a | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 16 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 17 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 18 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 19 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 20 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 21 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 22 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 23 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| 26 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 27 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 28 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 31 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 34 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 35 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 36 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 37 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 38 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 39 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 42 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 43 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 46 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 48 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 49 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 49a | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 50 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 51 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 53 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| **TOT** | **39** | **39** | **37** | **37** | **37** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

**Anexo V.1.9. Resultados de la Cuestión de Investigación 6. Tareas 1 y 2**

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.XIII.1, CEI.XIII.2, CEI.XIII.3, CEI.XIII.4, CEI.XIII.5 y CEI.XIII.6, respectivamente)

| | Signif Suma | Cálculo Suma | Signif. Prod | Cálculo Prod | Signif Cocien | Cálculo Co. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 8 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 10 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 11 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 12 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 15 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 15a | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 16 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 17 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 18 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 20 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 22 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 23 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 24 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 27 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 28 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 29 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 31 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 33 | 0 | 0 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 34 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 35 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 37 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 38 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 39 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| 41 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 42 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 43 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 46 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 48 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 49a | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 50 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 51 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 53 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| **TOT** | **29** | **29** | **34** | **34** | **34** | **34** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

**Anexo V.1.10. Resultados de la Cuestión de Investigación 7. Tarea 1**

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.XIV.1, CEI.XIV.2, CEI.XIV.3 CEI.XIV.4, CEI.XV.1, CEI.XV.2, CEI.XV.3, CEI.XV.4 y CEI.XV.5, respectivamente)

| | 12 | 6,23 | 0,9999... | $9{,}814\overline{37}$ | $\frac{35}{5}$ | $\frac{7}{7}$ | $\frac{2}{0}$ | $\frac{0}{8}$ | $\frac{0}{0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 11 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 15 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15a | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 17 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 19 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 22 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 23 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 27 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 28 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 29 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 31 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 34 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 35 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 37 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 38 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 41 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 46 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 50 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 51 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 53 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| **TOT** | **32** | **32** | **32** | **32** | **32** | **32** | **32** | **32** | **32** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

## Anexo V.1.11. Resultados de la Cuestión de Investigación 7. Tareas 2 y 3

(cada columna corresponde a las Cuestiones de Investigación CEI.XVI.1, CEI.XVI.2, CEI.XVII.1, CEI.XVII.2, CEI.XVII.3.1, CEI.XVII.3.2, CEI.XVII.4.1, CEI.XVII.4.2, CEI.XVII.5 y CEI.XVII.6, respectivamente)

a) Comparar $3{,}5$ y $3{,}\overline{5}$ b) Comparar $4{,}\overline{27}$ y $4{,}\overline{28}$

| | a) | b) | Signific resta | Cálculo resta | Signific. prod. deci. | Cálculo prod. deci. | Signifc prod. perd | Cálculo prod. peri | Signific cociente | Cálculo cociente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 7 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 8 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 10 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 11 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 12 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 15 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 15a | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 16 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 17 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 18 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 19 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 21 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| 22 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 23 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 24 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 26 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 27 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 28 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 33 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| 34 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 35 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 36 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 37 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 38 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 39 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 41 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 42 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| 43 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 48 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 |
| 49a | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 51 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 53 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| **TOT** | **36** | **36** | **35** | **35** | **35** | **35** | **35** | **35** | **35** | **35** |

0 indica que el alumno no realizó las tareas

# ANEXO V.2

Texto de la prueba final

## EL CURRICULUM DE MATEMATICAS EN EDUCACION PRIMARIA

6 de Febrero de 1998

ALUMNO: ______________________________

**1**.- a) Se presentan las siguientes definiciones de reparto igualitario. Para cada una de las ellas hay que dar una respuesta **justificada** sobre su veracidad o falsedad

I) **a:b** significa que tenemos **a** tortillas para **b** individuos, realizamos el reparto y les toca a cada una de las **b** personas **a** tortillas.

II) **a:b** significa que tenemos **a** tortillas para **b** individuos, realizamos el reparto y les toca a cada una de las **b** personas **a** partes de tortilla.

III) **a:b** es la cantidad de tortilla que recibe el individuo **b** que participa en un reparto de **a** tortillas.

IV) **a:b** significa que dividimos la unidad en **b** partes iguales y cada uno de los individuos se llevan **a** partes de unidad.

b) A continuación aparecen escritas las respuestas que dos alumnos dan a la pregunta:

*¿Cuánto reciben 4 personas que se reparten 0 tortillas?*

Alumno A: Como no hay tortilla para repartir no puede hacerse el reparto. No tiene sentido y, por lo tanto, es cero.

Alumno B: No puede saberse, porque no puedo fraccionar 0 tortillas, y para repartir necesito fraccionar previamente.

Para cada una de las respuestas, se pide:

- a) Indicar si la respuesta es correcta o no.
- b) Realizar un juicio crítico de los razonamientos de los alumnos.

**2**.- Supuesto que a < b, vamos a cuantificar el resultado del reparto igualitario a:b, al aplicar el criterio de «la mayor parte» realizando el reparto en sólo DOS fases.

Si en la primera fase ha sido necesario fraccionar la unidad de tortilla en $n_1$ partes iguales, siendo $n_1$ + 10, se pregunta <u>para esta primera fase</u>:

a.1) ¿De qué tamaño son los partes repartidas?

a.2) ¿Cuántas de esas partes recibe cada individuo?

a.3) ¿Cuántas partes quedan por repartir y de qué tamaño son?.

a.4) ¿Qué relación existe entre $n_1$, a y b?

Si en la segunda y última fase ha sido necesario fraccionar la unidad de tortilla en $n_2$ partes iguales. Se pregunta <u>para esta segunda fase</u>:

a.5) ¿De qué tamaño son los partes repartidas?

a.6) ¿Cuántas de esas partes recibe cada individuo?

a.7) ¿Cuántas partes quedan por repartir?. ¿De qué tamaño son?.

Además, se pide:

a.8) Indicar qué relación existe entre $n_1$ y $n_2$. Y justificar tal relación.

a.9) Simbolizar el reparto mediante la representación polinómica unitaria.

**3**.- a) En el sistema de representación polinómica decimal, demostrar que el número de partes iguales que recibe cada individuo en cada una de las fases del reparto está comprendido entre 0 y 9, incluidos ambos valores.

b) A continuación aparecen escritas las respuestas que dos alumnos dan a la pregunta:

*¿Qué significa que la representación polinómica decimal de un reparto sea infinita?*

Alumno A: Que un mismo individuo participa en infinitos repartos
Alumno B: Que cada uno de los participantes recibe una cantidad infinita de tortilla puesto que hay infinitos sumandos
Alumno C: No se puede saber lo que recibe cada uno de los participantes porque el resultado tiene infinitos sumandos

Para cada una de las respuestas, se pide:

- a) Indicar si la respuesta es correcta o no.
- b) Realizar un juicio crítico de los razonamientos de los alumnos.

**4**.- Dadas las siguientes representaciones polinómicas decimales

A: $3+6\left[\frac{1}{10^2}\right]+9\left[\frac{1}{10^3}\right]$

B: $3+6\left[\frac{1}{10^2}\right]+8\left[\frac{1}{10^3}\right]+6\left[\frac{1}{10^4}\right]+8\left[\frac{1}{10^6}\right]+...$

Se pide:

a) Encontrar los repartos de los que proceden cada una de ellas.

b) Ordenar los repartos A y B. Justificar la respuesta.

c) Justificar la existencia de infinitas representaciones polinómicas decimales entre las de los los repartos A y B

**5**.- Para cada una de las operaciones que se proponen:

a) $0,3\overline{814}+9,6\overline{29}$ b) $3,0\overline{68}:3$

Se pide:

a) Enuncia un problema cuya respuesta se obtiene con la operación anterior

b) Obtener el resultado de dicha operación

c) Justificar la forma de forma de proceder en el apartado anterior

## ANEXO V.3.

Resultados de la prueba final por alumno, de acuerdo con los criterios establecidos para las unidades de análisis de comprensión del contenido

| | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | III.1 | III.2 | IV.1 | IV.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3a | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 8 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| 11 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 12 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15a | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 16 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 17 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 18 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 21 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 22 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 23 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 24 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 26 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 27 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 28 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 29 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 31 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 34 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 35 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 38 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 39 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 42 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 43 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 44 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 46 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| 48 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 51 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 52 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 53 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| **TOT** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** |

| | IV.3 | IV.4 | V.1 | V.2 | VI.1 | VI.2 | VII.1 | VII.2 | VII.3 | VII.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| 3a | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 11 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 15 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 15a | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| 16 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 17 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 18 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 23 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 24 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 26 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 27 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 28 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 29 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 31 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 34 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 35 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 38 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| 39 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 42 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 43 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 44 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 46 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 48 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 51 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 52 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 53 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **TOT** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** | **37** |

# ANEXO V.4

Puntuaciones obtenidas por los alumnos en cada una de las Unidades de Análisis de la PRUEBA FINAL, y de acuerdo con los siguientes criterios

**1.- Da argumentos correctos o probables.**

**2.- Da argumentos correctos aunque incompletos**

**3.- Da argumentos erróneos o no da argumentos.**

CCF.I: interpretación de la acción de repartir ; CCF.II: interpretación del 0 en repartos; CCF.III: interpretación de los elementos en la representación polinómica unitaria; CCF.IV: relaciones semánticas en la representación polinómica decimal; CCF.V: reconstrucción del reparto; CCF.VI: orden y densidad en representaciones polinómicas decimales; CCF.VII: interpretación de operaciones simbolizadas con notación decimal.

| ***Alumno*** | ***CCF.I*** | ***CCF.II*** | ***CCF.III*** | ***CCF.IV*** | ***CCF.V*** | ***CCF.VI*** | ***CCF.VII*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| *2* | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| *3* | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| *3a* | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| *5* | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| ***7*** | **1** | **2** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| ***8*** | **2** | **1** | **1** | **1** | **2** | **1** | **1** |
| ***10*** | **2** | **2** | **1** | **2** | **3** | **3** | **2** |
| ***11*** | **2** | **2** | **2** | **2** | **2** | **2** | **1** |
| ***12*** | **2** | **1** | **2** | **2** | **1** | **1** | **1** |
| ***15*** | **2** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| *15a* | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| ***16*** | **2** | **1** | **2** | **2** | **1** | **2** | **3** |
| *17* | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ***18*** | **3** | **1** | **2** | **1** | **3** | **1** | **1** |
| *19* | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| ***21*** | **2** | **2** | **1** | **1** | **1** | **3** | **1** |
| ***22*** | **2** | **2** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| ***23*** | **3** | **1** | **1** | **2** | **3** | **3** | **2** |
| ***24*** | **3** | **2** | **3** | **3** | **1** | **3** | **2** |
| *26* | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| ***27*** | **1** | **1** | **1** | **2** | **3** | **1** | **1** |
| ***28*** | **2** | **2** | **3** | **2** | **3** | **1** | **3** |
| ***29*** | **2** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| ***31*** | **1** | **2** | **2** | **2** | **3** | **1** | **1** |
| ***34*** | **1** | **1** | **1** | **2** | **1** | **1** | **1** |
| ***35*** | **3** | **1** | **1** | **1** | **1** | **3** | **1** |
| ***38*** | **2** | **1** | **1** | **1** | **1** | **3** | **3** |
| *39* | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| ***42*** | **1** | **3** | **1** | **1** | **1** | **2** | **1** |
| ***43*** | **3** | **1** | **2** | **3** | **1** | **2** | **3** |
| *44* | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| ***46*** | **2** | **2** | **1** | **2** | **1** | **2** | **1** |
| ***48*** | **1** | **1** | **1** | **1** | **2** | **1** | **3** |
| ***51*** | **3** | **1** | **2** | **2** | **1** | **1** | **1** |
| *52* | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| ***53*** | **2** | **2** | **3** | **2** | **3** | **3** | **2** |
| ***TOTAL*** | **17** | **17** | **17** | **17** | **17** | **17** | **17** |

En negrita figuran los alumnos que asistieron al menos al 75% de las sesiones

# ANEXO VI.1: ENTREVISTA CON EL ALUMNO Nº 34

**TAREA 1**

P: ¿Tu crees que está bien?
A: No
P: ¿Hay algún error?
A: Si
P: ¿Donde?
A: Para que la respuesta fuera correcta tendrían que tener el mismo número de personas. Entonces .. bueno, y aun así
P: ¿Qué es lo que está mal?
A: El... Que no, que no. Simplemente pues que este crío solo se ha fijado en que a mayor número de tortillas puede tocar mayor parte y no se piensa en las personas entre las que se reparte.
P: ¿Tu crees que ese error es importante?
A: Si, porque solo se fija en una cosa
P: ¿El chaval se merece alguna explicación?
A: Si
P : ¿Si?, o pasarias a otra actividad; ¿tú que harías?
A: Yo empezaría desde el principio
P: Bien. Yo te ofrezco 3 posibilidades que tienes para utilizar, ¿cuál de ellas eliges?
P: Una y solo una de esas tres respuestas
A: ¿Solo una respuesta de estas?
P: ¿Cuál elegirÍas de esas tres?
A: Bueno, si tengo que elegir, elegiría esta (señala la explicación II); pero tampoco. Esta pero, .. si acaso poniendo las dos representaciones juntas, una encima de otra, para que vea en cual hay más.
P: ¿Por qué esta no la elegirías? (señala la explicación I)
A: Porque no le vuelve a explicar el concepto. En esta se basa, más o menos, en el concepto inicial de lo que se reparte: la unidad y los trozos que se cogen (señala la explicación II); y en esta (señala la explicación I) te da simplemente una fórmula y si el crío no ha entendido lo que es el concepto, aunque le des una fórmula tampoco lo va a entender
P: ¿Y esta tercera?
A: Es que es lo mismo que esta (señala la explicación I), lo que pasa que cambiando los números. Esta si (señala la explicación III), se puede entender también mejor que esta primera, pero le estás planteando el mismo problema, o parecido; el problema es parecido, pero con otros números
P: Muy bien. Pasamos a otra.

**TAREA 2**

P: A ver, esto es lo del profesor y esto lo del crío
A: Está mal.
P: Entonces, está mal. ¿Y dónde está mal?, ¿por qué está mal?
A: Pues es lo mismo, que no sabe sumar, que está... A ver, espera. Por que ... la suma está mal hecha, eso está clarísimo... Hombre, es que el concepto de fracción lo tiene claro, eso sí
P: La idea de suma ¿la tiene clara?
A: No, la idea de suma no desde luego. No piensa que tiene que tener el mismo denominador... Piensa sí, no es juntar las tortillas y las personas y saber cuanto recibe una persona, pero si es saber cuanto recibe una persona que participa en dos repartos...
P: Tú dices: la idea de fracción la tiene
A: La idea de fracción sí
P: Entonces, aquí explicaría en qué consiste la suma
A: Si
P: ¿Y esa idea está bien?
A: No, no porque no juntas las tortillas y las personas, no las juntas.
P: ¿Eso, por qué no se hace?, ¿porque tú recuerdas que así no se hacían las operaciones con fracciones?
A: Si.
P: Pero dice que si hubiese habido una persona en los dos repartos, ¿la suma no es un poco esa idea?
A: Pero es que no juntas las tortillas y las personas. ... Al sumar lo piensas en una cantidad que le corresponderÍa a una persona que participa en los dos repartos por separado. Si, si es cuanto recibe una persona que participa en los dos repartos por separado, pero no es juntar las tortillas o juntar las personas. Lo que significa la suma si lo entiende, pero hacer la

suma no sabe

P: A ver, pensemos aquí: supongamos que la persona participa en este reparto y habrá 2 tortillas para 3; luego pensamos que se va a otro sitio que reparten 4 tortillas para 5, pues bien, ¿si lo hubiesen hecho en un solo reparto?

A: Bien, pero si lo piensa como trozo de tortilla, entonces es cuando puede ... En vez de pensarlo como reparto que lo piense como, que vea la fracción como trozo de tortilla para poder sumarlas. Es un trozo de tortilla que de 3 partes coge 2, de una tortilla que de 3 partes coge 2; de otra tortilla que de 5 parte coge 4 y entonces lo suma. Pero claro, también podría decir hay 8 partes y coger 6 ... si le da por hacerlo así; pero si lo mira como trozos de tortilla y los junta ...

P: Osea, que como reparto no le funciona bien

A: Como reparto no

P: Osea, que el tendría que ver que esto es que se reparten 2 tortillas entre 3; no lo podría ver así, sino que se ha llevado 2 trozos

A: Sí, 2 trozos. Es que si no siempre va a hacer lo mismo, siempre va a sumar las tortillas y siempre va a sumar las personas.

P: Y entonces eso, ¿qué habría que hacer?, ¿habría que explicárselo?

A: Sí claro. Explicar desde el principio, explicar el concepto de suma supongo

P: Yo te ofrezco tres y, como antes, tu solo puedes elegir una.

P: A ver, ¿la primera por qué no la cogerÍas?

A: Por que le explica otra vez la forma de hacerlo pero no le explica el significado de igualar los denominadores ....

P: ¿Por qué no cogerías la segunda?

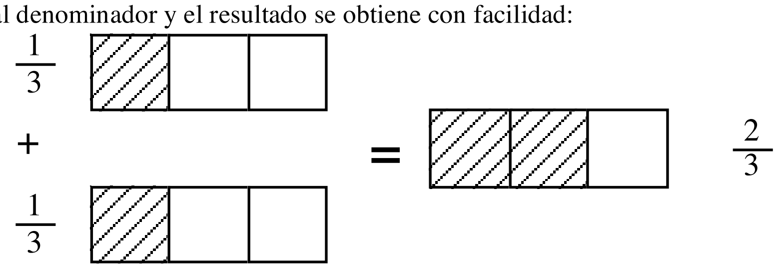
A: Porque no le da la solución, no le indica la suma.

P: ¿Qué ocurre con la tercera?

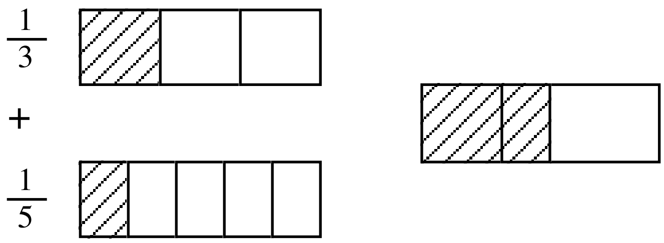
A: Le explica otras cosas, pero no le explica la suma

La grabación se interrumpe, pero de las notas del entrevistador y de las producciones del estudiante se deduce que el entrevistado propone una explicación al niño que consistiría en **una fusión de las explicaciones III y II**, en el siguiente modo:

Con ayuda de los gráficos se hace una explicación sobre la necesidad de utilizar el mismo denominador en las dos fracciones. El estudiante indica que en primer lugar se sumarían fracciones unitarias de igual denominador y el resultado se obtiene con facilidad:




En segundo lugar se justificaría la necesidad de buscar un denominador común, pues no se pueden sumar sumar fracciones de diferente denominador, ya que no se sabe que parte de unidad se está considerando:




En el gráfico se muestra la imposibilidad de saber la parte de unidad que está rayada, por lo que es necesario que los trozos sean del mismo tamaño.

Tras estas explicaciones el futuro maestro indica que explicaría al niño la forma de sumar las dos fracciones propuestas, utilizando la explicación III y los gráficos de la explicación II.

**TAREA 3**

El estudiante indica que va a hacerlo en un papel porque no sigue bien el desarrollo del alumno. En un folio escribe

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + (3:7)\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + (2:7)\left[\frac{1}{3}\right]\right\}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + (2:7)\left[\frac{1}{6}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \left\{ \frac{1}{4} + (1:7) \left[ \frac{1}{4} \right] \right\} \left[ \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{7} \left[ \frac{1}{24} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{168}$$

Este resultado lo utiliza el estudiante para revisar el trabajo del niño, comparando término a término lo que ha escrito el futuro maestro y la respuesta que da el niño.

A: Está mal
P: ¿Dónde está mal?
A: Pues, ya está mal en la primera fase que hace; pero no dice que sobran dos trozos para repartir
P: La primera fase es la de 1/2
A: Ah, si, vale. 1/2 de tortilla... si pero no dice que son de tamaño 1/2
P: Bueno
A: La segunda, dice .... aquí en el 2 trozos no dice que es de tamaño 1/6. Lo que pasa es que lo dice luego
P: Y aquí también lo dice ¿no?
A: Pero, 1/4 de tortillas enteras, pero no tiene en cuenta que el cuarto no es de tamaño 1/3 sino de 1/6, que se lo ha dejado por aquí. Es decir, 1/6 de tortilla y sobran 2 trozos de tamaño 1/6, porque serán 1/3 de 1/2, 1/6. O me he confundido yo, vamos.
P: Osea que tiene mal la tercera fase
A: Es que con eso ya arrastra todo, porque se deja la parte inicial; que cada vez coge menos trozo de tortilla, pero no solo en las partes que le quedan sino en todas; se deja que el tercio que coge de los ... Dice en la segunda fase hago el reparto 3 entre 7 y me sale 1/3, pero no de tortilla entera sino de tamaño 1/6, vale; recibe 1/6 de tortilla y sobran 2 trozos, pero no dice que sobran 2 trozos que son también de tamaño 1/3, que esos trozos de tamaño 1/3 son de tamaño 1/2.
P: Osea, que hace referencia solo ...
A: Solo al inmediatamente anterior, al tamaño anterior
P: Luego ¿también lo hace?
A: Es que solo toma el tamaño que le ha salido antes, el tamaño de la misma fase en la que está
P: ¿Eso es un error importante?
A: Pues si, no se si es muy importante pero lo tiene
P: Olvidar el tamaño desde el principio, ¿es importante?
A: Si, porque si no lo llevas arrastrando desde el principio cada vez coges un trozo distinto, o te dejas trozos por ahí, o coges más de lo que hay
P: Si hay un error, ¿le darías una explicación
A: Si
P: Te entrego 3 explicaciones posibles y tu eliges
A: La I no la cogería
P: ¿Por qué?
A: Porque no le dice nada aquí, no le explica nada, simplemente le está dando un criterio que le tiene que salir en el resultado, pero no le explica nada del proceso.
P: La II
A: La II. Haría una mezcla entre la II y la III, porque así no me gusta, haría una mezcla entre las dos
P: La II sola ¿por qué no te serviría?
A: Porque si las mezclas las dos con esta le vas enseñando el dibujo y a la vez vas escribiendo el proceso con la III.
P: Osea, que tu crees que con el dibujo solo no sería suficiente.
A: No.
P: Habría que completarla. Y entonces, esta III si sigues ¿la tendrías que completar?
A: Habría que acabarla, claro.
P: Entonces le haces tú el trabajo.
A: Hacemos una mezcla de estas, o nos quedamos en las dos en la misma parte ...
P: ¿Pero tú serías partidaria de terminarla?
A: Si no les pongo más tareas no. Si no le voy a poner otra tarea después no. Si le voy a poner otra tarea después ..., bueno, si se deja así la tiene que acabar para ver si lo ha entendido del todo; pero si le pones una nueva para que ...
P: ¿Pero tú como lo irÍas haciendo?
A: Si. Tengo 5 tortillas las divido entre dos, cojo 1/2; pues entonces pongo el 1/2
P: Pero eso es lo que le pedía aquí (señala la explicación III), ¿no?.
A: Si, pero aquí no le pone aquí los trozos del tamaño de la tortilla. Aquí ves que es 1/8 pero

no ves que es 1/8 del 1/2, o mejor dicho 1/3 anterior de 1/2 anterior. Aquí simplemente ve que tiene 1/8, pero no ve que es del tamaño anterior

P: Esta flecha, ¿no le sería suficiente al crío?

A: Yo creo que no. Osea, si que ve que es de este trozo, pero si lo ve en un dibujo y lo tiene escrito yo creo que lo entiende mejor

P: Muy bien. Pasamos al siguiente.

**TAREA 4**

P: ¿Está bien?

A: A ver. El 0,5. Bueno, los resultados de la primera sí; la justificación ... hay que verlo como reparto, ¿no?, o ¿como división?

P: No indica nada. Considera lo que él hace

A: Es que mezcla reparto con una división, yo creo que simplemente dice ... Es que si hace la división yo creo que está bien, pero ......

P: En cada caso él justifica cómo lo ha obtenido y en que se basa. Vamos por partes, ¿el a) está bien?

A: El a) sí

P: La justificación que da no te convence

A: No. No porque está mezclando el reparto con el resultado del reparto por la forma decimal; bueno o con la división, que él lo dice. Ha hecho la división, la división le sale 0,5, y como sabe que es 0,5 pues las 5 son las décimas, pues sabe que son 5 décimas partes de la unidad. Yo creo que aquí hace una mezcla por meter lo del reparto

P: Vamos a ver si sigue igual en el caso b)

A: En el caso b) está mal porque no se puede hacer un reparto si no hay personas.

P: Y él, ¿qué dice?

A: Dice que como no hay personas no se puede repartir y por eso hay que poner 0, pero es que no hay que poner nada. Vamos, si no se puede hacer no se puede hacer. Si que ha puesto 0 porque no se puede hacer la división, sabe que no se puede hacer la división, pero si no se puede no se puede, ¿no?, no hay que poner 0.

P: Pasamos al caso c), ¿el resultado?

A: El resultado está bien. La parte a) la ve como reparto, reparte 1 tortilla entre 2 personas; pero la parte c) ya no la ve como reparto de 11 tortillas entre 3 personas, ¿no? ..., piensa en reparto pero no de la misma manera que en el a), cambia de idea ....

P: Dice ...

A: Si parte las tortillas en 3 trozos iguales, cada persona se lleva 11 de esos trozos; 11 trozos de tamaño 1/3 .... Este último está mal, la justificación del resultado está mal porque aquí no tiene claro el concepto; en el primero ve un reparto, un reparto de 1 tortilla entre 2 personas, pero en el segundo ve que ..., primero lo ve bien, que hay, .. bueno, no dice cuantas tortillas hay. Esta mezclando, yo creo que mezcla la explicación de la unitaria, bueno lo que sería la unitaria, bueno la unitaria tampoco.... mezcla dos cosas

P: Pero eso es en todos los casos, ¿hay un comportamiento igual en todos los casos, o no?

A: No

P: Osea, que en el primer caso se comporta de una manera

A: Si

P: El está pensando en un reparto

A: Sí, yo creo que entonces piensa en un reparto, hasta en dibujo, si te lo pones, ... pero luego ya pasa a la forma decimal, de la forma decimal sabe que tiene que dividirlo en 10 trozos y que al dividir en 10 trozos, en la tercera parte, como no dice las tortillas que hay pues tampoco sabe cuantos trozos de tortilla le salen,.. dice que reciben 500 trozos y ve algo periódico

P: Vamos a ver, él dice que las divide en 3 trozos; se supone que cada tortilla, porque luego dice que cada persona se lleva 11

A: Pero no dice ni cuántos trozos hay. No dice cuántas tortillas hay

P: No lo dice. Pero eso de que se llevan 11 trozos, ¿de donde ha sacado ese 11?

A: De la unitaria. Ah, ¿de donde ha sacado ese 11? Pues de los trozos, .., del concepto que se da inicialmente de fracción que es, sí, que tú divides la unidad en las partes

P: Lo divide en 3 partes, ¿eh?

A: Claro

P: Y se lleva 11. El dice que lo divide en 3 partes y ¿cómo se va a llevar 11?

A: Pues por eso, por las tortillas que hay. Lo dice así por el concepto inicial de fracción

P: Vale. Y luego dice que lo pasa a notación decimal y tal como lo justifica aquí ...

A: Es que él simplemente hace una división y luego de hacer la división; bueno, ya lo dice aquí, que lo único que ha hecho ha sido hacer la división; y luego de haber hecho la división lo intenta justificar ...

P: Y entonces al justificar se equivoca porque mezcla cosas

A: Si

P: En todos los casos

A: En el primero lo ha mezclado, pero no se si al ser más sencillo o al tener menos ... al ser el numerador menor que el denominador lo entiende mejor. Pero en la tercera se lía

P: Tú estás en que lo tiene mal, pero ¿qué tipo de error comete?, ¿cómo se podría clasificar? o ¿cómo lo dirías tú?

A: Bueno, quitando la b), el resultado está bien. Es el significado

P: El significado ¿de qué?

A: De la respuesta, de lo que el hace en la respuesta

P: ¿Sería el significado de la notación decimal? o ¿el significado del paso de la notación fraccionaria a la decimal? Porque tú has dicho es el significado de la respuesta; la respuesta es ésta, osea que él ¿lo que no acaba de interpretar es la notación decimal?

A: Si pasándolo de reparto normal a notación decimal. Es que él intenta hacer una mezcla, pero ...

P: ¿Tú crees que deberías explicarle algo a este chico?

A: Si, habría que explicarle algo pero no se el que, pero habría que explicarle algo. Al explicarle la representación polinómica decimal, pues puede que entendiese como se van dividiendo las tortillas, al igual que la unitaria, cómo se van dividiendo las tortillas, los trozos que salen, por lo de los infinitos trozos de tortilla, claro. Claro, pero es que entonces no sale cómo se repite ...

P: Pero entonces ¿ya no le haría falta esta tercera parte?; si tú le explicas la representación polinómica decimal ¿ya no le haría falta la división?

A: Si, si le haría falta. La división en sí la entiende. Pasar a notación decimal lo sabe porque hace la división y la hace bien, pero la justificación yo creo que se la inventa intentando justificarla con la representación ... Primero la intenta explicar con una representación digamos como la unitaria, pero a la hora de pasar a la decimal no sabe cómo.

P: Entonces, ¿en qué aspecto habría que incidir? Porque él lo que parece que hace bien es la división, ¿no?

A: Sí la división sabe hacerla

P: Entonces, ¿qué es lo que le falla?, ¿justificar el resultado?

A: ...

P: Porque esto es una técnica, él divide el numerador entre el denominador y lo que le salga, y ya está. ¿Eso parece que lo hace bien?

A: Sí

P: Cuando él falla es cuando quiere explicar lo que le ha salido; entonces, ¿qué sugerencia le harías tú?

A: Con dibujos y eso ...

P: Intentar, a partir de la fracción que sea un reparto verdadero, que al hacer el reparto le salga esto, ¿le va a salir el 0,5?

A: Si lo hace con la decimal sí.

P: ¿No le haría falta la división?

A: Si. Bueno falta, falta no le hace. Hombre si pone la división no entiende lo que hace, simplemente hace una división y ya está; pero si no pone la división la asociación ...

P: Entonces tú para decirle que 1/2 es igual a 0,5; él parece que no lo entiende eso, le salen los números y los pone, ¿qué tipo de justificación le podrías dar?

A: Es que aquí él mismo está intentando hacerlo con representación; si él se dibuja la tortilla y la divide en 10 partes ...

P: Osea que tú crees que si le ayudases con un gráfico lo vería.

A: No, yo creo que el gráfico es lo que se hace él.

P: Entonces, ¿cómo le podríamos ayudar a este muchachillo?

A: Muy mal ...

P: ¿Tú crees que se le puede dejar así? Como él ya sabe hacer la división

A: No porque es que no tiene sentido, porque saber dividir sí que tiene que saber; pero no entiende la fracción así

P: Vamos a ver si se puede retomar lo que él hace. El empieza considerando que la fracción es un reparto y lo tiene claro lo que se reparte y entre quien se reparte. Entonces dice que se lleva la mitad y dice que también se puede escribir; ese también se puede escribir ¿es lo que hay que aclarar?

A: Si, el paso de una a otra

P: Y ¿cómo le ayudarías tú?

A: Enseñándole la otra representación, la decimal
P: Entonces, cuando él dice que se lleva la mitad habría que hacer que la tortilla se divida en 10 partes, para que cada uno de ellos que se lleve 5 de esas partes
A: Si, bien, pero luego puede ver que el resultado que le salga de las dos maneras es el mismo, para que le de algo de sentido.
P: ¿Y eso cómo lo vería?
A: Haciéndolo
P: Haciéndolo ¿cómo?, ¿gráficamente?
A: No haciendo.. Bueno, también se puede hacer gráficamente, pero claro si es muy grande no. Hombre, si son números pequeños como 1/2 sí se puede hacer gráficamente, pero si no ...
P: ¿Cómo lo harías?
A: Como pide una representación decimal habría que dividir la tortilla en 10 partes y señalar lo que se lleva cada uno, que se lleva 5 partes de tamaño 1/10
P: ¿Y esa parte la compararías con la mitad de la tortilla?
A: Si vería que son lo mismo si los juntan
P: ¿Y ese mecanismo serviría para todos los casos? A ver para el caso 4/0
A: Claro, aquí entiende que no hay personas y no se puede repartir, lo que pasa que dice que hay que poner 0 porque hay que poner un resultado
P: ¿Ahora se le puede justificar gráficamente?
A: Es que no se puede, es que si no hay nada, si no hay nada para repartir no hay reparto
P: Pero, ¿al niño cómo lo convencemos?
A: No, si convencido está; dice que no hay personas para repartir y no se puede repartir
P: Pero para él ¿qué significa ese 0?
A: Nada, lo que es, nada,0, nada, para él. Dice que no se puede repartir, dice que hay que poner 0 porque tiene que responder, por poner alguna respuesta; porque a él le piden una respuesta numérica, entonces él pone una respuesta numérica; para él no se puede hacer el reparto pues a cada persona le corresponde 0 partes.
P: Pero, ¿tú dejarías que lo pusiese así?
A: No, dejarle no. Claro, habría que explicarle algo ...
P: Luego aquí él explica por qué lo hace
A: Claro, pone 0 porque no se puede hacer la división. Hay que decirle que si no se puede hacer la división no se puede hacer la división, no tiene resultado, no es 0.
P: Que el 0 es cuando se puede hacer y de ese resultado. Pasemos al tercero; por ayudarle, al igual que hemos visto en el caso primero, a través de representar la fracción y también hacer el reparto decimal
A: Sí, yo creo que si
P: Entonces, si se quiere representar la fracción 11/3, ¿cómo se hace?
A: Claro, primero tendría que poner las partes enteras, ¿no? Así quedarían 2 tortillas para repartir entre 3 personas, y ya daría bien el reparto ...
P: ¿Pasaría algo con el periodo?, gráficamente.
A: Sí, gráficamente; con la decimal no acabarías, siempre te iba a quedar un trozo para repartirlo; entonces ... un poco mal. Bueno, también podrías hacerlo, como sabe dividir, pues que si lo hace por la representación unitaria, lo que le saliese luego podría pasarlo a fracción y luego sumarlo todo; o pasar esto a decir simplemente que es 3 más 2/3 ...
P: Y luego hacerlo como división; pero eso es como dividir desde el principio 11 entre 3
A: Seria como un reparto distinto; tendría 3 tortillas enteras y le quedarían 2 ...
P: Así habría que contarle lo de 2 entre 3. Porque lo que tú has propuesto en el primer caso era hacer la fracción y luego hacer el reparto con representación decimal de forma gráfica, entonces vería que era igual.
A: Sí, bueno lo haría de las dos gráfica y simbólica
P: Ahora habría que hacerlo con la fracción 2/3
A: Claro, es que aquí no le va a salir igual la gráfica decimal que la gráfica unitaria; porque en la unitaria se acaba, no es infinita y en la decimal, en este caso, le va a salir infinita; entonces ...
P: ¿Crees que es un problema que cuando se haga más mayor a lo mejor lo entiende?, ¿que para niños es muy complicado?
A: Supongo que habría que explicárselo, no dejarlo.
P: En resumen: que sí que habría un recurso para el caso primero, que en el caso segundo no habría que justificar nada en términos de fracción ni de decimales; y el tercero es el que tiene dificultades por el infinito
A: Claro
P: Y tú dices que lo de utilizar la unitaria y luego la decimal no resolvería el problema porque no

se acaba nunca. En el fondo habría que ver es que este número y este están representando lo mismo, ¿no?, que es lo que has sugerido tú para el primer caso.

A: Pero en este caso este número es periódico; que si no acaba nunca en un dibujo no puedes hacer que no acabe nunca.

P: Y con un lenguaje simbólico peor todavía. Si recurres al dibujo ves que representar eso es imposible, ¿y utilizar alguna notación simbólica? Aquí ya hay una, está sugiriendo la decimal, ¿también resultaría difícil?

A: Pero otra simbólica, ¿cuál?

P: Osea, que ves que los recursos gráficos no son posibles y que los simbólicos no son tampoco adecuados. Abandonamos esta tarea y pasamos a la última.

**TAREA 5**

P: Veamos lo que ocurre con el chico A

A: A ver, lo del A la veo bien, porque el numerador que sería la fracción inicial la ve como un reparto, lo ve como un reparto de otro reparto. Entonces, yo lo veo bien

P: Bien, osea que el A lo entiende como un reparto de otro reparto. ¿Y el B?

A: El B, si son los 6 coma esto por kilómetros ..... Lo plantea un poco raro. Lo entiende como como una división sin más, sí. El primero lo entiende como un reparto de un reparto y el segundo como una división.

P: Como una división que ni es reparto, ni en el contexto de reparto ..

A: Yo creo que no, yo creo que lo ve simplemente como una división

P: ¿Como hacer 6 partes iguales?

A: Si, tiene 6 kilómetros y quiere saber la velocidad en cada kilómetro, pues como una división normal y corriente. Es que está un poco raro planteado, pero bueno

P: ¿Les tendrías que explicar algo a los críos?; al A por ejemplo, ¿le tendrías que hacer alguna explicación complementaria?

A: .... Es que igual no está bien, ahora que lo pienso. .... Esto es lo que tienes de tortilla. ... No es que la A no está bien. A ver, él lo quiere repartir entre más amigos, más de 6; entonces no está bien la respuesta que da.

P: Dice que llegan 6 más

A: Pero dice, ahora que están más amigos ¿cuánta tortilla comerá cada uno? Pero esto sería ... el 6 coma ciento treinta y siete sería la parte que le tocaría a uno, sí a cada uno le toca esto ... y llegan 6 amigos más con los que deciden compartir su comida; pero decidirá compartir su comida uno solo, no todos ¿no?

P: ¿Sería un reparto de un reparto?

A: No, porque está mal planteado el problema; si hubiese que uno de los amigos reparte su tortilla para 6 personas, incluyéndose él claro, pues entonces sí que está como un reparto de un reparto, pero ahora no; es que el no lo ve, él sí que lo ve como un reparto de un reparto, pero no está bien

P: ¿Lo ve como reparto de reparto?

A: Si, como reparto de reparto sí lo ve; sí, porque tiene el resultado de un reparto y ahora lo va a volver a repartir entre 6 más. Bueno, entre 6 más ... entre no se cuántos más; si porque ahora hay más amigos, si antes había 5 ahora hay 11

P: Entonces, eso no es un reparto de un reparto

A: Si es un reparto de un reparto, pero no está bien planteado el problema

P: ¿Habría que decirle algo a este muchachillo?

A: Pues sí, que el que vuelve a repartir su tortilla es uno solo, una sola persona no todos los que están. Y la vuelve a repartir entre 6 personas.

P: Y eso sería lo que daría significado a esa operación; lo que él hace no es correcto

A: Tal como está planteado el problema yo creo que no, porque es que, según lo veo yo, aquí no es sólo uno el que reparte su tortilla sino que lo reparten varios, varios amigos.

P: Osea, como si no hubiesen hecho el reparto, sino que ahora lo reparten entre los que había más los que han llegado

A: No, aquí hacen un reparto inicial pero luego no dice quien comparte

P: Osea, tú no lo ves como reparto de reparto

A: Si que lo veo como reparto de reparto, eso es lo malo; pero que no lo veo bien planteado.

P: Que no está bien planteado; osea, que tendría que haber dicho que uno solo ...

A: Sí uno de los que están allí, o una persona que se va de excursión ... O una persona que viene de un reparto y ella lo reparte entre 6 amigos

P: Osea, que habría que hacerle una corrección en ese sentido, ¿y el B?

A: Es que este problema es muy raro, él lo ve simplemente como una división, no lo ve como un reparto. Sí, él se inventa un problema que se resuelva con esa operación, si

P: ¿Lo ha hecho de forma correcta?
A: Sí, si se considera bien este problema sí
P: Eres tú la que estás de correctora.
A: Este problema yo lo veo muy raro. Vale, yo entiendo su idea, yo entiendo que lleva una velocidad no se qué y que en 6 kilómetros; vale yo su idea la entiendo.
P: Vale. Entonces ¿habría que hacerle correcciones al chico?
A: Si yo quiero explicar esto como un reparto y no simplemente como una división, sí. Le haría ver que si es un reparto las unidades tiene que ser un número entero, y entonces eso tendría que provenir de otro reparto.
P: Tu idea es que a este habría que darle alguna explicación en el sentido de ampliar más el significado que él tiene para la división.
A: Sí, el conoce la división tal cual; y si quieres explicárselo, si, si estás con los repartos.
P: Muy bien. Ya está todo.

# ANEXO VI.2: ENTREVISTA CON EL ALUMNO Nº 10

**TAREA 1**

P: ¿Tu crees que está bien?
A: No. El razonamiento que hace, dice que 4 tortillas son más que 3 tortillas, pero el número de gente para el que lo reparte en uno es 5 y en otro 7; entonces no tiene mucho que ver, que es lo que tendríamos que hacer para ver el reparto mucho más claramente
P: ¿Tú consideras que el error del crío es grave?
A: No. Osea, habría que explicarle también entre el número de personas que se reparte, que también influyen en el reparto; no solamente que 4 tortillas es más, sí que reciben más porque hay más, sino que también participa más gente y en el otro participan menos
P: ¿Tú crees que habría que explicarle algo?
A: Sí, yo creo que tendríamos que explicarle que en el reparto influye todo; osea lo que se reparte y el número de personas que participan en el reparto
P: Vale. Pues yo te doy estas 3 explicaciones, a ver cuál de estas 3 le darías
A: Yo cogería esta (señala la explicación II), porque es la más gráfica para los niños
P: Vamos por partes. Esta (señala la explicación I), ¿por qué no te convence?
A: No me convence porque lo de multiplicar en cruz para saber si una es más grande que la otra ¿no?, no se, yo no lo haría así; más que nada por ser más fácil, ésta quizá (señala la explicación II), de verlo mejor
P: ¿Y la III, por qué no te convence?
A: No es que no me convenza, también se podría explicar así; pero que no, yo pienso que se liaría más con esta, yo lo veo mejor gráficamente. Bueno, así también se podría, pero no se vería tan bien como aquí: 1 tortilla entre 2 personas y luego aquí hay más tortillas, repartir 3 tortillas a 100 personas; es que aquí se vería claro que 1 entre 2 le toca a 1/2, pero luego si tienes 3 tortillas entre 100 personas les va a tocar a muy poco; osea aquí se vería no se, es que ésta no está muy clara ¿no?
P: Entonces tú elegirías la II, tal como está ahí, ¿no?
A: Si
P: Muy bien. Pues pasamos a otra

**TAREA 2**

A: Osea, que esto no está bien ¿por qué?
P: ¿Está mal?
A: A ver. 2/3 + 4/5 no se hace así, ¿no?
P: Lo que dice el crío es lo que pone ahí
A: (Lee) Ya se lo que hubiese recibido una persona que hubiese participado en los dos repartos por separado ... No tendría que haberlo sumado, si participa en dos repartos por separado ... A ver, no las tendría que sumar, se tendría que quedar así (señala 2/3 + 4/5), ¿no?, este resultado
P: Pero lo que le pide el profesor es que calcule el resultado de esa suma, no lo puede volver a dejar como estaba. La propuesta del profesor es ésta y la respuesta que dice el chico es que después de sumar sale esto (señala 6/8) y aquí justifica por qué ha salido de esa manera. Lo que habría que ver si ante esta pregunta la respuesta te parece correcta o no
A: No, no. Yo es que eso no lo vería correcto
P: ¿Por qué no lo ves correcto? ... ¿qué respuesta tendría que haber dado?
A: No se, por el ... Es que si por ejemplo le dicen que esos son tortillas y que son lo que recibe una persona que participa en dos repartos, pues tendría que haberlo, osea no tendría que haberlo hecho asi, no se, yo, ¡así no se hace! ¿No se hace con el mínimo, osea sacando el

mínimo común múltiplo y todo eso? Osea, lo que ha hecho ha sido sumar el numerador y el denominador para saber lo que ha recibido en total la persona, pero no se pueden juntar las tortillas de los dos repartos y las personas. Tendría que calcular el resultado de esto de aquí (señala 2/3 + 4/5), más que nada, para saber lo que ha recibido la persona

P: El es lo que indica aquí, lo que ha recibido la persona es 6/8

A: ...

P: Vamos a ver, él por una parte habla de la suma ¿la idea de suma es que una persona participa en dos repartos y junta lo que ha recibido?

A: No

P: Osea, que esa no es la idea de suma. ¿Tú cómo justificarías esta suma?

A: ....

P: ¿Qué dirías? A ver, una persona ha participado en un reparto y luego ha participado en otro, ¿y si junta todo lo que tiene ese es el resultado de la suma?

A: Si, no, no se. Si que puede que una persona participe en dos repartos y luego para saber lo que tiene lo..., pero que no

P: ¿Tú ves que la idea de suma la tiene este muchacho?, ¿lo que es sumar?

A: Lo que es sumar yo creo que si, porque está cogiendo el resultado de dos repartos.

P: Entonces, ¿qué es lo que tiene erróneo?

A: El proceso de realizarlo, la forma en que se hace

P: Porque éste lo que hace es sumar numeradores y denominadores y ¿eso no se tiene que hacer así?

A: No. Que una persona ha participado en los dos repartos por separado, eso si que lo ha cogido; lo que no ha hecho bien es lo de juntar las tortillas y las personas que participan en los dos

P: Este chico comete un error importante ¿o crees que no es importante?

A: Si, yo creo que si es importante; sabe de donde procede eso pero no sabe llegar hasta el resultado, ¿no?, osea calcular lo que es el resultado

P: ¿Habría que ayudarle al muchacho?

A: Claro

P: ¿Le darías alguna explicación?

A: Para poder sumar fracciones o los resultados de un reparto, pues habría que conseguir que el denominador tiene que ser el mismo para poder hacerlo, ¿no?; osea que no se puede hacer así como así.

P: Bien, yo te doy 3 explicaciones y eliges una.

A: Primero le explicaría esto, osea lo de que propone un nuevo reparto, explicarle lo que ha puesto él; y luego le explicaría que para sumar dos fracciones hay que buscar el denominador común y después sumar los numeradores.

P: Osea, que una sola no; primero la III y después la I

A: Sí, le explicaría que lo que ha hecho es un nuevo reparto entre todas las personas que estaban en los dos repartos iniciales, lo que ha puesto; osea, que por qué no lo ha hecho bien y luego le explicaría que para sumarlo hay que buscar el denominador común

P: ¿Y la II no te convence?

A: Veo cómo se representa cada fracción, pero no se para calcular la suma cómo explicárselo.

P: Osea, que de esos dos dibujos sacar la suma es complicado

A: Es que no ...

P: Osea, que esa no le ayudaría al chico

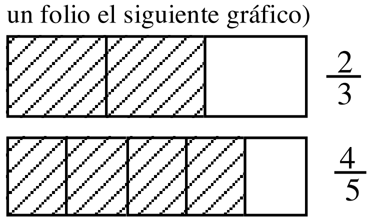
A: ....

P: Intenta hacer tú la suma

A: ¿La del ejercicio?

P: Sí, a partir de estos dibujos ¿Cómo harías la suma?

A: Lo pondría así (dibuja en un folio el siguiente gráfico)

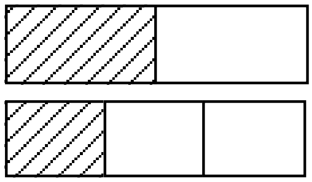



A: Y ahora haríamos que más o menos es el mismo trozo

P: Tú lo que tienes que encontrar es el resultado. A ver, a partir del gráfico ¿cómo representarías la suma?

A: .....

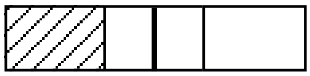
P: ¿Lo ves difícil eso de hacer la suma?
A: Es que para mi es muy difícil
P: ¿Y el chico? ¿también piensas que sería difícil?
A: Tal y como está sí, porque, vamos es que no; para mi es difícil porque veo que representan el mismo trozo pero luego a la hora de sumarlo no sabría cómo hacerlo; porque aquí esta parte equivale a 4 de una trocito así, y aquí esta parte equivale a 2 de un trozo así, pero es que no se, no lo se hacer
P: ¿Piensas que si al chico en la explicación le pusieses estos dibujos también tendría dificultades para hacerlo?
A: Yo creo que sí, porque a la hora de sumarlo puede poner un trozo así, pero a la hora de ...
P: Ponte 1/2 + 1/3 a ver si eso se puede hacer gráficamente
A: (Dibuja el siguiente gráfico)



$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

P: Si fuese ese ejemplo ¿sería más fácil para que el chico hacer la suma?
A: Pues es que no lo se, yo creo que no
P: Osea, ¿que tampoco para ese caso le valdría al chaval?
A: Yo es que no se. También se le podría hacer si por ejemplo éste lo pusiéramos aquí (dibuja sobre la figura de 1/3 una raya que corresponde a 1/2)



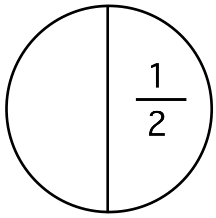
A: Haríamos, pues esto es así. ... Pero tampoco. Que no. Que yo lo veo muy difícil esto
P: No olvides que lo que estamos pensando es en el chico
A: No, no, yo no
P: No se lo pondrías porque piensas que el chico tendría dificultades en hacerlo. Bien, pues terminamos esto y pasamos al siguiente

**TAREA 3**

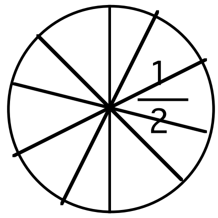
A: Si que sería bueno el razonamiento del niño, ¿no?
P: ¿Es correcto lo que ha hecho?
A: ..... Sí
P: Entonces, a ese niño ¿habría que proponerle alguna nueva actividad? Puesto que ya ha terminado una habría que proponerle algo nuevo, ¿no?
A: Pues por ejemplo, si esto lo ha hecho por la mayor; osea, dándole al niño; osea, si hacemos el reparto teniendo en cuenta que a la persona que participa se le da la mayor parte, pues ahora que no se le de la mayor parte, y por ejemplo, como en clase, hacerlo para 10 personas; y hacer la presentación para pasarnos ya al sistema decimal, para repartirlo entre; en vez de repartirlo cogiendo la mayor parte, pues dividirlo para 10, suponiendo que el trozo que tuvíeramos lo dividiésemos en 10 partes
P: Bueno pues tú ahora como profesor, escribe la propuesta para el chico; igual que está aquí escribe la propuesta
A: ¿Lo escribo?
P: Escríbelo, claro
A: Es que antes de ponerle ya el problema, ahora le explicaría: vamos a hacerlo ahora teniendo en cuenta que en vez de tomar 1/2 vamos a dividir esto. Osea, le explicaría lo de la representación polinómica decimal, antes que ponerle el problema que lo hiciera él. Luego le diría esto se llama representación polinómica decimal y se hace así
P: Osea, que le darías un ejemplo y
A: Sí, le diría como se, pero que no me acuerdo. Osea, un reparto, este mismo (se refiere a 5:7 que figura en la tarea), pero suponiendo que lo dividimos en vez de entre 5 entre 50; osea, siempre entre 10. Es que no me acuerdo exactamente
P: Divides en 10 cada unidad
A: Eso, si
P: Osea, que primero le contarías lo que era la representación polinómica decimal
A: Por hacerlo de otra manera
P: Antes de proponerle otra actividad
A: El problema, si
P: Bueno, pues pasamos a otra

**TAREA 4**

P: Vamos por partes, empezamos por la a); a ver.
A: 0,5 pues si, se podría poner así, y dice (lee la justificación del niño)
P: ¿Eso es correcto?
A: Yo creo que si porque es como si hubiera dividido la unidad en 10 partes y cada uno se lleva 5 décimas partes, osea 5 trocitos de, de; lo que pasa que no, tal y como está .. ; no está mal, pero de aquí no viene ese resultado, simplemente sería que cada uno se lleva 1/2, no lo de 5 décimas partes de la unidad. Esto yo creo que esto lo ha hecho explicando lo del 0,5. No está mal porque es el mismo resultado
P: ¿Y la tercera parte que dice él?
A: (Lee: la división del numerador entre el denominador ...)
P: Osea, que lo que el dice es que para obtener el resultado él lo que ha hecho es dividir, ¿eso es correcto?
A: Si que es correcto, pero ...
P: Para que entiendas lo que le dice el profesor, le dice: mira yo tengo esta fracción y la tienes que escribir con notación decimal. Entonces el chico lo hace y le da esta respuesta
A: Si le da esto entonces tendría que decir 0,5, que son 5 décimas partes de la unidad, vamos es que si le da esto .. Es que contesta con dos cosas, con que si fuera una tortilla y luego responde de acuerdo con lo que ha escrito. Porque si por ejemplo, lo hiciera dice 1/2, pues 1/2 que seria esto, que sería esto de aquí (hace el siguiente dibujo)




P: ¿Y la segunda parte?
A: Y luego dice que también se puede escribir como 0,5 que son 5 décimas partes de la unidad. Lo que ha hecho es tomar esto; osea, ha hecho la división, osea, 1/2 es igual a 0,5 y luego lo ha explicado como que esto son 10




y esto es 5
P: ¿Eso es correcto?
A: Si, sí que es correcto.
P: Bien, pasemos al caso b)
A: Le sale 0. (Lee en la respuesta del niño: como no hay personas no se puede repartir y por eso hay que poner 0). Pues sí, si que no hay personas, pero no daría 0 porque no podemos hacer el reparto; no es que no se lleven nada, yo creo que habría que explicarle que no hay que poner 0; habría que ponerle al revés 0/4 a ver cómo lo haría
P: Aquí él dice también por qué pone 0
A: Porque no se puede hacer la división, pero no hay que poner 0 cuando no se puede hacer la división; no se puede hacer pero no significa que no le toque a nadie nada, es que no hay para repartir, osea no hay personas
P: Entonces, cuando tú le digas que no se puede hacer, ¿qué tiene que poner?
A: Que no se puede hacer el reparto porque faltan las personas, pero no se puede poner 0 porque no sabemos si es que le va a tocar a 0; osea, no sabemos cuánto le va a tocar a cada una
P: Vamos a ver; entonces, de la primera parte no habría que explicarle nada
A: No
P: ¿Y de esta segunda?
A: Lo del significado del 0 ....
P: Tal como lo ha hecho él, dice yo lo hago dividiendo; si dice ese dividiendo ¿cómo crees que lo habría hecho él en sus papeles?, ¿cómo habría hecho él la división?
A: Habría hecho así: 4 dividido entre 0

$$\begin{array}{r|l} 4 & \underline{\;0\quad\;} \end{array}$$

P: Y dice que le da 0

A: Porque habrá intentado poner aquí (se refiere al cociente) cualquier número y siempre le va a dar 0. Pero no, no se. No, no, tampoco....

P: Como tú le tienes que ayudar a él, ¿de dónde piensas que se ha sacado ese 0? ..., pues como dice que lo ha hecho con una división, pues a ver ....; si el pone de resultado 0, éste 0 que pone aquí ¿dónde le ha aparecido en la división?

A: El que sale siempre aquí, (pone 0 como resto)

$$\begin{array}{r|l} 4 & \underline{\;0\quad\;} \\ 0 & \end{array}$$

es el que él ha puesto. Porque aquí (se refiere al cociente),puede poner cualquier número

P: ¿Y si pone 3, por ejemplo en el cociente?, ¿sería correcto?

A: ....

P: Yo lo que te estoy diciendo es que tú si dices que es incorrecto, le voy a contar para que él entienda que es incorrecto, ¿qué tipo de explicación le darías?; porque si él dice que ha hecho una división, pues hay que ver lo que le ha podido fallar o qué orientación le tienes que dar para que no le ocurra otras veces.

A: Le explicaría que no se puede hacer una división donde el numerador sea un 0, que esto no se puede hacer

P: Eso será el divisor

A: Sí, eso, si el divisor

P: ¿Y por qué no?, porque el chico te va a decir que por qué

A: Le explicaría que no nos iba a salir nunca un resultado, porque cualquier número que pongamos aquí (se refiere al cociente), siempre nos va a dar un 0. Y siempre vamos a tener el mismo, el mismo dividendo

P: Muy bien. Esa explicación sería por lo que él dice que lo hace con una división. ¿Y esta otra justificación que hace aquí en términos de reparto?

A: Como no hay personas no se puede repartir ...Yo creo que sería así, que estaría bien: como no hay personas no se puede repartir

P: ¿Y esta otra parte?

A: Lo de que por eso hay que poner 0 no estaría bien

P: ¿Eso es incorrecto?

A: Si.

P: Pues, ¿qué le dirías al chico?

A: Que como no hay personas y no se puede realizar el reparto no podemos poner el resultado; porque como él dice que si no hay personas no podemos repartir, entonces ¿por qué pones el 0 si no has podido realizar el reparto?; osea, es como si ya lo hubiésemos hecho, que no les toca a nada. No podemos dar un resultado; tal y como lo dice como no hay personas nos falta entonces el divisor, para poder hacer el reparto; entonces no podemos dar un resultado, que él si que lo da

P: Bien. Pasamos al tercer caso

A: Dice significa que si se reparte da 3,6. Sí, ha hecho la división, ... Esto es como lo dice él, que ha hecho la división en todas; esto si que estaría bien. Y luego dice que se divide la unidad en 3 partes y cada persona se lleva 11 de esos trozos ....; esto no estaría bien ¿no?

P: ¿Qué es lo que no tiene correcto?

A: La explicación esta. Dice que si se parten las tortillas en 3 trozos iguales cada persona se lleva 11 de esos trozos; sería que tenemos, sería el resultado de un reparto en el que tenemos 11 tortillas y se dividen en 3 trozos iguales, y cada persona se lleva 11 partido para 3 trozos iguales; no, si se parten las tortillas en 3 trozos iguales cada persona se lleva 11 de esos trozos, ¿no?, no estaría bien

P: Osea, que dividir las tortillas en 3 trozos iguales eso no es correcto

A: Dividimos cada una de las 11 tortillas en 3 trozos iguales

P: Eso es lo que dice él al principio ¿no?

A: Si. Cada persona se lleva 11 de esos trozos ... si

P: Si. ¿Y por qué es correcto eso?

A: ....

P: ¿Tú lo harías así?. Osea, si tú ves 11/3 ¿lo interpretas como lo dice el chico?

A: Osea, interpretaría que tenemos, a ver, .... Sí, yo lo interpretaría como el niño

P: Osea que la primera parte de la respuesta del niño la admites como correcta. Pues ahora seguimos

A: ¿Aquí que ha hecho? Dice que cada unidad se divide en 10 partes iguales, entonces cada uno, pero ¿por qué recibe infinitos trozos de tortilla .. ¿al salirle el 3,6 periodo? ... No significa que cada una de las personas reciba infinitos trozos de tortilla, sino que no podemos dar un resultado exacto y cada uno se llevará 3,666666 trocitos; pero no sabemos exactamente el trozo que se llevará, pero eso no significa que sea infinito

P: Osea, que eso que dice al final es incorrecto

A: Una cantidad infinita de tortilla. No

P: Lo que está intentando el chico es ver cómo esto y esto, ¿para tí son iguales estos dos números?

A: Si

P: Pues lo que le ha pedido el profesor es que le explique por qué son iguales; entonces, él da esa explicación de ahí y a tí no te convence por lo que has manifestado. ¿Cómo le dirías que estos números son iguales?

A: .....

P: A ver. En el apartado a) tú has dicho, si hago un dibujo así puedo llegar a verlo, ¿y aquí?

A: Se lo explicaría: aquí pondría 11/3 y luego veríamos que sería 3 coma, osea y otro trocito pequeño, y otro trocito pequeño, y otro trocito pequeño; pero no sabemos exactamente; osea, que sería un número que se aproxima, que no es un número exacto, que el periodo es algo que se aproxima, pero que no es un número exacto como puede ser el 0,5.

P: En el caso primero tú has dicho: yo dibujo 1/2 y luego dibujo 0,5. ¿Aquí valdría el mismo procedimiento?, ¿cómo dibujarías $\frac{11}{3}$ y $3,\overline{6}$?

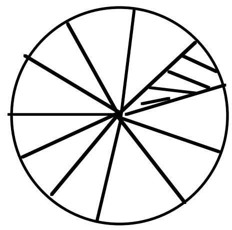
A: .....

P: Lo que te quiero indicar es que si en el caso a) has utilizado un mecanismo, que lo hagas también para el caso c), pues tú te has dado cuenta que lo que dice el chico es erróneo. Veamos cómo dibujas 11/3

A: Por ejemplo ¿en una misma?

P: Igual que has hecho para 1/2, pues ahora 11/3. Yo te estoy intentando decir que le pongas el mismo argumento al chico que has empleado aquí; tú has dibujado la fracción 1/2 pues ahora dibuja la fracción 11/3 y después a ver como lo igualas a $3,\overline{6}$

A: (Hace el siguiente dibujo)



A: 11/3 sería este trocito de aquí, uno de éstos (señala la parte rayada)

P: ¿Eso serían 11/3?

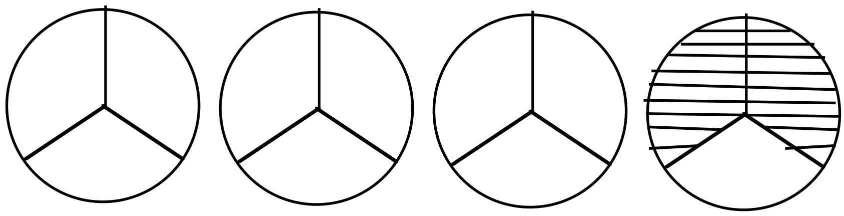
A: ...

P: Y ahora tienes que dibujar $3,\overline{6}$ Tal como has hecho antes de dividir en 10 partes, ahora en ese trozo a ver como harías divisiones en 10 partes

A: No, pero esto no es 11/3 ¿qué estoy dibujando yo aquí? Esto es 1/11

P: Bueno, pues dibuja 11/3, venga

A: (Hace el siguiente dibujo)



A: A ver ...y cogeríamos ...

P: Yo te vuelvo a repetir es que la idea que has utilizado en el caso a), a ver cómo la podrías utilizar en el caso este para poderle explicar al chico, puesto que en el caso a) te ha funcionado bien, para poder explicarle al chico cómo se justifica que 11/3 y $3,\overline{6}$ sean iguales

A: Esto serían 11/3, ¿no? ....

P: Eso son 11/3. Y ahora a ver cómo saldrían $3,\overline{6}$

A: Sería, que tendríamos las 3 unidades y luego este trozo de aquí, que no es entero, sería el coma 6; pero, claro, no sabría como decirle que esto es el coma 6 periodo, este trocito de aquí ...

P: Osea, vemos que, en el primer caso, gráficamente se puede hacer, ¿no?; y en este caso ¿tú lo intentarías hacer gráficamente para que te entendiese el chico?,.

A: ...

P: ¿Ves que hay dificultades para hacerlo?

A: Hay dificultades para hacerlo gráficamente

P: Entonces, ¿qué le dirías al chico?, ¿cómo le justificarías que estos dos números son iguales?, ¿que haga la división y ya está?

A: Tendría que hacer la división y luego también se lo explicaría así, osea también le podría poner este ejemplo pero no.. ; decirle que esto equivaldría a $0,\overline{6}$ pero que no... Es que como un número periódico no sabemos exactamente; osea, se aproxima mucho a un número, que podría ser 2/3, osea que es 2/3, pero que como no es exacto, porque esto sería 2/3, pero ....

P: Osea que tú, aparte de hacerle la división, luego le dirías y eso da, 11/3 da eso. ¿Vería que este trozo de aquí da $0,\overline{6}$ ?

A: No

P: No se le podría explicar así, no es fácil de verlo, ¿verdad?

A: ....

P: Osea, que el procedimiento que has utilizado para justificar lo de la situación a), para la c)

A: Es complicado

P: ¿Y lo que dice el chico de hacerlo por división?

A: ....

P: El trata de justificarlo por otra linea dice que al pasarlo a notación decimal

A: ... Que no se por qué dice que cada una de las personas recibe infinitos trozos de tortilla, que no se cómo lo hace

P: Pues él dice que de dividir las tortillas en 10 trozos iguales, ¿cuántas tortillas había?

A: 11, ¿no?

P: 11. Pero de lo que se trataría es de ver si tú puedes ayudar al chico en las cosas que está diciendo por ahí, si te parecen bien o no y si se le puede ayudar. Entonces, la pregunta sería: si las tortillas se dividen en 10 partes iguales, ¿tú crees que así sería fácil ver que 11/3 y $3,\overline{6}$ son iguales?; que si ese procedimiento ¿le ayudaría o no?

A: Osea, dividiéndolo en 10 y ver que no podemos ..; sí, porque se vería como mejor, ¿no?; osea, al dividir las 11 tortillas en 10 trozos veríamos, claro, que no se sabe... Es difícil el período, el coma 6 ...

P: Osea, que hay casos más fáciles y más difíciles de explicar; que el 0,5 es más fácil de ver que el $3,\overline{6}$ . Venga, pues pasamos a la última.

**TAREA 5**

P: Veamos lo que ocurre con el chico A, ¿está bien hecho?

A: A ver, dice que unos amigos se reparten las tortillas que se llevan para la excursión y a cada uno de ellos les toca 6 coma 137. Entonces, yo creo que el niño ve que ésto procede de un reparto anterior. Y justo cuando se van a comer sus tortillas llegan 6 amigos más con los que deciden compartir su comida, y también veo que ve bien que; osea, que está bien, que lo hace bien. Y dice que cuánta tortilla comerán cada uno, ve que de aquí va a salir una solución que es la porción que se comerá cada uno de tortilla; osea que yo creo que sí que está bien, que es el resultado de un reparto

P: Osea que el primero lo ve como un reparto

A: ¿Pero lo de que llegan 6 amigos más?... No se si, le faltaría decir que sólo van a comer, osea, que ellos no van a comer; porque si vienen 6 más se tendrían que sumar a los que ya estaban, ¿no?

P: Pero ese 6 lo debe poner para que le salga en la operación. Si tú en el enunciado del problema quitas ese 6, ¿cómo justificas esa operación?

A: Si, bueno si, vale. Pero que sería cuánta tortilla recibe cada uno de los amigos, porque sino ¿ellos no se incluyen?, osea reparten el trozo de tortilla que les había tocado a cada uno y luego sólo lo dividen entre 6, entre los 6 que llegan. Osea, que yo veo que sí, que está bien; pero que no se si lo ha puesto bien escrito.

P: El lo que ha escrito es eso. Ahora eres tú la que actúas como un profesor que está revisando su trabajo, tú eres la que tienes que decidir

A: Que sí, que está bien

P: ¿Qué entiende que es la división este chico?

A: El reparto de una ... Un reparto en el que participan unas personas y que se reparten en este caso tortillas; ve que es la .. Yo creo que es más que nada un reparto, dividir algo entre el número de personas

P: Muy bien, vamos a ver el B

A: También está bien

P: ¿Es un reparto lo del B?

A: No, para él es, vamos a ver ... Un reparto que sería ...Una división en la que tiene una cantidad, esa cantidad se divide para un número y sabe ... ; osea yo más bien lo vería como si fuera una recta y le dan que lo divida entre un número y entonces; osea, un número de partes iguales, como una unidad y luego diferentes partes iguales, entonces al dividir toda esa unidad en el número de partes, lo que mide, por decirlo así, cada parte.

P: Osea que es distinto que lo de arriba, ¿no?

A: Si

P: Bueno, y a estos chicos ¿les propondrías alguna otra actividad para seguir? Este chico ha hecho ya esta tarea

A: Yo sí cambiarle los problemas; por ejemplo, darle este problema a este

P: Pero es que lo que hace el profesor no es darle el enunciado, el profesor les ha propuesto esto y los chicos han respondido es eso.

A: A este le propondría esto pero puesto como.. Al alumno A le propondría una, a ver, ...

P: Te lo pregunto de otra manera ¿tú piensas que estos chicos entienden lo que es la división?

A: Entenderla si, si que saben lo que es

P: Osea que se les podría pasar a otro tema

A: Pero cada uno tiene que comprender que no es solamente un reparto, sino que también ..Osea, que cada uno entiende la división de una manera; pero sí, sí que saben lo que es la división

P: Entonces tu propuesta ¿qué sería?, ¿que cada uno tuviese otra visión?

A: Otra visión de como se hace, no como se hace sino cómo interpretar de otra manera la división

P: ¿Y eso cómo lo conseguiríamos? A ver para el alumno A

A: ...

P: ¿Le podríamos proponer algún problema para ver si él entendía lo que era de división?

A: Si, donde viera que es como si fueran partes de unidad y que todas componen la unidad; osea diferentes ..

P: Bien, pues escribe tú el enunciado

A: Es que el fondo es lo mismo, ¿no?, porque ...; son diferentes maneras de entenderlo pero en el fondo a lo que llevan es lo mismo que es una; no se, igual me estoy liando yo aquí

P: No, no. A ver

A: Osea, que son diferentes interpretaciones, pero que a la hora de la pregunta, por decirlo así, lo que entienden al final, es que es una parte de una unidad. Pero yo creo que los dos lo interpretan de la misma manera, que es lo mismo; porque aquí lo que dice es ¿cuánta tortilla comerá cada uno?, osea lo ve como un todo dividido para 6; y éste también lo ve como un todo dividido para 6, y sabe que también , osea es como si también dice ¿cuál es la velocidad en cada uno?, sabe que es una parte sólo. Osea, que yo creo que no habría que, que lo saben y no habría que ponerles más, simplemente, a lo mejor, explicarles que se pueden hacer otros problemas; pero es que no se

P: Osea, que los tiene la misma idea

A: Yo creo que si

P: Muy bien. Pues ya está.

## ANEXO VI.3: ENTREVISTA CON EL ALUMNO Nº 24

**TAREA 1**

P: ¿Es correcto lo que responde el alumno?

A: No es correcto

P: No es correcto, ¿por qué?

A: Porque si que hay más tortillas en el segundo reparto, espera. espera.... A ver ... Sí que es correcto

P: Si que es correcto. Osea que a la pregunta de cuál de los dos repartos es mayor, el chico dice que es mayor el que tiene más tortillas

A: Lo que pasa es que la respuesta no la ha justificado bien.

P: ¿Qué tendría que haber dicho?

A: Lo primero lo tendría que haber suprimido, porque si dice que este reparto es menor .... No es verdad porque en éste hay más tortillas pero hay más individuos para repartir; entonces, el chico simplemente se ha fijado en que había más tortillas en el segundo reparto que en el primero; y entonces se ha dejado llevar por la cantidad de tortilla que había, pero no por los individuos que participaban

P: Entonces dices no es correcto

A: No

P: ¿Tú crees que el error que comete el chico es importante?

A: Si porque no entiende la idea de la unidad, osea lo que simboliza el reparto; osea que lo primero te indica las tortillas, pero lo segundo te indica los individuos que hay. Entonces hay que tener en cuenta las dos ...

P: ¿Habría que explicarle algo a ese chico?

A: Si. A ver ...

P: Bien. Yo te doy 3 explicaciones, ¿cuál de ellas le darías al chico?

A: Le daría la III.

P: Vamos por partes, ¿la I por qué no te gusta?

A: Porque es muy sistemática; osea, no le hace razonar. Simplemente aplica una regla, que si no le explicas el sentido de la regla, o no se da cuenta él, más adelante, de que existe esa posibilidad más rápida, pues simplemente se quedará con la idea de multiplicar en cruz

P: ¿La II?

A: La II porque, osea si tu divides; es que no se ve. ... Osea si tu coges el mismo segmento, la misma longitud, y eso lo divides .. ¿porque es la misma longitud en los dos? (pregunta al entrevistador acerca de las dimensiones de los dos rectángulos que figuran en la explicación II)

P: Si

A: Pero no se ve tan claro; no se ve claro porque aquí le sobran 3 y aquí le sobran 2, aunque estas son más pequeñas que estas.

P: ¿Y si se las pusiésemos una al lado de la otra?

A: ¿Una debajo de otra? Sí

P: Así que si que le iría bien, si le pusiésemos una debajo de otra. ¿O te sigue sin convencer esta explicación?

A: Me sigue sin convencer porque la idea de esto es la de 3 tortillas entre 5 personas, no 3/5 de tortilla

P: ¿Y aquí no te parecería que representa eso?

A: Aquí sería coger 3/5 de tortilla

P: Vamos a ver, la III ¿por qué te convence?

A: Me convence porque se ve más claro que si una tortilla la repartes entre 2 se ve claro que les toca a la mitad; pero si tienes una tortilla más y hay 100 personas; osea el cambio de situación ya es muy... yo pienso que ya se vería claro: añades una tortilla más, pero añades muchísimas personas más.

P: ¿Entonces el chico?

A: Se daría cuenta de que tiene que tener en cuenta no solamente las tortillas, sino también las personas que participan

P: Muy bien. Pasamos a otra.

**TAREA 2**

A: Está mal

P: ¿Por qué está mal?

A: Esta mal porque la fracción así te indica la cantidad de tortilla que coge el individuo, osea cada uno lo que le toca; entonces, el chico simplemente se ha dejado guiar por el numerador, que para él indican tortillas, y el denominador que indican individuos. Osea, que el caso aquí es el contrario, la fracción le indica la situación que sería, bueno que se pondría con dos puntos. Osea, él se hubiera acercado más si hubiera hecho la suma, hubiera tenido más coherencia si hubiera sido la situación de

(escribe (2:3) + (4:5) )

P: ¿Y cómo lo tendría que haber resuelto si lo escribe así?

A: ¡Ah, no! Tampoco lo hubiera hecho así, hubiera estado mal también. Hubiera tenido que hacer, bueno teniendo el mismo número de personas, repartos equivalentes; y a partir de esa equivalencia hacer la suma; osea, que también hubiera estado mal

P: Osea, que si tú haces el resultado no saldría este.

A: No

P: Entonces, vamos a ver si lo que él justifica está bien o no. ¿El cómo considera la fracción?

A: El considera que lo de arriba indican tortillas y lo de abajo individuos; entonces, lo que hace es juntar, sin tener en cuenta una equivalencia de las dos, juntar, independientemente, tortillas y por otro lado individuos. Y eso no se puede hacer

P: ¿La idea de suma la tiene? Es lo que pone por aquí

A: Hombre, la tiene porque te dice que junta las tortillas; osea, para él sumar es añadir pues por un lado las tortillas y por otro lado los individuos

P: ¿Y esta última frase? ( se refiere a la respuesta del escolar que dice: así ya sé cuanto recibe una persona que hubiese participado en los dos repartos por separado)

A: No, porque .... porque son repartos diferentes. No porque él se piensa que lo que recibe, esto sería lo que recibiría en el primer reparto y lo que recibiría en el segundo, lo mismo

P: Yo aquí leo que el chico dice así ya sé cuanto recibe una persona que hubiese participado en los dos; osea, que considera la primera fracción como lo que recibe en el primer reparto y la segunda también. Aquí piensa que hay una persona que participa en este reparto y que la misma está aquí también, entonces piensa lo que hubiese recibido esa misma persona si hubiese participado en los dos. ¿Es correcto eso?

A: No ...... No porque lo que tendría que haber hecho es adivinar lo que recibe en el primero por un lado, lo que recibe en el segundo, y todo eso unirlo

P: ¿Y cómo adivina lo que recibe en el primero?

A: ....

P: Aquí lo que dice es que se reparten 2 tortillas entre 3 personas ¿cuánto recibe cada una?

A: 2/3

P: 2/3. ¿Osea, que esto también le está indicando lo que ha recibido una persona?

A: Si ...

P: Y aquí le está indicando lo que ha recibido la misma persona pero en otro reparto. Y él dice si junto todo, si lo hago todo a la vez, vamos, ¿eso es lo que hubiese recibido?

A: Hombre, claro. La idea para justificárselo sería decirle que, ... bueno lo que tiene que hacer es llegar a un reparto en el que los individuos que participen sean los mismos. Entonces, de esa forma ...

P: Entonces, tú ves que el chico no hace bien esto

A: No

P: ¿Y la idea de lo que es sumar la tiene? Es por determinar más concretamente en qué se equivoca.

A: Hombre, la idea que no tiene clara es la de la suma de fracciones, pero la suma es, en cierta manera, lo que dice sí que tiene su lógica para él, porque si te dice que suma un reparto con otro y te suma las tortillas por un lado... Lo que no tiene claro es la suma de fracciones

P: ¿Habría que contarle algo? ¿o pasamos a otra cosa?

A: Habría que explicarle algo.

P: Hacemos como antes, yo te doy 3 explicaciones

A: Cogería la III

P: La I ¿por qué no te gusta?

A: La I no me gusta porque es lo mismo, es aprender de memoria el buscar el común denominador y sumar los numeradores; osea, aplicar unas reglas

P: Una técnica, ¿no?

A: Si, una técnica que está bien, pero es preferible cuando se de cuenta de lo que significa

P: Bien, ahora la II

A: La II es que pienso que no le ayuda nada .... Yo por lo menos no ...

P: Porque tú a partir de esos gráficos ¿sabrías hacer la suma?

A : ......

P: Aquí lo que propone es decirle, mira aquí tienes lo que representa cada fracción y ahora a ver cómo lo sumarias

A: No

P: Tú no sabrías sumarlos

A: No

P: No sabes. Bien pasemos a la III

A: La veo complicada la explicación, pero quizás es la que más le acerque a pensar el por qué tiene que buscar un reparto común para los dos, porque tienen que participar unas mismas personas y a partir de ese reparto común juntar un reparto nuevo que participen las mismas personas, y de esa forma se repartirán las tortillas que hay

P: Osea, que esa es la que tú le dirías al chico.

A: Buscar un nuevo reparto para que haya unas mismas personas que participen en el

P: Porque eso es en lo que fallaba el chico.

A: Sí, la idea de ver una situación nueva; osea que a partir de dos repartos tiene que buscar una situación nueva en la que haya las mismas personas para repartir entre ellos.

**TAREA 3**

El estudiante entrevistado escribe en un papel la representación polinómica unitaria que él obtiene:

$$(5:7) = \frac{1}{2} + (3:7)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{4} + (5:7)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + (5:7)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} + (3:7)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{4} + (5:7)$$

$$5:7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$$

A:En la fase que se ha equivocado es en la tercera y en la cuarta. En la tercera porque tiene en cuenta simplemente el trozo de tortilla, el tamaño de la tortilla que le ha quedado en la fase anterior, pero no la de la primera fase. Entonces, en la primera va muy bien porque te dice

P: ¿La primera es cuando le sale 1/2?

A: Si, 1/2. Entonces, en la segunda fase lo plantea bien, osea dice que le quedan 3 trozos, pero no son enteras sino de tamaño 1/2; así que hace esa multiplicación, que es necesaria porque las tortillas no son de una unidad sino mitades, ¿no? Pero, sin embargo, en la segunda también entiende que hay que coger 1/4, que no son tortillas enteras y que son de tamaño 1/3; pero solamente tiene en cuenta que son de tamaño 1/3 por las anteriores, pero no las de tamaño . ; osea, las anteriores a su vez eran de tamaño 1/2, entonces tiene que multiplicar no solamente por 1/3 sino por el 1/2 de la fase anterior, de la primera

P: Eso es lo que hace en la tercera

A: Y en la cuarta se deja ya, pues toda

P: Es lo mismo, también se fija solamente en la anterior

A: Se fija solamente en la fase que acaba de realizar, pero sin tener en cuenta que en la siguiente pues tenia también no tortillas enteras sino trozos de tortilla de 1/2, 1/3, ... Entonces, solamente le ha salido bien la primera porque solamente había trozos de 1/2, pero en las siguientes, al no tener en cuenta las fases anteriores, se ha equivocado

P: ¿Eso es grave?

A: Sí, porque entonces no lo ha fraccionado correctamente. Osea, aquí tenía que haber salido 1/24 y en la otra 1/24 por 4

P: ¿A tí te había salido eso?

A: No, porque lo había hecho mal.

P: Bueno. Vamos a ver si que explicación eliges

A: Elegiría la II

P: ¿La I por qué no te convence?

A: La I no me convence porque es muy técnica. Osea, es aplicar unas reglas, como las otras veces.

P: Estas reglas ¿le sirven para calcularlo?

A: Sí, lo que pasa es que no teniendo clara la idea, es preferible que piense o reflexione sobre el por qué se hace eso que no lo aprenda de memoria; y que aprendiéndolo de memoria tampoco le vea el sentido.

P: ¿La III?

A: La III no me gusta, osea, yo lo entiendo pero pienso que para un chico de E.G.B. tampoco, es muy complicado de entender; osea, ver tantos paréntesis, corchetes, igual te lleva un

poco a confundir
P: ¿Pero tú lo haces así?
A: Si.
P: Osea, que si fuese una explicación para tí si que la verías bien, pero para niños no te convence
A: No porque a lo mejor es ... ; hombre, es que, por ejemplo yo aplicaría esta (se refiere a la explicación II), luego esta la vería como complementaria (se refiere a la III)
P: ¿Por qué te convence la II?
A: Porque es más gráfica. Y entonces se ve claramente que hay tantas tortillas y que han sobrado estas 3, que son mitades; entonces, de esas mitades hace otro nuevo reparto, entonces se da cuenta de que no lo hace de una unidad sino que lo hace de mitades. De ahí ve a su vez que le quedan 2 trocitos que no son unidades, simplemente son 1/3 de la mitad. Entonces, otra vez lo mismo, y así lo ve de forma más gráfica
P: Osea, que este para el niño le ayudaría porque va viendo de forma gráfica y cómo se simbolizan las fracciones
A: Si de forma más real, ver que te quedan 1/3 que a lo mejor aquí no lo ves tan claro; si lo ves con las tortillas dibujadas ves más claro que hay 1/3, que es verdad que ocurre así... Primero haría esta, para que lo viera más claro que ocurre eso porque es verdad, osea tú repartes y te quedan tantos trozos, pero no son de unidad sino que son mitades. Y luego esta la veo que estaría bien, pero con una explicación; osea, el por qué de que esto lo pones en corchetes y esto en paréntesis
P: Osea, que habría que especificar los símbolos que se utilizan qué están representando
A: Si, y acompañados de algo hablado. Osea, yo por ejemplo, cuando hacía estos repartos siempre me ayudaba hablando porque tenía que entender que esto es 1/3 de tortilla, y que esto es 2 tortillas entre 7 personas; pero acordándome que todas esas eran de tamaño 1/3; entonces, acompañándola de un lenguaje oral ...
P: Osea, tu propuesta sería que él lo viese gráficamente para que se diese cuenta el tamaño de lo que queda. Y una vez se hubiese familiarizado con eso pasarlo aquí (se refiere a la explicación III), pero acompañado de pautas verbales
A: Si. Que se diera cuenta, porque tienes que ir atendiendo a las fases siguientes; entonces, si lo ha visto primero gráfico luego en lo escrito se acordará de que en la primera fase la tortilla era de 1/2, en la otra era de 1/3. Y luego ya, a lo mejor, la explicación más técnica
P: Esta explicación tiene un lenguaje muy técnico, muy abstracto a lo mejor (se refiere a la explicación III)
A: Yo, por ejemplo, hasta que lo tuve que entender es que tenía que hacerlo viendo la situación y lo tenía que ir hablando a la vez que lo escribía, porque sino me complicaba.
P: Pero yo he visto que al hacerlo en el papel no lo has dibujado.
A: No, bueno, antes de llegar a aprender esto me lo dibujaba.
P: Ahora ya no te hace falta
A: A veces sí. Bueno ahora me he dado cuenta de que sí porque se me ha olvidado (tacha lo que había escrito porque descubre que es incorrecto)
P: Bueno, pues pasamos a otra

**TAREA 4**

P: Vamos por partes, porque hay 3
A: En esta primera me parece que lo ha justificado bien
P: ¿El resultado es correcto?
A: Sí
P: ¿Y lo justifica bien?.
A: Si
P: Ten en cuenta que justifica esto y aquí dice cómo lo ha conseguido
A: La justificación si me parece correcta. Me parece que lo razonado bien, porque él entiende que hay 2 personas y 1 tortilla entonces si la tortilla la divides entre 2 personas es rápido, enseguida ves que les toca media tortilla a cada uno. Entonces, si.
P: Eso es que le toca media, pero él habla de que les toca a 0,5
A: ....
P: Para que te centres, este es un número que indica una cantidad y este es otro número que indica una cantidad; 1/2 y 0,5 si son iguales deben representar la misma cantidad, ¿es cierto eso?
A: ...
P: Tú has dicho que 1/2 indica que al repartir la tortilla corresponde media a cada uno ¿y el

0,5?

A: Si porque es la mitad de 1

P: ¿Y cómo se puede comprobar que eso es la mitad de 1?

A: Porque si un redondo, que es la tortilla, vale 1, si tú la divides por la mitad .... A ver .... Porque una unidad, claro, si él te habla de décimas, para él en una unidad ... En una unidad, para él hay, hay 10 décimas; entonces, por la explicación que dice aquí, entonces si una unidad son 10 décimas lo divide por la mitad y entonces, para él, una parte son 5 décimas y la otra son otras 5

P: Entonces, 1/2 y 0,5 se podría ver que representan lo mismo, ¿cómo se haría eso?, ¿gráficamente?.

A: (Asiente con la cabeza)

P: Bien pasamos al segundo

A: En el segundo también lo justifica bien, porque se da cuenta que no hay individuos y aunque haya tortillas no se puede repartir. Un reparto donde no hay individuos pues no hay reparto

P: No hay reparto

A: Da 0

P: Osea, que eso es correcto. Y aquí justifica cómo lo ha hecho

A: (Lee: he puesto 0 porque no se puede hacer la división). La división no se puede hacer porque no hay individuos para repartir

P: Luego la división no se puede hacer es correcto ¿y el que haya puesto 0?

A: No hombre, esto no estaría correcto porque si ha puesto 0 es porque no se puede hacer el reparto; el reparto no se puede hacer porque no hay individuos.

P: Pero eso ya lo ha puesto aquí. El chico, cuando le han dado ese número y le han dicho que lo escriba con notación decimal el dice que yo siempre lo que hago es dividir. Entonces, ¿cómo hubiese hecho la primera división?

A: ¿La primera?

P: Sí, el chico dice que divide el numerador entre el denominador. Hazla tú a ver cómo saldría

A: Veía que no cabe y pondría un 0

$$\begin{array}{l|l} 1 & \underline{\ 2\ \ \ } \\ 0 & 0{,}5 \end{array}$$

Escribe

P: Pasamos al segundo caso, ¿cómo lo habrá hecho el chico?

A: En este segundo caso ha hecho esto

$$\begin{array}{l|l} 4 & \underline{\ 0\ \ \ } \\ 0 & 0 \end{array}$$

Escribe

P: ¿Eso es correcto?.

A: ....

P: Osea, que el chico va viendo lo que le sale y luego la justificación, una vez que le ha salido las cosas, lo justifica de esta manera. Entonces, ¿lo que ha hecho aquí en la división es correcto?

A: ....

P: Aquí cuando llega a justificar dice que si se considera un reparto, entonces no hay individuos, no se puede hacer el reparto y hay que decir que es 0, ¿eso es correcto?

A: ....

P: Bueno, pues pasamos al tercer caso

A: En el tercero yo no entiendo su explicación

P: Vamos por partes ¿el resultado es correcto?

A:Sí

P: El dice que lo hecho dividiendo ¿es correcto?

A: No, da 3 con 3

P: A ver, hazlo

A: Escribe

$$\begin{array}{r|l} 11 & \underline{\ 3\ \ \ } \\ 20 & 3{,}\overline{6} \\ 2 & \end{array}$$

A: En este caso se ha dejado llevar por la intuición, porque dice se parten las tortillas en 3 trozos iguales. Osea, el ya supone que como número entero da 3, osea que se pueden coger

3 tortillas enteras.

P: No dice exactamente eso

A: Dice se parten las tortillas en 3 trozos iguales y cada persona se lleva 11 de esos trozos

P: Osea, él parte de esta fracción 11/3

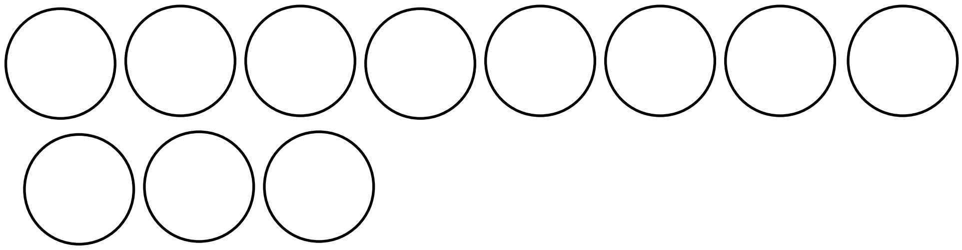
A: Si .... Osea, las 11 tortillas las divide en 3 partes y cada persona se lleva 11 trozos ...

P: ¿Eso es correcto?

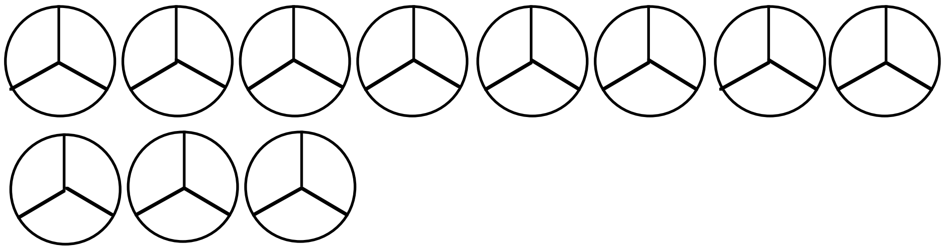
A: .... Si, si se lo ha hecho gráficamente si. Osea, él se habrá dibujado las tortillas y lo habrá hecho

P: Tú trata de ver cómo lo ha hecho

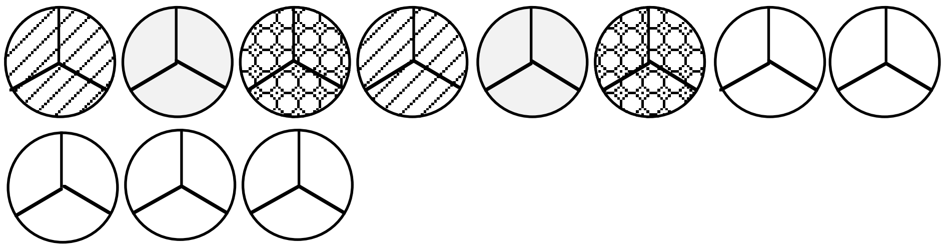
A: 11 tortillas



Las habrá dividido en 3 trozos cada una



Y se habrá dado cuenta de que, por ejemplo la primera persona hace esto, la pinta de rayas; la segunda que participa hace esto, y la otra de redondos. Y así todo el rato



P: Osea, que esa primera parte parece que sí que tiene razón

A: Que se habrá dado cuenta de que cada uno recibe 3 tortillas enteras,. Luego, de todo eso le habrán sobrado ... A ver, luego se habrá dado cuenta de que le sobran 2 tortillas enteras, que tiene que repartir entre 3 personas. Entonces, lo que ha hecho ... es que lo de las 10. ... Luego lo ha dividido cada una en 10 partes. Es que eso no lo entiendo mucho ..... Es que la última parte no ....

P: ¿No entiendes lo que quiere decir?

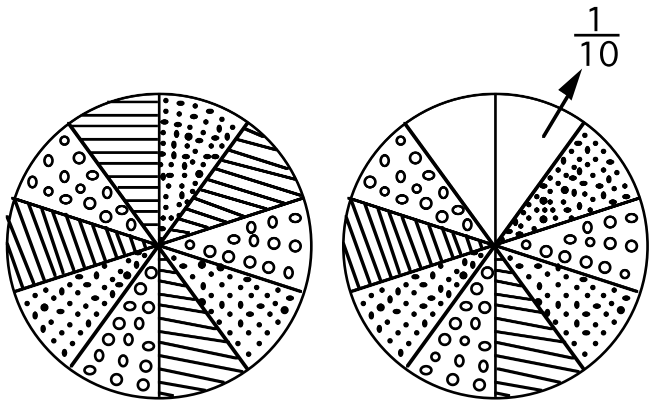
A: No ....

P: Un poco la idea es que esas tortillas tú las divides en 10 partes, las fraccionas en 10 partes iguales; ahora ¿cuántas personas participan en este reparto?

A: Tres

P: Intenta repartir eso y a ver qué ocurriría, ¿cuántos trozos de esos corresponderían a cada persona?

A: Hace el siguiente dibujo




...... Ocho

P: ¿A cada persona?

A: ¡Ah, no! .... A cada persona cinco

P: ¿Cada persona 5?, ¿Y sobra algo?

A: Y sobra un trozo... Bueno 6

P: 6 para cada persona, ¿y cuánto sobra?

A: Y sobra 1/5

P: ¿Eso es 1/5 de tortilla?

A: Bueno, 1/10 ....

P: Osea, que aquí lo que sugerirías que sobra algo. Osea, que tú divides las tortillas en partes y sobra algo y se vuelve a repartir ese trozo que sobra y así. Eso es lo que habla de que cada uno recibiría infinitos trozos.

A: Si porque todo el rato se volvería a repetir el mismo reparto, osea siempre sobraría algo

P: ¿Y cuánto recibiría cada persona?. Osea, lo que estamos intentando ver es si el chico razona adecuadamente

A: ....

P: Osea, él ha dicho que si se hace esto como reparto cada una de las personas se llevaría 11 trozos después de dividir la unidad en 3 partes iguales. Pero que si lo hacemos de otra manera, que sería ésta, cada persona se llevará 3 coma 6 periodo. ¿Y eso qué significa?

A: 3 tortillas enteras y 1/6 de tortilla, pero infinito.

P: ¿1/6 de tortilla? A ver, cómo se explica eso de 1/6 infinito

A: Sería 3 tortillas enteras y luego .... de lo que queda se haría un nuevo reparto, infinitos repartos ...

P: Pero aquí dice lo que le toca a cada uno. Estamos intentando ver si es verdad que esta cantidad que les toca hecho el reparto de una manera y de otra manera, que es igual. Entonces, ¿Tú que ves que les toca?, 3 tortillas ¿y cuánto más?

A: Y ... 0,6

P: ¿Y la rayita de arriba?

A: Bueno, periódico

P: ¿Y eso cómo se interpreta? A ver, 3 tortillas enteras ¿y?

A: Y infinitos trozos; osea, muchos trozos de ..., que siempre va quedando.

P: Pero nosotros vamos a intentar representarlo. 3 tortillas enteras está claro. Pero el 6 período ese que aparece ahí ¿gráficamente cómo sería?

A: ... 3 tortillas .... Pues no lo se

P: No sabes; osea, tú cuando ves el número 3 con 6 periodo ¿cómo se puede escribir de otra manera?, ¿qué número representa el período?

A: El 7

P: El 7. Osea, que este número escrito de otra manera ¿qué sería?

A: Aproximadamente 3,7

P: 3,7, ¿Y sin aproximarse?

A: 3,5 .....

P: Yo lo que te quiero decir es que a tí cuando te dicen escribe cuatro con cinco, tú escribes 4,5. Eso tú lo haces así. Pues ahora te digo al revés, ahora tú has visto escrito este número (se refiere a $3,\overline{6}$ ), entonces utilizando la notación decimal habitual, ¿esto cómo se escribiría?, ¿tú dices que como 3,7?

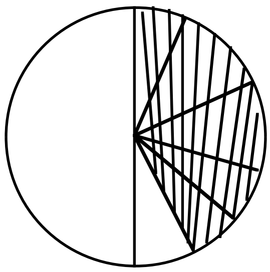
A: Más 3,6; osea 3,5. No 3,6

P: ¿Esto es lo mismo que 3,6?

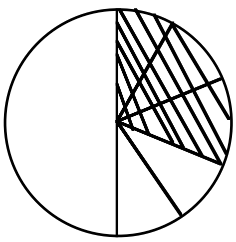
A: No es lo mismo

P: Pues este número ¿a qué es igual?

A: ....
P: No es 3,7, no es 3,6
A: Estaría entre estos dos
P: ¿Y el número 3,66?
A: Sí
P: Este sí que es
A: No, se aproximaría
P: ¿Y número el 3,666?
A: Tampoco. Osea, es que serían aproximaciones, pero exacto no.
P: No se podría escribir exactamente ese número. Entonces, tú ves que al chico le resultaría difícil de explicar. Osea, ¿la explicación que da no está muy clara?
A: Hombre, yo la última parte no ...
P: No la ves bien. A ver, eso que dice cada una de las personas recibiría infinitos trozos, ¿eso es correcto?
A: ... No, infinitos trozos de tortilla no; simplemente que siempre se repartiría algo de tortilla, pero cada vez quedaría menos
P: Pero él lo que dice, en principio, es que si le tocarían infinitos trozos
A: Infinitos trozos sí, aunque fueran pequeños.
P: ¿Y de qué tamaño serían?
A: Cada vez más pequeños.
P: Al principio le tocarían 3 tortillas, y luego ¿qué parte de tortilla le tocaría?
A: ¿Qué parte? ...
P: Si, porque el niño dice que le tienen que tocar infinitos trozos, pues vamos a ver algunos de ellos; osea, al principio tú ya has visto claramente que se les dan 3 tortillas y ahora, ¿qué cantidad está indicando eso? Tú dices que es 3, 6666 con muchos seises
A: Sí
P: Pues vamos por partes. Esto (señala el primer 6 después de la coma decimal), ¿qué cantidad de tortilla es?
A: ....
P: Vamos a ponérnoslo más fácil. Si tú ves escrito 3,45, ¿aquí que lees si esto son tortillas?, esto son 3 tortillas enteras y luego, ¿esta otra parte?; este 4 o este 5, ¿cómo lees esto?
A: 0,45
P: Y ese 0,45 si tú lo tuvieses que dibujar, en un gráfico, si esto es la tortilla entera (dibuja un círculo) ¿0,45 cuánto sería?
A: Sería menos de la mitad

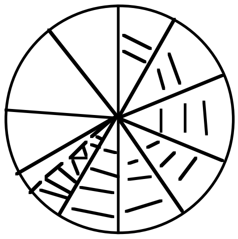


(Dibuja la figura
P: Pero ¿cuánto exactamente?, ¿podríamos acercarnos más?, ¿cómo podríamos saber exactamente cuánto es?
A: ....
P: Vamos a ponérnoslo más sencillo: 0,3 ¿eso cómo lo pintarías tú en un dibujo?
A: (Hace el siguiente dibujo



mientras dibuja va diciendo: si esto es 0,5, esto sería 0,3 (raya la parte que se indica en el dibujo)
P: ¿Y 0,45?
A: (lo indica en el gráfico)
P: Pues bien; y ahora ¿0,66?

A: (Hace el siguiente dibujo



De este trozo tendría que hacer

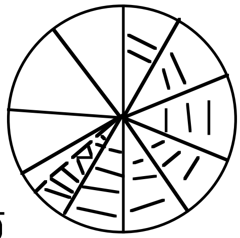
P: ¿Ese último trozo que has pintado, ¿más o menos qué representa?,

A: ....

P: ¿Cómo lo has obtenido?, ¿por qué no lo has pintado más grande o más pequeño?

A: Representa, a ver ... 1/6 de 1/5 que sería 1/30 (lo escribe junto la figura)

$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$



P: Osea, eso es lo que hace referencia a este 6, ¿no? (se refiere al 6 de las centésimas en 3,66). Porque tú aquí has pintado 6

A: 6 trozos de 1/5. He cogido 6 trozos de 1/5 y luego el que me queda pues de 1/5 lo he dividido en 6 partes.

P: Osea, que cuando hay que representar decimales tú lo que haces es dividir en 5 partes, ¿no la unidad?

A: No, la mitad. La unidad en 10

P: Osea, estás dividiendo la unidad en 10. Entonces, tú aquí has cogido 6 y luego este otro lo que haces es dividirlo en otras 6 partes

A: No en 10 también. Aquí quedarían 4.

P: Muy bien. Entonces, a ver, ¿porqué el chico dice que hay infinitos trozos?

A: ....

P: No olvides que lo que estamos intentando es ver si lo que ha escrito es correcto o no, para poderle ayudar

A: A ver ..... No, porque siempre se va a ver en la misma situación; siempre va a tener, ... siempre es la misma situación que se va repitiendo continuamente; le va sobrando un trozo, y eso a su vez lo reparte de nuevo en las mismas personas y de nuevo le queda. Osea, ese trozo lo reparte ...

P: Entre las 3 personas esas de que habla ahí

A: Sí ... Y otra vez se encuentra la misma situación

P: Osea, lo que dice de que les van a tocar infinitos trozos de tortilla, ¿eso es cierto?

A: .... No ....

P: Lo que él estaba repartiendo eran 11 tortillas para 3 personas; ya les había tocado a 3, y luego, como tú te habías dibujado antes, aún les quedan 2 tortillas para repartir. Entonces, cada persona ¿cuánto se lleva de estas tortillas?

A: .... 6 trozos

P: ¿De qué tamaño son cada trozo?

A: De 1/10. No. Sí, de 1/10

P: 6 trozos de tamaño 1/10, ¿cómo se escribe?

A: (escribe) $6\frac{1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

P: ¿Y si yo lo quisiese escribir con decimales en vez de con fracciones?

A: Pues sería 0,6

P: Entonces, vamos a ver, una persona se ha llevado ya 3 tortillas y vuelven a repartir esto y se lleva 0,6 de tortilla, y ¿aún quedan trozos por repartir o ya se ha acabado el reparto?

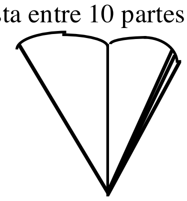
A: Aquí se acaba, ya se ha terminado. Bueno sí, queda un trozo de 1/10

P: Queda 1/10, ¿lo has contabilizado bien?

A: Sí

P: A ver, aquí una persona se ha llevado 6, otra persona se ha llevado otras 6 y la tercera persona se ha llevado otras 6

A: Si, y luego queda 1/10
P: ¿Seguro?, ¿cuántos trozos había en total?
A: En total había 20
P: ¿Y cada persona se ha llevado?
A: 6. Osea, 6 sí
P: Pues si tenías 20 y cada persona se ha llevado 6 y había 3 personas, ¿cuántos trozos quedarán?
A: A ver, a ver .... 2
P: Bueno, sobrarían 2. Osea, que habría que volver a repetir el reparto con los 2 trozos que quedan. Entonces, volviendo al niño eso de que dice que hay infinitos trozos: primero les han dado 3, después les han 0,6 de tortilla, ¿es verdad que al final aparecerán infinitos trozos?
A: A ver .... Luego le quedarían trozos de 1/10, ¿no?; 2 trozos de 1/10 .... y .... No se ...
P: Esos trozos, ¿qué tendría que hacer con ellos?
A: Dividirlos entre las 3 personas.
P: Bueno, ¿y cómo había hecho antes con las tortillas para dividirlas entre las 3 personas?
A: Dividirlo en 10 partes. Lo dividiría esta entre 10 partes y esta también.



(hace el dibujo)
Entonces, le ocurría otra vez lo mismo: tendría 20 trozos, le tocarían a cada uno de esos trozos 6, y le quedarían de nuevo 2 trozos más pequeños
P: Entonces, ¿cuánto se llevaría una persona en la segunda fase del reparto?
A: (Señala sobre el dibujo)
P: No gráficamente, sino simbólicamente
A: Simbólicamente 0,66 ¿no?
P: Tú lo que has dicho es que se lleva 6 trozos, pero ¿de qué tamaño son esos trozos
A: De 1/10
P: De 1/10 ¿de qué?, ¿de la unidad?
A: 1/10 no. De tamaño, osea 6 trozos de tamaño 1/10 y a su vez de tamaño 1/10
(escribe) $6\frac{1}{10}\, x\, \frac{1}{10} = \frac{6}{100} = \frac{3}{5}$
P: ¿Y escrito con notación decimal?
A: (Hace el siguiente cálculo)

$$\begin{array}{r|l} 300 & 50 \\ \hline & 0´06 \end{array}$$

0,06
P: Muy bien. Y aún quedarían por repartir, ¿no?
A: Otros 2 trozos
P: Y si hicieses el reparto, ¿cuánto se llevaría cada uno de los individuos?
A: Lo mismo. Ocurriría otra vez lo mismo, se llevarían 6 partes, pero serían de tamaño de 1/10, otra vez de 1/10 por otro 1/10. Entonces, serían de tamaño 1/1000
P: ¿Y escrito con notación decimal?
A: Sería 0,006
P: Bueno, pues entonces vamos a ver si podemos responder a la cuestión que nos ocupaba: ¿una persona recibirá infinitos trozos?
A: ... Sí
P: Recibirá un trozo ¿de qué tamaño?
A: De 1/10
P: No, un trozo de tamaño 0,6. Luego otro trozo ¿de tamaño?
A: 0,06
P: Luego
A: 0.006, 0,0006
P: Luego, ¿es verdad que recibirán infinitos trozos?
A: Sí
P: Y luego sigue el chico: osea, una cantidad infinita de tortilla
A: .....

P: Osea, que si tú coges este trozo y este trozo, y este, al final ¿le dará una cantidad infinita?
A: ....
P: Porque aunque los trozos son pequeños, como hay tantos, al final ¿le dará una cantidad infinita?
A: Si
P: ¿Estás convencida de eso?
A: Sí, porque no llegará a la solución, bueno a una solución exacta.
P: No, pero lo que él plantea es que como le van dando infinitos trozos, si tú los juntas al final tendrá que salir infinito la cantidad, ¿eso es correcto?
A: Si.
P: Tú piensas que si. Bueno, pues vamos a ver este chico que ha contestado varias cosas; por revisar todo lo que hemos hecho ¿la primera cuestión está bien hecha y bien razonada?
A: Si
P: ¿La segunda cuestión
A: También
P: ¿La tercera?
A: También
P: También. Entonces, ¿no habría que explicarle nada?
A: ... No
P: Bien. Pues ahora queremos que siga avanzando, tú ahora ¿qué tarea le mandarías al chico este?
A: ¿Qué tarea?
P: Si, porque los chicos que están en el colegio cuando terminan una tarea si no hacen otra se aburren
A: .....
P: Imagínate que estas de profesor, les han mandado esta tarea, ya te la han resuelto y ahora ¿qué les dirías que hiciesen?
A: .... Pues, que lo representaran gráficamente y por fases
P: ¿Volver a revisar este ejercicio?
A: Y verlo por fases
P: Pero si tú dices que ya lo han hecho bien, los chicos lo tienen claro, ¿no?
A: ....
P: Yo digo algún nuevo trabajo
A: .....
P: No se te ocurre
A: ....
P: No se te ocurre nada. Bien, pasamos a la última.

**TAREA 5**

A: Me parece más correcto
P: Vamos por partes. El A
A: En la primera el planteamiento del problema no está mal, pero no es una situación lógica el decir que a cada uno les tocaba 6,137 tortillas, eso no se dice; se puede decir 6 tortillas y 1/2, pero no 6,1 con 37
P: Lo que ocurre es que al chico como le dan estos número y tienen que aparecer
A: Si, entonces, la situación no la veo; vamos que no es una situación real
P: Pero lo que parece que busca el profesor es saber si encuentran alguna situación que se
A: Sí, el planteamiento es correcto porque si que implica la división de una parte; osea, el tener esta tortilla y luego repartirla entre otras 6 personas. Si, porque te dice que cada uno tiene estos trozos de tortilla y que luego vienen 6 amigos y lo vuelven a repartir. Osea, no es una situación muy real, pero la operación se haría
P: Muy bien, ¿y la segunda?
A: Y la segunda. En la segunda la situación es más real y también es correcta
P: ¿La idea de división es la misma en las dos?, ¿te parece que tienen la misma idea de división?
A: No. En la primera es idea de reparto; osea, para él la idea de división es repartir un trozo de tortilla entre unas personas; mientras que en la otra es saber que si lleva este ritmo, esta velocidad, durante todos los kilómetros que hace, pues si hace 6 kilómetros en un kilómetro ¿cuánto ... Espera a ver ... No, esto estaría mal, porque si te dice que lleva una velocidad constante quiere decir que en todos los kilómetros lleva esta velocidad; entonces, luego el te pregunta que cuál es la velocidad en cada uno de los kilómetros: en cada uno de los kilómetros es esta
P: Osea, que eso no respondería al enunciado

A: No, porque la velocidad que lleva durante los 6 kilómetros es esta, a lo largo de todo el recorrido. Entonces, no sería correcto preguntar que en cada uno de los kilómetros qué velocidad lleva
P: Porque para saberlo no hay que hacer ninguna división.
A: ... No
P: Y la respuesta que tú darías ¿cuál es?
A: 6, 137
P: Porque eso no es división
A: No porque si lleva una velocidad constante de 6 coma 1 con 37 quiere decir que en todos los kilómetros que hace lleva la misma velocidad
P: Osea, que la respuesta del niño B sería incorrecta, porque lo que le pide el profesor es que plantee un problema que se resuelva por ahí
A: Donde esa cantidad se divida entre 6 personas, o 6 lo que sea
P: Bueno, pues aquí hay dos niños. En tu opinión el niño A lo hace bien y el niño B ¿le tendrías que dar alguna explicación?
A: El niño B es que no tiene; osea, no tiene la idea de repartir, osea de división, no tiene claro que es repartir. Osea, es una cantidad o algo que lo divides entre unas personas
P: Entonces, ¿cómo se lo explicarías?
A: Pues que en la situación que ha planteado no sería correcto, porque si él dice que la velocidad constante es ésta, quiere decir que durante todos los kilómetros lleva la mima velocidad, osea no cambia. Entonces, si tú quieres saber cuál es la velocidad en un kilómetro, durante un kilómetro, sabes que es 6 coma 1 con 37, porque la velocidad no te cambia durante todo el camino. Lo lógico sería decirle ha llevado una velocidad durante los 6 kilómetros de tanto, de 6 coma 1 con 37, y entonces tú quieres saber el ritmo que llevaba, si se supone que durante los 6 kilómetros ha llevado el mismo ritmo, pues entonces qué velocidad llevaba en cada kilómetro. Osea la idea ..
P: Es quitar lo de constante, ¿no?
A: Si
P: Entonces, ¿qué tipo de enunciado le sugerirías tú al chico?
A: Pues que un corredor ha llegado a la meta en un tiempo, en este tiempo, se supone que el ritmo que ha llevado es el mismo durante todo el trayecto, y queremos saber en cada kilómetro cuánto tiempo tardaba
P: Y con esa explicación ¿sería suficiente para que el niño entendiese que era una división?
A: Yo pienso que si
P: Entonces, la idea que tú le estas dando de división ¿es la misma que la del chico A?
A: Hombre aquí es repartir (señala la respuesta del niño A). Aquí es saber que si en 6 kilómetros ha tenido este tiempo en un kilómetro, lógicamente tendrá que ser el tiempo total dividido por todos los kilómetros que ha hecho.
P: Entonces, estas ideas de división ¿son diferentes?
A: Hombre, es más fácil de entender la idea de división a lo mejor por lo de compartir, osea lo de repartir ...
P: Entonces a este niño (se refiere al B) ya le habrías hecho la corrección.
A: Hombre, también me aseguraría si tiene claro la división en situaciones de reparto. Si la tiene claro igual es porque el enunciado de estos problemas le resulta más complicado
P: ¿Y a este chico A?
A: Le plantearía problemas de este tipo.
P: Pero lo que está proponiendo el profesor es al revés. Entonces, si le propones ya un enunciado el chico escribirá lo que considere más oportuno
A: .... Bueno pues .. El niño A sí que lo ha entendido
P: Si hubiese que seguir la clase ahora, ¿qué propuestas les harías a los dos chicos?
A: ...
P: Al alumno B ya le has explicado alguna cosa, ahora qué otra actividad. A ver si se te ocurre alguna
A: .... Les pondría problemas, ¿no?
P: ¿De qué tipo?
A: ¿De qué tipo? ...
P: Escribe el enunciado de algún problema
A: A ver, por ejemplo
P: Escríbelo mejor para que luego lo puedas ver, porque si lo dices oralmente se te pueden olvidar detalles
A: (Escribe)

Un hombre va a una gasolinera y llena su depósito entero (50 cavidad) y le cuesta 5500 ptas. ¿Cuánto vale cada cavidad por separado?

Es que no sé si está bien. (Lo lee) *Un hombre va a una gasolinera y llena su depósito entero que tiene 50 de cavidad* Es que no sé como va el coche *y le cuesta 5500 pesetas, ¿cuánto le costará cada, si llena solamente una cavidad por separado?* Lo que pasa es que no se cómo se dice en los coches

P: ¿Una?

A: Lo que pasa es que no se cómo se dice en los coches; osea, si todo el depósito entero, lo que tenga de cavidad, le vale 5500, pues ¿cuánto le habrá costado ...

P: ¿Cómo se miden los líquidos?

A: Por litros

P: Entonces ¿cómo tendría que decirse?

A: ¿Cuánto vale cada litro de gasolina?

P: Muy bien. Entonces eso se lo pondrías al alumno A y al B, ¿con qué intención se lo pones al alumno A?

A: Para que esté en una situación diferente a la de repartir

P: Muy bien. ¿Y al alumno B?

A: Para ver si lo ha entendido

P: ¿Nada más? Pues ya está

A: Me ha salido muy mal