FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Integrales de Línea con DERIVE. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación

Tesis Doctoral de

YOLANDA PADILLA DOMÍNGUEZ

dirigida por

JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MARÍ

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

DICIEMBRE DE 2003

D. José Luis González Marí, Titular de Universidad del Área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,

CERTIFICA:

Que Dª. Yolanda Padilla Domínguez, Licenciada en Ciencias (Matemáticas), ha realizado en el Área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga, bajo mi dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral titulado:

Integrales de Línea con DERIVE.
Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación

Revisado el presente trabajo, estimo que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo.

Y para que conste a efectos de lo establecido en el artículo octavo del Real Decreto 778/1998, autorizo la presentación de este trabajo en la Universidad de Málaga.

Málaga, a 25 de octubre de 2003

Dr. José Luis González Marí

A mis hijos
Pablo y *Paula*

A mi marido
Pedro

"Decir que se está enseñando
cuando nadie está aprendiendo
es decir que se está vendiendo
cuando nadie está comprando".

John Dewey (1934)
(filósofo norteamericano)

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas y cada una de las personas que, de alguna manera, han colaborado para que este proyecto salga adelante.

En primer lugar a mi director, *José Luis González*, por haber creído y confiado en el futuro positivo de este trabajo. Su entrega al trabajo de forma incansable y el estar siempre dispuesto a ayudar y colaborar en todo lo necesario ha sido indispensable en el desarrollo de esta tesis doctoral. Muchas gracias, has sido el verdadero motor de esta investigación.

En segundo lugar y por muchas razones a *José Luis Galán*. La más importante por ser un gran amigo y además por ser un buen compañero de Departamento, buen compañero de asignatura, buen compañero de despacho y por supuesto, estrecho y próximo colaborador imprescindible en este proyecto.

Seguidamente agradecer a *Alfonso Ortiz* su apoyo y confianza que, además de sus opiniones y sugerencias, han servido tanto para perfilar inicialmente este proyecto como para que llegue a su fin.

En esta relación de agradecimientos quiero incluir a todas aquellas personas que han colaborado con la ingrata tarea de leer, corregir, detectar erratas y aportar todo tipo de sugerencias, destacando entre ellas a mi suegro, *Ricardo Rodríguez*, persona a la que quiero mucho y a la que tengo que agradecerle, no sólo su apoyo en este trabajo, sino su colaboración en muchos de los proyectos de mi vida que gracias a él se han hecho realidad.

También quiero agradecer a *Gabriel Aguilera*, *Sixto Sánchez* y *Enrique Mérida* el tiempo que han dedicado a colaborar mediante opiniones, que aunque pudieran parecer insignificantes, han sido piezas claves para este trabajo.

Siguiendo con esta línea quiero agradecer el apoyo recibido de mis compañeros del *Departamento de Matemática Aplicada,* en especial a su directora, *Inmaculada Pérez de Guzmán*. Además, no me quiero olvidar de los miembros del *Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales*. Muchas gracias por haber acogido este proyecto y fomentar la tan necesaria, pero lamentablemente muchas veces escasa, colaboración entre Departamentos.

Gracias también por el apoyo moral a todos los familiares y amigos que siempre están ahí animándome y ayudándome, dentro de sus posibilidades, a conseguir mis objetivos. En particular a mi hermana *Sonia Padilla* y en especial a mis padres, *Carmen Domínguez* y *Juan Padilla*, que con su sacrificio y dedicación han conseguido que yo esté donde estoy y sea quien soy.

Por último, el agradecimiento más importante para *Pedro Rodríguez*, buen compañero de Departamento, de asignatura, de despacho, de investigación, pero sobre todo buen marido. Con su dedicación exclusiva ha conseguido que este trabajo saliera adelante. No me queda ninguna duda que sin él este proyecto no hubiese llegado a buen fin. Muchas gracias. Te quiero.

Índice General

Introducción

El presente trabajo forma parte de una línea de investigación en *Educación Matemática*[1] denominada *"Investigación para la innovación curricular en la acción".* Los estudios dentro de esta línea tratan de indagar, con pretensiones innovadoras, en los fenómenos educativos reales en el aula de Matemáticas, tal y como se producen, allí donde se producen, con la participación directa de los principales protagonistas y con las mínimas modificaciones compatibles con las condiciones reales del desarrollo didáctico y con las orientaciones curriculares legalmente establecidas.

En el caso que nos ocupa se ha dirigido la atención hacia el diseño y desarrollo curriculares de las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería, un campo de fenómenos poco frecuentado por investigaciones regladas en *Didáctica de la Matemática.* No en vano, las características especiales de este tipo de estudios dificulta o hace prácticamente imposible todo intento de intervención y reflexión sosegada sobre la práctica diaria. A pesar de ello, los profesores y órganos de dirección del *Departamento de Matemática Aplicada* de la *Universidad de Málaga,* responsables de la docencia de las asignaturas mencionadas, han sabido apreciar la necesidad de la investigación sobre la enseñanza para mejorar el proceso didáctico y los resultados y aumentar la calidad de la formación de los futuros ingenieros.

El estudio realizado se basa en la modificación y posterior desarrollo del tratamiento didáctico del tema *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* del plan de estudios de primer curso de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.* Su propósito es el de analizar la viabilidad y los efectos de dicho tratamiento sobre el aprendizaje, la motivación,

[1] Desarrollada en el *Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales* de la *Universidad de Málaga.*

las actitudes, el rendimiento de los alumnos y el propio proceso didáctico y sus distintos factores. Para ello, se analiza la comparación de efectos de la metodología didáctica modificada (una metodología mixta que incluye la realización de comandos con DERIVE[2] a la que hemos denominado *experimental*) y de la metodología didáctica usual o tradicional (a la que hemos denominado *control*) y se aprovecha el desarrollo experimental para analizar la metodología de investigación y el marco teórico y para reflexionar sobre la validez y fiabilidad de los datos, la potencialidad innovadora de este tipo de estudios así como sobre el sentido y la intensidad de las posibles mejoras en el desarrollo futuro de la línea de investigación.

Pero la investigación que aquí se presenta no es el resultado de un trabajo aislado. Antes bien, ha formado parte de un proyecto más amplio de indagación simultánea en varias especialidades y grupos, sobre temas relacionados de diversas asignaturas y carreras de Ingeniería y con la participación efectiva de varios profesores responsables de la docencia correspondiente. Así, junto a la investigación que nos ocupa, se ha desarrollado un estudio simultáneo sobre el tratamiento didáctico de la materia *Integrales Mgúltiples* con el programa DERIVE, bajo el mismo marco teórico y metodológico, con la misma estructura y difundido con el mismo tipo de informe. Ambos estudios se han realizado sobre especialidades y grupos de alumnos diferentes, sobre contenidos distintos de la misma asignatura y bajo la responsabilidad de investigadores diferentes. Asimismo, los resultados han sido distintos, como corresponde a situaciones, personas y conocimientos diferentes, pero similares en lo fundamental y en la dirección esperada si se analizan desde un punto de vista global. Quizás lo más destacado sea el carácter cooperativo del trabajo, en el que cada investigador ha desarrollado un estudio específico y ha participado como observador, experto, consejero y auxiliar en los demás estudios realizados.

El informe consta de dos volúmenes: el *volumen I,* que incluye el informe de investigación propiamente dicho, los apéndices y la bibliografía, y el *volumen II,* dedicado a los anexos. El volumen I se divide a su vez en seis partes diferenciadas que se detallan a continuación, indicándose en cada una de ellas los capítulos que la forman y los contenidos correspondientes.

[2]Nombre comercial registrado del programa "*Derive 5.* The Mathematical Assistant for Your PC", propiedad de Texas Instruments.

- *Volumen I. Informe, apéndices y bibliografía*

I. *El problema de investigación*

En esta parte se exponen las referencias fundamentales distribuidas en dos capítulos: en el *capítulo 1* se presenta, de manera esquemática, el origen, la evolución y la delimitación precisa del área problemática y del problema de investigación, los objetivos y las conjeturas y el procedimiento seguido y las fases del estudio; en el *capítulo 2,* dedicado a los antecedentes y fundamentos teóricos, se expone el resultado de la recopilación, análisis y organización de la información publicada sobre el problema, las experiencias, reflexiones y actividades previas propias sobre aspectos relacionados, un análisis de la información a la luz del problema específico y de cara al planteamiento de los estudios posteriores y las consecuencias, en forma de orientaciones prácticas concretas, que se deducen para el modelo teórico y para el diseño y desarrollo del estudio empírico.

II. *Diseño del estudio empírico*

Para comprobar la viabilidad, eficacia y potencialidad innovadora del nuevo proceso de enseñanza y aprendizaje se realiza el diseño de la investigación que se expone en dos capítulos: en el *capítulo 3* se pueden examinar los aspectos generales de la metodología y del diseño, incluyendo la descripción de los distintos estudios, las estrategias y técnicas metodológicas, las variables y categorías para el análisis de datos, la población y muestras, los tratamientos didácticos diferenciados que se van a emplear y el análisis del tipo de investigación atendiendo a su modalidad así como en relación a las distintas perspectivas metodológicas; en el *capítulo 4* se presentan los distintos instrumentos de recogida y análisis de datos, indicando en cada caso su finalidad, características, estructura, formato y contenido así como su validez y pertinencia para el estudio.

III. *Estudio empírico: desarrollo y resultados*

La descripción del desarrollo del estudio y los resultados puntuales obtenidos son los aspectos que constituyen el núcleo de los dos capítulos que integran esta tercera parte: en el *capítulo 5* se describen los dos tratamientos didácticos implementados en los grupos control y experimental y se transcriben los informes de observación realizados sobre dichos desarrollos; en el *capítulo 6* se presentan los resultados obtenidos tras los primeros análisis de la información puntual proporcionada por cada uno de los instrumentos y técnicas de recogida de datos.

IV. *Conclusiones y perspectivas futuras*

En el *capítulo 7,* junto a un resumen del problema y de los resultados puntuales obtenidos, se dedica una atención especial al análisis de las relaciones entre los resultados puntuales y a las conclusiones de la investigación. Se culmina la exposición con una breve panorámica de los problemas e interrogantes a los que se les debe prestar atención en el futuro.

V. *Apéndices*

En esta parte se incluyen aquellos contenidos que, siendo relevantes para la investigación, no se ha considerado oportuno que formen parte del cuerpo principal de la memoria. Se trata de una decisión basada en la naturaleza de la información (datos no esenciales para la comprensión del problema y del estudio realizado), en los requerimientos del informe (necesidad de coherencia y fluidez de la exposición) o en las características del estudio (interés por una mayor clarificación de la investigación en su conjunto).

En el *apéndice A* se presenta el desarrollo del tema *"Funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales"* que ha servido para la realización de la prueba de nivel previa al desarrollo del estudio empírico; en el *apéndice B* se presentan los contenidos de la materia "*Integrales de Línea*", tema central de la investigación sobre el que se han desarrollado las dos metodologías didácticas, complementado con el *apéndice C* en el que se presenta la relación de ejercicios y problemas de dicho tema; en el *apéndice D* se presentan las prácticas con DERIVE de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación,* cuyo programa se incluye en el *apéndice E;* en el *apéndice F* se presenta la resolución de la prueba de nivel realizada antes de implementar el desarrollo de las dos metodologías didácticas; en el *apéndice G* se presenta la resolución de la prueba de evaluación realizada para medir los efectos de los dos tratamientos didácticos sobre el rendimiento de los alumnos; en el *apéndice H* se presentan las distintas tablas construidas a partir de los datos obtenidos con los diversos instrumentos; finalmente, en el *apéndice I,* se presentan las distintas tareas que se desarrollaron en la clase impartida en el laboratorio mediante la metodología experimental.

VI. *Bibliografía*

Esta parte contiene las referencias completas de los documentos que se han manejado en el transcurso de esta investigación.

- *Volumen II. Anexos*

El informe consta de un segundo volumen o libro de anexos que contiene las respuestas de los sujetos, tal y como ocurrieron, y las fuentes primarias de datos que han servido de base para la elaboración de los diversos análisis y conclusiones. Así, en el *anexo I* se detallan las respuestas de los alumnos del grupo control a la prueba de nivel; en el *anexo II* se disponen las respuestas de los alumnos del grupo control a la prueba de evaluación; en el *anexo III* se incluyen las respuestas de los alumnos del grupo control a la encuesta; en el *anexo IV* se detallan las respuestas de los alumnos del grupo experimental a la prueba de nivel; en el *anexo V* se encuentran los listados de los ficheros de DERIVE que recogen las actuaciones de los alumnos del grupo experimental en la clase de laboratorio desarrollada al final del tratamiento didáctico experimental; en el *anexo VI* se detallan las respuestas de los alumnos del grupo experimental a la prueba de evaluación; en el *anexo VII* se disponen las respuestas de los alumnos del grupo experimental a la encuesta; por último, en el *anexo VIII,* se transcriben las entrevistas mantenidas con los alumnos del grupo experimental.

- *CD-ROM*

El informe se acompaña de un *CD-ROM* que contiene los dos volúmenes antes descritos en formato *pdf.* El objetivo es proporcionar una versión adicional electrónica del informe que permita realizar consultas de forma más cómoda, gracias a la utilización de enlaces para acceder rápidamente a todas las referencias cruzadas de la memoria.

Parte I
El problema de investigación

Contenido de la parte I

Capítulo 1

Marco conceptual y metodológico

1.1. Introducción

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales de una investigación realizada para comprobar la viabilidad y eficacia de una modificación metodológica introducida en el desarrollo curricular ordinario de una asignatura de Matemáticas de primer curso de las titulaciones universitarias de Ingeniería. La nueva metodología contempla una utilización no convencional del programa DERIVE para favorecer el aprendizaje de las integrales de línea, basada en la construcción/programación de comandos relacionados con el contenido matemático mencionado y la posterior comprobación de su correcto funcionamiento sobre ejemplos de aplicación expresamente preparados para ello.

El estudio se centra, por tanto, en una innovación curricular en la práctica con la participación directa de todos los protagonistas y en los mismos escenarios naturales, para lo que ha sido necesario trabajar con numerosas limitaciones y superar las dificultades e inconvenientes derivados de las condiciones restrictivas que impone la práctica docente a cualquier proceso de indagación sistemática sobre la misma. Lo que ocurre en mayor grado cuando se trata, como es el caso, de una asignatura oficial de carreras universitarias altamente competitivas y muy demandadas y, por tanto, especialmente sensibles a los cambios y permanentemente sometidas al examen crítico de los alumnos, la institución universitaria y la sociedad. Pero las dificultades no han quedado ahí; a las exigencias de un trabajo de innovación educativa, se han tenido que añadir las propias de una investigación, tales como: sistematicidad, rigurosidad, imparcialidad, fundamentación, validez, replicabilidad, sometimiento a análisis crítico, publicidad y minuciosidad, entre otras, lo que no ha sido obstáculo para alcanzar, como se pondrá de manifiesto, lo que creemos que son resultados aceptables en todos los sentidos, en particular si se analizan detenidamente las condiciones en las que se ha llevado a cabo el estudio.

Por otra parte hay que decir que la contribución que se realiza es puntual y modesta en extensión, en lo que se refiere al problema específico, pero, al mismo tiempo, creemos que es importante en calidad y, sobre todo, en alcance y relevancia, en lo que se refiere al modelo y a la línea de trabajo. No hay más que tener en cuenta que el estudio se ha llevado a cabo con la participación de varios profesores de la asignatura, que los resultados ya se están empezando a aplicar en algunas asignaturas y que se ha puesto a prueba, por primera vez, un modelo de investigación que puede ser de utilidad en el futuro, tanto para el desarrollo de programas de investigación sobre innovación educativa en Matemáticas como para la implementación de nuevos planes de formación inicial y permanente del Profesorado.

En lo que se refiere al informe de investigación hemos elegido un tipo de exposición basado en aproximaciones sucesivas al problema estudiado mediante el desarrollo paulatino y acumulativo de diferentes aspectos del marco conceptual y metodológico empleado. Un proceso que ya se ha iniciado en los párrafos anteriores con pequeños adelantos introductorios que se continúan a lo largo de este primer capítulo con la descripción del problema y del área problemática y con algunos aspectos formales del estudio, como son los objetivos, las conjeturas o cuestiones de investigación y el marco metodológico empleado así como en los restantes capítulos de la memoria, a los que nos remitiremos en el momento oportuno.

En los apartados que siguen se exponen, por este orden, los siguientes aspectos del problema de investigación: en el apartado 1.2 se desarrolla una descripción esquemática del problema, convenientemente situada en relación con el área problemática y con los núcleos de interés del estudio; a continuación, en los apartados 1.3 y 1.4, se incluyen sendas explicaciones detalladas de los dos grandes pilares de la investigación, a saber, el marco teórico y metodológico y el problema específico de investigación; posteriormente, en el apartado 1.5, se describe la trayectoria seguida desde la realización de las primeras experiencias y la formulación de las conjeturas hasta la realización efectiva del estudio que se presenta; para finalizar se detallan, en los apartados 1.6 y 1.7, respectivamente, los objetivos y las conjeturas o cuestiones de investigación y, en las secciones 1.8 y 1.9, respectivamente, una breve descripción de la metodología de investigación y de las distintas fases del desarrollo de la misma.

1.2. Descripción general del problema

El trabajo de investigación se apoya en tres grandes pilares que vamos a desarrollar brevemente a continuación:

(A) El marco teórico o línea de trabajo.

(B) El problema específico investigado dentro de la línea mencionada.

(C) El marco metodológico en el que ha sido posible el estudio y que viene determinado por las características y condiciones impuestas por los dos aspectos anteriores.

En primer lugar, en cuanto al marco teórico (A), la investigación forma parte de una línea de estudio e indagación sistemática sobre los fenómenos de la Educación Matemática a la que hemos denominado *Investigación para la innovación curricular en la acción* ([González, 2003][1]). El fin primordial de esta forma de acercamiento a los problemas, cuyos principios y características se pueden examinar con detalle en [Galán, 2003] y en el presente informe (apartado 2.5.2), es el de comprender y analizar, con propósitos de innovación, los fenómenos mencionados tal y como se producen, allí donde se producen, con la participación directa de los principales protagonistas y con las mínimas modificaciones compatibles con las condiciones reales del desarrollo didáctico y con las orientaciones curriculares legalmente establecidas.

Como se puede comprobar en el apartado 1.3, en el que se explican más extensamente los principios y características del marco teórico y metodológico de la investigación, y a lo largo del desarrollo del capítulo 2, la tendencia de investigación

[1] Documento inédito en poder del autor y transcrito, en su mayor parte, en el apartado 2.5.1 del capítulo 2 del presente informe. Para una información adicional sobre los orígenes de esta tendencia ver [González, 1999a] y [González, 1999b] así como las demás referencias que se citan al respecto en el presente informe.

en la que se sitúa el presente trabajo ha sido acuñada recientemente y es una variante de una de las líneas desarrolladas en Italia en los últimos años bajo la denominación *Investigación para la innovación* ([Arzarello, 1999, Bartolini, 1998]). Su origen se puede situar en el análisis crítico de las características de los estudios desarrollados dentro de dicha tendencia ([González, 1999a, González, 1999b]), en el deseo de superar las carencias y limitaciones detectadas (ver apartado 2.4.4) y en la necesidad, sentida desde hace tiempo por un grupo numeroso de educadores matemáticos e investigadores en Educación Matemática ([Kilpatrick y otros, 1994, Rico, 1997]), de optimizar la investigación en condiciones holísticas y naturales, adaptar los modelos teóricos a dichas condiciones y a las situaciones reales en las que se desarrollan los procesos usuales de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, en definitiva, contribuir a un mayor acercamiento entre la investigación y sus resultados y la práctica docente ordinaria.

Tres son, por tanto, los núcleos que delimitan nuestra investigación desde el punto de vista de su marco teórico: *Matemáticas, Innovación* y *Currículo,* de tal manera que si hubiera que resumir el trabajo realizado en una sola frase se podría decir que se ha llevado a cabo un estudio de ***Innovación Curricular en el aula de Matemáticas***[2].

Pero el marco teórico, los principios que se toman como referencia para abordar los problemas o las prescripciones que guían la práctica investigadora, no tienen sentido ni utilidad si no es a través de su aplicación a casos particulares necesitados de indagación sistemática o sobre los que se puedan construir conocimientos fundados. En nuestro caso y en segundo lugar (B), al amparo de las condiciones y principios del marco mencionado, hemos desarrollado un estudio sistemático específico de innovación curricular centrado en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema *Integrales de Línea* ([Galán, 1998, Rodríguez y otros, 1996]) de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales*[3] de primer curso del plan de estudios de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga.* En dicha investigación ***se modifica la metodología didáctica usual, para observar sus efectos, mediante la sustitución de una par-***

[2]La denominación completa de la línea de investigación es la de *Innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas.* Hemos suprimido aquí la referencia a la investigación en la acción porque en este estudio sólo se emplean algunos principios de dicha concepción.

[3]Asignatura adscrita al Área de Conocimiento de Matemática Aplicada cuyo programa se detalla en el apéndice E.

te de las clases tradicionales de pizarra por clases en el laboratorio de informática en las que se utiliza la programación como recurso[4] ***didáctico y, en particular, la realización de comandos con el programa*** **Derive** ([Ortega, 2002b, Llorens, 2001, Camacho y otros, 2002, Kempski, 2002, Padilla y otros, 2002a, Padilla y otros, 2002d, Padilla y otros, 2003a]).

En consecuencia, los núcleos que delimitan el estudio desde el punto de vista del problema analizado son: el contenido *Integrales de Línea*, el nivel correspondiente a los *estudios universitarios de Ingeniería,* la *utilización* como recurso didáctico *del programa* Derive *en su vertiente de programación* y la *metodología de enseñanza* utilizada para el desarrollo de dicho contenido en los niveles indicados y empleando el recurso mencionado. También podemos decir que se ha desarrollado una investigación para la ***innovación curricular en el aula de Matemáticas sobre una metodología didáctica mixta con la ayuda de*** **Derive** ***para el desarrollo del contenido Integrales de Línea en los estudios universitarios de Ingeniería***.

En tercer lugar (C), para abordar con garantías los fenómenos y problemas descritos, en las condiciones mencionadas y con las restricciones y principios indicados, hemos tenido necesidad de emplear una metodología de investigación mixta, compleja, compatible y adaptada a las características del problema y del marco teórico, tal y como se expone con más detalle en los apartados 1.3 y 1.8 del presente capítulo y se explica con más detenimiento en el capítulo 3, al que nos remitimos para una información más precisa. Los núcleos que delimitan nuestra investigación, desde este punto de vista, son: una ***metodología compatible y adaptada*** a las diversas condiciones del problema específico y del marco teórico y una ***metodología mixta y compleja***, compuesta por técnicas y procedimientos diversos procedentes de distintos paradigmas. En concreto, se han utilizado técnicas y enfoques metodológicos que se pueden agrupar en torno a los siguientes núcleos:

1. Procedimientos y técnicas propios del *paradigma interpretativo-cualitativo* (entrevistas, observación, triangulación, etc.). ([Goetz y Lecompte, 1988, Taylor y Bogdan R., 1986, Denzin y Lincoln, 1994]).

[4] Empleamos el término recurso en el mismo sentido que le atribuyen [Carretero y otros, 1995] (páginas 82–83). Asimismo, esta forma de utilización se encuentra dentro de la categoría que Coriat ([Coriat, 1997], páginas 168–170) denomina “recursos simbólicos”.

2. Un enfoque parcial de los principios de la *Investigación en la Acción* en grupos naturales y desarrollada por los propios profesores ([Jackson, 1975, Cohen y Manion, 1990, Goyette y Lessard Hébert, 1988, Stenhouse, 1987, Stenhouse, 1984, Elliot, 1993]).

3. Procedimientos propios del *paradigma cuantitativo* (como diseño cuasiexperimental y contraste de hipótesis). [Bisquerra, 1989, Latorre y otros, 1996]).

Desde este punto de vista podemos decir que se presenta una investigación para la ***innovación curricular sobre una metodología didáctica experimental para el desarrollo del contenido Integrales de Línea con la ayuda de*** **Derive** ***en los estudios universitarios de Ingeniería, aplicando una metodología de investigación mixta, compleja, compatible y adaptada y empleando principios de la Investigación en la Acción***.

Los tres pilares: marco teórico, problema específico y marco metodológico han sido objeto de atención a lo largo del desarrollo del estudio. El marco teórico se ha perfilado y puesto a prueba en el caso específico estudiado; a su vez, el problema específico ha sido analizado por sí mismo y como objeto de estudio de la línea iniciada; por último, el marco metodológico ha sido también objeto de reflexión en cuanto a la pertinencia y efectividad de las medidas tomadas con respecto al problema específico y a las exigencias impuestas por las características y condiciones del marco teórico. No obstante, los tres aspectos mencionados se pueden reducir a dos: *problema específico* y *marco teórico y metodológico,* en la medida en que el tercero (marco metodológico) está prácticamente determinado por los otros dos, en especial por el marco teórico.

Los dos bloques, problema específico y marco teórico y metodológico, integran el problema de investigación y recibirán un tratamiento más detallado en los apartados que siguen así como en el capítulo 3, al que nos remitimos para una información más extensa. En concreto, en el apartado 1.3 se abordan algunas consideraciones sobre el marco teórico y metodológico, mientras que en el apartado 1.4 se hace lo mismo con el problema específico abordado. A continuación, en los apartados 1.5, 1.6 y 1.7 se exponen distintos aspectos formales del problema de investigación en su conjunto.

1.3. Marco teórico y metodológico

El marco teórico y metodológico que sirve de guía para el desarrollo de la investigación se caracteriza por los principios y condiciones que resumimos a continuación y que serán ampliados y explicados en el apartado 1.8 y en los capítulos 2 y 3.

1.3.1. Objeto del estudio

Nos proponemos estudiar, de manera fundada, sistemática y con propósitos de innovación, un problema o fenómeno educativo específico de carácter curricular en el marco del diseño y desarrollo curriculares ordinarios en un grupo natural de una asignatura de Matemáticas de un plan de estudios oficial.

Adoptaremos para ello los conceptos de currículo y de innovación curricular establecidos por [Howson y otros, 1981] y completados por [Rico, 1997]. Asimismo, partiremos de los estudios comparativos y longitudinales sobre enseñanza de las Matemáticas ([Romberg y Carpenter, 1986]) y tendremos en cuenta los estudios sobre materiales y modelos curriculares mencionados en ([Grouws, 1992]).

1.3.2. Finalidad

Con el modelo de trabajo que vamos a describir se pretende:

- Conocer a fondo los procesos reales, sin manipulaciones que distorsionen su naturaleza y características.
- Identificar y valorar las posibilidades reales de cambio curricular.
- Innovar; introducir modificaciones novedosas en dichos procesos reales para su optimización y mejora de los resultados.
- Crear y difundir conocimientos fundados sobre los fenómenos curriculares relacionados con la Educación Matemática en el aula ordinaria.
- Sustituir paulatinamente y de manera fundada: diseños, modelos, métodos, prácticas, contenidos y tareas que se muestran anacrónicas, obsoletas o ineficaces en las clases de Matemáticas, por nuevos elementos adaptados a las nuevas condiciones, medios y situaciones en las que se desarrollan los procesos educativos en esta materia.

- Proporcionar nuevas vías para la formación inicial y permanente del Profesorado, mediante su implicación en la innovación de su propia práctica docente y en la investigación en el aula con:
    - Una implicación corta en el tiempo pero relevante en cuanto a la aportación de conocimientos a la comunidad y a la sociedad y duradera en experiencias, formación y perspectivas.
    - Más frescura, improvisación, naturalidad, inmersión profunda en el propio objeto de su trabajo y más conocimiento práctico puro, sin descuidar las necesarias reflexiones teóricas sobre dicha práctica.

En este sentido adoptamos para la formación ideal del profesor de Matemáticas el programa que se propone en el seno del *paradigma ecológico* ([Pérez, 1985], página 125 y [Shulman, 1986], páginas 18–33), en el que, entre otros aspectos, se considera:

- La necesidad de la investigación en el aula para dilucidar sus entramados de relaciones y significados, lo que desemboca en la importancia de la investigación-acción para una correcta y completa formación.
- La consideración de que la vida en el aula se genera en la interacción y en el intercambio, siendo a través de la participación directa como se puede conocer con detalle.
- La necesidad de preparar al profesor para el análisis crítico y la interpretación subjetiva que proporciona significado a la realidad global de los fenómenos educativos.

Asimismo, estamos de acuerdo con las siguientes consideraciones de Oliveras, ([Oliveras, 1996], página 107): el profesor aprende como llega a conocer, es decir, por enculturación; se aprende lo necesario para la profesión (sentido didáctico); el producto del aprendizaje es un modelo personal holístico de funcionamiento.

1.3.3. Tipo de problema

Bajo el marco que estamos analizando se pretende abordar cualquier problema de investigación relacionado con la práctica educativa real en Matemáticas. Estamos hablando, por tanto, de problemas que involucran al diseño y desarrollo curricular del proceso didáctico usual en el aula de Matemáticas, lo que obliga a considerar los fenómenos en su globalidad y complejidad y como sucesos, que son, singulares e irrepetibles. Pero estas condiciones obligan a realizar pequeñas aproximaciones, es decir, estudios que requieran el diseño y desarrollo de modificaciones curriculares puntuales que se han de llevar a la práctica en las mismas condiciones naturales y con la mínima intervención posible sobre los aspectos no modificados. Del desarrollo curricular resultante se analiza su viabilidad, sus efectos sobre determinados factores del proceso educativo y las diferencias con respecto al tratamiento didáctico estándar o usual y sus resultados, tomado como tratamiento control. Del estudio se obtiene una nueva aproximación sujeta a replicación y a nuevas modificaciones y aproximaciones más precisas si fuera necesario.

1.3.4. Modificaciones curriculares permitidas

Las investigaciones que se lleven a cabo con arreglo al modelo que se propone se han de ajustar a los siguientes principios que actúan como guías del proceso y como pautas reguladoras de las actuaciones permitidas:

1. *Compromiso de respeto a la realidad del aula.*

   Se recomienda adoptar las modificaciones estrictamente imprescindibles para realizar el estudio; sólo las requeridas por el problema y las que necesite el desarrollo de la metodología prevista. Con ello se obliga a la realización de estudios paso a paso y pequeños pero seguros, en la medida en que se exige el máximo control de las relaciones causa-efecto, respetándose al mismo tiempo la integridad y autenticidad de los fenómenos.

2. *Compromiso de perjuicio cero e intención innovadora.*

   Sólo se deben desarrollar aquellas modificaciones de las que haya indicios razonables o datos fiables previos (a través de experiencias informales o estudios exploratorios) de su incidencia positiva o de su alta probabilidad de éxito o, al menos, de sus efectos previsibles no negativos sobre el proceso didáctico y sus resultados. Con ello se obliga, como así debe ser, a la realización de estudios que no causen perjuicios al aprendizaje, a las actitudes y a la formación general de los alumnos, argumento esgrimido con demasiada frecuencia para invalidar o eliminar las investigaciones en el aula ordinaria realizadas durante el desarrollo del proceso educativo reglado.

3. *Compromiso de compatibilidad con el diseño y de respeto a las directrices y orientaciones de la Administración Educativa*[5].

   Sólo se deben implementar modificaciones compatibles con el diseño curricular oficial, lo que significa que deben ser viables y aplicables en las condiciones usuales, sin ninguna otra intervención que no sea la del profesor, los alumnos y los observadores y colaboradores en el estudio. Con ello se obliga a la realización de estudios que no requieran permisos ni intervenciones especiales de Departamentos, grupos de profesores, Claustros, padres, directores, etc. Esto no quiere decir que dichos permisos e intervenciones, caso de existir, se consideren negativos o que constituyan un impedimento para el desarrollo del estudio, ni que se deba actuar al margen de los organismos, instituciones u órganos personales o colegiados.

4. *Compromiso de perdurabilidad y solidez.*

   Los estudios se deben basar en modificaciones permanentes y sostenibles, no singulares ni excepcionales, lo que obliga a la realización de estudios necesarios, evidentes, transparentes y sencillos, es decir, estudios cuyos resultados sean fácilmente asumibles por la mayoría de los profesores y fácilmente implementables en la mayoría de las aulas. Esto no significa que deban ser triviales, redundantes o repetidos, irrelevantes o prácticamente inútiles. Por el contrario, se han de realizar con el máximo rigor y cientificidad posibles dentro de las condiciones anteriores y a pesar de la posible puntualidad o excesiva focalización del problema, en su caso.

1.3.5. Condiciones

1. *Respeto escrupuloso a la realidad educativa,* lo que significa:

   (a) La investigación se ha de realizar en las condiciones reales usuales, evitando introducir modificaciones que impliquen la existencia de situaciones de laboratorio.

   (b) Maniobrabilidad reducida, proceso cerrado y limitado, estudio sujeto a los límites que impone la realidad del aula, del Centro, etc. (límites personales, materiales, temporales, curriculares, académicos, etc.)

[5]Entendemos que aquí se incluyen todos los órganos, organismos e instituciones con responsabilidad sobre diseños curriculares, programas de asignaturas o planes de formación en Matemáticas o relacionados con las Matemáticas de cualquier índole y nivel educativo.

2. *Consideración de los fenómenos en su totalidad y con toda su complejidad,* lo que significa:

   (a) Admitir limitaciones y dificultades que tienen que ver con el control de variables, efectos no deseados, existencia de hipótesis rivales, influencias extrañas, etc.

   (b) Gestionar la investigación bajo las dificultades mencionadas y con el inconveniente añadido de numerosas amenazas a la validez.

3. *Participación activa de los profesores con sus propios grupos naturales,* lo que significa:

   (a) Necesidad de compaginar y simultanear el papel de docente con el de investigador.

   (b) Necesidad de colaboración e implicación estrecha en el estudio de varios compañeros[6] para tratar de eliminar las principales influencias negativas derivadas de las relaciones entre los diversos roles[7].

4. *Asumir todas las restricciones y características de la investigación cualitativa* ([Eisenhart, 1988, Denzin y Lincoln, 1994, Latorre y otros, 1996]).

1.3.6. Sobre los procedimientos y técnicas metodológicas

El cumplimiento de las condiciones establecidas anteriormente impone límites y restricciones a las intervenciones y a los procedimientos para obtener información durante el desarrollo de los procesos didácticos. La metodología de investigación dentro de esta tendencia debe ser, como ya se ha comentado, una metodología *cualitativa* o *mixta, compleja, adaptada* al fenómeno a estudiar y *compatible* con las condiciones indicadas, es decir:

- *Cualitativa o mixta:* porque incluye procedimientos cualitativos y cuantitativos así como una variedad de técnicas metodológicas para cubrir las distintas necesidades de información:

[6] En la investigación han participado 4 profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, todos ellos con docencia efectiva en grupos oficiales de las titulaciones de Ingeniería.

[7] Son bien conocidas las influencias no deseadas que ejerce, por ejemplo, el propio investigador sobre los resultados o sobre su interpretación, máxime cuando ocurre, como en este caso, que la misma persona actúa como profesor, como investigador, como observador y como parte activa del proceso didáctico y del estudio ([Fernández, 1995]).

- *Con respecto a la intervención:*
  - Técnicas de investigación en la acción.
  - Técnicas etnográficas y de inmersión en grupos naturales.
  - Técnicas experimentales (cuantitativas).
- *Con respecto a la recogida de información:*
  - Técnicas de encuesta.
  - Entrevistas.
  - Pruebas objetivas.
  - Métodos etnográficos: observación participante, triangulación, reflexión epistemológica, análisis de registros, etc.
  - En general, cualquier procedimiento que permita obtener información sobre el diseño, el proceso, los participantes, los efectos producidos y las relaciones causa-efecto.

- *Compleja:* como corresponde a la complejidad del problema tratado y de las condiciones en las que se estudia.

- *Adaptada:* tanto al problema como a las condiciones reales del desarrollo del proceso didáctico, a las modificaciones realizadas, a la situación de los participantes, a las orientaciones oficiales o a las condiciones materiales, como así suele ocurrir, por ejemplo, con el reducido tiempo disponible para el desarrollo del tema en estudio.

- *Compatible:* no es posible, por ejemplo, realizar sucesivos ciclos de investigación en la acción sobre el mismo tema o dedicar varias horas del desarrollo de la asignatura a realizar debates en clase sobre aspectos del problema.

En general, la metodología adecuada al marco teórico establecido debe estar orientada al logro de las cuatro metas siguientes:

1. Fundamentación suficiente del nuevo tratamiento didáctico o de la modificación propuesta.

2. Comprobación de la viabilidad del desarrollo didáctico correspondiente y de su compatibilidad con el resto de los factores.

3. Determinación de un análisis completo de la modificación introducida y sus efectos.

4. Culminación, en su caso, de un análisis comparativo de los efectos del nuevo tratamiento didáctico y de otro tratamiento alternativo que ponga de manifiesto el grado de efectividad del primero.

1.4. Problema específico: Integrales de Línea con Derive en los estudios de Ingeniería.

Hoy en día está bastante extendida la utilización de los ordenadores (en particular los CAS[8]) en clase de Matemáticas y, de forma especial, en las titulaciones de Ingeniería, donde estas asignaturas desempeñan un papel instrumental muy importante y donde los ordenadores y programas de cálculo constituyen herramientas de uso habitual en la actividad profesional de los futuros ingenieros. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con el tema *Integrales de Línea*, en el que la utilización del ordenador puede venir a simplificar enormemente el trabajo sobre los ejercicios y las aplicaciones usuales de dichas integrales en un curso de iniciación a los estudios de Ingeniería.

Sin embargo, el uso de los CAS se reduce, en la mayoría de los casos, a utilizar el ordenador como una calculadora potente de altas prestaciones, lo que en sí representa ya un avance con respecto a la metodología didáctica tradicional. Pero esta forma de utilización supone una infrautilización de los recursos, por lo que se hace necesario un cambio de punto de vista para optimizar las oportunidades que ofrecen las tecnologías de la información y tratar de fomentar la creatividad matemática de los alumnos ([Ortega, 2002b, Alonso y otros, 2001, Padilla y otros, 2002b, Padilla y otros, 2002f]).

En consecuencia, los aspectos fundamentales del problema específico que nos planteamos se pueden resumir en los siguientes interrogantes:

1. ¿Es posible mejorar el proceso didáctico ordinario y sus resultados sobre el tema *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de primer curso de los estudios de Ingeniería, mediante la introducción de la creación de comandos con Derive por parte de los alumnos, en las mismas aulas y grupos naturales, en las mismas condiciones, con el mismo tiempo que se invierte usualmente en el desarrollo del

[8]Computer Algebra Systems.

tema, con las mínimas modificaciones en el diseño y desarrollo curriculares y siguiendo las orientaciones oficiales para el tema y la asignatura?

2. ¿En qué aspectos se consigue la mejora y cuál es el tamaño de los efectos principales?

3. ¿Cómo se puede responder a 1 y 2 sin alterar el proceso ordinario ni afectar negativamente al mismo o sus resultados?

4. ¿Cuáles son las dificultades y limitaciones de este tipo de estudios?

El problema no es nuevo, al menos en sus aspectos específicos y en los niveles educativos elementales. Desde Papert ([Papert, 1981]), con sus pioneros estudios sobre el lenguaje LOGO y la geometría de la tortuga, se han realizado numerosos estudios sobre la incidencia positiva de la programación informática sobre el aprendizaje ([Hirlimann, 1996, Nocker, 1998]), la mayoría de ellos en niveles inferiores. Sin embargo, el uso del ordenador para construir procedimientos en los estudios superiores ([Dubinsky, 1995, Majewski, 2000, Hector, 2002]) y en particular en los estudios de Ingeniería, ha sido hasta ahora prácticamente inexistente.

En esta última línea de actuación es en la que enmarcamos el trabajo que se presenta, puesto que uno de sus principales objetivos es el de analizar los distintos efectos que produce la introducción de la programación con DERIVE en la enseñanza de las asignaturas de Matemáticas de los planes de estudios de Ingeniería, con especial atención hacia la enseñanza de la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales*.

Con respecto al aprendizaje y la cognición adoptamos los principios del constructivismo social ([Ernest, 1990, Ernest, 1994]), que sitúa en la interacción material y grupal la fuente del conocimiento adquirido. Igualmente, partimos de la teoría de la cognición situada ([Sternberg, 1990, Greeno, 1991]) para resaltar la importancia de las experiencias, de los recursos del entorno para resolver problemas y comprender la realidad y de la creación de entornos y situaciones de aprendizaje sobre los que construir modelos mentales adaptados. En este mismo sentido, adoptamos la resolución de problemas de Matemáticas ([Schoenfeld, 1985, Polya, 1965, Guzmán, 2001]) como el medio más eficaz para la construcción individual del conocimiento matemático y para alcanzar un nivel de comprensión aceptable sobre el mismo. Que duda cabe de que nos estamos refiriendo a modelos y principios que justifican la modificación curricular objeto del problema de investigación. Sin embargo se trata de principios teóricos que su aplicación completa y rigurosa al caso que nos ocupa es restringida y prácticamente imposible en esta primera aproximación. A pesar de ello, queremos dejar constancia de que nuestra investigación pretende participar de las ideas mencionadas, aunque las condiciones reales impidan su aplicación u obliguen, a veces, a admitir actuaciones contrarias a las mismas.

Por último, es importante señalar que la valoración de efectos que se pretende realizar no se va a limitar exclusivamente a comprobar una posible mejora en el aprendizaje y rendimiento general de los alumnos, sino que se tendrán en cuenta otros aspectos tales como la ***adecuación*** de la modificación curricular aludida y su ***compatibilidad*** con las condiciones usuales del desarrollo de la asignatura y con las orientaciones oficiales al respecto o la ***viabilidad*** de la metodología didáctica desarrollada.

1.5. Origen, evolución y racionalidad del problema

El origen del problema se sitúa en las experiencias desarrolladas en los últimos 8 años por los profesores que han intervenido en el estudio. Nos referimos, básicamente, a la realización continuada de prácticas en el laboratorio de informática para algunas de las asignaturas en las que el *Departamento de Matemática Aplicada* de la *Universidad de Málaga* tiene asignada docencia; en concreto, en las asignaturas de Matemáticas de las titulaciones *Ingeniería Técnica Industrial* e *Ingeniería Técnica de Telecomunicación*.

Durante el periodo mencionado se ha podido comprobar, entre otras cosas, la manifiesta infrautilización de que era objeto el ordenador en el aula de Matemáticas, lo que llevó a introducir, en los últimos tres años, nuevas actividades orientadas a aprovechar mejor las posibilidades del ordenador y de los programas y a disminuir la utilización exclusiva de los CAS como máquinas de cálculo y para la resolución mecánica de ejercicios. La orientación de las nuevas actividades tenían que ver, principalmente, con la participación activa del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje y con una mayor atención a la construcción del conocimiento matemático bajo la orientación del docente.

Como consecuencia de la experiencia acumulada en el sentido indicado, se llegó al convencimiento de que podría ser necesario e importante introducir una metodología didáctica basada en la construcción (programación) de comandos con Derive para la mayoría de los contenidos de las asignaturas involucradas en las experiencias previas. Dicha metodología, por otro lado, está plenamente fundamentada y puede reunir los requisitos exigidos para los estudios dentro de la tendencia que se ajusta al marco teórico tratado en los apartados anteriores, es decir: compromiso de respeto a la realidad del aula, compromiso de perjuicio cero e intención innovadora, compromiso de compatibilidad con el diseño y de respeto a las directrices y orientaciones y, por último, compromiso de perdurabilidad y solidez.

Es evidente, por tanto, que estamos ante modificaciones curriculares potencialmente viables y especialmente útiles para el desarrollo usual de las asignaturas en las condiciones reales. Y si bien es cierto que cambios similares a los propuestos se han podido llevar a cabo informalmente en algunos niveles educativos y por parte de algunos profesores, también es cierto que dichas modificaciones y experiencias no han pasado de ser puntuales, se han desarrollado sin ser analizadas en profundidad ni de forma rigurosa y sistemática y cuyas características y resultados no han traspasado las fronteras de las aulas en las que han visto la luz. Queremos decir, en consecuencia, que la investigación sobre el problema planteado está plenamente justificada, máxime si de la misma se siguen recomendaciones fundadas para modificaciones curriculares concretas de los estudios universitarios. Asimismo, tiene sentido situar en primer plano la discusión sobre el marco metodológico empleado, puesto que:

- Está indisociablemente unido al marco teórico.
- Se trata de una nueva tendencia de investigación.
- Los fenómenos de la Educación Matemática son específicos y requieren procedimientos específicos, algunos de los cuales están aún por determinar y comprobar su eficacia y, sobre todo, por relacionar entre sí e integrar en "paquetes metodológicos" concretos que muestren su eficacia mediante resultados prácticos viables y útiles para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

1.6. Objetivos

El objetivo general de nuestra investigación es el de *contribuir a la comprensión de la realidad de los procesos y fenómenos de la Educación Matemática en los estudios de Ingeniería, que concebimos dinámica, múltiple, holística y divergente, para poder intervenir sobre ella en orden a su optimización.* Para ello, de forma genérica, se pretende comprobar la viabilidad y el grado de eficacia de modificaciones curriculares puntuales que sean compatibles con el desarrollo usual de las asignaturas en los grupos naturales y que estén comprometidas, al mismo tiempo, con la permanente innovación en el ámbito de la formación matemática superior.

La aportación específica de la investigación que presentamos a la consecución del objetivo general señalado gira en torno a los tres núcleos de interés siguientes:

1. Las condiciones reales generales del ***diseño y desarrollo curricular en Matemáticas*** en los estudios, niveles y condiciones indicadas así como sus dificultades, limitaciones y potencialidades, con especial atención a los siguientes aspectos:

    - *Currículo de Matemáticas.*

      Orientaciones oficiales; condiciones materiales; necesidades y expectativas; elementos básicos: objetivos, contenidos, metodología didáctica, recursos, tareas y actividades, relaciones de comunicación, evaluación y otros aspectos; diseño y preparación preactiva; etc.

    - *Enseñanza.*

      Desarrollo curricular; proceso educativo real; interacciones en el aula; contrato didáctico; papel del profesor; implementación práctica del diseño realizado; etc.

    - *Aprendizaje, desarrollo y competencias* de los alumnos.

      Comprensión de conceptos y procedimientos; competencias, destrezas y habilidades adquiridas y/o construidas; actitudes desarrolladas; motivación y expectativas previas y generadas durante el desarrollo del proceso didáctico; etc.

    - *Evaluación* de procesos y productos.

      Eficacia; calidad; limitaciones; rendimientos; actuaciones; etc.

2. Dentro del marco anterior, estamos interesados en un *problema específico de carácter curricular* que resumimos en la expresión ***Integrales de Línea con* DERIVE**. El problema está relacionado con la metodología de enseñanza del tema mencionado en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de primer curso de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* y la utilización, en una parte del desarrollo de la misma, del programa DERIVE como instrumento didáctico esencial y no sólo auxiliar en el sentido habitual de la expresión[9].

3. Para indagar con garantías en los dos núcleos anteriores, debemos centrar la atención en las condiciones reales para el desarrollo de *investigaciones de carácter curricular con intención innovadora en el aula de Matemáticas* y en la delimitación y puesta a prueba de un ***marco teórico y metodológico*** adecuado y adaptado a las condiciones anteriores. Todo ello exige determinar claramente las medidas necesarias para preservar la relevancia, calidad y eficacia de las actividades investigadoras de este tipo así como para alcanzar el mayor grado de compatibilidad posible entre dichas actividades, las labores docentes ordinarias, el desarrollo "oficial" de las asignaturas y los derechos y expectativas de los alumnos.

Por tanto, para la consecución de nuestro objetivo general y para prestar la adecuada atención a los núcleos de interés indicados, nos hemos propuesto alcanzar los siguientes objetivos:

1. *Específicos:*

   (a) Comprobar los efectos positivos de la realización de comandos con DERIVE sobre el aprendizaje de la materia *Integrales de Línea* en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

   (b) Constatar la incidencia positiva del tratamiento didáctico mencionado sobre los diferentes factores del proceso didáctico, sobre las actitudes, conocimientos y destrezas profesionales de sus protagonistas así como

[9]Como se ha comentado y se puede apreciar a lo largo del desarrollo del informe, estamos interesados en las utilidades de la programación con DERIVE más que en su faceta habitual de calculadora potente.

sobre los rendimientos de los alumnos en una prueba objetiva del mismo tipo de las que se vienen realizando usualmente en el proceso de evaluación de la asignatura.

(c) Comprobar la adecuación de la modificación curricular aludida y su compatibilidad con las condiciones usuales del desarrollo de la asignatura así como con las orientaciones oficiales al respecto.

2. *Complementarios y generales:*

   (a) Encontrar métodos eficaces y viables para optimizar el proceso didáctico y sus resultados en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de *Ingeniería.*

   (b) Explorar y confirmar, en su caso, la necesidad y relevancia del uso del ordenador como instrumento didáctico en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de *Ingeniería.*

   (c) Establecer y consolidar un proceso de innovación curricular en la acción en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de *Ingeniería.*

   (d) Indagar en el marco teórico y en la metodología de investigación adecuados a los fines anteriores.

1.7. Conjeturas

Para la consecución de los objetivos comentados en la sección anterior se someterá a prueba la plausibilidad de las siguientes conjeturas[10]:

***Conjetura 1*:** Es posible implementar, de acuerdo con el marco teórico establecido, con las mínimas modificaciones y en las condiciones usuales, una metodología didáctica mixta compuesta de clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática basadas en la realización de comandos con Derive para la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de los estudios de *Ingeniería.*

[10]Preferimos utilizar este término, en lugar de la palabra hipótesis, para indicar que es más apropiada la terminología del paradigma cualitativo para referirnos a un estudio que sólo pretende ser una aproximación parcial. Podríamos haber utilizado, igualmente, los términos "cuestiones de investigación" o "asuntos centrales", pero no el término "hipótesis", que a nuestro modo de ver está más relacionado con argumentaciones deductivas rigurosas y con demostraciones o comprobaciones que con grados de plausibilidad.

***Conjetura 2*:** La realización de comandos con DERIVE facilita el aprendizaje de los conceptos y procedimientos algorítmicos involucrados en el tema *Integrales de Línea* y mejora la actitud de los alumnos hacia la asignatura en términos de atención, motivación, interés y participación.

***Conjetura 3*:** La metodología didáctica mixta facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje y es compatible con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios de la asignatura.

***Conjetura 4*:** La metodología didáctica mixta mejora el dominio y nivel de competencia de los alumnos sobre los contenidos del tema *Integrales de Línea*, medidos en términos de rendimiento en una prueba objetiva construida de acuerdo con los criterios usuales empleados en las evaluaciones ordinarias de la asignatura.

***Conjetura 5*:** El marco teórico empleado para fundamentar el estudio y el método de investigación basado en la combinación de técnicas metodológicas son adecuados y completos para abordar y dar respuesta al problema de investigación.

1.8. Metodología de investigación

Del planteamiento general expuesto en el apartado 1.3 tomaremos aquellos aspectos necesarios para el tratamiento de nuestro problema específico, adaptando la metodología a las características particulares del mismo. En consecuencia, para abordar con garantías el problema de investigación y encontrar datos y argumentos fundados, fiables y suficientes para responder al mismo, nuestra investigación se basará en:

1. Estudios y reflexiones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la materia *Integrales de Línea* para la formación de *Ingenieros Técnicos de Telecomunicación,* tanto en su vertiente "tradicional" como en lo que se refiere a su tratamiento didáctico con la ayuda de la realización de comandos con DERIVE.

2. Estudios empíricos realizados en las condiciones especiales en las que se producen los desarrollos curriculares "oficiales" y estructurados en varias partes.

3. Análisis sobre la validez del diseño y sus resultados así como sobre la metodología de investigación empleada y sobre el marco teórico utilizado.

Concretando, realizamos los siguientes estudios:

1. *Estudios y experiencias preliminares.* Entre ellos podemos destacar los siguientes:
   (a) Estudio teórico y elaboración de material sobre el tema *Integrales de Línea.*
   (b) Docencia sobre el mismo contenido utilizando una metodología didáctica expositiva.
   (c) Utilización de nuevas tecnologías (ordenadores y programas informáticos) en la enseñanza de las Matemáticas en general, y en la enseñanza de la materia *Integrales de Línea* en particular.
2. *Estudios teóricos.* Análisis didáctico parcial sobre la enseñanza de *Integrales de Línea* con Derive y sobre el marco teórico y metodológico en el que se pretende llevar a cabo la investigación.
3. *Estudios empíricos.*
   (a) Estudio exploratorio sobre el aprendizaje del programa Derive y sobre las aplicaciones de Derive a las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería.
   (b) Diseño y desarrollo en el aula de una metodología didáctica mixta (sección 3.6.6) compuesta por clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática con la culminación de los siguientes estudios relacionados con la implementación de dicha metodología y con los resultados alcanzados:
      (i) Estudios cualitativos sobre la viabilidad y adecuación del procedimiento al caso particular considerado así como sobre su compatibilidad con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios del tema específico y de la asignatura.
      (ii) Estudio cualitativo y comparativo sobre los efectos de la metodología didáctica mixta y de la metodología didáctica usual para indagar sobre la efectividad del método, su incidencia en la mejora

del rendimiento y su potencialidad innovadora. El estudio emplea datos cualitativos y cuantitativos y se efectúa la comparación con un procedimiento metodológico didáctico estándar similar al empleado usualmente en el desarrollo de la asignatura.

4. *Estudios complementarios.* Para comprobar que el marco teórico y el método de investigación son adecuados para dar respuesta al problema, realizaremos reflexiones de carácter evaluativo sobre:

   (a) La validez del diseño y sus resultados.

   (b) La metodología de investigación, el proceso seguido y la adecuación del diseño realizado y de los instrumentos empleados.

   (c) La investigación en su conjunto, el ajuste a los principios y condiciones de la tendencia que le ha servido de soporte, el grado de consecución de los fines generales de la línea de investigación así como las desviaciones y los aspectos incompletos y necesitados de futuras atenciones.

1.9. Fases del estudio

El trabajo se puede dividir en tres fases diferenciadas:

1. *Fase preliminar y teórica.*

   Una primera fase en la que se realizan los estudios preliminares, la búsqueda de los antecedentes relacionados con el problema de investigación y el posterior análisis de éstos, la concreción del problema y el planteamiento de las conjeturas. Finalmente, se realiza el diseño del estudio y se elaboran los distintos instrumentos de recogida y análisis de datos.

2. *Fase empírica.*

   Se trata de una segunda fase en la que se desarrollan las metodologías didácticas, se recoge la información pertinente mediante los instrumentos diseñados a tal fin y se culmina con el análisis de los datos obtenidos y con el establecimiento de las conclusiones puntuales más importantes.

3. *Fase de reflexión, organización y elaboración del informe.*

   Tercera fase del trabajo en la que se reflexiona sobre el proceso seguido, una vez finalizado, y se procede a la organización de las ideas y hechos, a la realización de las reflexiones generales, al establecimiento de las conclusiones y a la elaboración del informe de investigación.

La fase teórica ha ocupado la primera parte del trabajo y se desarrolló desde comienzos del año 1996 hasta febrero de 2003, fecha en la que se dio por concluida esta etapa del estudio. El desarrollo de la fase empírica, cuyo proceso se detalla en el apartado 3.6 del capítulo 3, se realizó desde febrero hasta mayo de 2003, mientras que la reflexión, la organización y el análisis de datos y la elaboración del informe se han realizado desde junio hasta octubre de 2003.

La exposición de la fase teórica de la investigación se inicia en el capítulo 2 con el estudio de los antecedentes y fundamentos teóricos y culmina en los capítulos 3 y 4 de la parte II. La fase empírica se inicia en los citados capítulos 2 y 3 y culmina en los capítulos 5 y 6 de la parte III. Por último, la reflexión sobre el proceso seguido se inicia en los capítulos 5 y 6, se culmina en el capítulo 7 de la parte IV y se proyecta parcialmente en los contenidos del capítulo 1; ambos capítulos, 7 y 1, han sido los últimos en el proceso de redacción del informe.

Capítulo 2

Antecedentes y fundamentos teóricos

2.1. Introducción

Una de las principales características del conocimiento científico es su carácter compartido, es decir, conocimiento que se genera en el marco de una comunidad y se difunde sin restricciones poniéndose al servicio de la humanidad para satisfacer una de sus principales finalidades: conocer la realidad para comprenderla y poder actuar sobre ella. Es evidente, por tanto, que la individualidad, el aislamiento o la endogamia, por ejemplo, no son características habituales del desarrollo de los estudios reglados. Por el contrario, si de algo se puede enorgullecer la investigación científica es de estar apoyada "sobre hombros de gigantes", lo que implica una atención detallada a los estudios e informaciones previos y una forma de trabajo fundada, sistemática y "paso a paso", por la que se van añadiendo pequeñas piezas de información a un edificio tan sólidamente construido como lo permitan en cada momento la complejidad de los fenómenos, la acuracidad de los instrumentos empleados y las múltiples limitaciones de las personas e instituciones implicadas.

Cualquier indagación científica sobre un problema de investigación requiere acudir a los trabajos realizados previamente sobre el mismo o sobre aspectos relacionados. Dicho de otra manera, es obligado acudir a los antecedentes, a las fuentes de información y a los fundamentos teóricos del problema como una fase importante e imprescindible en toda investigación ([Latorre y otros, 1996], página 58). No en vano, la revisión de antecedentes permite establecer el marco conceptual, elegir el enfoque y el método, determinar las técnicas e interpretar con mayor fundamento el significado de los resultados, al tiempo que evita volver a tratar aspectos ya considerados en estudios previos.

En estrecha relación con los antecedentes se encuentran los fundamentos teóricos, una denominación bajo la que algunos autores sitúan todos los antecedentes, lo cual es correcto. Sin embargo, nosotros queremos diferenciar entre los datos puntuales específicos o procedentes de estudios concretos y locales, a los que llamaremos antecedentes, y las grandes conclusiones, líneas argumentales, modelos y conocimientos generales bien establecidos y basados en numerosos resultados puntuales procedentes de cadenas de investigaciones, líneas de trabajo, marcos teóricos suficientemente contrastados o tradiciones, a los que denominaremos *fundamentos teóricos.* La distinción es muy sutil y a veces difícil de establecer en la práctica, aunque puede servir de referencia saber que a estos fundamentos generales también se les denomina *marco teórico* cuando se pretende hacer alusión al conjunto de principios generales que sirven de soporte a una investigación.

Por tanto, la revisión documental sobre los antecedentes y fundamentos teóricos de un estudio es útil y necesaria, pero la simple recopilación y análisis superficial de las informaciones previas no son una garantía de que la nueva tarea emprendida esté perfectamente guiada desde sus inicios. Antes bien, la escasez y dispersión de la información existente, la diversidad de su naturaleza y procedencia (múltiples datos obtenidos desde diversos puntos de vista y con distintas finalidades), la ausencia de marcos teóricos aceptables para el campo general de la Educación Matemática, la parcialidad manifiesta de algunos estudios y otras limitaciones de la mera revisión documental como fundamento seguro del nuevo estudio, aconsejan realizar, además, un *análisis didáctico* de la información ([González, 1998]), para así estar, a su finalización, en una mejor disposición para acometer la nueva tarea. Pero no nos referimos a un análisis superficial, sino a una reflexión crítica sistemática de carácter meta-analítico y cualitativo que aporte indicios y argumentos fundados para una mejor delimitación del problema y un desarrollo satisfactorio de la investigación.

El análisis didáctico alcanza especialmente a los fundamentos teóricos del estudio, pero también puede facilitar la introducción de modelos teóricos locales[1]

[1] Terminología acuñada por Filloy ([Filloy, 1988]) y colaboradores (CINVESTAV de México). Nosotros la emplearemos aquí con un sentido menos restringido y preciso: el término local simplemente indica que se trata de constructos específicos y exclusivos para esta investigación.

construidos a partir de la información procedente de los antecedentes, de los fundamentos teóricos, de la experiencia, de las observaciones efectuadas y de los posibles estudios teóricos o empíricos preliminares o desarrollados durante el propio proceso de la investigación. Estos modelos teóricos son productos de la propia investigación y deben ser puestos en cuestión y sometidos a prueba en el estudio empírico. En nuestro caso vamos a distinguir y utilizar:

- Los fundamentos teóricos o antecedentes de la investigación (en qué parte del mundo de los conocimientos científicos sobre el campo se sitúa nuestra investigación).
- El marco teórico en el que situamos el estudio o conjunto de principios generales y enfoques extraídos de los antecedentes.
- El modelo teórico que hemos construido o la modificación que hemos introducido "localmente" en el marco teórico para realizar el estudio y que pretendemos que sea el marco teórico común para todas las investigaciones que se desarrollen dentro de la línea que aquí se inicia[2].

En consecuencia, el contenido del presente capítulo corresponde a una fase importante de la investigación en la que se ha buscado información ajena sobre el problema planteado y se ha confrontado con la información propia procedente de experiencias, reflexiones y actividades previas y con nuevos datos procedentes de múltiples fuentes (compañeros, expertos, profesores, textos, prácticas usuales, orientaciones, opiniones diversas, etc.) e informaciones no publicadas, e incluso no escritas, de diversa naturaleza. Con toda esta información y con el propósito de justificar el estudio, profundizar en el problema y sus fundamentos, en el modelo a utilizar o en la metodología más idónea, se ha efectuado un análisis didáctico (González, op. cit.) del que se extraen consecuencias para el desarrollo de la investigación en forma de modelos teóricos y de orientaciones para el diseño y la realización del estudio empírico.

[2] El modelo teórico que hemos construido y que constituye un marco teórico y metodológico "local", es el que hemos denominado *Investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas,* cuyos orígenes se exponen en el apartado 2.4.4 y cuyos principios y aspectos generales se exponen en los apartados 2.5.1 y 2.5.2.

El trabajo abarca, por tanto, tres partes fundamentales:

1. Antecedentes: búsqueda, recopilación, organización y análisis primario o revisión de los mismos, distinguiéndose entre antecedentes propios y otros antecedentes en torno a los diferentes campos con incidencia en el problema.

2. Análisis didáctico parcial de la información obtenida en el apartado anterior, siguiendo el procedimiento establecido en González (op. cit.).

3. Establecimiento de conclusiones y consecuencias para:

   - La elaboración del modelo teórico aplicado.
   - La delimitación precisa del problema de investigación.
   - El diseño y desarrollo de los estudios a realizar.

La exposición se realiza en el siguiente orden: en el apartado 2.2 se incluye un resumen de las principales características de los antecedentes así como de su estructura; en los apartados 2.3 y 2.4 se detallan, respectivamente, los antecedentes sobre el problema específico y sobre el marco teórico y metodológico. Por último, en el apartado 2.5 se aborda el análisis didáctico de los antecedentes descritos en los apartados anteriores.

2.2. Estructura y características de los antecedentes

En un campo de investigación tan reciente y complejo como el de la Educación Matemática, los antecedentes suelen estar dispersos a lo largo de numerosas Áreas de conocimiento relacionadas (Psicología, Pedagogía, Matemáticas, Sociología, Antropología, Didáctica, etc.). Igualmente, suelen ser escasos o inexistentes, si nos referimos a antecedentes específicos, y numerosos y con orientaciones dispares, si nos referimos a antecedentes relacionados[3]. Se impone, por tanto, la necesidad de organizar la información y explicitar la estructura de los datos y las relaciones existentes entre las distintas fuentes de información.

[3]Por antecedentes específicos entendemos los que corresponden “directamente” al problema específico estudiado, mientras que los antecedentes relacionados son los que se refieren a los aspectos que tienen alguna relación, aunque sea lejana (por ejemplo, suelen ser antecedentes relacionados en Educación Matemática los que podemos encontrar en campos tales como: Filosofía de las Ciencias, Epistemología, Historia, Semiótica, Psicolingüística, etc.).

En este apartado se presentan las distintas disciplinas y campos relacionados con el problema, un mapa conceptual que sintetiza las relaciones entre los distintos aspectos involucrados y las palabras clave que identifican la investigación y que servirán para realizar las búsquedas retrospectivas que se citan en los apartados 2.3 y 2.4.

2.2.1. Disciplinas y campos relacionados

La investigación requiere atender a aspectos que se sitúan bajo numerosas disciplinas y campos. Trataremos de indicar a continuación los más importantes agrupados en dos apartados en los que se dan relaciones internas estrechas:

1. *Educación: Psicología y Pedagogía; Educación Matemática; Didáctica de la Matemática.*

   Aspectos generales y relacionados.

   - Currículo de Matemáticas: componentes, factores, relaciones, etc.

     Se considerarán referencias a aspectos más generales que tienen que ver con: políticas educativas; diseños curriculares oficiales; orientaciones curriculares; planes de estudio; etc.

   - Enseñanza de las Matemáticas. Desarrollo curricular en Matemáticas. Procesos didácticos reales en Matemáticas: diseño, desarrollo y evaluación.

     Se tendrán en cuenta referencias a aspectos más generales como: evaluación de aulas y centros; rendimiento y evaluación de alumnos; comunicación en el aula, métodos y recursos; contrato didáctico; etc.

   - Aprendizaje de las Matemáticas. Aprendizaje y desarrollo cognitivo en el área de Matemáticas. Aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes en relación con el conocimiento matemático.

     Se buscarán referencias a aspectos más generales como: Psicología de la Educación; Psicología de la Educación Matemática (PME); aprendizaje y desarrollo cognitivo; teorías sobre aprendizaje y cognición: constructivismo, cognición situada, procesamiento de información, etc.

- Innovación curricular en Matemáticas. Reformas de la Educación Matemática. Estudios sobre fracaso escolar en Matemáticas.

  Referencias a aspectos más generales como: innovación educativa; reformas curriculares; evaluación de reformas, etc.

- Educación Matemática en niveles universitarios. Formación Matemática en estudios de Ingeniería.

- Nuevas tecnologías en Educación Matemática. El ordenador como instrumento didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos matemáticos.

  Con referencias a temas más generales como: Tecnologías de la Información en Educación; software educativo; el ordenador como instrumento didáctico; aprendizaje mediante tecnologías de la información; etc.

- CAS[4] y DERIVE como recursos didácticos en la enseñanza de las Matemáticas.

  Con referencias a aspectos más generales como: los que se mencionan en al apartado anterior; software matemático; programas de cálculo simbólico; DERIVE; etc.

Específicos.

- Enseñanza y aprendizaje de conocimientos sobre Análisis Vectorial e Integrales de Línea en estudios de Ingeniería y en particular en los estudios de Ingeniería Técnica de Telecomunicación.

- DERIVE como recurso didáctico en la enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería y en particular en Ingeniería Técnica de Telecomunicación.

- DERIVE como recurso didáctico en la enseñanza de las Integrales de Línea.

2. *Investigación en Educación; Investigación en Educación Matemática.*

   - Metodologías de investigación en Educación Matemática: análisis didáctico (específico); interdisciplinariedad; metodologías mixtas.

[4]Computer Algebra Systems.

Con referencia a aspectos más generales relacionados con la metodología de la investigación educativa: investigación en la acción; etnografía; métodos cualitativos; etc.

- Líneas y tendencias en investigación en Educación Matemática. Investigaciones en el aula de Matemáticas. Investigación para la innovación en Matemáticas, PME, tendencia "francesa" (Brousseau).

  Con referencia a campos y estudios relacionados con líneas y tendencias en investigación educativa: innovación; constructivismo social; paradigma ecológico; Psicología de la Educación Matemática; etc.

- Investigaciones curriculares. Evaluación de diseños y desarrollos curriculares en Matemáticas.

  Con referencia a enfoques sobre investigación y desarrollo del currículo (Stenhouse); investigación y formación de profesores; etc.

La relación aportada en los párrafos anteriores sólo pretende servir de guía y poner de manifiesto la amplitud y complejidad del problema considerado, puesto que sería desproporcionado atender exhaustivamente a todos los campos y disciplinas citados. En nuestro caso hemos utilizado informaciones correspondientes a todos los apartados y sus campos mencionados, aunque no con la extensión y profundidad de un estudio exhaustivo. Antes bien, podemos decir que la revisión y el análisis de los antecedentes se ha extendido hasta donde era necesario para el desarrollo adecuado de la investigación.

2.2.2. Mapa conceptual

Los diferentes campos, disciplinas y conceptos involucrados en el problema de investigación se encuentran relacionados entre sí en una especie de mapa conceptual del que sólo indicamos a continuación las relaciones entre campos y el orden entre ellos. Las prioridades y relaciones de dependencia son, por tanto, las que se establecen en los esquemas que se detallan a continuación, en los que se indican las áreas de interés ordenadas de mayor a menor grado de generalidad. Hay que decir que sólo se han incluido las referencias directas a la Educación Matemática, en el bien entendido de que en ellas se encuentran ya integrados otros aspectos y referencias más generales. Asimismo, se incluyen áreas de interés más generales en aquellos campos que consideramos más importantes para el estudio, principalmente porque es en ellos en los que se necesita una información más completa dada su especial contribución al problema de investigación:

1. *Currículo de Matemáticas.*

   (a) Currículo de Matemáticas en Ingeniería.

   (b) Currículo de Matemáticas en *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

   (c) Currículo y diseño de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* en *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

   (d) Programación (diseño curricular) y desarrollo de la unidad didáctica *Integrales de Línea* en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* en *Ingeniería Técnica de Telecomunicación*: contenidos, actividades, evaluación, etc.

2. *Innovación y reformas curriculares en Matemáticas.*

   (a) Innovación curricular en Matemáticas (estudios, investigaciones y experiencias).

   (b) Innovación curricular en Matemáticas en los estudios de Ingeniería.

   (c) Innovación curricular en Matemáticas en los estudios de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

   (d) Innovación curricular en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de los estudios de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

   (e) Innovación curricular en la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de los estudios de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

3. *Enseñanza y aprendizaje de Matemáticas en estudios universitarios.*

   (a) Enseñanza y aprendizaje de Matemáticas en estudios de Ingeniería.

   (b) Enseñanza y aprendizaje de Matemáticas en estudios de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

   (c) Enseñanza y aprendizaje en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* del plan de estudios de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*
   (d) Enseñanza y aprendizaje del tema *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* del plan de estudios de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

4. *Tecnologías de la Información en Educación Matemática. Nuevas tecnologías en el proceso didáctico en Matemáticas.*
   (a) CAS en Educación Matemática.
   (b) Derive como instrumento didáctico.
   (c) Programación en la enseñanza de las Matemáticas.
   (d) Utilización del programa Derive para la realización de comandos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* en estudios de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

5. *Metodología de investigación en Educación Matemática. Métodos cualitativos y cuantitativos.*
   (a) Investigación-acción en el aula de Matemáticas.
   (b) Investigación y desarrollo del currículo de Matemáticas.
   (c) Investigación para la innovación en el aula de Matemáticas.
   (d) Investigación para la innovación en el aula de Matemáticas en los estudios de Ingeniería.
   (e) Investigación para la innovación en el proceso de enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería mediante una metodología didáctica mixta que incluye el método tradicional de enseñanza y la realización de comandos con Derive.

Desde otro punto de vista, el problema de investigación se puede situar en relación con los siguientes marcos generales que, por otra parte, suelen estar presentes en muchas investigaciones en Educación Matemática. En cada uno de ellos se especifican los aspectos concretos correspondientes al estudio que hemos realizado:

- *Marco académico y curricular:* asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* del plan de estudios de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga.*

- *Marco matemático:* materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* mencionada en el apartado anterior.

- *Marco psicológico:* aprendizaje de conceptos, procedimientos y técnicas algorítmicas; desarrollo de actitudes, capacidades y destrezas; motivación e interés.

- *Marco pedagógico:* metodología didáctica mixta con la ayuda de un recurso didáctico para innovar el desarrollo curricular y mejorar los procesos didácticos y sus productos en términos de rendimientos, actitudes y destrezas alcanzados por los alumnos.

- *Marco didáctico-matemático:* recurso Derive para auxiliar el proceso didáctico sobre la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* del plan de estudios de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga,* desarrollada con una metodología didáctica mixta orientada a innovar el desarrollo curricular y mejorar los procesos y resultados en términos de rendimientos, actitudes y destrezas alcanzados por los alumnos.

- *Marco sobre investigación en Didáctica de la Matemática:* innovación curricular en la acción sobre una metodología didáctica mixta para la materia y asignatura mencionadas con la ayuda de un recurso didáctico para innovar el desarrollo curricular y mejorar los procesos didácticos y sus productos en términos de rendimientos, actitudes y destrezas alcanzados por los alumnos.

2.2.3. Descriptores y palabras clave

El problema general de investigación se identifica por las siguientes palabras y frases clave, que proceden en su mayoría del texto del apartado anterior: *Metodologías de enseñanza de las Matemáticas. Aprendizaje y desarrollo de procedimientos, técnicas y destrezas en Matemáticas. Enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos en estudios de Ingeniería. Análisis Vectorial*, *Integrales de Línea. CAS y* Derive *como recursos didácticos en el aula de Matemáticas.*

Programación informática con Derive. *Motivación y actitudes en el aula de Matemáticas. Evaluación de rendimientos en Matemáticas. Innovación curricular en el aula de Matemáticas. Investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas.*

2.2.4. Prioridades de la investigación

El estudio realizado atiende a dos frentes estrechamente relacionados en la práctica aunque, como veremos, relativamente independientes en lo que se refiere a la fundamentación y a los antecedentes. Por un lado se ha prestado atención a un problema específico de investigación que tiene que ver con una modificación metodológica concreta en el aula de Matemáticas de los estudios de Ingeniería y con los efectos que dicho cambio produce en el desarrollo del proceso y en el rendimiento, en las actitudes y en la motivación de los alumnos. Por otro lado, el problema específico estudiado se ha situado en un contexto más amplio que atiende a la innovación curricular en la acción, a la práctica real de la enseñanza de las Matemáticas en grupos naturales de estudios oficiales, a las posibilidades y limitaciones de la investigación en este ámbito y, en definitiva, a las tendencias existentes en investigación en Educación Matemática para desarrollar este tipo de estudios. Nos referimos, en este caso, al marco teórico y metodológico de la investigación, que ocupa un papel importante al prestar cobertura al problema específico mencionado.

Es evidente que el estudio específico está condicionado por el marco teórico y metodológico. No en vano el alcance y profundidad de la investigación, los resultados que se obtengan o el control de las variables, por ejemplo, dependen de las condiciones del estudio o de las restricciones que impone la práctica. Pero puesto que hemos construido un nuevo modelo teórico para dar cabida a un tipo de estudios con características muy definidas (apartado 2.5.2), es seguro que vamos a encontrar pocos antecedentes específicos, lo que aconseja un tratamiento por separado de los antecedentes de ambos aspectos para realizar posteriormente un análisis didáctico que proporcione una visión unitaria del problema investigado.

La exposición que se desarrolla en los apartados y páginas que siguen se ajusta, por tanto, a la siguiente estructura:

1. Antecedentes del problema específico.

2. Antecedentes del marco teórico y metodológico.

3. Análisis didáctico de los puntos 1 y 2 anteriores, por separado y conjuntamente, para extraer conclusiones de cara al diseño del estudio empírico.

En cada caso se exponen las búsquedas realizadas y los resultados obtenidos organizados por apartados y núcleos de interés.

2.3. Antecedentes del problema específico: enseñanza de Integrales de Línea con DERIVE en estudios de Ingeniería

En los apartados que siguen nos disponemos a presentar todas las referencias propias de las búsquedas realizadas sobre el problema específico de investigación.

2.3.1. Descriptores y palabras clave

De las palabras clave indicadas en el apartado 2.2.3, tomaremos aquí las que hacen referencia, únicamente, al problema específico del estudio. Dicho problema se puede caracterizar por las siguientes palabras y frases cortas: *Metodologías de enseñanza de las Matemáticas. Aprendizaje y desarrollo de procedimientos, técnicas y destrezas en Matemáticas. Enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos en estudios de Ingeniería. Análisis Vectorial*, *Integrales de Línea. CAS y* DERIVE *como recursos didácticos en el aula de Matemáticas. Programación informática con* DERIVE. *Motivación y actitudes en el aula de Matemáticas. Evaluación de rendimientos en Matemáticas.*

2.3.2. Fuentes documentales y búsquedas realizadas

Citamos a continuación las principales fuentes de información utilizadas y los criterios empleados en las búsquedas de documentos:

1. Consultas sistemáticas a la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*:

   - Desde 1976 hasta marzo de 2003.
   - En la nomenclatura propia de esta publicación se han realizado búsquedas en los siguientes campos: A60, A70, I50, N80, U10, U50 y U70, que abarcan desde aspectos generales relacionados con el campo objeto

de la investigación (A60: Proceedings y A70: Tesis Doctorales) hasta los aspectos específicos del mismo (I50: Cálculo Integral, N80: Software matemático, U10: Tecnología aplicada a la Educación, U50: Software educativo y U70: Herramientas tecnológicas).

- Palabras clave básicas utilizadas en primera opción: DERIVE, CAS (Computer Algebra Systems), Line Integrals. El resto de descriptores han tenido un papel secundario (se han supeditado a los tres términos anteriores).
- Se han cruzado estas palabras clave con los campos de la base ZDM relacionados con la investigación para obtener un total de 410 publicaciones. Los campos mencionados son, entre otros, el nivel de los estudios (universitario en este caso) por un lado y, por otro, el campo de las investigaciones en estudios especializados o escuelas profesionales, con especial referencia a los estudios de Ingeniería.

2. Consultas en actas de Congresos Internacionales sobre Educación Matemática y nuevas tecnologías de la información. Entre los más relevantes podemos destacar los siguientes:

   - International Conference on New Technologies in Science Education. Aveiro (Portugal). Julio 2001.
   - International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Hersonissos, Creta (Grecia). Julio 2002.
   - Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education. Viena (Austria). Julio 2002.
   - International Conference of Information and Communication Technologies in Education. Badajoz (España). Noviembre 2002.

3. Búsqueda en la base de datos de Tesis Doctorales (TESEO) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

4. Búsquedas selectivas en Internet utilizando las palabras clave mencionadas.

5. Además de las fuentes de información y búsquedas documentales realizadas, se ha obtenido información relevante de las publicaciones y experiencias no publicadas llevadas a cabo por los profesores que han participado en la investigación. Dicha información, que hemos separado en una categoría a la

que hemos denominado *antecedentes propios*, juega un papel destacado en el tipo de estudios que estamos considerando. Téngase en cuenta que el análisis didáctico, como todo meta-análisis, emplea tanto datos publicados como informaciones procedentes de fuentes diversas con independencia, incluso, de su calidad ([González, 1998], página 48).

De todas las búsquedas y fuentes consultadas se han seleccionado 113 publicaciones, estudios y experiencias que se relacionan en los cuatro apartados que siguen a continuación.

2.3.3. Enseñanza y aprendizaje de Matemáticas en estudios de Ingeniería

Aquí se relacionan brevemente los datos fundamentales de los trabajos consultados (autor, título y año) y las referencias de las fuentes de información utilizadas. Las referencias completas se pueden consultar en la bibliografía de la memoria. Asimismo, se incluyen algunos comentarios sobre el contenido y la orientación de los estudios, quedando aplazadas tanto la discusión más amplia como las conclusiones de cara al estudio para el apartado dedicado al análisis didáctico (2.5).

La información obtenida en este campo ha sido extensa pero poco relevante para los propósitos de la investigación. En particular destacamos las siguientes obras:

- [Bellostas y otros, 1992] *¿Qué Matemáticas debe conocer un Ingeniero Técnico? Una prospección sobre el tema.*
- [Bellostas y otros, 1993] *¿Qué Matemáticas debe conocer un Ingeniero Técnico? Unas propuestas didácticas.*

Sin embargo, sí nos resultan especialmente útiles las siguientes referencias de publicaciones y experiencias propias que constituyen antecedentes cercanos del problema estudiado.

- *Publicaciones*

  Dentro de esta categoría se destacan las siguientes:

  - [Padilla y otros, 1998] *Una propuesta de innovación docente en Matemáticas para la Ingeniería.*

- [Padilla y otros, 1999d] *Cómo abordar un cambio de planes de estudios en una carrera técnica.*
- [Padilla y otros, 1999e] *Una experiencia de innovación educativa en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas de la Universidad de Málaga.*
- [Padilla y otros, 1999c] *Actividades complementarias a las asignaturas de Matemáticas del primer curso de Ingeniería.*
- [Padilla y otros, 2000b] *Cambiando la metodología de evaluación en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas de la Universidad de Málaga.*
- [Padilla y otros, 2000c] *Actividades complementarias a las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería.*

- *Experiencias*

  Dentro de esta categoría se encuentran los dos Proyectos de Innovación Educativa siguientes patrocinados por el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga:

  - *Actividades complementarias a las asignaturas de Matemáticas del primer curso de Ingeniería. Curso 97–98.*
  - *Actividades complementarias a las asignaturas de Matemáticas del primer curso de Ingeniería. Curso 98–99.*

Ambos proyectos surgieron como consecuencia de los cambios que tuvieron lugar por esas fechas en los planes de estudios de las carreras técnicas que se impartían en la Universidad de Málaga. Una de las consecuencias inmediatas de dichos cambios fue una reducción drástica del número de créditos asignados a las asignaturas de Matemáticas, lo que obligó a una reestructuración de los contenidos a enseñar así como de la forma de impartirlos. Los proyectos mencionados tenían como finalidad, precisamente, indagar y experimentar sobre las distintas formas de actuar para tratar de solucionar la situación planteada como consecuencia de los cambios producidos.

2.3.4. Enseñanza y aprendizaje de Integrales de Línea

En los siguientes textos especializados se encuentran propuestas implícitas de enseñanza de *Integrales de Línea* y orientaciones para su aprendizaje. Decimos que son implícitas porque en todas ellas se aprecia la preocupación por la transmisión del contenido, por favorecer la comprensión y por proponer actividades y ejemplos orientados a facilitar el aprendizaje y servir de ayuda a cualquier profesor que necesite desarrollar esta materia. Las referencias escuetas son las siguientes:

- [Mataix, 1973] *1000 problemas de Cálculo Integral.*
- [do Carmo, 1990] *Geometría Diferencial de curvas y superficies.*
- [Demidovich, 1976] *6000 problemas de Análisis Matemático.*
- [Hsu, 1987] *Análisis Vectorial.*
- [Muñoz y Ruiz, 1988] *Problemas de Ampliación de Matemáticas.*
- [Swokowski, 1989] *Cálculo con Geometría Analítica.*
- [Bajpai y otros, 1990] *Advanced Engineering Mathematics.*
- [Fraleigh, 1990] *Calculus with Analytic Geometry.*
- [Apostol, 1991] *Calculus (vol. II).*
- [Ayres y Mendelson, 1991] *Cálculo Diferencial e Integral.*
- [Marsden y Tromba, 1991] *Cálculo Vectorial.*
- [Davis y Snider, 1992] *Análisis Vectorial.*
- [Ojeda, 1993] *Cálculo para la Ingeniería (I).*
- [Pao y Soon, 1993] *Cálculo Vectorial. Problemas resueltos.*
- [Cordero y otros, 1995] *Geometría diferencial de curvas y superficies.*
- [Pita, 1995] *Cálculo Vectorial.*
- [García y otros, 1996] *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables.*
- [Bradley y Smith, 1998] *Cálculo de varias variables. Volumen 2.*
- [Rodrigo y Rodrigo, 1998] *Problemas de Matemáticas para Científicos y Técnicos.*

- [Scala, 1998] *Análisis Vectorial II. Funciones vectoriales y teoría de campos.*

Además de los textos citados anteriormente, incluimos a continuación las publicaciones propias que han servido de base para la elaboración y el desarrollo de la investigación que presentamos en lo que se refiere a los contenidos matemáticos analizados. De hecho, los contenidos del tema *Integrales de Línea* que figuran en el apéndice B han sido extraídos, como se puede comprobar, de dichas publicaciones. Nos referimos a las siguientes obras del equipo investigador:

- [Rodríguez y otros, 1996] *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales. Problemas comentados de examen.*
- [Galán, 1998] *Análisis Vectorial para la Ingeniería. Teoría y Problemas.*

2.3.5. El ordenador como recurso didáctico en la enseñanza de las Matemáticas

Se trata de uno de los apartados en cuyos contenidos y aspectos fundamentales hemos querido centrar el interés del estudio. De hecho, el enunciado del encabezado de este apartado constituye una definición clara del problema general que nos preocupa, a cuya solución pretende contribuir modestamente la investigación que presentamos.

En los párrafos que siguen se presentan los documentos que se han utilizado para determinar el estado de la cuestión, ordenados en los siguientes apartados y subapartados: Derive en la enseñanza de las Matemáticas (en Enseñanza Secundaria y en la Universidad), otros CAS en la enseñanza de las Matemáticas, programación y otros lenguajes en la enseñanza de las Matemáticas y estudios y experiencias propias. Al igual que en apartados anteriores se incluyen aquí las referencias básicas mientras que los contenidos se analizan a propósito de la discusión que forma parte del análisis didáctico y que se desarrolla brevemente en el apartado 2.5.3.

– Derive *en la enseñanza de las Matemáticas*

  - *En Enseñanza Secundaria*
    - [Hirlimann, 1996] *Computer algebra systems in French secondary schools.*

- [Nocker, 1998] *Effects of computer algebra on classroom methodology and pupil activity.*
- [Huertos, 2000] *Transferencia de los contenidos matemáticos a las nuevas tecnologías.*

- *En la Universidad*
  - [Watkins, 1993] *A new approach to Mathematics for Engineers.*
  - [Gilligan, 1994] *Learning visually with* DERIVE.
  - [Koepf y Ben Israel, 1994] *The definitive nature of indefinite integrals.*
  - [Townend, 1994] *Introducing the convolution theorem through* DERIVE.
  - [Leinbach, 1994] *Visualizing concepts in advanced analysis.*
  - [Raj, 1995] *Visual interpretation and reinforcement of mathematical concepts using a computer algebra system.*
  - [Ibrahim y Fernández, 2000] *A note on the evaluation of Fresnel integrals in* DERIVE.
  - [Llorens, 2001] *El impacto de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza de las Matemáticas (diez años de Matemáticas con ordenador).*
  - [Pierce y Stacey, 2001] *Observations on students' responses to learning in a CAS environment.*
  - [Camacho y otros, 2002] *Students' attitudes towards Mathematics and computers when using* DERIVE *in the learning of calculus concepts.*
  - [Kempski, 2002] *Imaginative deployment of computer algebra in the undergraduate mathematics curriculum.*
  - [Ortega, 2002b] *La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico.*
  - [Ortega, 2002a] *Análisis de una estrategia didáctica que incorpora el uso del sistema de cálculo algebraico* DERIVE *en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.*

– *Otros CAS en la enseñanza de las Matemáticas*

  ◦ [Ayers y otros, 1988] *Computer experiences in learning composition of functions.*

  ◦ [Monagan, 1994] *Worksheets: can we teach mathematical algorithms with them?*

  ◦ [Fuchs, 1996] *The planning of observation windows when using CAS in Mathematics teaching.*

  ◦ [González y otros, 1997] *Avance curricular en el proceso enseñanza-aprendizaje de la investigación operativa bajo un entorno informático.*

  ◦ [Morphett, 1997] *Using a computer algebra system as an aid to problem solving in the secondary school.*

  ◦ [Shaw y otros, 1997] *A statistical analysis of the effectiveness of using a computer algebra system in a developmental algebra course.*

  ◦ [Townsley, 1997] *Attracting teachers to use CAS in the classroom: common strategies.*

  ◦ [Zehavi, 1997] *Changes that computer algebra systems bring to teacher professional development.*

  ◦ [González y otros, 1998] *El Ordenador en el Proceso Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas Empresariales.*

  ◦ [Mainini, 1998] *Pocket calculators and computer algebra programs.*

  ◦ [Nava, 1998] *Experiencia en el uso de programas computacionales para enseñar Matemáticas en Ingeniería en la UNITEC.*

  ◦ [Drijvers, 1999] *Students encountering obstacles using CAS. A developmental-research pilot study.*

  ◦ [Lindsay, 1999] *Designing assessment tasks to accommodate students' cognitive skills in a technology-based mathematics course.*

  ◦ [Schneider, 1999] *Changes of teaching Mathematics by Computer Algebra Systems (CAS).*

  ◦ [Strickland, 1999] *A Computer Algebra System for improving student's manipulation skills in Algebra.*

  ◦ [Cabello y otros, 2000] *Mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas Empresariales.*

- [Schneider, 2000] *Teacher experiences with the use of a CAS in Mathematics classroom.*
- [Vlachos y Kehagias, 2000] *A Computer Algebra System and a new approach for teaching Business Calculus.*
- [Westermann, 2000] *Teaching Mathematics using a Computer Algebra.*
- [Asensio, 2001] *Laboratorio de Matemáticas en la E.U.I.T.I. de la Universidad Politécnica de Madrid.*
- [Borbón, 2001] *El uso de la computadora para la introducción del concepto de recta tangente y la resolución de problemas no rutinarios de cálculo.*
- [Alonso y otros, 2001] *Some unexpected results using computer algebra systems.*
- [Neuper, 2001] *What teachers can request from CAS-designers.*
- [Pierce, 2001] *Using CAS-calculators requires algebraic insight.*
- [Abboud, 2002] *Introducing experiments into a first course in calculus.*
- [Albano y Desiderio, 2002] *Improvements in teaching and learning using CAS.*
- [Anido, 2001] *Una propuesta de incorporación de herramientas computacional a la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Evaluación de experiencias.*
- [de Alwis, 2002] *Computer Algebra Systems in a multivariable calculus course and center of gravity problems.*
- [Cretchley y Galbraith, 2002] *Mathematics or computers? Confidence or motivation? How do these relate to Achievement.*
- [Cretchley, 2002] *Mathematics and technology: How integrated is this learning partnership?*
- [García y otros, 2002] *Differential calculus of several variables with* MATHEMATICA *or* MAPLE.
- [Henderson, 2002] *Blending technology and pure Mathematics: Is the hard work worthwhile?*
- [Hoya y otros, 2002] *The use of symbolic calculus software in the teaching of Mathematics at Engineering Schools.*

- ◦ [Mackie, 2002] *Using computer algebra to encourage a deep learning approach to calculus.*
- ◦ [Van Herwaarden y Gielen, 2002] *An approach for the effective integration of Computer Algebra in an Undergraduate Calculus and Linear Algebra Course.*
- ◦ [Yamamoto, 2002] *Analyzing the limitations of technology in teacher preparing courses.*

– *Programación y otros lenguajes en la enseñanza de las Matemáticas*

- ◦ [Dubinsky, 1994] *Pedagogical Change in Undergraduate Mathematics Education.*
- ◦ [Dubinsky, 1995] ISETL*: A Programming Language for Learning Mathematics.*
- ◦ [Dubinsky y Noss, 1996] *Some kinds of computers for some kinds of Mathematical learning.*
- ◦ [Dubinsky, 1998] *Writing Programs to Learn Mathematics.*
- ◦ [Dubinsky, 2000] *De la investigación en Matemática teórica a la investigación en Matemática educativa: un viaje personal.*
- ◦ [Majewski, 2000] *Non trivial applications of* Maple *in teaching mathematics.*
- ◦ [Hector, 2002] *Problem Solving, Programming and Pedagogy.*

– *Estudios y experiencias propias*[5]

- ◦ [Padilla y otros, 1999b] *Matemáticas con* Derive. *Iniciación al programa.*
- ◦ [Padilla y otros, 1999a] *Prácticas autodidactas para el aprendizaje de las Matemáticas apoyadas por ordenador.*
- ◦ [Padilla y otros, 2000a] *El ordenador: una herramienta útil en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Secundaria.*
- ◦ [Padilla y otros, 2002f] *Use of the computer in Mathematic teaching for engineers. A powerful calculator?*

[5]Referencias completas de las publicaciones en Bibliografía (parte VI) y documentos no publicados en poder de los autores o de los Organismos correspondientes en cada caso.

- [Padilla y otros, 2002c] `COMPLEX.MTH`*: Solving Problems of Functions of a Complex Variable for Engineering using* DERIVE.
- [Padilla y otros, 2002e] *Teaching Mathematics in Engineering with* DERIVE*. An Experience in the University of Málaga.*
- [Padilla y otros, 2002g] `Complex Analysis.dfw`.
- [Padilla y otros, 2002b] *Are computers under-used in Mathematical teaching for engineers?*
- [Padilla y otros, 2003b] *Variable Compleja con* DERIVE.
- Clases prácticas con ordenador en distintas asignaturas de Ingeniería, desde el curso 96–97 hasta la actualidad.
- Seminario Permanente (Centro de Enseñanza de Profesores de Málaga): *Aplicaciones del ordenador en el aula. Área de Matemáticas.* Cursos 94–95 y 95–96.
- Cursos dirigidos a profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato impartidos en distintos Centros de Enseñanza de Profesores de la provincia de Málaga. Entre ellos destacamos: *Curso de Matemáticas con* DERIVE*, Aplicaciones didácticas de Matemáticas con* DERIVE y *El* DERIVE *en el desarrollo del currículum de Matemáticas.*
- Proyecto de Innovación (Instituto de Ciencias de La Educación de la Universidad de Málaga): *Prácticas de Matemáticas con* MATLAB*.* Curso 98–99.
- Cursos impartidos dentro del marco de los Cursos de Verano de la Universidad de Málaga. Entre ellos el titulado *Matemáticas con* DERIVE.
- Proyecto de Enseñanza Virtual (Dirección de Enseñanza Virtual de la Universidad de Málaga): *El ordenador en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas: mucho más que una calculadora potente.* Curso 01–02.
- Proyecto de Innovación (Servicio de Innovación Educativa de la Universidad de Málaga): *Matemáticas para la Ingeniería. El ordenador como herramienta de creatividad matemática.* Curso 02–03.

2.3.6. Enseñanza y aprendizaje de Integrales de Línea con DERIVE

Los antecedentes específicos sobre el tema que encabeza el presente apartado se reducen a los trabajos, publicaciones y experiencias desarrollados por los profesores que han colaborado en la investigación. De la producción de estos "antecedentes propios" son especialmente importantes las siguientes publicaciones y experiencias:

- *Publicaciones*
  - [Padilla y otros, 2001] *Análisis Vectorial para la Ingeniería con ayuda del programa* DERIVE.
  - [Padilla y otros, 2002a] `ANALVEC.MTH`*: Integration and Vector Field Problems for Engineering using* DERIVE.
  - [Padilla y otros, 2002d] `Multiple Integration.dfw`.
  - [Padilla y otros, 2003a] *Elaboración de comandos con* DERIVE*: Integración Múltiple.*
- *Experiencias*

  Entre el conjunto de prácticas con ordenador impartidas cada curso en el desarrollo de las asignaturas de Matemáticas, caben destacar las prácticas realizadas con DERIVE sobre la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales.* Estas prácticas se han repetido durante varios años, en lo que se podría considerar como un estudio exploratorio prolongado previo a la investigación que se presenta en esta memoria. Tanto es así que durante los últimos tres años se han estado realizando aproximaciones y experiencias informales a la realización de comandos con DERIVE como eje vertebrador de una parte del aprendizaje, la que tiene que ver con la estructura y el funcionamiento de los procedimientos trabajados.

2.4. Antecedentes sobre el marco teórico y metodológico: investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas

No es frecuente que en una investigación se indague sobre las técnicas metodológicas más idóneas para dar respuesta al problema. Sin embargo, nos encontramos aquí con un estudio realizado en unas condiciones especiales y supeditado a un marco teórico y metodológico que pretende constituir un modelo para la investigación en situaciones similares. Por tanto, al interés por dar respuesta al problema se une la necesidad de construir y justificar el marco adecuado y el interés por someter a prueba su viabilidad y eficacia en el caso específico estudiado.

Aunque el modelo que se ha construido es general y se encuentra aún en fase de iniciación (ver apartados 2.5.1 y 2.5.2, donde se pueden consultar los aspectos fundamentales del modelo), vamos a dedicar este apartado a los antecedentes y las fuentes documentales que han servido de base para su construcción y fundamentación. Pero, si bien es cierto que el marco teórico y metodológico que se presenta tiene su origen en la tendencia italiana llamada *Investigación para la innovación* ([Arzarello, 1999]), también hay que decir que se sustenta, en buena medida, en la propia realidad del aula y en las posibilidades y necesidades que surgen de la práctica docente diaria. Por tanto, no se trata sólo de un modelo cerrado y construido teóricamente mediante una síntesis de modelos y teorías anteriores, sino que pretende ser un modelo abierto con una componente empírica destacada que aporte información a medida que se vayan poniendo de manifiesto los requerimientos de la propia realidad del aula y los resultados de las sucesivas experiencias.

En los apartados que siguen utilizaremos una estructura y formato ligeramente diferentes de los que se han empleado para el problema específico, no sin antes advertir que ello se debe a que se ha prestado más atención a los antecedentes del problema específico que a los del marco teórico y metodológico. En relación con estos últimos, simplemente se ha completado la información básica ([González, 1999a, Sierra, 1999, González, 2003]) con los datos y referencias necesarias para situar convenientemente el marco teórico utilizado.

2.4.1. Descriptores y palabras clave

De las palabras clave indicadas en el apartado 2.2.3 para el problema general de la investigación, tomaremos aquí las que hacen referencia, inicialmente, al marco teórico y metodológico. En consecuencia, los términos y frases que constituyen descriptores y palabras clave para esta parte del estudio son los siguientes: *Innovación en el aula de Matemáticas. Innovación curricular en la acción en estudios de Ingeniería. Investigación curricular en Matemáticas. Investigación para la innovación curricular en el aula de Matemáticas. Metodologías de investigación en Educación Matemática. Metodologías de investigación en el aula de Matemáticas.*

2.4.2. Fuentes de información y búsquedas realizadas

No se ha realizado una búsqueda tan sistemática, rigurosa y puntual como la realizada en el caso de los antecedentes sobre el problema específico. No obstante, desde que se inició la investigación se han venido consultando las fuentes y tipos de publicaciones y documentos que indicamos a continuación.

1. *Biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,* de la que se han consultado libros y capítulos de libros cuyas referencias se incluyen en los apartados correspondientes.

2. *Hemeroteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,* de la que se han consultado las revistas disponibles y se han extraído los artículos cuyas referencias se incluyen en los apartados correspondientes.

3. *Congresos y reuniones.* Se han considerado especialmente las publicaciones contenidas en las actas de los siguientes Congresos Internacionales y reuniones:

    - The First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME1), celebrado en Osnabrüeck (Alemania) en agosto de 1998.

    - Reunión Internacional Luso-hispano-italiana sobre Educación Matemática (Escuela de Verano) celebrada en Santarem (Portugal) en el verano de 1999.

- Actas de las reuniones anuales desde 1997 (Zamora) hasta 2003 (Granada) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

4. *Publicaciones del Seminario CIEM (Currículo e Investigación en Educación Matemática)* del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

5. *Búsquedas ocasionales en Internet* utilizando las direcciones usuales de interés y algunas de las palabras clave y descriptores que figuran en el apartado anterior.

6. *Tesis Doctorales.* Se han utilizado diversas tesis doctorales de la colección Mathema de la editorial Comares así como otros informes de investigación elaborados en los Departamentos y Áreas de Didáctica de la Matemática de las Universidades españolas.

7. *Bases de datos.* ERIC, ZDM, UMI y TESEO.

2.4.3. Investigaciones curriculares en Educación Matemática: Tendencias y autores más importantes

El análisis de los principales resultados en este campo es y ha sido permanente a lo largo del proceso de construcción del modelo teórico que proponemos para investigar los problemas curriculares del tipo que presentamos en este informe. Algunos de los resultados que se discuten brevemente en el apartado 2.5, al que nos remitimos, tienen su origen en las siguientes publicaciones:

1. *Generales:*

   - [Rico, 1997] *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.*
   - [Rico, 1998] *Concepto de Currículum desde la Educación Matemática.*
   - [Romberg, 1991] *Características problemáticas del currículum escolar de Matemáticas.*
   - [Romberg, 1992] *Perspectives on Scholarship and Research methods.*
   - [Grouws, 1992] *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

- [Stenhouse, 1984] *Investigación y desarrollo del currículo.*
- [Stenhouse, 1987] *La investigación como base de la enseñanza.*
- [González, 2000] *Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática.*
- [González y Ortiz, 2000] *La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: Estructura y fundamentos.*
- [Lawton, 1986] *Curriculum studies and Educational Planning.*

2. *Investigaciones en el aula de Matemáticas:*

   - Publicaciones periódicas sobre temas curriculares diversos editadas por la Sociedad THALES.
   - Publicaciones periódicas sobre temas curriculares diversos editadas por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

3. *Estudios y experiencias de innovación en el aula de Matemáticas:*

   - Numerosos artículos y trabajos publicados en la Revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
   - Artículos y trabajos publicados en la Revista EPSILON de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas THALES.

2.4.4. Investigación para la innovación en Italia

La investigación en Educación Matemática presenta problemas que tienen su origen en la naturaleza compleja y sistémica de los fenómenos en estudio y en las condiciones reales en las que éstos se desarrollan. Para superar dichos problemas, en particular en las investigaciones realizadas durante el desarrollo curricular ordinario "oficial" en grupos naturales, ha surgido recientemente en Italia una tendencia o línea de investigación, denominada "investigación para la innovación", que tiene en cuenta la complejidad de los fenómenos educativos reales en Matemáticas y se preocupa por la viabilidad, validez y replicabilidad de los estudios así como la aplicabilidad práctica de los conocimientos generados y las incidencias sobre la innovación y formación del profesorado. Las principales referencias son las siguientes:

- [Arzarello, 1999] *Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia.*
- [Bartolini, 1998] *Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico.*
- [González, 1999a] *Comentario a la Ponencia Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico.*
- [González, 1999b] *Contribución al panel "Qualidade da Investigaçao": Relevancia de la investigación para la calidad de la enseñanza.*
- [Sierra, 1999] *Comentario a la Ponencia Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico.*
- [Bartolini y otros, 1999] *Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School.*
- [Grouws, 1992] *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

A continuación se expone una síntesis de las principales ideas de la tendencia analizada junto a algunas observaciones, interrogantes y comentarios que surgen del análisis de las mismas. La exposición, que tiene su continuación en el apartado 2.5.1 a propósito de la discusión y análisis didáctico del marco teórico y metodológico de la investigación, se articula en torno a los siguientes temas: marco teórico general en el que se sitúa la tendencia, tipos de investigaciones y sus fundamentos, características, métodos y relaciones con el resto de líneas y paradigmas de investigación. Otras cuestiones, tales como la viabilidad y relevancia para la práctica o la discusión sobre la dificultad, la pertinencia, el papel de los profesores o las consecuencias de los estudios de este tipo serán tratadas, como se ha indicado, cuando se expongan las conclusiones del análisis didáctico.

La situación general de la línea de trabajo con respecto a otras tendencias y paradigmas ha sido descrita por los autores [Bartolini, 1998], [Arzarello, 1999] y [Bartolini y otros, 1999] de la forma siguiente:

Tres tendencias tradicionales en investigación en Educación Matemática

[Arzarello, 1999], a través del análisis de la investigación en los últimos años en Italia, identifica tres componentes principales, tendencias de investigación o tradiciones que se han venido desarrollando en el tiempo de forma acumulativa:

A. *Investigaciones basadas en la organización conceptual de la disciplina* (también conocida como tradición filosófica escolástica ([Grouws, 1992])).

   El objetivo de esta tendencia es mejorar la enseñanza en situaciones genéricas sobre la base de la organización lógica de los conceptos desde el interior de las Matemáticas y a partir del contenido disciplinar como eje del trabajo. Algunas de sus características destacadas son: acción en el aula basada en la dificultad conceptual de tipo matemático (más que desde un punto de vista psicológico); atención al producto más que al proceso; modelo "top-down" (partir de las Matemáticas para incidir posteriormente en la práctica docente); intención de ejercer influencia en programas y textos; difusión de la información a través de la formación inicial y de la buena voluntad de los profesionales.

   A partir de esta tendencia se inició el movimiento que, en un contexto más amplio relacionado con la preocupación por la renovación pedagógica en los niveles elementales y con el apogeo de la matemática moderna, dio lugar a la tradición siguiente.

B. *Investigación para la innovación concreta en el aula* (tradición pedagógica).

   El objetivo de esta tendencia es la producción de ejemplos paradigmáticos para la mejora de la enseñanza en situaciones específicas y cotidianas. Algunas de sus características más destacadas son: atención al proceso y experimentación como base del trabajo; investigación-acción (partir de los problemas de la enseñanza); intención de ejercer influencia sobre el currículo efectivo; difusión a través de la formación permanente, de los ejemplos y de la buena voluntad de los profesores.

   Como ejemplos se pueden citar los trabajos de Castelnuovo, Gattegno y Dienes, que con frecuencia se integraban con los estudios de la tendencia anterior mediante grupos de trabajo mixto Universidad - Escuela y a través de la colaboración entre la investigación teórica y la investigación en la acción. Los principales problemas que se atribuyen a esta tendencia son: la necesidad de abordar científicamente la transposición a otras aulas, las dificultades para explicar cómo la innovación puede funcionar en contextos diferentes de los utilizados para la experimentación y la metodología de investigación, de cuya discusión surge la tradición que se describe brevemente a continuación.

C. *Investigación para la observación y la modelización del proceso de enseñanza-aprendizaje en condiciones de laboratorio* (tradición científica empírica).

   Con esta tendencia, según los autores (Arzarello, op. cit.), se propone mejorar el conocimiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas para planificar la práctica e intervenir sobre ella de forma fundamentada. En los estudios se realizan experimentos para comprobar hipótesis (los autores citan como ejemplos la mayoría de los trabajos del PME) y los principales resultados se materializan en taxonomías y en modelos de actuación e interacción en el aula. El objetivo fundamental de esta tendencia, también en opinión de los autores, no es influir sobre el sistema educativo, lo que está en contradicción con lo afirmado al comienzo del párrafo. La confusión se subsanaría añadiendo el término "directamente", lo que en nuestra opinión reflejaría mejor el verdadero sentido de esta línea de trabajo.

Sin entrar en un análisis crítico de las tendencias mencionadas, para lo que nos remitimos al apartado 2.5, pasamos a exponer los aspectos fundamentales de lo que dichos autores han denominado:

Una cuarta tendencia integradora

Nacida de los tres enfoques descritos, en un intento por evitar los inconvenientes usuales de los mismos, surge esta tendencia de carácter innovador y, en opinión de los autores, sustancialmente diferente a las anteriores en la medida en que las supera sin eliminarlas. Veamos en qué consiste.

D. *Investigación para la innovación.*

   Aquí se considera la innovación no sólo como acción en la clase sino como verdadera investigación. Su objeto de estudio es la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, tanto a nivel de la clase como del sistema educativo. Con ella se pretende, en concreto y según los autores:

   - Producir modelos paradigmáticos de mejora de la enseñanza de las Matemáticas (modelo A).

- Estudiar las condiciones y factores que afectan a las realizaciones concretas (modelos B y C).
- Producir constructos teóricos innovadores que guíen la acción de los profesores.
- Producir métodos didácticos innovadores (producciones específicas de este modelo).

2.4.5. Métodos de investigación en Educación Matemática

La metodología de investigación en Educación Matemática suele ser compleja e interdisciplinar, es decir, utiliza procedimientos y técnicas diversas, heredadas de las distintas disciplinas afines que contribuyen al marco conceptual del estudio, combinadas específicamente en un sentido determinado y a lo largo de un proceso complejo. En nuestro caso, tenemos necesidad de utilizar los siguientes métodos, de los que obtenemos información acudiendo a las fuentes que se citan en cada caso:

1. *No empíricos:*

    - Análisis epistemológico, análisis fenomenológico y análisis histórico del conocimiento matemático sobre *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* y, en particular, sobre *Integrales de Línea*. Para ello, seguimos las recomendaciones y observaciones generales siguientes que adaptamos al caso del contenido estudiado:
        - [Freudhental, 1983] *Didactical phenomenology of Mathematical Structures.*
        - [Puig, 1997] *Análisis Fenomenológico.*
        - [Piaget y Beth, 1980] *Epistemología Matemática y Psicología.*
        - [Ortiz, 1997] *Razonamiento Inductivo Numérico.*
    - Análisis de textos y recursos en Matemáticas:
        - [Coriat, 1997] *Materiales, recursos y actividades: un panorama.*
    - Análisis Didáctico de la enseñanza de *Integrales de Línea* en los estudios universitarios de Ingeniería mediante una metodología mixta con Derive y sobre su investigación en condiciones naturales. Las referencias centrales de esta parte son las siguientes:
        - [González, 1998] *Números naturales relativos.*

  - [González, 1999c] *Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in Mathematics Education.*

2. *Empíricos:*

   - General:
     - [Guba y Lincoln, 1985] *Naturalistic Inquiry.*
     - [Taylor y Bogdan R., 1986] *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.*
   - Investigación en la acción. La información sobre este enfoque de investigación la extraemos de:
     - [Kemmis, 1988] *Action Research.*
     - [Goyette y Lessard Hébert, 1988] *La investigación-acción.*
   - Entrevistas y encuestas. Tenemos en cuenta lo que señalan en tal sentido:
     - [Cohen y Manion, 1990] *Métodos de investigación educativa.*
     - [Goetz y Lecompte, 1988] *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.*
   - Etnografía. Seguimos las concepciones a este respecto de:
     - [Goetz y Lecompte, 1988] *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.*
     - [Eisenhart, 1988] *The Ethnographic Research Tradition and Mathematic Education Research.*
   - Análisis descriptivo de datos cuantitativos:
     - [Bisquerra, 1989] *Métodos de Investigación Educativa: guía práctica.*
   - Estudios cuasiexperimentales:
     - [Bisquerra, 1989] *Métodos de Investigación Educativa: guía práctica.*
     - [Latorre y otros, 1996] *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa.*

2.5. Análisis Didáctico y consecuencias para la investigación

En los apartados anteriores se han expuesto algunos de los resultados de la revisión de antecedentes sobre los dos grandes apartados en que se divide el problema de investigación. Pero, como se indica en [González, 1998, González, 1999c], el mero análisis superficial de los datos y la consideración del campo de la Educación Matemática como un dominio interdisciplinar, en lugar de un área científica específica con sus peculiaridades diferenciales, hace que las primeras etapas del proceso de investigación presenten dificultades y limitaciones que reclaman un tratamiento adicional específico para la disciplina. Ésta es la aportación que realiza la metodología no empírica que hemos denominado *análisis didáctico:* "... procedimiento metodológico que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a diferentes áreas de investigación en Educación Matemática ...". El análisis didáctico, por tanto, pretende sistematizar y organizar una reflexión fundamentada sobre el problema de investigación con carácter previo a la delimitación definitiva del mismo y, sobre todo, al diseño de cualquier estudio teórico o empírico que se quiera acometer a partir del simple conocimiento de los antecedentes. La justificación de este proceder es sólida y está ampliamente documentada, como se pone de manifiesto en las publicaciones citadas a las que nos remitimos para una información más extensa.

Sin embargo, debido a las características del estudio en el que muchos aspectos se encuentran ya totalmente delimitados, no hemos realizado un análisis sistemático completo, sino parcial y centrado, sobre todo, en el diseño curricular específico y en el marco teórico de la investigación, dos de los pocos aspectos susceptibles de variaciones sustanciales. A pesar de todo, el análisis efectuado ha sido fructífero, como se pone de manifiesto en los resultados obtenidos que se detallan en los tres apartados siguientes. En el primero de ellos (2.5.1) se realiza el análisis didáctico sobre el marco teórico y metodológico; en el segundo (2.5.2) se describe el modelo teórico desarrollado a partir del análisis anterior; el tercer apartado (2.5.3) se dedica al análisis de los antecedentes sobre la enseñanza y aprendizaje de *Integrales de Línea* con DERIVE. La discusión que se realiza en estos tres apartados sentará las bases del marco teórico y metodológico que se va a utilizar en todo el estudio y proporcionará algunas indicaciones para el diseño del estudio empírico y la interpretación de los resultados.

2.5.1. Algunas reflexiones sobre el marco teórico y metodológico

Partimos de la tendencia *"Investigación para la innovación"*[6] presentada en el apartado 2.4.4 para constituir el nuevo modelo teórico que proponemos para el desarrollo de esta investigación. Seguiremos para ello un proceso de diseño y análisis didáctico de las características del modelo mencionado en base a lo establecido en [González, 1999a]. Dicho proceso culminará con la construcción del modelo que hemos denominado *"Investigación para la innovación curricular en la acción"* y que se expone con detalle en el apartado 2.5.2.

Características generales del modelo italiano y discusión de sus principios

1. *Participación activa y directa de los profesores como "co-investigadores".* Los profesores actúan como investigadores en sus grupos naturales y no como meros espectadores, informadores, colaboradores u objetos de investigación. Estamos, por tanto, ante una variante de la corriente conocida como "investigación en la acción" (tendencia B, apartado 2.4.4) que se podría denominar "investigación en la acción de carácter cooperativo". En este modelo, a diferencia de la tendencia B, se modifica el papel de los participantes en el sentido indicado y su número, que suele ser elevado.

   Pero dicha participación suscita las dudas que planteamos y discutimos a continuación:

   > ¿Tienen los profesores la formación suficiente para actuar plenamente y en todo momento como investigadores?

   El profesor investigador debería tener una formación básica amplia y adecuada para investigar en Educación Matemática (lo ideal sería que cursara un programa de doctorado específico o que aprovechara la trayectoria docente y las experiencias acumuladas para completar y actualizar su formación mediante lecturas seleccionadas y debates). Si esto no es posible y la

[6] A la que en ocasiones también llamaremos *modelo italiano* en atención a la nacionalidad de su creador (Arzarello) y para simplificar las referencias en el texto.

formación es insuficiente, el Director de la investigación y los profesores colaboradores deben participar activamente en todos los ámbitos del estudio y dedicar una parte de las tareas a la formación de los participantes.

¿Cómo se articula la atención hacia las tareas investigadoras con la atención hacia las labores docentes ordinarias?

En nuestra opinión se pueden compatibilizar ambas tareas situando la investigación dentro de los límites de las orientaciones curriculares oficiales y de las condiciones reales del desarrollo del currículo. El profesor, ayudado por el equipo y bajo la supervisión del Director del trabajo, no tiene más que desarrollar su labor docente en condiciones especiales permitidas por el sistema educativo. Para ello, igual que si se tratara de un proceso de enseñanza reglado en condiciones normales, debe preparar y desarrollar una versión alternativa (experimental) del tratamiento didáctico usual y realizar, cooperativamente, una evaluación y seguimiento de los resultados.

¿Están todos los profesores dispuestos a asumir el trabajo añadido que supone la formación y la atención necesaria para desarrollar tareas investigadoras?

Es evidente que el Director y el profesor-investigador deben asumir dicha responsabilidad y llevar la mayor parte del peso de la investigación. Un problema a resolver será conseguir la ayuda y colaboración de otros coinvestigadores, cuya participación debe ser preparada y coordinada de antemano.

¿Se dan en las aulas y en los centros educativos las condiciones adecuadas para desarrollar el tipo de estudios que se propone?

La respuesta a esta pregunta es rotundamente negativa, es decir, el sistema educativo, los participantes, los centros y las aulas no están preparados para que se desarrollen investigaciones sobre la misma práctica y durante el desarrollo de la misma. Antes bien, los centros y las aulas sólo están preparados para cumplir los fines propios de la institución. Sin embargo, creemos que se trata del lugar adecuado y de las condiciones idóneas para llevar a cabo la investigación "aplicada" en Educación Matemática; la investigación que podemos denominar "terminal", más cercana a la realidad de los fenómenos, a la razón de ser y a la finalidad última de la investigación en este campo. Que duda cabe de que ello introduce dificultades añadidas debidas a las restricciones y limitaciones propias del proceso real, pero, al mismo tiempo, es un reto superable si se realiza una labor minuciosa, continuada y con la intención de incidir en la realidad educativa para modificarla positivamente.

¿Qué cambios serían necesarios para facilitar y potenciar este tipo de trabajos?

Los centros educativos, los departamentos y los profesores deben adoptar las medidas adecuadas para permitir y potenciar la investigación curricular orientada a la innovación, a la mejora del diseño y desarrollo curriculares y al aumento cualitativo de la formación y el rendimiento matemático de los alumnos. Al mismo tiempo, se debe incidir en la formación didáctica de los profesores participantes, en la calidad de los conocimientos didácticos aplicables al aula ordinaria y en su disponibilidad para todo el profesorado en ejercicio y en formación.

2. *Consideración "natural" y sistémica de los fenómenos.*

   Los estudios dentro de esta tendencia tratan de indagar en los fenómenos tal y como ocurren y allí donde ocurren, sin atomizar, aislar sus partes, focalizar excesivamente o crear condiciones de laboratorio o situaciones forzadas o "no naturales". Así se deduce de lo indicado por [Bartolini, 1998] ante cuestiones excesivamente puntuales o que requerirían de modificaciones sustanciales de los procesos y fenómenos así como de sus tiempos naturales.

   En este punto no hay objeción alguna, las reformas curriculares y los estudios de innovación educativa pretenden indagar sobre los fenómenos reales para conocerlos mejor y poder intervenir sobre ellos de forma fundamentada. Sin embargo, no creemos que deban excluirse otras tendencias, enfoques e investigaciones complementarias y de otros tipos, lo que suscita las siguientes dudas:

¿Puede ser necesario a veces sacar del contexto determinados casos puntuales o situaciones específicas y estudiarlas tanto dentro como fuera de la dinámica real?

Pensamos que no sólo es necesario, sino que a veces puede ser obligado debido a la naturaleza de los fenómenos y a los propósitos de la investigación, lo que nos conduce a una nueva duda:

¿No estaríamos entonces necesitando de la aportación de otras tendencias como puede ser la opción C?; ¿en qué medida y cómo se han de complementar ambas tendencias?

Es evidente que resulta imprescindible la aportación de otras líneas y tendencias que deben coexistir manteniéndose, cada una de ellas, dentro de los límites respectivos.

En estrecha relación con la característica descrita parece conveniente destacar también la siguiente:

3. *Preocupación por las condiciones de realización del proceso real de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.*

   Una de las metas de esta tendencia es llegar a comprender mejor los procesos didácticos en su dimensión global para poder influir sobre ellos con una mayor eficacia. Sin embargo, surge aquí una cuestión importante y suficientemente conocida en relación con el poderoso influjo socializador que la escuela ejerce sobre el alumno y sobre el docente. Dicho influjo crea, de forma tácita, concepciones pedagógicas que tienden a reproducirse fácilmente en la práctica, toda vez que se encuentran arraigadas en las creencias del sentido común, en la ideología pedagógica dominante y son estimuladas e incluso exigidas por el funcionamiento habitual de las instituciones, por la forma de organizar la vida en los centros y por las expectativas personales y profesionales. Por tanto, cabe preguntarse:

> ¿Cómo influye este factor en la investigación?; ¿qué instrumentos y cautelas son necesarios para contrarrestar la inercia conservadora del sistema educativo y para conseguir escapar a dicha poderosa influencia?; ¿hasta qué punto el trabajo prolongado en condiciones reales puede ser inmune a dicha inercia?; ¿en qué medida se pueden ver afectados los resultados?

No estamos interesados, por ahora, en adentrarnos en las cuestiones que se plantean, aunque se pueden adoptar cautelas que tienen que ver con la metodología de investigación para asegurar el control de las influencias excesivas en el sentido indicado.

4. *Preocupación por acortar o eliminar las distancias existentes entre la teoría y la práctica, entre el investigador y el objeto de investigación o entre las instituciones relacionadas con la Educación Matemática.*

   La tendencia presentada es un buen intento para salvar lo que constituye en la actualidad una preocupación de todos los investigadores:

   > ¿Porqué no "llegan" a las aulas los resultados de los estudios?; ¿qué hay que modificar para que los resultados de las investigaciones se apliquen de inmediato a la práctica docente diaria?

   Sin embargo, la solución requiere de algo más que de nuevos tipos de investigación. No hay más que tener en cuenta la notable influencia que tienen las orientaciones curriculares oficiales, las políticas educativas, las condiciones socioculturales y laborales o las editoriales sobre la propia práctica docente.

   Otras características que surgen como consecuencia de las mencionadas anteriormente son las siguientes:

5. *Estudios a largo plazo.*

   El tipo de investigación que se realiza dentro del "modelo italiano" requiere de un trabajo continuado y una estancia prolongada en las aulas, requisito difícil de ser cumplido por numerosos investigadores que ejercen una labor docente, con dedicación a tiempo completo, en instituciones universitarias separadas del ámbito de las enseñanzas que constituyen el principal campo de indagación. Surgen así las siguientes preguntas:

> ¿Cómo es posible compatibilizar la docencia en una institución y la investigación en otra?; ¿qué medidas hay que establecer para que el profesorado universitario pueda investigar en estas condiciones en otros niveles educativos?

Nuestra aportación en este sentido es la de orientar todas las actividades hacia la cooperación. De hecho, creemos que únicamente se pueden dar respuestas positivas a las preguntas anteriores cuando las investigaciones se lleven a cabo de forma cooperativa y por un grupo de profesores directamente implicados en el problema. Se plantea así la siguiente característica estrechamente relacionada con la anterior:

6. *Necesidad de colaboración estrecha entre instituciones y personas implicadas (Universidad, Administración, Escuelas) y de condiciones especiales (laborales, etc.) para los participantes.*

   La tendencia analizada no menciona, que sepamos, nada relativo a estas cuestiones, pero nos parece que es una cuestión relevante a la que hay que dar una respuesta.

7. *Consideración especial del tiempo en el que transcurren los fenómenos.*

   Si estamos considerando los procesos es evidente que la variable tiempo es un factor muy importante. Sin embargo, sabemos que es posible (y a veces necesario) atender en la investigación a aspectos puntuales que son susceptibles de estudios atemporales, sin que ello afecte a la validez de los resultados o a la relevancia del trabajo realizado.

Desde el punto de vista de su relevancia para la práctica y de su incidencia en el sistema educativo, la propuesta "italiana" presenta las siguientes características adicionales:

8. *Influencia notoria en la formación permanente del profesorado participante en las investigaciones.*

   La tendencia analizada atiende prioritariamente a la investigación en el aula para innovar la práctica docente. Sin embargo, presenta una vertiente que recibe poca atención pero que tiene un indudable valor desde nuestro punto de vista. La resumimos en las siguientes preguntas:

> ¿Se ha contemplado que éste puede ser un marco idóneo para institucionalizar este tipo de investigaciones desde el punto de vista de los profesores en ejercicio?; ¿se ha pensado en la posibilidad de contemplar también la formación inicial del profesorado?

Por diversos motivos estamos convencidos de que ésta es la línea hacia la que deberían tender los diferentes planes de formación de profesores.

9. *Intención claramente innovadora, en el sentido de influir lo más directa y rápidamente posible en la práctica.*

   Aunque se trata de una de las principales características de la tendencia, creemos que no es exclusiva de la misma, por lo que sería conveniente tratar de evitar cualquier interpretación que asigne a esta tendencia todo lo que tiene que ver con innovación. En nuestra opinión, todas las tendencias y trabajos en el campo de la investigación en Educación Matemática pretenden conocer la realidad e intervenir sobre ella para innovar y mejorar la práctica en las aulas. Incluso los estudios más teóricos persiguen aportar nuevas informaciones y puntos de vista sobre los fenómenos educativos con la intención de disponer de más elementos de juicio para posibles intervenciones y modificaciones así como para el desarrollo fundamentado de investigaciones posteriores ([González, 1998]). Otras cuestiones a discutir serían: la potencialidad para transformar la práctica, la relevancia del conocimiento generado, el alcance de las transformaciones producidas, el grado de generalidad de las modificaciones (número de aulas, centros, profesores o ámbitos geográficos, hasta llegar a influir de manera significativa en los diseños curriculares oficiales y en los libros de texto de todo un país) o el período de tiempo requerido para la aplicación práctica (mayor o menor inmediatez de la innovación).

Características particulares de los estudios puntuales realizados dentro de la tendencia italiana

Del análisis de la investigación desarrollada por [Bartolini, 1998] parece difícil que se pueda llevar a cabo un experimento de enseñanza con modificaciones profundas sin que ello afecte al desarrollo normal del currículo ordinario. No olvidemos que la investigación se lleva a cabo en el mismo escenario natural en el que hay que atender, además, a la formación de los alumnos y a las exigencias de la Administración y de la propia sociedad. De poco serviría un proyecto de innovación original y creativo si para su desarrollo hubiera que modificar sustancialmente el proceso didáctico usual para desatender o dejar en segundo plano aspectos tan importantes como los que intervienen en el estudio. Es necesario, por tanto, dar respuesta a cuestiones como las siguientes:

> ¿Qué efectos tiene el desarrollo del proyecto sobre el resto del currículo?; ¿es posible compatibilizar el proyecto con el desarrollo didáctico ordinario o, por el contrario, es necesario modificar sustancialmente dicho desarrollo?; en este último caso, ¿qué aspectos se pierden y cuáles se ganan en relación con el desarrollo curricular usual?; ¿da tiempo a tratar en cada curso, de esta o de otra manera, los contenidos matemáticos fundamentales del currículo?; ¿se abordan dichos contenidos mediante la misma metodología?

En el estudio desarrollado por [Bartolini, 1998] se mencionan los contextos interno y externo del aprendizaje, lo que suscita las siguientes cuestiones:

> ¿Cómo se contempla, tanto en la planificación de las tareas como en la metodología, la conexión con las experiencias y la exploración fuera del aula?; ¿cómo se tienen en cuenta las experiencias desiguales que tienen los alumnos fuera del aula?

Esto lleva a una cuestión de interés y de bastante actualidad que no tiene respuesta específica dentro del modelo italiano pero que también tratamos de solventar con el nuevo modelo teórico que proponemos:

> ¿Cómo se contempla la atención a la diversidad en los proyectos de investigación desarrollados dentro de esta tendencia?

Por otra parte se afirma que el contexto interno está influenciado por la calidad e intensidad de la exploración del contexto externo, pero:

> ¿Cómo se produce dicha influencia?; ¿son los únicos factores que influyen en la conformación de dicho contexto interno; en la constitución de la cognición?; ¿se consigue mejorar la calidad y la intensidad de la exploración únicamente a través de prácticas guiadas y creando un diálogo entre dicha experiencia práctica y la experiencia teórica de modelización matemática?

Como afirma la autora, es posible acceder a los procesos mentales interpretando las manifestaciones externas observables (signos, metáforas, gestos, etc.). Sin embargo, éste es uno de los grandes problemas de una buena parte de las investigaciones en Educación Matemática:

> ¿Hasta qué punto las interpretaciones que hacemos de lo que los alumnos hacen y dicen se acercan a la verdadera situación del conocimiento o de la cuestión observada?; ¿es posible que las inferencias que hacemos sean tan sesgadas y limitadas como lo pueden ser los supuestos y teorías que utilizamos así como las creencias y valores con las que juzgamos dichas manifestaciones?

Si bien es cierto que el conocimiento matemático es socialmente compartido, también creemos que no todo el conocimiento individual es producto de una construcción social o de la interacción entre el profesor y el alumno como principal origen de la función psíquica superior. En este asunto, no podemos estar de acuerdo con los autores si no se hacen las matizaciones oportunas. En concreto, sabemos que los sujetos también construyen conocimientos a través de su propia acción individual sobre objetos sin el concurso de la interacción mencionada, como así ocurre en los conocidos "actos de comprensión" de [Sierpinska, 1994], en la construcción de representaciones internas, en las actividades de síntesis o en los momentos de abstracción reflexiva. A pesar de todo, no dejamos de reconocer la bondad parcial de estos planteamientos que tendremos en cuenta en la construcción de nuestro modelo.

Para el desarrollo del proyecto se hizo un diseño diferente para cada grupo en función de la edad y todos se aplicaron simultáneamente. Sin embargo, surgen las siguientes dudas:

> ¿Cómo se contemplan y en qué sentido las múltiples diferencias entre los alumnos de diferentes edades en los proyectos para cada grupo?; ¿cómo es posible que se obtengan resultados similares en todos los niveles en cuanto a la consecución de un pensamiento abstracto que involucra postulados y teoremas?

La discusión realizada hasta aquí y resumida en los numerosos interrogantes planteados ha originado un proceso de síntesis que se considera en las dos reflexiones que se exponen a continuación. Una de ellas se ha extendido, a su vez, a la construcción del modelo teórico que sustenta la investigación que presentamos y que se expone resumido en el apartado siguiente.

Primera reflexión: Sobre la utilidad y necesidad de las tendencias y modelos para la investigación en Educación Matemática.

Es evidente que las tres tendencias (A, B y C) citadas en el apartado 2.4.4, presentan numerosas limitaciones y dificultades. Sin embargo, aceptando que la cuarta tendencia es interesante, creemos que la solución no radica únicamente en la creación de nuevas líneas de investigación "que superen a las anteriores". Antes bien, creemos que es necesario, además, mejorar y consolidar las tendencias existentes, tratar de eliminar las barreras y la pugna entre Escuelas y, sobre todo, tratar de incidir sobre otros aspectos especialmente influyentes en la práctica educativa (Editoriales, Administración Educativa, diseños curriculares, formación inicial y permanente del profesorado, situación laboral, profesional y social de los profesores, etc.).

En cualquier caso, nos parece fundamental aunar esfuerzos y puntos de vista en lugar de disgregar, para lo que cualquier aportación es digna de consideración. En este sentido, la tendencia presentada viene a cubrir una parte, un enfoque importante de la investigación, y como tal se debe sumar al resto de tendencias anteriores. Sin embargo, como pondremos de manifiesto en los apartados que siguen, creemos que el modelo presentado es incompleto y que se puede dar un paso más para abordar problemas nuevos y clásicos desde otros enfoques.

Por otra parte, es evidente que existen diferencias entre las distintas tendencias de investigación, pero todas son necesarias y complementarias más que jerarquizadas en un sentido inclusivo o en una estructura de relaciones según grados de bondad. No parece conveniente que la tendencia "italiana" se deba plantear como una línea de trabajo que "supera" o mejora a las anteriores. Por el contrario, creemos que tiene utilidad para determinados aspectos de la investigación o para determinado tipo de investigaciones como una aproximación más al conocimiento de los fenómenos en estudio. En otros casos puede ser necesario emplear otras aproximaciones, sin que ello suponga disminuir la credibilidad científica del estudio ni la potencialidad innovadora de sus resultados. De hecho, a menos que nos estemos refiriendo a algunos estudios de carácter experimental, no es cierto que todas las investigaciones desarrolladas dentro de la tendencia C (apartado 2.4.4) se hagan en condiciones de laboratorio, distorsionando las variables y obteniendo conclusiones a veces de dudosa credibilidad y, sobre todo, de dudosa aplicabilidad y efectividad en condiciones "naturales".

Con frecuencia, las investigaciones que indagan sobre aspectos puntuales de los fenómenos de la Educación Matemática en los escenarios naturales se refieren a la realidad en toda su extensión, si bien restringida a las condiciones particulares del estudio y que deben aparecer claramente explicitadas en el informe. Creemos que es arriesgado decir que estos estudios empíricos que se limitan a obtener información puntual sobre rendimientos, dificultades, resolución de problemas, comportamientos en clase o libros de texto, por citar algunos, generan conocimientos poco innovadores o de poca cientificidad. Se les podrá achacar que son parciales, limitados, poco útiles o que no afectan directamente a la práctica educativa inmediata, pero, si están correctamente realizados y se han adoptado las cautelas oportunas no cabe duda de que son dignos de consideración y se deben tener en cuenta en trabajos posteriores.

> *Segunda reflexión: Sobre un nuevo modelo teórico (para determinados propósitos y al que denominaremos "Investigación para la innovación curricular en la acción") para integrar y complementar los estudios dentro de la tendencia "Investigación para la Innovación" y tratar de solucionar las dificultades e inconvenientes que se han mencionado.*

Conclusión: un modelo de investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas y una línea de investigación centrada en la práctica educativa que se detalla en el siguiente apartado.

2.5.2. Modelo de investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas

Introducción

En la investigación reglada en Educación Matemática en España se observan carencias importantes en lo que se refiere a los resultados más cercanos a la realidad del aula, a los estudios curriculares y de innovación con una aplicación directa en los desarrollos reales o a la materialización práctica de resultados en los libros de texto, en las programaciones o en la práctica diaria en el aula. En otras palabras, se puede observar una gran separación entre el campo de la investigación y el de la aplicación práctica de sus resultados; el primero, inmerso en un mundo académico con una gran carga teórica y alejado de la realidad, frente al segundo, plagado de necesidades reales de mejora y con un desarrollo independiente del primero y sin ser consciente de ser el centro de interés de las observaciones que se realizan desde las Áreas de conocimiento de la Universidad.

En consecuencia, sin abandonar las tendencias, líneas, estudios particulares, enfoques y estilos, entre otros aspectos que vienen siendo usuales y pertinentes en este campo, hemos tomado conciencia de la importancia y necesidad de cubrir las lagunas mencionadas y atender también a ese aspecto "terminal" de la investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de Matemáticas. No se trata de una tarea fácil, sobre todo debido a las dificultades propias de someter a rigor teórico y metodológico a una parte muy compleja del campo de actividades humanas y sociales que se realizan dentro del Sistema Educativo. No obstante, hemos iniciado el proceso de elaboración de un marco teórico que trata de respetar los procesos "naturales" y sentar las bases para indagar en los fenómenos educativos, allí donde se producen y tal y como se producen, con los mínimos cambios permitidos y de forma holística y lo más completa posible. El trabajo iniciado pretende establecer una línea de investigación práctica sólida y útil, es decir, que proporcione prescripciones concretas aplicables directamente sobre los procesos educativos reales en el aula de Matemáticas. Por otra parte, este acercamiento al hecho educativo reglado en Matemáticas debe tener en cuenta los conocimientos limitados y las lagunas existentes sobre los diferentes aspectos puntuales que resultan de la fragmentación del proceso educativo, de la separación de factores y la simplificación a que se somete a cada una de las partes por motivos de interés científico que tienen que ver con el control de variables y con la operatividad sobre el problema de investigación.

Características generales de la línea de investigación

Desde el punto de vista de la investigación en Educación Matemática

Los estudios que se pretenden realizar se caracterizan por las determinaciones concretas que se adoptan en torno a los tres factores siguientes:

1. *Condiciones* en las que se desarrolla la investigación.

2. *Método de investigación y técnicas y estrategias metodológicas* utilizadas.
3. *Tipo de fenómeno y problema específico* estudiado.

En lo que se refiere a las *condiciones* se establecen las siguientes pautas:

- *Lugares:* aulas, Centros Educativos ordinarios y Departamentos designados por la Administración Educativa.
- *Momentos:* dentro del período escolar ordinario y en las horas usuales dedicadas a las Matemáticas y previstas en las orientaciones oficiales.
- *Orientación:* De acuerdo con las orientaciones didácticas oficialmente establecidas, es decir, dentro de los márgenes generales establecidos por la Administración en cuanto a evaluación, metodología, contenidos, etc.
- *Participantes:*
  - *Docentes:* el profesor o los profesores designados por la Administración para desarrollar la docencia de las asignaturas de Matemáticas en los Centros y Departamentos mencionados.
  - *Alumnos:* los alumnos matriculados en cada caso y en sus grupos naturales sin ninguna modificación.

Desde el punto de vista de los fenómenos implicados, de los fines de la investigación, de las condiciones y participantes.

Los planteamientos que se exponen a continuación son provisionales y sujetos a modificación y ampliación con las consideraciones que vayan surgiendo como consecuencia de las sucesivas aplicaciones prácticas y de las mejoras metodológicas que de ellas se concluyan.

Definición

Innovación	Tratamientos de mejora (viables para un desarrollo usual o en condiciones normales). Se trata de averiguar si es posible optimizar el proceso y cómo se puede conseguir en condiciones normales. Contribuir a una mayor calidad.

Curricular	Se centra en los elementos del diseño y el desarrollo curriculares dentro de los límites de las orientaciones oficiales y de las condiciones prácticas para su desarrollo.
En la acción	Estudios de carácter natural, no clínico, con las mínimas modificaciones. El profesor participa como investigador y coordinador de la investigación.

Finalidad y problemas genéricos de las investigaciones en esta línea

En general, se desean conocer de una manera más profunda los procesos "naturales" de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, la potencialidad didáctica del desarrollo curricular ordinario en las mismas condiciones reales en las que se produce, el alcance y los resultados de las modificaciones "permitidas" por dichas condiciones, las limitaciones y dificultades reales existentes para alcanzar un desarrollo curricular de resultados óptimos así como las modificaciones que se deberían realizar y las consideraciones que se deberían tener en cuenta para superar las dificultades y limitaciones mencionadas.

Dentro del desarrollo usual de las Matemáticas en grupos naturales, se pretende comprobar, mediante una investigación cooperativa, qué *cambios permitidos* por las orientaciones oficiales, en la metodología o en otros aspectos susceptibles de cambios e innovación: evaluación, recursos, libros de texto, contrato didáctico, relaciones de comunicación en el aula, tipos de tareas, grupos de trabajo, proyectos, etc., mejoran ciertos aspectos del rendimiento, la motivación y los resultados. Esta investigación cooperativa estará:

- Coordinada por el profesor como investigador principal responsable de la investigación y participante en el estudio en otros grupos.

- Desarrollada con la ayuda auxiliar de varias personas (profesores, compañeros, etc.) que se dedican a observar, emitir informes, contrastar, reflexionar y participar en sesiones científicas bajo la supervisión del investigador principal.

- Dirigida "desde fuera" por el Director de la investigación que también colabora y participa en las tareas desarrolladas.

Las modificaciones afectan al diseño y desarrollo curricular ordinario en los grupos naturales y en las condiciones usuales existentes en las aulas de Matemáticas. Las conclusiones se extienden a la incidencia de la modificación introducida en el proceso educativo (ejemplos: modificar la metodología didáctica, utilizar un recurso nuevo, organizar de un modo determinado la forma de trabajo, emplear alguna técnica de evaluación no usual o crear condiciones contractuales nuevas). La modificación desarrollada, que será considerada como "tratamiento experimental", se confronta con el tratamiento usual o con otro tratamiento alternativo que será denominado "tratamiento control". En definitiva, los estudios pretenden poner de manifiesto que la(s) modificación(es) introducida(s) es(son) responsable(s) (o causa(s)) de mejoras en ciertos aspectos del proceso educativo (el rendimiento de los alumnos, la actitud hacia las Matemáticas, etc.). Así, se puede efectuar un cambio metodológico para poner a prueba las siguientes conjeturas:

I. El empleo de la metodología propuesta es compatible con el desarrollo de la asignatura y es útil para la formación matemática de los alumnos.

II. La nueva metodología, frente a la tradicional o alternativa, mejora el aprendizaje medido en términos de rendimiento ante una prueba objetiva (o la comprensión de los conceptos y procedimientos correspondientes o el dominio de la estructura y el funcionamiento del conocimiento o las actitudes hacia el tema y la asignatura u otros aspectos que se desarrollan específicamente con la modificación introducida).

Por último, señalar que el planteamiento experimental, que no es el único estudio empírico que se realiza, se ha de cuidar especialmente como se expone en el apartado dedicado a la metodología.

Ámbitos de actuación, niveles educativos y desarrollo temporal

Las investigaciones se pueden desarrollar en cualquier ámbito educativo en el que se impartan contenidos matemáticos y se cumplan las condiciones adecuadas para su desarrollo[7]. Asimismo, la determinación de un problema a investigar dentro de esta línea requiere trabajar en un centro determinado, en unos niveles

[7] Los niveles educativos en los que se realizan estudios de este tipo son (junio-2003): primer curso de Escuelas Técnicas de Ingeniería, Educación Secundaria y Formación de Maestros.

concretos y en unos grupos naturales. Que duda cabe que se puede realizar el trabajo en dos o más centros y en dos o más grupos, siempre que dispongamos de un equipo de profesores dispuestos a colaborar con sus grupos de alumnos.

La investigación se puede llevar a cabo durante un curso escolar, un trimestre, un mes o una semana, dependiendo de la amplitud del problema planteado y de los tratamientos a aplicar. Una posible opción, a modo de ejemplo, sería elegir un tema puntual (dos o tres semanas) de entre los que se van a desarrollar en el primer trimestre, otro en el segundo y otro en el tercero. A estos temas se les debe dedicar el mismo tiempo que en un desarrollo normal y serían los que van a ser utilizados para la investigación, de manera que el resto de los temas se tratarían como siempre. Con la antelación suficiente se diseñan los protocolos de enseñanza para ambos grupos (experimental y control) respetando las condiciones "no experimentales" y teniendo especial cuidado para el primero de los temas, dado que los otros dos van a estar supeditados a cambios derivados de los resultados del proceso normal de investigación-acción llevado a cabo con el primer tema.

Participantes

> *Al menos dos grupos de alumnos: uno al que llamaremos experimental y otro al que llamaremos control*[8].

Ambos grupos deben ser del mismo nivel educativo y razonablemente equivalentes de partida o, al menos, deben estar controlados en relación con los tratamientos y sus efectos. Su elección y asignación se puede dejar al Centro, según la costumbre, o utilizar un procedimiento aleatorio o intencional. Sólo si se sospecha o se comprueba que los grupos van a ser demasiado dispares o tales que de su composición se pueda seguir la invalidez del trabajo realizado, se podrían pedir los cambios justos para desarrollar el estudio con garantías.

> *Un equipo investigador o grupo más o menos reducido de personas, liderado y coordinado en la práctica por el investigador principal y*

[8]Esta condición no es obligada, ya que se puede eliminar la faceta experimental y utilizar en su lugar un estudio de casos o etnográfico profundo en un solo grupo; no obstante, poder disponer de dos grupos, experimental y control, es una baza que consideramos importante en esta tendencia de investigación. Si, además de disponer de información cualitativa potente procedente de la observación, la entrevista, los cuestionarios, la reflexión, la triangulación, etc., podemos tener datos a favor de las hipótesis en un contexto experimental sin excesivas pretensiones de generalización o extrapolación, tanto mejor.

bajo las orientaciones del Director, que también colabora en la investigación.

Sería conveniente disponer de dos profesores de Matemáticas, uno de ellos sería el investigador principal, y al menos una tercera persona, a ser posible profesor u otra persona cualificada, que haga las veces de observador externo de los dos tratamientos (experimental y control). El investigador principal será el que coordine los trabajos, desarrolle el tratamiento experimental o ambos, instruya a los participantes, lleve el peso del estudio, solucione problemas y elabore el borrador de la memoria final.

El investigador es, por tanto, profesor de uno o varios de los grupos naturales en los que se va a desarrollar la investigación y coordina y supervisa las labores de otros profesores, compañeros o personas que van a intervenir como auxiliares del estudio[9]. Si además existen otros compañeros que quieran participar activamente con sus grupos de alumnos, previa formación específica por parte del investigador principal o del Director de la investigación, estaríamos hablando de investigadores "co-responsables" del estudio y de un equipo de investigadores.

Dos tratamientos didácticos

Experimental (que habrá que definir detalladamente mediante un protocolo de enseñanza experimental).

Control (que habrá que determinar detalladamente mediante un protocolo de enseñanza control, tradicional, usual, o de otro tipo).

El tratamiento experimental, por ejemplo, podría ser una metodología didáctica mixta basada en un proceso de investigación matemática y de resolución de problemas, tomando como núcleo la motivación o la implicación del alumno o la autonomía de pensamiento, por ejemplo: (día X) se inicia el proceso mediante un problema abierto relacionado con las experiencias cotidianas de los alumnos; después de leer y entender el enunciado se deja un tiempo prudencial cerrado para la reflexión, discusión, debate abierto en gran/pequeño grupo; a continuación se proporciona información mediante textos auxiliares o explicaciones, etc.

[9]Estas personas no necesitan de una formación muy especializada, sino sólo de algunas orientaciones sobre las labores que deben realizar.

El tratamiento control sería el desarrollo usual de las clases en la mayoría de los grupos, es decir, una metodología basada en la explicación, estudio, aplicación a ejercicios, rendimiento escolar en sentido tradicional, etc.

La planificación de los tratamientos debe contemplar las tareas diarias y una estructura de árbol con las decisiones a tomar en cada caso. Asimismo, incluirá todas las orientaciones a seguir, las actuaciones del profesor, las preparaciones preactivas, las instrucciones que se han de dar a los alumnos y las condiciones que han de ser creadas y cómo se han de crear, es decir, todo aquello que recoja fielmente, dentro de lo posible, lo que va a ocurrir en la clase. En este sentido, los protocolos de enseñanza deben ser tales que una persona ajena pueda desarrollarlos obteniendo resultados muy similares, es decir, deben ser claros, replicables y de los que un observador externo pueda decir, sin lugar a dudas, si se han seguido fielmente o ha habido desviaciones de lo previsto.

El tratamiento experimental es el que recibe toda la atención de los objetivos, las hipótesis, el marco teórico y los antecedentes. Incluso el título de la investigación va a estar determinado por el tratamiento experimental. Pero esto no quiere decir que no se preste atención al tratamiento control y a la elaboración del protocolo correspondiente, que debe ser lo más detallado posible y poner toda la atención en alcanzar los mismos objetivos que el tratamiento experimental y el máximo rendimiento de los alumnos.

Por último, la eficacia y pertinencia de ambos tratamientos se van a poner a prueba mediante diversos instrumentos de recogida de datos, de manera que también hay que tener en cuenta aspectos relacionados con la evaluación, que debe ser lo más objetiva posible y estar planificada de antemano.

Tipo de estudio

No se trata de una experiencia ni de un estudio exploratorio sino de una investigación. Pero es una investigación especial en la medida en que se realiza en grupos naturales de estudiantes, está desarrollada por los propios profesores de Matemáticas de dichos grupos, si bien necesitan de la ayuda de otras personas, se lleva a cabo durante el proceso didáctico usual y en las mismas horas, aunque con algunos momentos añadidos para entrevistas, pruebas o cuestionarios y tiene que ver con aspectos específicos del diseño y desarrollo curriculares (cambio metodológico, nuevo recurso, tareas especiales, nueva organización del trabajo, etc.).

Otra característica de este tipo de estudios es la participación activa de los alumnos, no sólo consiste en realizar pruebas y ser los sujetos pasivos de la investigación, sino también para responder a cuestionarios en los que se les pide la opinión y se les pregunta por su actitud hacia los aspectos relacionados con el problema de investigación y para ser entrevistados en profundidad sobre las experiencias realizadas.

Por último, se trata de investigaciones mixtas y cooperativas sobre el proceso real de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Son mixtas porque presentan partes experimentales junto a partes empíricas no experimentales y se emplean metodologías cualitativas y cuantitativas. Asimismo, en lo que se refiere al propio proceso de enseñanza, se emplea parcialmente la conocida "action research" o investigación en la acción así como otros enfoques, tendencias y metodologías que requieren la cooperación, el trabajo en equipo y la codirección de algunas actividades.

Condiciones de desarrollo (contextuales)

En todos los casos los estudios se realizan mediante la implementación de modificaciones admitidas dentro del proceso educativo ordinario. Son modificaciones curricularmente posibles en las condiciones en las que se realizan, es decir, contempladas en los diseños oficiales o, al menos, no prohibidas explícitamente y amparadas por la libertad de cátedra. No es necesario, por tanto, pedir permiso a los participantes o a las autoridades académicas, porque no son estudios clínicos que se salgan de las condiciones y requisitos usuales. Únicamente se han de cubrir los trámites ordinarios: programaciones, Consejo Escolar, Departamento, compañeros, etc. (lo que se suele hacer cuando se realiza o notifica un cambio permitido o se quiere poner en común lo que se hace en el aula para que los demás lo sepan o actúen en consecuencia).

El marco académico y curricular en el que se sitúan los estudios es el del diseño curricular oficial y demás orientaciones oficiales al respecto (que se han de respetar y tomar como referencias). En el informe habrá que especificar los objetivos, contenidos, orientaciones metodológicas, evaluación, recursos, actividades, y demás elementos incluidos en los diseños curriculares oficiales. Asimismo, sería conveniente incluir un análisis sobre los libros de texto y el tratamiento práctico de las orientaciones así como sobre las determinaciones usuales que se adoptan en el aula, es decir, cómo se enseña el tema normalmente. No obstante, habrá que distinguir entre lo que es "obligado" y lo que son determinaciones particulares o interpretaciones del currículo. Nosotros responderemos después con nuestra propuesta experimental como una interpretación más que queremos poner en práctica y comprobar su eficacia.

En cuanto a los contenidos concretos o temas de Matemáticas del temario oficial se elegirán los que permitan un desarrollo coherente de la metodología o del tratamiento nuevo y sean interesantes para las experiencias por su riqueza, especial dificultad, etc.

Fundamentos teóricos de la línea de investigación

Se han de combinar, eligiendo aquellos aspectos convenientes para los propósitos del estudio, las líneas y enfoques de investigación mencionados en el apartado 2.4.

Antecedentes: características, tipos y tratamiento

Se han de tener en cuenta las consideraciones realizadas en los apartados 2.2, 2.3 y 2.4 del presente capítulo, a los que nos remitimos.

Metodología

El estudio requiere de una metodología mixta y compleja. Nos remitimos a los apartados 2.4.5 y 2.5.1 para una información más amplia sobre esta cuestión.

Instrumentos

Se han de combinar adecuadamente distintos instrumentos de recogida de datos con el fin de obtener información del fenómeno en estudio y disponer de diferentes vías de evaluación y análisis de todo el proceso de investigación. Podemos destacar los siguientes instrumentos: observación participante, observación externa, cuestionarios, pruebas objetivas de rendimiento, entrevistas, registros de audio y/o vídeo, ficheros de Derive, etc.

Entre los instrumentos de análisis de datos podemos utilizar: triangulación, Estadística Descriptiva, contrastes de hipótesis, Análisis de la varianza y reflexión.

En cuanto a los instrumentos de recogida de datos es necesario hacer las siguientes consideraciones:

- Es importante justificar el contenido y la pertinencia de las pruebas y en particular de la prueba final, ya que llevará una parte importante de la carga de la prueba de la investigación (los resultados de esta prueba van a confirmar o rechazar la bondad del tratamiento experimental, aspecto central del estudio). Habrá que plantear abiertamente cuestiones como: ¿porqué esos ejercicios y problemas y no otros?; ¿qué ocurriría si cambiásemos los problemas por otros más complejos?; etc.

- Es necesario distinguir entre ejercicios y problemas. Los primeros son actividades o tareas similares a las realizadas o explicadas en el aula. Los problemas, sin embargo, son tareas de pensar esencialmente diferentes a las realizadas. De otro modo, se puede decir que un problema es visto por el resolutor como una tarea no familiar, no reconocida y se presenta como un reto que requiere de imaginación, razonamiento, estrategias, etc., es decir, su resolución no es inmediata, a diferencia de lo que ocurre en el caso de los ejercicios.

Los capítulos 3 y 4 de esta memoria son ejemplos detallados de la metodología e instrumentos de recogida y análisis de datos utilizados en el caso concreto de la enseñanza de la materia *Integrales de Línea* con Derive. Es por ello que nos remitimos a dichos capítulos para una información más amplia y profunda sobre los distintos elementos del modelo teórico que aquí se propone.

2.5.3. Enseñanza y aprendizaje de Integrales de Línea con Derive

Después de haber presentado en el apartado 2.3 los resultados de las distintas búsquedas de los antecedentes relacionados con la enseñanza y aprendizaje de *Integrales de Línea* con Derive, nos disponemos a analizar en este apartado los datos más importantes encontrados en los documentos indicados y los aportados por la experiencia y los trabajos previos no publicados.

Análisis de los antecedentes

Hoy en día, como se afirma en [Morphett, 1997], el uso de los ordenadores (en particular los CAS) en la docencia de las Matemáticas está bastante extendido, en especial en las titulaciones de Ingeniería, donde las Matemáticas desempeñan un papel instrumental muy importante. Además, estas herramientas suelen ser de uso habitual en la actividad laboral de los ingenieros.

Sin embargo, como se comenta en [Townsley, 1997] y [Zehavi, 1997], todavía hay profesores reacios a su uso por razones técnicas, personales e incluso políticas. Una explicación para este comportamiento radica en el hecho de que la mayoría de los profesores no fueron formados en su momento para la utilización de CAS en la docencia ([Yamamoto, 2002]). Parece, por tanto, que sin esta formación previa los profesores no están suficientemente preparados para elaborar las actividades adecuadas para la docencia con CAS y no pueden reconocer, además, los riesgos que se pueden producir con dicha utilización.

Se hace necesario pues emplear los CAS en el desarrollo de la docencia de las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería. De hecho, son numerosas las publicaciones sobre tareas y conceptos a desarrollar en dichos estudios mediante el uso de CAS: conceptos geométricos ([Gilligan, 1994] y [Raj, 1995]), integrales de Fresnel ([Ibrahim y Fernández, 2000]), integral definida como sumas de Riemann ([Koepf y Ben Israel, 1994]), convolución de funciones ([Townend, 1994]), cálculos laboriosos ([Mainini, 1998]), manipulación simbólica ([Pierce, 2001]), aplicaciones físicas ([de Alwis, 2002]), etc.

Por otra parte, es evidente que la utilización de CAS para desarrollar estos conceptos y procedimientos facilita su enseñanza y contribuye a mejorar el aprendizaje. Entre otros logros, se consigue que conceptos abstractos que presentan dificultades especiales para los alumnos puedan ser tratados de una forma que haga que resulten mucho más accesibles y fáciles de comprender ([Leinbach, 1994]). Además, se consigue un incremento en la motivación y una mejora en la actitud hacia las Matemáticas ([Cretchley y Galbraith, 2002], [Camacho y otros, 2002] y [Kempski, 2002]). También se producen otras modificaciones en el desarrollo de las clases, como por ejemplo: cuando no se utilizan CAS el profesor acapara todo el protagonismo, mientras que con su uso aumenta la participación y la actividad de los alumnos ([Nocker, 1998]) y las relaciones entre ellos, consiguiendo que éstos adquieran un mayor protagonismo en la construcción de sus propios aprendizajes

([Schneider, 2000]). Por último, teniendo en cuenta la interactividad potencial de este tipo de herramientas, se consigue un nivel de abstracción superior en la resolución de problemas matemáticos ([Albano y Desiderio, 2002]).

Las mejoras cualitativas que acabamos de comentar se complementan con una mejora cuantitativa en el rendimiento académico de los alumnos cuando se utilizan CAS ([Ayers y otros, 1988], [Shaw y otros, 1997], [Asensio, 2001], [Huertos, 2000] y [Vlachos y Kehagias, 2000]). En especial, esta mejora es significativa cuando los alumnos tienen deficiencias o carencias previas en lo que a conocimientos y destrezas matemáticas se refiere ([Watkins, 1993]). Si a este hecho le unimos la peculiaridad de permitir que el ritmo de la clase sea variable, nos encontramos ante herramientas de gran utilidad para efectuar en clase una adecuada atención a la diversidad ([Ortega, 2002a]).

En base a las razones mencionadas en los párrafos anteriores, algunas Universidades han integrado por completo el uso de CAS en la enseñanza de las Matemáticas en diferentes titulaciones, hasta tal punto que ya no se contempla dicha integración como un hecho novedoso o innovador, sino como algo habitual en el desarrollo de las asignaturas ([González y otros, 1998], [Llorens, 2001] y [González y otros, 1997]).

Evidentemente, hay que tener en cuenta tanto las limitaciones como los riesgos que se corren con el uso de estos CAS. Por ejemplo, utilizar CAS puede hacer que los alumnos no establezcan vínculos correctos entre las técnicas utilizadas y su aproximación mental a las Matemáticas ([Van Herwaarden y Gielen, 2002]). Además, se pueden producir modificaciones no deseadas debidas a los cambios importantes que ocurren en los procesos de enseñanza ([Schneider, 1999]). Otros inconvenientes se producen cuando se pretende conseguir que el alumno sepa qué hacer cuando un CAS no le da una respuesta al problema ([Drijvers, 1999]) o que sea capaz de reconocer cuándo es útil utilizar CAS para resolver un determinado problema.

Por otra parte, se ha detectado una característica común en cuanto a los efectos del trabajo con CAS: la gran mayoría de los alumnos no son conscientes de las mejoras producidas en los conocimientos y destrezas así como en la asimilación de los contenidos presentados, a pesar de la mejora en los resultados prácticos alcanzados ([Cretchley, 2002], [Pierce, 2001], [Henderson, 2002] y [Hirlimann, 1996]).

En los últimos años se está produciendo un fuerte movimiento dentro del colectivo de profesores que utilizan CAS en la docencia de las Matemáticas con el fin de cambiar los usos tradicionales de estas herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así, en [Mackie, 2002] se afirma que es un error utilizar los CAS en la docencia como máquinas de resolver ejercicios, mientras que en [Cabello y otros, 2000] se indica que no podemos reducir su uso al de una calculadora de altas prestaciones. Por el contrario, se deben modificar dichos usos para maximizar las oportunidades que ofrecen estas tecnologías ([García y otros, 2002]), orientando su aplicación, por ejemplo, en el sentido de incidir positivamente en el aprendizaje ([Dubinsky y Noss, 1996]), aumentar considerablemente la posibilidad de experimentación ([Hoya y otros, 2002]) y permitir que el alumno construya su conocimiento matemático bajo la orientación del docente ([Nava, 1998]).

Pero, para ello es necesario que se elaboren actividades apropiadas. Así, Abboud ([Abboud, 2002]) establece que se deben proponer problemas de muy difícil planteamiento y resolución sin el uso de CAS puesto que "no se pueden resolver los mismos problemas que se resolvían cuando no existían los CAS" ([Westermann, 2000]). Monagan ([Monagan, 1994]) se manifiesta en el mismo sentido cuando afirma que hay que hacer unos ejercicios y problemas mucho más realistas aprovechando las posibilidades de los ordenadores. Por otro lado, utilizando el hecho de que a veces los CAS no presentan los resultados en el modo usual o esperado, en [Alonso y otros, 2001] se propone utilizar esos resultados inesperados para reforzar el aprendizaje de los conceptos y fomentar que los alumnos sean más críticos con los resultados ofrecidos por los CAS.

Hay profesores que afirman que el uso de CAS en las clases de Matemáticas no ha alcanzado todavía su grado óptimo ([Neuper, 2001]). De hecho, los CAS más usuales son *blackbox* (muestran el resultado en un paso sin enseñar cómo se llega a él), mientras que en [Strickland, 1999] se asegura que para poder sacar todo el provecho a los CAS, éstos deberían ser *whitebox* (mostrar los desarrollos intermedios). En menor medida, no por ser menos importante sino por su novedad, está la idea de utilizar la programación con lenguajes informáticos en las clases de Matemáticas ([Dubinsky, 1998]). Así, cuando los alumnos programan deben leer, construir y depurar estrategias, modificar programas que ya están desarrollados y, por último, resolver los problemas con los programas que ellos mismos han desarrollado. Esto les convierte en protagonistas de su aprendizaje ([Hector, 2002]). Además, el uso de la programación permite encontrar tareas adecuadas que se corresponden directamente con las construcciones mentales de acciones, procesos u objetos de cada uno de los conceptos matemáticos ([Dubinsky, 1994]). Como ejemplo se puede citar el lenguaje de programación ITSEL, utilizado por Dubinsky ([Dubinsky, 1995]) para enseñar Matemáticas a alumnos universitarios por tener una sintaxis que ayuda al alumno a asimilar mejor los contenidos matemáticos que se le presentan.

Por último, una buena idea es complementar la programación con los CAS mediante la realización de comandos o funciones específicas ([Majewski, 2000]), lo que permite aumentar considerablemente las librerías de funciones predeterminadas que contienen. Es precisamente en esta línea en la que se enmarca el desarrollo de nuestra investigación, en la que vamos a utilizar la programación con Derive para crear los comandos necesarios que permitan resolver los problemas propios del tema en estudio.

Análisis de los antecedentes propios

• *En torno a las publicaciones y experiencias sobre estudios de Ingeniería*

En [Padilla y otros, 1998], [Padilla y otros, 1999d] y [Padilla y otros, 1999e] se presentan distintas actividades complementarias desarrolladas en los estudios de *Ingeniería Técnica Industrial* así como un cambio significativo en el método de evaluación tradicional que se empleaba en ese momento (una prueba escrita final). Las actividades y el cambio en el método de evaluación surgieron como propuestas para contrarrestar la considerable disminución de créditos asignados a las asignaturas de Matemáticas tras el cambio de planes de estudios. Entre las actividades se encontraba la impartición de prácticas con Derive, el inicio de lo que posteriormente sería la utilización de Derive en las titulaciones de *Ingeniería Técnica Industrial.* Por otro lado, en [Padilla y otros, 2000b] se presentaba el nuevo método de evaluación en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas, en el que se incluía la evaluación de las prácticas con Derive.

Anteriormente, a lo largo de los cursos 97/98 y 98/99, se desarrollaron los tres Proyectos de Innovación Educativa siguientes: *Actividades Complementarias a las Asignaturas de Matemáticas del Primer Curso de Ingeniería,* durante el curso 97/98 y su continuación durante el curso 98/99 y *Prácticas de Matemáticas con* Matlab*,* en el mismo curso. Los dos primeros consistieron en el desarrollo práctico de las distintas actividades complementarias y en la implementación del cambio mencionado en el método de evaluación tradicional. El tercer Proyecto se realizó en colaboración con otros profesores del *Departamento de Matemática Aplicada* encargados de la docencia de distintas asignaturas sobre *Análisis Numérico* y consistió, básicamente, en la elaboración de distinto material para la impartición de prácticas con MATLAB en las asignaturas sobre dicha materia.

• *En torno a las publicaciones y experiencias sobre la materia Integrales de Línea*

El tema *Integrales de Línea* constituye un elemento destacado en el informe que se presenta, ya que se trata de la materia sobre la que se ha realizado el estudio central de la investigación mediante dos metodologías didácticas distintas para su tratamiento en el aula. Por tal motivo, incluimos en este apartado el análisis de los textos elaborados en los últimos años para impartir la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* en la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga,* de la que el tema *Integrales de Línea* es uno de los contenidos básicos.

[Rodríguez y otros, 1996] es un texto de problemas comentados de examen y se concibió para cubrir el temario de la asignatura *Ampliación de Matemáticas* del plan de estudios antiguo de *Ingeniería Técnica Industrial.* Actualmente, debido a que parte de su contenido es muy similar al temario oficial de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación,* es un referente fundamental para el desarrollo de dicha asignatura.

Desde el punto de vista de su contenido hay que decir que el enfoque con el que se acomete en [Rodríguez y otros, 1996] la resolución de los ejercicios de examen es totalmente novedoso: primero se hace un estudio teórico de la situación, presentando todos los aspectos necesarios para abordar cualquier ejercicio de ese tipo; después se dedica un apartado al planteamiento de estrategias generales para resolver el tipo de ejercicios analizado; finalmente, se resuelve el ejercicio concreto. Es muy importante que el alumno lea y entienda los aspectos teóricos y las estrategias antes de abordar la resolución del ejercicio, lo que le permitirá resolver en adelante cualquier ejercicio del mismo tipo. Dicha comprensión teórica y estratégica será fundamental a la hora de elaborar comandos con DERIVE y resolver los problemas del tema *Integrales de Línea.*

[Galán, 1998] es un libro de teoría y problemas escrito específicamente para cubrir todos los aspectos fundamentales de integración en varias variables (integrales de línea, integrales múltiples, integrales de superficie y los correspondientes teoremas integrales de Green-Riemann, Stokes y Gauss). En él se incluyen gran cantidad de ejemplos resueltos que permiten una mejor asimilación de los conceptos introducidos. Cada tema consta también de una sección de problemas resueltos para afianzar los conocimientos y en la última sección de cada tema se incluye una relación de problemas propuestos. Los contenidos generales del libro se pueden resumir en el esquema de la figura 2.1.

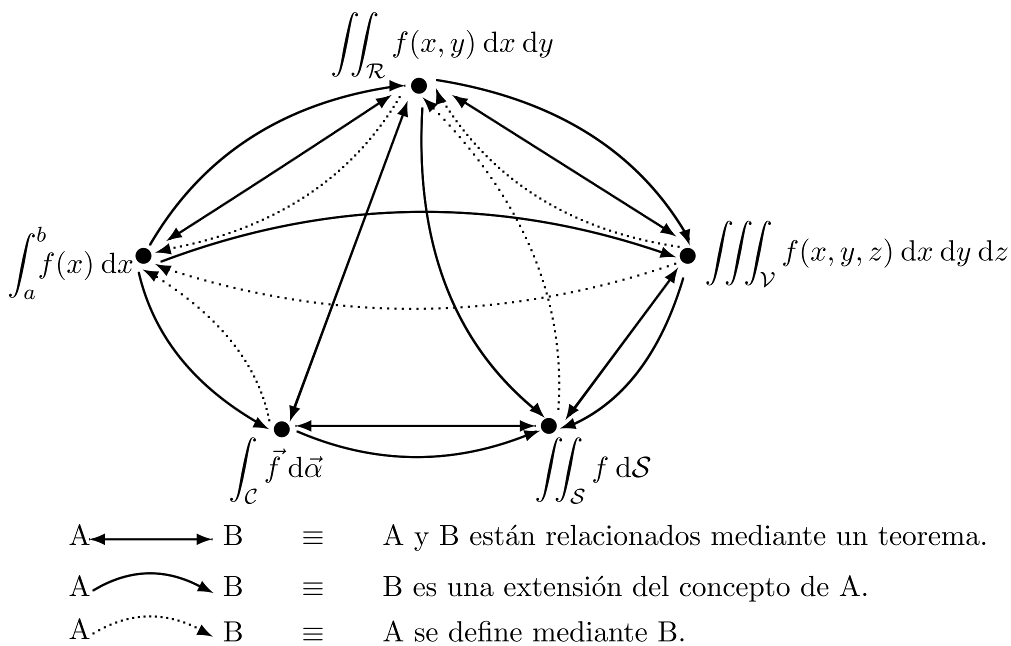


Figura 2.1: Esquema resumen del contenido del libro [Galán, 1998].

Se trata de un texto diseñado principalmente para estudiantes de Ingeniería y utilizado para la primera parte de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.* Por tal motivo, se omiten aquellas demostraciones no constructivas para no distraer la atención sobre la parte técnica de la teoría desarrollada. Por la misma razón se incluyen en cada tema una serie de aplicaciones y un apéndice final en el que se desarrolla algún aspecto adicional sobre la teoría del mismo.

Por último, un material relevante para nuestra investigación ha sido la elaboración de los contenidos a impartir en las prácticas con Derive dentro de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* perteneciente a la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.* Dichos contenidos figuran en el apéndice D.

• *En torno a* Derive

El uso de Derive en las asignaturas de Ingeniería constituye uno de los aspectos fundamentales para nuestra investigación. Además, como se verá en la sección 3.3, la utilización didáctica del programa Derive en el desarrollo del tema *Integrales de Línea* ha sido el asunto central de las conjeturas de la investigación. Así pues, en este apartado analizamos los distintos estudios que hemos desarrollado sobre Derive en los últimos años.

La experiencia se inició con la utilización de Derive en las asignaturas de Matemáticas de Enseñanzas Medias. Posteriormente, durante los cursos académicos 94/95 y 95/96, se llevaron a cabo una serie de Seminarios Permanentes titulados *Aplicaciones del ordenador en el aula. Área de Matemáticas,* realizados en colaboración con varios profesores de Educación Secundaria en el Centro de Profesores de Málaga. En estos Seminarios Permanentes se presentó Derive como una herramienta informática de fácil manejo y útil para su integración en las clases de Matemáticas en Educación Secundaria.

Las experiencias citadas sirvieron como base para la impartición de numerosos cursos dirigidos a profesores de Educación Secundaria y organizados por distintos Centros de Profesores. En dichos cursos no sólo se mostraba como integrar Derive en el aula de Matemáticas, en aquellos tópicos en los que ya se habían introducido, sino que se proponían a los asistentes distintas tareas y búsquedas de nuevas aplicaciones. Los cursos que se impartieron en esta línea fueron los siguientes:

1. *Curso de Matemáticas con* Derive*.*
   Marzo de 1999 en Campillos (Málaga), dentro de los cursos organizados por el Centro de Profesores de Antequera y dirigido a profesores de Educación Secundaria y Primaria.

2. *Aplicaciones didácticas en Matemáticas con* Derive*.*
   Abril de 1999 en Mijas-Costa (Málaga), dentro de los cursos organizados

por el Centro de Profesores de Marbella-Coín y dirigido a profesores de Educación Secundaria.

3. *El* Derive *en el desarrollo del Currículum de Matemáticas.*
   Octubre de 1999 en Málaga, dentro de los cursos organizados por el Centro de Profesores de Málaga y dirigido a profesores de Educación Secundaria.

4. *Matemáticas con* Derive*.*
   Noviembre de 1999 en Antequera (Málaga), dentro de los cursos organizados por el Centro de Profesores de Antequera y dirigido a profesores de Educación Secundaria y Primaria.

5. *Aplicaciones didácticas en Matemáticas con* Derive*.*
   Febrero de 2000 en Mijas-Costa (Málaga), dentro de los cursos organizados por el Centro de Profesores de Marbella-Coín y dirigido a profesores de Educación Secundaria.

Con propósitos de difusión entre el profesorado, se decidió publicar las experiencias y contenidos de los Seminarios Permanentes y cursos mencionados. Así, en [Padilla y otros, 1999a] se describe la utilización de Derive en el desarrollo de prácticas autodidactas como apoyo al aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, mientras que en [Padilla y otros, 2000a] se presentan algunas de las múltiples aplicaciones del ordenador en la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria. Los contenidos matemáticos incluidos en dichas publicaciones son: representación gráfica, estudio geométrico de las cónicas y estadística.

De forma paralela, se iban desarrollando las prácticas con Derive en distintas asignaturas de Matemáticas de las especialidades de *Ingeniería Técnica Industrial,* lo que, unido a los buenos resultados obtenidos en los cursos y seminarios anteriores, aconsejó la conveniencia de ofertar un curso de Matemáticas con Derive, dentro del programa de los *Cursos de Verano "Universidad de Málaga",* durante los años 1998 y 1999. Los alumnos asistentes a dichos cursos, generalmente de las distintas Ingenierías y de la titulación de Ciencias Matemáticas, tuvieron la oportunidad de conocer el manejo de Derive y experimentar sus distintas aplicaciones en el área de Matemáticas.

La experiencia adquirida con las actividades anteriores nos permitió culminar la publicación [Padilla y otros, 1999b], dirigida a la iniciación en el manejo del programa Derive y a servir de guía útil para el mismo y para la realización de distintas prácticas de laboratorio. La diversidad de temas y el nivel de los planteamientos son cualidades de esta publicación que resultan útiles y necesarias para la impartición de prácticas, en particular para las prácticas sobre Cálculo, Álgebra o Estadística a un nivel universitario elemental. Dichos contenidos se desarrollan, por otra parte, a través de una colección de ejercicios resueltos así como una relación de ejercicios propuestos que incluyen la solución. También contiene dos apéndices en los que se explican los distintos comandos del menú y las funciones y constantes más utilizadas, aspectos, todos ellos, que han servido para diseñar el proceso didáctico que se somete a valoración en el trabajo de investigación que se presenta en este informe.

A partir del curso 99–00 se empezaron a impartir las prácticas con Derive en la titulación de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación,* lo que motivó que las siguientes publicaciones se centraran en la explicación de las distintas prácticas y en las modificaciones que se iban produciendo.

Así, en [Padilla y otros, 2001] se detalla y explica el desarrollo de la práctica sobre integración en varias variables (integrales de línea, integrales múltiples, integrales de superficie y los correspondientes teoremas integrales que relacionan los conceptos anteriores) que se elaboró para la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales.* Asimismo, en [Padilla y otros, 2002a] se describe el fichero de aplicaciones `ANALVEC.MTH`[10] creado para trabajar con los contenidos descritos anteriormente. Posteriormente, se publicaron en el programa Derive y en la sección que dicho programa dedica a los paquetes creados por los usuarios, los paquetes `Multiple Integration.dfw` y `Multiple Integration.mth` a partir de la versión 5.06. En estos paquetes se presentan una serie de comandos que facilitan el cálculo integral multivariable así como el uso de ciertas funciones y operadores diferenciales. Sus contenidos se agrupan en los siguientes bloques:

1. *Campos escalares y vectoriales:* funciones gamma y beta, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano.

2. *Integrales de línea:* formas diferenciales exactas, función potencial, integral de línea de formas diferenciales no exactas.

[10]Este fichero se presentó en el congreso internacional bianual de Derive celebrado en Viena en julio de 2002.

3. *Integrales múltiples:* integrales dobles en coordenadas cartesianas y polares, integrales triples en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

4. *Teorema de Green-Riemann:* cálculo de integrales de línea mediante integrales dobles en coordenadas cartesianas y polares.

5. *Integrales de superficie:* área de una superficie, vector normal unitario, integral de superficie de un campo escalar, integral de superficie de un campo vectorial (flujo).

6. *Teorema de Gauss:* cálculo del flujo de un campo vectorial mediante integrales triples en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Todos estos conceptos se encuentran perfectamente documentados y se muestran ejemplos de utilización para cada comando creado.

En [Padilla y otros, 2002c] se presentó `COMPLEX.MTH`[11], paquete de aplicaciones creado para trabajar con los contenidos fundamentales de un curso de variable compleja aplicado a la Ingeniería. Concretamente, el paquete se utiliza con los alumnos de las distintas especialidades de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* y dentro de la asignatura *Ampliación de Matemáticas* que se imparte en el primer cuatrimestre del segundo curso. Nuevamente, los autores de Derive publicaron los paquetes `Complex Analysis.dfw` y `Complex Analysis.mth` a partir de la versión 5.06. En [Padilla y otros, 2003b] se presentaron los contenidos de estos paquetes así como distintos ejemplos de utilización. Dichos contenidos se agrupan en los siguientes bloques:

1. *Operaciones básicas:* distintas formas de expresar un número complejo, aritmética de números complejos, topología en el plano complejo.

2. *Funciones de variable compleja:* partes real e imaginaria de una función de variable compleja, evaluación eficiente de funciones elementales.

3. *Diferenciación de funciones de variable compleja:* condiciones de Cauchy-Riemann, funciones analíticas, funciones armónicas.

4. *Integrales de funciones de variable compleja:* integral de línea de una función de variable compleja, integración de funciones analíticas, fórmulas integrales de Cauchy, teorema del residuo.

[11]Presentado en el congreso internacional bianual de Derive celebrado en Viena en julio de 2002.

5. *Transformaciones conformes:* transformaciones conformes elementales, teorema fundamental.

Todos estos conceptos se encuentran perfectamente documentados y se muestran ejemplos de utilización para cada comando creado.

En [Padilla y otros, 2002e] se presentan las prácticas que se imparten actualmente en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* (apéndice D), que incluyen como aspecto fundamental la elaboración de comandos con Derive por parte del alumno. Se trata del aspecto innovador más destacable de las prácticas que se vienen impartiendo en los últimos años, no sólo en la asignatura mencionada sino también en la asignatura *Ampliación de Matemáticas.* Los resultados obtenidos tras estos últimos años utilizando estas prácticas han sido fundamentales en la planificación de este trabajo de investigación.

En [Padilla y otros, 2002f] y [Padilla y otros, 2002b] se presentan las carencias actuales que presenta el uso del ordenador en la Educación Matemática. Actualmente este uso se reduce casi exclusivamente a utilizar el ordenador simplemente como una calculadora potente. Se analizan las ventajas e inconvenientes de este uso y se plantea como alternativa la realización de prácticas con Derive que incluyan la elaboración de comandos, consiguiendo así que el ordenador se use como herramienta que fomente la creatividad matemática del alumno.

En [Padilla y otros, 2003a] se explica como elaborar comandos con el programa Derive, lo que proporciona un mecanismo de creación de paquetes de aplicaciones que pueden aumentar considerablemente las prestaciones del programa. A modo de ejemplo, se incluye la realización de comandos sobre el cálculo integral multivariable.

Por último, y siempre con el objetivo de dar la máxima difusión a las experiencias realizadas así como a los resultados obtenidos, se elaboraron los siguientes Proyectos relacionados con Derive: el Proyecto de Enseñanza Virtual *El ordenador en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas: mucho más que una calculadora potente* (curso 01/02) y el Proyecto de Innovación Educativa *Matemáticas para la Ingeniería. El ordenador como herramienta de creatividad matemática* (curso 02/03). En ambos proyectos ya se proponía la elaboración de comandos con Derive como aspecto fundamental.

• *Evolución de las prácticas con ordenador*

Uno de los aspectos fundamentales que se tuvo en cuenta a la hora de abordar la presente investigación, residió en los distintos cambios que hubo que realizar en las prácticas con ordenador a lo largo de los últimos años. Prácticas y experiencias que se pueden considerar como estudios exploratorios previos, en particualar los realizados en los dos últimos cursos académicos, y que han resultado de vital importancia a la hora del diseño general de todo el proceso de la investigación.

La evolución de las prácticas a lo largo de los distintos cursos académicos ha sido la siguiente:

1. Durante el *curso académico 96–97* se realizaron prácticas con ordenador en el primer curso de las distintas especialidades de *Ingeniería Técnica Industrial* mediante el programa Mathematica[12]. De su desarrollo, se constataron varios inconvenientes que aconsejaron no seguir utilizando dicho software. Entre ellos podemos destacar como más relevante la exigencia de un conocimiento profundo de la sintaxis (muy específica y nada flexible), lo que provocó una mayor lentitud de lo esperado y que gran parte de la dificultad de estas prácticas residiese en el manejo del software.

2. Durante el *curso académico 97–98* se introdujeron prácticas con ordenador en el primer curso de las distintas especialidades de *Ingeniería Técnica Industrial* utilizando el programa Derive. En este curso, además de una práctica que se podría considerar de carácter general, se introdujo una práctica específica con Derive en la asignatura *Cálculo,* cuyo contenido estaba enfocado a la resolución de los ejercicios típicos de dicha asignatura. Es importante señalar la gran acogida que tuvieron estas prácticas por parte del alumnado y la conclusión favorable de los profesores implicados. El motivo, como ya hemos indicado, reside en la gran facilidad de manejo de dicho software, lo que implica que el tiempo empleado en las prácticas se dedica casi exclusivamente a desarrollar los contenidos matemáticos específicos. Es importante señalar que la práctica de carácter general tenía como objetivo fundamental enseñar el manejo del programa Derive mediante la elaboración de ejercicios típicos de las asignaturas de primer curso, con lo que el alumno se encontraba en mejor disposición para desarrollar la práctica específica de la asignatura de *Cálculo.*

[12]© Wolfram Research, Inc.

3. Como consecuencia, durante el *curso académico 98–99,* se introdujeron prácticas específicas para el resto de las asignaturas de Matemáticas de las especialidades de *Ingeniería Técnica Industrial* (*Álgebra* y *Métodos Estadísticos de la Ingeniería* del primer curso y *Ampliación de Matemáticas* perteneciente al segundo curso), además de la práctica general y la práctica específica de la asignatura *Cálculo*.

   En este curso se sentaron las bases para el desarrollo actual de las prácticas con Derive, cuya distribución es la siguiente:

   (a) La práctica general tiene dos horas y media de duración. Su objetivo es el de introducir al alumno en el manejo básico del programa. Se realiza en las primeras semanas de clase del primer cuatrimestre y del primer curso.

   (b) Una práctica específica para cada una de las asignaturas de Matemáticas. El objetivo es resolver los problemas típicos de cada una de dichas asignaturas. Son prácticas de dos horas de duración que se realizan en las últimas semanas del cuatrimestre correspondiente con idea de abarcar el mayor temario posible.

   Cada una de las prácticas específicas consta de tres partes bien diferenciadas:

   (i) Aspectos teórico-prácticos a desarrollar, indicando las funciones propias de Derive para resolver los problemas que se presentan.

   (ii) Ejemplos de aplicación de los conceptos señalados, que se resolverán en el transcurso de la práctica.

   (iii) Realización, por parte del alumno, de una serie de problemas propuestos.

   Las dos horas de duración de cada práctica específica se distribuyen en una hora y media para las dos primeras partes y media hora para la tercera parte. Las prácticas se realizan de forma guiada mediante explicaciones del profesor que se completan con actividades de los alumnos.

4. Durante el *curso académico 99–00* la mayoría de los profesores que impartíamos las prácticas con Derive en las especialidades de *Ingeniería*

Técnica Industrial, cambiamos nuestra docencia a las distintas especialidades de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.* Por tal motivo, se empezaron a impartir, en este curso, las prácticas en primer curso de esta titulación. El esquema general fue el descrito anteriormente y se realizaron la práctica genérica y una práctica específica para cada una de las siguientes asignaturas: *Fundamentos de Cálculo* y *Fundamentos de Álgebra* en el primer cuatrimestre y *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* en el segundo cuatrimestre. En este mismo curso y en la última asignatura indicada, se introdujo la elaboración de comandos para la resolución de los problemas, si bien en esta ocasión, fue el profesor el encargado de elaborar los comandos, dado que el contenido de la práctica no permitía que el alumno pudiera elaborar comandos.

5. Durante el *curso académico 00–01* se siguieron impartiendo las mismas prácticas junto con la práctica específica de la asignatura *Ampliación de Matemáticas,* común a todas las especialidades e impartida a los alumnos de segundo curso durante el primer cuatrimestre. Es importante señalar que esta práctica se introdujo este año y no el anterior puesto que los alumnos, al ser de segundo curso, ya habían realizado la práctica general sobre manejo de DERIVE.

   Por otro lado, para solucionar la falta de realización de comandos por parte del alumno, se realizaron dos prácticas específicas en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* y en la misma línea que las demás, es decir, una a mitad del segundo cuatrimestre y otra al final. Así, como el contenido teórico-práctico a desarrollar en estas prácticas se vio reducido, fue posible introducir mayor número de ejercicios, de los que los más novedosos (y además los más importantes y relevantes para la investigación en curso) fueron los relativos a la elaboración de comandos por parte de los alumnos.

6. Durante el *curso académico 01–02* la única modificación que se produjo fue la separación de la práctica específica de *Ampliación de Matemáticas* en dos prácticas, con el objetivo de introducir ejercicios sobre elaboración de comandos por parte del alumno.

7. En el *curso académico 02–03* no se introdujo ningún cambio sustancial en el desarrollo de las prácticas con DERIVE. En el apéndice D se encuentran

las prácticas de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales,* por ser de especial relevancia en el desarrollo de nuestra investigación.

Parte II
Diseño del estudio empírico

Contenido de la parte II

Capítulo 3

Marco metodológico y elementos del diseño

3.1. Introducción

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, el trabajo que aquí se presenta forma parte de una línea de investigación[1], denominada *"Investigación para la innovación curricular en la acción",* que trata de indagar en los fenómenos educativos reales en Matemáticas, tal y como se producen, allí donde se producen, con la participación directa de los principales protagonistas y con las mínimas modificaciones compatibles con las condiciones reales del desarrollo didáctico y con las orientaciones curriculares usuales y/o legalmente establecidas. Recordemos que algunos de los principios que guían los estudios dentro de esta línea de investigación son los siguientes:

- Carácter empírico del estudio, aunque encuadrado en un marco teórico centrado en la innovación curricular, en una concepción integradora y holística de los fenómenos educativos y en la práctica docente como campo privilegiado para la elaboración de conocimiento fundado.

- Respeto escrupuloso a la realidad educativa, para conocer mejor los procesos "naturales" y poder modificarlos, en su caso, con suficiente conocimiento de causa.

[1]Desarrollada en el departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga.

- Respeto escrupuloso a las orientaciones curriculares usuales y/o legalmente establecidas, que se traduce en la introducción de las mínimas alteraciones compatibles con dichas orientaciones durante el proceso de investigación.

- Consideración prioritaria del carácter global, no separable en parcelas o factores independientes, de los fenómenos educativos en Matemáticas. Opción que consideramos, en cualquier caso y como no puede ser de otro modo, compatible con otros enfoques de investigación parciales o más teóricos, como sucede con los estudios cognitivos en Educación Matemática[2].

- Consideración positiva de la complejidad de los fenómenos educativos en Matemáticas, es decir, afrontarlos directamente para aprender de ellos y llegar a conocerlos mejor.

- Intención innovadora y de mejora del proceso didáctico usual y de sus resultados.

De acuerdo con dichos principios y para responder al problema de investigación planteado en el capítulo 1, hemos desarrollado un estudio basado en la modificación del tratamiento didáctico del tema *Integrales de Línea,* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales*[3] de primer curso de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga,* con el fin de analizar su viabilidad y sus efectos sobre el rendimiento de los alumnos y sobre el propio proceso didáctico y sus distintos factores. Asimismo, el estudio empírico mencionado se ha utilizado como campo de pruebas para analizar la metodología de investigación y reflexionar sobre la validez y fiabilidad de los datos aportados, la potencialidad innovadora de este tipo de estudios así como sobre el sentido y la intensidad de las posibles mejoras en el desarrollo futuro de la línea de investigación. La parte II del informe, que aquí se inicia, está dedicada a la exposición del diseño del estudio realizado y se estructura en dos capítulos (3 y 4). En los apartados que siguen del presente capítulo se exponen los aspectos generales de la metodología y del diseño de la investigación, mientras que en el capítulo 4 se tratan con detalle los instrumentos de recogida y análisis de datos. Hemos de decir que esta distribución no obedece a otras razones que las derivadas del deseo

[2]Los estudios propios de la tendencia del grupo PME y trabajos afines.

[3]Asignatura troncal de seis créditos, común a las tres especialidades de *Sistemas Electrónicos, Sistemas de Telecomunicación* y *Sonido e Imagen,* que se imparte a un total de seis grupos (dos por especialidad) en el segundo cuatrimestre del primer curso.

de mejorar la exposición y facilitar la lectura del informe, separando el contenido de esta parte en núcleos uniformes sobre temas relacionados que tienen la suficiente entidad para ello. En este caso, la cantidad, diversidad e importancia de los instrumentos han aconsejado su agrupamiento en un capítulo aparte del resto de consideraciones, en el bien entendido de que en ambos capítulos estamos hablando de aspectos relacionados, exclusivamente, con el diseño de la investigación.

El contenido de este capítulo se estructura de la siguiente manera: en la sección 3.2 se comentan los objetivos que se esperan alcanzar con la investigación; en la sección 3.3 se enuncian las conjeturas cuya plausibilidad/bondad se desea comprobar; en la sección 3.4 se describen los distintos estudios que se realizarán dentro de esta investigación; en la sección 3.5 se desarrollan las estrategias y técnicas metodológicas consideradas en el proceso de investigación; en la sección 3.6 se presenta el modelo considerado y se describe el diseño del estudio, las variables y categorías para el análisis de datos, la población y muestra y los tratamientos didácticos diferenciados que se van a emplear; en la sección 3.7 se realiza una reflexión sobre la evaluación de la metodología de investigación empleada; en la sección 3.8 se enmarca la investigación atendiendo a su modalidad así como en relación a las distintas perspectivas metodológicas; por último, en la sección 3.9 se presenta un resumen esquemático de las fases del estudio así como el desarrollo temporal del proceso de investigación.

3.2. Objetivos

El objetivo general de nuestra investigación es el de *contribuir a la comprensión de la realidad de los procesos y fenómenos de la Educación Matemática en los estudios de Ingeniería, [Castro, 1995] (página 77), que concebimos dinámica, múltiple, holística y divergente, para poder intervenir sobre ella en orden a su optimización.* Para ello, de forma genérica, se pretende comprobar la viabilidad y el grado de eficacia de modificaciones curriculares puntuales que sean compatibles con el desarrollo usual de las asignaturas en los grupos naturales y que estén comprometidas, al mismo tiempo, con la permanente innovación en el ámbito de la formación matemática superior.

La aportación específica de la investigación que presentamos a la consecución del objetivo general señalado gira en torno a los tres núcleos de interés siguientes:

1. Las condiciones reales generales del ***diseño y desarrollo curricular en Matemáticas*** en los estudios, niveles y condiciones indicadas así como sus dificultades, limitaciones y potencialidades, con especial atención a los siguientes aspectos:

   - *Currículo de Matemáticas.*

     Orientaciones oficiales; condiciones materiales; necesidades y expectativas; elementos básicos (objetivos, contenidos, metodología didáctica, recursos, tareas y actividades, relaciones de comunicación, evaluación y otros aspectos); diseño y preparación preactiva; etc.

   - *Enseñanza.*

     Desarrollo curricular; proceso educativo real; interacciones en el aula; contrato didáctico; papel del profesor; implementación práctica del diseño realizado; etc.

   - *Aprendizaje, desarrollo y competencias* de los alumnos.

     Comprensión de conceptos y procedimientos; competencias, destrezas y habilidades adquiridas y/o construidas; actitudes desarrolladas y motivación y expectativas previas y generadas durante el desarrollo del proceso didáctico; etc.

   - *Evaluación* de procesos y productos.

     Eficacia; calidad; limitaciones; rendimientos; actuaciones; etc.

2. Dentro del marco anterior, estamos interesados en un *problema específico de carácter curricular* que resumimos en la expresión ***Integrales de Línea con* DERIVE**. El problema está relacionado con la metodología de enseñanza del tema mencionado en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de primer curso de *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* y la utilización, en una parte del desarrollo de la misma, del programa DERIVE como instrumento didáctico esencial y no sólo auxiliar en el sentido habitual de la expresión.

3. Para indagar con garantías en los dos núcleos de interés anteriores debemos centrar la atención en las condiciones reales para el desarrollo de *investigaciones de carácter curricular con intención innovadora en el aula de Matemáticas* y en la delimitación y puesta a prueba de un ***marco teórico y metodológico*** adecuado y adaptado a las condiciones anteriores. Todo

ello exige determinar claramente las medidas necesarias para preservar la relevancia, calidad y eficacia de las actividades investigadoras de este tipo así como para alcanzar el mayor grado de compatibilidad posible entre dichas tareas, las labores docentes ordinarias, el desarrollo “oficial” de las asignaturas y los derechos y expectativas de los alumnos.

Por tanto, para la consecución de nuestro objetivo general y para prestar la adecuada atención a los núcleos de interés indicados, nos hemos propuesto alcanzar los siguientes objetivos:

1. *Específicos.* Con la investigación se pretende:

   (a) Comprobar los efectos positivos de la realización de comandos con Derive sobre el aprendizaje de la materia *Integrales de Línea* en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

   (b) Constatar la incidencia positiva del tratamiento didáctico mencionado sobre los diferentes factores del proceso didáctico, sobre las actitudes, conocimientos y destrezas profesionales de sus protagonistas así como sobre los rendimientos de los alumnos en una prueba objetiva del mismo tipo de las que se vienen realizando usualmente en el proceso de evaluación de la asignatura.

   (c) Comprobar la adecuación de la modificación curricular aludida y su compatibilidad con las condiciones usuales del desarrollo de la asignatura así como con las orientaciones oficiales al respecto.

2. *Complementarios y generales.* A partir de la consecución de los objetivos específicos se pretende aportar conocimientos fundados que contribuyan a:

   (a) Encontrar métodos eficaces y viables para optimizar el proceso didáctico y sus resultados en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de *Ingeniería.*

   (b) Explorar y confirmar, en su caso, la necesidad y relevancia del uso del ordenador como instrumento didáctico en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de *Ingeniería.*

   (c) Establecer y consolidar un proceso de innovación curricular en la acción en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de *Ingeniería.*

(d) Indagar en el marco teórico y en la metodología de investigación adecuados a los fines anteriores.

3.3. Formulación de conjeturas

Con todo lo expuesto anteriormente, las conjeturas cuya plausibilidad se pretende comprobar en el proceso de investigación son:

***Conjetura 1*:** Es posible implementar, de acuerdo con el marco teórico establecido, con las mínimas modificaciones y en las condiciones usuales, una metodología didáctica mixta compuesta de clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática basadas en la realización de comandos con DERIVE para la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de los estudios de *Ingeniería*.

***Conjetura 2*:** La realización de comandos con DERIVE facilita el aprendizaje de los conceptos y procedimientos algorítmicos involucrados en el tema *Integrales de Línea* y mejora la actitud de los alumnos hacia la asignatura en términos de atención, motivación, interés y participación.

***Conjetura 3*:** La metodología didáctica mixta facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje y es compatible con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios de la asignatura.

***Conjetura 4*:** La metodología didáctica mixta mejora el dominio y nivel de competencia de los alumnos sobre los contenidos del tema *Integrales de Línea*, medidos en términos de rendimiento en una prueba objetiva construida de acuerdo con los criterios usuales empleados en las evaluaciones ordinarias de la asignatura.

***Conjetura 5*:** El marco teórico empleado para fundamentar el estudio y el método de investigación basado en la combinación de técnicas metodológicas son adecuados y completos para abordar y dar respuesta al problema de investigación.

3.4. Descripción general de la investigación

Para comprobar la bondad de las conjeturas enumeradas en el apartado 3.3 y alcanzar con ello los objetivos enunciados en el apartado 3.2 hemos de realizar una investigación basada en estudios y reflexiones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la materia *Integrales de Línea* para la formación de *Ingenieros Técnicos de Telecomunicación,* tanto en su vertiente "tradicional" como en lo que se refiere a su tratamiento didáctico con la ayuda de la realización de comandos con DERIVE, estudios empíricos realizados en condiciones especiales y estructurados en varias partes y un análisis sobre la validez del diseño y sus resultados así como sobre la metodología de investigación empleada. En concreto, para abordar con garantías el problema de investigación y encontrar datos y argumentos fundados suficientes para responder al mismo, se han de realizar los siguientes estudios:

1. *Estudios y experiencias preliminares.*

   Dentro de todos los estudios preliminares realizados, ya comentados en el capítulo 2, podremos destacar los estudios exploratorios siguientes:

   (a) Estudio teórico y elaboración de material sobre el tema *Integrales de Línea.* En particular, las prácticas con DERIVE descritas en el apéndice D así como los textos [Rodríguez y otros, 1996] y [Galán, 1998].

   (b) Estudios teóricos: Análisis didáctico sobre la enseñanza de *Integrales de Línea* con DERIVE y sobre el modelo teórico de la investigación.

   (c) Utilización de nuevas tecnologías (ordenadores y programas informáticos) en la enseñanza de las Matemáticas en general, y en la enseñanza de la materia *Integrales de Línea* en particular. Destacamos la elaboración del texto [Padilla y otros, 1999b], las prácticas con DERIVE y su evolución detallada en 23, los distintos estudios realizados en Enseñanza Secundaria y en Enseñanza Universitaria utilizando DERIVE, los distintos ficheros de aplicaciones publicados en DERIVE a partir de su versión 5.0.6 en la sección que dicho programa dedica a los ficheros creados por los usuarios ([Padilla y otros, 2002d, Padilla y otros, 2002g]) así como los distintos Proyectos de Innovación Educativa, Proyectos de Enseñanza Virtual, Seminarios Permanentes y Grupos de Trabajo.

Desde el punto de vista teórico hemos realizado un análisis didáctico parcial del tema ([González, 1998]), haciendo intervenir los antecedentes del problema, los estudios preliminares relacionados anteriormente, informaciones de diversas fuentes y reflexiones sobre las experiencias personales en torno al problema en estudio.

Nos remitimos al apartado 2.3 del capítulo 2 y a los apéndices B y D para una información más extensa acerca de los estudios preliminares. En cuanto al análisis didáctico nos remitimos al apartado 2.5 del mismo capítulo 2 para una información completa sobre dicho estudio teórico y su papel en el desarrollo de la investigación.

2. *Estudios empíricos.*

   Como se recordará, el asunto central del problema de investigación cuestiona la *viabilidad, eficacia y potencialidad innovadora de un método de enseñanza mixto para el tema Integrales de Línea que incluye la realización de comandos con* Derive.

   Se realizarán los estudios siguientes:

   (a) Estudio exploratorio sobre el aprendizaje del programa Derive y sobre aplicaciones de Derive a las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería.

   (b) Para comprobar la bondad de las conjeturas 1, 2, 3 y 4, enunciadas en la sección 3.3, se ha de diseñar y desarrollar, al menos en un grupo natural de alumnos, una metodología didáctica mixta (que se expone con detalle en la sección 3.6.6 del presente capítulo) consistente en clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática y se han de llevar a cabo los siguientes estudios relacionados con la implementación de dicha metodología y con los resultados alcanzados:

      (i) Estudios cualitativos sobre la viabilidad y adecuación del nuevo método didáctico al caso particular considerado así como sobre su compatibilidad con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios del tema específico y de la asignatura en las condiciones ya señaladas.

      (ii) Estudio cualitativo y comparativo sobre los efectos de la metodología didáctica mixta y de la metodología didáctica usual para indagar sobre la efectividad del método, su incidencia en la mejora del rendimiento y su potencialidad innovadora. El estudio emplea datos cualitativos y cuantitativos y se efectúa la comparación con un procedimiento metodológico didáctico estándar similar al empleado usualmente en el desarrollo de la asignatura. Aquí, por tanto, podemos distinguir los siguientes análisis necesarios para clarificar la certeza de las afirmaciones contenidas en las conjeturas:

- Análisis cualitativo de la comparación entre ambos métodos de enseñanza.
- Aproximación al análisis cuantitativo de los efectos de dichos tratamientos y de las diferencias entre ambos.

3. *Estudios complementarios.*

   Para comprobar la bondad de la conjetura 5 y completar, en su caso, la información a favor de la plausibilidad de las demás conjeturas se han de realizar reflexiones de carácter evaluativo sobre:

   (a) La validez del diseño y sus resultados. De ello depende, entre otros aspectos, la credibilidad del estudio realizado y la potencialidad innovadora del método didáctico aplicado.
   (b) La metodología de investigación, el proceso seguido y la adecuación del diseño realizado y de los instrumentos empleados. De ello depende la consolidación de la línea de investigación y su potencialidad innovadora y transformadora de la realidad educativa en el aula de Matemáticas.
   (c) La investigación en su conjunto, el ajuste a los principios y condiciones de la tendencia que le ha servido de soporte, el grado de consecución, en este caso particular, de los fines generales de la línea de investigación así como las desviaciones y los aspectos incompletos y necesitados de futuras atenciones.

Los estudios mencionados bajo el epígrafe 1 quedan referenciados en el capítulo relativo a los antecedentes y al análisis didáctico (capítulo 2), por lo que no serán incluidos nuevamente en esta segunda parte del informe al no formar parte, en su mayoría, de los trabajos realizados formalmente para la consecución de esta tesis doctoral. No obstante, hay que decir que dichos estudios han constituido los prolegómenos de la presente investigación y han aportado una parte sustancial de los fundamentos de los estudios referenciados en 2 y en 3. Igualmente, los estudios incluidos en el epígrafe 2 se tratarán con más detenimiento en el apartado 3.6, mientras que las reflexiones a las que se hace referencia en el epígrafe 3 se tratan con más detenimiento en el apartado 3.7 del presente capítulo.

3.5. Estrategias y técnicas metodológicas

Como se describirá más detalladamente en la sección 3.8, de acuerdo con las características del problema enunciadas en las secciones anteriores y con la naturaleza de los estudios mencionados en el apartado anterior, situamos nuestra investigación entre las perspectivas *Constructivista* y *Empírico-Analítica,* [Latorre y otros, 1996] (páginas 88–91).

Como se expone en los apartados que siguen, la metodología a emplear para el desarrollo del estudio empírico debe ser una metodología compleja basada en la aplicación de dos metodologías didácticas diferenciadas (dirigidas a los grupos control y experimental) y la obtención y análisis de información de diversas fuentes (alumnos, observadores e investigador principal).

Las estrategias y técnicas para lograr nuestros fines son diversas de acuerdo con los tipos de estudios y las circunstancias de los mismos.

Los estudios preliminares señalados en la sección anterior son de carácter eminentemente matemático. En particular, las reflexiones realizadas se han dirigido hacia tres puntos de atención: reflexiones de tipo matemático (análisis del contenido matemático, incardinación dentro de teorías, situación en el edificio matemático, ...); reflexiones de tipo epistemológico (naturaleza y modo de existencia del conocimiento en cuestión, aspectos históricos, simbolización y representación de los conceptos y procedimientos, rigor lógico, etc.) y reflexiones de tipo fenomenológico (dirigidas sobre todo a las aplicaciones del conocimiento en fenómenos y situaciones propias de los estudios de Ingeniería).

Los estudios teóricos realizados incluyen los estudios preliminares y el análisis didáctico que se desarrolla en la sección 2.5 del capítulo 2 del informe. Este último consiste en un estudio metaanalítico en el que se utilizan fuentes diversas de datos de tipo cualitativo.

En cuanto al estudio empírico y los estudios complementarios se refiere se han seguido dos vías complementarias a lo largo de todo el proceso de investigación:

1. Una estrategia *cualitativa,* consistente básicamente en un proceso de *investigación-acción* (de una sola fase, donde los antecedentes propios actúan como estudios exploratorios previos y donde el investigador es el propio profesor) y un *estudio de casos* consistente en obtener información detallada sobre algunos casos concretos por medio de encuestas, informes de observación, entrevistas individuales, triangulación, reflexión epistemológica y análisis de registros (ficheros de Derive).

2. Una estrategia *cuantitativa,* que se apoya en un *diseño cuasiexperimental,* con el fin de completar la información obtenida por la estrategia anterior, permitiéndonos conocer hasta qué punto un cambio en la variable dependiente ha sido debida a los efectos del tratamiento. Para todo ello se tendrán en cuenta las calificaciones de los alumnos en distintas pruebas así como los datos cuantitativos que se pueden obtener de las encuestas y de los ficheros de Derive.

Por último, en el caso del análisis de la metodología y la evaluación de la investigación, utilizaremos las consideraciones que para este tipo de estudio se recogen en [Fernández, 1995].

Los distintos instrumentos de recogida de datos, que se describen con todo detalle en el capítulo siguiente, tienen como fin principal el de disponer de diferentes vías de evaluación, control y análisis de todo el proceso de investigación.

A modo de resumen, los distintos instrumentos de recogida de datos se pueden clasificar como sigue:

1. Prueba objetiva de nivel previa.

2. Otros instrumentos y técnicas de recogida de información del alumnado:

   (a) Ficheros de Derive (exclusivo del grupo experimental).

   (b) Encuestas.

   (c) Entrevistas (exclusivo del grupo experimental).

3. Instrumentos de recogida de información de los observadores:

(a) Informe del observador participante (profesor que imparte las clases).

(b) Informe de observación del resto de los profesores de la asignatura (observadores internos).

(c) Informe del observador externo.

4. Prueba objetiva de evaluación de la materia *Integrales de Línea.*

3.6. Estudio empírico

Como se ha mencionado con anterioridad, el estudio empírico de nuestra investigación pone en cuestión la viabilidad, eficacia y potencialidad innovadora de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la materia *Integrales de Línea* mediante una metodología didáctica mixta que incluye la realización de comandos con DERIVE. En esta sección nos disponemos a completar las consideraciones realizadas hasta ahora sobre el diseño y la metodología general de la investigación con la exposición detallada de los aspectos fundamentales del diseño del estudio empírico que constituye el núcleo central de trabajo a realizar.

En los apartados que siguen se considerarán, por este orden: las características generales del estudio empírico, la población y las muestras que se van a utilizar en la investigación, las condiciones, limitaciones y dificultades de la investigación, el diseño y el proceso del estudio con indicación del papel de los instrumentos a lo largo del desarrollo del mismo, las variables y categorías para el análisis de datos y los dos tratamientos didácticos que se ponen en práctica.

3.6.1. Características generales

El estudio empírico que constituye el núcleo de la investigación se realiza:

1. Sobre un problema o fenómeno educativo específico *de carácter curricular* en el marco del diseño y el desarrollo ordinario de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* del plan de estudios oficial de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga,* consistente en una metodología didáctica mixta en la enseñanza de la materia *Integrales de Línea.*

2. En las condiciones reales de desarrollo del proceso didáctico ordinario, sólo modificadas o alteradas lo imprescindible para realizar el estudio. Concretamente, se considerarán sólo aquellas modificaciones:

   (a) Requeridas por el problema y la metodología de investigación.

   (b) De las que hay indicios razonables, datos fiables, experiencias previas o estudios exploratorios en el sentido de su incidencia positiva sobre el proceso y sus resultados o, al menos, de que no van a afectar negativamente a los mismos (*intención innovadora* y de mejora u optimización del proceso).

   (c) Compatibles con el diseño oficial y con las condiciones reales del desarrollo curricular (mismo número de horas, mismos contenidos, etc.).

   (d) Viables, aplicables en condiciones normales.

   (e) De las que haya indicios de que pueden ser permanentes y sostenibles, no singulares ni excepcionales, es decir, con vocación de perdurabilidad (no se han realizado modificaciones puntuales caprichosas. Antes bien, se trata de modificaciones pequeñas pero sólidas).

3. Mediante una metodología mixta y compleja consistente en clases de pizarra y clases en el laboratorio mediante la elaboración de comandos con Derive. Creemos que esta metodología es adecuada para abordar con garantías los fenómenos y problemas y está adaptada al problema específico en estudio y a las condiciones reales del desarrollo del proceso didáctico.

3.6.2. Población y muestra: composición y características

El alcance del estudio realizado así como la aplicabilidad y relevancia de los conocimientos generados sólo adquieren pleno significado cuando se delimitan con precisión las características de los sujetos y grupos de sujetos que intervienen en el estudio. Es por ello que, sin ánimo de extrapolar indebidamente los resultados ni de sostener afirmaciones que vayan mucho más allá de las condiciones específicas del estudio, nos parece conveniente situar de manera precisa el contexto muestral y poblacional del trabajo realizado.

En esta sección se describe la población sobre la que se ha desarrollado la investigación así como las muestras elegidas para realizar el estudio.

Población

Si bien no se pretende con la investigación obtener conclusiones válidas para toda la población, en el sentido de los estudios inferenciales rigurosos, sí es cierto que tampoco se renuncia a un cierto grado de generalización en virtud de los controles y técnicas metodológicas que se adoptan para el desarrollo del estudio. Que duda cabe de que se trata de una generalización restringida y cautelosa, pero dirigida claramente hacia situaciones en las que se puede dar un alto índice de plausibilidad de las afirmaciones, lo que creemos que es, sin duda, una información valiosa para la continuación de los estudios. En consecuencia, es conveniente tomar una cierta referencia para indicar la población a la que nos dirigimos y que puede ser considerada en estudios posteriores. Por todo ello, la *población* a la que va dirigida esta investigación está formada por todos *los alumnos de los distintos estudios de Ingeniería impartidos en cualquiera de las Universidades de España,* que cursen una asignatura en la que se desarrolle la materia *Integrales de Línea* y en niveles similares a los del estudio realizado.

Muestras

Como *muestras* se han elegido, de entre los seis grupos en los que se imparte la asignatura, los siguientes dos *grupos naturales:*

1. Un grupo, al que llamaremos *grupo control*, perteneciente a una de las especialidades de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga.* A los alumnos de este grupo les será impartido el tema *Integrales de Línea* mediante la metodología didáctica descrita detalladamente en la sección 3.6.6, bajo la denominación *tratamiento control.*

2. Un grupo, al que llamaremos *grupo experimental*, perteneciente a una de las especialidades de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación* de la *Universidad de Málaga.* A los alumnos de este grupo les será impartido el tema *Integrales de Línea* mediante la metodología didáctica mixta descrita detalladamente en la sección 3.6.6, bajo la denominación *tratamiento experimental.*

La elección de estos dos grupos se ha realizado teniendo en cuenta las siguientes características:

1. La asignatura es impartida en los dos grupos por un mismo profesor (la doctoranda), ya que si intervinieran profesores distintos se podrían condicionar los resultados de la investigación.

2. Los dos grupos pertenecen a la misma especialidad (*Sistemas de Telecomunicación*) ya que por las calificaciones de años anteriores se ha podido observar que los alumnos de ciertas especialidades obtienen mejores resultados que los de otra. Así intentamos eliminar los efectos de esta variable y que el resultado sea independiente de la especialidad elegida.

3.6.3. Condiciones, limitaciones y dificultades de la investigación

Como se ha mencionado anteriormente el estudio se realiza con grupos naturales de alumnos matriculados oficialmente en la asignatura. Es por ello que se han de respetar escrupulosamente tanto los diseños curriculares como las características y condiciones usuales del desarrollo didáctico, lo que genera limitaciones y dificultades de cara al diseño y desarrollo de las metodologías didácticas que se han de utilizar. En consecuencia, se han de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- La asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* es una asignatura *instrumental* para la carrera, lo que implica que no se puede disminuir su contenido específico.

- El contenido a impartir, según el actual plan de estudios, es muy extenso (consultar el apéndice E para ver el temario completo de la asignatura) y, por tanto, la experiencia no podrá acarrear un tiempo extra en el desarrollo de la asignatura.

- Debido a que el horario oficial de la titulación no presenta "huecos", la experiencia a realizar se llevará a cabo dentro del horario oficial propio de la asignatura.

- El estudio se realiza de forma cooperativa con la ayuda de los otros dos profesores de la asignatura.

Se pretende así que la experiencia no conlleve ni una reducción ni un aumento en el tiempo que se le ha dedicado en los últimos años a esta materia de la asignatura.

Por último es conveniente también destacar que al tratarse de grupos naturales se pueden presentar, relacionadas con la muestra y los grupos, las siguientes dificultades:

1. Que haya alumnos que asistan regularmente a clase pero no participen activamente en el desarrollo del estudio (que no realicen las distintas pruebas, que no contesten a la encuesta o que no graben en el ordenador lo desarrollado en clase de laboratorio). Téngase en cuenta que se trata del desarrollo de una asignatura oficial en la que se ponen en juego expectativas e intereses de todo tipo que son legítimos y hay que respetar.

2. El alumno está acostumbrado a que en asignaturas instrumentales como la que se está considerando, la metodología habitual está enfocada a enseñar las técnicas para resolver ejercicios mecánicos de aplicación. Puede ocurrir, por tanto, que el alumno se sienta más seguro y tranquilo en las clases en las que se desarrolla una metodología en esa línea, frente a cualquier otra alternativa y realmente demande el "tratamiento de siempre". En este caso, la investigación tiene un doble reto: por un lado, romper la inercia y motivar al alumno ante una nueva metodología de enseñanza y, por otro, conseguir una mejora en la asimilación de los contenidos con la utilización de dicha metodología. Creemos que con el estudio realizado, como se puede comprobar en los capítulos siguientes, se han conseguido superar con creces ambos retos en la mayoría de los casos.

3.6.4. Diseño y proceso del estudio

Partiendo de la clasificación dada en [Latorre y otros, 1996] (páginas 154–172) para *diseños cuasiexperimentales,* nuestro estudio se engloba dentro de la categoría de *diseños de grupos no equivalentes.* Concretamente, *diseño pretest-postest de dos grupos* esquematizado en la siguiente tabla:

Grupos	**Sujetos**	**Asignación**	**Pretest**	**Tratamiento**	**Postest**
1	n_1	No azar	$\overline{X}_1$	A_1	$\overline{X}_3$
2	n_2	No azar	$\overline{X}_2$	A_2	$\overline{X}_4$

Sin embargo, y como se comentó en la sección 3.5, nuestra estrategia cuantitativa, que se apoya en este diseño cuasiexperimental, se complementa con una estrategia cualitativa, obteniéndose así una metodología de investigación compleja que trata de reunir evidencias sobre las conjeturas, el problema de investigación y el método empleado. No olvidemos que nuestro estudio comparativo indagará sobre la efectividad del método y su incidencia en la mejora del rendimiento, sobre la viabilidad del proceso didáctico y el comportamiento de los distintos factores y sobre la capacidad innovadora del nuevo tratamiento didáctico.

El desarrollo práctico del diseño anterior se llevará a cabo de acuerdo con las siguientes fases (figura 3.1):

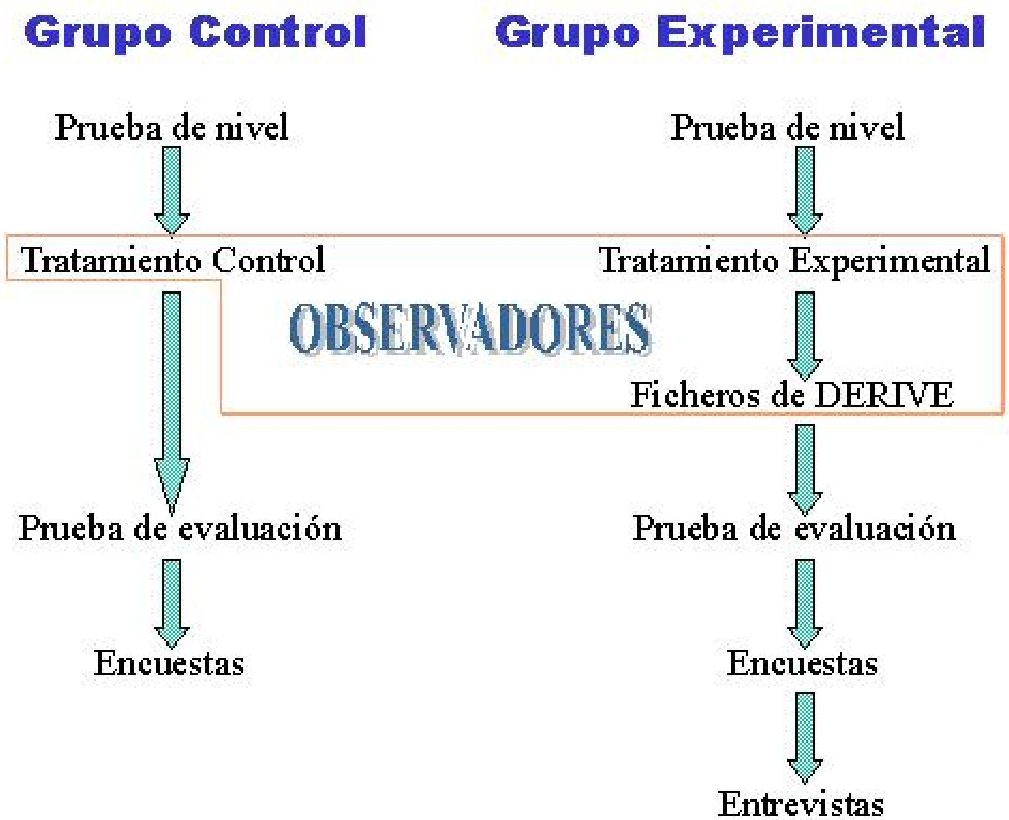
1. *Prueba de nivel previa (pretest).* Con el fin de intentar medir las posibles diferencias de nivel entre los grupos experimental y control, se realizará una prueba de nivel a ambos grupos (prueba que se detalla en la sección 4.2). Esta prueba consistirá básicamente en una serie de cuestiones relacionadas con el cálculo de ciertas integrales trigonométricas y sobre los conceptos de varios operadores diferenciales (materia del tema 0 de la asignatura, que está desarrollado completamente en el apéndice A).

2. *Tratamientos didácticos.* Tras la realización de la prueba de nivel, se desarrollarán los dos tratamientos didácticos descritos en 3.6.6.

3. *Ficheros de* Derive. Al terminar la clase impartida en el laboratorio al final del tratamiento experimental, los alumnos asistentes a la clase de elaboración de comandos grabarán en ficheros de Derive todo lo que realicen durante el transcurso de la misma. La información recogida con estos ficheros aportará datos sobre el proceso de investigación (posibilidad de la implementación de la metodología didáctica mixta, potencia innovadora del método didáctico empleado, modificaciones que se producen en el proceso de aprendizaje, etc.).

4. *Prueba de evaluación (postest).* Tanto para el grupo control como para el experimental, al terminar los tratamientos didácticos, en la clase siguiente de la asignatura, se realizará la prueba de evaluación que se detalla en la sección 4.5. El fin principal de esta prueba es medir el grado de asimilación de los contenidos sobre la materia *Integrales de Línea* que el alumno consigue mediante cada una de las metodologías didácticas empleadas.

5. *Observaciones.* Es importante también señalar que, a lo largo de todo el desarrollo del proceso, asistirán varios observadores que elaborarán informes



	Grupo Control	Grupo Experimental
Prueba de nivel	Sí	Sí
Tratamiento	Control	Experimental
Prueba de evaluación	Sí	Sí
Observadores	Sí	Sí
Fichero DERIVE	No	Sí
Encuesta	Sí	Sí
Entrevista	No	Sí

Figura 3.1: Esquema-resumen del proceso del estudio.

en los que detallarán objetivamente lo que han observado y si se ha ajustado al desarrollo metodológico previsto.

6. *Encuestas.* Después del desarrollo de los tratamientos didácticos del tema, los alumnos de ambos grupos cumplimentarán una encuesta elaborada previamente con el fin de obtener datos objetivos sobre nuestro estudio que sirvan de apoyo y refuerzo de los datos obtenidos mediante otras vías.

7. *Entrevistas.* Tras la realización de las encuestas comentadas en el punto anterior, se realizarán una serie de entrevistas individuales a algunos alumnos del grupo experimental con el fin principal de obtener datos sobre aspectos no recogidos con otros instrumentos (actitudes, motivación, interés, adecuación de la metodología didáctica, etc.). Al mismo tiempo, con las entrevistas se pretende también aportar información sobre el grado de coincidencia con los datos obtenidos mediante otras vías.

3.6.5. Variables y categorías para el análisis de datos

Se exponen a continuación algunas consideraciones con respecto a las variables independiente y dependientes así como a las distintas categorías para el análisis de datos que se han tenido en cuenta a lo largo de todo el proceso de investigación.

Variables

Aunque nuestro estudio no es un estudio experimental puro ni nuestra intención es establecer con precisión relaciones funcionales estrictas, vamos a utilizar el término *variable* para delimitar y clarificar aún más el problema de investigación y las características fundamentales analizadas. Empleamos para ello lo establecido en [González, 1998] (páginas 269–272).

En nuestro caso, las variables fundamentales del estudio son:

- *Variable independiente:* elaboración o no de comandos con DERIVE a lo largo del desarrollo del tema *Integrales de Línea.* Se trata de una variable dicotómica.

- *Variables dependientes:* rendimiento/dominio sobre los contenidos de dicho tema, medido a través de la calificación obtenida en una prueba objetiva estándar y construida siguiendo las directrices establecidas sobre los aspectos fundamentales del tema mencionado, de acuerdo con la programación oficial de la asignatura y con su desarrollo usual.

- El resto de variables concomitantes, extrañas y/o controladas o fijadas.

Siguiendo las recomendaciones dadas en [Latorre y otros, 1996] (página 99), con el fin de que los cambios observados en las variables dependientes en su mayor parte sean atribuibles a los cambios introducidos en la variable independiente, se han tomado las debidas precauciones para que dichos cambios no sean producidos por otras variables extrañas. Para ello, se ha procurado conseguir la equivalencia entre los grupos que van a ser sometidos a distintos niveles de la variable independiente, para así posteriormente poder comparar los efectos. Asimismo, se han controlado otras posibles variables independientes y concomitantes, fijando y restringiendo sus modalidades y/o eliminando sus posibles efectos. Así, entre otras, se han controlado las variables tipo de tarea, tiempo, profesor y contenidos. Del mismo modo se han arbitrado diversos procedimientos de control (observación, consenso, controles externos, ...) para confirmar la igualdad de efectos de variables no deseadas y extrañas.

Categorías

Atendiendo a la clasificación dada en [Castro, 1995] (página 94), las distintas categorías que se han considerado para el análisis de datos se pueden agrupar en los siguientes bloques:

1. *Categorías de interacción y desarrollo didácticos.* Con ellas se pretende realizar un análisis de la comunicación que se ha producido en el aula durante el desarrollo de los tratamientos didácticos y servirán para controlar las variables correspondientes. Tendremos en cuenta las siguientes:

    (a) Interacción profesor-alumno.

    (b) Interacción alumno-alumno.

    (c) Adecuación de las metodologías didácticas a la enseñanza de los contenidos de la materia *Integrales de Línea*.

2. *Categorías de contenido matemático.* El contenido específico de *Integrales de Línea* (cuyo desarrollo completo se puede consultar en el apéndice B)

constituye uno de los aspectos fundamentales a la hora de realizar esta clasificación. Con ellas se pretende realizar un análisis del contenido desarrollado en las clases y comprobar el control de las variables de este tipo. Tendremos en cuenta las siguientes:

(a) *Contenidos conceptuales:*

   (i) Definición de camino en términos de parametrizaciones.
   (ii) Clasificación de caminos.
   (iii) Parametrización de curvas planas y curvas alabeadas.
   (iv) Integral de línea de un campo vectorial a través de un camino.
   (v) Propiedades de las integrales de línea.
   (vi) Distintas notaciones de las integrales de línea.
   (vii) Independencia de la parametrización elegida para el cálculo de una integral de línea.
   (viii) Formas diferenciales.
   (ix) Formas diferenciales exactas (campos conservativos).
   (x) Función potencial.
   (xi) Teorema de la independencia del camino.
   (xii) Integrales de línea de formas diferenciales exactas.

(b) *Contenidos procedimentales:*

   (i) Parametrización de un camino a partir de su ecuación cartesiana.
   (ii) Parametrización de un camino a partir de su definición geométrica.
   (iii) Resolución de integrales de línea mediante integrales definidas a partir de la parametrización del camino.
   (iv) Resolución de integrales de línea a través de un camino en forma explícita.
   (v) Comprobación de si una forma diferencial es forma diferencial exacta o no.
   (vi) Cálculo de la función potencial.
   (vii) Resolución de integrales de línea de formas diferenciales exactas.

(c) *Contenidos actitudinales:*

   (i) Actitud y motivación con respecto a la materia *Integrales de Línea*.
   (ii) Actitud y motivación con respecto a la asignatura.

(iii) Atención, interés y asimilación de los aspectos tratados.

3. *Categorías de comprensión y dominio del contenido.* Con ellas se pretende realizar una evaluación de la comprensión y el dominio de los alumnos del contenido matemático sobre *Integrales de Línea.* Al mismo tiempo se asegura la objetividad y validez de las pruebas empleadas.

   Adoptamos para el término *comprensión de un conocimiento,* la aproximación centrada en la capacidad de construcción de una respuesta adaptada basada en dicho conocimiento[4]. En consecuencia, centramos nuestras categorías de comprensión en la faceta aplicada de los contenidos. Las categorías son las siguientes:

   (a) Aplicación de las propiedades para resolver integrales de línea.
   (b) Utilización de distintas notaciones para resolver integrales de línea.
   (c) Aplicación del teorema de la independencia del camino para el cálculo de integrales de línea.
   (d) Utilización de la función potencial para el cálculo de integrales de línea.

3.6.6. Tratamientos didácticos

La investigación requiere de dos tratamientos didácticos de aplicación simultánea a los dos grupos del estudio. Veamos los protocolos de ambos procesos didácticos.

Metodología didáctica del grupo control (tratamiento control)

La metodología que se desarrollará con el grupo control es una metodología que podría denominarse *tradicional*: desarrollo del tema en clase con todos sus aspectos teórico-prácticos así como la resolución en pizarra de los ejercicios y problemas del tema. En el desarrollo del tema se seguirá el esquema general de años anteriores, esto es, se irán alternando convenientemente los aspectos teóricos con la resolución de los ejercicios. Este esquema general es común a todos los grupos y está consensuado por los tres profesores que imparten la asignatura. El

[4]Aproximación que viene siendo utilizada en los trabajos que se desarrollan en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga sobre la línea “Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático”, iniciada con el proyecto financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología con la clave PB97–1066.

desarrollo completo de este tema está en el apéndice B y el tiempo estimado para su desarrollo es de seis horas.

Metodología didáctica del grupo experimental (tratamiento experimental)

En el grupo experimental, el tema se desarrollará teniendo en cuenta la siguiente metodología:

1. **Clases de pizarra** (duración, cinco horas): en clases tradicionales se desarrollarán los aspectos teóricos junto con sus ejemplos aclaratorios (ver apéndice B) así como la realización de los ejercicios iniciales sobre integrales de línea y el planteamiento del resto de los ejercicios.

2. **Clase en el laboratorio** (duración, una hora): la parte final del tema (realización de los cálculos finales del resto de ejercicios) se desarrollará en el laboratorio con la ayuda del programa Derive con el siguiente esquema:

   - Resolución con ayuda de Derive de los ejercicios cuyos cálculos finales quedaron pendientes en las clases de pizarra.
   - Elaboración de ciertos comandos con Derive por parte del profesor con el fin de mostrar al alumno la estrategia general a seguir para crear comandos con Derive sobre la materia *Integrales de Línea.*
   - Elaboración del resto de los comandos sobre la materia *Integrales de Línea* por parte del alumno. Con la elaboración de estos comandos, se pretende utilizar el ordenador no sólo como una calculadora potente sino como una herramienta que fomente la creatividad matemática del alumno.
   - Resolución, mediante los comandos creados, de los ejercicios cuyos cálculos finales quedaron pendientes. Esta última parte tiene un doble objetivo. Por un lado, resolver exactamente los mismos ejercicios que en el grupo control. Por otro lado, utilizar los ejercicios como "detectores" de posibles errores en la elaboración de comandos, puesto que al alumno se le proporcionarán los resultados de estos ejercicios. Así, si el resultado de un ejercicio obtenido mediante la ejecución de un comando no coincide con el verdadero, el alumno tendrá que buscar la razón de la anomalía.

Los comandos que el profesor desarrollará en el laboratorio son:

(a) `DIFERENCIALEXACTA3` para comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ es exacta o no.

(b) `POTENCIAL2` para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^2$. En el caso de que la forma diferencial no sea exacta lo indicará.

(c) `LINEAPARAMETRICA3` para calcular la integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ a través de un camino dado.

Los comandos que el alumno desarrollará en esta clase son:

(a) `DIFERENCIALEXACTA2` para comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ es exacta o no.

(b) `POTENCIAL3` para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^3$. En el caso de que la forma diferencial no sea exacta lo indicará.

(c) `LINEAPARAMETRICA2` para calcular la integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ a través de un camino dado.

Por lo tanto, la duración estimada para el desarrollo de esta metodología es de seis horas, el mismo tiempo que en el grupo control (las cinco horas de clases de pizarra más la hora llevada a cabo en el laboratorio).

3.7. Estudios complementarios

3.7.1. Algunas reflexiones sobre la evaluación de la investigación

Los estudios complementarios a los que se hace alusión en el apartado 3.4 se refieren a reflexiones críticas sobre la metodología de investigación empleada y el diseño de los diferentes estudios así como a la validez de los resultados obtenidos y al alcance de los conocimientos generados y de las conclusiones establecidas. Que duda cabe de que aquí sólo se van a tratar algunas de dichas cuestiones en términos de criterios a aplicar y de consideraciones “a priori” que sólo pueden ser completadas y confirmadas a la vista de los resultados del estudio. Se inicia por tanto, en este apartado, una reflexión y discusión que se continuará en capítulos posteriores a partir de la exposición y análisis de los resultados definitivos del estudio.

3.7.2. Análisis de la metodología

Un análisis “a priori” indica que las técnicas metodológicas adoptadas así como su combinación pueden ser pertinentes y suficientes, aunque no se ha podido realizar la investigación en la acción en varios ciclos o etapas, lo que va a limitar el estudio y la confirmación de su replicabilidad.

Entre los criterios que se van a emplear para establecer la bondad del método están los siguientes: juicio de expertos, concordancia de informes y puntos de vista, triangulación y reflexión epistemológica sobre la naturaleza de los fenómenos y la adecuación del método.

3.7.3. Control de amenazas a la validez del diseño del estudio comparativo

La metodología adoptada para realizar la investigación es compleja y combina técnicas metodológicas diversas. Pero dicha elección no ha sido caprichosa; las características del fenómeno a investigar requiere del establecimiento de numerosos controles y garantías que eliminen la posibilidad de cualquier explicación alternativa no deseada de los resultados así como de las relaciones entre las causas y los efectos.

Siguiendo el modelo presentado en [Castro, 1995] (páginas 302–303), en la siguiente tabla se presentan los controles realizados sobre las principales amenazas que afectan a la validez del diseño elegido.

VALIDEZ INTERNA		
Amenaza	**Control**	**Grado**
Historia	• Intrasesional: Los grupos recibieron sendos tratamientos simultáneamente.	+
	• Extrasesional: No hubo acontecimientos externos descollables.	+
Implementación	• Implementadores: profesores muy similares en formación, antecedentes, motivación y conociendo su participación en el experimento.	+
	• Condiciones de implementación estandarizadas.	+

Amenaza	**Control**	**Grado**
Selección	• Sujetos participantes de similares características: edad, madurez, sexo, status socioeconómico. No evidencia de notables diferencias intergrupales. • Tamaño muestral: alrededor de 30 sujetos por grupo, susceptibles de detectar un tamaño de efecto mayor que 0.50 con una potencia en el contraste superior a 0.60 a un $\alpha < 0.05$.	+ =
Maduración	Sujetos de la misma edad cronológica y mental e igual nivel escolar.	+
Actitud de los sujetos	• Los tratamientos fueron parte regular de la enseñanza. • Efecto Hawthorne. • Efecto John Henry o de rivalidad compensatoria por tratamiento menos deseable. • Efecto de desmoralización por resentimiento.	+ + + +
Localización	• Salones de clase similares: concordancia. • Disponibilidad de recursos similares.	+ +
Instrumentación	• Deterioro de los instrumentos: fiabilidad y validez aceptables. • Efectos techo o suelo de instrumentos de medida de las variables dependientes. • Sesgo del recolector de datos: concordancia en las calificaciones de dos calificadores previa estandarización del procedimiento de calificación. Utilización de una prueba impresa con criterios de corrección estandarizados.	= + +
Administración de pretest	• Uso de pruebas paralelas para la variable aptitudinal en la que el efecto de la práctica podría ser cuestionable dado que el tiempo entre administración de pretest y de postest fue corto. • Interacción del tratamiento (enseñanza innovadora de un tópico) con el pretest.	+ +
Mortalidad	• Porcentaje de mortalidad en cada grupo. • Mortalidad diferencial según tratamiento.	= =
Regresión	Grupos naturales sin puntuaciones extremas en el pretest. Uso de análisis de covarianzas.	?

Amenaza	**Control**	**Grado**
Interacción selección-maduración	• Comparación en intervalos temporales idénticos.	+
	• La regresión del postest con una variable madurativa (aptitud) determina pendientes homogéneas en cada grupo.	+
	• No probable desarrollo abrupto de la maduración debido a similar edad de los grupos y brevedad del tratamiento.	+
Interacción historia-selección	• Sesiones múltiples de implementación del tratamiento.	+
	• Grupos de tratamientos extraídos de un mismo escenario.	+
Interacción selección-instrumentación	Posibles efectos techo o suelo asociado a un tratamiento determinado.	+
Ambigüedad de la dirección causal	Orden de procedencia de las variables está claro: VI → VD (enseñanza/aprendizaje).	+
Difusión o imitación de tratamientos	• Tratamiento bien diferenciado.	+
	• No posibilidad de interacción entre grupo control y grupo experimental.	+
Igualación compensatoria de tratamientos	Apoyos diferenciales a uno u otro grupo.	+
VALIDEZ EXTERNA		
Interacción administración de test-tratamiento	• Aprensividad de la evaluación.	+
	• Sensibilización por el pretest.	+
Interacción selección-tratamiento	Representatividad de los grupos.	+
Interferencia de tratamientos múltiples	Algún grupo estuvo sometido a un tratamiento afín con anterioridad.	+
Dispositivos reactivos	• Artificialidad de la situación experimental.	+
	• Conciencia del alumno de que está participando en un experimento.	=
	• Presencia de extraños.	=

Leyenda:

+ : control fuerte, amenaza poco probable.

= : control débil, posible amenaza.

– : control escaso, amenaza probable.

3.8. Modalidad de la investigación

En los siguientes dos apartados se enmarca nuestra investigación atendiendo a la modalidad y a las distintas perspectivas metodológicas.

3.8.1. Algunas características

Considerando la clasificación presentada en [Latorre y otros, 1996] (páginas 45–47) sobre modalidades de investigación, las características más reseñables de nuestra investigación son las siguientes:

- En cuanto a la *finalidad* perseguida. Se trata de una investigación *aplicada,* puesto que se trata de resolver un problema práctico e inmediato con el fin de mejorar la calidad educativa.

- Con respecto al *alcance temporal.* Se integra un *estudio transversal* con uno *longitudinal,* buscando que se complementen de forma adecuada.

- En referencia al *objeto perseguido.* Nuestra investigación se puede considerar de tipo *experimental* ya que tratamos de indagar la posible relación causa-efecto que nuestro tratamiento experimental pudiera producir sobre ciertas variables de interés.

- En cuanto al *carácter de la medida.* Nuestra investigación utiliza tanto un método *cualitativo* como uno *cuantitativo.* Con la utilización simultánea de ambos métodos tratamos de obtener la máxima información posible.

- En cuanto al *marco.* Teniendo en cuenta que se trabaja directamente en el aula con grupos naturales, se trata de una investigación de *campo.*

- En cuanto a la *concepción del fenómeno educativo.* Nuestra investigación presenta características tanto de *investigación nomotética* como de *investigación ideográfica* puesto que utiliza la metodología empírico-analítica, se apoya básicamente en la experimentación pero también enfatiza sobre lo particular e individual.

- En cuanto a la *dimensión temporal.* Nuestra investigación es *experimental* puesto que pretendemos introducir un cambio en el currículo y observar el efecto que produce en los alumnos dicho cambio.

- En cuanto a su *orientación.* Nuestra investigación es *orientada a la aplicación.*

3.8.2. Relación con las perspectivas metodológicas

Como se comenta en [Latorre y otros, 1996] (página 87) la naturaleza del problema de investigación y las conjeturas e hipótesis relacionadas con él son los aspectos que condicionan la elección de la metodología. Por otro lado ninguna metodología aportará por sí sola respuestas a todas las preguntas que pueden plantearse en el proceso educativo.

Teniendo en cuenta la clasificación sobre las distintas perspectivas metodológicas dada en [Latorre y otros, 1996] (páginas 88–91), nuestra investigación se sitúa entre las perspectivas *Constructivista* (cualitativa) y *Empírico-Analítica* (cuantitativa) ya que no sólo se pretende conseguir la comprensión global de las situaciones y las relaciones establecidas entre los agentes implicados en la investigación, sino que también se trata de reducir el fenómeno a dimensiones susceptibles de medición.

3.9. Desarrollo temporal: fases y períodos

La siguiente tabla recoge de forma descriptiva las distintas fases de las que ha constado el proceso de investigación, junto con la temporalización de cada una de ellas.

Fase	**Fecha**
Intuición del problema.	Cursos 96–97, 97–98, 98–99 y 99–00.
Estudios exploratorios previos.	Cursos 98–99, 99–00, 00–01 y 01–02.
Revisión bibliográfica.	Años 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 y 2003.
Concreción del problema.	Del 1/09/02 al 3/02/03.
Planteamiento de conjeturas e hipótesis.	5/02/03.

Fase	**Fecha**
Selección del diseño.	Del 5/02/03 al 14/02/03.
Selección de los grupos control y experimental.	21/02/03.
Elaboración de instrumentos de análisis.	Del 10/02/03 al 21/02/03.
Realización de la prueba de nivel (pretest).	4/03/03.
Desarrollo de las metodologías didácticas.	Del 5/03/03 al 13/03/03.
Realización de la prueba de evaluación (postest).	18/03/03.
Realización de encuestas.	Del 18/03/03 al 25/03/03.
Realización de entrevistas.	Del 31/03/03 al 7/04/03.
Análisis de los datos obtenidos.	Del 8/04/03 al 30/04/03.
Elaboración del informe de investigación.	Del 5/05/03 hasta la fecha.

Capítulo 4

Instrumentos de recogida y análisis de datos

4.1. Introducción

Recordemos que nuestra investigación forma parte de un tipo de estudios, al que hemos denominado "*Investigación para la innovación curricular en la acción*", que se desarrollan dentro del proceso didáctico ordinario, bajo la coordinación del profesor de la asignatura y con la participación de personas cualificadas, con las mínimas modificaciones e interferencias posibles con respecto al desarrollo usual y en las mismas condiciones y espacios de tiempo en los que se lleva a cabo dicho proceso didáctico. Dentro de este marco general, la investigación incluye los dos estudios empíricos siguientes:

- Estudios cualitativos de carácter interpretativo sobre la naturaleza, desarrollo y resultados de una modificación curricular introducida en el proceso didáctico ordinario del tema *Integrales de Línea*, consistente en una metodología de enseñanza mixta con la utilización de DERIVE como recurso didáctico.

- Estudios comparativos, tanto desde el punto de vista cuantitativo como cualitativo, entre las características, consecuencias y resultados de la aplicación de la modificación curricular mencionada y las del tratamiento didáctico usual.

Para la realización de los mismos, tal y como se recoge en la sección 3.6.6 y en el resto del capítulo 3 a propósito de las explicaciones sobre los elementos del diseño y otras consideraciones metodológicas, se aplican dos tratamientos didácticos (a los que llamamos control y experimental) y se recoge información de múltiples fuentes y mediante la aplicación de diversos instrumentos sobre el desarrollo de ambos tratamientos y sus resultados. Una información que depende estrechamente del problema de investigación, de los propósitos del estudio y, sobre todo, de los procedimientos para obtenerla. La discusión se centra entonces en los instrumentos más adecuados, su naturaleza y características, su finalidad, que como se recordará consiste en obtener información del fenómeno en estudio y disponer de diferentes vías de evaluación y análisis de todo el proceso de investigación, y en su construcción, lo que constituye el contenido fundamental del presente capítulo.

Se exponen aquí, por tanto, los distintos instrumentos de recogida y análisis de datos que ya se indicaron en el capítulo anterior y que se recogen nuevamente en la tabla 4.1, en la que se incluye la aplicación a los grupos y el tipo de información que aportan. En la figura 3.1 del capítulo 3, a la que nos remitimos, se completa dicha información mediante la descripción de la situación de cada instrumento dentro del proceso general de la investigación y de su relación con la metodología establecida.

	Grupos		**Tipo de información**	
	Control	**Experimental**	**Cuantitativa**	**Cualitativa**
Prueba de Nivel	Sí	Sí	Sí	No
Ficheros de DERIVE	No	Sí	Sí	Sí
Prueba de Evaluación	Sí	Sí	Sí	No
Observadores	Sí	Sí	No	Sí
Encuesta	Sí	Sí	Sí	Sí
Entrevistas	No	Sí	No	Sí

Tabla 4.1: Instrumentos de recogida de datos y algunas características de su utilización en la investigación.

En las sucesivas secciones del capítulo se presentan cada uno de los instrumentos mencionados, indicando su finalidad, características, estructura, formato y contenido así como los criterios para analizar los datos que con ellos se obtengan.

Para finalizar el capítulo se enumeran los distintos tipos de estudios estadísticos elementales que se realizarán para el análisis descriptivo y comparativo de los resultados obtenidos así como de los principales efectos de los dos tratamientos didácticos (control y experimental) sometidos a prueba.

4.2. Prueba de nivel

De acuerdo con lo establecido en la sección 3.6.4, la aplicación de los tratamientos didácticos y el análisis de sus efectos, requiere, por diversos motivos que se expondrán en los apartados que siguen, de información previa sobre los conocimientos y destrezas de los alumnos de los dos grupos en estudio. Esta información se recoge mediante un instrumento al que hemos denominado *prueba de nivel,* consistente en una prueba objetiva sobre conocimientos y destrezas matemáticas relacionadas con el contenido del estudio realizado y de aplicación a los dos grupos de alumnos (control y experimental). Pasemos a analizar en los apartados que siguen los aspectos fundamentales de este instrumento.

4.2.1. Finalidad

Nuestro interés radica en comprobar si una innovación curricular concreta produce mejoras, para lo que necesitamos encontrar evidencias en tal sentido. Para ello es importante comprobar que todos los alumnos participantes inician la experiencia con niveles similares de conocimiento, capacidades y destrezas matemáticas relacionadas con el problema de investigación y con la innovación introducida. Con la prueba de nivel se pretende, por tanto, obtener información fiable sobre las posibles diferencias iniciales de nivel entre los grupos control y experimental y tenerlas en cuenta, en su caso, en análisis posteriores. Esta prueba tiene, por tanto, una triple finalidad:

1. Comprobar, al inicio del estudio, la situación de los conocimientos y destrezas de todos los alumnos participantes sobre contenidos matemáticos previos directamente relacionados con los que van a constituir el núcleo de los tratamientos didácticos que van a ser objetos centrales de la investigación.

2. Servir de pretest, aunque sin llegar a cumplir las condiciones estrictas de un instrumento de tal tipo[1], para asegurar la homogeneidad y equivalencia de

[1] La relación entre la prueba de nivel y la prueba de evaluación no es tan estrecha en este

ambas muestras y asignar los posibles efectos a los tratamientos y no a otras circunstancias derivadas de desigualdades en comprensión y/o dominio de conceptos y procedimientos matemáticos elementales previos.

3. Completar otras informaciones (calificaciones en Selectividad, calificaciones en otras asignaturas de Matemáticas de la carrera, calificaciones en Bachillerato, etc.) que ya sabemos que avalan la suposición de que los alumnos de los dos grupos (control y experimental) proceden de la misma población a efectos de las variables fundamentales del estudio.

En definitiva, la comparación de las calificaciones de esta prueba y de la prueba de evaluación (prueba posterior a los tratamientos didácticos que se describe en la sección 4.5) en los dos grupos en estudio, nos permitirá disponer de más información sobre el aspecto central de la investigación mencionado al comienzo de este apartado.

4.2.2. Características

Para esta prueba previa se ha elegido el tema 0 *"Funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales"* de la misma asignatura sobre la que se ha llevado a cabo la investigación. Los contenidos del tema, cuyo desarrollo completo se incluye en el apéndice A, son los siguientes:

> Función Gamma: definición y propiedades. Función Beta: definición y propiedades. Resolución de integrales trigonométricas mediante las funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales: definición y notación. Definición de operador diferencial. Gradiente de un campo escalar. Vector normal a una superficie. Divergencia de un campo vectorial. Rotacional de un campo vectorial. Laplaciano de un campo escalar.

estudio como es habitual en los diseños cuasiexperimentales. No obstante, los conceptos y procedimientos involucrados en ambas pruebas son similares, afines y categorizables bajo el mismo epígrafe: "conocimientos matemáticos elementales de Análisis Vectorial". Es por ello que, aunque centremos la atención en la segunda parte del diseño (tratamientos didácticos–prueba de evaluación), vamos a considerar los resultados de esta prueba como una referencia válida para efectuar la comparación de resultados, tal y como se haría en un diseño pretest–postest con grupo de control, en este caso equivalente si los resultados apuntaran en tal sentido.

La elección de este tema se ha realizado por los siguientes motivos:

1. La prueba de nivel debe ser, en lo posible, independiente de los conocimientos que el alumno haya adquirido en las asignaturas de Matemáticas cursadas previamente[2], lo que se logra, en buena medida, tomando una parte previa de la propia asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales*.

2. La materia del tema es impartida por el mismo profesor en ambos grupos, se desarrolla siguiendo exactamente el mismo procedimiento y se realizan las mismas actividades y ejercicios en ambos casos.

3. El tema 0 es, básicamente, un tema de "definiciones" y aplicaciones puramente mecánicas, por lo que no es excesivamente complejo y reúne condiciones similares, en este sentido, a las del tema *Integrales de Línea* sobre el que se realiza el estudio experimental.

4. El tema requiere pocos conocimientos previos y éstos, además, son elementales, por lo que podemos asegurar que la influencia de las posibles diferencias en tal sentido sobre los resultados de la prueba va a ser prácticamente nula.

5. Las destrezas, competencias y capacidades cognitivas necesarias para el dominio de este tema lo deben ser también para el dominio del tema *Integrales de Línea*, puesto que son conocimientos del mismo tipo y las tareas son similares en ambos temas.

Para la construcción de la prueba de nivel se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones y propiedades:

1. Debe ser una prueba objetiva para medir el rendimiento alcanzado al finalizar el tema, es decir, ha de medir el dominio del tema a través de las respuestas a una batería de ejercicios representativos de los conocimientos tratados.

[2]No nos interesa evaluar la formación matemática previa de los alumnos ni su historia didáctica en esta materia, aunque siempre va a existir una cierta influencia de dichos factores en la investigación y en sus resultados que se tratará de anular/controlar mediante la adopción de medidas oportunas.

2. Ha de constar de ejercicios de ejecución directa (en cuya resolución sólo interviene la aplicación inmediata de los conceptos tratados en el tema –ejercicios–), es decir, estar orientada a la ejecución de algoritmos y procedimientos.

3. Debe recoger todas y cada una de las partes y conocimientos básicos del tema.

4. Debe ser común a los dos grupos.

5. Se ha de aplicar en la clase inmediatamente siguiente a la finalización del tema y en ambos grupos a la vez.

6. Se ha de aplicar sin previo aviso para evitar influencias no deseadas (de las expectativas, los estilos ante la preparación de exámenes, el estrés, la actitud ante la prueba, etc.).

7. Los criterios de análisis de datos deben ser comunes para ambos grupos.

4.2.3. Estructura, formato y contenido

A partir de las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta la programación del tema 0 (apéndice A) se ha construido la prueba que figura a continuación y que consta de 10 ejercicios agrupados en 4 apartados que organizan el contenido de la misma. El apartado 1 consta de 5 ejercicios, indicados de la (a) a la (e), mientras que en los apartados 2 y 3 se proponen dos ejercicios en cada uno de ellos. Se puede comprobar fácilmente que tanto los ejercicios como la prueba en general se ajustan a las condiciones establecidas y son representativos del contenido procedimental del tema.

D.N.I.:

Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales. I.T.T.

Prueba de nivel del tema 0

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\ \mathrm{d}t$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t\ \cos^3 t\ \mathrm{d}t$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t\ \cos^4 t\ \mathrm{d}t$

   (d) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \cos^4 t\ \mathrm{d}t$

   (e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t\ \mathrm{d}t$

2. Dado $\vec{F} = x^2y^2z^2\,\vec{\imath} + \left(z^2x^2 - y\right)\,\vec{\jmath} + \left(x^2 + y\right)\,\vec{k}$, calcular $\operatorname{rot}(\vec{F})$ y $\operatorname{div}(\vec{F})$.

3. Dado $f = 2x^2y + 3xyz^3$, calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.

4. Dada la superficie $2x^2y + 3xyz^3 = 5$, calcular un vector normal a dicha superficie en el punto $(1, 1, 1)$.

Pasemos a analizar brevemente los apartados y ejercicios de que consta la prueba:

- Para la resolución de las integrales trigonométricas hay que hacer uso de las funciones Gamma y Beta, por lo que los cinco ejercicios del apartado 1 se dirigen directamente al planteamiento y resolución de integrales trigonométricas y, en definitiva, a la aplicación de las definiciones y propiedades de las funciones mencionadas.

- Con los ejercicios de los apartados 2 y 3 se pretende obtener información sobre el grado de asimilación y destreza alcanzada en la parte del tema dedicada a los operadores diferenciales. Concretamente, el apartado 2 se basa en las definiciones y procedimientos de cálculo de los operadores rotacional y divergencia aplicados a un campo vectorial, mientras que los ejercicios del apartado 3 tratan sobre las definiciones y procedimientos de cálculo de los operadores gradiente y laplaciano aplicados a un campo escalar.

- Finalmente, el ejercicio 4 se dedica al concepto de vector normal a una superficie así como a su procedimiento de cálculo.

4.2.4. Validez y pertinencia

La credibilidad, solidez y alcance de los resultados de una investigación están supeditados, en buena medida, a la validez y fiabilidad de sus instrumentos. Es por ello que hemos considerado conveniente dedicar un apartado del análisis de cada instrumento a la discusión sobre su validez, fiabilidad y pertinencia, en su caso.

En lo que sigue adoptamos las siguientes aproximaciones para los términos *validez, fiabilidad* y *pertinencia* de los instrumentos y datos[3]:

Validez: Eficacia para los propósitos establecidos; capacidad/bondad para producir los efectos deseados. En el caso de instrumentos se dice vulgarmente que "mide lo que se quiere medir".

Fiabilidad: Buen funcionamiento. Intrumentos/datos precisos y dignos de confianza.

Pertinencia: Necesidad y oportunidad para los propósitos de la investigación. Grado de ajuste a los propósitos del estudio y a su desarrollo.

En el caso que estamos considerando, al no existir una prueba específica validada en anteriores estudios, hemos procedido a su construcción "ad hoc" para contribuir a la consecución de los objetivos de la investigación. Pero no es nuestro interés realizar un estudio riguroso sobre la validez y fiabilidad de este instrumento, por lo que aceptaremos en lo que sigue la existencia de indicios y argumentos plausibles, aunque sean débiles, para afirmar que el instrumento presenta dichas características en un grado aceptable "para los propósitos del estudio". No olvidemos que la finalidad principal de la prueba es, únicamente, aportar información sobre la homogeneidad de las muestras al inicio del estudio.

[3]Significados elaborados a partir de [Real Academia Española, 2001] y [Bisquerra, 1989], (páginas 91–92).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, la prueba que se ha presentado en el apartado 4.2.3 creemos que presenta una *validez de constructo* por el propio proceso mencionado en 4.2.2 y 4.2.3. Asimismo, podemos asegurar una cierta *validez externa* al haber sido "consensuada" y sometida a discusión en el seno de un grupo de expertos (profesores de la asignatura y del propio Departamento[4] responsable de la misma). Por último, no podemos asegurar *validez concurrente* por no disponer de datos suficientes de aplicaciones anteriores de esta prueba o de pruebas similares en las mismas o en parecidas condiciones en las que se ha realizado el estudio.

En definitiva, a las consideraciones realizadas en los párrafos anteriores, se pueden añadir las siguientes conclusiones:

1. La prueba de nivel es representativa de los contenidos fundamentales del tema *"Funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales"* desde el punto de vista de los procedimientos y técnicas algorítmicas relacionadas con los conceptos correspondientes.

2. Una resolución aceptable de la prueba requiere de un dominio de los conocimientos también aceptable según los criterios establecidos y utilizados prácticamente en el desarrollo curricular oficial de la asignatura.

3. La prueba de nivel es válida para comparar el grado de asimilación y dominio de los contenidos alcanzados por los alumnos de ambos grupos, es decir, mide lo que se quiere medir en la investigación: nivel de dominio instrumental del tema 0 alcanzado mediante la mera asistencia a clase, con las explicaciones de pizarra usuales y con los mismos criterios de evaluación empleados en la asignatura.

4. Los resultados de la prueba se presumen fiables salvo influencias no deseadas que se procurarán identificar y controlar. La confianza está muy relacionada, en este caso, con la validez de constructo y con las condiciones de aplicación del instrumento.

Por último, podemos concluir que la prueba de nivel es pertinente para el estudio y que constituye un instrumento muy adecuado para los fines perseguidos,

[4]Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga.

lo que no excluye, evidentemente, que se hubieran conseguido resultados más fiables con otro u otros instrumentos así como en otras condiciones menos naturales o de laboratorio en las que controlar y manipular el fenómeno en estudio.

4.2.5. Análisis de datos

Para realizar un análisis fiable de los datos obtenidos con la prueba de nivel es necesario detallar los criterios de valoración de la misma, lo que hacemos en los siguientes términos[5]:

1. 0 puntos si el ejercicio no se resuelve o está mal planteado.
2. 0.5 puntos si el ejercicio está bien planteado pero no se resuelve o se resuelve erróneamente.
3. 1 punto si el ejercicio está bien planteado y bien resuelto.

De esta manera, teniendo en cuenta que la prueba consta de 10 ejercicios, la calificación máxima que se puede obtener será de 10 puntos. La solución correcta, completa y detallada de esta prueba de nivel se encuentra en el apéndice F, mientras que en los anexos I y IV se encuentran las respuestas que han dado los alumnos de las muestras en estudio.

4.3. Observación de los tratamientos didácticos

La parte central de la investigación consiste, como se recordará, en la aplicación de un tratamiento didáctico "experimental" para el desarrollo del tema *Integrales de Línea* en un grupo natural, al que llamamos grupo experimental, basado en una metodología mixta que combina clases de pizarra con clases de elaboración de comandos con Derive en el laboratorio. Paralelamente, se aplica un tratamiento didáctico alternativo en otro grupo natural, llamado control, consistente en el desarrollo del mismo tema, en el mismo tiempo y siguiendo la metodología usual. El propósito central del estudio, como se recordará, es comprobar que el método de enseñanza experimental incide positivamente en el rendimiento, la actitud y la motivación de los alumnos en mayor medida de lo que hace el método control.

[5]Criterios usuales que se vienen empleando en la evaluación de la asignatura de acuerdo con la programación docente para el curso 2002–2003.

Si en el caso de la prueba de nivel era necesario un instrumento que sacara a la luz información oculta para constatar una situación de partida requerida por la investigación, en este caso se necesita un instrumento de control que deje constancia de las condiciones del desarrollo experimental y del cumplimiento de los requisitos y cautelas (mismo profesor, mismos contenidos, mismos ejercicios, misma duración, etc.) que van a certificar la validez y fiabilidad de los datos y la bondad de las conclusiones. Que duda cabe de que una buena parte de este control va dirigido al contenido común de ambas metodologías didácticas, es decir, a comprobar, entre otros aspectos, si se ha trabajado exactamente de la misma manera en ambos grupos, si el profesor ha hecho o no especial hincapié en alguno de ellos o si se han desarrollado exactamente los mismos contenidos.

En esta sección se describen los tipos, los contenidos, los fines y otros aspectos de las observaciones sobre el desarrollo del estudio y de la elaboración de los informes correspondientes basados en protocolos preparados previamente. Se trata de una parte importante de la investigación debido a la naturaleza irrepetible del fenómeno y en la que los observadores son los verdaderos instrumentos de recogida de datos.

4.3.1. Finalidad de las observaciones

La observación es uno de los métodos básicos para descubrir hipótesis, identificar fenómenos relevantes, sugerir variables causantes de la acción, registrar conductas y abordar áreas de estudios que no pueden ser tratadas por otros medios. Asimismo, es un elemento fundamental en la modalidad de *investigación etnográfica educativa,* donde tiene como objetivo principal aportar valiosos datos descriptivos de los escenarios educativos, las actividades y creencias de los participantes y describir las diversas perspectivas y actividades de profesores y alumnos con el fin de obtener explicaciones para descubrir patrones de comportamiento ([Latorre y otros, 1996], página 226).

Estamos, por tanto, ante un instrumento de recogida de datos especial que participa de los principales rasgos de la etnografía ([Latorre y otros, 1996], página 227), es decir:

- Su *carácter holista:* describe los fenómenos de manera global en sus contextos naturales, aceptando el escenario complejo que encuentra y la totalidad como elementos básicos.

- Su *condición naturalista:* el etnógrafo estudia las personas en su hábitat natural. Observa, escucha, habla, anota las historias de vida y evita las formas controladas, lo que no impide utilizar un protocolo-guía de asuntos sobre los que centrar especialmente la atención.

- Usa la *vía inductiva:* se apoya en la evidencia para sus concepciones y teorías y en la empatía y habilidad general del investigador para estudiar otras culturas.

- Su *carácter fenomenológico:* los significados se estudian desde el punto de vista de los propios agentes sociales participantes.

- Los *datos aparecen contextualizados* y las observaciones se sitúan dentro de una perspectiva más amplia.

- *Libre de juicios de valor:* el etnógrafo evita emitir juicios de valor sobre las observaciones.

- Su *carácter reflexivo:* el investigador forma parte del mundo que estudia y es afectado por él. La influencia mutua y dinámica entre el etnógrafo y el campo de investigación es referida como reflexividad.

En la investigación que presentamos pretendemos mantener, hasta donde sea posible, las características mencionadas mediante observaciones planificadas siguiendo un guión básico. Dichos protocolos tratarán, por un lado, de aportar información sobre las conjeturas 1 y 3, que, como se recordará, establecen:

***Conjetura 1*:** Es posible implementar, de acuerdo con el marco teórico establecido, con las mínimas modificaciones y en las condiciones usuales, una metodología didáctica mixta compuesta de clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática basadas en la realización de comandos con DERIVE para la materia *Integrales de Línea* de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de los estudios de *Ingeniería*.

***Conjetura 3*:** La metodología didáctica mixta facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje y es compatible con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios de la asignatura.

Por otro lado, estos protocolos también trataran de obtener información fiable sobre la equivalencia de la parte común de los tratamientos didácticos empleados en los grupos control y experimental así como sobre aquellos aspectos que pudieran ejercer influencias extrañas en cualquier sentido a lo largo del estudio experimental.

La información obtenida permitirá asegurar la *plausibilidad* de las conjeturas anteriores y contribuirá a reforzar la bondad del resto de conjeturas, eliminando o controlando explicaciones alternativas e influencias no deseadas y proporcionando información sobre el aspecto central del estudio. Aquí, será particularmente importante que los informes de observación sirvan para descartar otras causas para la mejora producida con el tratamiento experimental que no sean las debidas exclusivamente a las influencias de las modificaciones introducidas o a las diferencias entre los dos tratamientos control y experimental.

4.3.2. Estrategias y mecanismos de observación

La observación del desarrollo del estudio empírico constituye un aspecto relevante en nuestra investigación, entre otras razones por la propia naturaleza de la misma, en la que se quiere observar en su totalidad un fenómeno complejo en condiciones naturales y con enormes restricciones, porque la observación se efectúa mediante una colaboración permanente entre un grupo de profesores de la asignatura, y porque se trata de uno de los pocos métodos de recogida de información enteramente compatible con el desarrollo de los tratamientos didácticos. Al mismo tiempo, dicha observación será tanto más rica, fiable y completa cuanto más puntos de vista diferentes intervengan y cuanto mayor sea la imparcialidad de los juicios emitidos y la extensión y profundidad de los mismos. En consecuencia, decidimos que nuestra observación se va a llevar a cabo mediante varios observadores y sobre la base de un guión o protocolo de observación común y preparado expresamente para que se cumplan los requisitos anteriores.

En relación con la primera de las decisiones, se van a utilizar los siguientes observadores, suficientemente cualificados para llevar a cabo con garantías el trabajo encomendado:

- *Un observador participante.* La propia profesora que imparte las clases y que es, al mismo tiempo, la investigadora principal y coordinadora del grupo investigador. Sus informes serán contrastados en todo momento e interpretados con las cautelas oportunas.

- *Un observador externo.* Un profesor ajeno a la asignatura en la que se desarrolla la investigación y del mismo departamento que la investigadora principal. No obstante dispondrá del protocolo de observación y de la información estrictamente necesaria para realizar la misma.

- *Dos observadores "internos"*[6]. Dos profesores que imparten la misma asignatura. Es importante señalar que esta figura de observador no participa ni tampoco es ajeno al estudio. Se trata de una figura intermedia que tiene que ver con la colaboración y con el equipo investigador, que no participa directamente en el hecho en sí, como el observador participante, pero que tampoco es independiente, como ocurre con el observador externo, ya que colabora en el diseño y desarrollo de la investigación y está al corriente de los aspectos fundamentales de la misma. Este observador y su informe son especialmente relevantes porque no sólo servirá para confirmar si los tratamientos empleados en ambos grupos son equivalentes, sino que se podrá constatar si los tratamientos han ido en la misma línea que en el resto de los grupos, e incluso en el mismo sentido que los realizados en años anteriores.

Por otra parte, para poder recoger, sistematizar y organizar los resultados de las observaciones se hace necesaria la elaboración de un protocolo de observación que recoja los aspectos en los que nos interesa centrar la atención. Con ello se consigue un triple objetivo:

1. Preparar la observación.

2. Guiar el desarrollo de la misma.

3. Proporcionar un esquema para la elaboración del informe.

Por lo tanto la utilidad es múltiple, puesto que el protocolo permite, entre otros aspectos:

1. Unificar criterios.

[6]Terminología no usual en el campo de la metodología etnográfica pero que nosotros introducimos para diferenciar entre los tres tipos de observación utilizados.

2. Comunicar fielmente lo que se ha observado y realizar así un informe de investigación más fiable.

3. Reflejar el propósito del estudio.

4. Validar los resultados obtenidos en la investigación.

5. Constatar la fidelidad de la parte empírica a los supuestos y fines establecidos.

6. Controlar el desarrollo del estudio experimental.

7. Evitar sesgos producidos por la subjetividad y la existencia de distintos puntos de vista.

4.3.3. Estructura, formato y contenido de los protocolos de observación

La elección de un protocolo de observación común a ambos grupos (control y experimental) obedece al deseo de comparar los tratamientos y sus efectos teniendo en cuenta las mismas categorías, criterios y contenidos y en los mismos sentidos. Por otra parte, vamos a disponer de seis informes sobre el desarrollo de los tratamientos didácticos en los dos grupos: dos del observador participante, dos del observador externo y dos de los observadores internos, resultantes, estos últimos, de la discusión en torno a las observaciones individuales y del acuerdo entre ambos observadores para la elaboración de un único informe para cada tratamiento didáctico.

El protocolo de observación se estructura en bloques o categorías de observación y en cuestiones puntuales a observar. Estas cuestiones puntuales deben tomarse como guía para responder a cada bloque en su conjunto, es decir, se han de tener en cuenta pero sin que sea obligado hacer referencia explícita por separado a cada una de ellas. Se trata con ello de permitir una cierta libertad del observador para incidir en aquellas cuestiones que le parezcan más convenientes u obviar en su caso otras en base a su irrelevancia o falta de interés para el estudio. Igualmente, las categorías o bloques son susceptibles de ser agrupados, a juicio del observador, en el momento de realizar los informes.

Los aspectos o cuestiones a observar se estructuran, para los observadores internos y externo, en los siguientes seis bloques o categorías:

1. *Tratamiento y metodología.* En este bloque se pretende prestar atención a cuestiones como las siguientes: grado de adecuación al diseño previsto del tratamiento didáctico desarrollado realmente, viabilidad práctica del método y dificultades de su implementación, tipo de metodología utilizada y desviaciones con respecto al modelo previsto, etc.

2. *Profesor.* Aquí se requiere información sobre los principales hechos observados en torno a las actuaciones del profesor que imparte las clases. En particular se ha de observar la adecuación y fidelidad de dichas actuaciones al proyecto metodológico así como otros aspectos que pudieran incidir en los resultados, tales como: comportamiento, participación, actitud o interés.

3. *Alumnos.* En este bloque se pretende recoger información sobre la participación, las intervenciones, la actitud o la motivación de los alumnos, entre otros aspectos.

4. *Interacciones profesor-alumnos.* En este apartado se pretende recoger información sobre las relaciones entre el profesor y los alumnos, con indicación de sus tipos, duraciones, contenidos, intensidades, etc.

5. *Recursos y condiciones materiales.* Se trata de observar y registrar aquí todos los hechos, situaciones o aspectos relacionados con los distintos recursos y materiales empleados en el desarrollo del estudio experimental, haciendo hincapié en todo aquello que incida en la idoneidad de los recursos empleados en relación con el tratamiento.

6. *Incidencias especiales.* En este bloque se incluirá la información sobre cualquier otro aspecto observado y no recogido en los bloques anteriores.

En cada uno de los seis bloques descritos se han especificado algunas de las cuestiones puntuales a tener en cuenta durante la observación. El protocolo completo para los observadores internos y externo es el que se expone a continuación:

Tratamiento y metodología

1. Fidelidad/grado de adecuación al diseño:
   - general
   - contenidos

- fines
- metodología

2. Contenidos. Insistencia o dedicación a los diferentes contenidos: ¿a unos más que a otros?; ¿en qué sentido?
3. Desacuerdos y motivos en su caso: desviaciones y motivos observables.
4. Viabilidad/utilidad práctica del tratamiento: ¿ha sido posible o no?, inconvenientes observados en su caso.
5. Tiempo: ¿se ajusta el desarrollo al tiempo previsto?; ¿modificaciones necesarias en tiempo?
6. Metodología: tipo de metodología observada.
7. Disfunciones en su caso.

Profesor

1. Comportamiento y papel durante el desarrollo.
2. Participación. Tipo de participación.
3. Actitud.
4. Grado de interés en sus actuaciones.
5. Calidad y claridad de las intervenciones.
6. Atención a preguntas.
7. Tiempo de intervención.

Alumnos

1. Actividad central durante el desarrollo del tratamiento (¿qué hacen?)
2. Participación y tipo de participación.
3. Preguntas que realizan.
4. Atención/asimilación: ¿atienden a las explicaciones?; ¿parece que entienden las explicaciones?; ¿por qué se puede deducir esto o en que se basan las afirmaciones realizadas?
5. Interacciones entre los alumnos: hablan, discuten, nada, etc.
6. Actitud general: positiva, neutra, desgana, negativa, etc.
7. Tiempo de intervención.

Interacciones profesor-alumnos

1. ¿Individual y/o de grupo?
2. Frecuencia: rara vez, a menudo, constantemente, nunca.
3. Tipo:

- Ninguna interacción: monólogo del profesor (el profesor como protagonista absoluto).
- Situaciones intermedias.
- El alumno como protagonista absoluto.

4. Duración de las intervenciones.

Observación: Este bloque se puede responder a la vez que se contestan los bloques *Profesor* y *Alumnos*.

Recursos y condiciones materiales

1. Material didáctico disponible/utilizado: pizarra, tiza, ordenador, cañón de proyección, transparencias, etc.
2. Idoneidad de los recursos empleados en relación con el tratamiento.
3. Suficiencia/insuficiencia.
4. Limitaciones observadas.
5. Características del aula donde se desarrolla el tratamiento: tamaño, grado de ocupación (asistencia), nivel de visión y de acústica, ruidos, etc.
6. Inconvenientes materiales observados.
7. Adecuación al desarrollo de las explicaciones.
8. Otras observaciones.

Incidencias especiales

1. Retrasos dignos de mención, puntualidad.
2. Dedicación fuera de lo normal a algo: motivo. Ausencia de dedicación a algún aspecto previamente considerado a tener en cuenta.
3. Disfunciones o inconvenientes producidos. Posibles motivos observados.
4. Imprevistos observados.
5. Otras incidencias observadas (especificar).

El protocolo del observador participante es idéntico al que se ha expuesto con excepción de las dos modificaciones siguientes:

1. Se elimina, por razones obvias, el segundo bloque relativo al profesor que imparte las clases.
2. En el último bloque se añade un ítem para recoger información sobre lo ocurrido en las horas de tutorías.

4.3.4. Análisis de datos de los informes de observación

La información recogida será analizada cualitativamente para comprobar el grado de fidelidad de todo el proceso a lo teóricamente previsto y para detectar la existencia de parcialidades e influencias no deseadas. En concreto, el análisis de los informes debe dar cuenta de los siguientes aspectos del problema de investigación:

- ¿Se ha trabajado exactamente igual en ambos grupos?; ¿ha habido diferencias?; ¿en qué aspectos?
- ¿El profesor no ha hecho especial hincapié en ninguno de los dos grupos?; ¿ha tenido algún comportamiento o ha realizado alguna actuación que pudiera haber favorecido más a un grupo que otro?
- ¿Se han desarrollado exactamente los mismos contenidos en los dos grupos?
- ¿Se ha ajustado el desarrollo de la experiencia al diseño realizado?
- Con el desarrollo de la metodología experimental: ¿han aumentando las interacciones entre alumnos?; ¿y entre profesor y alumno?; ¿se observan diferencias en la actitud de los alumnos hacia la asignatura?
- ¿Se observan indicios que hagan pensar que el tratamiento experimental mejora en algunos aspectos al tratamiento control?; ¿cuáles?
- ¿Ha sido posible implementar correctamente la metodología mixta en el desarrollo del tema?; ¿ha habido diferencias entre lo previsto y diseñado y lo realizado realmente?; ¿cuáles han sido dichas diferencias?

A pesar de la relevancia de esta información aislada, su verdadero valor se hará patente cuando sea relacionada y confrontada con los datos correspondientes procedentes de otros instrumentos de recogida de datos.

4.4. Ficheros de Derive

Como se recoge en la sección 3.6.4, la última fase de la metodología didáctica en el grupo experimental se desarrolla en el laboratorio con ayuda del programa Derive. Todo lo que se realice durante el transcurso de la misma quedará grabado en ficheros individuales que hemos denominado *ficheros de* DERIVE, un instrumento adicional de recogida de datos que nos va a proporcionar información útil sobre todo lo realizado en la fase mencionada. En los apartados que siguen nos disponemos a describir los aspectos fundamentales de este instrumento así como la forma en que se analizará la información que proporcionen.

4.4.1. Finalidad

Con los ficheros de DERIVE se pretende obtener información fiel sobre las interacciones producidas en cada caso entre el alumno y el ordenador durante el periodo de realización de comandos con DERIVE. El análisis de dichas interacciones, junto a los resultados de la prueba final de evaluación, proporcionará información completa sobre el grado de asimilación de los contenidos y algunas características del proceso de enseñanza-aprendizaje en el grupo experimental. En particular, se podrán completar los datos cuantitativos de la mencionada prueba con datos cualitativos acerca del proceso seguido para alcanzar el nivel de rendimiento medido por dicha prueba.

Es evidente que la información de este tipo es fundamental para el núcleo de la investigación, ya que con ella se podrá apoyar y matizar la *plausibilidad* de todas las conjeturas descritas en la sección 3.3. No hay más que tener en cuenta que, entre otras informaciones, los ficheros de DERIVE aportarán datos sobre:

- Las estrategias de resolución de los distintos ejercicios.
- El modo de utilización de los contenidos desarrollados en el tema para la resolución de dichos ejercicios, lo que está estrechamente relacionado con la comprensión de los conocimientos en el sentido establecido en la sección 3.6.5 del capítulo anterior.
- Las modificaciones que se producen en el proceso de aprendizaje durante la realización de las tareas, lo que es posible hacer si no se alteran los contenidos ni se eliminan los fallos o los intentos duplicados.
- La potencialidad innovadora y la influencia positiva del método didáctico empleado.
- La posibilidad de la implementación práctica y generalizada de la metodología didáctica mixta objeto de la investigación.

- El grado de dificultad de la elaboración de comandos con Derive.

De este modo, al igual que ocurre con la mayoría de los instrumentos de recogida de datos, la información obtenida vendrá a completar a la recogida por otros medios para configurar una imagen más nítida del problema de investigación y su solución.

4.4.2. Características, formato y contenido

Los ficheros de Derive se presentan en pantalla con el formato usual de las páginas generadas por el programa y conteniendo las tareas, los comandos y los resultados obtenidos en cada caso (ver figura 4.1). En la figura mencionada aparece, a título ilustrativo, el contenido de un fichero hipotético en el que se han realizado correctamente y al primer intento todas las tareas planteadas en clase.

Pero nos interesa que los contenidos de los ficheros reflejen lo que cada alumno realiza realmente en la clase de laboratorio de acuerdo con la programación de actividades prevista para esta fase de la metodología experimental (sección 3.6.6), por lo que se han preparado para que registren todas las interacciones producidas y se graben en cada momento las actuaciones del alumno y las respuestas dadas por el ordenador.

4.4.3. Pertinencia e importancia para el estudio

Teniendo en cuenta las consideraciones realizadas hasta ahora sostenemos que los ficheros de Derive constituyen un instrumento pertinente para el estudio y muy adecuado para los fines perseguidos, afirmaciones que vienen avaladas, además, por los siguientes argumentos:

Una de las principales ideas que sostiene nuestro trabajo es que la realización de comandos con Derive *obliga* al alumno a desmenuzar los conceptos y procedimientos y, consecuentemente, le sirve de herramienta en el proceso de aprendizaje. Al mismo tiempo la retroalimentación que se produce en la interacción alumno-ordenador permite la autocorrección permanente como elemento regulador de todo el proceso. Los ficheros van a reflejar, por tanto, las peculiaridades de este doble juego de "aprendizaje-evaluación" con Derive, lo que supone, sin duda, una información interesante y necesaria para apoyar la plausibilidad de las conjeturas establecidas. Tenemos aquí, por tanto, información esencial sobre

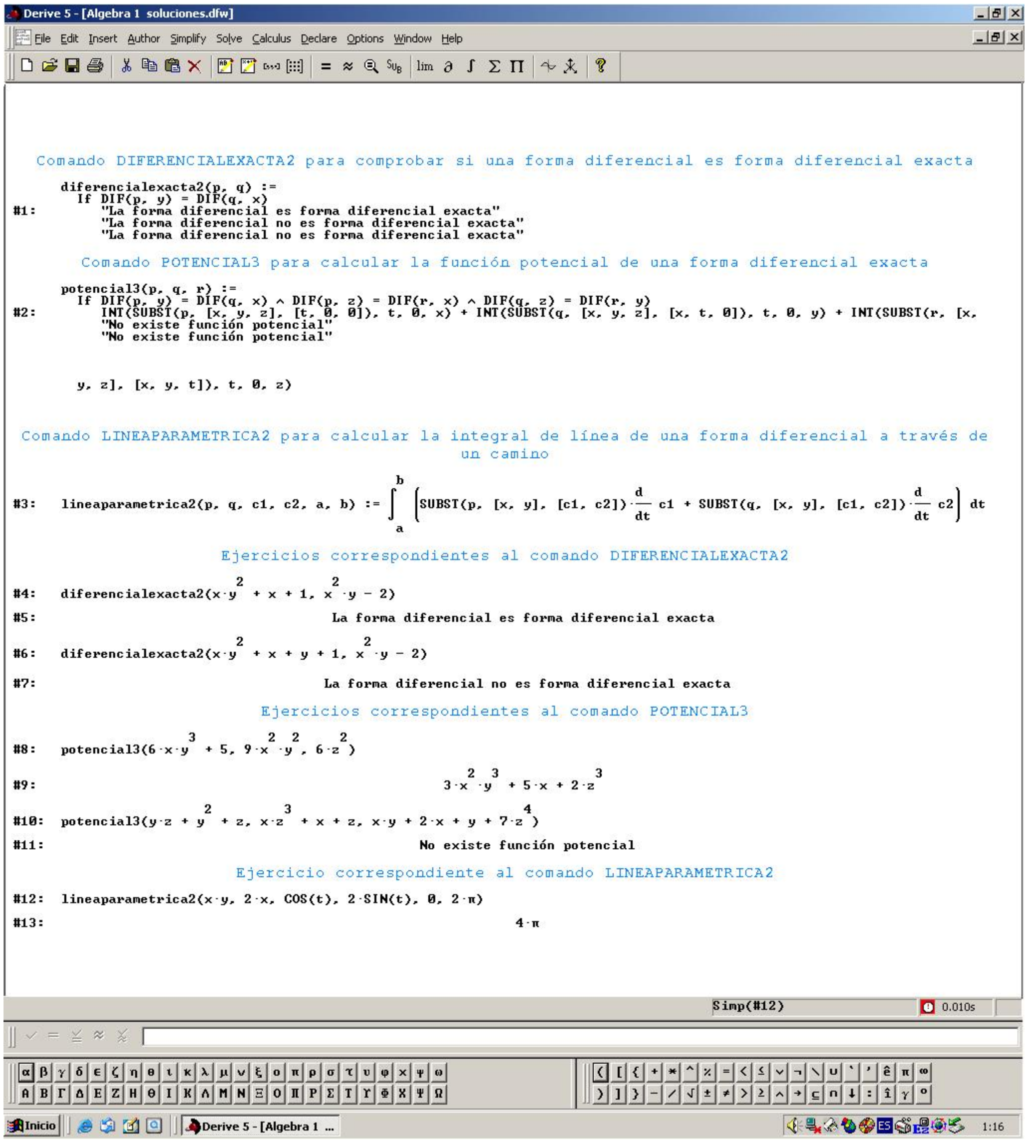


Figura 4.1: Solución correcta de las tareas planteadas en el laboratorio.

el *funcionamiento* y el proceso, aunque quizás también sobre posibles explicaciones causales. Posteriormente, la prueba de evaluación dará información sobre los *resultados,* completándose así el conjunto de datos requerido por el estudio.

4.4.4. Análisis de datos

Para el análisis de los ficheros se elaborará una tabla que recoja toda la información, es decir, desde el grado de corrección en la realización de los ejercicios y comandos hasta los intentos fallidos, en su caso, y los errores cometidos. De esta manera se podrá valorar el grado de dificultad de los ejercicios o de la elaboración de los comandos.

Por otra parte, el análisis de datos será de tipo cualitativo, buscando información para la evaluación del grado de aprovechamiento de la clase de laboratorio así como para la confirmación o rechazo de la bondad de las conjeturas enunciadas sobre los distintos aspectos del problema de investigación. Junto a este análisis global, se estudiarán con más detalle, si se considerara relevante, algunos ficheros en función de las singularidades y regularidades encontradas y con el fin de extraer la información necesaria para los propósitos del estudio.

Los ficheros de Derive grabados en la clase de laboratorio se encuentran detallados en el anexo V.

4.5. Prueba de evaluación

De acuerdo con el planteamiento general establecido en la sección 3.6.4, la aplicación de las dos metodologías didácticas (experimental y control) para el desarrollo del tema *Integrales de Línea* culmina con una prueba de evaluación que describimos formalmente en este apartado. Como se verá a continuación, se trata de una prueba objetiva de rendimiento, común a los dos grupos, que hace las veces de postest para el estudio comparativo y que va a proporcionar información crucial sobre el núcleo de la investigación, es decir, sobre la eficacia del método didáctico experimental.

4.5.1. Finalidad

Con la prueba se pretende obtener información fiable sobre el rendimiento de los alumnos al finalizar los tratamientos didácticos. Lo hacemos así porque esperamos que dicho rendimiento sea diferente, en promedio, en los dos grupos estudiados. Así, si nuestras conjeturas son ciertas, las calificaciones de los alumnos del grupo experimental en la prueba que nos ocupa deberán superar con creces (diferencias significativas) a las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo control.

Que duda cabe de que disponer de información de este tipo es fundamental para decidir sobre la bondad de la conjetura cuarta, que señala que la metodología didáctica mixta mejora el dominio y el nivel de competencia de los alumnos sobre los contenidos del tema. De hecho, si las calificaciones del grupo experimental son significativamente mejores que las del grupo control, podemos asegurar la *plausibilidad* de la afirmación contenida en dicha conjetura, siempre que las calificaciones sean debidas al tratamiento experimental y no a otras causas. Por tanto, la prueba de evaluación va a proporcionar datos cuantitativos objetivos que se añaden a los datos cualitativos procedentes de los ficheros de Derive, de las observaciones, de las encuestas y las entrevistas, para asegurar o descartar la bondad de las conjeturas centrales del problema estudiado.

4.5.2. Construcción y características

La construcción de la prueba de evaluación se ha realizado de acuerdo con los siguientes criterios y condiciones:

1. Debe ser una prueba objetiva para medir/valorar el rendimiento alcanzado en el aprendizaje del tema y el grado de asimilación de los contenidos, tanto de las *categorías de contenido matemático* como de las de *comprensión del contenido* (ver sección 3.6.5).

2. Debe ser común a los dos grupos.

3. Se ha de realizar en la clase inmediatamente siguiente a la finalización del tema *Integrales de Línea* y de forma casi simultánea en ambos grupos.

4. Los criterios de análisis de datos deben ser comunes en ambos grupos.

5. Las preguntas son del tipo verdadero/falso, pero a su vez se exige una justificación en las respuestas. Se ha elegido este tipo de preguntas por ser el que mejor mide el grado de asimilación de los contenidos del tema.

6. Se combinan de forma adecuada cuestiones, ejercicios mecánicos y problemas.

7. Con las cuestiones y preguntas se deben cubrir todas y cada una de las partes del tema *Integrales de Línea*.

4.5.3. Estructura, formato y contenido

De acuerdo con lo establecido en los apartados anteriores, se ha configurado una prueba que consta de 16 preguntas del tipo verdadero/falso con justificación. Como se puede comprobar en la reproducción que se incluye a continuación, después de solicitar el D.N.I. y de indicar el nombre de la asignatura y de la prueba, se dan las orientaciones pertinentes para su realización y se relacionan seguidamente las 16 cuestiones y ejercicios que constituyen el contenido de la prueba.

D.N.I.:

Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales. I.T.T.

Prueba de evaluación del tema *Integrales de Línea*

Indique si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**. **Razone** siempre **la respuesta** y en **caso necesario indique cuál sería la respuesta correcta**.

1. El camino $\mathcal{C}$ dado por $\vec{\alpha} : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$ es un camino cerrado.

2. El camino $\mathcal{C}$ dado por $\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (\cos^3 t, \mathrm{sen}^3\, t)$ es un camino cerrado.

3. Sea $\mathcal{C}_1$ el camino dado por $\vec{\alpha}_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}_1(t) = (2t, 4t)$ y $\mathcal{C}_2$ el camino dado por $\vec{\alpha}_2 : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}_2(t) = (t, 2t)$. Entonces
$$\int_{\mathcal{C}_1} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}_2} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

4. La forma diferencial $\left(x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy - y^2\right)\,\mathrm{d}y$ es forma diferencial exacta.

5. Sea el campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (P,Q)$ con P y Q constantes. Entonces la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$ no depende del camino escogido $\mathcal{C}$ entre los puntos A y B.

6. Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ dos funciones tales que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Sea $U(x,y)$ una función potencial de la forma diferencial $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ con $U(1,1) = 7$ y $U(2,4) = 13$. Sea $\mathcal{C}$ una curva de origen el punto $(1,1)$ y extremo el punto $(2,4)$. Entonces se tiene que
$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -6$$

7. Al calcular las integrales de línea de una cierta forma diferencial a lo largo de 7 caminos distintos que unen dos puntos A y B se ha obtenido siempre el mismo resultado 48. Sea $\mathcal{C}$ otro camino que une los mismos puntos A y B. Entonces el resultado de la integral de línea de dicha forma diferencial a lo largo de $\mathcal{C}$ será 48.

8. Sea $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ una forma diferencial que no es forma diferencial exacta. Sea $\mathcal{C}$ un camino cerrado. Entonces $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \neq 0$.

9. Sea $\left(x + y^2 + 2\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + 3y^2\right)\,\mathrm{d}y$ una forma diferencial. Entonces un potencial de dicha forma diferencial viene dado por $\dfrac{x^2}{2} + xy^2 + 2x + xy^2 + y^3$.

10. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos caminos que unen dos puntos A y B. La integral de línea de una cierta forma diferencial a lo largo de $\mathcal{C}_1$ vale 32 y la integral de línea de la misma forma diferencial a lo largo de $\mathcal{C}_2$ vale 17. Entonces dicha forma diferencial no es forma diferencial exacta.

11. Sea $\mathcal{C}_1$ un camino que une dos puntos A y B. Sea $\mathcal{C}_2$ un camino que une dos puntos C y D (distintos de los anteriores). Sea $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ una forma diferencial que es forma diferencial exacta. Entonces
$$\int_{\mathcal{C}_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

12. Sea $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ una forma diferencial que es forma diferencial exacta. Sea $\mathcal{C}$ el camino $\vec{\alpha} : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Entonces la integral de línea de dicha forma diferencial sobre el camino $\mathcal{C}$ vale 0.

13. Sea $\mathcal{C}$ el camino dado por $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (t,t)$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 1.$$

14. Sea $\mathcal{C}$ el camino dado por $y = x^5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(2\pi x)$ tal que $x \in [0,1]$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 1$$

15. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el origen y radio 2. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}y = 0$$

16. $\oint_{\mathcal{C}} 3x^2 y\,\mathrm{d}x + \left(x^3 - 4y\right)\,\mathrm{d}y = 0$ siendo $\mathcal{C}$ la elipse de centro el origen y semiejes 2 y 3.

Desde un punto de vista general, la elección de los ejercicios de la prueba obedece a la finalidad de cubrir los contenidos conceptuales y procedimentales a evaluar de acuerdo con la justificación teórica detallada que se deduce de la programación completa del tema incluida en el apéndice B. Asimismo, nos remitimos a la programación docente de la asignatura para el curso 2002–2003 para una información complementaria sobre el marco más amplio del que forma parte el tema particular objeto de estudio.

Desde un enfoque más concreto, pasemos a analizar cada uno de los ejercicios por separado:

1. Se trata de una tarea sobre parametrización de caminos. El objetivo del

ejercicio es el de comprobar si el alumno es capaz de reconocer si un camino es o no cerrado. Se ha elegido la parametrización de una elipse para ver si el alumno únicamente tiene en cuenta la "forma" del camino o, por el contrario, tiene en cuenta, además, el punto inicial y final.

2. Al igual que el ejercicio anterior, nos encontramos aquí con un ejercicio de parametrización de caminos. El objetivo es el mismo que en el ejercicio 1. Sin embargo, se ha elegido en este caso la parametrización de un camino desconocido por el alumno para ver si se fija en el punto inicial y final.

3. Con este ejercicio se pretende comprobar si el alumno es capaz de reconocer las distintas parametrizaciones que puede tener un camino.

4. Este ejercicio trata sobre el concepto de forma diferencial exacta así como sobre el procedimiento para su comprobación.

5. Ejercicio similar al anterior aunque complementado con la resolución de integrales de línea de formas diferenciales exactas.

6. Ejercicio similar al anterior (forma diferencial exacta, comprobación de cuando una forma es forma diferencial exacta y resolución de integrales de línea de formas diferenciales exactas), con la variante de la utilización de la función potencial en la resolución de integrales de línea de formas diferenciales exactas.

7. Se trata de un ejercicio en el que intervienen los mismos contenidos del ejercicio 5 (forma diferencial exacta, comprobación de cuando una forma es forma diferencial exacta y resolución de integrales de línea de formas diferenciales exactas), si bien se ha modificado el enunciado y el tipo de pregunta.

8. Los contenidos involucrados en este ejercicio son los de camino e integral de línea de una forma diferencial que no es exacta. En este ejercicio se pretende comprobar si el alumno asume como válidas las generalizaciones no válidas de los teoremas desarrollados en clase.

9. Los contenidos tratados en este ejercicio son los de forma diferencial exacta y función potencial, incluidas las definiciones y los procedimientos de cálculo. Se pretende comprobar si el alumno aplica la definición o utiliza el procedimiento mecánico de cálculo, más largo y laborioso.

10. Este ejercicio contempla la no independencia del resultado de una integral de línea a lo largo de caminos diferentes para formas diferenciales que no son exactas.

11. Aquí aparecen los contenidos de forma diferencial exacta y de integral de línea de formas diferenciales exactas. Se trata de ver si el alumno domina el concepto de independencia del camino elegido y no generaliza erróneamente dicho concepto al caso de puntos de salida y de llegada distintos de los anteriores.

12. En este ejercicio aparece de nuevo el concepto de camino, el de forma diferencial exacta y el de integral de línea de formas diferenciales exactas.

13. Con este ejercicio pretendemos averiguar si el alumno es capaz de aplicar las distintas estrategias enseñadas para la resolución de integrales de línea.

14. Con este ejercicio pretendemos comprobar si el alumno es capaz de aplicar los resultados más importantes de los teoremas tratados en clase a partir del resultado del ejercicio anterior.

15. Aquí interviene el concepto de resolución de integrales de línea cuando se conoce la expresión analítica del camino.

16. En este ejercicio interviene el concepto de forma diferencial exacta y el procedimiento de comprobación correspondiente así como el concepto de camino y el cálculo de integrales de línea sobre formas diferenciales exactas.

4.5.4. Validez y pertinencia

Al no existir una prueba específica validada en anteriores estudios hemos procedido a su construcción “ad hoc” para contribuir a la consecución de los objetivos de la investigación. Pero éste no ha sido el único inconveniente que se ha tenido que solventar; el contenido y sentido de la prueba han tenido que ser adaptadas a las características del diseño y desarrollo curriculares de la asignatura, a las características habituales de las pruebas de Matemáticas en los estudios de este tipo y a las condiciones restrictivas del tiempo y demás limitaciones de la investigación.

A pesar de los inconvenientes, a la prueba de evaluación que se ha presentado en el apartado 4.5.3 se le puede atribuir una *validez de constructo* innegable en virtud del propio proceso de construcción mencionado en 4.5.2 y 4.5.3. Asimismo, podemos asegurar una *validez externa* apreciable al haber sido sometida a discusión y consensuada por un grupo de expertos cualificados (profesores de la asignatura y del Departamento[7] responsable de la misma). Por último, no podemos asegurar *validez concurrente* por no disponer de datos suficientes para ello.

En definitiva, podemos añadir las siguientes conclusiones sobre la bondad, validez, fiabilidad y pertinencia de la prueba de evaluación teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en los apartados anteriores:

1. La prueba de evaluación recoge los contenidos fundamentales del tema *Integrales de Línea* (contenidos descritos en la sección 3.6.5).

2. Una resolución aceptable de la prueba de evaluación implica el dominio, también aceptable, de los conocimientos del tema.

3. La prueba no "favorece" a ninguno de los dos grupos, al estar formada por ejercicios estándar cuya justificación se ha presentado por igual y del mismo modo en las clases de pizarra de ambos grupos.

4. La prueba es válida para comparar el grado de asimilación de los contenidos en ambos grupos, siempre que la situación de partida de los alumnos de los dos grupos sea similar en promedio en cuanto a conocimientos, capacidades y destrezas matemáticas previas. Pero esto se puede asegurar en virtud de las calificaciones obtenidas en las asignaturas de Matemáticas en Bachillerato, en el examen de Matemáticas de la prueba de Selectividad, en las asignaturas de Matemáticas cursadas con anterioridad en la carrera (*Fundamentos de Cálculo* y *Fundamentos de Álgebra*) y en la prueba de nivel descrita en 4.2.

Por lo tanto, podemos concluir que la prueba de evaluación es pertinente para el estudio y que se puede considerar como un instrumento adecuado para los fines perseguidos en la investigación.

[7]Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga.

4.5.5. Análisis de datos

Para la calificación de la prueba de evaluación se tendrán en cuenta los siguientes criterios de asignación numérica y valoración:

1. 0 puntos en los siguientes casos:
   (a) El ejercicio no se contesta.
   (b) No se contesta correctamente a la veracidad o falsedad de la cuestión planteada.
   (c) Se contesta correctamente a la veracidad o falsedad de la cuestión planteada pero la justificación es contradictoria con la respuesta.
2. 0.5 puntos en los siguientes casos:
   (a) Se contesta correctamente a la veracidad o falsedad de la cuestión planteada pero no se justifica.
   (b) Si el resultado del enunciado es falso, se contesta correctamente, pero no se establece cual sería la solución correcta.
   (c) Se contesta correctamente a la veracidad o falsedad de la cuestión planteada pero se justifica incorrectamente sin llegar a contradicción con la respuesta.
3. 1 punto si se justifica correctamente la veracidad o falsedad y en el caso de que el enunciado sea falso se establece cual sería su solución correcta.

Así, teniendo en cuenta que la prueba de evaluación consta de 16 ejercicios, la calificación máxima que se puede obtener será de 16 puntos. La puntuación global obtenida en cada caso se convertirá en una puntuación entre 0 y 10 multiplicando por $\frac{5}{8}$.

La solución completa y detallada de esta prueba se encuentra en el apéndice G, mientras que en los anexos II y VI se encuentran las respuestas de los alumnos a la misma.

4.6. Encuesta

Si el problema de investigación, como es en nuestro caso, trata de la implementación y eficacia de una metodología didáctica, que duda cabe que es imprescindible contar con la opinión de los alumnos como parte fundamental del proceso didáctico y conocer sus puntos de vista acerca del diseño y el desarrollo del nuevo tratamiento y sus apreciaciones sobre la comparación con la metodología usual. Para ello, el método de encuesta es uno de los instrumentos de recogida de datos más apropiado, de especial relevancia para el estudio que presentamos y muy utilizado, por otra parte, en el ámbito educativo debido a su facilidad de aplicación y al carácter directo de la elaboración de conclusiones para toda la población [Latorre y otros, 1996] (página 182).

Pero dadas las características de nuestra investigación, la encuesta se va a utilizar como instrumento de información y de control a la vez, en la medida en que nos apoyaremos en las respuestas de los alumnos para valorar la eficacia del método de investigación y, al mismo tiempo, emplearemos la información que proporcionan dichas respuestas para subsanar las carencias y dificultades propias de las condiciones reales del estudio (por ejemplo, para aportar datos a favor o en contra de la equivalencia de las muestras ante los tratamientos y las pruebas).

A lo largo de los apartados que siguen se exponen los diferentes aspectos de este instrumento, cuya aplicación se ha previsto realizar inmediatamente después del desarrollo de las dos metodologías didácticas.

4.6.1. Finalidad

Con la realización de la encuesta se espera obtener información sobre la opinión de los alumnos del grupo control y del grupo experimental acerca de los aspectos fundamentales del desarrollo de la investigación, considerando dicho desarrollo en términos de experiencia vivida. En particular se pretende obtener, por un lado, datos objetivos de los alumnos y, por otro, una delimitación nítida y completa de la opinión de los mismos sobre ambos métodos de enseñanza-aprendizaje. Este segundo propósito permitirá:

1. Conocer en profundidad la metodología experimental y sus consecuencias, su viabilidad, características, adecuación a las orientaciones oficiales y a las condiciones reales, su efectividad, la bondad del procedimiento, etc.

2. Comparar/contrastar ambos métodos y valorar dicha comparación desde el punto de vista de los sujetos participantes directos (comparación cualitativa).

Es evidente que disponer de información de este tipo es fundamental para el núcleo de la investigación ya que, al igual que en el caso de los ficheros de DERIVE, estaremos con ella en una mejor posición para aceptar o rechazar la *plausibilidad* de las conjeturas descritas en la sección 3.3. No obstante, hay que tener en cuenta que una buena parte de los ítemes solicitan apreciaciones subjetivas, lo que requiere de un tratamiento adecuado y de la adopción de las cautelas necesarias, como por ejemplo, la de no conceder a las respuestas más alcance e importancia que los que en rigor deben y pueden tener. En definitiva, las encuestas aportarán los siguientes tipos de información:

1. *Objetiva:* calificaciones en las distintas asignaturas de Matemáticas cursadas por el alumno; número de horas dedicadas al estudio de la asignatura; porcentaje de horas dedicadas a la asistencia a clase.

2. *Subjetiva:* utilidad y eficacia del método didáctico empleado para el desarrollo del tema; distribución entre los contenidos teóricos y prácticos; grado de asimilación y dominio de los distintos conceptos y procedimientos desarrollados; otras apreciaciones personales sobre distintos aspectos del desarrollo de las clases.

Por otro lado, en el caso de los alumnos del grupo experimental, las encuestas aportarán información subjetiva adicional sobre el desarrollo de la clase en el laboratorio. Nos referimos aquí a aspectos tales como la apreciación personal sobre: la influencia de la elaboración de comandos con DERIVE sobre la actitud del alumno; la influencia de la elaboración de comandos con DERIVE sobre el conocimiento de la materia *Integrales de Línea*; la influencia de cada uno de los comandos sobre el dominio del contenido correspondiente; ventajas e inconvenientes de la metodología de enseñanza; utilidad de la metodología en otras asignaturas y cursos; etc.

Por último hemos de señalar que la comparación de las respuestas de ambos grupos proporcionará información valiosa sobre el núcleo central del estudio y complementará la obtenida por otros instrumentos de recogida de datos.

4.6.2. Construcción y características

Para la elaboración de la encuesta se han tenido en cuenta los siguientes aspectos:

1. Si se desea construir un único instrumento para toda la muestra, como es el caso, éste debe incluir una primera parte común a los dos grupos (parte común de los tratamientos didácticos) y una segunda parte, específica para los alumnos del grupo experimental, relativa a la clase desarrollada en el laboratorio.

2. Su cumplimentación se ha de realizar durante la semana siguiente a la finalización del tema y de forma simultánea en ambos grupos. La razón es evidente si se desea evitar el sesgo en los resultados debido al excesivo tiempo transcurrido.

3. Para poder establecer comparaciones, los criterios de análisis de datos deben ser comunes para ambos grupos en lo que se refiere a la parte común.

4. Parece conveniente diversificar el formato de los ítemes, es decir, incluir, por ejemplo, ítemes de elección única entre varias respuestas posibles junto a ítemes de respuesta libre. El interés por analizar la metodología de investigación como parte del estudio aconseja esta medida.

5. La encuesta no debe ser cerrada sino que debe permitir la opinión abierta sobre cada uno de los aspectos incluidos. Con ello se pretende tener en cuenta todos los comentarios de los alumnos sin restringir las respuestas ni eliminar la riqueza que pueden proporcionar las distintas formas de expresión.

6. La cumplimentación debe ser totalmente anónima, con el fin de que los alumnos expresen su opinión sin coacciones y de la forma más sincera posible. Esto es importante debido a la naturaleza del estudio, a las condiciones del mismo y a la necesidad de relajar la presión habitual de las pruebas escritas.

4.6.3. Estructura, formato y contenido

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se ha construido una encuesta que se estructura en cuatro bloques, de los que los tres primeros son comunes a ambos grupos y el último es específico para el grupo experimental. Dichos bloques son:

1. *Antecedentes.* En este bloque se trata de obtener información sobre las calificaciones de los alumnos en las asignaturas de Matemáticas de Bachillerato así como en la prueba de Selectividad.

   El objetivo principal es obtener, junto con la prueba de nivel previa, información sobre la homogeneidad de los grupos control y experimental. Ambas fuentes de información, prueba de nivel y antecedentes, se completarán con otros datos (formación de grupos por parte de la Secretaría del Centro, calificaciones obtenidas en las asignaturas *Fundamentos de Cálculo* y *Fundamentos de Álgebra* cursadas durante el primer cuatrimestre, etc.) para avalar, aún más si cabe, la afirmación sobre la equivalencia de partida de los dos grupos en los términos que interesan para la resolución del problema de investigación.

2. *Asignatura Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales.* Aquí se pretende recoger información general sobre el desarrollo de la asignatura. En particular, se pide información sobre las horas semanales dedicadas al estudio y se contempla la posibilidad de que el alumno haya cursado antes la asignatura.

   Esta información se une a la del bloque anterior para analizar y comprobar la homogeneidad y equivalencia de ambos grupos.

3. *Integrales de Línea. Clases en la pizarra.* En este bloque se trata de "pulsar" la opinión de los alumnos acerca de varios aspectos de las clases "tradicionales". El primer ítem hace referencia al número de horas que el alumno ha asistido a clase, mientras que los siguientes se dedican a la planificación y a la metodología empleada (distribución entre teoría y problemas, horas dedicadas al estudio, eficacia del método empleado, dificultades encontradas, etc.). Asimismo, se requiere la opinión del alumno sobre el grado de asimilación que cree haber alcanzado en torno a todos y cada uno de los conceptos centrales del tema: parametrización de caminos; forma diferencial exacta; función potencial e integral de línea de una forma diferencial a lo largo de un camino. Por último, se pide una reflexión sobre el nivel de destrezas alcanzado y el aprendizaje realizado con el desarrollo del tema en estas clases de pizarra.

   Es evidente que con este bloque se pretende comparar la parte común de los dos tratamientos didácticos desde el punto de vista, siempre subjetivo pero no por ello menos valioso, de los propios alumnos.

4. *Integrales de Línea. Clases con* DERIVE. Se trata de un último bloque dirigido exclusivamente a los alumnos del grupo experimental. Los primeros ítemes tratan de obtener información sobre el modo en que la elaboración de comandos con DERIVE modifica el grado de asimilación de los contenidos desarrollados en el tema y se alternan en sus formas positiva y negativa en el cuestionario para evitar el posible error de aquiescencia. Cada enunciado puede responderse eligiendo entre las 5 posibilidades siguientes: 1.TD - totalmente en desacuerdo; 2.D - parcialmente en desacuerdo; 3.N - neutral: ni de acuerdo ni en desacuerdo; 4.A - parcialmente de acuerdo; 5.TA - totalmente de acuerdo. Los últimos ítemes hacen referencia a la idoneidad de la posible utilización generalizada del programa DERIVE en esta asignatura así como a la distribución ideal entre teoría, problemas y clases con DERIVE dentro del desarrollo de la asignatura.

   El objetivo principal de este último bloque es el de recoger la opinión de los alumnos sobre la elaboración de comandos con DERIVE y sobre la utilidad y eficacia del método didáctico empleado en esta parte del tema.

En lo que sigue se incluye la versión definitiva de la encuesta construida de acuerdo con las directrices y observaciones realizadas anteriormente.

Encuesta sobre el tema

"Integrales de Línea"

Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales

I.T.T.

En los siguientes ítemes, rodee la opción elegida en cada caso.
Ejemplo: 4. Casi siempre

A. ANTECEDENTES

1. Calificación media en las asignaturas de Matemáticas de Bachillerato:

   1. Suficiente 2. Bien 3. Notable 4. Sobresaliente 5. Matrícula de Honor

2. Calificación media en Selectividad:

1. [4,5) 2. [5,6.5) 3. [6.5,8) 4. [8,9) 5. [9,10]

3. Calificación de Matemáticas en Selectividad:

1. [0,3) 2. [3,5) 3. [5,7) 4. [7,9) 5. [9,10]

B. ASIGNATURA ANÁLISIS VECTORIAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES

4. Número de exámenes finales de la asignatura a los que se ha presentado hasta ahora:

1. 0 (ninguno) 2. uno 3. dos 4. tres 5. cuatro o más

5. Asiste a clase:

1. Nunca 2. A veces 3. La mitad aproximadamente 4. Casi siempre 5. Siempre

6. Estimación de horas a la semana que dedica al estudio personal de la asignatura:

1. [0,2) 2. [2,4) 3. [4,6) 4. [6,8) 5. 8 horas o más

C. INTEGRALES DE LÍNEA. CLASES EN LA PIZARRA

7. El tiempo dedicado al tema en clase ha sido:

1. Muy escaso 2. Escaso 3. Adecuado 4. Sobrado 5. Excesivo

8. En relación con lo que he aprendido, el método empleado para desarrollar el tema ha sido:

1. Muy eficaz 2. Eficaz 3. Sin efecto, ni en un sentido ni en otro 4. Ineficaz 5. Muy ineficaz

9. La distribución entre teoría y problemas ha sido:

1. Muy adecuada 2. Bastante adecuada 3. Normal 4. Poco adecuada 5. Nada adecuada

10. De los problemas y ejercicios propuestos he realizado:

1. Ninguno 2. Menos de la mitad 3. La mitad 4. Más de la mitad 5. Todos

11. La dificultad de los problemas y ejercicios propuestos creo que es:

1. Mucha 2. Bastante 3. Normal 4. Poca 5. Ninguna

12. ¿Cuántas horas le ha dedicado al estudio personal del tema?

1. [0,1) 2. [1,4) 3. [4,7) 4. [7,10) 5. 10 horas o más

13. El tema, en general, ha resultado ser:

1. Muy fácil 2. Fácil 3. Normal 4. Difícil 5. Muy difícil

14. Opino que si el tema le ha resultado difícil a un alumno ha sido por:

1. Preparación previa del alumno 2. Exigencias de la asignatura
3. Método de enseñanza seguido 4. Dificultad propia de la materia
5. Otros o Varios de los anteriores (indicar):

15. Con el desarrollo del tema en clases de pizarra he alcanzado un grado de asimilación/comprensión del concepto de:

a) parametrización de caminos:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

b) forma diferencial exacta:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

c) función potencial:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

d) integral de línea de una forma diferencial a lo largo de un camino:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

16. Con el desarrollo del tema en clases de pizarra he alcanzado un nivel de destrezas y estrategias para resolver integrales de línea:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

17. Mi valoración global sobre el rendimiento y el aprendizaje que he realizado en el tema es:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

Observaciones que desee añadir sobre lo tratado en este apartado:

D. INTEGRALES DE LÍNEA. CLASES CON DERIVE

Por favor, conteste **sólo si ha asistido a la clase de Integrales de Línea con DERIVE**. Indique su grado de acuerdo o desacuerdo marcando una X en la casilla correspondiente (1.TD (totalmente en desacuerdo); 2.D (parcialmente en desacuerdo); 3.N (neutral: ni acuerdo ni desacuerdo); 4.A (parcialmente de acuerdo); 5.TA (totalmente de acuerdo)).

	1.TD	2.D	3.N	4.A	5.TA
18. El uso del ordenador y la elaboración de comandos con Derive motiva al alumno y mejora su actitud hacia el tema y la asignatura.					
19. La elaboración de comandos con Derive no mejora la asimilación y comprensión de los contenidos más que otros métodos de enseñanza.					
20. La utilización autónoma de Derive contribuye al desarrollo de destrezas y estrategias para resolver ejercicios y problemas del tema.					
21. La elaboración de comandos no es útil para conocer a fondo la naturaleza, estructura y funcionamiento de los conocimientos del tema.					
22. La elaboración de comandos permite desarrollar la agilidad mental más que las clases tradicionales.					
23. La elaboración de comandos con Derive es una pérdida de tiempo que se debería dedicar a resolver problemas y ejercicios con lápiz y papel.					
24. La elaboración de comandos ayuda a alcanzar un conocimiento más profundo de la materia.					
25. El uso del ordenador dificulta la interacción entre alumnos y entre profesor y alumnos.					
26. La elaboración de comandos no es un método útil, porque el aprendizaje de Derive es un obstáculo añadido a la propia dificultad del tema.					
27. A pesar de los inconvenientes, creo que se aprende más con la elaboración de comandos con Derive que con una clase normal de problemas.					
28. La elaboración del comando DIFERENCIALEXACTA para ver si una forma diferencial es exacta mejora la comprensión del procedimiento de cálculo y del concepto en sí.					
29. La elaboración del comando POTENCIAL para calcular la función potencial de una forma diferencial exacta mejora la comprensión del procedimiento de cálculo y del concepto en sí.					

30. La elaboración del comando LINEAPARAMETRICA para calcular la integral de línea de una forma diferencial a lo largo de un camino mejora la comprensión del procedimiento de cálculo y del concepto en sí.					
31. En definitiva y globalmente, la elaboración de comandos con Derive aplicados a integrales de línea es positiva para la comprensión y aprendizaje.					
32. En definitiva y globalmente, la asistencia a la clase de integrales de línea con Derive ha mejorado notablemente mi preparación de cara al exámen.					

Por favor, conteste brevemente a las siguientes cuestiones:

33. ¿Considera suficientes los comandos desarrollados con Derive en el tema *Integrales de Línea*?, ¿cree que sería útil la elaboración de algunos más? En caso afirmativo indíquese cuáles o sobre qué contenidos.

34. Enumere las principales ventajas e inconvenientes que detecta en esta metodología de enseñanza.

Ventajas: Inconvenientes:

35. ¿Se debería utilizar el procedimiento seguido en el resto de temas de la asignatura? Razone la respuesta.

36. De las tres partes: a) Teoría, b) Ejercicios y problemas en pizarra y c) Ejercicios y problemas con la elaboración de comandos con Derive, indique qué porcentajes habría que dedicar a cada parte en un desarrollo ideal de la asignatura.

Observaciones que desee añadir sobre lo tratado en este apartado:

4.6.4. Análisis de los datos de la encuesta

Las respuestas a la encuesta, que se pueden consultar en los anexos III y VII, se transcribirán a una tabla que recoja la información de todos los ítemes. Con los datos cuantitativos se realizarán estudios estadísticos descriptivos (medias y varianzas), mientras que el resto de los datos se analizarán de forma cualitativa. En particular se confrontarán estos datos con los procedentes de otros instrumentos para contribuir al desarrollo de reflexiones centradas en las principales cuestiones del problema de investigación. Que duda cabe de que en todas las consecuencias que se extraigan de los datos obtenidos mediante este instrumento se tendrá en cuenta la debilidad tradicional, por su escasa fiabilidad, de la información aportada.

Por otro lado, teniendo en cuenta los resultados de la prueba de evaluación, se realizará un estudio cualitativo para contrastar las ideas que los alumnos tienen "a priori" sobre su conocimiento y el grado de asimilación de los contenidos con lo que se deduce a tal respecto de los resultados reales de dicha prueba.

4.7. Entrevistas

De acuerdo con lo establecido en la sección 3.6.4, a pesar de la inmediatez y premura de las actuaciones así como de la escasez de tiempo disponible y de otros impedimentos propios de las condiciones de investigación en una situación natural, se ha podido dedicar un tiempo extra a la realización de algunas entrevistas individuales sobre ciertos aspectos del proceso desarrollado en el grupo experimental. La finalidad, estructura y demás características de este instrumento se describen en los apartados que siguen, mientras que las respuestas dadas por los alumnos se incluyen en el anexo VIII.

4.7.1. Finalidad

Con la realización de las entrevistas se pretende alcanzar los objetivos que agrupamos en las tres categorías siguientes:

1. Confirmar o aportar nueva información sobre:

    (a) La bondad de las conjeturas y el grado de coincidencia con los datos obtenidos en tal sentido por otras vías (encuestas, pruebas objetivas, ficheros de Derive e informes de observación).

(b) La coherencia de los resultados y de las conclusiones que se deducen del estudio en su conjunto.

(c) La singularidad o rareza de datos anómalos.

(d) El grado de sinceridad de las respuestas obtenidas mediante otros procedimientos.

2. Profundizar mediante la obtención de datos sobre aspectos no tratados o no recogidos mediante otros instrumentos y que puedan proporcionar información añadida para resolver el problema de investigación.

3. Ampliar la recogida de datos a nuevos temas y campos de interés colaterales, tales como los siguientes:

   (a) Ventajas e inconvenientes de las clases con Derive y las clases tradicionales.

   (b) Reflexión sobre la preparación individual tradicional del tema y el trabajo con Derive.

   (c) Las dos metodologías de enseñanza: qué aporta cada una que no hace la otra y porqué.

   (d) La motivación en clases de pizarra y en la clase del laboratorio: diferencias y valoración.

   (e) Las interacciones profesor-alumno y alumno-alumno en clases tradicionales y en clases con Derive.

   (f) La motivación, interés y actitud hacia la materia en las clases de pizarra y en la clase desarrollada en el laboratorio.

Hemos de indicar, no obstante, que las entrevistas realizadas se han limitado a obtener información superficial sobre los diferentes puntos tratados anteriormente, como se puede comprobar examinando los resultados que se incluyen en el capítulo 6 al que nos remitimos.

4.7.2. Construcción y características

El protocolo se ha construido teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y de acuerdo con las siguientes directrices y características:

1. Debe estar dirigida específicamente a los alumnos del grupo experimental.

2. Se ha de realizar durante la semana siguiente a la finalización de la recogida de datos mediante otros instrumentos. El motivo es obvio si no se quiere sesgar los resultados por el excesivo tiempo transcurrido.

3. El formato más adecuado es el de entrevista semiestructurada, es decir, un protocolo base abierto a la posibilidad de interacción entrevistado-entrevistador en función del interés de las respuestas y su aprovechamiento.

4. Como suele ser habitual, el investigador recogerá la información mediante notas escritas para que el alumno se centre exclusivamente en responder a las cuestiones.

5. Con el fin de disponer de una muestra representativa se decide entrevistar al 20 % de los alumnos asistentes a la clase de elaboración de comandos con Derive impartida en el laboratorio.

4.7.3. Estructura, formato y contenido

Puesto que con este instrumento se trata de aportar nuevos datos a favor de las conclusiones y resultados ya establecidos por otros medios, se han previsto cuatro preguntas que atienden a los cuatro aspectos siguientes:

1. Utilidad de la asistencia a la clase de *Integrales de Línea* con Derive.

2. Aspectos sobre los que ha influido el uso de Derive en las clases de *Integrales de Línea*.

3. Diferencias observadas entre las clases con Derive y las clases tradicionales de pizarra.

4. Viabilidad y utilidad del método en otros temas de la asignatura y en otras asignaturas de la titulación.

Las preguntas se han ordenado tal y como figura en el protocolo que se incluye a continuación:

Entrevista individual sobre la experiencia:

Integrales de Línea con DERIVE

Por favor, contesta brevemente a las siguientes cuestiones:

1. ¿Te ha resultado útil la asistencia a la clase de integrales de línea con DERIVE? ¿Para qué? ¿En qué sentido?

2. En cuáles de los aspectos que se relacionan a continuación ha influido el uso de DERIVE en las clases de integrales de línea. ¿Cómo ha sido dicha influencia? ¿Por qué crees que ha sido así?
   - Sobre el aprendizaje y la comprensión.
   - Sobre el rendimiento en exámenes.
   - Sobre la formación general.
   - Sobre la actitud y la motivación.
   - Otros.

3. ¿Qué diferencias, tanto positivas como negativas, crees que se dan entre las clases con DERIVE y las clases tradicionales de pizarra en cada uno de los siguientes aspectos?:
   - En las interacciones profesor-alumno.
   - En las interacciones entre alumnos.
   - En la motivación e interés hacia el tema.
   - En la actitud.
   - Otros.

4. ¿Crees que se debería utilizar el método empleado en las clases de integrales de línea con DERIVE en otros temas de la asignatura? ¿Crees que sería igualmente útil/inútil? ¿Por qué? ¿En qué sentido? ¿Y en otras asignaturas?

4.7.4. Análisis de datos

Se realizará un estudio cualitativo de los datos obtenidos atendiendo especialmente a aquellos aspectos actitudinales no recogidos en las encuestas. Estos datos se utilizarán para obtener información sobre el grado de sinceridad de las respuestas obtenidas mediante otros instrumentos de recogida de datos así como para confirmar la plausibilidad de las conjeturas de nuestra investigación.

4.8. Otros instrumentos de análisis de datos

Para llevar a cabo los estudios estadísticos sobre los datos obtenidos mediante los distintos instrumentos se utilizarán los programas SPSS versión 11.5 y Microsoft® Excel 2000.

Para cada uno de los dos grupos, control y experimental, se realizarán estudios descriptivos de todos los datos cuantitativos recogidos. Dichos estudios consisten, básicamente, en recuentos de frecuencias, cálculos de medidas centrales y de dispersión y representaciones gráficas mediante histogramas y diagramas de sectores.

Además de los análisis descriptivos se llevarán a cabo estudios inferenciales con un valor de confirmación de bondad de tendencias. En particular se realizarán dos contrastes de hipótesis para comprobar la igualdad de medias en la prueba de nivel y si la media del grupo experimental es superior a la media del grupo control en la prueba de evaluación. Ambos contrastes se realizarán a un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

Por lo tanto, se realizarán los siguientes estudios:

1. Estudio descriptivo de los resultados obtenidos en la prueba de nivel tanto para el grupo control como para el experimental.

2. Estudio descriptivo de los resultados cuantitativos obtenidos de los ficheros de Derive para el grupo experimental.

3. Estudio descriptivo de los resultados cuantitativos obtenidos en las encuestas.

4. Estudio descriptivo de los resultados obtenidos en la prueba de evaluación.

5. Contraste de hipótesis para comprobar la igualdad de medias en los resultados de la prueba de nivel previa con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

6. Contraste de hipótesis para comprobar si la media obtenida en la prueba de evaluación por el grupo experimental es superior a la media obtenida por el grupo control con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

La información obtenida en todos los casos de forma aislada será integrada y relacionada entre sí y con otros datos cualitativos a propósito del análisis de resultados y de la discusión sobre logros y hallazgos en relación con el problema de investigación. Todos estos aspectos se incluirán en el capítulo 7, dedicado a las conclusiones y perspectivas futuras, al que nos remitimos para una información más amplia.

Parte III
Estudio empírico: desarrollo y resultados

Contenido de la parte III

Capítulo 5

Enseñanza del tema Integrales de Línea mediante dos metodologías didácticas

5.1. Introducción

En la sección 3.6.6 del capítulo 3 se expone el diseño de las metodologías didácticas que conforman los dos tratamientos del tema *Integrales de Línea* que se han desarrollado en el estudio empírico y cuyos efectos se comparan en la parte central del estudio. Como se recordará, dichos tratamientos son:

- Tratamiento didáctico "usual" o "tradicional" (al que hemos denominado *tratamiento control*). Se trata de la metodología didáctica que se viene empleando normalmente para la enseñanza del tema y que suele consistir en el desarrollo lineal, completo y mediante explicaciones en la pizarra, de los contenidos, ejercicios y problemas que se detallan en el apéndice B.

- Tratamiento didáctico mixto (al que hemos denominado *tratamiento experimental*). Consiste en una metodología que combina las pautas generales del tratamiento usual con el desarrollo de algunas experiencias en el laboratorio de informática basadas en la realización de comandos con DERIVE sobre los aspectos fundamentales del tema.

Ambos tratamientos didácticos se desarrollan al mismo tiempo, tratan sobre los mismos contenidos, incluyen los mismos ejercicios y problemas, los imparte el mismo profesor, tienen una parte común y, en general, se ha procurado que presenten las mismas características, en todos los sentidos, salvo en las diferencias introducidas "ad hoc" para la investigación y que se pretende que sean, salvo influencias menores extrañas, las causas fundamentales de los posibles efectos que con ellas se esperan conseguir.

Pero si, además de todas las medidas y cautelas tomadas en el diseño y en la delimitación de los distintos elementos, queremos atribuir los efectos a sus causas con una mayor seguridad, no tenemos más remedio que cuidar especialmente el desarrollo de las experiencias y vigilar atentamente que todo transcurra según los cauces previstos; aunque, a pesar de todo, nos quede siempre la duda de haber pasado algo por alto o de haber establecido conclusiones defectuosas o sin los fundamentos necesarios.

Ésta es la tarea que hemos realizado y cuya descripción y análisis se aborda en el presente capítulo: dejar constancia fiel del desarrollo de las experiencias, sus incidencias y principales episodios e informar detalladamente de las medidas adicionales "externas"[1] que se han adoptado para garantizar aún más la validez y fiabilidad de los resultados.

En las secciones 5.2 y 5.3 del presente capítulo se describen los dos tratamientos didácticos implementados en los grupos control y experimental y se transcriben los informes de observación de los observadores internos y externo sobre cada uno de dichos desarrollos. Los informes del observador participante se han integrado en las descripciones que ella misma, como profesora-investigadora, ha realizado sobre el desarrollo del tema en los dos grupos, con excepción de las observaciones sobre lo ocurrido en horas de tutorías y que se detallan en la sección 5.4.

5.2. Proceso didáctico usual (tratamiento control)

En los apartados que siguen se describe el desarrollo del proceso seguido en el grupo control, con indicación del contenido explicado, la temporalización y distribución de las tareas en sesiones así como los distintos informes de observación

[1]Nos referimos a la observación desde varios puntos de vista, a la triangulación entre observadores y a la reflexión sobre el proceso seguido.

realizados. En el apéndice B se puede examinar el desarrollo completo del tema tal y como se lleva a cabo en el aula con los alumnos.

El proceso didáctico que se describe a continuación tuvo lugar desde el 5 al 13 de marzo de 2003, durante un total de 6 horas distribuidas en 3 sesiones de dos horas cada una. Las fechas, el nº de horas y sesiones así como el tipo de módulo utilizado corresponden en su totalidad al desarrollo usual de la materia en un curso de estas características. El grupo en el que se llevó a cabo este tratamiento control fue en uno de los dos grupos (grupo A) de la especialidad *Sistemas de Telecomunicación.* El número de alumnos matriculados en dicho grupo al comienzo del tema era de 87, aunque la asistencia regular a las sesiones del proceso que se describe no ha sobrepasado la media de 65 alumnos. Veamos a continuación un resumen de lo ocurrido en dichas sesiones.

5.2.1. Descripción e incidencias

La descripción que pasamos a exponer se estructura en sesiones y se centra en los contenidos y actividades desarrolladas en clase. Ocasionalmente se comenta lo ocurrido y se incluyen las incidencias registradas.

De forma general, mientras que no se indique lo contrario, el desarrollo de los aspectos teóricos del tema así como la resolución de los ejercicios y problemas fue realizado por la profesora en la pizarra siguiendo el procedimiento expositivo usual.

Primera sesión (0–2 horas)

El comienzo del tema se llevó a cabo mediante la presentación de un breve esquema de su contenido en el que se motivó la necesidad y utilidad de las integrales de línea en Ingeniería. Dicha motivación partió de la propiedad siguiente de los campos gravitacionales: el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve, sujeto a ciertas ligaduras físicas, entre dos puntos del campo es independiente del camino recorrido por el objeto. Igualmente, se hizo alusión a la utilidad de dicha propiedad para el cálculo de trabajos, de la energía potencial, de la energía cinética, del potencial eléctrico, del flujo de calor y de la circulación de un fluido, entre otros.

A continuación se presentó el concepto de camino (curva), haciendo especial hincapié en las diferencias con el concepto de gráfica de una función real de variable real y en la importancia de no confundir ambos conceptos. A continuación se expusieron diversas definiciones relacionadas con los caminos (camino continuo, camino cerrado, camino regular y camino regular a trozos), para pasar posteriormente a prestar atención a la parametrización de los caminos más usuales en el plano (segmento, quebrada de n puntos, circunferencia y elipse) y en el espacio (segmento y quebrada de n puntos).

Para finalizar esta primera sesión se presentó la definición de integral de línea de un campo vectorial a través de un camino, incidiendo en la comprensión y justificación de los distintos elementos que aparecen en la misma. A continuación, se realizó el ejercicio 1 de la relación, en el que era necesario aplicar la definición mencionada (ver apéndices B y C).

En definitiva, los alumnos dedicaron la mayor parte del tiempo de esta primera sesión a tomar apuntes y realizar preguntas sobre la justificación de los conceptos que se iban introduciendo. Cuando la profesora intuía o detectaba que aún podían quedar dudas, era ella misma quien incitaba al diálogo abierto en el grupo mediante las preguntas adecuadas.

Segunda sesión (2–4 horas)

El trabajo se inició con la justificación de la necesidad de introducir nuevas notaciones para hacer más operativo el cálculo de integrales de línea. En este sentido, se presentaron dichas notaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y se resolvieron los ejercicios 2 y 3 de la relación (ver apéndices B y C).

Seguidamente se trataron las propiedades básicas de las integrales de línea y sus relaciones con las propiedades de las integrales definidas. En este momento se inició la caracterización de los campos conservativos a partir del concepto de forma diferencial exacta, para lo que se enunciaron las definiciones de conjuntos conexos y convexos así como la de forma diferencial.

A continuación se abordaron las definiciones de forma diferencial exacta y de función potencial en los casos particulares de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, lo que permitió tratar, posteriormente, el teorema central del tema, que vincula la forma diferencial exacta con la independencia del camino de integración. En este aspecto, se dedicaron unos minutos a destacar los resultados más importantes del teorema, en particular el hecho que sintetiza las estrategias básicas para el cálculo de las integrales de línea y se incidió en las limitaciones del mismo y en la necesidad de abordar más adelante una caracterización eficiente para una forma diferencial exacta y un procedimiento para calcular la función potencial.

Esta sesión finalizó con la caracterización de las formas diferenciales exactas, el cálculo de la función potencial en $\mathbb{R}^2$ por dos procedimientos: a partir de la definición y de la independencia del camino de integración y la resolución del ejercicio 4 (a) de la relación (ver apéndices B y C).

En todo momento del desarrollo de la sesión y en especial en la última parte, se animó a los alumnos a que formularan preguntas sobre sus posibles dudas y a que expusieran libremente sus comentarios sobre el tema desarrollado.

Tercera sesión (4–6 horas)

En esta última sesión se desarrollaron las siguientes actividades:

1. La primera media hora se dedicó al procedimiento de cálculo de la función potencial en $\mathbb{R}^3$ por dos procedimientos distintos: a partir de la definición y a partir de la independencia del camino de integración. Igualmente se dedicó una parte de esta primera hora a la resolución del ejercicio 4 (b) de la relación (ver apéndices B y C).

2. La última hora y media se dedicó a la resolución del resto de los ejercicios de la relación que quedaban pendientes (del 5 al 10) (ver apéndices B y C). Para ello se utilizó el esquema general de cálculo de una integral de línea, con el suficiente detenimiento para que los alumnos comprendiesen dicho esquema y sus diferencias partes y relaciones; no en vano, se condensan en él todos los conceptos fundamentales del tema. Los aspectos concretos tratados en esta parte se pueden resumir en el siguiente proceso:

   (a) Comprobar si la forma diferencial es exacta.

   (b) Si no es exacta, sólo podemos aplicar la definición de integral de línea parametrizando el camino.

   (c) Si se trata de una forma diferencial exacta y el camino es cerrado, podemos afirmar que el resultado de la integral de línea es cero.

   (d) Si la forma diferencial es exacta y el camino no es cerrado, podemos afirmar que la integral de línea no depende del camino elegido y que el resultado es la diferencia de potencial entre el punto de llegada y el de salida.

Durante la resolución de estos ejercicios se requirió en todo momento a los alumnos que indicaran en voz alta lo que se debía ir haciendo en cada parte del proceso, dejando que ellos resolvieran solos el ejercicio 7 (ver apéndices B y C).

5.2.2. Informes de observación

A las tres sesiones descritas en el apartado anterior asistieron, además de la profesora, tres licenciados en Matemáticas, profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga. Dos de ellos en calidad de observadores internos que, como se recordará, son colaboradores en el proceso de investigación, profesores que imparten la asignatura junto con la investigadora principal y participantes activos en el diseño del estudio empírico. El tercero de los profesores asistió en calidad de observador externo, es decir, como experto cualificado ajeno a la asignatura pero directamente involucrado en tareas docentes de otras asignaturas de Matemáticas para distintos estudios de Ingeniería. En todas las sesiones, los observadores se situaron al final de la clase sin intervenir en los desarrollos de las mismas y tratando en todo momento de que su presencia pasara lo más desapercibida posible.

Como se estableció en el capítulo 3, la presencia de los tres profesores mencionados obedece a la necesidad de controlar y objetivizar el desarrollo del estudio empírico, lo que se consigue parcialmente mediante la observación sistemática y fundada y la recogida de información mediante los informes de observación. Esto es lo que nos proponemos abordar en el presente apartado, en el que se incluyen a continuación los informes emitidos por los observadores internos y externo al desarrollo didáctico del tema *Integrales de Línea* en el grupo control.

Informe de los observadores internos

Los dos profesores asistentes al desarrollo de las clases del grupo control elaboraron, cada uno de ellos, sus propios informes, teniendo en cuenta el protocolo desarrollado en la sección 4.3.3 así como la descripción a priori de la experiencia descrita en la sección 3.6.6, que confrontaron posteriormente para consensuar el informe conjunto cuyo resumen se reproduce literalmente a continuación y que se integra después con las apreciaciones del observador participante. A este respecto hemos de decir que la discusión y confrontación de puntos de vista que tiene lugar en este momento presenta características propias de los procesos de triangulación en investigación cualitativa.

Los siguientes apartados se corresponden con las categorías o bloques de los que consta el citado protocolo. Obsérvese que se ha omitido el bloque sobre *interacciones profesor-alumno* porque las observaciones correspondientes se han incluido en los bloques respectivos dedicados al *profesor* y a los *alumnos*.

Informe de los observadores internos
Grupo control

Tratamiento y metodología

Se ha empleado una metodología clásica, es decir, se han desarrollado los aspectos teóricos del tema en la pizarra junto con los ejercicios y problemas aclaratorios de los conceptos introducidos. Esta parte se llevó a cabo en 4 horas (dos sesiones de dos horas cada una). En las siguientes 2 horas (últimas horas del tema) se realizaron el resto de ejercicios y problemas de la relación haciendo hincapié en las distintas estrategias de resolución de integrales de línea. El tiempo total dedicado al tema fue de 6 horas. El desarrollo del tema, por tanto, se ha adecuado fielmente al diseño previsto y así ha sido acordado como conclusión de lo observado por los tres profesores de la asignatura.

Por otro lado, teniendo en cuenta que nosotros impartimos la misma asignatura, es importante señalar que el tiempo total dedicado al tema (6 horas) ha sido el mismo que en los demás grupos. Asimismo, la distribución de estas 6 horas ha sido también idéntica en todos los grupos.

Profesor

Debido a la metodología empleada, la profesora ha copado casi la totalidad del tiempo dedicado al tema. La participación del alumno se ha limitado a preguntas y dudas puntuales que surgían a lo largo de la explicación. En las contestaciones a dichas preguntas la profesora ha procurado no sólo responder a los alumnos, sino que también ha tratado de integrarlas en las propias explicaciones de los conceptos, buscando que sean los propios alumnos los que respondan. Además, en aquellos aspectos fundamentales en los que los alumnos no planteaban cuestiones, la propia profesora realizaba preguntas para fomentar el diálogo.

Alumnos

La actividad central del alumno ha sido la de tomar apuntes de las explicaciones de la profesora. Por otro lado, teniendo en cuenta lo anteriormente comentado, las intervenciones de los alumnos se han desarrollado a través de diálogos abiertos con el resto de los compañeros y con la profesora sobre cuestiones planteadas por la propia profesora o por los alumnos.

La mayoría de las preguntas de los alumnos iban encaminadas a una mejor comprensión de las estrategias empleadas en la resolución de las integrales de línea. En concreto, había una duda generalizada sobre los distintos métodos para la construcción de la función potencial. También se observaron dudas de cálculo en algunos pasos de la resolución de los distintos ejercicios.

De los diálogos establecidos entre la profesora y los alumnos parece deducirse un grado aceptable de asimilación de los contenidos.

Finalmente, se ha observado una actitud general bastante positiva por parte de los alumnos durante todo el desarrollo del tema.

Recursos y condiciones materiales

La experiencia se ha desarrollado en un aula con buenas condiciones acústicas y buen nivel de visión, con una ocupación aproximada del 70 por ciento. Los únicos materiales empleados por la profesora han sido la pizarra y la tiza. Dichos materiales han sido muy apropiados debido a la metodología empleada. El hecho de no utilizar transparencias ha permitido que los alumnos sigan las explicaciones paso a paso, fomentando que las dudas se fueran aclarando sobre la marcha.

Incidencias especiales

No se han observado incidencias con una relevancia especial para la investigación.

Informe del observador externo

El observador externo asistente al desarrollo de las clases del grupo control es profesor del Departamento de Matemática Aplicada y tiene, a juicio de los demás observadores, la cualificación suficiente para realizar esta tarea. De su participación en el estudio elaboró el informe que se reproduce literalmente a continuación, teniendo en cuenta el protocolo desarrollado en la sección 4.3.3 así como la descripción a priori de la experiencia descrita en la sección 3.6.6. Los siguientes apartados se corresponden con las categorías o bloques de los que consta el citado protocolo. Obsérvese que se han agrupado las cuestiones sobre el *profesor*, los *alumnos* y las *interacciones profesor-alumno* porque el observador ha preferido aglutinar sus conclusiones sobre dichas cuestiones en un sólo apartado.

Informe del observador externo
Grupo control

Tratamiento y metodología

El tema tratado es *Integrales de Línea*. La explicación del tema ha durado 6 horas distribuidas de la siguiente manera:

- Las cuatro primeras se han dedicado al desarrollo de los conceptos teóricos del tema, intercalando ejercicios y problemas de las propias relaciones que los alumnos tienen en su poder. Con esto se ha conseguido en primer lugar que el alumno no se aburra con clases meramente teóricas y en segundo lugar que se enganchen al descubrir inmediatamente la aplicación directa que van a tener esos conocimientos teóricos.
- Las dos horas restantes se han dedicado a la resolución del resto de los ejercicios y problemas de la relación.

Además, se observa que se dedica levemente más tiempo a la realización de ejercicios y problemas que a dar carga teórica, lo cual es lógico debido a las características de la carrera y la titulación. Éstas son totalmente técnicas y las Matemáticas son una herramienta útil para la resolución de problemas propios de la especialidad.

Por último, se observa que el tema *Integrales de Línea* se relaciona con otras asignaturas de la carrera mediante problemas específicos, aunque este apartado sólo se ve por encima debido a la premura de tiempo.

Profesor, alumnos e interacciones profesor-alumnos

La profesora entra puntualmente en su clase y comienza la exposición adaptándose fielmente al temario que desde un principio los alumnos tienen en su poder. Además, escribe todo en la pizarra de forma que el alumno no tiene ningún problema en coger apuntes tranquila y ordenadamente así como en seguir las explicaciones aclaratorias extras de la profesora. Su comportamiento es normal y siempre respetuoso.

Los materiales que utiliza para sus explicaciones son la pizarra y la tiza con el planteamiento que comentaba anteriormente. Además de las explicaciones, la profesora intenta siempre mantener un diálogo con los alumnos, haciéndoles preguntas relacionadas con el tema. Esto lo hace con el fin de que recuerden conceptos ya conocidos, incidiendo en su relación con los nuevos contenidos que se le están presentando. Así, observo que la mayoría del alumnado asistente se mantiene atento y motivado.

En las dos últimas horas del tema, que se dedican a la resolución del resto de los ejercicios y problemas de la relación, la profesora cambia un poco de estrategia. Además de explicar los planteamientos de la mayoría de ellos, deja algunos para que el alumno empiece solo y se pasea por el aula chequeando el trabajo autónomo de los alumnos. En alguna ocasión, incluso, comentando con el propio alumno los pasos a seguir. Con todo esto se detecta una interacción buena y activa entre los alumnos y la profesora.

Me gustaría destacar también que se observa la buena preparación, por parte de la profesora, tanto de la asignatura en general como de las clases. Esto hace que el alumno sepa en cada momento con certeza lo que va a hacer y los pasos a seguir, que junto con la afabilidad de la profesora consigue que el alumno sea participativo y se atreva a preguntar dudas con confianza y tranquilidad. Las intervenciones son cortas en el tiempo en que el alumno pregunta y la profesora le responde.

Otro aspecto destacado es el comportamiento de los alumnos. El noventa por ciento está callado y atento. Sólo intervienen si tienen que preguntar algo. Otro pequeño porcentaje hablan entre ellos y en alguna ocasión la profesora ha tenido que intervenir.

Recursos y condiciones materiales

Como ya he comentado, el material utilizado en este grupo es la pizarra y la tiza y, aparentemente, es suficiente por la forma en que está planteada la asignatura. La profesora se encarga de escribirlo todo en la pizarra, por lo que el alumno no pierde ninguna información.

El aula también acompaña, ya que por su estructura es amplia, a pesar de estar ocupada en más del cincuenta por ciento. Su visibilidad es muy buena desde cualquier punto.

Aunque se podría utilizar algún otro recurso, bajo mi punto de vista nunca sería tan completo y llegaría tanto al alumno como la pizarra y la tiza. En resumen, creo que los materiales que maneja la profesora, además de ser idóneos, son suficientes y adecuados para esta asignatura.

Incidencias especiales

No encuentro nada relevante que destacar.

5.3. Proceso didáctico mixto con Derive (tratamiento experimental)

En esta sección se describe el desarrollo de la metodología didáctica empleada para la enseñanza del tema *Integrales de Línea* en el grupo experimental. El diseño del tratamiento aplicado figura en la sección 3.6.6 y en los párrafos que siguen se explica el proceso seguido con indicación del contenido tratado, la temporalización, la distribución de las tareas en sesiones así como los distintos informes de observación realizados. El desarrollo completo del tema aparece en el apéndice B tal y como se viene impartiendo en clases de pizarra en los últimos años.

El proceso didáctico que se describe a continuación tuvo lugar desde el 5 al

12 de marzo de 2003, periodo en el que se impartieron un total de 6 horas de clase distribuidas en 3 sesiones de dos horas de duración. Las tres sesiones se impartieron en uno de los dos grupos (grupo B) de la especialidad *Sistemas de Telecomunicación,* en el que había matriculados 57 alumnos en el momento del comienzo del tema. Al igual que ocurrió en el grupo control, la asistencia a clase en el grupo experimental no fue total, registrándose una asistencia media de 40 alumnos por sesión a lo largo del proceso que se describe a continuación.

5.3.1. Descripción e incidencias

Como se puede comprobar en el apartado 3.6.6, el tratamiento didáctico experimental no es más que una variante del tratamiento control, en el que se ha sustituido una parte del mismo por una sesión de trabajo con DERIVE en el laboratorio de informática. Esto, no obstante, no significa que los posibles efectos de este proceso, tanto netos como diferenciales, sean sólo debidos al trabajo en la sesión mencionada. No estamos tratando aquí con procesos acumulativos ni disgregables en partes para aislar y sumar después sus efectos. En este sentido, los resultados de un tratamiento didáctico constituido por varias partes, incluso independientes, creemos que son debidos a todo el tratamiento en su conjunto, sin que sea obvio ni sencillo medir los efectos de sus posibles partes para asegurar posteriormente que el efecto global es la suma de los efectos parciales. En nuestro caso, sostenemos que los efectos globales del tratamiento experimental se deben, no sólo a la realización de comandos con DERIVE, sino a la adecuada combinación de dichas actividades con las clases tradicionales.

Pero las condiciones para el desarrollo del tratamiento didáctico experimental no han sido las más idóneas. La más mínima modificación introducida en el proceso usual requiere de un análisis minucioso para tratar de evitar influencias no deseadas y perjuicios irreparables. En nuestro caso, se trataba además de una modificación sustancial del proceso: sustituir una parte de una metodología expositiva consolidada por una metodología activa basada en un recurso diferente, lo que no ha sido fácil en el contexto en el que se ha realizado el estudio.

En consecuencia, si en el desarrollo didáctico experimental se ha dedicado la última hora al trabajo en el laboratorio y la duración de ambos tratamientos ha sido la misma, es necesario explicar cómo se ha conseguido disponer de tiempo para las tareas con DERIVE sin perjudicar o limitar el desarrollo de las clases de pizarra. La clave creemos que ha estado en recuperar tiempo a costa de la eliminación de lo que, al parecer, son aspectos no esenciales. Por tanto, para "ganar" esta última hora decidimos que algunos de los ejercicios fueran sólo planteados en la pizarra para ser resueltos posteriormente en la clase de laboratorio. Es por ello que la descripción que se realiza a continuación es bastante parecida a la realizada en la sección anterior, que aquí se completa con los comentarios sobre los ejercicios que quedaron pendientes de su cálculo final y, sobre todo, con la explicación sobre como se desarrolló la última hora en el laboratorio.

De forma general, salvo en la última sesión, el desarrollo de los aspectos teóricos así como la resolución de los ejercicios y problemas fueron realizados por la profesora en la pizarra. Por otra parte, las intervenciones de los alumnos fueron en la misma línea que las realizadas en el grupo control, siendo la profesora la que fomentaba el debate en aquellos casos y para aquellos temas en los que los alumnos no participaban. Por tal motivo, en la descripción no se incluyen comentarios acerca de la participación de la profesora o de los alumnos, puesto que éstas se han producido en el mismo sentido que en el grupo control.

Primera sesión (0–2 horas)

En estas primeras dos horas se desarrolló exactamente el mismo contenido que en las dos primeras horas del grupo control (ver primera sesión del desarrollo en el grupo control, apartado5.2).

Segunda sesión (2–4 horas)

En esta segunda sesión el desarrollo del tema se realizó exactamente igual que en la sesión correspondiente del grupo control (ver segunda sesión del desarrollo en el grupo control, apartado5.2).

Tercera sesión (4–6 horas)

En la primera de estas dos últimas horas se completó el tratamiento didáctico del tema y se resolvieron sus ejercicios mediante exposiciones tradicionales y siguiendo la misma metodología empleada en el grupo control. La única modificación con respecto a dicho tratamiento didáctico control se ha producido en la ejecución de los ejercicios 6, 8, 9 y 10 (ver apéndices B y C), de los que sólo se efectuaron sus planteamientos iniciales y se dejaron pendientes los cálculos finales. Esta significación permitió acortar el proceso en una hora y dedicar dicho tiempo a otras actividades.

La última hora, "ganada" al proceso usual mediante el procedimiento explicado, se dedicó a la experiencia de elaboración de comandos con DERIVE en el laboratorio. Las tareas y procesos de resolución correspondientes quedaron registradas en ficheros de DERIVE y figuran con detalle en el anexo V.

En los apartados que siguen se explican detenidamente las tareas desarrolladas en esta última hora, ilustrándose la descripción mediante comentarios con expresiones en un formato similar al utilizado por el programa DERIVE. Para terminar se añaden algunas consideraciones sobre el desarrollo del proceso didáctico, la preparación previa de los alumnos y la asistencia de éstos a la clase en el laboratorio.

Tareas guiadas por el profesor

Los primeros treinta y cinco minutos de esta sesión especial se desarrollaron con la ayuda de un proyector multimedia para que los alumnos pudieran realizar simultáneamente las tareas en sus ordenadores. Recordemos que los enunciados de los problemas se pueden encontrar en el apéndice C y sus desarrollos con DERIVE se pueden encontrar en el apéndice I. El trabajo desarrollado en este periodo se puede esquematizar de la forma siguiente:

1. Resolución con DERIVE de los cálculos finales del ejercicio 6:

   ♯1: $u(x, y, z) := 3x^2y^3 + 5x + 2z^3$

   ♯2: $u\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - u(0, 1, 1)$

   ♯3: $\dfrac{5\sqrt{2}}{4} + 3$

2. Resolución con DERIVE de los cálculos finales del ejercicio 8:

   ♯4: $-2\sin^2 t \cos t + 4\cos^2 t$

   ♯5: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t \cos t + 4\cos^2 t\right)\,dt$

   ♯6: 4π

3. Resolución con Derive de los cálculos finales del ejercicio 9 (a):

   ♯7: $4 + 7t + 3t^2$

   ♯8: $\displaystyle\int_0^1 \left(4 + 7t + 3t^2\right) \, \mathrm{d}t$

   ♯9: $\dfrac{17}{2}$

4. Resolución con Derive de los cálculos finales del ejercicio 9 (b):

   ♯10: $x^3 + 2x^2$

   ♯11: $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3 + 2x^2\right) \, \mathrm{d}x$

   ♯12: $\dfrac{101}{12}$

5. Resolución con Derive de los cálculos finales del ejercicio 10:

   ♯13: $-8\sin^3 t + 8\cos^2 t \sin t + 8\cos^3 t$

   ♯14: $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(-8\sin^3 t + 8\cos^2 t \sin t + 8\cos^3 t\right) \, \mathrm{d}t$

   ♯15: $-\dfrac{16}{3}$

6. Construcción/definición del comando `DIFERENCIALEXACTA3` para comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ es exacta o no:

   ♯16:
```
diferencialexacta3(p,q,r) :=
         If(
         DIF(p,y)=DIF(q,x)
         AND
         DIF(p,z)=DIF(r,x)
         AND
         DIF(q,z)=DIF(r,y),
         "Es forma diferencial exacta",
         "No es forma diferencial exacta",
         "No es forma diferencial exacta"
         )
```

7. Comprobación/aplicación del comando `DIFERENCIALEXACTA3` en el ejercicio 4 (b):

♯17: `diferencialexacta3(yz+y+z,xz+x+z,xy+x+y+2z)`

♯18: "Es forma diferencial exacta"

8. Construcción/definición del comando `POTENCIAL2` para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^2$:

♯19:
```
potencial2(p,q) :=
        If(
        DIF(p,y)=DIF(q,x),
        INT(SUBST(p,[x,y],[t,0]),t,0,x)
        +INT(SUBST(p,[x,y],[x,t]),t,0,y),
        "No existe función potencial",
        "No existe función potencial"
        )
```

9. Comprobación/aplicación del comando `POTENCIAL2` en el ejercicio 4 (a):

♯20: `potencial2(xyˆ2+x+1,xˆ2y-2)`

♯21: $\dfrac{x^2\left(y^2+1\right)}{2}+x-2y$

10. Construcción/definición del comando `LINEAPARAMETRICA3` para calcular la integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ a través de un camino dado:

♯22:
```
lineaparametrica3(p,q,r,c1,c2,c3,a,b) :=
        INT(
        SUBST(p,[x,y,z],[c1,c2,c3])DIF(c1,t)
        +SUBST(q,[x,y,z],[c1,c2,c3])DIF(c2,t)
        +SUBST(r,[x,y,z],[c1,c2,c3])DIF(c3,t)
        ,t,a,b)
```

11. Comprobación/aplicación del comando `LINEAPARAMETRICA3` en el ejercicio 3:

♯23: `lineaparametrica3(x,y,z,t,tˆ2,tˆ3,0,1)`

♯24: $\dfrac{3}{2}$

Tareas realizadas por los alumnos

Una vez finalizada esta primera parte de la sesión en el laboratorio, la profesora propuso la realización de una serie de tareas en la segunda parte de la clase. Estas tareas debían realizarlas los alumnos individualmente, aunque se les permitía dialogar con los compañeros y consultar los apuntes tomados en las clases de pizarra. Por otro lado, la profesora se abstuvo de intervenir para resolver dudas sobre aspectos conceptuales o procedimentales del tema, con el fin de fomentar que fuesen los propios alumnos los que las resolviesen. Las únicas dudas que la profesora resolvió fueron las correspondientes al manejo del programa Derive.

Las tareas que han realizado los alumnos en esta última fase han sido las siguientes:

1. Elaboración del comando `DIFERENCIALEXACTA2` para comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ es exacta o no.
2. Elaboración del comando `POTENCIAL3` para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^3$.
3. Elaboración del comando `LINEAPARAMETRICA2` para calcular la integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ a través de un camino dado.
4. Resolución, mediante los comandos creados, de los ejercicios cuyos cálculos finales quedaron pendientes en las clases de pizarra.

Consideraciones adicionales sobre las condiciones de realización de la experiencia

Además de las circunstancias mencionadas, merece la pena destacar:

1. La mayoría de los alumnos de este grupo habían realizado algún tipo de prácticas con Derive en otras asignaturas. A pesar de ello, también se dedicó algún tiempo a recordar los aspectos fundamentales del programa.
2. A la clase en el laboratorio asistieron un total de 31 alumnos de los 40 que venían asistiendo, en promedio, a las sesiones anteriores. El que el número de asistentes a esta clase fuera levemente menor creemos que se puede deber, entre otros motivos, a los siguientes:

(a) Lo indicado en el apartado 1.

(b) Los comentarios realizados en la sección 3.6.3, principalmente el hecho de que el alumno supiera que el contenido a desarrollar en la clase de laboratorio no era “materia de examen”.

(c) El hecho de que los alumnos sabían que en la clase de laboratorio no se realizarían ejercicios nuevos, ni se iban a trabajar nuevos aspectos teóricos.

(d) El comienzo, a un mes vista de la experiencia, de las prácticas genéricas de la asignatura que figuran en el apéndice D y que recogen, en cierto sentido, gran parte de los aspectos desarrollados en la clase de laboratorio.

En cualquier caso, es obligado señalar que los alumnos asistentes a la clase de realización de comandos con Derive no presentaban, que sepamos, ninguna característica común que pudiera haber afectado en ningún sentido a los resultados de la prueba de evaluación, ni ninguna característica claramente diferenciadora con respecto a los no asistentes. En todo caso, se podría decir que se trata de alumnos “cumplidores”, aunque también se pueda haber producido una disminución de la asistencia debida al azar, lo que tampoco es descartable. Sea como fuere, se trata de una de las muchas circunstancias “naturales” que se producen con frecuencia en las situaciones reales y que, como tal, debe ser respetada y tenida en cuenta de cara a las conclusiones de la investigación.

5.3.2. Informes de observación

A las tres sesiones descritas asistieron, además de la profesora de la asignatura, los tres profesores del Departamento de Matemática Aplicada que actuaron como observadores en el grupo control. Dos de ellos en calidad de observadores internos y un tercero en calidad de observador externo. En todas las sesiones se situaron al final de la clase sin intervenir en los desarrollos y tratando en todo momento de que su presencia pasara lo más desapercibida posible.

Informe de los observadores internos

Al igual que para el grupo control y teniendo en cuenta el protocolo desarrollado en la sección 4.3.3 así como la descripción a priori de la experiencia descrita en la sección 3.6.6, los dos profesores de la asignatura, asistentes en calidad de observadores, elaboraron sus propios informes, consensuaron sus observaciones, las confrontaron con las apreciaciones del observador participante en un proceso de triangulación y las integraron en un solo informe conjunto que se reproduce literalmente a continuación.

Los siguientes apartados se corresponden con las categorías o bloques de los que consta el protocolo de observación establecido. Obsérvese que se ha omitido el bloque sobre *interacciones profesor-alumno* porque sus cuestiones han sido ya consideradas en las respuestas de los bloques *profesor* y *alumnos*.

Informe de los observadores internos
Grupo experimental

Tratamiento y metodología

Se ha empleado una metodología mixta consistente en clases de pizarra y clases en el laboratorio que pasamos a describir y comentar a continuación:

1. Clases de pizarra. (Duración 5 horas).

   Al igual que se hizo en el grupo control, en las primeras 4 horas se desarrollaron los aspectos teóricos del tema junto con los ejercicios y problemas aclaratorios de los conceptos introducidos. A lo largo de dicho desarrollo no se han detectado diferencias entre los tratamientos didácticos en ambos grupos (control y experimental). Las coincidencias se han podido constatar tanto en lo que se refiere a los contenidos como a la metodología utilizada.

   En la 5ª hora se plantearon los demás ejercicios de la relación, para los que se utilizaron las mismas estrategias y razonamientos que las empleadas en el grupo control y se dejaron pendientes los cálculos finales correspondientes.

2. Clases en el laboratorio. (Duración 1 hora).

   La distribución de esta hora fue como sigue:

- Durante el primer cuarto de hora los alumnos, guiados por la profesora y con ayuda de Derive, realizaron las operaciones de los ejercicios que se habían planteado en la clase de pizarra de la hora anterior.
- Los siguientes 20 minutos se dedicaron a la elaboración, por parte de la profesora, de los comandos `DIFERENCIALEXACTA3`, `POTENCIAL2` y `LINEAPARAMETRICA3` y a la resolución de los ejercicios relativos a los tres comandos creados.
- Los últimos 25 minutos se dedicaron a la elaboración, por parte de los alumnos, de los comandos `DIFERENCIALEXACTA2`, `POTENCIAL3` y `LINEAPARAMETRICA2` y a la comprobación de su buen funcionamiento mediante la aplicación a los ejercicios que fueron resueltos en el primer cuarto de hora relativos a estos comandos.

Destacamos, además, los siguientes aspectos observados sobre el tratamiento y la metodología utilizada en el grupo experimental:

1. El tiempo total dedicado al tema ha sido el mismo que el empleado en el grupo control. Por otro lado, teniendo en cuenta que nosotros impartimos la misma asignatura, debemos señalar que la dedicación mencionada (6 horas) y la distribución de las tareas y los contenidos han sido las mismas en todos los grupos de la asignatura (considerando que en la última hora de este grupo experimental se realizaron exactamente los mismos ejercicios que en el resto de los grupos).
2. No se han observado diferencias entre la metodología descrita en el diseño de la experiencia y la desarrollada efectivamente en clase.

Profesor

Al igual que en el grupo control, durante las horas de clase de pizarra y debido a la metodología empleada, la profesora fue la principal protagonista del proceso. La participación de los alumnos se limitó a realizar preguntas y exponer las dudas puntuales que surgían a lo largo de la explicación. Ocasionalmente, los alumnos intervenían en los diálogos suscitados, bien por las cuestiones planteadas por los propios alumnos, o bien por las formuladas por la profesora.

Durante el primer cuarto de hora de la clase en el laboratorio, la profesora no sólo guió la resolución numérica de los ejercicios pendientes con ayuda del ordenador, sino que también aprovechó para repasar las nociones básicas del manejo de Derive y recordar sus características elementales.

Los siguientes 20 minutos fueron de vital importancia. En ellos, la profesora explicó con todo detalle cómo crear los comandos, tratando en todo momento que los alumnos comprendieran el proceso y su justificación. Una vez elaborados los comandos, centró la atención en su utilización mediante la resolución de los ejercicios resueltos previamente en la pizarra.

En los últimos 25 minutos, la profesora se limitó a responder las dudas que plantearon los alumnos mientras realizaban las tareas que tenían encomendadas. Destacaremos que en dicho periodo sólo se resolvieron las cuestiones planteadas sobre la utilización del programa Derive y en ningún caso las que se referían a los contenidos de la asignatura, tratando, de este modo, que fueran los propios alumnos los que discutieran las dudas entre ellos y las resolvieran acudiendo a los apuntes o mediante el ensayo y error en la aplicación de los comandos que habían creado.

Alumnos

Durante las clases de pizarra los alumnos se han limitado a tomar apuntes sobre los contenidos desarrollados, a intervenir ocasionalmente para plantear dudas puntuales o a participar en los diálogos abiertos establecidos con la profesora o entre ellos mismos.

Al igual que en el grupo control, la mayoría de las dudas se referían a la utilización de diversas estrategias para la resolución de las integrales de línea así como en la construcción de la función potencial.

Sin embargo, la actividad de los alumnos en el laboratorio pasó a ser más dinámica, aumentando considerablemente el grado de participación (mayor número de intervenciones en todos los sentidos). Tanto es así que en los primeros 15 minutos de la clase terminaron, con la ayuda del ordenador, los ejercicios que quedaron pendientes en la hora anterior y aprovecharon para resolver dudas puntuales sobre el manejo del programa.

Dicha participación se continuó posteriormente durante las explicaciones de la profesora sobre la construcción de los comandos `DIFERENCIALEXACTA3`, `POTENCIAL2` y `LINEAPARAMETRICA3` así como la resolución de los ejercicios de aplicación de dichos comandos.

En los últimos 25 minutos, los alumnos se erigieron en protagonistas del desarrollo de la clase trabajando activamente en la creación de los comandos `DIFERENCIALEXACTA2`, `POTENCIAL3` y `LINEAPARAMETRICA2`. Aquí se observó una mayor actividad individual y de grupo y un aumento de los diálogos y de las consultas a los apuntes para aclarar las dudas que surgían.

Queremos destacar que los ejercicios que había que resolver de nuevo mediante DERIVE, para comprobar el grado de funcionamiento de los comandos, han jugado un papel muy importante en el desarrollo de la experiencia. De hecho, si el alumno comprobaba que el resultado no era el que se había obtenido previamente en la pizarra, pasaba a revisar el comando que había creado, proceso durante el que también se producían los diálogos mencionados en párrafos anteriores. Así, por ejemplo, en el caso del comando `DIFERENCIALEXACTA2`, muchos alumnos comprobaron en los apuntes si era correcta la caracterización que habían utilizado para saber si una forma diferencial es exacta.

Desde un punto de vista general, para terminar, hemos de destacar los siguientes aspectos observados:

1. Parece deducirse un grado aceptable de asimilación de los contenidos por parte de los alumnos.

2. Se aprecia una actitud positiva y receptiva en la mayor parte del grupo.

3. Hemos podido constatar un elevado grado de implicación de los alumnos en la clase desarrollada en el laboratorio, circunstancia que, como profesores de la misma asignatura, nos ha sorprendido gratamente.

4. Hemos de insistir, de nuevo, en el aumento de los diálogos y de la participación en general en la clase con DERIVE.

Recursos y condiciones materiales

La primera parte de la experiencia se ha desarrollado en un aula con buenas condiciones acústicas, buen nivel de visión y con una ocupación aproximada del 40 por ciento. Los únicos materiales empleados por la profesora han sido la pizarra y la tiza. Según lo observado y al igual que en el grupo control, creemos que dichos materiales son los más apropiados para la metodología utilizada.

En el laboratorio había también buenas condiciones de visión y de audición y una ocupación del 50 por ciento. Durante las explicaciones se utilizó un proyector multimedia para que los alumnos pudieran seguir en una pantalla las explicaciones, lo que facilitó el desarrollo del trabajo y la atención de los alumnos, que podían acudir a las explicaciones cuando tenían alguna duda sin perder contacto excesivo con el trabajo personal.

Una deficiencia que se observó en el laboratorio fue el poco espacio disponible para tomar notas, en parte debido a que los ordenadores estaban excesivamente juntos y a que el poco espacio disponible encima de las mesas estaba ocupado por los ratones y los teclados, lo que dificultaba especialmente cualquier tarea de papel y lápiz.

Incidencias especiales

No se han observado incidencias con una relevancia especial para el desarrollo del estudio.

Informe del observador externo

En este caso ha actuado como observador externo el mismo profesor cualificado que lo hizo en el caso del grupo control. De su asistencia al desarrollo didáctico del tema en el grupo experimental elaboró el informe que se reproduce literalmente a continuación y que se ajusta al protocolo desarrollado en la sección 4.3.3 así como a la descripción a priori de la experiencia descrita en la sección 3.6.6.

Los apartados del informe se corresponden, en su mayoría, con las categorías o bloques de los que consta el citado protocolo. Sin embargo, al igual que ocurrió en el caso del grupo control, el observador externo ha decidido agrupar las cuestiones sobre el *profesor*, los *alumnos* y las *interacciones profesor-alumno* para unificar sus conclusiones sobre dichas cuestiones en un sólo apartado.

Informe del observador externo
Grupo experimental

Tratamiento y metodología

En las 4 primeras horas del tema se siguió exactamente la misma metodología que en el grupo control. Es decir, se fueron desarrollando los aspectos teóricos del tema intercalándolos con ejercicios aclaratorios.

Donde se produjeron diferencias apreciables fue en el tratamiento que se dio a las dos últimas horas del tema. La primera de ellas se dedicó, tal como estaba diseñado previamente, al planteamiento de los ejercicios y problemas finales del tema. Es decir, no se resolvieron las operaciones finales. En ese momento, la profesora y los alumnos se trasladaron al laboratorio para desarrollar la última hora de este tema.

En la última hora mencionada el desarrollo fue el siguiente:

- Lo primero que se hizo fue resolver con Derive las operaciones finales que se habían dejado sin resolver previamente en las clases de pizarra. La profesora aprovechó este momento para recordar los aspectos más destacados del manejo de Derive.

- A continuación, la profesora explicó a los alumnos cómo se realizan comandos con Derive. En concreto creó comandos para: comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ es forma diferencial exacta, calcular la función potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^2$ y calcular una integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ a lo largo de un camino. Durante el desarrollo de esta fase los alumnos preguntaron algunas dudas puntuales sobre dicha creación de comandos. La mayoría de las dudas se centraron en aspectos relacionados con Derive.

- Posteriormente se volvieron a resolver algunos de los ejercicios que se habían resuelto antes pero ahora con la ayuda de estos comandos. La profesora incidió en cómo se manejaban los comandos y cómo, evidentemente, el resultado era el mismo.

- Después de estos ejercicios los alumnos pasaron a crear los comandos que propuso la profesora. En concreto eran los comandos para: comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ es forma diferencial exacta, calcular la función potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^3$ y calcular una integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ a lo largo de un camino. Además debían comprobar a la vez que los comandos funcionaban, utilizando para ello los ejercicios que previamente se habían resuelto. Esta última fase duró un poco menos de media hora. En ella aumentaron considerablemente las relaciones entre los alumnos, ya que ellos mismos se preguntaban y resolvían dudas. Además consultaron repetidamente los apuntes de clase y los libros. También aumentó el número de preguntas a la profesora que pasó a contestarlas personalmente.

Profesor, alumnos e interacciones profesor-alumnos

El tratamiento dado por la profesora a las clases de pizarra de este grupo fue exactamente el mismo que en el grupo control, con los mismos comentarios, preguntas y aclaraciones. Las preguntas y dudas de los alumnos fueron bastante parecidas a las del grupo control.

Como antes comentábamos, en el laboratorio cambia la metodología. Las explicaciones son guiadas con proyector, de forma que el alumno, si se pierde, puede coger el hilo de la explicación enseguida. Aquí se detecta un poco más de motivación, que la relación con la profesora es más distendida, al igual que con el resto de sus compañeros y, por tanto, que la participación es más activa.

Me gustaría volver a destacar que la profesora actúa en todo momento de igual forma en este grupo que en el grupo control.

Recursos y condiciones materiales

Como ya he comentado, el material utilizado en este grupo es la pizarra y la tiza en la primera parte del proceso y el ordenador y el vídeo-proyector en la segunda parte. La profesora se encarga de escribirlo todo en la pizarra, igual que en el grupo control, con lo que el alumno no pierde ninguna información. Además, interpreta y explica lo que está escrito, con lo cual no cabe duda de que la explicación está completa. En el laboratorio, además, la información es directa ya que cada alumno tiene su ordenador y trabaja mientras que la profesora está explicando.

El aula tiene una estructura muy buena, está ocupada en un cuarenta por ciento y su visibilidad es muy buena desde cualquier punto. En el laboratorio la visibilidad es también buena y quizás lo que haga falta es un poco más de espacio para que los alumnos estén más cómodos a la hora de trabajar con el ordenador y sus apuntes.

Incidencias especiales

No encuentro nada relevante que destacar.

5.4. Incidencias en horas de tutorías

Como se ha explicado anteriormente, no se ha incluido explícitamente el informe del observador participante porque sus apreciaciones se han integrado en la explicación del desarrollo de las sesiones y en la triangulación efectuada con los observadores internos para la realización del informe conjunto. Sin embargo, en el diseño de sus protocolos de observación (ver sección 4.3.3) se incluía un ítem sobre las tutorías, por lo que vamos a concluir el presente capítulo dedicando unas líneas a esta cuestión pendiente. Se trata de las incidencias ocurridas en las tutorías desarrolladas por la profesora con los alumnos de los grupos control y experimental durante las horas oficiales dedicadas a tutorías (6 horas a la semana) en el periodo de tiempo que abarca todo el segundo cuatrimestre del curso 02/03 en el que se ha desarrollado el estudio empírico. A lo largo de dicho periodo ocurrieron los hechos e incidencias que se comentan a continuación:

1. El índice de asistencia a las tutorías ha sido muy elevado. Los alumnos (no sólo los de los grupos control y experimental, sino también los de los otros grupos de la asignatura) han hecho uso de todas las horas de tutorías a lo largo del cuatrimestre.

2. Las preguntas realizadas por los alumnos de ambos grupos han sido del mismo tipo. Generalmente, los principales problemas radican en la parametrización de los caminos y, sobre todo, en el cálculo de la función potencial. La atención ha sido del mismo tipo a los alumnos de ambos grupos, cuidándose escrupulosamente que no se produjera trato de favor alguno ni de proporcionar información que pudiera influir sobre los resultados de las pruebas, en un sentido o en otro.

3. Durante el desarrollo de estas horas de tutorías se ha constatado que pocos alumnos han realizado preguntas sobre el manejo y utilización de Derive.

4. Durante el desarrollo del estudio empírico y en los días inmediatamente siguientes no hubo alteraciones dignas de mención sobre lo indicado en los apartados 1, 2 y 3.

Capítulo 6

Evaluación de los procesos didácticos y sus resultados

6.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos tras los primeros análisis de la información proporcionada por los distintos instrumentos de recogida de datos. Dichos resultados constituyen la base para la justificación del aspecto central de nuestra investigación, de manera que el análisis exhaustivo de los mismos y de sus interrelaciones va a contribuir a confirmar la bondad de las conjeturas establecidas y del tratamiento metodológico empleado para dar respuesta al problema de investigación. En cuanto al alcance de los análisis realizados hemos de decir que en este capítulo se dirige la atención hacia los resultados de cada instrumento por separado y se establecen algunas conexiones entre ellos en términos de comparaciones e implicaciones de cara al problema de investigación y las conjeturas. Estas conexiones, siempre relacionadas con el problema de investigación, serán completadas cuando se establezcan las conclusiones del estudio en el capítulo siguiente (capítulo 7) dedicado a conclusiones y perspectivas futuras.

En los apartados que siguen a continuación se exponen los resultados mencionados organizados de la siguiente manera: en la sección 6.2 se analizan los resultados obtenidos tras la realización de la prueba de nivel así como su relación con la homogeneidad y equivalencia de los grupos control y experimental ante dicha prueba. En la sección 6.3 se analiza el contenido de los ficheros de Derive creados por los alumnos en la clase del laboratorio. La sección 6.4 se dedica a analizar los resultados obtenidos tras la realización de la prueba de evaluación. De este estudio, como veremos, se deducirá una mejora sustancial en el grado de asimilación de los contenidos y en el rendimiento general de los alumnos del grupo experimental con respecto a los alumnos del grupo control. En la sección 6.5 se destacan los resultados obtenidos tras analizar las respuestas dadas por los alumnos a la encuesta. La información obtenida en este caso servirá, por ejemplo, para medir el grado de aprovechamiento en el desarrollo de los dos tratamientos didácticos y estudiar la homogeneidad y equivalencia de los grupos con respecto a los conocimientos matemáticos previos y a la dedicación a la asignatura. Al final de este apartado se presenta una breve comparación entre las opiniones de los alumnos sobre su aprendizaje y el grado de asimilación de los contenidos y lo que se deduce a tal respecto de los resultados de la prueba de evaluación. Por último, en la sección 6.6 se analizan las respuestas a las entrevistas individuales, con las que se confirman muchos de los resultados obtenidos por otros procedimientos.

6.2. Aplicación de la prueba de nivel y análisis de los resultados

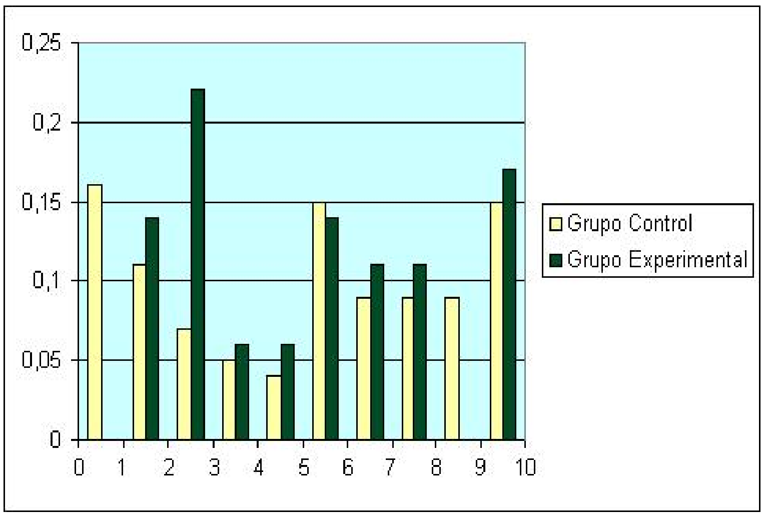
Según se establece en la sección 4.2, la prueba de nivel se ha diseñado para obtener información fiable sobre las posibles diferencias iniciales en formación matemática entre los grupos control y experimental. Como se recordará, se trata de una prueba común a ambos grupos sobre contenidos del tema *"Funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales"*. Su aplicación se llevó a cabo en una sesión de 45 minutos en la clase inmediatamente siguiente a la finalización de dicho tema y no hubo incidentes dignos de ser considerados. A los alumnos se les dijo antes de empezar que se trataba de una prueba de nivel para medir el grado de asimilación de los contenidos del tema 0.

En los apartados que siguen se exponen los resultados puntuales obtenidos con la aplicación de dicha prueba y los análisis realizados a partir de ellos. La exposición finaliza con un resumen de las principales conclusiones, también puntuales, que se deducen del estudio particular realizado sobre las respuestas.

6.2.1. Análisis descriptivo elemental

Los datos puntuales de las calificaciones de los alumnos del grupo control y del grupo experimental a la prueba de nivel se pueden examinar en las tablas H.1 y H.2 del apartado H.1 del apéndice H, mientras que las respuestas completas se pueden consultar en los anexos I y IV. Los resultados se representan en el histograma y las tablas de la figura 6.1.

Intervalo	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10]$
Control	$0,16$	$0,11$	$0,07$	$0,05$	$0,04$	$0,15$	$0,09$	$0,09$	$0,09$	$0,15$
Experimental	0	$0,14$	$0,22$	$0,06$	$0,06$	$0,14$	$0,11$	$0,11$	0	$0,17$



Estadísticos	N	$\overline{x}$	σ
Control	55	4,69	3,28
Experimental	36	4,83	2,81

Figura 6.1: Resumen de los resultados de la prueba de nivel.

En esta figura tenemos que:

1. El cuadro superior es una tabla de frecuencias relativas del número de pruebas por intervalo de puntuación.

2. El histograma corresponde a las frecuencias relativas de la tabla comentada anteriormente.

3. El recuadro inferior recoge el número de pruebas (tamaño muestral N) en cada caso así como las medias y desviaciones típicas de las calificaciones finales.

Como se puede observar en la figura mencionada, los resultados obtenidos por ambos grupos presentan pequeñas diferencias que, como se justifica en el siguiente apartado, no llegan a ser significativas.

Por último es importante recordar que la prueba de nivel se realizó al día siguiente de finalizar la materia del tema 0, motivo por el cual no es de extrañar que se hayan producido "bajos" resultados, debido, principalmente, a que no hubo aviso previo ni tiempo para la preparación personal y a la consideración tradicional de las clases presenciales en la Universidad como fuentes de información básica pero insuficientes para la preparación directa de exámenes.

6.2.2. Comparación de medias. Equivalencia y homogeneidad de grupos

Para comprobar que los dos grupos en estudio son equivalentes en lo que se refiere a lo que mide la prueba de nivel, hemos efectuado una comparación de medias de ambos grupos utilizando el método usual de *contraste de hipótesis* ([Quesada y otros, 1989] y [Mendenhall y Sincich, 1997]). Veamos a continuación un resumen de los principales resultados obtenidos.

Contraste de hipótesis

De acuerdo con lo establecido en 4.8 hemos considerado el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ (nivel significativo) para realizar el siguiente contraste:

La hipótesis nula H_0 la enunciamos diciendo que no existe diferencia en las medias μ_c y μ_e de los resultados obtenidos en la prueba de nivel para las poblaciones de las que proceden los grupos control y experimental respectivamente. La hipótesis alternativa H_a la enunciamos diciendo que hay diferencia entre dichas medias. En concreto, podemos escribir:

$$H_0 \ : \ \mu_c = \mu_e$$
$$H_a \ : \ \mu_c \neq \mu_e$$

cuyos resultados, mediante SPSS, son los que aparecen en las tablas de la figura 6.2.

Prueba T

Estadísticos de grupo

	GRUPO	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
NIVEL	Control	55	4,6909	3,28082	,44239
	Experimental	36	4,8333	2,85106	,47518

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
NIVEL	Se han asumido varianzas iguales	1,580	,212	-,213	89	,832	-,1424	,66863	-1,47098	1,18614
	No se han asumido varianzas iguales			-,219	82,026	,827	-,1424	,64923	-1,43394	1,14909

Figura 6.2: Prueba de nivel. Resultados del contraste de hipótesis con SPSS.

La correcta interpretación de dichos datos requiere de las siguientes consideraciones:

1. La prueba estadística realizada (prueba T) proporciona un nivel de significación frontera, es decir, en vez de fijar previamente el nivel de significación, lo que devuelve es el valor de significación máximo para aceptar la hipótesis nula.

2. Se efectúan dos contrastes distintos: uno asumiendo igualdad de varianzas y el otro sin asumirla. Además, realiza la prueba de Levene para la igualdad de las varianzas, devolviendo también el correspondiente nivel de significación frontera.

De las tablas de la figura 6.2 podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. Nivel de significación frontera para la igualdad de varianzas: 0,212. Por tanto, al ser $0{,}025 < 0{,}212$ para $\alpha = 0{,}05$, *se acepta la hipótesis de igualdad de varianzas al nivel de significación indicado.*

2. Nivel de significación frontera para la igualdad de medias asumiendo igualdad de varianzas: 0,832. Por tanto, al ser $0{,}025 < 0{,}832$, para $\alpha = 0{,}05$, *se acepta la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de nivel de ambos grupos al nivel de significación* $\alpha = 0{,}05$.

6.2.3. Conclusiones parciales de la prueba de nivel

En resumen, del primer análisis de los datos de la prueba de nivel podemos establecer las siguientes conclusiones parciales:

PN-1: Podemos asegurar que los alumnos del grupo control y del grupo experimental obtienen la misma calificación media en la prueba de nivel con una confianza del 95 %. Además, constituyen muestras equivalentes y homogéneas con respecto al rendimiento matemático en dicha prueba.

PN-2: Los alumnos de ambos grupos han obtenido "bajas" calificaciones en la prueba de nivel debido, principalmente, a que ésta se realizó sin previo aviso, al día siguiente de finalizar la materia del tema 0 y al comienzo de la asignatura.

6.3. Análisis de los ficheros de Derive

De acuerdo con lo establecido en la sección 4.4, los ficheros de Derive son instrumentos de recogida de datos grabados en la clase desarrollada en el laboratorio y durante el proceso de realización de las actividades con el ordenador. Como se recordará, tienen como finalidad registrar las técnicas y estrategias que emplean los alumnos para crear los comandos y resolver los ejercicios propuestos. La información que proporcionan sirve también para el análisis de los comportamientos y de las interacciones durante el desarrollo de las actividades. Téngase en cuenta que el programa Derive y los ficheros tienen una doble función:

1. Comprobar el dominio del *conocimiento matemático* sobre el que se realizan los comandos y actuar como testigo y guía para el aprendizaje correcto de los procedimientos y conceptos correspondientes.

2. Reflejar las destrezas individuales en la *aplicación* práctica de dichos conocimientos y servir de testigo y guía para el correcto aprendizaje y desarrollo de las destrezas mencionadas.

Se dirige la atención, por tanto, a dos núcleos de interés: *conocimientos matemáticos* y *sus aplicaciones específicas*. Los ficheros son testigos, en definitiva, de la situación de ambos aspectos en cada alumno así como del proceso de aprendizaje seguido en su caso mediante el procedimiento ensayo-error. No obstante, la información que proporcionan los ficheros se debe complementar con las respuestas a las encuestas y las entrevistas personales.

Por último, antes de pasar al desarrollo de los diferentes aspectos analizados, hemos de decir que se les pidió a los alumnos que no modificaran el contenido de los ficheros y que dejaran inalterados todos los intentos, incluso los fallidos, con el fin de recoger lo más fielmente posible lo realizado en el laboratorio y poder analizar todo lo ocurrido.

6.3.1. Análisis descriptivo elemental

En la tabla H.3 del apartado H.2 del apéndice H se detalla la información cuantitativa obtenida del análisis de los ficheros de Derive. Cada una de las 27 filas corresponde a un alumno diferente que figura caracterizado por su D.N.I. Las columnas reflejan si se ha realizado correctamente cada uno de los comandos propuestos además del número de intentos realizados en cada caso. El listado completo de los ficheros de Derive se puede consultar en el anexo V.

En la figura 6.3 se recoge el número de alumnos que han realizado correctamente cada uno de los ejercicios que quedaban pendientes de sus cálculos finales así como el porcentaje de los mismos. Se observa claramente que el número de alumnos que realizan correctamente cada uno de los ejercicios es alto salvo el ejercicio 6 que lo realizan 20 de los 27 alumnos, lo que puede ser debido a que era el primer ejercicio que se resolvía. Recordemos que el enunciado de dichos ejercicios se puede consultar en el apéndice C.

En la figura 6.4 se recoge el número de alumnos que, siguiendo las explicaciones del profesor, han realizado correctamente cada uno de los comandos trabajados en estas condiciones así como el porcentaje de los mismos. Se observa que el número de alumnos que realizan correctamente los comandos `DIFERENCIALEXACTA3 (DE3)` y `LINEAPARAMETRICA3 (LP3)` es el mismo (21 que sí frente a 6 que no), mientras que 17 alumnos elaboran correctamente el comando `POTENCIAL2 (POT2)`.

Paralelamente, en estrecha relación con los tres comandos anteriores, se recoge en la figura 6.5 el número de alumnos que han realizado correctamente, siguiendo las explicaciones del profesor, cada uno de los ejercicios de comprobación de

$N = 27$	**Ejer. 6**	**Ejer. 8**	**Ejer. 9 (a)**	**Ejer. 9 (b)**	**Ejer. 10**
Frecuencias	20	25	27	25	23
Porcentajes	74,07 %	92,59 %	100 %	92,59 %	85,18 %

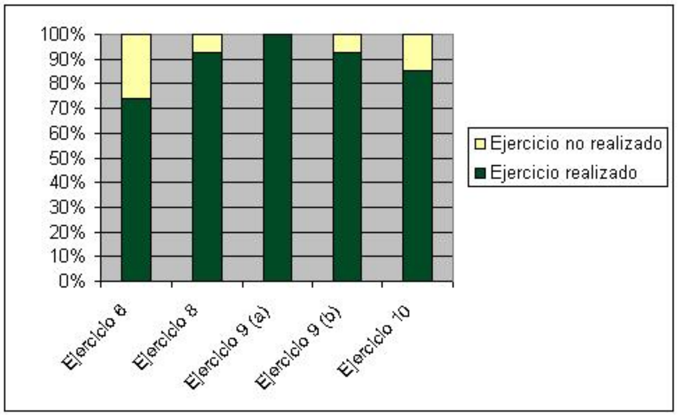


Figura 6.3: Porcentajes de realización de cálculos finales.

$N = 27$	**DE3**	**POT2**	**LP3**
Frecuencias	21	17	21
Porcentajes	77,78 %	62,96 %	77,78 %

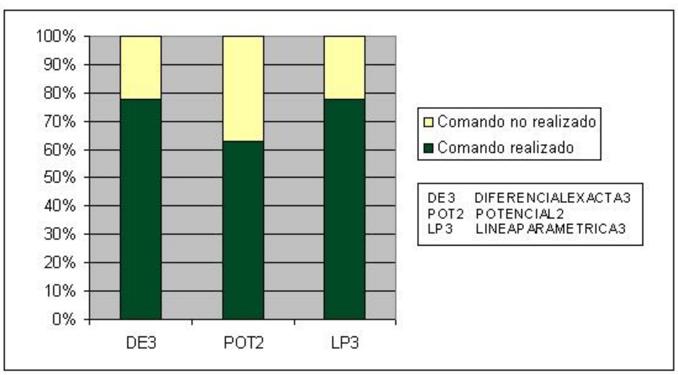


Figura 6.4: Porcentaje de realización de los comandos `DE3`, `POT2` y `LP3` siguiendo las explicaciones del profesor.

$\boxed{N = 27}$	**Ejercicio 4 (b)**	**Ejercicio 4 (a)**	**Ejercicio 3**
Frecuencias	17	15	19
Porcentajes	62,96 %	55,56 %	70,37 %

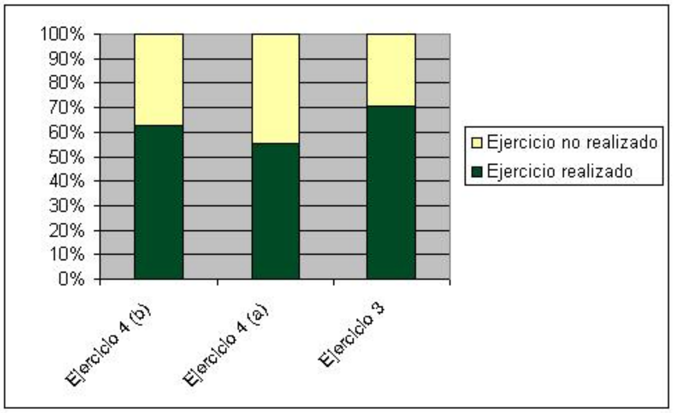


Figura 6.5: Porcentaje de realización de ejercicios de comprobación de los comandos `DE3`, `POT2` y `LP3`.

los comandos mencionados así como el porcentaje de los mismos. Se observa claramente que el número de alumnos que realizan correctamente cada uno de los ejercicios es alto, salvo el ejercicio 4 (a) que lo realizan 15 de los 27 alumnos.

Por último, en la figura 6.6 se recoge el número de alumnos que han realizado correctamente, de forma autónoma, cada uno de los comandos propuestos para esta fase del trabajo así como el porcentaje de los mismos. Se observa que casi todos los alumnos realizan correctamente el comando `DIFERENCIALEXACTA2 (DE2)`, pocos realizan correctamente el comando `POTENCIAL3 (POT3)` (5 que sí frente a 22 que no), mientras que casi ninguno elabora correctamente el comando `LINEAPARAMETRICA2 (LP2)`.

6.3.2. Conclusiones puntuales del análisis de los ficheros de Derive

Del estudio descriptivo destacamos las siguientes conclusiones:

FD-1: Se ha alcanzado un elevado grado de implicación en el seguimiento de las explicaciones del profesor y de competencia en la

$\boxed{N = 27}$	**DE2**	**POT3**	**LP2**
Frecuencias	21	5	2
Porcentajes	77,78 %	18,52 %	7,41 %

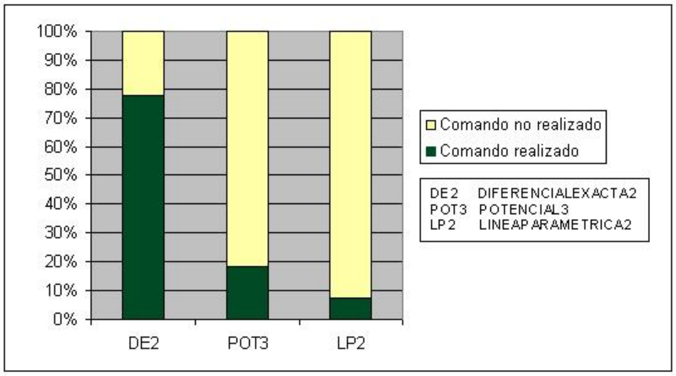


Figura 6.6: Porcentaje de realización de los comandos DE2, POT3 y LP2.

realización de los ejercicios que quedaron pendientes de sus cálculos finales en las clases de pizarra.

FD-2: Un alto porcentaje de alumnos realizan correctamente los comandos con DERIVE siguiendo las explicaciones del profesor.

FD-3: Un porcentaje razonable de alumnos (entre el 55 % y el 70 %) realizan correctamente los ejercicios de comprobación de los comandos siguiendo las indicaciones del profesor.

FD-4: En las tareas guiadas por el profesor se ha producido una elevada implicación de los alumnos, que han seguido mayoritariamente todas las actividades propuestas.

FD-5: En las tareas autónomas, con excepción del primer comando, se ha producido un bajo porcentaje de realizaciones correctas debido a un planteamiento defectuoso del desarrollo didáctico de esta parte.

FD-6: La ausencia de indicaciones explícitas sobre la comprobación de la correcta elaboración de los comandos elaborados autónoma-

mente, ha dado lugar a los bajos resultados obtenidos en la última parte de la experiencia.

6.4. Aplicación y resultados de la prueba de evaluación

Como se comentó en 4.5, la prueba de evaluación fue diseñada para obtener, al finalizar los tratamientos didácticos del estudio desarrollado, información fiable sobre el rendimiento alcanzado y las competencias desarrolladas por los alumnos de ambos grupos sobre los conceptos y procedimientos del tema *Integrales de Línea*. Su aplicación se ha llevado a cabo en la clase inmediatamente siguiente a la finalización de dicho tema, en una sesión de una hora y sin que se hayan producido incidentes dignos de ser considerados. A los alumnos se les dijo antes de empezar que se trataba de una prueba para medir el grado de asimilación de los contenidos del tema *Integrales de Línea*.

En los apartados que siguen se exponen los resultados puntuales de la prueba y los análisis realizados a partir de ellos. La exposición finaliza con un resumen de las principales conclusiones puntuales obtenidas del estudio particular realizado sobre este instrumento y sus resultados.

6.4.1. Análisis descriptivo elemental

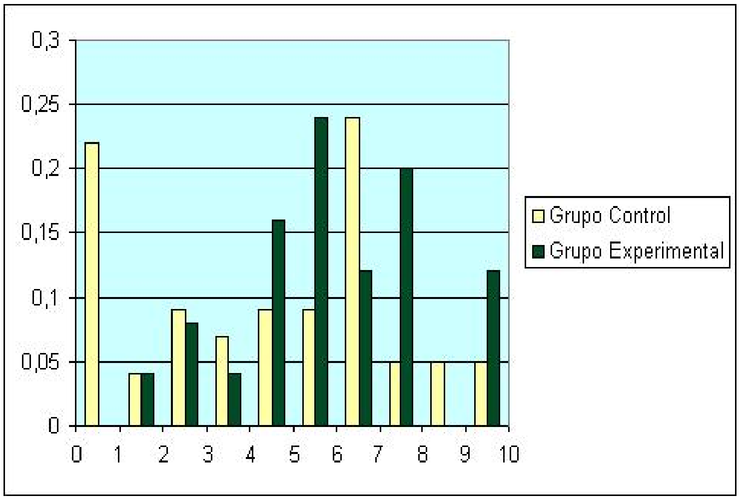
Los datos puntuales de las calificaciones de los alumnos de ambos grupos se pueden examinar en las tablas H.4 y H.5 del apartado H.3 del apéndice H, mientras que las respuestas completas se pueden consultar en los anexos II y VI. Los resultados se describen de forma resumida en el histograma y las tablas de la figura 6.7, en la que:

1. El cuadro superior es una tabla de frecuencias relativas del número de pruebas que se sitúan en cada intervalo de puntuación.

2. El histograma corresponde a las frecuencias relativas de la tabla anterior.

3. El recuadro inferior recoge el número de pruebas (tamaño muestral N) en cada caso así como las medias y desviaciones típicas de las calificaciones finales.

Intervalo	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10]$
Control	0,22	0,04	0,09	0,07	0,09	0,09	0,24	0,05	0,05	0,05
Experimental	0	0,04	0,08	0,04	0,16	0,24	0,12	0,2	0	0,12



Estadísticos	N	$\overline{x}$	σ
Control	55	4,39	2,99
Experimental	25	5,74	2,07

Figura 6.7: Resumen de los resultados de la prueba de evaluación.

Como se observa en el histograma y en las tablas mencionadas, existen diferencias apreciables entre los resultados de ambos grupos. Las calificaciones del grupo control son más bajas que las del grupo experimental, lo que creemos que puede ser debido a que la metodología didáctica experimental ha facilitado la asimilación de los contenidos y ha mejorado el grado de destreza de los alumnos en mayor medida que la metodología tradicional o usual.

Esta afirmación general se irá perfilando en los apartados que siguen a medida que se vayan aportando otros resultados procedentes de los estudios elementales de carácter comparativo y descriptivo que se han realizado para delimitar con más claridad los efectos de los tratamientos didácticos sobre el rendimiento y las competencias desarrolladas por los alumnos.

6.4.2. Análisis comparativo global: mejora de los resultados obtenidos en el grupo experimental

Del análisis realizado en el apartado anterior se desprende que los resultados obtenidos en la prueba por el grupo experimental son mejores que los obtenidos por el grupo control. Para corroborar este hecho hemos efectuado la comparación de medias de los resultados de ambos grupos empleando el método usual de *contraste de hipótesis* ([Quesada y otros, 1989] y [Mendenhall y Sincich, 1997]) que hemos efectuado mediante SPSS. Veamos a continuación un resumen de los resultados.

Contraste de hipótesis

Hemos considerado el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ (nivel significativo) para realizar el siguiente contraste:

La hipótesis nula H_0 la enunciamos diciendo que no existe diferencia en las medias μ_c y μ_e de los resultados obtenidos en la prueba de evaluación para las poblaciones de las que proceden los grupos control y experimental respectivamente. La hipótesis alternativa H_a la enunciamos diciendo que la media de los resultados del grupo experimental es mayor que la media de los resultados del grupo control. En resumen:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_e = \mu_c \\ H_a &: \mu_e > \mu_c \end{aligned}$$

Los resultados de este contraste son los que aparecen en las tablas de la figura 6.8, cuya correcta interpretación requiere tener en cuenta las mismas consideraciones ya establecidas en el caso de la prueba de nivel (ver sección 6.2.2).

De las tablas de la figura 6.8 podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. Nivel de significación frontera para la igualdad de varianzas: 0,008, por lo que al ser $0{,}025 > 0{,}008$ para $\alpha = 0{,}05$, *se rechaza la hipótesis de igualdad de varianzas y se acepta la no igualdad de varianzas.*

2. Nivel de significación frontera para la igualdad de medias, no asumiendo igualdad de varianzas: 0,023, por lo que al ser $0{,}05 > 0{,}023$ para $\alpha = 0{,}05$, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, es decir:

Prueba T

Estadísticos de grupo

	GRUPO	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
EVALUAC	Control	55	4,3929	2,98642	,40269
	Experimental	25	5,7380	2,06700	,41340

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
EVALUAC	Se han asumido varianzas iguales	7,470	,008	-2,038	78	,045	-1,3451	,66010	-2,65925	-,03094
	No se han asumido varianzas iguales			-2,331	65,102	,023	-1,3451	,57711	-2,49763	-,19255

Figura 6.8: Prueba de evaluación. Resultados del contraste de hipótesis con SPSS.

se acepta que la media de los resultados de la prueba de evaluación de la población experimental es mayor que la de la población control al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

6.4.3. Algunas conclusiones puntuales sobre los resultados de la prueba de evaluación

Presentamos a continuación, a modo de resumen, las conclusiones puntuales más importantes sobre los resultados obtenidos en la prueba de evaluación. Las conclusiones que nos parecen más relevantes son las siguientes:

PE-1: Los resultados obtenidos con la metodología didáctica experimental han sido mejores que los resultados obtenidos con la metodología didáctica usual con respecto a lo que mide la prueba de evaluación.

Esta conclusión se deduce del contraste de hipótesis descrito en la sección anterior, que permite aceptar la hipótesis de mejores resultados en media en la población experimental que en la población control al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

Observando las medias de cada una de las 16 preguntas de las que consta la prueba de evaluación (ver tablas H.4 y H.5 del apartado H.3 del apéndice H), se puede concluir que:

PE-2: La mejora mencionada en la conclusión PE-1 se ha producido en 12 de las 16 preguntas de la prueba.

Por tanto, no se ha producido tal mejora en las tareas 3, 14, 15 y 16, en las que las medias son prácticamente iguales (0,05, 0,03, 0,04 y 0,05 puntos de diferencia a favor de la media del grupo control).

Aunque en la sección 6.2.2 se aceptó la igualdad de medias en los resultados de la prueba de nivel, es importante tener en cuenta que la media del grupo experimental fue de 0,14 puntos sobre 10 superior a la del grupo control. Esta diferencia se ha elevado en la prueba de evaluación a 1,35 puntos a favor del grupo experimental, lo que quiere decir que:

PE-3: La mejora neta producida en el rendimiento de los alumnos ha sido de 1,21 puntos sobre 10, si comparamos sólo valores muestrales.

6.5. Aplicación y análisis de los resultados de las encuestas

Como se explica con detalle en la sección 4.6, la encuesta, cuyo protocolo completo se incluye en el apartado 4.6.3, es un instrumento de recogida de información sobre algunos datos objetivos relacionados con las calificaciones y otros aspectos de la vida académica de los alumnos así como sobre datos subjetivos relacionados con opiniones y puntos de vista sobre los procesos didácticos desarrollados y las consecuencias de su participación en los mismos.

Con todo ello se espera:

1. *Conocer* el punto de vista de los protagonistas sobre las metodologías de enseñanza, tanto control como experimental, en todos sus aspectos: efectividad, idoneidad, dificultades de implementación, actitudes hacia ellas, etc.

2. *Confirmar,* como así ocurre después de analizar los resultados, la equivalencia de los dos grupos de alumnos y su procedencia de la misma población en lo que se refiere a los aspectos centrales del problema de investigación (rendimiento y preparación en Matemáticas, actitud, expectativas, motivación, etc.). Esta confirmación se ve cada vez más firme cuando, junto a los

datos de otras fuentes (prueba de nivel, observaciones, tratamientos, prueba de evaluación), se examinan y comparan los datos objetivos (notas, horas de dedicación, etc.) y las respuestas subjetivas a las cuestiones del bloque común del cuestionario.

3. *Comprobar* que la metodología didáctica experimental es viable desde el punto de vista de los alumnos y que mejora ciertos aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje del tema *Integrales de Línea.*

4. *Contribuir,* en definitiva, a consolidar una posición más estable para aceptar la bondad de las conjeturas del estudio y la idoneidad de la metodología de investigación para dar respuestas a las cuestiones del problema abordado.

La aplicación del cuestionario se llevó a cabo inmediatamente después de la realización de la prueba de evaluación. En ambos grupos se repartió el cuestionario al finalizar dicha prueba y se requirió a los alumnos que lo cumplimentaran en casa y lo entregaran en un plazo máximo de una semana. De esta forma se intentó evitar, en la medida de lo posible, el riesgo de que lo contestaran rápidamente sin realizar una reflexión previa sobre las preguntas y sus posibles respuestas. En total se recogieron 77 cuestionarios cumplimentados, correspondiendo 46 de ellos al grupo control y 31 al grupo experimental. De estos 31 cuestionarios, 22 corresponden a los alumnos de este grupo que han asistido a la clase en el laboratorio.

Como se puede comprobar en lo que sigue, como consecuencia del análisis realizado, creemos que la información recogida es más que suficiente para los propósitos de la investigación y para los fines particulares de la encuesta que hemos recordado anteriormente. Sobre todo si se tiene en cuenta que la información proporcionada se va a completar y contrastar con los resultados de las entrevistas que se van a exponer en el apartado 6.6 de este mismo capítulo.

Desde el punto de vista del tratamiento de la información, las respuestas se han resumido en las tablas H.6 y H.7 del apartado H.4 del apéndice H para el grupo control y en las tablas H.8 y H.9 del mismo apartado y apéndice para el grupo experimental. Por otra parte, las transcripciones de los cuestionarios del grupo control figuran en el anexo III y las del grupo experimental en el anexo VII.

La información se analizará por bloques de preguntas, recordándose al inicio de cada bloque cuáles son las cuestiones consideradas así como las posibles respuestas a cada una de ellas. Además de los comentarios globales sobre el bloque de preguntas, se analizarán particularmente algunos ítemes cuando ello se considere relevante para el estudio.

Por otra parte, hemos de indicar que, aunque el análisis de las respuestas será fundamentalmente cualitativo, emplearemos también recuentos y porcentajes en aquellas cuestiones que lo permitan. En estos casos, nos apoyaremos en datos estadísticos elementales, tales como la media y la desviación típica, para resumir las respuestas a las cuestiones en las que se han cuantificado las modalidades y comparar los valores medios y las desviaciones. En este sentido hemos de indicar que las cuestiones susceptibles de un tratamiento de tal tipo son limitadas y diferentes para los grupos control y experimental, motivo por el cual las tablas de medias y desviaciones del grupo control incluyen las preguntas 1 a la 17 y las del grupo experimental las preguntas 1 a la 32, con excepción, en ambos casos, de la cuestión número 14 que no admite dicho tratamiento.

En las tablas 6.1 y 6.2 figuran las medias y desviaciones típicas de las respuestas dadas a las cuestiones correspondientes. Recuérdese que las respuestas varían de 1 a 5 y que estamos considerando variables continuas, aunque referidas a respuestas discretizadas.

	1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
$\overline{x}$	3,15	2,70	3,07	1,04	4,87	2,61	3,02	1,67	1,85	3,50
σ	0,97	0,82	0,91	0,29	0,34	0,86	0,39	0,48	0,67	1,28
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	
$\overline{x}$	3,04	2,04	2,91	3,85	4,37	4,24	3,78	3,76	3,91	
σ	0,37	0,84	0,63	0,67	0,68	0,71	0,73	0,57	0,63	

Tabla 6.1: Grupo control. Medias y varianzas.

Veamos a continuación el análisis de los resultados en cada uno de los bloques en que se divide el cuestionario.

	1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**	**11ª**	**12ª**
$\overline{x}$	2,93	2,54	2,93	1,57	4,87	2,42	2,97	1,74	1,77	3,77	2,93	2,03
σ	1,01	0,64	1,05	1,04	0,34	0,76	0,66	0,63	0,80	1,01	0,64	0,95
	13ª	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	**18ª**	**19ª**	**20ª**	**21ª**	**22ª**
$\overline{x}$	2,81	3,58	4,42	3,97	3,94	3,94	3,97	3,73	2,59	3,48	2,86	3,18
σ	0,48	0,76	0,67	0,75	0,77	0,57	0,60	1,16	1,05	0,93	1,04	0,96
	23ª	**24ª**	**25ª**	**26ª**	**27ª**	**28ª**	**29ª**	**30ª**	**31ª**	**32ª**		
$\overline{x}$	1,82	3,23	1,67	2,32	2,00	3,36	3,32	3,18	3,73	3,09		
σ	1,18	0,81	0,80	1,04	0,82	0,73	0,84	0,73	0,94	0,81		

Tabla 6.2: Grupo experimental. Medias y varianzas.

6.5.1. Bloque A-Antecedentes

Este primer bloque está constituido por las tres primeras cuestiones, que son:

1. Calificación media en las asignaturas de Matemáticas de Bachillerato:

   1. Suficiente 2. Bien 3. Notable 4. Sobresaliente 5. Matrícula de Honor

2. Calificación media en Selectividad:

   1. [4,5) 2. [5,6.5) 3. [6.5,8) 4. [8,9) 5. [9,10]

3. Calificación de Matemáticas en Selectividad:

   1. [0,3) 2. [3,5) 3. [5,7) 4. [7,9) 5. [9,10]

El cálculo de los valores medios y desviaciones de las respuestas en ambos grupos arroja los resultados que figuran en la tabla 6.3.

		1ª	**2ª**	**3ª**
Grupo Control	$\overline{x}$	3,15	2,70	3,07
	σ	0,97	0,82	0,91
Grupo Experimental	$\overline{x}$	2,93	2,54	2,93
	σ	1,01	0,64	1,05

Tabla 6.3: Bloque A-Antecedentes.

Del análisis de los resultados anteriores se pueden establecer las siguientes conclusiones puntuales relacionadas con los antecedentes:

ENC-1: Existen mínimas diferencias en cuanto a los antecedentes de los alumnos de los dos grupos (control y experimental) sobre calificaciones previas en Matemáticas y en Selectividad. Se puede decir que dichos antecedentes son, en media, prácticamente iguales.

En general podemos decir que hay una ligera diferencia a favor de los alumnos del grupo control y que en los tres casos se encuentran ambos grupos igualmente distribuidos, puesto que las desviaciones típicas son también muy similares.

La conclusión anterior refuerza la afirmación de que la composición de los grupos control y experimental es la misma a efectos de lo que se mide y que las pequeñas diferencias en los resultados de la prueba de nivel pueden ser debidas al azar. Por tanto, podemos concluir:

ENC-2: Los grupos control y experimental son equivalentes en cuanto a la formación matemática previa de sus integrantes, medida en los términos de las tres primeras cuestiones de la encuesta.

ENC-3: Las dos muestras (control y experimental) proceden de la misma población con respecto a las variables incluidas en las tres primeras cuestiones de la encuesta.

6.5.2. Bloque B-Asignatura Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales

Las cuestiones que conforman este segundo bloque son las siguientes:

4. Número de exámenes finales de la asignatura a los que se ha presentado hasta ahora:
   1. 0 (ninguno)   2. uno   3. dos   4. tres   5. cuatro o más

5. Asiste a clase:
   1. Nunca   2. A veces   3. La mitad aproximadamente   4. Casi siempre   5. Siempre

6. Estimación de horas a la semana que dedica al estudio personal de la asignatura:
   1. [0,2)   2. [2,4)   3. [4,6)   4. [6,8)   5. 8 horas o más

		4ª	**5ª**	**6ª**
Grupo Control	$\overline{x}$	1,04	4,87	2,61
	σ	0,29	0,34	0,86
Grupo Experimental	$\overline{x}$	1,57	4,87	2,42
	σ	1,04	0,34	0,76

Tabla 6.4: Bloque B-Asignatura.

Se trata de cuestiones independientes, aunque comparables dos a dos en los grupos en estudio. Los datos para ambos grupos se pueden resumir en la tabla 6.4.

Un análisis elemental de la información contenida en la tabla nos conduce a la siguiente conclusión:

La asistencia a clase y el tiempo de estudio personal dedicado a la asignatura es prácticamente igual en ambos grupos. El único dato en el que se produce una ligera diferencia, no relevante por su bajo número, es en el número de convocatorias utilizadas. Esto nos permite asegurar que:

ENC-4: Los alumnos del grupo control y del grupo experimental presentan una situación similar ante la asignatura en lo que se refiere a asistencia a clase y dedicación a la misma.

ENC-5: Se da un alto grado de asistencia a clase de la asignatura en ambos grupos (casi todos los alumnos afirman que asisten siempre a clase de esta asignatura).

ENC-6: Los alumnos de ambos grupos, o no se han presentado a ningún examen o lo han hecho a lo sumo a uno. En el grupo experimental, sin embargo, hay más alumnos que en el grupo control que han realizado al menos un examen de la asignatura.

6.5.3. Bloque C-Integrales de Línea. Clases en la pizarra

Para analizar los datos de este bloque con más detalle vamos a dividir el análisis de respuestas en 3 partes: ítemes del 7 al 13, ítem 14 e ítemes del 15 al 17. El motivo es obvio: el ítem 14 es especial y no es transformable en información cuantitativa y los ítemes del 15 al 17 tienen una estructura idéntica en cuanto a respuestas y valoraciones posibles.

Ítemes del 7 al 13

Forman un bloque heterogéneo de cuestiones en el que se mezclan opiniones, valoraciones y estimaciones personales en torno a la metodología didáctica tradicional del tema. Las cuestiones son las siguientes:

7. El tiempo dedicado al tema en clase ha sido:

   1. Muy escaso 2. Escaso 3. Adecuado 4. Sobrado 5. Excesivo

8. En relación con lo que he aprendido, el método empleado para desarrollar el tema ha sido:

   1. Muy eficaz 2. Eficaz 3. Sin efecto, ni en un sentido ni en otro 4. Ineficaz 5. Muy ineficaz

9. La distribución entre teoría y problemas ha sido:

   1. Muy adecuada 2. Bastante adecuada 3. Normal 4. Poco adecuada 5. Nada adecuada

10. De los problemas y ejercicios propuestos he realizado:

   1. Ninguno 2. Menos de la mitad 3. La mitad 4. Más de la mitad 5. Todos

11. La dificultad de los problemas y ejercicios propuestos creo que es:

   1. Mucha 2. Bastante 3. Normal 4. Poca 5. Ninguna

12. ¿Cuántas horas le ha dedicado al estudio personal del tema?

   1. [0,1) 2. [1,4) 3. [4,7) 4. [7,10) 5. 10 horas o más

13. El tema, en general, ha resultado ser:

   1. Muy fácil 2. Fácil 3. Normal 4. Difícil 5. Muy difícil

Tratando, como siempre, los números naturales correspondientes a las diversas modalidades como valores discretizados de hipotéticas variables continuas, se obtienen los datos que figuran en la tabla 6.5.

De un primer análisis comparativo por columnas se deduce que hay bastante concordancia en las respuestas dadas en ambos grupos a cada una de las cuestiones del bloque. No obstante se produce una ligera diferencia en el ítem 10, aunque

		7ª	**8ª**	**9ª**	**10ª**	**11ª**	**12ª**	**13ª**
Grupo Control	$\overline{x}$	3,02	1,67	1,85	3,50	3,04	2,04	2,91
	σ	0,39	0,48	0,67	1,28	0,37	0,84	0,63
Grupo Experimental	$\overline{x}$	2,97	1,74	1,77	3,77	2,93	2,03	2,81
	σ	0,66	0,63	0,80	1,01	0,64	0,95	0,48

Tabla 6.5: Bloque C1-Integrales de Línea en pizarra.

no parece que pudiera llegar a ser significativa si se hiciera una comparación en este sentido.

En dicho ítem 10, los alumnos del grupo experimental afirman haber resuelto mayor número de ejercicios propuestos que los que indican los alumnos del grupo control. No obstante podemos concluir que:

ENC-7: Los alumnos de ambos grupos declaran haber realizado más de la mitad de los ejercicios propuestos durante el desarrollo del tema.

Del resto de los ítemes podemos deducir las siguientes conclusiones generales:

ENC-8: Los alumnos de ambos grupos coinciden en afirmar, en relación con las clases en la pizarra sobre el tema *Integrales de Línea*, que:

- **El tiempo dedicado al tema ha sido el adecuado.**
- **El método empleado ha sido eficaz.**
- **La distribución entre teoría y problemas ha sido bastante adecuada.**
- **La dificultad de los problemas y ejercicios propuestos ha sido normal.**
- **Se ha producido una dedicación entre 1 y 4 horas al estudio personal del tema.**
- **La dificultad del tema ha sido normal.**

ENC-9: Las opiniones de los alumnos de ambos grupos sobre las cuestiones de la conclusión ENC-8 avalan la equivalencia de los mismos y descartan la posibilidad de que las diferencias de rendimiento encontradas sean debidas a diferencias en estos aspectos.

Ítem 14

Se trata aquí de pulsar la opinión de los alumnos sobre las posibles causas de la dificultad del tema, buscando distinguir entre la posibilidad de que dicha dificultad sea debida al procedimiento metodológico seguido o a otras causas ajenas al proceso didáctico.

14. Opino que si el tema le ha resultado difícil a un alumno ha sido por:

1. Preparación previa del alumno	2. Exigencias de la asignatura
3. Método de enseñanza seguido	4. Dificultad propia de la materia

5. Otros o varios de los anteriores (indicar):

De las respuestas a este ítem se puede deducir la siguiente conclusión puntual:

ENC-10: La opinión de los alumnos se reparte al 50 % en que la preparación del alumno y la dificultad propia de la materia son las principales causas de la dificultad del tema tratado.

ENC-11: La casi totalidad de los alumnos atribuyen la posible dificultad del tema a causas que no tienen ninguna relación con el método de enseñanza seguido. De hecho, sólo 1 alumno de los 77 encuestados atribuye la dificultad al método de enseñanza seguido.

Ítemes del 15 al 17

En este grupo de ítemes se pide al alumno que haga un ejercicio de reflexión metacognitiva, es decir, se pide que reflexione sobre el propio aprendizaje en torno al tema y sobre la comprensión alcanzada en los diferentes contenidos explicados en clases de pizarra y trabajados mediante ejercicios y problemas preparados para ello. Las cuestiones son las siguientes:

15. Con el desarrollo del tema en clases de pizarra he alcanzado un grado de asimilación/comprensión del concepto de:

a) parametrización de caminos:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

b) forma diferencial exacta:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

c) función potencial:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

d) integral de línea de una forma diferencial a lo largo de un camino:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

16. Con el desarrollo del tema en clases de pizarra he alcanzado un nivel de destrezas y estrategias para resolver integrales de línea:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

17. Mi valoración global sobre el rendimiento y el aprendizaje que he realizado en el tema es:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4. Bueno 5. Muy bueno

		15a	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**
Grupo	$\overline{x}$	3,85	4,37	4,24	3,78	3,76	3,91
Control	σ	0,67	0,68	0,71	0,73	0,57	0,63
Grupo	$\overline{x}$	3,58	4,42	3,97	3,94	3,94	3,97
Experimental	σ	0,76	0,67	0,75	0,77	0,57	0,60

Tabla 6.6: Bloque C3-Integrales de Línea en pizarra.

Transformando, como siempre, las respuestas cualitativas en valores numéricos discretos y considerando éstos como valores de una hipotética variable continua, obtenemos las medias y desviaciones que aparecen en la tabla 6.6. Del examen de los datos podemos extraer las siguientes conclusiones puntuales:

ENC-12: Los alumnos de ambos grupos afirman haber alcanzado un grado de asimilación cercano a la categoría "bueno" en todos los conceptos desarrollados en las clases de pizarra.

Destaca el grado de asimilación alcanzado en el concepto de forma diferencial exacta (cercano a $4,5$ en ambos grupos). Por otra parte, los dos conceptos donde se dan algunas diferencias son: parametrización de caminos (ítem 15a) y función potencial (ítem 15c). En ellos, los alumnos del grupo control afirman haber alcanzado un grado de asimilación ligeramente superior al alcanzado en el grupo experimental, si bien creemos que dichas apreciaciones no son significativamente diferentes.

ENC-13: El nivel de destrezas y estrategias aprendidas en las clases de pizarra para resolver integrales de línea se sitúa, según los alumnos de los dos grupos, en una categoría muy cercana a "bueno".

ENC-14: La valoración global sobre el rendimiento y el aprendizaje propios en ambos grupos es la de "buena".

Al finalizar este bloque se requería al alumno que comentara todas las observaciones que deseara añadir sobre lo tratado en este apartado. Entre las más destacadas figuran las siguientes:

- Clases amenas y buenas explicaciones (referencia `EC04`, anexo III).
- ¡Ojalá todas las asignaturas siguieran este método! (referencia `EC08`, anexo III).
- Esta asignatura debería impartirse en el primer cuatrimestre debido a que los conceptos que se aprenden sirven de gran ayuda para el resto de las asignaturas (referencia `EC14`, anexo III).
- El tema se tendría que haber tratado con más profundidad (referencia `EC15`, anexo III).
- Es la única asignatura donde el profesor se integra con los alumnos a la hora de dar las clases, por lo que resulta muy fácil asimilar los conceptos (referencia `EC22`, anexo III).
- Las explicaciones han sido muy buenas (referencias `EC34` y `EC41`, anexo III).
- Se ha despertado mi amor por las Matemáticas (referencia `EC39`, anexo III).

- Los problemas de la relación deberían tener un mayor grado de dificultad (referencia `EC40` en el anexo III, y referencias `EE26` y `EE28` en el anexo VII).
- Lo más difícil del tema ha sido la parametrización de caminos (referencia `EE08`, anexo VII).
- Este es el mejor método de enseñanza de esta facultad. Sois una excepción, sois de los pocos que os preocupais en enseñar (referencia `EE13`, anexo VII).
- Mi aprendizaje ha sido bueno porque la materia del tema se ha dado bien y sin prisas (referencia `EE19`, anexo VII).
- Me parece que es muy bueno dar teoría y a continuación un ejemplo relacionado (referencia `EE25`, anexo VII).
- Encuentro muy importante el trabajo realizado por el alumno en casa (referencia `EE29`, anexo VII).
- La asignatura me parece bien impartida (referencia `EE31`, anexo VII).

6.5.4. Bloque D-Integrales de Línea. Clases con Derive

Tal y como se explica en el apartado 4.6.3, en este bloque aparecen ítemes enunciados en forma positiva y negativa para evitar el posible error de aquiescencia. Por tanto, para realizar el análisis de las respuestas y con el fin de que los resultados globales se expresen de la forma más clara posible, dividimos el conjunto de cuestiones correspondientes a este bloque en tres partes. En primer lugar consideraremos los ítemes enunciados en forma positiva que aparezcan desde el 18 al 32. En segundo lugar consideraremos los ítemes enunciados en forma negativa que aparezcan desde el 18 al 32. En tercer lugar abordaremos el análisis de las respuestas a los ítemes que van desde el 33 al 36. Hemos de recordar que los ítemes de este bloque han sido respondidos exclusivamente por los alumnos del grupo experimental que asistieron a la clase desarrollada en el laboratorio, lo que ha dado lugar a un total de 22 cuestionarios cumplimentados en esta parte.

Ítemes del 18 al 32 enunciados en forma positiva

Con este amplio grupo de ítemes se pretende conocer la opinión de los alumnos sobre diversas afirmaciones en torno a la siguiente idea: la utilización de

Derive mediante la realización de comandos sobre algunos contenidos del tema es positiva, mejora la motivación, la comprensión y el aprendizaje y contribuye a la adquisición de técnicas y destrezas algorítmicas.

Las cuestiones puntuales que respondieron los alumnos, cuyos resultados aparecen resumidos en la tabla 6.7, son las siguientes:

18. El uso del ordenador y la elaboración de comandos con Derive motiva al alumno y mejora su actitud hacia el tema y la asignatura.

20. La utilización autónoma de Derive contribuye al desarrollo de destrezas y estrategias para resolver ejercicios y problemas del tema.

22. La elaboración de comandos permite desarrollar la agilidad mental más que las clases tradicionales.

24. La elaboración de comandos ayuda a alcanzar un conocimiento más profundo de la materia.

27. A pesar de los inconvenientes, creo que se aprende más con la elaboración de comandos con Derive que con una clase normal de problemas.

28. La elaboración del comando DIFERENCIALEXACTA para ver si una forma diferencial es exacta mejora la comprensión del procedimiento de cálculo y del concepto en sí.

29. La elaboración del comando POTENCIAL para calcular la función potencial de una forma diferencial exacta mejora la comprensión del procedimiento de cálculo y del concepto en sí.

30. La elaboración del comando LINEAPARAMETRICA para calcular la integral de línea de una forma diferencial a lo largo de un camino mejora la comprensión del procedimiento de cálculo y del concepto en sí.

31. En definitiva y globalmente, la elaboración de comandos con Derive aplicados a integrales de línea es positiva para la comprensión y aprendizaje.

32. En definitiva y globalmente, la asistencia a la clase de integrales de línea con Derive ha mejorado notablemente mi preparación de cara al exámen.

	18ª	**20ª**	**22ª**	**24ª**	**27ª**	**28ª**	**29ª**	**30ª**	**31ª**	**32ª**
$\overline{x}$	3,73	3,48	3,18	3,23	2,00	3,36	3,32	3,18	3,73	3,09
σ	1,16	0,93	0,96	0,81	0,82	0,73	0,84	0,73	0,94	0,81

Tabla 6.7: Bloque D1-Integrales de Línea con Derive.

Todas las cuestiones enunciadas admiten las siguientes respuestas: 1.TD (totalmente en desacuerdo); 2.D (parcialmente en desacuerdo); 3.N (neutral: ni acuerdo ni desacuerdo); 4.A (parcialmente de acuerdo); 5.TA (totalmente de acuerdo). La adecuada transformación cuantitativa de estas modalidades, en el mismo sentido realizado en apartados anteriores, proporciona los datos que figuran en la mencionada tabla 6.7, cuyo análisis detallado permite enunciar las siguientes consideraciones:

1. Salvo en el ítem 27, la media de las opiniones de los alumnos está por encima de 3 y por debajo de 4 (entre neutral: ni acuerdo ni desacuerdo y parcialmente de acuerdo). Por otra parte, la media total es 3,23, es decir, por encima de 3 en una hipotética escala continua de 1 a 5, lo que constata la afirmación de que la elaboración de comandos con Derive mejora la asimilación de los contenidos de este tema y que, con las cautelas necesarias, son plausibles las afirmaciones enunciadas al comienzo de este subapartado, es decir:

   ENC-15: Los alumnos creen mayoritariamente que **la utilización de Derive para elaborar comandos sobre algunos contenidos del tema *Integrales de Línea* y, en general, como herramienta auxiliar, es positiva, mejora la motivación, la comprensión y el aprendizaje y favorece la adquisición de técnicas y destrezas algorítmicas**.

2. En cuanto al ítem 27:

   ENC-16: Los alumnos creen de forma mayoritaria que **se aprende más con una clase normal de problemas**.

   Hemos de decir que la respuesta no es sorprendente, aunque vaya en sentido contrario al del resto de ítemes. Quizás debemos recordar aquí que los alumnos saben que el examen final de la asignatura consta únicamente de problemas escritos y que éstos, con frecuencia, asocian el término *aprender* a la idea de preparar el examen, es decir, a la situación de máxima rentabilidad: aprender implica aprobar. Que duda cabe que, en estas circunstancias, la mejor preparación es la que conduce directamente al aprobado, es decir, la preparación "ad hoc" de tareas similares a las del examen. No obstante, también hemos de reconocer que se trata de un leve cambio de tendencia en las opiniones.

Ítemes del 18 al 32 enunciados en forma negativa

Se trata aquí del mismo planteamiento que el realizado para las cuestiones positivas pero en sentido contrario y, a veces, con otras palabras. Las cuestiones son las siguientes:

19. La elaboración de comandos con DERIVE no mejora la asimilación y comprensión de los contenidos más que otros métodos de enseñanza.

21. La elaboración de comandos no es útil para conocer a fondo la naturaleza, estructura y funcionamiento de los conocimientos del tema.

23. La elaboración de comandos con DERIVE es una pérdida de tiempo que se debería dedicar a resolver problemas y ejercicios con lápiz y papel.

25. El uso del ordenador dificulta la interacción entre alumnos y entre profesor y alumnos.

26. La elaboración de comandos no es un método útil, porque el aprendizaje de DERIVE es un obstáculo añadido a la propia dificultad del tema.

Recordemos de nuevo que todas las proposiciones admiten las siguientes respuestas: 1.TD (totalmente en desacuerdo); 2.D (parcialmente en desacuerdo); 3.N (neutral: ni acuerdo ni desacuerdo); 4.A (parcialmente de acuerdo); 5.TA (totalmente de acuerdo), por lo que, utilizando el mismo proceso de cuantificación de respuestas ya descrito en apartados anteriores, obtenemos la tabla 6.8 de medias aritméticas y desviaciones típicas.

	19ª	**21ª**	**23ª**	**25ª**	**26ª**
$\overline{x}$	2,59	2,86	1,82	1,67	2,32
σ	1,05	1,04	1,18	0,80	1,04

Tabla 6.8: Bloque D2-Integrales de Línea con Derive.

De los resultados se deduce que las medias están por debajo de 3 (neutral: ni acuerdo ni desacuerdo). Incluso en dos de ellas (23 y 25) la media está por debajo de 2 (parcialmente en desacuerdo).

Relacionando esta parte negativa con la positiva analizada anteriormente vemos que los alumnos opinan que es útil la elaboración de comandos con Derive para una mejor asimilación de los contenidos desarrollados en el tema. Más concretamente:

ENC-17: Los alumnos opinan mayoritariamente que **no es cierto que la elaboración de comandos con Derive sea una pérdida de tiempo ni que dificulte las relaciones con el profesor y con otros compañeros**.

ENC-18: Los alumnos opinan que **no es cierto que la elaboración de comandos sea un método inútil porque Derive sea un obstáculo añadido a la propia dificultad del tema** (desacuerdo parcial con la afirmación correspondiente).

ENC-19: Los alumnos opinan que **no es seguro que Derive mejore la asimilación y comprensión más que otros métodos** (leve inclinación al desacuerdo parcial con la afirmación correspondiente) **ni que sea útil para conocer a fondo la naturaleza, estructura y funcionamiento de los contenidos matemáticos** (neutral: ni acuerdo ni desacuerdo).

Ítemes del 33 al 36

El análisis del bloque D se completa con las cuatro cuestiones siguientes sobre la parte específica de la metodología experimental:

33. ¿Considera suficientes los comandos desarrollados con DERIVE en el tema *Integrales de Línea*?, ¿cree que sería útil la elaboración de algunos más? En caso afirmativo indíquese cuales o sobre qué contenidos.

34. Enumere las principales ventajas e inconvenientes que detecta en esta metodología de enseñanza.

Ventajas: Inconvenientes:

35. ¿Se debería utilizar el procedimiento seguido en el resto de temas de la asignatura? Razone la respuesta.

36. De las tres partes: a) Teoría, b) Ejercicios y problemas en pizarra y c) Ejercicios y problemas con la elaboración de comandos con DERIVE, indique qué porcentajes habría que dedicar a cada parte en un desarrollo ideal de la asignatura.

Los resultados sólo admiten un análisis cualitativo apoyado en los porcentajes de las respuestas registradas. Veamos cuáles son las principales conclusiones puntuales del estudio de esta parte.

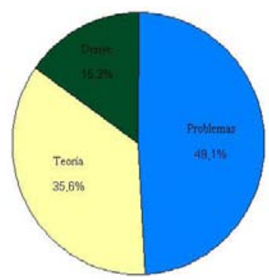
ENC-20: Todos los alumnos asistentes a la clase de laboratorio consideran suficiente el número de comandos realizados (ítem 33).

ENC-21: Los alumnos destacan muchas más ventajas que inconvenientes para la metodología experimental. Las respuestas van en la línea ya conocida en anteriores cuestiones, es decir: mejor asimilación de contenidos, clases más amenas, clases más "didácticas", mejor preparación global de la asignatura, los contenidos de la asignatura se ven desde otro punto de vista, etc. Entre las desventajas destacaremos dos: no entra en el examen y habría que dedicarle más tiempo para sacarle todo el provecho (ítem 34).

ENC-22: El 83,33 % de los alumnos asistentes a la clase de laboratorio consideran que se debería utilizar esta metodología en todos los temas de la asignatura, argumentando que es la metodología más idónea. Sin embargo, justificándolo básicamente porque no entra en examen, un 16,67 % cree que no se debería utilizar (ítem 35).

ENC-23:

La distribución ideal de las clases de esta asignatura, según los alumnos, **sería: 35,6 % de clases teóricas, 49,1 % de clases de ejercicios y problemas en la pizarra y un 15,3 % de ejercicios y problemas con la elaboración de comandos con Derive** (ítem 36).



De nuevo, al finalizar este bloque se le requería al alumno que comentase todas las observaciones que deseara añadir sobre lo tratado en este apartado. Destacamos entre ellas las siguientes:

- Creo que estas clases de laboratorio deberían impartirse en una asignatura optativa (referencia `EE07`, anexo VII).

- Creo que todas las asignaturas deberían llevarse así por parte de los profesores (referencia `EE22`, anexo VII).

- El laboratorio debería estar mejor acondicionado para poder tomar apuntes (referencia `EE23`, anexo VII).

6.5.5. Conclusiones adicionales de la encuesta

En este apartado se incluyen algunas conclusiones que se derivan del análisis efectuado sobre la relación existente entre algunas opiniones de los alumnos recogidas en las encuestas y los resultados obtenidos en la prueba de evaluación.

A través de las encuestas (ver la sección 6.5.3) se ha constatado que los alumnos de ambos grupos (experimental y control) tenían una opinión casi idéntica sobre el grado de asimilación adquirido en los conceptos desarrollados en el tema. Incluso cuando en algunos conceptos puntuales había ligeras diferencias, éstas siempre iban en el sentido de la superioridad del grado de asimilación en el grupo control.

Sin embargo, como se expone en la sección 6.4, el resultado obtenido en la prueba de evaluación con la metodología experimental es bastante mejor que el obtenido con la metodología usual de clases de pizarra, a pesar de las opiniones de los alumnos en el sentido de que lo desarrollado en clase de laboratorio no era interesante o útil porque no entraba en el examen.

Como consecuencia de lo anterior llegamos a las siguientes conclusiones:

ENC-24: El alumno no es plenamente consciente de la mejora que se produce en su aprendizaje cuando se elaboran comandos con Derive.

ENC-25: La motivación y la actitud hacia la asignatura y el trabajo con Derive, en un plano secundario y no plenamente consciente, pueden ser factores determinantes para explicar los efectos provocados por la clase de laboratorio y la mejora en el rendimiento en la prueba de evaluación.

6.6. Análisis de las entrevistas

En esta sección se analizan los resultados obtenidos con las entrevistas individuales realizadas a una muestra de alumnos del grupo experimental. El protocolo de estas entrevistas se expone en la sección 4.7 y la transcripción de los resúmenes de las mismas se puede consultar en el anexo VIII.

Recordemos que el objetivo fundamental de las entrevistas es el de completar la información obtenida mediante otros instrumentos de recogida de datos y profundizar sobre los aspectos actitudinales y otras apreciaciones subjetivas de los alumnos del grupo experimental que asistieron a la clase en el laboratorio. Para ello se consideró suficiente realizar un total de seis entrevistas individuales que pasamos a analizar globalmente a continuación agrupando las respuestas a cada una de las preguntas realizadas.

Pregunta 1: ¿Te ha resultado útil la asistencia a la clase de integrales de línea con Derive? ¿Para qué? ¿En qué sentido?

La respuesta claramente mayoritaria es que sí. Todos los alumnos menos uno (que luego justificó su respuesta por su desconocimiento del manejo básico de un ordenador, como se puede observar en la referencia `ENTREVISTA3` del anexo VIII) responden afirmativamente. En conclusión, la opinión más extendida es que:

ENT-1: Derive ayuda a asimilar mejor los conceptos presentados en clase, es positivo porque obliga a utilizar una herramienta informática, permite ver los conceptos con un enfoque distinto y facilita la comprobación de resultados.

Pregunta 2: En cuáles de los aspectos que se relacionan a continuación ha influido el uso de Derive en las clases de integrales de línea. ¿Cómo ha sido dicha influencia? ¿Por qué crees que ha sido así?

- Sobre el aprendizaje y la comprensión.

A esta pregunta, 5 alumnos responden que Derive ha influido positivamente sobre el aprendizaje y la comprensión de los contenidos del tema y 1 que no ha influido en ningún sentido. Del primer grupo de alumnos destacan los que vuelven a afirmar que ha mejorado su asimilación de los contenidos. En consecuencia:

ENT-2: Derive ha influido positivamente sobre el aprendizaje y la comprensión de los contenidos del tema y ha mejorado la asimilación de los contenidos.

- Sobre el rendimiento en exámenes.

La mayoría de los alumnos, en la misma proporción que en la pregunta anterior, responden que:

ENT-3: Derive ha influido positivamente sobre el rendimiento en exámenes.

- Sobre la formación general.

Todos los alumnos afirman que:

ENT-4: Derive ha influido sobre la formación general, ya que es de gran utilidad para un ingeniero aprender a manejar un programa de software matemático como Derive.

- Sobre la actitud y la motivación.

Aquí hemos de destacar la afirmación mayoritaria (5 que sí; 1 que igual) de que:

ENT-5: El trabajo con Derive ha amenizado las clases y con ello ha mejorado la actitud y la motivación.

Pregunta 3: ¿Qué diferencias, tanto positivas como negativas, crees que se dan entre las clases con DERIVE y las clases tradicionales de pizarra en cada uno de los siguientes aspectos?:

- En las interacciones profesor-alumno.

La respuesta mayoritaria (4 alumnos) es que en las clases tradicionales se produce una mayor interacción entre profesor y alumnos. Se basan en que en clase se hacen más preguntas y hay más diálogos abiertos. Los otros 2 alumnos afirman que se dan por igual en ambos sitios. Por lo tanto podemos concluir que:

ENT-6: Las interacciones profesor-alumno ocurren con más frecuencia en las clases de pizarra que en las clases de laboratorio.

- En las interacciones entre alumnos.

En esta pregunta la respuesta está dividida: 3 alumnos opinan que hay mayor número de interacciones en el laboratorio, 2 que hay más en la clase ordinaria y 1 que en igual medida en ambos sitios. Los que afirman que se producen más en el laboratorio se basan en que el ambiente y el método de trabajo hacen que sea mayor la posibilidad de comentar con el compañero. Por lo tanto podemos concluir que:

ENT-7: Las interacciones entre alumnos se producen por igual en las clases de laboratorio y en las clases ordinarias.

- En la motivación e interés hacia el tema.

4 alumnos afirman que la motivación es la misma en las dos situaciones. Un alumno dice que por el hecho de trabajar con el ordenador se está más motivado en el laboratorio y otro comenta que en clase se está más motivado por el hecho de estar viendo los aspectos de la asignatura de los cuales luego se le va a examinar. En consecuencia, lo que plantea una cierta contradicción con la conclusión **ENT-5**:

ENT-8: No hay acuerdo en cuanto a que la motivación sea mayor con un tipo de metodología didáctica que con otro. La motivación es la misma en ambas situaciones.

- En la actitud.

Las respuestas a esta pregunta van en el mismo sentido que en el apartado anterior, es decir:

ENT-9: La actitud es la misma en las clases ordinarias y en las clases con DERIVE.

Pregunta 4: ¿Crees que se debería utilizar el método empleado en las clases de integrales de línea con DERIVE en otros temas de la asignatura? ¿Crees que sería igualmente útil/inútil? ¿Por qué? ¿En qué sentido? ¿Y en otras asignaturas?

En esta pregunta hay una total unanimidad en las respuestas. Los seis alumnos afirman que este método se debería utilizar en el resto de los temas de la asignatura, siguiendo el mismo procedimiento utilizado en este tema, aunque quizás agrupando las clases en el laboratorio en bloques de varios temas. Basan esta afirmación sobre todo en la ventaja que supone poder comprobar los resultados y en la mejora que se produce en la asimilación de los contenidos. En cuanto al resto de las asignaturas de la titulación también hay una opinión común: hay muchas asignaturas donde esta metodología sería útil, como por ejemplo en todas las asignaturas de Matemáticas (en especial *Fundamentos de Cálculo*) así como en la asignatura *Circuitos,* entre otras. En consecuencia, podemos concluir:

ENT-10: El método de realización de comandos con DERIVE se debería utilizar en el resto de temas de la asignatura y sería igualmente útil en otras asignaturas. La utilidad radica en la posibilidad de comprobación y los efectos positivos sobre el aprendizaje y la comprensión.

Para terminar, queremos dejar constancia de las aparentes contradicciones que se han detectado al analizar las respuestas a las entrevistas y de la posible explicación a las mismas. Estas contradicciones o respuestas contrarias a lo esperado, o lo que se podría considerar como razonable, se producen en **ENT-6** y **ENT-7**, a propósito de las interacciones en el aula y en **ENT-5**, **ENT-8** y **ENT-9**, a propósito de la motivación y actitud de los alumnos en las dos situaciones de enseñanza. A pesar de todo, los dos tipos de respuestas, que no se hubieran podido obtener fácilmente por otros medios o mediante otro de los instrumentos empleados, no son tan sorprendentes y contradictorios cuando se realiza una reflexión sobre los alumnos de Ingeniería del tipo de la realizada en la sección 3.6.3. Creemos, por tanto, que las respuestas mencionadas son debidas, en gran parte, a los motivos que se exponen en el apartado citado.

Parte IV
Conclusiones y perspectivas futuras

Contenido de la parte IV

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas futuras

7.1. Introducción

A lo largo del desarrollo de los capítulos anteriores, en especial en el capítulo 6, se han aportado numerosas conclusiones puntuales explícitas junto a reflexiones, razonamientos y resultados que no se han destacado especialmente y que han quedado implícitos en el desarrollo del informe, bien por su menor relevancia o porque no se les ha dedicado la atención necesaria debido a su papel secundario en relación con los propósitos del estudio. Reunir, organizar, completar y analizar dicha información es, pues, una de las tareas que nos queda por realizar para concluir el núcleo del informe. El trabajo completo, cuyos resultados deben formar parte del contenido del presente capítulo, ha de contemplar las siguientes actividades:

1. Completar, organizar y exponer de manera sistemática los resultados puntuales obtenidos.

2. Analizar los datos y resultados desde el punto de vista del problema de investigación y exponer el proceso seguido.

3. Discutir, establecer, organizar y exponer las conclusiones de la investigación.

4. Analizar y exponer las perspectivas futuras de la investigación y de la línea emprendida.

La culminación de las tareas mencionadas nos va a permitir centrar la atención en este capítulo sobre los resultados puntuales obtenidos, sobre los hallazgos y aportaciones más relevantes así como sobre las limitaciones y perspectivas futuras de la investigación. Partiremos, para ello, de los resultados aislados obtenidos con los distintos instrumentos y de las primeras relaciones establecidas entre los mismos (discusión parcialmente realizada en el capítulo anterior). Esta información servirá, a su vez, para efectuar una reflexión y discusión final sobre la bondad/plausibilidad de las conjeturas enunciadas, la consecución de los objetivos planteados, la pertinencia y calidad del estudio, la eficacia del modelo teórico y de la metodología empleada, la posible incidencia de los resultados en la práctica diaria, la potencialidad innovadora del modelo aplicado y del estudio desarrollado y, por fin, la proyección futura de la línea de investigación así como de los estudios desarrollados de forma cooperativa en el seno de la misma.

En los apartados que siguen, tras un breve resumen de los aspectos fundamentales (sección 7.2) y del proceso seguido (sección 7.3), se detallan las principales conclusiones puntuales obtenidas tras el análisis de los datos recogidos con los distintos instrumentos (sección 7.4). A continuación, se discuten y muestran los logros conseguidos y los argumentos en favor de la bondad de las conjeturas del estudio (sección 7.5). Por último, se presentan las limitaciones y dificultades que han aparecido a lo largo del proceso (sección 7.6), junto a las consecuencias para el desarrollo de futuros estudios dentro de la línea de investigación presentada (sección 7.7).

7.2. El problema estudiado

Con el fin de situar convenientemente la investigación y facilitar la interpretación de los resultados, recordamos a continuación un extracto de los aspectos formales que delimitan el trabajo realizado y que son, por este orden, los objetivos, las conjeturas y la metodología de investigación empleada.

7.2.1. Objetivos

El *objetivo general,* a cuya consecución se ha dedicado la investigación, es el siguiente (sección 3.2):

> *Contribuir a la comprensión de la realidad de los procesos y fenómenos de la Educación Matemática en los estudios de Ingeniería, que concebimos dinámica, múltiple, holística y divergente, para poder intervenir sobre ella en orden a su optimización.*

Para la consecución de este propósito central se han marcado los siguientes *objetivos específicos* (sección 3.2):

1. (a) *Comprobar los efectos positivos de la realización de comandos con* Derive *sobre el aprendizaje de la materia Integrales de Línea en la asignatura Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la titulación Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*
1. (b) *Constatar la incidencia positiva del tratamiento didáctico mencionado sobre los diferentes factores del proceso didáctico, sobre las actitudes, conocimientos y destrezas profesionales de sus protagonistas así como sobre los rendimientos de los alumnos en una prueba objetiva del mismo tipo de las que se vienen realizando usualmente en el proceso de evaluación de la asignatura.*
1. (c) *Comprobar la adecuación de la modificación curricular aludida y su compatibilidad con las condiciones usuales del desarrollo de la asignatura así como con las orientaciones oficiales al respecto.*

Además se han considerado también los siguientes *objetivos complementarios* y *generales*:

2. (a) *Encontrar métodos eficaces y viables para optimizar el proceso didáctico y sus resultados en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería.*
2. (b) *Explorar y confirmar, en su caso, la necesidad y relevancia del uso del ordenador como instrumento didáctico en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería.*
2. (c) *Establecer y consolidar un proceso de innovación curricular en la acción en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería.*
2. (d) *Indagar en el marco teórico y en la metodología de investigación adecuados a los fines anteriores.*

7.2.2. Conjeturas

Para la consecución de los objetivos indicados se han sometido a prueba las siguientes conjeturas (sección 3.3):

***Conjetura 1*: *Es posible implementar, de acuerdo con el marco teórico establecido, con las mínimas modificaciones y en las condiciones usuales, una metodología didáctica mixta compuesta de clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática basadas en la realización de comandos con* DERIVE *para la materia Integrales de Línea de la asignatura Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de los estudios de Ingeniería.*

***Conjetura 2*: *La realización de comandos con* DERIVE *facilita el aprendizaje de los conceptos y procedimientos algorítmicos involucrados en el tema Integrales de Línea y mejora la actitud de los alumnos hacia la asignatura en términos de atención, motivación, interés y participación.*

***Conjetura 3*: *La metodología didáctica mixta facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje y es compatible con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios de la asignatura.*

***Conjetura 4*: *La metodología didáctica mixta mejora el dominio y nivel de competencia de los alumnos sobre los contenidos del tema Integrales de Línea, medidos en términos de rendimiento en una prueba objetiva construida de acuerdo con los criterios usuales empleados en las evaluaciones ordinarias de la asignatura.*

***Conjetura 5*: *El marco teórico empleado para fundamentar el estudio y el método de investigación basado en la combinación de técnicas metodológicas son adecuados y completos para abordar y dar respuesta al problema de investigación.*

7.2.3. Metodología

Como se recordará, para abordar con garantías el problema de investigación, en el sentido de encontrar datos y argumentos fundados suficientes para poder asegurar la bondad de las conjeturas enunciadas en 7.2.2 y conseguir con ello alcanzar las metas enumeradas en 7.2.1, hemos basado la investigación en los siguientes tipos de intervenciones:

1. Estudios y reflexiones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la materia *Integrales de Línea* para la formación de Ingenieros Técnicos de Telecomunicación, tanto en su vertiente "tradicional" como en lo que se refiere a su tratamiento didáctico con la ayuda de la realización de comandos con Derive y sobre el marco teórico y metodológico adecuado para ello.

2. Estudios empíricos realizados en las condiciones especiales en las que se producen los desarrollos curriculares "oficiales" y estructurados en varias partes.

3. Análisis sobre la validez del diseño y sus resultados así como sobre la metodología de investigación empleada.

En concreto, se han realizado los estudios siguientes:

1. *Estudios y experiencias preliminares.* Podemos destacar los siguientes:

   (a) Estudio teórico y elaboración de material sobre el tema *Integrales de Línea.*

   (b) Docencia sobre el mismo contenido utilizando una metodología didáctica expositiva.

   (c) Utilización de nuevas tecnologías (ordenadores y programas informáticos) en la enseñanza de las Matemáticas en general, y en la enseñanza de la materia *Integrales de Línea* en particular.

2. *Estudios teóricos.* Análisis didáctico parcial sobre la enseñanza de *Integrales de Línea* con Derive y sobre el marco teórico y metodológico para la investigación correspondiente.

3. *Estudios empíricos.*

   (a) Estudio exploratorio sobre el aprendizaje del programa Derive y sobre las aplicaciones de Derive a las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería.

   (b) Diseño y desarrollo en el aula de una metodología didáctica mixta (sección 3.6.6) compuesta por clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática con la culminación de los siguientes estudios relacionados con la implementación de dicha metodología y con los resultados alcanzados:

(i) Estudios cualitativos sobre la viabilidad y adecuación del procedimiento al caso particular considerado así como sobre su compatibilidad con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios del tema específico y de la asignatura.

(ii) Estudio cualitativo y comparativo sobre los efectos de la metodología didáctica mixta y de la metodología didáctica usual para indagar sobre la efectividad del método, su incidencia en la mejora del rendimiento y su potencialidad innovadora. El estudio emplea datos cualitativos y cuantitativos y se efectúa la comparación con un procedimiento metodológico didáctico estándar similar al empleado usualmente en el desarrollo de la asignatura.

4. *Estudios complementarios.* Para comprobar que el marco teórico y el método de investigación son adecuados para dar respuesta al problema se han realizado reflexiones de carácter evaluativo sobre:

   (a) La validez del diseño y sus resultados.

   (b) La metodología de investigación, el proceso seguido y la adecuación del diseño realizado y de los instrumentos empleados.

   (c) La investigación en su conjunto, el ajuste a los principios y condiciones de la tendencia que le ha servido de soporte, el grado de consecución de los fines generales de la línea de investigación así como las desviaciones y los aspectos incompletos y necesitados de futuras atenciones.

7.3. Desarrollo del estudio

El trabajo se ha realizado de acuerdo con las tres fases siguientes:

1. La primera fase se inició con los estudios preliminares, con una búsqueda de los antecedentes relacionados con el problema de investigación y el posterior análisis de éstos. Paralelamente se fue concretando el problema de investigación y las primeras formulaciones de las conjeturas. Posteriormente se realizó el diseño del estudio y se elaboraron los distintos instrumentos de recogida y análisis de datos.

2. En la segunda fase se desarrollaron las dos metodologías didácticas, se recogieron los datos mediante los distintos instrumentos, se realizó el análisis

de los mismos y se establecieron las conclusiones puntuales.

3. Por último, en la tercera fase, se procedió a la organización de las ideas y hechos, a la realización de las reflexiones generales, al establecimiento de las conclusiones globales y a la elaboración del presente informe de investigación.

7.4. Resultados y conclusiones puntuales

De acuerdo con los criterios que venimos empleando para la exposición, corresponde ahora atender a las principales conclusiones puntuales que se han obtenido mediante el análisis aislado de los datos recogidos con los distintos instrumentos y que se describen en el capítulo 6. En consecuencia revisamos a continuación dichas conclusiones, agrupadas por instrumentos, organizadas y resumidas brevemente y referenciadas mediante las siglas empleadas en el citado capítulo.

- *Conclusiones de la **prueba de nivel*** (apartado 4.2 del capítulo 4 y apartado 6.2 del capítulo 6):

  PN-1: *Los alumnos del grupo control y del grupo experimental obtienen la misma calificación media en la prueba de nivel con una confianza del 95 %. Además, constituyen muestras equivalentes y homogéneas con respecto al rendimiento matemático en dicha prueba.*

  PN-2: *Los alumnos de ambos grupos han obtenido "bajas" calificaciones en la prueba de nivel* debido, principalmente, a que ésta se realizó sin previo aviso, al día siguiente de finalizar la materia del tema 0 y al comienzo de la asignatura.

  En resumen, **la prueba de nivel ha servido para obtener información sobre la equivalencia de los grupos en estudio en conocimientos, capacidades y destrezas matemáticas relacionadas con el problema de investigación**.

- *Conclusiones de los **ficheros de*** **Derive** (apartado 4.4 del capítulo 4 y apartado 6.3 del capítulo 6):

  FD-1: *Se ha alcanzado un elevado grado de implicación en el seguimiento de las explicaciones del profesor y un elevado porcentaje de éxito en* *la realización de los ejercicios que quedaron pendientes de sus cálculos finales en las clases de pizarra.*

FD-2: *Un alto porcentaje de alumnos realizan correctamente los comandos con* DERIVE *siguiendo las explicaciones del profesor.*

FD-3: *Un porcentaje razonable de alumnos (entre el 55 % y el 70 %) realizan correctamente los ejercicios de comprobación de los comandos siguiendo las indicaciones del profesor.*

FD-4: *En las tareas guiadas por el profesor se ha producido una elevada implicación de los alumnos, que han seguido mayoritariamente todas las actividades propuestas.*

FD-5: *En las tareas autónomas, con excepción del primer comando, se ha producido un bajo porcentaje de realizaciones correctas debido a un planteamiento defectuoso del desarrollo didáctico de esta parte.*

FD-6: *La ausencia de indicaciones explícitas sobre la comprobación de la correcta elaboración de los comandos elaborados autónomamente, ha dado lugar a los bajos resultados obtenidos en la última parte de la experiencia.*

Podemos resumir las conclusiones anteriores en torno a los tres aspectos siguientes:

1. Los datos indican que **la utilización de DERIVE favorece la participación activa de los alumnos y aumenta el interés y la motivación por lo que hacen**.
2. **El análisis de los ficheros pone de manifiesto la eficacia de DERIVE debida a la facilidad de la realización de comandos**.
3. **Para un mejor aprovechamiento de las clases de realización de comandos con DERIVE, hay que delimitar claramente el trabajo a desarrollar por los alumnos**.

- *Conclusiones de la* ***prueba de evaluación*** (apartado 4.5 del capítulo 4 y apartado 6.4 del capítulo 6):

PE-1: *Los resultados obtenidos con la metodología didáctica experimental han sido mejores que los resultados obtenidos con la metodología didáctica usual con respecto a lo que mide la prueba de evaluación.*

PE-2: *La mejora mencionada en la conclusión PE-1 se ha producido en 12 de las 16 preguntas de la prueba.*

PE-3: *La mejora neta producida en el rendimiento de los alumnos ha sido de 1,21 puntos sobre 10*, si comparamos sólo valores muestrales.

En resumen, de los datos y conclusiones de la prueba de evaluación se deduce que:

1. **El rendimiento del grupo experimental es superior al rendimiento del grupo control**.
2. **Dicha superioridad es debida al tratamiento didáctico experimental y, en particular, a las actividades y experiencias realizadas con Derive en la clase de laboratorio**[1].

- *Conclusiones de la* ***encuesta*** (apartado 4.6 del capítulo 4 y apartado 6.5 del capítulo 6):

ENC-1: *Existen mínimas diferencias en cuanto a los antecedentes de los alumnos de los dos grupos (control y experimental) sobre calificaciones previas en Matemáticas y en Selectividad. Se puede decir que dichos antecedentes son, en media, prácticamente iguales.*

ENC-2: *Los grupos control y experimental son equivalentes en cuanto a la formación matemática previa de sus integrantes, medida en los términos de las tres primeras cuestiones de la encuesta.*

ENC-3: *Las dos muestras (control y experimental) proceden de la misma población con respecto a las variables incluidas en las tres primeras cuestiones de la encuesta.*

ENC-4: *Los alumnos del grupo control y del grupo experimental presentan una situación similar ante la asignatura en lo que se refiere a asistencia a clase y dedicación a la misma.*

ENC-5: *Se da un alto grado de asistencia a clase de la asignatura en ambos grupos (casi todos los alumnos afirman que asisten siempre a clase de esta asignatura).*

[1] Esta conclusión se mantiene en suspenso hasta que se analicen y relacionen entre sí todas las conclusiones puntuales que pueden incidir en la explicación causal de los efectos que se mencionan.

ENC-6: *Los alumnos de ambos grupos, o no se han presentado a ningún examen o lo han hecho a lo sumo a uno. En el grupo experimental, sin embargo, hay más alumnos que en el grupo control que han realizado al menos un examen de la asignatura.*

ENC-7: *Los alumnos de ambos grupos declaran haber realizado más de la mitad de los ejercicios propuestos durante el desarrollo del tema.*

ENC-8: *Los alumnos de ambos grupos coinciden en afirmar, en relación con las clases en la pizarra sobre el tema Integrales de Línea, que:*

- *El tiempo dedicado al tema ha sido el adecuado.*
- *El método empleado ha sido eficaz.*
- *La distribución entre teoría y problemas ha sido bastante adecuada.*
- *La dificultad de los problemas y ejercicios propuestos ha sido normal.*
- *Se ha producido una dedicación entre 1 y 4 horas al estudio personal del tema.*
- *La dificultad del tema ha sido normal.*

ENC-9: *Las opiniones de los alumnos de ambos grupos sobre las cuestiones de la conclusión ENC-8 avalan la equivalencia de los mismos y descartan la posibilidad de que las diferencias de rendimiento encontradas sean debidas a diferencias en estos aspectos.*

ENC-10: *La opinión de los alumnos se reparte al 50 % en que la preparación del alumno y la dificultad propia de la materia son las principales causas de la dificultad del tema tratado.*

ENC-11: *La casi totalidad de los alumnos atribuyen la posible dificultad del tema a causas que no tienen ninguna relación con el método de enseñanza seguido*[2].

ENC-12: *Los alumnos de ambos grupos afirman haber alcanzado un grado de asimilación cercano a la categoría "bueno" en todos los conceptos desarrollados en las clases de pizarra.*

ENC-13: *El nivel de destrezas y estrategias aprendidas en las clases de pizarra para resolver integrales de línea se sitúa, según los alumnos de los dos grupos, en una categoría muy cercana a "bueno".*

[2] Sólo 1 alumno de los 77 encuestados atribuye la dificultad al método de enseñanza seguido.

ENC-14: *La valoración global sobre el rendimiento y el aprendizaje propios en ambos grupos es la de "buena".*

ENC-15: Los alumnos creen mayoritariamente que *la utilización de* DERIVE *para elaborar comandos sobre algunos contenidos del tema Integrales de Línea y, en general, como herramienta auxiliar, es positiva, mejora la motivación, la comprensión y el aprendizaje y favorece la adquisición de técnicas y destrezas algorítmicas.*

ENC-16: Los alumnos creen de forma mayoritaria que *se aprende más con una clase normal de problemas.*

ENC-17: Los alumnos opinan mayoritariamente que *no es cierto que la elaboración de comandos con* DERIVE *sea una pérdida de tiempo ni que dificulte las relaciones con el profesor y con otros compañeros.*

ENC-18: Los alumnos opinan que *no es cierto que la elaboración de comandos sea un método inútil porque* DERIVE *sea un obstáculo añadido a la propia dificultad del tema.*

ENC-19: Los alumnos opinan que *no es seguro que* DERIVE *mejore la asimilación y comprensión más que otros métodos ni que sea útil para conocer a fondo la naturaleza, estructura y funcionamiento de los contenidos matemáticos.*

ENC-20: *Todos los alumnos asistentes a la clase de laboratorio consideran suficiente el número de comandos realizados.*

ENC-21: *Los alumnos destacan muchas más ventajas que inconvenientes para la metodología experimental.*

ENC-22: *El 83,33 % de los alumnos asistentes a la clase de laboratorio consideran que se debería utilizar esta metodología en todos los temas de la asignatura.*

ENC-23: *La distribución ideal de las clases de esta asignatura*, según los alumnos, *sería: 35,6 % de clases teóricas, 49,1 % de clases de ejercicios y problemas en la pizarra y un 15,3 % de ejercicios y problemas con la elaboración de comandos con* DERIVE.

ENC-24: *El alumno no es plenamente consciente de la mejora que se produce en su aprendizaje cuando se elaboran comandos con* DERIVE.

ENC-25: *La motivación y la actitud hacia la asignatura y el trabajo con* DERIVE*, en un plano secundario y no plenamente consciente, pueden ser factores determinantes para explicar los efectos provocados por la clase de laboratorio y la mejora en el rendimiento en la prueba de evaluación.*

De los datos y conclusiones de la encuesta podemos realizar la siguiente síntesis a modo de resumen y que, como siempre, mantenemos en suspenso hasta que se contrasten los datos con otras informaciones puntuales:

1. **Las informaciones aportadas por los propios alumnos abundan en la equivalencia entre los dos grupos en múltiples aspectos**. Esto vuelve a indicar que las diferencias son debidas a los tratamientos, aunque habrá que realizar un análisis conjunto de todos los datos para refrendar esta afirmación.
2. **Se producen contradicciones y discrepancias en las opiniones de los alumnos sobre la bondad de ambas metodologías**:
   - Las clases de pizarra son aceptables; se aprende pero parece que las clases con DERIVE son mejores (se debe utilizar en todos los temas de la asignatura).
   - Las clases con DERIVE no son negativas; no son mejores que otras; no son positivas; son positivas y tienen más ventajas que inconvenientes.
3. **Las contradicciones anteriores pueden ser debidas a que los alumnos no han sido plenamente conscientes de la mejora que se produce en su aprendizaje cuando se elaboran comandos con DERIVE, o a que no se han formulado las preguntas adecuadas o de la forma adecuada o a que se trata de aspectos difíciles de responder, como corresponde a cualquier reflexión metacognitiva**.

- *Conclusiones de las* ***entrevistas*** (apartado 4.7 del capítulo 4 y apartado 6.6 del capítulo 6):

ENT-1: DERIVE *ayuda a asimilar mejor los conceptos presentados en clase, es positivo porque obliga a utilizar una herramienta informática,* *permite ver los conceptos con un enfoque distinto y facilita la comprobación de resultados.*

ENT-2: Derive *ha influido positivamente sobre el aprendizaje y la comprensión de los contenidos del tema y ha mejorado la asimilación de los contenidos.*

ENT-3: Derive *ha influido positivamente sobre el rendimiento en exámenes.*

ENT-4: Derive *ha influido sobre la formación general, ya que es de gran utilidad para un ingeniero aprender a manejar un programa de software matemático como* Derive.

ENT-5: *El trabajo con* Derive *ha amenizado las clases y con ello ha mejorado la actitud y la motivación.*

ENT-6: *Las interacciones profesor-alumno ocurren con más frecuencia en las clases de pizarra que en las clases de laboratorio.*

ENT-7: *Las interacciones entre alumnos se producen por igual en las clases de laboratorio y en las clases ordinarias.*

ENT-8: *No hay acuerdo en cuanto a que la motivación sea mayor con un tipo de metodología didáctica que con otro. La motivación es la misma en ambas situaciones.*

ENT-9: *La actitud es la misma en las clases ordinarias y en las clases con* Derive.

ENT-10: *El método de realización de comandos con* Derive *se debería utilizar en el resto de temas de la asignatura y sería igualmente útil en otras asignaturas. La utilidad radica en la posibilidad de comprobación y los efectos positivos sobre el aprendizaje y la comprensión.*

A diferencia de la encuesta, las entrevistas proporcionan datos cuya credibilidad y/o rotundidad de las afirmaciones plantean algunas dudas en virtud del tamaño de la muestra, de la composición de la misma y del propio protocolo utilizado. No obstante, resumimos a continuación los principales resultados que deben ser interpretados con las cautelas oportunas:

1. **Derive facilita y mejora: el aprendizaje, la comprensión y el rendimiento en exámenes** (apreciación subjetiva).

2. **Derive no modifica ni la actitud y motivación de los alumnos, ni la comunicación entre alumnos**.
3. **Derive no favorece la comunicación profesor-alumno más que otros métodos o recursos**.

7.5. Discusión y conclusiones generales

En esta investigación se han conseguido logros y aportado argumentos en favor de la bondad de las cinco conjeturas sometidas a prueba, de lo que se deduce la consecución de los objetivos planteados. Veamos a continuación, con más detalle, en qué nos basamos para realizar las afirmaciones anteriores. Lo haremos con respecto al problema de investigación, en primer lugar, y con respecto al marco teórico y metodológico en los que se ha desarrollado el estudio, en segundo lugar.

7.5.1. Sobre el problema de investigación

Una revisión del proceso seguido arroja las siguientes conclusiones:

- **Con respecto a las conjeturas:**

***Conjetura 1*: *Es posible implementar, de acuerdo con el marco teórico establecido, con las mínimas modificaciones y en las condiciones usuales, una metodología didáctica mixta compuesta de clases de pizarra y clases en el laboratorio de informática basadas en la realización de comandos con* Derive *para la materia Integrales de Línea de la asignatura Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de los estudios de Ingeniería.*

El **capítulo 5** en su totalidad (tanto la descripción de la implementación de los dos tratamientos didácticos como los distintos informes de observación realizados) pone de manifiesto, de forma satisfactoria, la veracidad de esta conjetura. Además, dicha veracidad se ve reforzada por las conclusiones puntuales **FD-1**, **FD-2**, **FD-3** y **FD-4**, por los resultados **ENC-14**, **ENC-16**, **ENC-17**, **ENC-18**, **ENC-21** y **ENC-22** y por la conclusión **ENT-10**.

***Conjetura 2*: *La realización de comandos con* Derive *facilita el aprendizaje de los conceptos y procedimientos algorítmicos involucrados en el tema Integrales de Línea y mejora la actitud de los alumnos hacia la asignatura en términos de atención, motivación, interés y participación.*

Esta conjetura queda suficientemente corroborada con las siguientes conclusiones puntuales: **FD-4** de los ficheros de Derive; **PE-1**, **PE-2** y **PE-3** obtenidas del análisis de los resultados de la prueba de evaluación; la conclusión **ENC-15** de la encuesta y **ENT-1**, **ENT-2** y **ENT-5** de la entrevista. Además, esta conjetura se ve también reforzada por los distintos **informes de observación** realizados.

Que duda cabe de que la mejora observada en el rendimiento ante la prueba objetiva de evaluación es el mejor argumento a favor de la bondad de la afirmación contenida en la primera parte de la conjetura analizada (... Derive *facilita el aprendizaje de ...*). También parece evidente que, si tenemos en cuenta los datos obtenidos, se ha producido un cambio positivo en lo que se refiere a la motivación, interés y participación en la clase de laboratorio. Sin embargo, esta segunda parte de la conjetura no puede tener la misma fuerza, rotundidad y seguridad que la primera y debe ser sometida a nuevas pruebas. El escaso tiempo dedicado al trabajo con Derive, en comparación con el dedicado a las clases de pizarra, y la singularidad y características de la modificación introducida, que supone una mejora puntual importante en relación con las clases tradicionales, aconsejan emplear la cautela en esta segunda parte de la conjetura 2.

***Conjetura 3*:** *La metodología didáctica mixta facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje y es compatible con el diseño y desarrollo curriculares ordinarios de la asignatura.*

De nuevo el **capítulo 5** en su totalidad avala la credibilidad de esta conjetura en lo que se refiere a la compatibilidad de la metodología didáctica mixta con el diseño y desarrollo curricular ordinarios de la asignatura. La plausibilidad de esta conjetura queda reforzada, al mismo tiempo, por las conclusiones puntuales **ENC-17**, **ENC-18**, **ENC-21**, **ENC-22** y **ENC-23** obtenidas de la encuesta y por la conclusión **ENT-10** de la entrevista.

La disminución del periodo de clases tradicionales de pizarra, a costa de la reducción de una parte de las tareas realizadas en dicho periodo para conseguir un hueco en el que introducir las actividades con Derive en el laboratorio, no sólo no ha dificultado el proceso ni ha perjudicado a los resultados, sino que, por el contrario, ha facilitado la enseñanza y ha dado lugar a una metodología totalmente compatible con el desarrollo usual de la asignatura.

***Conjetura 4*:** *La metodología didáctica mixta mejora el dominio y nivel de competencia de los alumnos sobre los contenidos del tema Integrales de Línea,* *medidos en términos de rendimiento en una prueba objetiva construida de acuerdo con los criterios usuales empleados en las evaluaciones ordinarias de la asignatura.*

Las conclusiones puntuales **PE-1**, **PE-2** y **PE-3** obtenidas del análisis de los resultados de la prueba de evaluación y las conclusiones **ENT-2** y **ENT-3** de la entrevista ponen de manifiesto claramente la bondad de esta cuarta conjetura.

***Conjetura 5*:** *El marco teórico empleado para fundamentar el estudio y el método de investigación basado en la combinación de técnicas metodológicas son adecuados y completos para abordar y dar respuesta al problema de investigación.*

Todo **lo descrito en este informe de investigación,** en particular la discusión y las conclusiones que se están tratando, proporciona indicios razonables sobre la adecuación del marco teórico y metodológico para responder al problema de investigación. Sin embargo, las consideraciones incluidas en el apartado 7.6, al que nos remitimos, aconsejan poner en duda la completitud del marco mencionado, en el sentido de que se detectan carencias que debían haber sido subsanadas y que es necesario considerar en futuros estudios.

- **Con respecto a los objetivos:**

La comprobación de las conjeturas ha permitido alcanzar los objetivos propuestos:

1. (a) *Comprobar los efectos positivos de la realización de comandos con* DERIVE *sobre el aprendizaje de la materia Integrales de Línea en la asignatura Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la titulación Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

Objetivo que damos por cubierto en su totalidad y de forma satisfactoria como consecuencia de las **conjeturas 2, 3 y 4**.

1. (b) *Constatar la incidencia positiva del tratamiento didáctico mencionado sobre los diferentes factores del proceso didáctico, sobre las actitudes, conocimientos y destrezas profesionales de sus protagonistas así como sobre los rendimientos de los alumnos en una prueba objetiva del mismo tipo de las que se vienen realizando usualmente en el proceso de evaluación de la asignatura.*

Objetivo cubierto en su totalidad como consecuencia de las **conjeturas 2, 3 y 4**.

1. (c) *Comprobar la adecuación de la modificación curricular aludida y su compatibilidad con las condiciones usuales del desarrollo de la asignatura así como con las orientaciones oficiales al respecto.*

Objetivo cubierto plenamente como consecuencia de la verificación de las **conjeturas 1 y 3**.

2. (a) *Encontrar métodos eficaces y viables para optimizar el proceso didáctico y sus resultados en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería.*

Con la verificación de las **conjeturas 1, 2, 3 y 4** se ha contribuido a la consecución de este objetivo.

2. (b) *Explorar y confirmar, en su caso, la necesidad y relevancia del uso del ordenador como instrumento didáctico en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería.*

Este objetivo se ha alcanzado plenamente con la plausibilidad de las **conjeturas 2, 3 y 4**. No obstante, son necesarios nuevos estudios y aplicaciones diferenciadas variadas para asegurar la relevancia mencionada.

2. (c) *Establecer y consolidar un proceso de innovación curricular en la acción en las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería.*

2. (d) *Indagar en el marco teórico y en la metodología de investigación adecuados a los fines anteriores.*

La comprobación de la **conjetura 5** ha permitido alcanzar los dos últimos objetivos propuestos.

7.5.2. Sobre el marco teórico y metodológico

En cuanto a la evaluación general del modelo teórico y de la línea de investigación abierta podemos decir que dicho marco teórico y metodológico ha servido de guía eficaz para el estudio, puesto que se han respetado las condiciones establecidas y se han alcanzado los fines generales planteados. Los resultados son, pues, globalmente satisfactorios, en la medida en que se han cumplido las expectativas:

- **En relación con las condiciones:**

Compromiso de respeto a la realidad del aula

Este compromiso se ha cumplido, ya que sólo se han introducido las modificaciones estrictamente imprescindibles para realizar el estudio. Además, el desarrollo del estudio no ha influido lo más mínimo en el proceso, salvo en los aspectos positivos registrados y en el rendimiento de los alumnos del grupo experimental.

Compromiso de perjuicio cero e intención innovadora

Los estudios exploratorios realizados en años anteriores (sección 23) proporcionaban indicios razonables de la incidencia positiva de las modificaciones introducidas. Este hecho ha sido claramente corroborado con los resultados obtenidos en todo el proceso, lo que asegura la necesidad y la pertinencia de la introducción oficial y sin reservas de las modificaciones estudiadas, al menos en el contenido que se ha tomado como referencia del estudio.

Compromiso de compatibilidad con el diseño y de respeto a las directrices y orientaciones del Departamento

Como se describió en el capítulo 5, las modificaciones han sido viables y aplicadas en las condiciones usuales sin ninguna otra intervención además de la de la propia profesora responsable de la docencia, los alumnos y los observadores y colaboradores en el estudio. Como también se ha indicado reiteradamente, las modificaciones introducidas se encuentran dentro del espacio curricular de libre determinación por parte del profesor, con la única excepción, en todo caso, de la presencia “extraña” de los observadores.

Compromiso de perdurabilidad y solidez

Este compromiso se ha respetado en su totalidad, debido a que los resultados del estudio son fácilmente asumibles por la mayoría de los profesores y a que la metodología didáctica mixta empleada es fácilmente implementable. De hecho, tras el análisis de los resultados obtenidos en este estudio y en el que se ha realizado simultáneamente sobre el tema *Integrales Múltiples,* los profesores participantes en esta investigación hemos decidido solicitar formalmente al Consejo del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga la inclusión de clases de laboratorio con Derive en el desarrollo curricular oficial.

Consideración de los fenómenos en su totalidad y con toda su complejidad

Por el hecho de habernos basado en una metodología de investigación holística, se han considerado los fenómenos en su totalidad sin tratar de subdividirlos en partes aisladas ni de desvirtuar su carácter sistémico. Esto es lo que ocurre, por otra parte, en los grupos naturales y en las situaciones reales como la que hemos utilizado para desarrollar la investigación.

Participación activa de los profesores con sus propios grupos naturales y colaboración entre ellos

Como se desprende del informe realizado, ha existido una estrecha colaboración e implicación en el estudio por parte de los tres profesores de la asignatura en cuestión. Además, el estudio se ha realizado en dos de los seis grupos naturales en los que se imparte la asignatura. Esta colaboración ha tenido lugar en varios aspectos: preparación de las clases, elaboración y aplicación de instrumentos, observación, triangulación, reflexión, etc.

Por otra parte, se ha culminado con éxito una investigación realizada simultáneamente sobre *Integrales Múltiples* con Derive ([Galán, 2003]), desarrollada bajo la responsabilidad de uno de los profesores del grupo, lo que también pone de manifiesto el alcance de la colaboración producida.

- **En relación con la finalidad general de la línea de investigación:**

Recordemos que con el modelo de trabajo que aporta el marco teórico se pretendía:

- *Conocer a fondo los procesos reales, sin manipulaciones que distorsionen su naturaleza y características.*
- *Identificar y valorar las posibilidades reales de cambio curricular.*
- *Innovar; introducir modificaciones novedosas en dichos procesos reales en orden a su optimización y a la mejora de los resultados.*
- *Crear y difundir conocimientos fundados sobre los fenómenos curriculares relacionados con la Educación Matemática en el aula ordinaria.*
- *Sustituir paulatinamente y de manera fundada: diseños, modelos, métodos, prácticas, contenidos y tareas que se muestran anacrónicas, obsoletas o ineficaces en las clases de Matemáticas de todos los niveles, por nuevos elementos adaptados a las nuevas condiciones, medios y situaciones en las que se desarrollan los procesos educativos en esta materia.*
- *Proporcionar nuevas vías para la formación permanente del Profesorado mediante su implicación en la innovación de su propia práctica docente y en la investigación en el aula con menos formación teórica previa (la necesaria), a costa de una implicación corta en el tiempo pero relevante en cuanto a la aportación de conocimientos a la comunidad y a la sociedad y duradera en experiencias, formación y perspectivas y con más frescura, improvisación, naturalidad, inmersión profunda en el propio objeto de su trabajo y más conocimiento práctico puro sin descuidar las necesarias reflexiones teóricas sobre dicha práctica.*

La justificación de la consecución de estas características se deduce de las siguientes consideraciones:

- Se ha analizado a fondo la realidad sin manipulaciones extrañas que distorsionen su naturaleza y características.
- Se han efectuado cambios curriculares posibles y se han descartado otros no compatibles con el desarrollo usual.
- Se han introducido tareas y usos novedosos en el diseño y desarrollo con el fin de optimizar y conseguir una mejora de los resultados.

- El presente informe es un ejemplo de creación de conocimientos fundados sobre los fenómenos curriculares relacionados con la Educación Matemática en el aula ordinaria.

- Se ha sustituido, de manera fundamentada, el método de enseñanza usual así como las tareas que en los últimos años se venían realizando en el desarrollo didáctico del tema *Integrales de Línea*, por nuevos elementos adaptados a las nuevas condiciones, medios y situaciones en las que se desarrolla dicha materia.

- Se ha proporcionado una nueva vía para la formación permanente del Profesorado mediante una implicación en la innovación educativa y en la investigación de su propia práctica docente como núcleo generador de conocimiento profesional situado.

- **En relación con la metodología de investigación:**

A pesar de lo que se ha mencionado en anteriores apartados y de las limitaciones y dificultades específicas que se han observado y se comentan en el apartado siguiente, podemos decir que las técnicas metodológicas empleadas así como su combinación en el proceso desarrollado nos han permitido efectuar una buena aproximación al fenómeno en estudio y nos han proporcionado información válida y fiable sobre la plausibilidad de las conjeturas enunciadas. Que duda cabe de que dicha información no es absoluta ni completa pero con ella hemos conseguido un avance importante en los conocimientos sobre el proceso didáctico concreto analizado.

- **En relación con la eficacia y la proyección de la línea de estudio:**

Paralelamente al estudio que se presenta, se ha desarrollado, en el seno del mismo grupo, una investigación sobre el tratamiento didáctico de la materia *Integrales Múltiples* con Derive ([Galán, 2003]).

Este trabajo se ha realizado en la misma asignatura y con los mismos patrones y condiciones que los que se han manejado en el estudio presentado. Se ha desarrollado casi simultáneamente al que aquí se discute y en su desarrollo se han tenido en cuenta algunas de las limitaciones y dificultades encontradas, se han realizado numerosas adaptaciones de las decisiones adoptadas para el tema *Integrales de Línea* y, a su vez, ha servido de segundo campo de pruebas para el marco teórico y metodológico utilizado. En este caso, la nueva metodología didáctica se ha implementado en un grupo natural diferente y la investigación se ha llevado a cabo bajo la coordinación de un profesor de la asignatura como investigador principal, miembro también del equipo investigador. Los resultados hasta ahora presentan las mismas características, tanto en tamaño del efecto como en aspectos cualitativos, que las que se han indicado en el presente informe, lo que confirma, aún más si cabe, la utilidad de la metodología didáctica mixta empleada.

7.6. Limitaciones y dificultades

En cualquier trabajo de investigación es importante atender a las limitaciones y posibles carencias encontradas a lo largo del proceso. El motivo es obvio: las limitaciones y deficiencias se han de tener en cuenta, obligatoriamente, en futuras ampliaciones de la investigación o en futuros estudios en los que se utilice, en todo o en parte, el mismo esquema teórico y metodológico de la línea de investigación desarrollada.

Por tal motivo, se presentan a continuación las limitaciones, dificultades y carencias observadas a la vista de los resultados y del desarrollo de la investigación. Son las siguientes:

- **Con respecto a la metodología de investigación y a los instrumentos de recogida de datos**:

Aunque se ha comprobado suficientemente que los instrumentos de recogida de datos han sido válidos para los objetivos planteados y que del análisis de los datos han quedado perfectamente justificados tanto las conjeturas como los objetivos de la investigación, es importante comentar que el protocolo de alguno de ellos puede ser mejorable. Concretamente, se ha observado que tanto las encuestas como las entrevistas podrían haber contemplado cuestiones adicionales para completar, aún más si cabe, la opinión de los alumnos sobre aspectos tales como la viabilidad de la metodología didáctica empleada o las modificaciones que se han producido en las condiciones del desarrollo usual de las clases. Además, creemos que no se ha obtenido el rendimiento esperado con las entrevistas, debido principalmente a que los alumnos no han mostrado la disposición necesaria para la realización de las mismas. Pero esto no es de extrañar en el contexto en que se ha llevado a cabo el estudio, en el que los alumnos no suelen tener una relación continua y prolongada con la Universidad y su colaboración en este tipo de actividades suele ser limitada.

• **Con respecto a la implementación de la metodología didáctica experimental**:

En estudios empíricos como el que se ha llevado a cabo es usual que el proceso de investigación-acción sea concebido como una serie de ciclos sucesivos que proporcionan la posibilidad de reflexionar sobre el problema y utilizar la información que proporciona cada ciclo para planificar la actuación en el ciclo siguiente ([Castro, 1995]).

En nuestro caso, las condiciones de la investigación no han facilitado la realización de un proceso como el descrito, obligando a que la metodología didáctica experimental sólo se pudiera implementar una vez. Téngase en cuenta que el desarrollo del estudio empírico ha estado condicionado por la situación, las orientaciones oficiales, las condiciones reales y el desarrollo del plan de estudios de una asignatura troncal. Sin embargo, nuestras experiencias previas con Derive, en el mismo sentido que se ha utilizado en el desarrollo de la metodología experimental (realización de comandos), se pueden considerar como estudios exploratorios previos, como ciclos anteriores de un proceso y, por tanto, vienen a paliar, en cierto modo, la carencia mencionada.

• **Con respecto a la relación entre los resultados de la prueba de nivel y de la prueba de evaluación para cada alumno**:

El hecho de no haber solicitado a los alumnos la cumplimentación obligatoria de los datos personales en las distintas pruebas ha impedido la posibilidad de llevar a cabo un análisis de la posible correlación entre los resultados de ambas pruebas. La razón fundamental para no requerir estos datos ha sido la de tratar de fomentar el mayor grado de participación en cada una de las pruebas (nuestra experiencia con los alumnos en años anteriores nos llevó a pensar que si se exigía la identificación, muchos de ellos no entregarían las pruebas).

• **Con respecto a la elaboración de comandos**:

Durante el desarrollo de la clase en el laboratorio así como consecuencia del análisis de los ficheros de Derive, hemos observado que los alumnos tienen algunas dudas generales sobre la elaboración de comandos. Por tal motivo, si se quiere evitar que el desconocimiento de DERIVE y la elaboración de comandos pueda afectar negativamente a los resultados, se debería introducir una clase especial previa de elaboración de comandos, a desarrollar durante el transcurso de algún tema anterior de la asignatura.

- **En relación a los ejercicios "detectores" de errores en la elaboración de comandos**:

En el diseño de la metodología experimental, el papel de los ejercicios propuestos para comprobar la correcta elaboración de los comandos era fundamental, puesto que dichos ejercicios debían actuar como verdaderos "detectores" de errores. Sin embargo, como se comentó en las conclusiones puntuales del análisis de los ficheros de DERIVE, el hecho de no advertir a los alumnos de que era necesario buscar dichos ejercicios entre los que se habían resuelto en clase, hizo que muchos no lo intentasen. Pensamos que, a la vista de esta observación, se tendría que haber delimitado mucho más el trabajo a realizar por parte del alumno en la clase de laboratorio.

- **En relación con el material escrito en la clase de laboratorio**:

Aunque la clase de laboratorio se realizó de forma perfectamente organizada y con la ayuda de un proyector multimedia para que los alumnos pudieran "seguir" las explicaciones más fácilmente, pensamos que hubiera sido conveniente la elaboración y distribución de un material escrito, a modo de guía, en el que se indicaran las distintas tareas a realizar en el desarrollo de dicha sesión. Con ello se hubiera favorecido una mayor autonomía y una menor dependencia de las explicaciones orales del profesor.

- **En lo que se refiere a la extensión del estudio**:

La extensión o alcance del estudio ha estado limitada por las restricciones impuestas por el marco teórico de la investigación. Recordemos que estas restricciones han sido: compromiso de respeto a la realidad del aula, compromiso de perjuicio cero e intención innovadora, compromiso de compatibilidad con el diseño y de respeto a las directrices y orientaciones de la administración educativa, compromiso de perdurabilidad y solidez, consideración de los fenómenos en su totalidad y con toda su complejidad y, por último, participación activa de los profesores con sus propios grupos naturales. Creemos que todas ellas justifican el hecho de que la extensión del estudio se haya limitado al desarrollo de un único tema de la asignatura. Las sucesivas ampliaciones de la investigación contemplarán nuevos temas y nuevas modificaciones curriculares una vez consolidadas las anteriores.

- **Con respecto a los ciclos del proceso de investigación-acción**:

Además de lo indicado en el punto 2 hemos de decir que no se ha podido aplicar la investigación-acción en varios ciclos, entre otros motivos, porque la realización de comandos con Derive no presenta las mismas características en todos los temas de Matemáticas y porque las condiciones excesivamente restrictivas del desarrollo curricular de la asignatura dejan muy poco margen para la realización de las distintas pruebas (nivel y evaluación) e impiden que se pueda reducir el horario dedicado a los contenidos propios de la asignatura. En este sentido hay que recordar, una vez más, las limitaciones que impone el compromiso sobre las modificaciones curriculares permitidas.

A pesar de todo, los diferentes estudios realizados y en desarrollo en el seno del grupo de profesores que forman el equipo de investigación, constituyen un verdadero proceso de investigación-acción, del que, a su vez, se extraerán conclusiones para futuros trabajos dentro del grupo y para otros estudios dentro de la línea de investigación.

- **Con respecto a la relación entre el modelo teórico y la modificación curricular**:

A pesar de que el modelo teórico empleado es lo suficientemente flexible para adaptarse a otros tipos de modificaciones curriculares, es evidente que en este caso ha sido más difícil compatibilizar el modelo con la modificación curricular introducida. Téngase en cuenta que la introducción de un cambio como el realizado (nuevo recurso y trabajo en el laboratorio), afecta de manera importante al proceso didáctico usual, si con él se esperan conseguir resultados significativos. Dicho de otro modo, la efectividad del cambio depende del instrumento y del tipo de utilización que se haga de él, lo que en este caso implica: tiempo añadido, preparación especial y modificación importante del proceso. Es evidente que, en nuestro caso, era necesario encontrar un equilibrio entre dichos aspectos, lo que creemos que se ha conseguido a la vista de los resultados.

7.7. Perspectivas futuras

Para finalizar el informe presentamos a continuación una breve descripción de las actuaciones que se están llevando a cabo en torno a la línea de investigación en la que se sitúa el trabajo presentado, algunas consideraciones sobre la continuación y proyección futura del estudio empírico realizado y algunas consideraciones y reflexiones en torno a la continuación y proyección futura de la línea de investigación y del marco teórico que ha servido de soporte a la investigación presentada en esta memoria. Veamos a continuación cada uno de los aspectos mencionados organizados en tres apartados.

7.7.1. Estudios en desarrollo

- **Directamente relacionados con el problema investigado**

Se está desarrollando en la actualidad una investigación en el mismo contexto de los estudios de *Ingeniería,* bajo el mismo modelo teórico y con el mismo tipo de modificación curricular, es decir, el tratamiento didáctico de contenidos matemáticos mediante una metodología mixta que incluye la realización de comandos con DERIVE. Dicho estudio es el siguiente:

- *Derivación e Integración de Funciones de Variable Compleja con* DERIVE. *Un estudio de innovación curricular en segundo curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación.*

  Se trata de un estudio de innovación curricular en el tema *Derivación e Integración de Funciones de Variable Compleja* de la asignatura *Ampliación de Matemáticas* del segundo curso de la titulación *Ingeniería Técnica de Telecomunicación.* Está recién iniciado por el mismo grupo investigador y modificado para resolver, en la medida de lo posible, las distintas limitaciones destacadas en el apartado anterior. Actualmente ya se ha realizado el diseño y construcción de los distintos instrumentos de recogida y análisis de datos así como la elaboración de los protocolos de los tratamientos didácticos. Esperamos que los resultados que se obtengan con esta investigación confirmen nuevamente la utilidad del método empleado y aporten nuevos aspectos y puntos de vista sobre el tipo de problema de investigación abordado.

- **Otros estudios**

  - En la asignatura *Taller de Geometría* del plan de estudios de *Maestro de Educación Primaria* se está desarrollando el estudio titulado *"Aprendizaje de nociones geométricas elementales con* Cabri*. Un estudio de innovación curricular en la asignatura Taller de Geometría de tercer curso de las especialidades de Maestro"*.

  - En *Enseñanza Secundaria* se está desarrollando el estudio titulado *"La comunicación en el aula de Matemáticas. Un estudio de innovación curricular en segundo ciclo de ESO"*.

7.7.2. Continuación del estudio Integrales de Línea con Derive

En un futuro inmediato se considera conveniente atender a los siguientes aspectos, previa reflexión sobre el estudio realizado y modificación, en su caso, de aquellos aspectos necesitados de mejora:

- Estudio de replicación con nuevos grupos de alumnos, especialidades distintas y con la participación de nuevos profesores de la asignatura.

- Estudios de replicación en otras carreras y análisis comparativo.

- Profundización en los aspectos cualitativos del desarrollo curricular.

- Profundización en las causas que han dado lugar a los cambios detectados: aprendizaje, características, tipos, evolución, etc.; influencia del programa y de las tareas en sí sobre el rendimiento; análisis de otros posibles factores.

7.7.3. Continuación y proyección futura de la línea de investigación en los estudios de Ingeniería

Entre otros aspectos, consideramos necesario continuar el trabajo en el sentido que se indica a continuación.

- Ampliación de los estudios relacionados en 7.7.1 a otros contenidos matemáticos: estudios comparativos sobre viabilidad y efectos; generalización a asignaturas completas y a otras carreras y estudios.

- Investigaciones sobre otras modificaciones curriculares relativas a: evaluación, metodología, tareas, aplicaciones, utilización de Nuevas Tecnologías desde otras perspectivas (Internet, etc.). En particular, se está pensando en la introducción de modificaciones en las técnicas habituales de evaluación en las asignaturas de Matemáticas de las *Ingenierías* partiendo de una serie de estudios exploratorios que ya han realizado los profesores de este grupo investigador sobre un proceso de evaluación continua.

Parte V
Apéndices

Contenido de la parte V

Apéndice A

Funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales

Este tema sirve como introducción de la asignatura y en él se desarrollan una serie de conceptos que serán de gran utilidad durante el curso. Se ha preferido recoger dichos conceptos en este tema inicial para empezar con contenidos sencillos que “enganchen” al alumno desde el comienzo.

A.1. Función Gamma

Definimos la **función Gamma** como la integral de Euler de segunda especie:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \qquad \text{si } \ p > 0$$

Sus características y valores más destacados son:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1) \qquad \text{si } \ p > 1$
- $\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{para } \ n \ \text{ natural}$
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Ejemplo. Calcular $\Gamma(5)$ y $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.
Utilizando lo visto anteriormente:

$$\begin{aligned}
\Gamma(5) &= (5-1)! = 4! = 24 \\
\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \left(\frac{7}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}-1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-1\right) \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-1\right) \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}
\end{aligned}$$

□

A.2. Función Beta

La **función Beta** se define para valores de p y q positivos como la integral:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$$

Sus características y valores más destacados son:

- $\beta(p,q) = \beta(q,p)$
- $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$
- $\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1} t\, \cos^{2q-1} t\,\mathrm{d}t$
- $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

A.3. Cálculo de integrales definidas de funciones trigonométricas

De las propiedades anteriores sobre la función Beta, la expresión:

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1} t\, \cos^{2q-1} t\,\mathrm{d}t$$

resulta de gran utilidad para la obtención de integrales de la forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t \cos^m t \, \mathrm{d}t$$

ya que basta hacer $\begin{cases} 2p-1=n \\ 2q-1=m \end{cases}$ para obtener:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t \cos^m t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

Ejemplo. Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t \, \mathrm{d}t$.

Haciendo $\begin{cases} 2p-1=2 \\ 2q-1=4 \end{cases}$ obtenemos $\begin{cases} p=\dfrac{3}{2} \\ \\ q=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ con lo que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Como además:

$$\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!} = \frac{3\pi}{8\cdot 3!} = \frac{\pi}{16}$$

se obtiene que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{32}$ □

Es interesante también recordar la siguiente propiedad de las funciones trigonométricas:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$

resultado que se puede comprobar rápidamente utilizando las propiedades de la función Beta (concretamente de $\beta(p,q)=\beta(q,p)$ y de la propiedad que relaciona la función Beta con el cálculo de integrales).

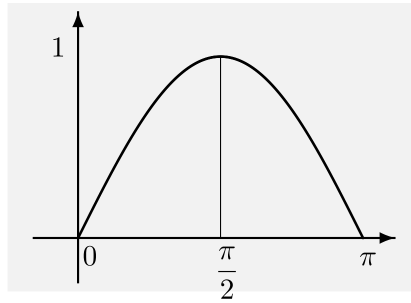
Pretendemos ahora calcular integrales de la forma $\displaystyle\int_{k'\frac{\pi}{2}}^{k\frac{\pi}{2}} \cos^a t \operatorname{sen}^b t \, \mathrm{d}t$, para lo cual haremos uso de las simetrías y periodicidad de las funciones seno y coseno. Por tanto, pasaremos a estudiar brevemente estas funciones y potencias naturales de ellas para deducir el cálculo de las integrales deseadas.

A.3.1. Función seno

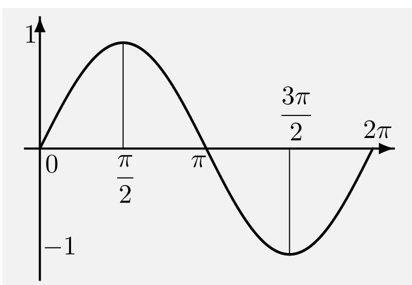
En lo que sigue los valores a y b serán tales que a , $b \in \mathbb{N}$.

La función seno entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ presenta el mismo área que entre $\frac{\pi}{2}$ y π por la simetría de la propia función (ver dibujo). Esto quiere decir que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \, \mathrm{d}t$$



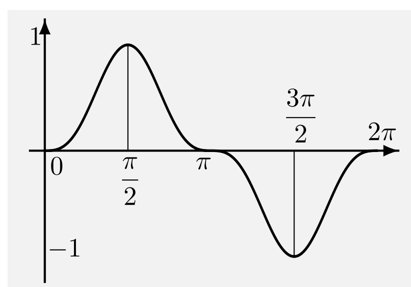
Si en vez de considerar la función seno, consideramos $\operatorname{sen}^a t$ seguirá ocurriendo lo mismo, esto es: $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^a t \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^a t \, \mathrm{d}t$

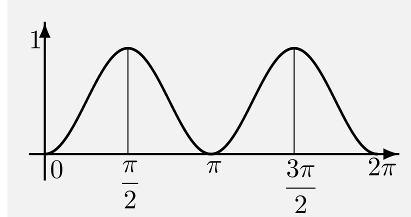


Si consideramos la función extendida al intervalo $[0, 2\pi]$ observamos que presenta cuatro regiones de igual área, donde dos de las cuales están por encima del eje OX y otras dos por debajo (las que están entre π y 2π), "compensándose" unas con otras, es decir: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, \mathrm{d}t = 0$

Considerando nuevamente la función $\operatorname{sen}^a t$ habrá que tener cuidado, ya que, en este caso: si a es un valor impar, seguirán existiendo dos zonas por encima del eje y dos por debajo que se "compensarán", siendo cero el valor de la integral; mientras que si a es par las dos zonas por debajo del eje pasan a estar por encima (por estar elevadas a un exponente par) y por lo tanto se tendrá:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^a t \mathrm{d}t = 4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^a t \mathrm{d}t \qquad \text{si } a \text{ es par}$$



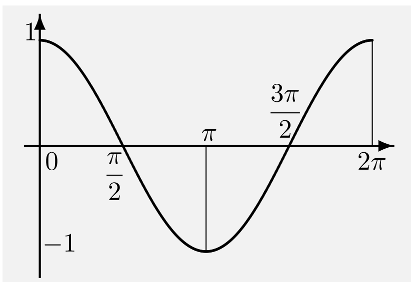


Así, lo que tendremos que hacer es contar, en el intervalo considerado, las zonas que están por encima y las que están por debajo del eje OX.

Posteriormente, las integrales entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$ se calculan mediante las funciones gamma y beta considerando, que al no aparecer el coseno, éste estará elevado a un exponente igual a cero.

A.3.2. Función coseno

A la función coseno le ocurre lo mismo que a la función seno, salvo que, los intervalos en los que es positiva o negativa son distintos a los intervalos del seno.

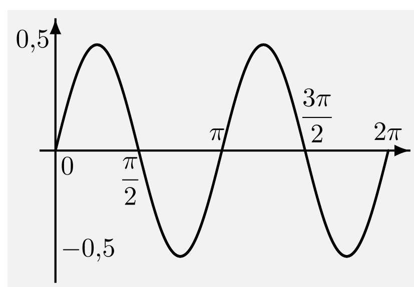


Como se observa en el dibujo, el coseno es positivo en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y en $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, mientras que, es negativo en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Al igual que antes, tendremos que contar las zonas por encima y por debajo del eje teniendo en cuenta el intervalo y la paridad del exponente.

A.3.3. Función $\cos^a t \operatorname{sen}^b t$

Para terminar, tendremos que considerar productos de potencias de senos y cosenos. La idea es exactamente la misma: contar las regiones por encima y por debajo del eje. Veamos como ejemplo lo que ocurre con la función $\cos t \operatorname{sen} t$.

Como se observa en el dibujo, esta función es positiva en los intervalos $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, mientras que es negativa en los intervalos $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ y $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Lo mismo ocurrirá si los exponentes a y b son impares.



Así, por ejemplo:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 t \operatorname{sen}^{13} t \, \mathrm{d}t = 0$$

ya que hay dos zonas por encima del eje, los intervalos $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, y dos por debajo, los intervalos $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ y $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, que se "compensan".

Para finalizar, la siguiente tabla recoge el signo de la función $\cos^a t \operatorname{sen}^b t$ dependiendo de la paridad de a y b y el intervalo en el que nos encontremos. En la tabla aparecen el comportamiento de dicha función en $[0, 2\pi]$, comportamiento que es totalmente trasladable a cualquier otro intervalo por la periodicidad de la función.

Función	**Condición**	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$\cos^a t \operatorname{sen}^b t$	a par; b par	$+$	$+$	$+$	$+$
$\cos^a t \operatorname{sen}^b t$	a par; b impar	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos^a t \operatorname{sen}^b t$	a impar; b par	$+$	$-$	$-$	$+$
$\cos^a t \operatorname{sen}^b t$	a impar; b impar	$+$	$-$	$+$	$-$

De la tabla podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Si los valores a y b son pares todas las regiones estarán por encima del eje OX.
- Si un valor es par y el otro impar, la posición de las regiones estará determinada por la función que está elevada a la potencia impar.
- Si ambos valores son impares, las regiones se van alternando de posición.

Utilizando todo lo anterior se pueden reducir todas las integrales definidas de potencias del seno por potencias del coseno al primer cuadrante, para luego calcularlas mediante la función beta.

Por ejemplo se tiene que:

$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, dt = 0$ ya que hay dos cuadrantes donde la función seno toma valores positivos y otros dos donde toma valores negativos.

$\int_0^{\pi} \cos t \, dt = 0$ ya que en el primer cuadrante la función coseno toma valores positivos y en el segundo cuadrante toma valores negativos.

$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \, dt = 0$ ya que hay dos cuadrantes donde la función $\operatorname{sen}^3 t$ toma valores positivos y otros dos donde toma valores negativos.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t$ ya que en los cuatro cuadrantes la función $\operatorname{sen}^2 t$ toma valores positivos.

$\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\ \mathrm{d}t$ ya que en los dos primeros cuadrantes la función seno toma valores positivos y en el tercero toma valores negativos.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\ \mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\ \mathrm{d}t$ ya que en los cuatro cuadrantes la función $\operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t$ toma valores positivos.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t\ \cos^4 t\,\mathrm{d}t = 0$ ya que hay dos cuadrantes donde la función $\operatorname{sen}^3 t\ \cos^4 t$ toma valores positivos y otros dos donde toma valores negativos.

$\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t\ \cos^5 t\ \mathrm{d}t = 0$ ya que en el primer cuadrante la función $\operatorname{sen}^3 t\ \cos^5 t$ toma valores positivos y en el segundo cuadrante toma valores negativos.

$\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t\ \cos^4 t\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 t\ \cos^4 t\ \mathrm{d}t$ ya que la función $\operatorname{sen}^3 t\ \cos^4 t$ toma valores positivos en los dos primeros cuadrantes.

Problema 1

Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\ t\ \cos^3 t\ \mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\ t\ \cos^3 t\ \mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\ \mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5\ t\ \mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3\ t\ \mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\ t\ \cos^4 t\ \mathrm{d}t$

(g) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^4\ t\ \cos^2 t\ \mathrm{d}t$

(h) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2\ t\ \cos^3 t\ \mathrm{d}t$

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\ t\ \cos^3 t\ \mathrm{d}t$

Solución:

(a) $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^3 t\ dt = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{2},2\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot 1}{2\cdot\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2}{15}$$

(b) $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t\ \cos^3 t\ dt = \frac{1}{2}\beta(2,2)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3!} = \frac{1}{12}$$

(c) $$\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\ dt = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2},2\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot 1}{2\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2}{3}$$

(d) $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 t\ dt = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t\ dt=\beta\left(3,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$
$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{16}{15}$$ ya que la función toma valores positivos en los dos primeros cuadrantes.

(e) $$\int_0^{\pi} \cos^3 t\ dt = 0$$ ya que la función toma valores positivos en el primer cuadrante y negativos en el segundo.

(f) $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\ dt = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\ dt=\beta\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!} = \frac{\pi}{16}$$
ya que la función toma valores positivos en los dos primeros cuadrantes.

(g) $$\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^4 t\ \cos^2 t\ dt = 3\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t\ \cos^2 t\ dt=\frac{3}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{3\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\cdot\Gamma(4)}=\frac{3\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2\cdot 3!} = \frac{3\pi}{32}$$

ya que la función toma valores positivos en los tres primeros cuadrantes.

(h) $$\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \ \cos^3 t \ \mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \ \cos^3 t \ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{2}, 2\right)$$
$$= -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)}{2\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2\cdot\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = -\frac{2}{15}$$

ya que la función toma valores positivos en el primer cuadrante y negativos en el segundo y en el tercero.

(i) $$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \ \cos^3 t \ \mathrm{d}t = 0$$ ya que la función toma valores positivos en el primer y en el tercer cuadrante y negativos en el segundo y en el cuarto.

$\square$

A.4. Campos escalares y vectoriales

Recordemos una serie de conceptos ya vistos en la asignatura de *Fundamentos de Cálculo*. Dada una función $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se tienen los siguientes casos particulares:

$$\begin{cases} n = 1 = m & \textbf{Función real de variable real} & f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n = 1\,;\, m > 1 & \textbf{Función vectorial de variable real} & \vec{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ n > 1\,;\, m = 1 & \textbf{Campo escalar} & f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ n > 1\,;\, m > 1 & \textbf{Campo vectorial} & \vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Particularizemos ahora la notación de los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

- Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una aplicación $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con:

$$\vec{f}(x, y) = \Big(P(x, y), Q(x, y)\Big) \quad \text{o en notación vectorial}$$

$$\vec{f}(x, y) = P(x, y)\,\vec{\imath} + Q(x, y)\,\vec{\jmath}$$

- Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con:

$$\vec{f}(x,y,z) = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big) \quad \text{o en notación vectorial}$$

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

A.5. Operadores más usuales

A.5.1. Gradiente

Sea $U(x,y,z)$ un campo escalar derivable con $U : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se llama **gradiente** de U a:

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{k}$$

Al gradiente de U también se le suele llamar campo derivado de U. Por otra parte se denomina operador de Hamilton y se representa por el símbolo ∇ a:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$

Así se tiene que $\text{grad}(U) \equiv \nabla(U)$.

El gradiente tiene una gran utilidad en el estudio de las superficies, ya que se puede demostrar que el vector gradiente en cada punto de una superficie es ortogonal a la superficie en dicho punto.

A.5.2. Divergencia

Sea $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ un campo vectorial de forma que existen sus derivadas parciales. Se llama **divergencia** de $\vec{F}$ a:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Utilizando el operador de Hamilton queda que $\text{div}(\vec{F}) \equiv \nabla \cdot \vec{F}$. Por otra parte si $\text{div}(\vec{F}) = 0$ se dice que $\vec{F}$ es un campo selenoidal.

A.5.3. Rotacional

Sea $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ un campo vectorial de forma que existen sus derivadas parciales. Se llama **rotacional** de $\vec{F}$ a:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Utilizando el operador de Hamilton queda que $\mathrm{rot}(\vec{F}) \equiv \nabla \mathrm{x} \vec{F}$. Por otra parte si $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ se dice que $\vec{F}$ es un campo irrotacional.

A.5.4. Laplaciano

Sea $U(x,y,z)$ con $U : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con segundas derivadas parciales. Se llama **laplaciano** de U a:

$$\triangle(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Si $\triangle(U) = 0$ se dice que U es un campo armónico.

Problema 2
Sea $\vec{F}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} - y^2\,\vec{\jmath} + 2x^2y\,\vec{k}$. Calcular $\mathrm{div}(\vec{F})$ y $\mathrm{rot}(\vec{F})$.

Solución:

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2x^2y)}{\partial z} = z - 2y$$

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} = \big(2x^2, x - 4xy, 0\big)$$

□

Problema 3
Sea $f(x,y,z) = x^2yz^3$. Calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.

Solución:

$$\nabla(f) = \mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial x}, \frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial y}, \frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial z}\right) = \left(2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2\right)$$

$$\Delta(f) = \mathrm{div}\,(\nabla(f)) = \frac{\partial(2xyz^3)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2z^3)}{\partial y} + \frac{\partial(3x^2yz^2)}{\partial z} = 2yz^3 + 6x^2yz$$

□

Problema 4
Hallar un vector normal unitario a la superficie $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ en el punto $P(3, -1, 2)$.

Solución:
Sea el campo escalar $f(x,y,z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 + 10$, que representa a la superficie. El punto P está en la superficie ya que satisface la ecuación. Para hallar un vector normal calculamos el gradiente de f y lo evaluamos en P. Para que sea unitario dividiremos por la norma. Así: $\nabla(f) = (4x, 4z, 4y - 10z)$. Un vector normal será $\vec{N} = (12, 8, -24)$ y por tanto un vector normal unitario será $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{||\vec{N}||} = \dfrac{(12,8,-24)}{\sqrt{12^2+8^2+(-24)^2}} = \left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{2}{7}, -\dfrac{6}{7}\right)$. El otro vector normal unitario a la superficie en el punto P es $-\vec{n}$. □

Problema 5
Determinar el ángulo que forman las superficies $z = xy$ y $xyz = 1$ en el punto $P(1, 1, 1)$.

Solución:
El ángulo que forman dos superficies en un punto de contacto es el ángulo que forman sus vectores normales en dicho punto.

Sean $f = z - xy$ y $g = xyz - 1$ los dos campos escalares que representan respectivamente a las dos superficies. Los gradientes serán:

$$\nabla(f) = (-y, -x, 1) \qquad \nabla(g) = (yz, xz, xy)$$

y evaluándolos en $P \equiv (1,1,1)$ se tienen los vectores normales a las superficies en el punto de contacto:

$$\vec{N}_f = (-1,-1,1) \qquad \vec{N}_g = (1,1,1)$$

Llamaremos θ_{fg}, al ángulo que forman las dos superficies, el cuál se puede calcular mediante el producto escalar de los dos vectores:

$$\cos\theta_{fg} = \frac{\vec{N}_f \cdot \vec{N}_g}{||\vec{N}_f||\,||\vec{N}_g||} = \frac{(-1,-1,1)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

Luego el ángulo que forman las dos superficies es

$$\theta_{fg} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 78^{o}21'55''$$

□

A.6. Problemas propuestos para el alumno

6. Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^5 t \, dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \, \cos^4 t \, dt$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^2 t \, dt$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 t \, \cos^4 t \, dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^4 t \, dt$

(g) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^5 t \, dt$ (h) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^5 t \, dt$

(i) $\displaystyle\int_0^{5\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \, \cos^3 t \, dt$

7. Sea $\vec{F} = y^2z^2\,\vec{\imath} + z^2x^2\,\vec{\jmath} + x^2y^2\,\vec{k}$. Demostrar que $\operatorname{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$, pero se tiene que $\vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$. Calcular además $\operatorname{div}(\vec{F})$.

8. Dado $f = 2x^2y - xz^3$, calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.

9. Hallar un vector normal unitario a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $P(1, 2, 3)$.

10. Determinar el ángulo que forman las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ y $z = xy + 1$ en el punto $P(1, 2, 3)$.

Soluciones

6. (a) 0 (b) 0 (c) $3\,\pi/256$ (d) $\pi/16$ (e) $3\,\pi/128$ (f) $3\,\pi/32$
(g) $-8/105$ (h) 0 (i) $1/12$

7. $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 2\left(x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)\right)$ $\quad\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$

8. $\nabla(f) = \left(4xy - z^3, 2x^2, -3xz^2\right)$ $\quad\Delta(f) = 4y - 6xz$

9. $1/\sqrt{14}\,(1, 2, 3)$

10. $96{,}2^0$ ó $83{,}8^0$

Apéndice B

Integrales de Línea

Una propiedad clásica de los campos gravitacionales consiste en que, sujeto a ciertas ligaduras físicas, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos del campo es independiente del camino recorrido por el objeto. El uso del análisis vectorial para describir los resultados se debe principalmente al físico-matemático americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

En este tema pretendemos extender el concepto de integral definida. Hasta ahora, en una integral definida, estamos acostumbrados a integrar cierta función real de variable real $f(x)$ a lo largo de un intervalo. ¿Cómo calcular el trabajo realizado por una partícula que se mueve entre dos puntos siguiendo una trayectoria dada? ¿Cómo podemos saber si dicho trabajo dependerá o no de la trayectoria o camino que siga la partícula? En este tema vamos a dar solución a este tipo de preguntas introduciendo lo que llamaremos *integrales de línea* que va a ser una extensión de la integral definida, cambiando el intervalo de integración por una trayectoria o camino, y la función a integrar por un campo vectorial. La terminología es algo desafortunada, ya que sería más apropiado denominarlas *integrales sobre curvas*.

La utilidad de las integrales de línea no va a estar sólo en el cálculo de trabajos. También nos será de gran ayuda a la hora de calcular energía potencial, energía cinética, potencial eléctrico, flujo de calor, circulación de un fluido, ...

Daremos siempre unas definiciones y resultados generales y luego particularizaremos al caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que son los que vamos a considerar a lo largo del tema.

B.1. Caminos

Para poder introducir el concepto de integrales de línea, necesitaremos una serie de definiciones que utilizaremos no sólo en su definición sino en los posteriores resultados que obtengamos sobre este tipo de integrales.

Definición:
Sea $\vec{\alpha}$ una función vectorial definida sobre el intervalo $[a, b]$

$$\vec{\alpha} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \; ; \; \vec{\alpha}(t) = \Big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)\Big)$$

Al conjunto imagen de la aplicación, esto es, a

$$\Gamma = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [a, b] \mid \vec{\alpha}(t) = \vec{x}\}$$

se le llama **gráfica de la función, gráfica del camino, o camino**.

Es decir, en el espacio $\mathbb{R}^n$, un camino no será más que la imagen de cualquier aplicación $\vec{\alpha} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Por tanto, un camino en el plano $\mathbb{R}^2$ será la imagen de cualquier aplicación

$$\vec{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{r}(t) = \Big(x(t), y(t)\Big)$$

que en forma vectorial sería

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$$

siendo x e y funciones reales definidas en $[a, b]$; $x, y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y una curva $\mathcal{C}$ en el plano será la imagen de $\vec{r}$, es decir, $C \equiv \vec{r}([a, b])$.

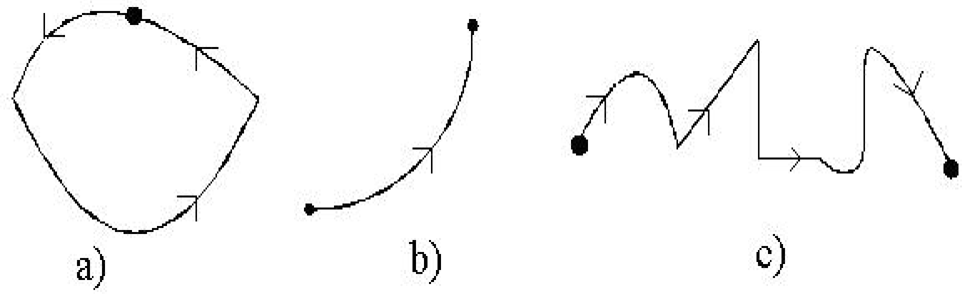
En $\mathbb{R}^3$, es decir en el espacio, un camino es la imagen de toda aplicación

$$\vec{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \vec{r}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$$

que en forma vectorial sería

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

siendo x, y, z funciones reales definidas en $[a, b]$; $x, y, z : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y una curva $\mathcal{C}$ en el espacio será la imagen de $\vec{r}$, es decir, $C \equiv \vec{r}([a, b])$.



Definición:
Si $\vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, la gráfica se llamará *curva* o bien **camino continuo** y como nosotros trabajaremos normalmente con caminos continuos, lo llamaremos simplemente **camino**.

Definición:
Un camino se dirá **cerrado** cuando $\vec{\alpha}(a) = \vec{\alpha}(b)$. (Ver figura a)

Definición:
Si existe $\vec{\alpha}'$ y es continua en $[a,b]$ (es decir, $\vec{\alpha}$ es derivable con continuidad) al camino lo llamaremos **camino regular**. (Ver figura b)

Definición:
El camino se dirá **regular a trozos** cuando el intervalo $[a,b]$ se pueda descomponer en un número finito de subintervalos en los cuales el camino es regular. (Ver figura c)

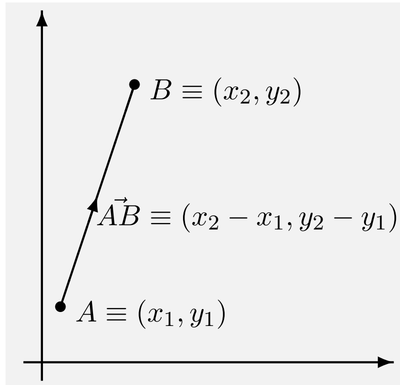
B.1.1. Curvas planas

Veamos ahora una serie de ejemplos típicos de caminos en el plano $\mathbb{R}^2$.

Segmento

Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ del plano, podemos parametrizar el *segmento* que los une de la siguiente forma:

$$\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad | \quad \vec{\alpha}(t) = \Big(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t\Big)$$



ya que el segmento no es más que

$$A + t\vec{AB} \quad ; \quad t \in [0,1]$$

que, desarrollándola, se obtiene:

$$A + t\vec{AB} = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \Big(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t\Big)$$

que es la parametrización anterior.

Observemos que la siguiente parametrización también recorre el segmento que une los mismos puntos $A \equiv (x_1, y_1)$ y $B \equiv (x_2, y_2)$:

$$\begin{array}{rcl} \vec{\alpha} : [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & \vec{\alpha}(t) = \left(x_1 + (x_2 - x_1)\dfrac{t}{2}, y_1 + (y_2 - y_1)\dfrac{t}{2}\right) \end{array}$$

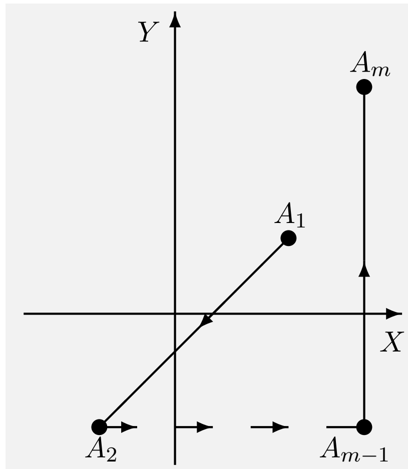
ya que corresponde a la ecuación vectorial del segmento dada por

$$A + t\frac{\vec{AB}}{2} \qquad \text{con} \quad t \in [0,2]$$

Así, vemos con este ejemplo que una misma curva puede tener más de una parametrización (de hecho puede tener infinitas parametrizaciones).

Quebrada de m puntos

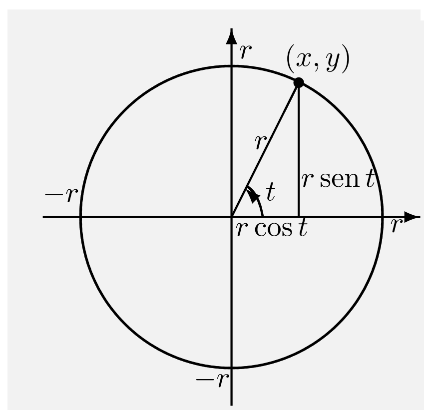
Sean $A_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, 2, \ldots m$, m puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Llamamos *quebrada* de los m puntos a la curva que se forma al unir los puntos consecutivos $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ mediante un segmento.



Para parametrizar una quebrada de m puntos utilizaremos la parametrización de cada uno de los segmentos de la quebrada y su parametrización total será la unión de todas las de los segmentos.

Circunferencia

La *circunferencia* se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto dado llamado *centro de la circunferencia*. A la distancia constante existente entre el centro y cualquier punto se llama *radio de la circunferencia*.



Consideremos en primer lugar la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio r. Dicha circunferencia se puede formular por $x^2 + y^2 = r^2$.

Consideremos un punto (x, y) de la circunferencia y el segmento que une dicho punto con el origen de coordenadas (que tendrá una longitud r). Sea t el ángulo que forma dicho segmento con la dirección positiva del eje OX. Obsérvese que $x = r\cos(t)$ e $y = r\operatorname{sen}(t)$. Haciendo variar el punto elegido (x, y) se observa como el ángulo t puede variar en el intervalo $[0, 2\pi]$.

De esto se puede deducir que una posible parametrización de la circunferencia de radio r centrada en el origen, $x^2+y^2=r^2$ es

$$\vec{\alpha}:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2 \quad | \quad \vec{\alpha}(t)=\Big(r\cos(t),r\ \mathrm{sen}(t)\Big)$$

La siguiente parametrización:

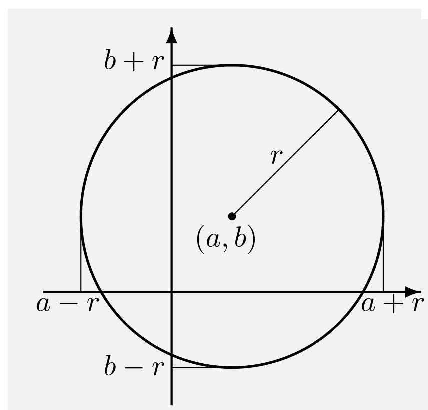
$$\vec{\alpha}:[0,4\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2 \quad | \quad \vec{\alpha}(t)=\Big(r\cos(t),r\,\mathrm{sen}(t)\Big)$$

recorre la circunferencia dos veces. Gráficamente su representación será la misma: la circunferencia centrada en el origen y radio r. Pero, evidentemente, no será lo mismo dar una vuelta que dos.

Si consideramos ahora una circunferencia desplazada, en el sentido que su centro está situado, no en el origen de coordenadas, sino en un punto (a,b) del plano, una posible parametrización de la circunferencia (cuya fórmula responde a $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$) es

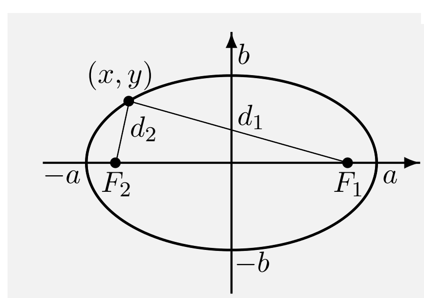
$$\vec{\alpha}:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2 \quad | \quad \vec{\alpha}(t)=\Big(a+r\cos(t),b+r\ \mathrm{sen}(t)\Big)$$

Si consideramos las parametrizaciones anteriores para la circunferencia centrada en el origen o en el punto (a,b) diremos que recorremos la circunferencia en *sentido positivo*, esto es, en sentido contrario a las agujas del reloj. Salvo que se indique lo contrario, siempre consideraremos las circunferencias recorridas en sentido positivo.



Elipse

Una *elipse* se puede caracterizar como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias d_1+d_2 a dos puntos fijos F_1 , F_2 (llamados *focos*) es constante. Por analogía a la parametrización de la circunferencia, podemos deducir que una posible parametrización para la elipse de semiejes a y b centrada en el origen,

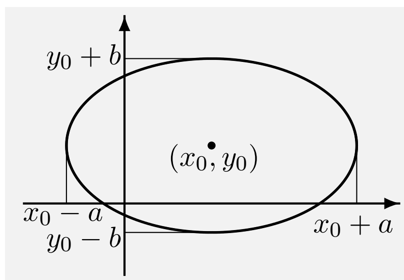


de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, es:

$$\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad | \quad \vec{\alpha}(t) = \Big(a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t)\Big)$$

Para una elipse desplazada con centro en un punto (x_0, y_0) del plano, cuya ecuación viene dada por $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, será:

$$\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad | \quad \vec{\alpha}(t) = \Big(x_0 + a\cos(t), y_0 + b\,\mathrm{sen}(t)\Big)$$



Al igual que para la circunferencia, si se consideran las parametrizaciones anteriores para la elipse centrada y desplazada, se dirá que su gráfica se recorre en *sentido positivo* que es el que supondremos siempre, a no ser que se especifique lo contrario.

B.1.2. Curvas alabeadas

Veamos ahora una serie de ejemplos típicos de caminos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

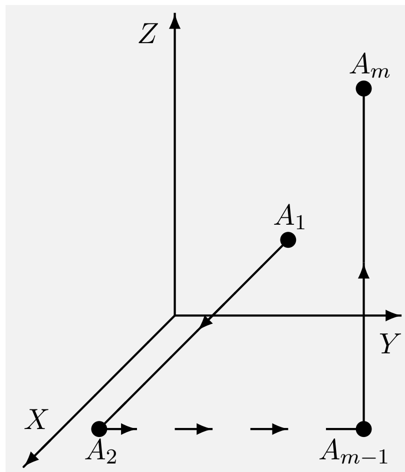
Segmento

Siguiendo el mismo razonamiento empleado en $\mathbb{R}^2$, dados dos puntos del espacio $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$, podemos parametrizar el *segmento* que los une de la siguiente forma:

$$\vec{\alpha} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad | \quad \vec{\alpha}(t) = \Big(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t, z_1 + (z_2 - z_1)t\Big)$$

Quebrada de m puntos

Sean $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, 2, \ldots, m$ m puntos del espacio $\mathbb{R}^3$. Llamamos *quebrada* de los m puntos anteriores a la curva que se forma al unir los puntos consecutivos (x_i, y_i, z_i) , $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ mediante un segmento.



Para parametrizar una quebrada de m puntos utilizaremos la parametrización de cada uno de los segmentos de la quebrada y su parametrización total será la unión de todas las de los segmentos.

B.2. Integrales de línea. Definición

Sea $\mathcal{C}$ un camino regular definido por $\vec{\alpha} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{f}$ un campo vectorial definido sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ que contenga la gráfica de $\vec{\alpha}$, $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se define **integral de línea o curvilínea** de $\vec{f}$ a lo largo de $\vec{\alpha}$ y se representa por $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$ a:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b \vec{f}[\vec{\alpha}(t)] \cdot \vec{\alpha}'(t)\,\mathrm{dt}$$

siempre que la integral del segundo miembro exista.

A veces, a $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$ se le suele llamar **circulación** de $\vec{f}$ a través del camino $\mathcal{C}$ por su utilidad para el cálculo en esta rama de la Física.

Si el camino es cerrado, notaremos a la integral de línea como $\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$.

Ejercicio 1
Calcular el trabajo realizado por una partícula que se mueve desde el punto $(0,0)$ al $(1,2)$ siguiendo la gráfica de la curva $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\vec{\alpha}(t) = \big(t^2, 2t\big)$ cuando actúa sobre ella una fuerza $\vec{f}(x,y) = \big(xy, x^2+y^2\big)$.

Solución:
El problema consiste en calcular el valor de la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$. Para ello aplicaremos la fórmula dada anteriormente:

$$\vec{f}[\vec{\alpha}(t)] = \vec{f}\left(t^2, 2t\right) = \left(2t^3, t^4+4t^2\right) \qquad ; \qquad \vec{\alpha}'(t) = (2t, 2)$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_0^1 \left(2t^3, t^4+4t^2\right) \cdot (2t,2)\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \left(4t^4 + 2t^4 + 8t^2\right)\,\mathrm{dt} = \cdots = \frac{58}{15}$$

$\square$

B.2.1. Notación

Veamos en este apartado una forma de notar las integrales de línea de forma que su cálculo resulte más fácil. Primero daremos esta notación en $\mathbb{R}^n$, particularizándola posteriormente para el caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^n$ consideramos $\mathcal{C} \equiv \vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de tal forma que

$$\vec{\alpha}(t) = \Big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\Big);\ \vec{f}(x_1, \ldots, x_n) = \Big(f_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, f_n(x_1,\ldots,x_n)\Big)$$

y por tanto $\vec{\alpha}'(t) = \Big(\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t)\Big)$.

Así,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b \vec{f}[\vec{\alpha}(t)] \cdot \vec{\alpha}'(t)\,\mathrm{dt} = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k[\vec{\alpha}(t)] \cdot \alpha_k'(t)\,\mathrm{dt}$$

y llamando $\mathrm{d}\alpha_k \equiv \alpha_k'(t)\,\mathrm{d}t$, tendremos que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b f_1\,\mathrm{d}\alpha_1 + f_2\,\mathrm{d}\alpha_2 + \cdots + f_n\,\mathrm{d}\alpha_n$$

Notación en $\mathbb{R}^2$

En el caso del plano, al tener nada más que dos coordenadas, optaremos por la siguiente notación:

$$\mathcal{C} \equiv \vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{tales que}$$

$$\vec{\alpha}(t) = \Big(x(t), y(t)\Big) \; ; \; \vec{f}(x,y) = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big) \; ; \; \vec{\alpha}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$$

Operando de forma similar que para el caso de $\mathbb{R}^n$ obtendremos:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b P(x,y)\, \mathrm{d}x + Q(x,y)\, \mathrm{d}y$$

donde $\mathrm{d}x \equiv x'(t)\, \mathrm{d}t$; $\mathrm{d}y \equiv y'(t)\, \mathrm{d}t$.

Ejercicio 2
Calcular la integral de línea $\oint_{\mathcal{C}} x\, \mathrm{d}y - y\, \mathrm{d}x$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia centrada en el origen y de radio a.

Solución:
Para resolver este problema tendremos que encontrar una parametrización $\vec{\alpha}$ de la circunferencia. Posteriormente, sustituiremos las variables x e y por la primera y segunda componente de $\vec{\alpha}$ respectivamente; $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$ se sustituirán por las componentes de $\vec{\alpha}'$. La parametrización $\vec{\alpha}$ buscada será $\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{\alpha}(t) = \Big(a\cos(t), a\ \mathrm{sen}(t)\Big)$. Por tanto, $\vec{\alpha}'(t) = \Big(-a\ \mathrm{sen}(t), a\cos(t)\Big)$ y sustituyendo en la integral tendremos:

$$\oint_{\mathcal{C}} x\, \mathrm{d}y - y\, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \big(a^2\cos^2(t) + a^2\ \mathrm{sen}^2(t)\big)\ \mathrm{d}t = 2a^2\pi$$

□

Notación en $\mathbb{R}^3$

En este caso tendremos la siguiente notación:

$$\mathcal{C} \equiv \vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{tales que}$$

$$\vec{\alpha}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big) \quad ; \quad \vec{f}(x,y,z) = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big) \quad ;$$

$$\vec{\alpha}'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$$

Así,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

con $\mathrm{d}x \equiv x'(t)\,\mathrm{d}t\ ;\ \mathrm{d}y \equiv y'(t)\,\mathrm{d}t\ ;\ \mathrm{d}z \equiv z'(t)\,\mathrm{d}t$.

Ejercicio 3

Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ donde $\mathcal{C}$ es el camino dado por $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \vec{\alpha}(t) = \big(t, t^2, t^3\big)$.

Solución:

$\vec{\alpha}'(t) = \big(1, 2t, 3t^2\big)$ y por tanto

$$\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \big(t + 2t^3 + 3t^5\big)\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{3}{2}$$

□

B.3. Propiedades de las integrales de línea

Puesto que hemos definido las integrales de línea a partir de integrales definidas, tendremos que las siguientes propiedades son fáciles de demostrar aplicando las propiedades de las integrales definidas. Por ello, se dejan para el lector sus demostraciones.

Sean $\mathcal{C} \equiv \vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad ; \quad \vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y sean las constantes $k, h \in \mathbb{R}$.

1. Sea $\mathcal{D}$ la curva obtenida si invertimos el sentido de recorrido de la curva $\mathcal{C}$, que notaremos $-\mathcal{C}$. Entonces,

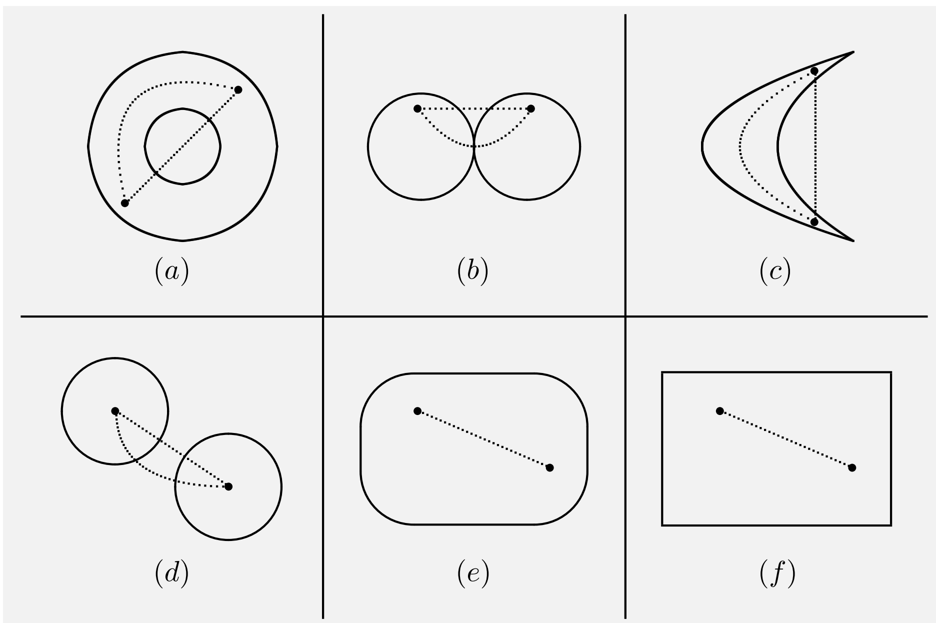
$$\int_{-\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = -\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$$

2. $$\int_{\mathcal{C}} \Big(k\vec{f} + h\vec{g}\Big) \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = k\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} + h\int_{\mathcal{C}} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$$

3. Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son dos curvas que "forman" $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{D} \bigcup \mathcal{E}$), es decir, $\exists\, c \in (a,b) \mid \mathcal{D} \equiv \vec{\alpha} : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathcal{E} \equiv \vec{\alpha} : [c,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} + \int_{\mathcal{E}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$$

B.4. Conjuntos conexos y convexos



Definición:
Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice **conexo** si dados dos puntos cualesquiera a_1 , a_2 de A, existe algún camino regular a trozos contenido en A que los une.

Definición:
Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice **convexo** si dados dos puntos cualesquiera a_1 , a_2 de A, el segmento que los une está contenido en A[1].

Así, en la figura se han representado varios conjuntos en $\mathbb{R}^2$ tales que:

[1] Obsérvese que convexo $\Longrightarrow$ conexo, pero no al contrario.

- Los conjuntos dados en (a), (b) y (c) son ejemplos de conjuntos conexos que no son convexos.
- El conjunto dado en (d) no es ni convexo ni conexo.
- Los conjuntos dados en (e) y (f) son ejemplos de conjuntos convexos y, por lo tanto, también conexos.

B.5. Formas diferenciales

Hasta ahora sabemos como calcular las integrales de línea recurriendo a su definición pero nos interesaría poder tener otro método para calcularlas. En esta sección veremos que, bajo cierta condición sobre el integrando, el cálculo de las integrales de línea va a ser más sencillo. Para conseguir este objetivo, necesitamos una serie de definiciones y resultados previos.

Definición:
$\vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$ (es decir, el integrando de las integrales de línea) recibe el nombre de **forma diferencial**.

Así, en el caso de $\mathbb{R}^2$ una forma diferencial será una expresión del tipo

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

y en $\mathbb{R}^3$ una de la forma

$$P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

Definición:
Una forma diferencial se dirá que es **exacta** si existe una función

$$U : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid \mathrm{d}U = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$$

siendo $\mathcal{S}$ un conjunto conexo de $\mathbb{R}^n$. A dicha función U la llamaremos **función potencial**.

En $\mathbb{R}^2$, $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ es exacta si

$$\exists U : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \mathrm{d}U = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

Por otro lado, sabemos que en $\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\mathrm{d}U(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Por tanto, en $\mathbb{R}^2$, podemos decir que $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ es exacta si

$$\exists U : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$$

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$ podemos afirmar que la forma diferencial

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

es exacta si

$$\exists U : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z)\ ;\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z) \text{ y } \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z)$$

Así, en el caso general tendremos que $\vec{f}\mathrm{d}\vec{\alpha}$ es exacta si

$$\exists U : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid \frac{\partial U}{\partial x_i} = f_i(x_1,\ldots,x_n) \quad \forall\, 1 \le i \le n$$

Una vez visto cuando una forma diferencial es exacta vamos a ver como calcular las integrales de línea de forma más cómoda.

Teorema B.1
Sea $\vec{f}(x_1,\ldots,x_n)$ *una función vectorial continua definida sobre un conjunto* $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ *conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{\alpha}$ *es una forma diferencial exacta.*
2. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{\alpha}$ *no depende del camino elegido* $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.
3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{\alpha} = 0$ *para todo camino* $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ *cerrado.*

Es importante destacar los resultados más importantes de este teorema.

Si $\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{\alpha}$ es una forma diferencial exacta, entonces la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{\alpha}$ que une los puntos A y B de $\mathbb{R}^n$, es independiente del camino $\mathcal{C}$ elegido y además su valor es $U(B) - U(A)$ siendo U la función potencial.

Además si el camino es cerrado, la integral de línea es nula.

B.6. Formas diferenciales exactas

En la sección anterior vimos que si el integrando es una forma diferencial exacta, las integrales de línea se pueden calcular más fácilmente; sin embargo, no hemos visto todavía una condición para que una forma diferencial sea exacta, ni tampoco, una vez sabido que una forma es exacta, cómo calcular un potencial[2] para poder resolver las integrales de línea.

El resultado del teorema B.1 no es constructivo en este sentido ya que no permite saber cuando una forma es exacta, pues es imposible comprobar si para toda curva la integral de línea da el mismo resultado. Sin embargo, dicho teorema si va ser útil para decir cuando una forma diferencial no es exacta, ya que si calculamos la integral de línea de la forma diferencial a lo largo de caminos distintos que unan los mismos puntos, y obtenemos resultados distintos, podremos asegurar que la forma diferencial no es exacta por depender del camino.

Teorema B.2
Sea $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\vec{f}(x_1,\ldots,x_n) = \Big(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)\Big)$$

con S *convexo un campo vectorial tal que existen las primeras y segundas derivadas parciales y son continuas. Entonces, considerando*

$$\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = f_1\cdot \mathrm{d}x_1 + f_2\cdot \mathrm{d}x_2 + \cdots + f_n\cdot \mathrm{d}x_n$$

se tiene que

$$\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} \quad \text{es una forma diferencial exacta} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j$$

Así:

- *en* $\mathbb{R}^2$

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \ \text{es exacta} \ \Longleftrightarrow \ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

[2]Decimos un potencial y no el potencial porque éste no es único, aunque si va a ocurrir que dos potenciales distintos de una forma diferencial exacta, se van a diferenciar en una constante.

- *en* $\mathbb{R}^3$

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \text{ \textit{es exacta} } \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}; \quad \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$$

B.7. Construcción de la función potencial

En este apartado vamos a dar dos métodos diferentes para el cálculo de potenciales en nuestros casos particulares de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

B.7.1. Construcción del potencial en $\mathbb{R}^2$

Primer método

Si partimos definiendo $U(x,y)$ como

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + f(y)$$

y vemos que condiciones tiene que cumplir $f(y)$ para que $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$, obtenemos que

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial \left(\int P(x,y)\mathrm{d}x \right)}{\partial y} \right] \mathrm{d}y$$

Segundo método

En este caso, vamos a utilizar el resultado del teorema para calcular el potencial de una forma diferencial exacta $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$. En dicho teorema se asegura que decir que la forma diferencial es exacta, es equivalente a decir que la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ sea independiente del camino $\mathcal{C}$ elegido. Así, tomando un camino a partir del cual, el cálculo de la integral de línea sea "fácil", podremos calcular el potencial.

Por ser una forma exacta tendremos que, dadas dos constantes $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} P(p,q)\,\mathrm{d}p + Q(p,q)\,\mathrm{d}q = U(x,y) - U(a,b)$$

y por tanto

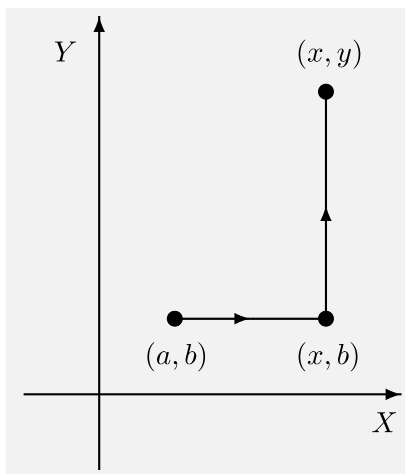
$$U(x,y) = U(a,b) + \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(p,q)\,\mathrm{d}p + Q(p,q)\,\mathrm{d}q$$

Teniendo en cuenta que $U(a,b)$ es una constante, y que el potencial va a ser único salvo constantes, podemos calcular el potencial

$$U(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(p,q)\,\mathrm{d}p + Q(p,q)\,\mathrm{d}q$$

siguiendo cualquier camino que una el punto (a,b) con el (x,y).

Consideremos como camino, la quebrada de puntos (a,b) , (x,b) , (x,y).



Aplicando una de las propiedades de las integrales de línea tendremos:

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(p,q)\,\mathrm{d}p + Q(p,q)\,\mathrm{d}q \\
&= \int_{(a,b)}^{(x,b)} P(p,q)\,\mathrm{d}p + Q(p,q)\,\mathrm{d}q + \int_{(x,b)}^{(x,y)} P(p,q)\,\mathrm{d}p + Q(p,q)\,\mathrm{d}q \\
&= \int_a^x P(p,b)\,\mathrm{d}p + \int_b^y Q(x,q)\,\mathrm{d}q
\end{aligned}$$

ya que en la primera integral, la segunda variable permanece con el valor constante b en todo el camino, por lo que la diferencial de la segunda variable será nula, y podemos sustituir dicha variable por su valor constante. Análogamente, en la segunda integral, la primera variable permanece constante y por tanto se puede sustituir dicha variable por el valor constante x y su diferencial será nulo.

Obsérvese que las constantes a y b son arbitrarias, por lo que podremos asignarles el valor que creamos más oportuno. Generalmente, el valor nulo para ambas constantes suele ser un valor apropiado.

Ejercicio 4.a
Comprobar que la forma diferencial $\left(xy^2+x+1\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y-2\right)\mathrm{d}y$ es forma diferencial exacta y calcular su potencial.

Solución:

$$\frac{\partial(xy^2+x+1)}{\partial y}=2xy=\frac{\partial(x^2y-2)}{\partial x}$$

Primer método

$$U(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+f(y)=\int\left(xy^2+x+1\right)\mathrm{d}x+f(y)=\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2}{2}+x+f(y)$$

$$Q(x,y)=x^2y-2=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=x^2y+f'(y)\implies f'(y)=-2\implies f(y)=-2y$$

Por tanto, $\boxed{U(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}+x-2y}$

Segundo método

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x P(p,0)\mathrm{d}p+\int_0^y Q(x,q)\mathrm{d}q=\int_0^x(p+1)\mathrm{d}p+\int_0^y\left(x^2q-2\right)\mathrm{d}q \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\frac{x^2y^2}{2}-2y \end{aligned}$$

$\square$

B.7.2. Construcción del potencial en $\mathbb{R}^3$

Vamos ahora a dar los resultados análogos para el cálculo del potencial en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Primer método

En este primer método, construiremos el potencial siguiendo los pasos del caso de $\mathbb{R}^2$. Partimos de una forma diferencial exacta en $\mathbb{R}^3$

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

y defininos el potencial $U(x,y,z)$ como

$$U(x,y,z) = \int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f(y,z)$$

y para calcular la función $f(y,z)$ derivamos la expresión anterior con respecto a las variables y y z igualándolas a las funciones $Q(x,y,z)$ y $R(x,y,z)$ respectivamente. Posteriormente de estas ecuaciones obtendremos la función $f(y,z)$ buscada con lo que obtendremos el potencial $U(x,y,z)$.

Segundo método

Para dar este segundo método utilizaremos, al igual que para el caso del plano, el resultado obtenido en el teorema. Sea la forma diferencial exacta

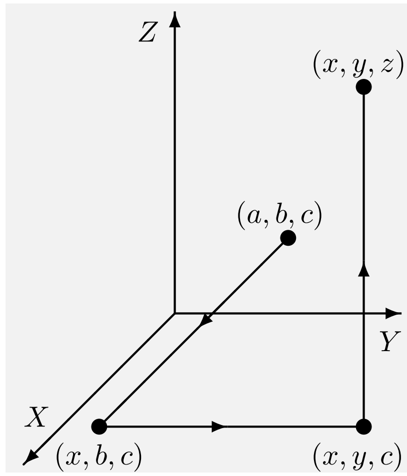
$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

de la cual pretendemos calcular una función potencial $U(x,y,z)$. Esto será equivalente a que la integral de línea

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

sea independiente del camino $\mathcal{C}$ elegido. Buscaremos un camino a partir del cual, el cálculo de la integral de línea sea “fácil”, para poder calcular el potencial.

Consideremos como camino la quebrada que une los puntos (a,b,c) , (x,b,c) , (x,y,c) , (x,y,z).



Siguiendo un razonamiento análogo al caso de $\mathbb{R}^2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} P(p,q,r)\,\mathrm{d}p + Q(p,q,r)\,\mathrm{d}q + R(p,q,r)\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{(a,b,c)}^{(x,b,c)} P(p,q,r)\,\mathrm{d}p + Q(p,q,r)\,\mathrm{d}q + R(p,q,r)\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \int_{(x,b,c)}^{(x,y,c)} P(p,q,r)\,\mathrm{d}p + Q(p,q,r)\,\mathrm{d}q + R(p,q,r)\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \int_{(x,y,c)}^{(x,y,z)} P(p,q,r)\,\mathrm{d}p + Q(p,q,r)\,\mathrm{d}q + R(p,q,r)\,\mathrm{d}r \\
&= \int_a^x P(p,b,c)\,\mathrm{d}p + \int_b^y Q(x,q,c)\,\mathrm{d}q + \int_c^z R(x,y,r)\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Obsérvese que las constantes a , b y c son arbitrarias, por lo que podremos asignarles el valor que creamos más oportuno. Generalmente, el valor nulo para las tres constantes suele ser un valor apropiado.

En el caso del espacio $\mathbb{R}^3$ suele ser más cómodo el segundo método.

Ejercicio 4.b
Dada la forma $(yz+y+z)\,\mathrm{d}x+(xz+x+z)\,\mathrm{d}y+(xy+x+y+2z)\,\mathrm{d}z$, calcular, si existe, su potencial.

Solución:

$$\frac{\partial(yz+y+z)}{\partial y}=z+1=\frac{\partial(xz+x+z)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(yz+y+z)}{\partial z}=y+1=\frac{\partial(xy+x+y+2z)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(xz+x+z)}{\partial z}=z+1=\frac{\partial(xz+x+z)}{\partial y}$$

Primer método

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+f(y,z)=\int(yz+y+z)\,\mathrm{d}x+f(y,z)\\ &= xyz+xy+xz+f(y,z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z)=xz+x+z=xz+x+\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}=z\Longrightarrow f(y,z)=zy+g(z)\Longrightarrow U(x,y,z)=xyz+xy+xz+yz+g(z)$$

Por último, calculando parciales con respecto a z:

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z)=xy+x+y+2z=xy+x+y+g'(z)$$
$$\Longrightarrow g'(z)=2z\Longrightarrow g(z)=z^2$$

Así, $\quad U(x,y,z)=xyz+xy+xz+yz+z^2$

Segundo método

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x P(p,0,0)\,\mathrm{d}p+\int_0^y Q(x,q,0)\,\mathrm{d}q+\int_0^z R(x,y,r)\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^x 0\,\mathrm{d}p+\int_0^y x\,\mathrm{d}q+\int_0^z (xy+x+y+2r)\,\mathrm{d}r\\ &= xy+xyz+xz+yz+z^2 \end{aligned}$$

□

B.8. Aplicaciones de las integrales de línea

Esta sección se recomienda a los alumnos como lectura.

B.8.1. La integral de línea y el trabajo

Cuando una fuerza $\vec{f}$ actúa sobre un punto A, de manera que lo desplaza hasta otro B sobre una recta, llamamos **trabajo de dicha fuerza** al producto escalar

$$W = \vec{f} \cdot \vec{r} \quad , \quad \text{siendo} \quad \vec{r} = \vec{AB}$$

Si la fuerza actúa sobre un punto A, de manera que lo desplaza hasta otro B sobre una curva C, y el vector (campo de fuerzas) $\vec{f}$ depende de los puntos de la curva, los trabajos asociados a $\vec{f}$ cuando descomponemos el arco $\widehat{AB}$ en arcos infinitamente pequeños $(\mathrm{d}\vec{\alpha})$, los llamamos **trabajos elementales** y serán

$$dW = \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$$

El trabajo total realizado por $\vec{f}$ se obtendrá de la suma total de todos los trabajos elementales, esto es, de la integral curvilínea a lo largo de la curva C de dW

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$$

A modo de ejemplo podemos ver que si $\vec{f}$ es una fuerza constante, es decir, $\vec{f} = \vec{c}$, entonces que el trabajo realizado por $\vec{f}$ al mover una partícula desde un punto A a un punto B a lo largo de cualquier camino regular a trozos que una A con B es $\vec{c} \cdot (B - A)$, producto de la fuerza por el desplazamiento. Pasemos a demostrarlo.

Sea $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un camino que una A y B, es decir, $\vec{\alpha}(a) = A$ y $\vec{\alpha}(b) = B$, y escribamos $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Entonces el trabajo realizado por $\vec{f}$ es igual a

$$\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b \alpha_k'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} c_k\,[\alpha_k(b) - \alpha_k(a)] = \vec{c} \cdot [\vec{\alpha}(b) - \vec{\alpha}(a)] = \vec{c} \cdot (B - A)$$

Para este campo de fuerzas el trabajo depende solamente de los puntos extremos A y B y no de la curva que los une. A estos campos se les llama

conservativos. Recordemos que no todos los campos de fuerza tienen esta propiedad. Para que se cumpla esta propiedad hace falta que $\vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$ sea una forma diferencial exacta.

B.8.2. La integral de línea y el potencial eléctrico

Si es $\vec{e}$ la intensidad de un campo eléctrico, llamamos **diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos A y B**, al trabajo que deberá realizar el campo $\vec{e}$ para poder llevar la unidad positiva de carga de un punto a otro. Atendiendo a lo dicho anteriormente para el trabajo

$$V_A - V_B = \int_{\widehat{AB}} \vec{e}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$$

El **potencial eléctrico** en un punto A, notado por V_A, es el trabajo que hay que realizar para trasladar la unidad de carga positiva desde el infinito a dicho punto

$$V_A = \int_{\widehat{P\infty}} \vec{e}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} \quad \text{ó} \quad V_A = -\int_{\widehat{\infty P}} \vec{e}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$$

B.8.3. Principio del trabajo y la energía. Conservación de la energía

Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva bajo la acción de un campo de fuerzas $\vec{f}$. Si la velocidad de la partícula en el instante t es $v(t)$, su energía cinética está definida por $\frac{1}{2}mv^2(t)$. Vamos a demostrar que la variación de la energía cinética en cualquier intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por $\vec{f}$ durante dicho intervalo de tiempo.

Designemos por $\vec{r}(t)$ la posición de la partícula en el instante t. El trabajo realizado por $\vec{f}$ durante un intervalo de tiempo $[a, b]$ es $\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{r}$.

Por la segunda ley del movimiento de Newton tenemos que

$$\vec{f}\,[\vec{r}(t)] = m\,\vec{a}(t) = m\,\vec{v}'(t)$$

donde $\vec{v}(t)$ designa el vector velocidad en el instante t. La velocidad es la longitud del vector velocidad, $v(t) = ||\vec{v}(t)||$. Por consiguiente:

$$\vec{f}\,[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}'(t) = \vec{f}\,[\vec{r}(t)] \cdot \vec{v}(t) = m\,\vec{v}'(t) \cdot \vec{v}(t) = \frac{1}{2}m\,\frac{d}{\mathrm{d}t}\,[\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)] = \frac{1}{2}m\,\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[v^2(t)\right]$$

Calculando la integral de línea, tenemos

$$\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{f}\,[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}\,'(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} m\, v^2(t)\right]_a^b = \frac{1}{2} m\, v^2(b) - \frac{1}{2} m\, v^2(a)$$

Si notamos a la energía cinética de la partícula en un punto $\vec{x}$ como $K(\vec{x})$, la fórmula queda

$$\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{r} = K(B) - K(A) \tag{B.1}$$

En 1840, el físico inglés Michael Faraday (1791-1867) escribió: "*En ningún lugar hay una creación pura o producción de energía sin una correspondiente disminución de algo que la suministra*". Este enunciado representa la primera formulación de una de las leyes más importantes de la física –la **ley de conservación de la energía**–. Diferentes autores en filosofía de la ciencia han visto en esta ley la mayor generalización de todos los tiempos que ha concebido la mente humana. Muchos físicos han contribuido al conocimiento de esta ley. Dos de los primeros y más influyentes fueron James Prescott Joule (1818-1889) y Hermann Ludwig Helmholtz (1821-1894). En terminología moderna, enunciamos la ley como sigue: *En un campo conservativo, la suma de las energías cinética y potencial de un objeto se mantiene constante punto a punto.*

Podemos usar las integrales de línea para deducir esta ley.

Sea $\vec{f}$ un campo de fuerzas que es conservativo y que tiene una función potencial U. Se define como la **energía potencial** ρ de una partícula en un punto $\vec{x}$ a $\rho(\vec{x}) = -U(\vec{x})$. Como la energía potencial es el *negativo* del potencial $U(\vec{x})$, se tiene que $\vec{f}(\vec{x}) = -\nabla\rho(\vec{x})$. Si A y B son dos puntos, entonces el trabajo realizado por $\vec{f}$ a lo largo de una curva regular C con extremos en A y B es

$$\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\left[\rho(B) - \rho(A)\right] = \rho(A) - \rho(B) \tag{B.2}$$

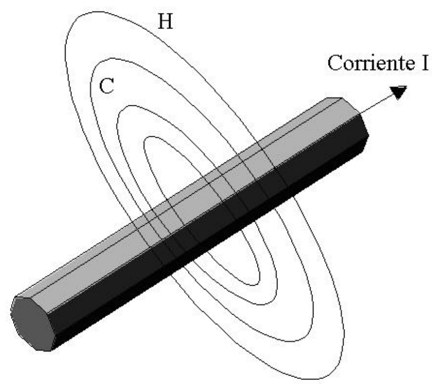
Uniendo las fórmulas B.1 y B.2 obtenemos

$$K(B) - K(A) = \rho(A) - \rho(B)$$

o bien

$$\rho(A) + K(A) = \rho(B) + K(B)$$

lo cual implica que la suma de la energía potencial y de la energía cinética se mantiene constante punto a punto.



B.8.4. Ley de Ampère

Una aplicación interesante de la integral de línea es la formulación matemática de la ley de Ampère, que relaciona corrientes eléctricas con sus efectos magnéticos. El descubrimiento de que las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos fue realizado por Oersted alrededor de 1820. Supongamos que $\vec{H}$ denota un campo magnético en $\mathbb{R}^3$ y sea C una curva cerrada orientada en $\mathbb{R}^3$. Con las unidades físicas apropiadas, la ley de Ampère asegura que

$$\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = I$$

donde I es la corriente neta que pasa por cualquier superficie acotada por C. (Ver figura)

Las integrales de línea tienen otras múltiples aplicaciones tales como: circulación de un fluido, pérdida o ganancia de un fluido (flujo), ángulo subtendido por una curva, etc.

Ejercicio 5

Calcular $I = \int_{OA} \left[xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y\right]$, siendo $O(0,0)$, $A(1,1)$, a lo largo de los siguientes caminos:

(a) Quebradas de dos lados, paralelos a los ejes:

(i) Con primer lado sobre el eje X.

(ii) Con primer lado sobre el eje Y.

(b) El segmento OA.

(c) $y^3 = x$.

(d) ¿Existe función potencial?

Solución:

(a) (i) En este caso el camino es la quebrada que une los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, por consiguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(0,0)}^{(1,0)} \left[xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y\right] + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \left[xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y\right] \\ &= \int_0^1 \left[x0^4\,\mathrm{d}x + x^2 0^3\, 0\right] + \int_0^1 \left[1y^4\, 0 + 1^2 y^3\,\mathrm{d}y\right] = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ii) En este caso el camino es la quebrada que une los puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, por consiguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(0,0)}^{(0,1)} \left[xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y\right] + \int_{(0,1)}^{(1,1)} \left[xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y\right] \\ &= \int_0^1 \left[0y^4\, 0 + 0^2 1^3\, 0\right] + \int_0^1 \left[x1^4\,\mathrm{d}x + x^2 1^3\, 0\right] = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Utilizando la parametrización de un segmento tendremos:

$$\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{\alpha}(t) = (t,t)$$

y por tanto, $\vec{\alpha}'(t) = (1,1)$ que al sustituir en I se tendrá:

$$I = \int_0^1 tt^4\,\mathrm{d}t + t^2t^3\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t^5\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^6}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(c) $x = y^3 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = 3y^2\,\mathrm{d}y$. Sustituyendo:

$$\boxed{I} = \int_0^1 y^3 y^4 3y^2\,\mathrm{d}y + y^6 y^3\,\mathrm{d}y = \int_0^1 4y^9\,\mathrm{d}y = \left[\frac{2y^{10}}{5}\right]_0^1 \boxed{= \frac{2}{5}}$$

(d) No existe función potencial ya que la integral I depende del camino elegido.

□

Ejercicio 6

Dada la integral $I = \int_{\mathcal{C}} \Big[(6xy^3 + 5)\,\mathrm{d}x + ax^2y^b\,\mathrm{d}y + 6z^2\,\mathrm{d}z\Big]$:

(a) Hallar el valor de a y b para que el integrando admita función potencial.

(b) En ese caso, hallar la integral curvilínea entre los puntos $(0, 1, 1)$ y $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a lo largo de cualquier curva $\mathcal{C}$ que los una.

Solución:

(a) Para que el integrando admita función potencial tiene que ocurrir que la forma diferencial sea exacta, y esto ocurrirá siempre que las derivadas parciales cruzadas coincidan. Por tanto, se tendrán que calcular las derivadas parciales cruzadas e igualarlas:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial(6xy^3+5)}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial(6z^2)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(ax^2y^b)}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial(6z^2)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(6xy^3+5)}{\partial y} = 18xy^2 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(ax^2y^b)}{\partial x} = 2axy^b$$

Por tanto, $18xy^2 = 2axy^b$, de lo que se deduce que $\boxed{a = 9}$ y $\boxed{b = 2}$. Observemos que aunque los valores de a y b los obtenemos de la tercera igualdad, es necesario comprobar que se verifican las otras dos igualdades sobre derivadas parciales cruzadas para que la forma diferencial sea exacta.

(b) Para calcular el valor de la integral pedida podremos calcular el potencial $U(x,y,z)$ y el valor de la integral será $U\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - U(0,1,1)$ o bien podemos calcular el valor directamente siguiendo una quebrada que nos lleve del punto $(0,1,1)$ al $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Lo hacemos calculando el potencial:

$$U(x,y,z) = \int_0^x 5\,\mathrm{d}p + \int_0^y 9x^2q^2\,\mathrm{d}q + \int_0^z 6r^2\,\mathrm{d}r = 5x + 3x^2y^3 + 2z^3$$

Por tanto, $I = U\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - U(0,1,1) = 3 + \frac{5\sqrt{2}}{4}$ □

Ejercicio 7

Calcular la integral curvilínea $I = \oint (ye^{xy} + x)\,\mathrm{d}x + (xe^{xy} + 3y)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el punto $(2,6)$ y radio 7.

Solución:

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial\,(xe^{xy} + 3y)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial\,(ye^{xy} + x)}{\partial y}$, la forma diferencial es exacta y como el camino es cerrado entonces la integral vale 0. □

Ejercicio 8

Calcular la integral curvilínea $I = \oint xy\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

Solución:

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial(2x)}{\partial x} = 2 \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial(xy)}{\partial y} = x$, , la forma diferencial no es exacta, y la integral no es independiente del camino. La parametrización de la elipse será:

$$x = 1\cos t\ ;\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t\ ;\ t \in [0, 2\pi] \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = -\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t\ ;\ \mathrm{d}y = 2\cos t\,\mathrm{d}t$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
I &= \oint xy\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \Big(\cos t\ 2\ \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + 2\cos t\ 2\cos t\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{-2\cos t \operatorname{sen}^2 t}_{0} + 4\cos^2 t\right)\,\mathrm{d}t = 8\ \beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = 8\ \frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{1} = 4\pi
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 9
Calcular el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (xy, x)$ que se desplaza entre los puntos $A = (1,1)$ y $B = (2,4)$ siguiendo el camino dado por:

(a) El segmento que los une.

(b) La parábola $y = x^2$.

Solución:
El trabajo vendrá dado por la integral de línea $W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$.
Como las derivadas parciales cruzadas no coinciden, $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = x\right)$, el trabajo no será independiente del camino y, por lo tanto, no tiene porque ser igual en los dos caminos dados. Así:

(a) El segmento que une A con B viene parametrizado por:

$$\vec{\alpha}(t) = (1+t, 1+3t) \quad \text{con} \quad t\in[0,1] \quad \Longrightarrow \quad \vec{\alpha}'(t) = (1,3)$$

con lo que:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\underbrace{(1+t)}_{x}\underbrace{(1+3t)}_{y}\underbrace{(1\,\mathrm{d}t)}_{\mathrm{d}x} + \underbrace{(1+t)}_{x}\underbrace{(3\,\mathrm{d}t)}_{\mathrm{d}y}\right) \\
&= \int_0^1 \Big(4 + 7t + 3t^2\Big)\,\mathrm{d}t = \left[4t + \frac{7t^2}{2} + t^3\right]_0^1 = \frac{17}{2}
\end{aligned}
$$

(b) La parábola se expresa en forma explícita como

$$x \in [1,2] \quad ; \quad y = x^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$$

y el trabajo será:

$$\begin{aligned} \boxed{W} &= \int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(x \underbrace{x^2}_{y}\,\mathrm{d}x + x \underbrace{2x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}y} \right) \\ &= \int_1^2 \left(x^3 + 2x^2 \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_1^2 = 4 + \frac{16}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \boxed{= \frac{101}{12}} \end{aligned}$$

Como vemos, el trabajo depende del camino y, por lo tanto, $\vec{F}$ no es un campo conservativo. □

Ejercicio 10
Calcular la integral curvilínea I a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo formado por una semicircunferencia de centro el origen y radio dos y su diámetro sobre el eje OX.

$$I = \oint y^2\,\mathrm{d}x + (xy + x^2)\,\mathrm{d}y$$

Solución:

Como $\dfrac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y$; $\dfrac{\partial(xy+x^2)}{\partial x} = y + 2x$ el integrando no es una forma diferencial exacta y por tanto la integral no tiene por que ser nula aunque el camino es cerrado.

Separando I en dos integrales I_1 (a través de la semicircunferencia) e I_2 (a través del diámetro, que es un segmento) tendremos que $I = I_1 + I_2$.

$$\vec{\alpha}_1 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{\alpha}_1(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t)$$

por tanto $\vec{\alpha}_1'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t)$ con lo que

$$\boxed{I_1} = \int_0^\pi \Big(4\,\mathrm{sen}^2 t(-2\,\mathrm{sen}\,t) + (4\cos t\,\mathrm{sen}\,t + 4\cos^2 t)(2\cos t) \Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \left(-8\,\mathrm{sen}^3 t + 8\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t + 8\underbrace{\cos^3 t}_{0} \right) \mathrm{d}t = -8\ \beta\left(2, \frac{1}{2}\right) + 8\ \beta\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$= \ -8\ \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} + 8\ \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = -\frac{32}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$\vec{\alpha}_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{\alpha}_2(t) = (4t-2, 0)$$

por tanto $\vec{\alpha}_2'(t) = (4,0)$ con lo que $I_2 = \displaystyle\int_0^1 0(4\,\mathrm{d}t) + (0 + (4t-2)^2)(0\,\mathrm{d}t) = 0$
de lo que se deduce que

$$I = \oint y^2\,\mathrm{d}x + (xy + x^2)\,\mathrm{d}y = I_1 + I_2 = -\frac{16}{3}$$

Observemos que otra forma de parametrizar el diámetro es en forma explícita:

$$x \in [-2,2]\ ;\ y = 0\ ;\ \mathrm{d}y = 0$$

por tanto, $\quad I_2 = \displaystyle\int_{-2}^{2} 0\,\mathrm{d}x + (0 + x^2)\,0 = 0.$ □

B.9. Problemas propuestos para el alumno

11. Calcular el potencial (si existe) de las siguientes formas diferenciales:

   (a) $(x+z)\,\mathrm{d}x - (y+z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$

   (b) $y\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}z$

   (c) $(y\mathrm{e}^{xy} + x)\ \mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^{xy} + 3y)\ \mathrm{d}y$

   (d) $\left(3x^2yz + x^2\right)\ \mathrm{d}x + x^3z\,\mathrm{d}y + x^3y\,\mathrm{d}z$

12. Siendo $A = \left(3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2\right)$, hallar $\displaystyle\int_C A\,\mathrm{d}r$ donde C es una trayectoria que va desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$, en los siguientes casos:

   (a) La curva $x = t\ ;\ y^2 = t\ ;\ z^3 = t.$

   (b) La quebrada que une los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

   (c) El segmento que une ambos puntos.

(d) ¿Es $A\,dr$ exacta? ¿Por qué?

13. Dada la forma diferencial

$$\left(\mathrm{e}^{x+y} + \cos(x-y)\right)\,\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^{x+y} - a\cos(x-y) + 2\right)\,\mathrm{d}y$$

(a) Calcular a para que sea exacta. Hallar la función potencial.

(b) Para dicho valor, calcular la integral curvilínea de la forma diferencial a lo largo de:

(i) Cualquier curva que una los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

(ii) La circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ recorrida en sentido positivo.

14. Dada la forma diferencial $(x + ay + a)\,\mathrm{d}x + (2x + 4y - 1)\,\mathrm{d}y$:

(a) Calcular el valor de la constante a para que sea forma diferencial exacta.

(b) Para dicho valor calcular la integral de línea de la forma diferencial entre los puntos $(1, 0)$ y (e, e) siguiendo la curva $y = x\ln x$.

15. Ejercicio 1.a-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

16. Calcular el valor de a y b para que la integral

$$\int_C \left(2xyz^a + x^2\right)\mathrm{d}x + x^2z^3\,\mathrm{d}y + bx^2yz^2\,\mathrm{d}z$$

sea independiente del camino. Para dichos valores, calcular la integral entre los puntos $A = (2, 0, \sqrt{11})$ y $B = (1, \sqrt{7}, 0)$ a lo largo del segmento que une ambos puntos.

17. Calcular la integral curvilínea $I = \oint_C xy\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x^2}{2} + 3\right)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

18. Calcular la integral curvilínea $I = \oint_C xy\,\mathrm{d}x + (x+3)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

19. Calcular el valor de a para que la integral

$$\int_C \big(3x^2+2y+\mathrm{e}^{x+y}(\cos x+\operatorname{sen}x)\big)\,\mathrm{d}x+\big(3y^2+2x+\mathrm{e}^{x+y}(\operatorname{sen}x+a\cos x)\big)\,\mathrm{d}y$$

sea independiente del camino. Para dicho valor, calcular la integral entre los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$ siguiendo el camino dado por $y=2x^2$.

20. Determinar los valores de las constantes a y b para que la forma diferencial

$$axy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+z^b\right)\,\mathrm{d}y+byz^2\,\mathrm{d}z$$

sea forma diferencial exacta. Para dichos valores calcular

$$\int_{\mathcal{C}} axy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+z^b\right)\,\mathrm{d}y+byz^2\,\mathrm{d}z$$

a través de:

(a) El segmento que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.

(b) La quebrada de puntos $(0,0,0)$, $(1,2,0)$, $(1,2,2)$ y $(1,1,1)$.

(c) El camino cerrado parametrizado por $\vec{\alpha}(t)=\left(\cos t,\operatorname{sen}t,t^2-2\pi t\right)$ donde $t\in[0,2\pi]$.

21. Calcular la integral de línea $\oint_C x\,\mathrm{d}y$ siendo C la curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longrightarrow & \left(\cos^3 t,\operatorname{sen}^3 t\right) \end{array}$$

22. (a) Calcular los valores de las constantes a y b para que la forma diferencial

$$\left(3x^a y^2+y\right)\,\mathrm{d}x+\left(2x^3y^b+x+1\right)\,\mathrm{d}y$$

sea exacta. Hallar la función potencial para dichos valores.

(b) Calcular $\oint_{\mathcal{C}}\left(3x^2y^2+y\right)\,\mathrm{d}x+\left(2x^3y^2+x+1\right)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo.

(c) Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(3x^2y^2 + y\right)\, \mathrm{d}x + \left(2x^3y + x + 1\right)\, \mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$:

(i) La circunferencia centrada en el origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo.

(ii) El segmento que une el punto $(0,1)$ con el $(1,2)$.

23. Calcular $\displaystyle\int_C \left(3x^2 + 2x + y^2\right)\, \mathrm{d}x + \left(2xy + y^3\right)\, \mathrm{d}y$ donde C es:

(a) El camino que va desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ siguiendo la curva dada por $y = \sqrt[6]{x}$.

(b) La circunferencia de centro $(3,-7)$ y radio 9.

Soluciones

11. (a) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + (x-y)z$ (b) e^{xy+z} (c) $\mathrm{e}^{xy} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3y^2}{2}$ (d) $\dfrac{x^3}{3} + x^3yz$

12. (a) $\dfrac{37}{12}$ (b) $\dfrac{23}{3}$ (c) $\dfrac{13}{3}$ (d) No, ya que depende del camino elegido.

13. (a) $a = 1$ $U(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + \operatorname{sen}(x-y) + 2y$

(b) (i) $\mathrm{e}^{x_2+y_2} + \operatorname{sen}(x_2 - y_2) + 2y_2 - \mathrm{e}^{x_1+y_1} - \operatorname{sen}(x_1 - y_1) - 2y_1$ (ii) 0

14. (a) $a = 2$ (b) $\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - \dfrac{5}{2}$

16. $a = 3$, $b = 3$ $I = -\dfrac{7}{3}$

17. 0

18. 2π

19. $a = 0$ $I = 13 + \mathrm{e}^3 \operatorname{sen} 1$

20. $a = 2$; $b = 3$ (a) 2 (b) 2 (c) 0

21. $\dfrac{3}{8}\pi$

22. (a) $a = 2$; $b = 1$ (b) $\dfrac{\pi}{4}$ (c) (i) 0 (ii) 7

23. (a) $\dfrac{13}{4}$ (b) 0

Apéndice C

Relación de problemas del tema Integrales de Línea

Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 1. Integrales de Línea

Ejercicio 1

Calcular el trabajo realizado por una partícula que se mueve desde el punto $(0,0)$ al $(1,2)$ siguiendo la gráfica de la curva $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\vec{\alpha}(t) = \left(t^2, 2t\right)$ cuando actúa sobre ella una fuerza $\vec{f}(x,y) = \left(xy, x^2+y^2\right)$.

Ejercicio 2

Calcular la integral de línea $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia centrada en el origen y de radio a.

Ejercicio 3

Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ donde $\mathcal{C}$ es el camino dado por $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \vec{\alpha}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$.

Ejercicio 4

Calcular, si existe, la función potencial de las siguientes formas diferenciales:

(a) $\left(xy^2 + x + 1\right)\mathrm{d}x + \left(x^2y - 2\right)\mathrm{d}y$

(b) $(yz + y + z)\,\mathrm{d}x + (xz + x + z)\,\mathrm{d}y + (xy + x + y + 2z)\,\mathrm{d}z$

Ejercicio 5

Calcular $I = \displaystyle\int_{OA} \left[xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y\right]$, siendo $O(0,0)$, $A(1,1)$, a lo largo de los siguientes caminos:

(a) Quebradas de dos lados, paralelos a los ejes:

(i) Con primer lado sobre el eje X.

(ii) Con primer lado sobre el eje Y.

(b) El segmento OA.

(c) $y^3 = x$.

(d) ¿Existe función potencial?

Ejercicio 6

Dada la integral $I = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left[(6xy^3 + 5)\,\mathrm{d}x + ax^2y^b\,\mathrm{d}y + 6z^2\,\mathrm{d}z\right]$:

(a) Hallar el valor de a y b para que el integrando admita función potencial.

(b) En ese caso, hallar la integral curvilínea entre los puntos $(0,1,1)$ y $\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a lo largo de cualquier curva $\mathcal{C}$ que los una.

Ejercicio 7

Calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\oint (y\mathrm{e}^{xy} + x)\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^{xy} + 3y)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el punto $(2,6)$ y radio 7.

Ejercicio 8

Calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\oint xy\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

Ejercicio 9

Calcular el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (xy, x)$ que se desplaza entre los puntos $A = (1,1)$ y $B = (2,4)$ siguiendo el camino dado por:

(a) El segmento que los une.

(b) La parábola $y = x^2$.

Ejercicio 10
Calcular la integral curvilínea I a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo formado por una semicircunferencia de centro el origen y radio dos y su diámetro sobre el eje OX.

$$I = \oint y^2 \, \mathrm{d}x + (xy + x^2) \, \mathrm{d}y$$

Problemas propuestos para el alumno

Ejercicio 11
Calcular el potencial (si existe) de las siguientes formas diferenciales:

(a) $(x+z)\,\mathrm{d}x - (y+z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$

(b) $y\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}z$

(c) $(y\mathrm{e}^{xy} + x)\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^{xy} + 3y)\,\mathrm{d}y$

(d) $\left(3x^2yz + x^2\right)\,\mathrm{d}x + x^3z\,\mathrm{d}y + x^3y\,\mathrm{d}z$

Ejercicio 12
Siendo $A = \left(3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2\right)$, hallar $\displaystyle\int_C A\,\mathrm{d}r$ donde C es una trayectoria que va desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$, en los siguientes casos:

(a) La curva $x = t$; $y^2 = t$; $z^3 = t$.

(b) La quebrada que une los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

(c) El segmento que une ambos puntos.

(d) ¿Es $A\,dr$ exacta? ¿Por qué?

Ejercicio 13
Dada la forma diferencial

$$\left(\mathrm{e}^{x+y} + \cos(x-y)\right)\,\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^{x+y} - a\cos(x-y) + 2\right)\,\mathrm{d}y$$

(a) Calcular a para que sea exacta. Hallar la función potencial.

(b) Para dicho valor, calcular la integral curvilínea de la forma diferencial a lo largo de:

(i) Cualquier curva que una los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

(ii) La circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ recorrida en sentido positivo.

Ejercicio 14
Dada la forma diferencial $(x + ay + a)\,\mathrm{d}x + (2x + 4y - 1)\,\mathrm{d}y$:

(a) Calcular el valor de la constante a para que sea forma diferencial exacta.

(b) Para dicho valor calcular la integral de línea de la forma diferencial entre los puntos $(1, 0)$ y (e, e) siguiendo la curva $y = x\ln x$.

Ejercicio 15
Ejercicio 1.a-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

Ejercicio 16
Calcular el valor de a y b para que la integral

$$\int_C \left(2xyz^a + x^2\right)\mathrm{d}x + x^2z^3\,\mathrm{d}y + bx^2yz^2\,\mathrm{d}z$$

sea independiente del camino. Para dichos valores, calcular la integral entre los puntos $A = (2, 0, \sqrt{11})$ y $B = (1, \sqrt{7}, 0)$ a lo largo del segmento que une ambos puntos.

Ejercicio 17
Calcular la integral curvilínea $I = \oint_C xy\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x^2}{2} + 3\right)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

Ejercicio 18

Calcular la integral curvilínea $I = \oint_C xy\,\mathrm{d}x + (x+3)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

Ejercicio 19

Calcular el valor de a para que la integral

$$\int_C \big(3x^2 + 2y + \mathrm{e}^{x+y}(\cos x + \operatorname{sen} x)\big)\,\mathrm{d}x + \big(3y^2 + 2x + \mathrm{e}^{x+y}(\operatorname{sen} x + a\cos x)\big)\,\mathrm{d}y$$

sea independiente del camino. Para dicho valor, calcular la integral entre los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$ siguiendo el camino dado por $y = 2x^2$.

Ejercicio 20

Determinar los valores de las constantes a y b para que la forma diferencial

$$axy\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + z^b\right)\,\mathrm{d}y + byz^2\,\mathrm{d}z$$

sea forma diferencial exacta. Para dichos valores calcular

$$\int_C axy\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + z^b\right)\,\mathrm{d}y + byz^2\,\mathrm{d}z$$

a través de:

(a) El segmento que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.

(b) La quebrada de puntos $(0,0,0)$, $(1,2,0)$, $(1,2,2)$ y $(1,1,1)$.

(c) El camino cerrado parametrizado por $\vec{\alpha}(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2 - 2\pi t\big)$ donde $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 21

Calcular la integral de línea $\oint_C x\,\mathrm{d}y$ siendo C la curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longrightarrow & \big(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t\big) \end{array}$$

Ejercicio 22

(a) Calcular los valores de las constantes a y b para que la forma diferencial

$$\left(3x^a y^2 + y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2x^3 y^b + x + 1\right)\,\mathrm{d}y$$

sea exacta. Hallar la función potencial para dichos valores.

(b) Calcular $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \left(3x^2y^2 + y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2x^3y^2 + x + 1\right)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo.

(c) Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(3x^2y^2 + y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2x^3y + x + 1\right)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$:

(i) La circunferencia centrada en el origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo.

(ii) El segmento que une el punto $(0,1)$ con el $(1,2)$.

Ejercicio 23

Calcular $\displaystyle\int_C \left(3x^2 + 2x + y^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + y^3\right)\,\mathrm{d}y$ donde C es:

(a) El camino que va desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ siguiendo la curva dada por $y = \sqrt[6]{x}$.

(b) La circunferencia de centro $(3,-7)$ y radio 9.

Soluciones

11. (a) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + (x-y)z$ (b) e^{xy+z} (c) $\mathrm{e}^{xy} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3y^2}{2}$ (d) $\dfrac{x^3}{3} + x^3yz$

12. (a) $\dfrac{37}{12}$ (b) $\dfrac{23}{3}$ (c) $\dfrac{13}{3}$ (d) No, ya que depende del camino elegido.

13. (a) $a = 1$ $U(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + \operatorname{sen}(x-y) + 2y$

(b) (i) $\mathrm{e}^{x_2+y_2} + \operatorname{sen}(x_2 - y_2) + 2y_2 - \mathrm{e}^{x_1+y_1} - \operatorname{sen}(x_1 - y_1) - 2y_1$ (ii) 0

14. (a) $a = 2$ (b) $\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - \dfrac{5}{2}$

16. $a = 3$, $b = 3$ $I = -\dfrac{7}{3}$

17. 0

18. 2π

19. $a = 0$ $\qquad I = 13 + \mathrm{e}^3 \operatorname{sen} 1$

20. $a = 2\ ;\ b = 3$ $\qquad$ (a) 2 $\qquad$ (b) 2 $\qquad$ (c) 0

21. $\dfrac{3}{8}\pi$

22. (a) $a = 2\ ;\ b = 1$ $\qquad$ (b) $\dfrac{\pi}{4}$ $\qquad$ (c) (i) 0 $\quad$ (ii) 7

23. (a) $\dfrac{13}{4}$ $\qquad$ (b) 0

Apéndice D

Prácticas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales con Derive

En este apéndice se presentan las dos sesiones de prácticas que se desarrollan en la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales*.

En la primera de las sesiones se trabaja con los conceptos introducidos en los siguientes temas:

- Tema 0: Funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales.
- Tema 1: Integrales de línea. Aplicaciones.
- Tema 2: Integrales múltiples. Teorema de Green-Riemann. Aplicaciones.

En la segunda sesión se trabaja con los conceptos introducidos en el resto de los temas de la asignatura:

- Tema 3: Integrales de superficie. Teoremas de Stokes y de Gauss. Aplicaciones.
- Tema 4: Transformadas de Laplace y Fourier. Aplicaciones.
- Tema 5: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Aplicaciones.
- Tema 6: Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior. Aplicaciones.

D.1. Primera sesión

Práctica de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales con DERIVE. Curso 02/03. Primera Sesión

El objetivo de esta práctica es complementar la formación de la asignatura recibida en clase. Para su correcta realización es necesario cargar previamente el fichero `ANALISIS.MTH` (usar **File - Load - Utility File**). Este fichero contiene la definición de una serie de comandos útiles para la realización de los ejercicios.

Funciones Gamma y Beta. Campos escalares y vectoriales.

- *Función Gamma*

  - Sintaxis: GAMMA(valor)
  - Ejemplo: `Gamma(7/2)` para calcular $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

- *Función Beta*

  - Sintaxis: BETA(valor1,valor2)
  - Ejemplo: `beta(3/2,5)` para calcular $\beta\left(\frac{3}{2},5\right)$

- *Gradiente*

  - Sintaxis: GRADIENTE(campo escalar)
  - Ejemplo: `gradiente(x^2+y^2+z^2)` para calcular el gradiente del campo $x^2+y^2+z^2$

- *Divergencia*

  - Sintaxis: DIVERGENCIA(comp1,comp2,comp3)
  - Ejemplo: `divergencia(x^3y,2xzy,z^2)` para calcular la divergencia del campo $\left(x^3y, 2xzy, z^2\right)$

- *Rotacional*

  - Sintaxis: ROTACIONAL(comp1,comp2,comp3)
  - Ejemplo: `rotacional(x^3y,2xzy,z^2)` para calcular el rotacional del campo $\left(x^3y, 2xzy, z^2\right)$

- *Laplaciano*

  - Sintaxis: LAPLACIANO(campo escalar)
  - Ejemplo: `laplaciano(x^2+y^2+z^2)` para calcular el laplaciano del campo escalar $x^2 + y^2 + z^2$

Integrales de línea.

- *Forma diferencial exacta en* $\mathbb{R}^2$

  - Sintaxis: DIFERENCIALEXACTA2(comp1,comp2)
  - Ejemplo: `diferencialexacta2(y^2,2xy)` para comprobar si la forma diferencial $y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$ es exacta

- *Forma diferencial exacta en* $\mathbb{R}^3$

  - Sintaxis: DIFERENCIALEXACTA3(comp1,comp2,comp3)
  - Ejemplo: `diferencialexacta3(x+z,-(y+z),x-y)` para comprobar si la forma diferencial $(x+z)\,\mathrm{d}x - (y+z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$ es exacta

- *Potencial en* $\mathbb{R}^2$

  - Sintaxis: POTENCIAL2(comp1,comp2)
  - Ejemplo: `potencial2(y^2,2xy)` para calcular el potencial de la forma diferencial $y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$. En caso de que no sea forma diferencial exacta, lo indica

- *Potencial en* $\mathbb{R}^3$

  - Sintaxis: POTENCIAL3(comp1,comp2,comp3)
  - Ejemplo: `potencial3(x+z,-(y+z),x-y)` para calcular el potencial de la forma diferencial $(x+z)\,\mathrm{d}x - (y+z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$. En caso de que no sea forma diferencial exacta, lo indica

- *Integral de línea de formas no diferenciales exactas en* $\mathbb{R}^2$

  - Sintaxis: LINEAPARAMETRICA2(comp1,comp2,cam1,cam2,a,b)
  - Ejemplo: `lineaparametrica2(xy^4,x^2y^3,t^3,t,0,1)` para calcular la integral de línea de la forma diferencial $xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y$ a través de la curva $y^3 = x$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$

- *Integral de línea de formas no diferenciales exactas en* $\mathbb{R}^3$

  - Sintaxis:
  LINEAPARAMETRICA3(comp1,comp2,comp3,cam1,cam2,cam3,a,b)
  - Ejemplo:
  `lineaparametrica3(3xˆ2+6y,-14yz,20xzˆ2,t,sqrt(t),tˆ(1/3),0,1)`
  para calcular la integral de línea de $\left(3x^2+6y\right)\,\mathrm{d}x - 14yz\,\mathrm{d}y + 20xz^2\,\mathrm{d}z$ a través de la curva $x = t$, $y^2 = t$, $z^3 = t$, entre los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$

Integrales múltiples. Teorema de Green-Riemann.

- *Integral doble en coordenadas cartesianas*

  - Sintaxis: DOBLE(función,var1,lim1,lim2,var2,lim3,lim4)
  - Ejemplo: `doble(xy,y,0,x+1,x,0,2)` para calcular la integral doble de $f(x,y) = xy$ en la región comprendida por $x = 2$, $y = x+1$, $y = 0$, $x = 0$

- *Integral doble en coordenadas polares*

  - Sintaxis: DOBLEPOLAR(función,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2)
  - Ejemplo: `doblepolar(xˆ2yˆ2/(xˆ2+yˆ2),rho,0,1,theta,0,pi)` para calcular la integral doble de $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en la región comprendida por $x^2+y^2 = 1$, $y \geq 0$

- *Integral triple en coordenadas cartesianas*

  - Sintaxis: TRIPLE(función,var1,lim1,lim2,var2,lim3,lim4,var3,lim5,lim6)
  - Ejemplo: `triple(x+yz,z,0,5-x-y,y,0,5-x,x,0,5)` para calcular la integral triple de $f(x,y,z) = x+yz$ en la región comprendida por el plano $x+y+z = 5$ y los planos coordenados

- *Integral triple en coordenadas cilíndricas*

  - Sintaxis:
  TRIPLECILINDRICA(función,z,z1,z2,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2)
  - Ejemplo:
  `triplecilindrica(sqrt(xˆ2+yˆ2),z,rho,1,rho,0,1,theta,0,2pi)`
  para calcular la integral triple de $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ en la región comprendida por los planos $z = 0$, $z = 1$ y el interior del cono $z^2 = x^2+y^2$

- *Integral triple en coordenadas esféricas*

  - Sintaxis:
  TRIPLEESFERICA(función,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2,phi,phi1,phi2)
  - Ejemplo: `tripleesferica(x+y+z,rho,0,2,theta,0,2pi,phi,0,pi/2)` para calcular la integral triple de $f(x, y, z) = x + y + z$ en la región comprendida por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \geq 0$

- *Integral de línea usando el teorema de Green-Riemann y calculando la integral doble en coordenadas cartesianas*

  - Sintaxis: LINEAGREENRIEMANN(comp1,comp2,y,y1,y2,x,x1,x2)
  - Ejemplo: `lineagreenriemann(yˆ2,x,y,0,3,x,0,3)` para calcular la integral de línea de la forma diferencial $y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ a través del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$, $(0, 3)$

- *Integral de línea usando el teorema de Green-Riemann y calculando la integral doble en coordenadas polares*

  - Sintaxis:
  LINEAGREENRIEMANNPOLAR(comp1,comp2,rho,r1,r2,theta,theta1,theta2)
  - Ejemplo: `lineagreenriemannpolar(yˆ2,x,rho,0,5,theta,0,2pi)` para calcular la integral de línea de la forma diferencial $y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ a través de la circunferencia de radio 5 centrada en el origen

Ejemplos

1. Calcular $\Gamma\left(\dfrac{9}{2}\right)$.
2. Definir un comando llamado BETAPRACTICA para calcular la función Beta.
3. Calcular $\beta\left(\dfrac{7}{2}, 9\right)$.
4. Dado $f = 2x^2y - xz^3$, calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.
5. Sea $\vec{F} = xz\,\vec{\imath} - y^2\,\vec{\jmath} + 2x^2y\,\vec{k}$. Calcular: $\mathrm{div}(\vec{F})$, $\mathrm{rot}(\vec{F})$.

6. Calcular, si es posible, la función potencial de las siguientes formas diferenciales:

   (a) $\left(xy^2+x+1\right)\,\mathrm{d}x+\left(x^2y-2\right)\,\mathrm{d}y$

   (b) $xy\,\mathrm{d}x+2x\,\mathrm{d}y$

   (c) $(yz+y+z)\,\mathrm{d}x+(xz+x+z)\,\mathrm{d}y+(xy+x+y+2z)\,\mathrm{d}z$

   (d) $(\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x+(x+z)\,\mathrm{d}y+(xy+x+y+2\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}z$

7. Calcular la integral de línea $I=\int_C \left(xy^2+x+1\right)\,\mathrm{d}x+\left(x^2y-2\right)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de cualquier camino que una los puntos $(1,2)$ y $(-2,5)$.

8. Calcular la integral de línea

$$I=\int_C (yz+y+z)\,\mathrm{d}x+(xz+x+z)\,\mathrm{d}y+(xy+x+y+2z)\,\mathrm{d}z$$

   a lo largo del segmento que une los puntos $(1,2,3)$ y $(-2,7,3)$.

9. Calcular la integral curvilínea $I=\oint_C xy\,\mathrm{d}x+2x\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la circunferencia de centro el origen y radio 2.

10. Calcular la integral curvilínea

$$I=\int_C (\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x+(x+z)\,\mathrm{d}y+(xy+x+y+2\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}z$$

    a lo largo del segmento de extremos $(0,1,2)$ y $(2,-1,6)$.

11. Calcular $\iint_R \left(x^2+y^5\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo R el recinto encerrado por las rectas $x=0$, $x=2$, $y=0$ e $y=1$.

12. Definir un comando llamado DOBLEPRACTICA para calcular integrales dobles en coordenadas cartesianas.

13. Calcular $\iint_R xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo R la región comprendida por las rectas $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=x+1$.

14. Calcular el área de la circunferencia $x^2+y^2=4$.

15. Definir un comando llamado DOBLEPOLARPRACTICA para calcular integrales dobles en coordenadas polares.

16. Calcular el área del recinto limitado por $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

17. Calcular $\displaystyle\iiint_V (x + yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en el recinto comprendido por el plano $x + y + z = 5$ y los planos coordenados.

18. Calcular $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en la región comprendida por el interior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0$, $z = 1$.

19. Calcular el volumen de la figura limitada por el cono $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$.

20. Calcular el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

21. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle I = \oint_C xy\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$ a lo largo del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 1)$, utilizando el teorema de Green-Riemann.

22. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle I = \oint_C x^2y^3\,\mathrm{d}x + (2xy - 7)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la circunferencia de centro el origen y radio 2, utilizando el teorema de Green-Riemann.

Ejercicios

1. Calcular $\Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right)$, $\Gamma(6)$, $\beta(5, 6)$ y $\beta\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$.

2. Dado $f = 2x^2y^3 - xy^2z^5$, calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.

3. Definir un comando llamado DIVERGENCIAPRACTICA para calcular la divergencia de un campo vectorial.

4. Sea $\vec{F} = xyz\,\vec{\imath} - y^2z\,\vec{\jmath} + \left(2x^2y + z\right)\,\vec{k}$. Calcular: $\mathrm{div}(\vec{F})$, $\mathrm{rot}(\vec{F})$.

5. Calcular, si es posible, la función potencial de las siguientes formas diferenciales:

   (a) $(x + y + z)\,\mathrm{d}x - (y + z)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z$

(b) $y\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}z$

(c) $(y\mathrm{e}^{xy} + x)\ \mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^{xy} + 3y)\ \mathrm{d}y$

(d) $\left(2xy + y^2\right)\ \mathrm{d}x + \left(x^2 + y^3\right)\ \mathrm{d}y$

6. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_C y\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}z$ a lo largo de cualquier camino que una los puntos $(1,2,-3)$ y $(-2,5,11)$.

7. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_C (y\mathrm{e}^{xy} + x)\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^{xy} + 3y)\,\mathrm{d}y$ a lo largo del segmento que une los puntos $(1,2)$ y $(-2,9)$.

8. Siendo $A = \left(3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2\right)$, hallar $\displaystyle\int_C A\,\mathrm{d}r$ donde C es una trayectoria que va desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$, en los siguientes casos:

   (a) la curva $x = t\ ;\ y^2 = t\ ;\ z^3 = t$.

   (b) la quebrada que une los puntos $(0,0,0)\,,\ (1,0,0)\,,\ (1,1,0)\,,\ (1,1,1)$.

   (c) el segmento que une ambos puntos.

9. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle I = \oint_C xy\,\mathrm{d}x + (x+3)\ \mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

10. Calcular $\displaystyle\iint_R \left(2x^2y^5 - x + 2y - 5\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo R el recinto encerrado por las rectas $x = 1\ ,\ x = 3\ ,\ y = -1$ e $y = 2$.

11. Calcular $\displaystyle\iint_R \left(x^2 + y^3\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo R la region comprendida por las parábolas $y = x^2\ ,\ y = -x^2 + 2$.

12. Calcular el área del recinto limitado por $x^2 + y^2 = 8x\ ,\ y = x\ ,\ y = 0$.

13. Calcular $\displaystyle\iint_R \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en el recinto encerrado por $\left\{\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$

14. Calcular $\displaystyle\iiint_V (x + yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ siendo V el recinto sólido limitado por los planos $x = 0,\quad x = 2,\quad y = 0,\quad y = 1,\quad z = 1,\quad z = 3$.

15. Definir un comando llamado TRIPLEPRACTICA para calcular integrales triples en coordenadas cartesianas.

16. Calcular $\displaystyle\iiint_V (1+x+y+z)^{-3} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ siendo V el recinto limitado por $x+y+z=1$ y los planos coordenados.

17. Calcular el volumen de la región sólida limitada inferiormente por el cono $z=+\sqrt{x^2+y^2}$ y superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

18. Definir un comando llamado TRIPLECILINDRICAPRACTICA para calcular integrales triples en coordenadas cilíndricas.

19. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cilindro $x^2+y^2-4x=0$ y el cono $x^2-z^2=-y^2$.

20. Calcular $\displaystyle\iiint_V \frac{xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ siendo V el recinto limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ en el primer octante.

21. Definir un comando llamado TRIPLEESFERICAPRACTICA para calcular integrales triples en coordenadas esféricas.

22. Calcular la integral curvilínea $I=\displaystyle\oint_C \left(2xy+y^2\right) \mathrm{d}x+\left(x^2+y^3\right) \mathrm{d}y$ a lo largo del rectángulo de vértices $(1,1)$, $(1,3)$, $(-1,3)$, $(-1,1)$, utilizando el teorema de Green-Riemann.

23. Calcular la integral de línea $I=\displaystyle\oint_C \left(x^2y^3-5+3x\right) \mathrm{d}x+\left(2xy-7+x^2\right) \mathrm{d}y$ a lo largo de la semicircunferencia superior de centro el origen y radio 3 y su diámetro sobre el eje OX, utilizando el teorema de Green-Riemann.

D.2. Segunda sesión

Práctica de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales con DERIVE. Curso 02/03. Segunda Sesión

El objetivo de esta práctica es complementar la formación de la asignatura recibida en clase. Para su correcta realización es necesario cargar previamente el fichero ANALISIS.MTH (usar **File - Load - Utility File**). Este fichero contiene la definición de una serie de comandos útiles para la realización de los ejercicios.

Integrales de superficie. Teorema de Gauss.

- *Área de una superficie en coordenadas polares*

  - Sintaxis:
  AREASUPERFICIERXYPOLAR(z superf,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2)
  - Ejemplo:
  `areasuperficierxypolar(sqrt(x^2+y^2),rho,0,1,theta,0,2pi)` para calcular el área de la porción de la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ interior a $z = 2 - x^2 - y^2$

- *Cosenos directores de una superficie en forma implícita*

  - Sintaxis: COSENOIMPLICITA(superficie impli)
  - Ejemplo: `cosenoimplicita(z-x^2-y^2-4)` para calcular los cosenos directores de la superficie $z = 4 + x^2 + y^2$

- *Flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Integral doble en polares*

  - Sintaxis:
  FLUJORXYPOLAR(P,Q,R,z superf,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2)
  - Ejemplo: `flujorxypolar(x,2y,x+z,x^2+y^2,rho,0,4,theta,0,2pi)` para calcular el flujo del campo vectorial $(x, 2y, x + z)$ a través de la porción de $z = x^2 + y^2$ comprendida entre $z = 0$ y $z = 16$

- *Teorema de Gauss. Integral triple en coordenadas cilíndricas*

  - Sintaxis:
  FLUJOGAUSSCILINDRICA(P,Q,R,z,z1,z2,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2)

- Ejemplo:
`flujogausscilindrica(x,2y,3z,z,rho,2,rho,0,2,theta,0,2pi)` para calcular el flujo del campo vectorial $(x, 2y, 3z)$ a través de la superficie cerrada formada por $z^2 = x^2 + y^2$; $z = 0$; $z = 2$

- *Teorema de Gauss. Integral triple en coordenadas esféricas*

  - Sintaxis:
  FLUJOGAUSSESFERICA(P,Q,R,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2,phi,phi1,phi2)
  - Ejemplo:
  `flujogaussesferica(x^2z+x,y,z,rho,0,1,theta,0,2pi,phi,0,pi/2)` para calcular el flujo del campo vectorial $\left(x^2z + x, y, z\right)$ a través de la superficie cerrada formada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $z = 0$ con $z \geq 0$

Transformada de Laplace.

- *Transformada de Laplace de una función*

  - Sintaxis: LAPLACE(función,rango s)
  - Ejemplo: `laplace(t^3,0)` para calcular $\mathcal{L}\left[t^3\right]$

- *Transformada inversa de Laplace de una función*

  Sabemos que no existe una fórmula para calcular la transformada inversa de Laplace. Por lo tanto, sólo podemos utilizar el programa para realizar las operaciones necesarias para transformar la función dada en otras a las que si sepamos calcularles las transformadas inversas. Por ejemplo, conviene recordar que para descomponer un cociente de polinomios en fracciones simples se utiliza el comando **Simplify - Expand**.

Ecuaciones diferenciales.

- *E.D. de variables separadas*

  - Sintaxis: SEPARADA(p,q)
  - Ejemplo: `separada(x^2,y^2+1)` para resolver la ecuación diferencial de variables separadas $x^2\,\mathrm{d}x + \left(y^2+1\right)\,\mathrm{d}y = 0$

- *E.D. homogéneas*

  - Sintaxis: HOMOGENEA(p,q)
  - Ejemplo: `homogenea(x^2-y^2,2xy)` para resolver la ecuación diferencial homogénea $\left(x^2-y^2\right)\,\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y=0$

- *E.D. reducibles a homogéneas*

  - Sintaxis: REDUCIBLEHOMOGENEA(p,q)
  - Ejemplo: `reduciblehomogenea(2x+y+1,x+2y-1)` para resolver la ecuación diferencial reducible a homogénea $(2x+y+1)\,\mathrm{d}x+(x+2y-1)\mathrm{d}y=0$

- *E.D. exactas*

  - Sintaxis: EXACTA(p,q)
  - Ejemplo: `exacta(x^2y,x^3/3+y)` para resolver la ecuación diferencial exacta $x^2y\,\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x^3}{3}+y\right)\,\mathrm{d}y=0$

- *E.D. de factor integrante que depende sólo de x o sólo de y*

  - Sintaxis: FACTORINTEGRANTE(p,q)
  - Ejemplo: `factorintegrante(x+y^2,-2xy)` para resolver la ecuación diferencial $\left(x+y^2\right)\,\mathrm{d}x-2xy\,\mathrm{d}y=0$

- *E.D. lineales*

  - Sintaxis: LINEAL(p,q)
  - Ejemplo: `lineal(1/x,1)` para resolver la ecuación diferencial lineal $y'+\dfrac{y}{x}=1$

- *E.D. de Bernouille*

  - Sintaxis: BERNOUILLE(p,q,n)
  - Ejemplo: `bernouille(1/(x+1),-1/2(x+1)^3,2)` para resolver la ecuación diferencial de Bernouille $y'+\dfrac{y}{x+1}=-\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^2$

Ejemplos

1. Calcular el área de la porción de $z^2=x^2+y^2$ interior a $z=2-x^2-y^2$ con $z\geq 0$.

2. Calcular el área de la porción de $z = 2 - x^2 - y^2$ interior a $z^2 = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$.

3. Calcular el área del sólido limitado por $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z^2 = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$.

4. Calcular los cosenos directores de $z^2 = x^2 + y^2$.

5. Calcular, por dos procedimientos distintos, el flujo del campo vectorial (x, y, z) a través de la superficie cerrada limitada por $x^2 + y^2 = 4z$ y $z = 4$.

6. Crear un comando llamado FLUJOGAUSSESFERICAPRACTICA para calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada, utilizando el comando TRIPLEESFERICA(función,rho,rho1,rho2,theta,theta1,theta2,phi,phi1,phi2).

7. Calcular, por dos procedimientos distintos, el flujo del campo vectorial $\left(x^2 z + x, y, z\right)$ a través de la superficie cerrada limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = 0$, con $z \geq 0$.

8. Calcular las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

$$t^8 \;,\; \operatorname{sen}(9t) \;,\; t^{9/2} \;,\; t^4 \cos t \;,\; \mathrm{e}^{2t} \;,\; \mathrm{e}^{-3t} \cos(2t) \;,\; \frac{\operatorname{sen} t}{t} \;,\; \frac{\cos t}{t}$$

9. Descomponer en fracciones simples $\dfrac{s+2}{s^5 - s^4 - s^3 - 7s^2 - 20s - 12}$.

10. Crear un comando llamado SEPARADAPRACTICA para resolver ecuaciones diferenciales de variables separadas.

11. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $\dfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{tg}y\,\mathrm{d}y = 0$

(b) $\left(x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$

(c) $(x + y + 2)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$

(d) $(x + y - 1)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 2)\,\mathrm{d}y = 0$

(e) $(2x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ por dos procedimientos distintos.

(f) $(x \operatorname{sen} y + y \cos y)\,\mathrm{d}x + (x \cos y - y \operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y = 0$

(g) $\left(2xy^2 - 3y^3\right)\ \mathrm{d}x + \left(7 - 3xy^2\right)\ \mathrm{d}y = 0$

(h) $y' + \dfrac{y}{x} = 1$

(i) $y' - \dfrac{y}{x} = -y^2$

12. Encontrar las raíces de los siguientes polinomios:

(a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ (b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

(c) $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ (d) $p(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 36$

(e) $p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda$ (f) $p(\lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^5 + 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1$

Ejercicios

1. Calcular el área de la porción de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ interior a $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$.

2. Calcular el área de la porción de $x^2 + y^2 = z^2$ interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $z \geq 0$.

3. Calcular el área del sólido limitado por $x^2 + y^2 = z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $z \geq 0$.

4. Calcular los cosenos directores de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{z^2}{c^2}$.

5. Calcular, por dos procedimientos distintos, el flujo del campo vectorial $\left(2z, x, y^2\right)$ a través de la superficie cerrada limitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.

6. Calcular, por dos procedimientos distintos, el flujo del campo vectorial $(x, y, 1)$ a través de la superficie cerrada limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y $z = 0$ con $z \geq 0$.

7. Calcular las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

$$t^3\ ,\ \cos(7t)\ ,\ t^{11/2}\ ,\ t^2 \cos t\ ,\ \mathrm{e}^{5t}\ ,\ \mathrm{e}^{-3t}\ ,\ \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t\ ,\ \frac{\mathrm{e}^{2t}\cos t}{t}\ ,\ \frac{\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t}{t}$$

8. Descomponer en fracciones simples $\dfrac{s+3}{s^3-s}$ y $\dfrac{2s}{s^4-3s^2-4}$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $\mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{\mathrm{tg}y}\,\mathrm{d}y = 0$

   (b) $(x+y)\ \mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y = 0$

   (c) $(x-y-1)\,\mathrm{d}x + (2x-2y-2)\,\mathrm{d}y = 0$

   (d) $(x+y-1)\,\mathrm{d}x + (2x+2y-3)\,\mathrm{d}y = 0$

   (e) $(x-y-1)\,\mathrm{d}x + (x+4y-1)\,\mathrm{d}y = 0$

   (f) $(x+y-1)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^y + x)\ \mathrm{d}y = 0$

   (g) $\left(x^4 \ln x - 2xy^3\right)\ \mathrm{d}x + 3x^2y^2\,\mathrm{d}y = 0$

   (h) $\left(2y^3+2y\right)\ \mathrm{d}x + \left(2xy^2+2x+5\right)\ \mathrm{d}y = 0$

   (i) $y' - y = \cos x$

   (j) $3y' = (1-2x)y^4 - y$

10. Encontrar las raíces de los siguientes polinomios:

   (a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ (b) $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$

   (c) $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ (d) $p(\lambda) = \lambda^4 - 11\lambda^3 + 41\lambda^2 - 61\lambda + 30$

   (e) $p(\lambda) = \lambda^4 - 1$ (f) $p(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^2 + 16$

Apéndice E

Programa de la asignatura

En este apéndice se presenta el programa completo y detallado de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales*.

Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Programa

Parte I. Análisis Vectorial

Tema 0. Funciones gamma y beta. Campos escalares y vectoriales.
Función gamma, propiedades. Función beta, propiedades. Cálculo de integrales definidas trigonométricas. Notación de los campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales.

Tema 1. Integrales de línea. Aplicaciones.
Caminos. Curvas planas. Curvas alabeadas. Integrales de línea, definición, notación y propiedades. Conjuntos conexos y convexos. Formas diferenciales. Formas diferenciales exactas. Construcción de la función potencial. Aplicaciones de la integral de línea.

Tema 2. Integrales múltiples. Teorema de Green-Riemann. Aplicaciones.
Definición de integral doble. Integral doble sobre rectángulos. Teorema de

Fubini. Integral doble sobre recintos cualesquiera. Propiedades. Interpretación geométrica. Cambio de variables. Coordenadas polares. Generalización para funciones no acotadas. Extensión a la integral triple. Interpretación geométrica. Cambio de variables. Coordenadas esféricas. Coordenadas cilíndricas. Teorema de Green-Riemann. Aplicaciones.

Tema 3. Integrales de superficie. Teoremas de Stokes y de Gauss. Aplicaciones.

Extensión del concepto de integral de línea. Parametrización de superficies. Integral de superficie. Área de una superficie. Definición de flujo, notación. Teorema de Stokes. Teorema de Gauss. Aplicaciones.

Parte II. Transformaciones integrales

Tema 4. Transformadas de Laplace y de Fourier. Aplicaciones.

Definición de transformada de Laplace y de Fourier. Transformadas de las funciones elementales. Propiedades. Teoremas sobre transformadas. Transformada inversa de Laplace. Transformadas inversas elementales. Propiedades. Aplicación al cálculo de integrales impropias.

Parte III. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Tema 5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Aplicaciones.

Definición de ecuación diferencial. Solución y tipo de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria. Problema de Cauchy. Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias: E.D. de variables separadas, E.D. reducibles a variables separadas, E.D. homogéneas, E.D. reducibles a homogéneas, E.D. exactas, E.D. de factor integrante, E.D. lineales, E.D. de Bernouille, E.D. de Riccati, E.D. de grado n con respecto a la derivada. Cálculo de trayectorias ortogonales. Aplicación de las transformadas de Laplace a la resolución de E.D. lineales.

Tema 6. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior. Aplicaciones.

Definición de ecuación diferencial de orden n. Solución y tipo de soluciones de una ecuación diferencial de orden superior. Problema de Cauchy. Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Ecuaciones diferenciales lineales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Solución general de una ecuación diferencial lineal. Reducción del orden de una ecuación diferencial lineal homogénea. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes homogéneas. Resolución de ecuaciones diferenciales con transformadas de Laplace. Cálculo de soluciones particulares: método de los coeficientes indeterminados, método de Lagrange, método operacional. Ecuaciones diferenciales de Euler. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Resolución de sistemas lineales con transformadas de Laplace.

Apéndice F

Resolución de la prueba de nivel

En este apéndice presentamos la resolución de la prueba de nivel. Para una justificación teórica detallada de la resolución de estos ejercicios se remite al lector al apéndice A, donde se encuentra desarrollado por completo el tema 0 de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales*.

Resolución de la prueba de nivel

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\,\mathrm{d}t$

   Solución:
   En este caso tenemos 4 regiones (los 4 cuadrantes) y en todas ellas el integrando es positivo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_{(\mathrm{a})} &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\ \cos^4 t\,\mathrm{d}t \\ &= 4\,\frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) = 2\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)} = 2\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

$\square$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \ \cos^3 t \, \mathrm{d}t$

Solución:
En este caso tenemos 4 regiones, en 2 de las cuales el integrando es positivo y en las otras 2 negativo. Por lo tanto:

$$I_{(\mathrm{b})} \;=\; \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \ \cos^3 t \, \mathrm{d}t \;=\; 0$$

□

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \ \cos^4 t \, \mathrm{d}t$

Solución:
En este caso tenemos 2 regiones y en ambas el integrando es positivo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_{(\mathrm{c})} &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \ \cos^4 t \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \ \cos^4 t \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \, \frac{1}{2} \, \beta\left(2, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{1! \ \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2} \ \sqrt{\pi}} = \frac{4}{35} \end{aligned}$$

□

(d) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \cos^4 t \, \mathrm{d}t$

Solución:
En este caso tenemos 3 regiones y en todas el integrando es positivo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_{(\mathrm{d})} &= \int_0^{3\pi/2} \cos^4 t \, \mathrm{d}t = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, \mathrm{d}t = 3 \, \frac{1}{2} \, \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3}{2} \, \frac{\sqrt{\pi} \ \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2!} = \frac{9}{16} \, \pi \end{aligned}$$

□

(e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \, \mathrm{d}t$

Solución:

En este caso tenemos 3 regiones en dos de las cuales el integrando es negativo y en la otra es positivo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_{(\mathrm{e})} &= \int_{-\pi}^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \, \mathrm{d}t = -\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\, \beta\left(\frac{1}{2}, 3\right) \\ &= -\frac{1}{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\, \frac{\sqrt{\pi}\; 2!}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = -\frac{8}{15} \end{aligned}$$

□

2. Dado $\vec{F} = x^2y^2z^2\, \vec{\imath} + \left(z^2x^2 - y\right)\, \vec{\jmath} + \left(x^2 + y\right)\, \vec{k}$, calcular $\operatorname{rot}(\vec{F})$ y $\operatorname{div}(\vec{F})$.

Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^2z^2 & z^2x^2 - y & x^2 + y \end{vmatrix} \\ &= \left(1 - 2x^2z, 2x^2y^2z - 2x, 2xz^2 - 2x^2yz^2\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(x^2y^2z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2x^2 - y)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 + y)}{\partial z} = 2xy^2z^2 - 1$$

□

3. Dado $f = 2x^2y + 3xyz^3$, calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\nabla(f) &= \operatorname{grad}(f) \\
&= \left(\frac{\partial(2x^2y + 3xyz^3)}{\partial x}, \frac{\partial(2x^2y + 3xyz^3)}{\partial y}, \frac{\partial(2x^2y + 3xyz^3)}{\partial z}\right) \\
&= \left(4xy + 3yz^3, 2x^2 + 3xz^3, 9xyz^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \operatorname{div}(\nabla(f)) = \frac{\partial(4xy + 3yz^3)}{\partial x} + \frac{\partial(2x^2 + 3xz^3)}{\partial y} + \frac{\partial(9xyz^2)}{\partial z} \\
&= 4y + 18xyz
\end{aligned}$$

□

4. Dada la superficie $2x^2y + 3xyz^3 = 5$, calcular un vector normal a dicha superficie en el punto $(1, 1, 1)$.

Solución:
Sea el campo escalar $f(x, y, z) = 2x^2y + 3xyz^3 - 5$ que representa a la superficie. El punto $P \equiv (1, 1, 1)$ está en la superficie ya que satisface la ecuación. Para hallar un vector normal calculamos el gradiente de f y lo evaluamos en P. En el ejercicio anterior se obtuvo que $\nabla(f) = \left(4xy + 3yz^3, 2x^2 + 3xz^3, 9xyz^2\right)$. Por lo tanto, un vector normal será $\vec{N} = \nabla(f)\Big|_{(1,1,1)} = (7, 5, 9)$. □

Apéndice G

Resolución de la prueba de evaluación

En este apéndice presentamos la resolución de la prueba de evaluación. Para una justificación teórica detallada de la resolución de estos ejercicios se remite al lector al apéndice B, donde se encuentra desarrollada por completo la materia de *Integrales de Línea.*

Resolución de la prueba de evaluación

1. El camino $\mathcal{C}$ dado por $\vec{\alpha} : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$ es un camino cerrado.

   Solución:
   Falso.
   $A = \vec{\alpha}(0) = (2, 0)$ y $B = \vec{\alpha}(3\pi) = (-2, 0)$. Por lo tanto, como el punto de salida y el de llegada no coinciden, el camino no es cerrado. $\square$

2. El camino $\mathcal{C}$ dado por $\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (\cos^3 t, \mathrm{sen}^3 t)$ es un camino cerrado.

   Solución:
   Verdadero.
   $A = \vec{\alpha}(0) = (1, 0)$ y $B = \vec{\alpha}(2\pi) = (1, 0)$. Por lo tanto, como el punto de

salida y el de llegada coinciden, el camino es cerrado. □

3. Sea $\mathcal{C}_1$ el camino dado por $\vec{\alpha}_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}_1(t) = (2t, 4t)$ y $\mathcal{C}_2$ el camino dado por $\vec{\alpha}_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}_2(t) = (t, 2t)$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Solución:
Verdadero.
Ambas parametrizaciones representan un mismo camino que une los puntos $A = (0,0)$ y $B = (2,4)$. En concreto representan al segmento que une ambos puntos. □

4. La forma diferencial $\left(x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy - y^2\right)\,\mathrm{d}y$ es forma diferencial exacta.

Solución:
Falso.
$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(x^2 - y^2\right)}{\partial y} = -2y \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(2xy - y^2\right)}{\partial x} = 2y$ y, por lo tanto, no es forma diferencial exacta. □

5. Sea el campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (P,Q)$ con P y Q constantes. Entonces la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$ no depende del camino escogido $\mathcal{C}$ entre los puntos A y B.

Solución:
Verdadero.
$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Por lo tanto es forma diferencial exacta y así la integral de línea no depende del camino $\mathcal{C}$ elegido entre los puntos A y B. □

6. Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ dos funciones tales que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Sea $U(x,y)$ una función potencial de la forma diferencial $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ con $U(1,1) = 7$ y $U(2,4) = 13$. Sea $\mathcal{C}$ una curva de origen el punto $(1,1)$ y extremo el punto $(2,4)$. Entonces se tiene que

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -6$$

Solución:

Falso.

Si una forma diferencial es exacta, la integral de línea de dicha forma diferencial no depende del camino $\mathcal{C}$ que una los puntos A y B y además su resultado será $U(B) - U(A)$, siendo $U(x,y)$ la función potencial de la forma diferencial. Por lo tanto, el resultado correcto de este ejercicio sería $U(2,4) - U(1,1) = 13 - 7 = 6$. □

7. Al calcular las integrales de línea de una cierta forma diferencial a lo largo de 7 caminos distintos que unen dos puntos A y B se ha obtenido siempre el mismo resultado 48. Sea $\mathcal{C}$ otro camino que une los mismos puntos A y B. Entonces el resultado de la integral de línea de dicha forma diferencial a lo largo de $\mathcal{C}$ será 48.

Solución:

Falso.

El hecho de que a lo largo de 7 caminos que unen los mismos puntos A y B, se halla obtenido siempre el mismo resultado, no garantiza que a lo largo de un nuevo camino el resultado vaya a ser el mismo. Este hecho sólo sería cierto si la forma diferencial fuese forma diferencial exacta, afirmación que no podemos realizar. □

8. Sea $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ una forma diferencial que no es forma diferencial exacta. Sea $\mathcal{C}$ un camino cerrado. Entonces $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y \neq 0$.

Solución:

Falso.

Si la forma diferencial es exacta y el camino es cerrado, entonces se tiene que la integral vale cero. Como la forma diferencial no es exacta, no podemos hacer ninguna afirmación sobre el posible resultado. □

9. Sea $\left(x + y^2 + 2\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + 3y^2\right)\,\mathrm{d}y$ una forma diferencial. Entonces un potencial de dicha forma diferencial viene dado por $\dfrac{x^2}{2}+xy^2+2x+xy^2+y^3$.

   Solución:
   Falso.
   De una cierta forma diferencial exacta $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ la función potencial $U(x,y)$ cumple que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$ y $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$. En este caso

$$\frac{\partial\left(\dfrac{x^2}{2} + xy^2 + 2x + xy^2 + y^3\right)}{\partial x} = x + y^2 + 2 + y^2 \neq P$$

   y por lo tanto dicha función no puede ser la función potencial de dicha forma diferencial. Claramente se observa que la respuesta correcta sería $\dfrac{x^2}{2} + xy^2 + 2x + y^3$. □

10. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos caminos que unen dos puntos A y B. La integral de línea de una cierta forma diferencial a lo largo de $\mathcal{C}_1$ vale 32 y la integral de línea de la misma forma diferencial a lo largo de $\mathcal{C}_2$ vale 17. Entonces dicha forma diferencial no es forma diferencial exacta.

    Solución:
    Verdadero.
    Si la forma diferencial fuese forma diferencial exacta se tendría que la integral de línea sería independiente del camino escogido entre los puntos A y B. Como este hecho no se cumple, entonces la forma diferencial no es exacta. □

11. Sea $\mathcal{C}_1$ un camino que une dos puntos A y B. Sea $\mathcal{C}_2$ un camino que une dos puntos C y D (distintos de los anteriores). Sea además

$P(x,y)\,\mathrm{d}x + \ Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ una forma diferencial que es forma diferencial exacta. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Solución:
Falso.
El hecho de que una forma diferencial sea exacta garantiza la independencia del camino que una dos puntos, pero no si se eligen dos puntos distintos de los anteriores. □

12. Sea $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ una forma diferencial que es diferencial exacta. Sea $\mathcal{C}$ el camino dado por $\vec{\alpha} : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Entonces la integral de línea de dicha forma diferencial sobre el camino $\mathcal{C}$ vale 0.

Solución:
Falso.
$A = \vec{\alpha}(0) = (1,0)$ y $B = \vec{\alpha}(\pi) = (-1,0)$. Por lo tanto como el punto de salida y el de llegada no coinciden, el camino no es cerrado. Así que no se puede asegurar nada sobre el resultado de la integral de línea. □

13. Sea $\mathcal{C}$ el camino dado por $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (t,t)$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 1$$

Solución:
Verdadero.
$x = t$; $y = t$; $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$; $\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$; $0 \leq t \leq 1$. Entonces:
$\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (t+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$ □

14. Sea $\mathcal{C}$ el camino dado por $y = x^5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(2\pi x)$ tal que $x \in [0,1]$. Entonces $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 1$.

    Solución:
    Verdadero.
    $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial(y)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial(x)}{\partial x}$ y por lo tanto es forma diferencial exacta. Como además se tiene que si $x = 0 \implies y = 0$ y si $x = 1 \implies y = 1$, entonces el resultado es el mismo que el del ejercicio anterior, ya que los puntos de partida y de llegada son los mismos. □

15. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el origen y radio 2. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}y = 0$$

Solución:
Verdadero.
No es forma diferencial exacta ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2 - y^2\right)}{\partial x} = 2x$$

Tenemos que

$$x = 2\cos t\ ;\ y = 2\operatorname{sen} t\ ;\ \mathrm{d}x = -2\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t\ ;\ \mathrm{d}y = 2\cos t\,\mathrm{d}t\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \Big[2\cos t \cdot 2\operatorname{sen} t \cdot (-2\operatorname{sen} t) \\
&\quad + \left(4\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t\right) \cdot 2\cos t\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[-16\operatorname{sen}^2 t\cos t + 8\cos^3 t\Big]\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

por la simetría en los distintos cuadrantes de las funciones que aparecen.

□

16. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} 3x^2y\,\mathrm{d}x + \left(x^3 - 4y\right)\,\mathrm{d}y = 0$ siendo $\mathcal{C}$ la elipse de centro el origen y semiejes 2 y 3.

Solución:

Verdadero.

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(3x^2y\right)}{\partial y} = 3x^2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(x^3 - 4y\right)}{\partial x}$ y por lo tanto es forma diferencial exacta. Como el camino es cerrado, se tiene que la integral vale cero. $\square$

Apéndice H

Tablas resumen de los distintos datos

En este apéndice se presentan las distintas tablas que resumen los datos obtenidos con los diversos instrumentos de recogida de datos.

H.1. Prueba de nivel

En las dos siguientes tablas se recogen los datos puntuales de lo realizado por cada uno de los alumnos en la prueba de nivel.

En cada fila se detallan las puntuaciones obtenidas por cada alumno. En la primera columna aparece una referencia para poder localizar la correspondiente prueba de nivel en los anexos I y IV. En las siguientes 10 columnas se tienen las puntuaciones obtenidas en cada una de las tareas de las que constaba la prueba. La última columna expresa los resultados totales de cada prueba.

Por último, en las dos últimas filas aparecen las medias y las desviaciones estándar por preguntas y sobre la calificación total de los exámenes.

Tabla H.1: Prueba de nivel. Grupo control.

Ref.	**I–1**	**I–2**	**I–3**	**I–4**	**I–5**	**Rot**	**Div**	∇	$\triangle$	$\vec{N}$	**Total**
NIC01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIC02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**I–1**	**I–2**	**I–3**	**I–4**	**I–5**	**Rot**	**Div**	∇	$\triangle$	$\vec{N}$	**Total**
NIC03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIC04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIC05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIC06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIC07	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9
NIC08	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0,5	1	9
NIC09	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIC10	0,5	1	1	0,5	0	0	0	0	0	0	3
NIC11	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0	0	1	0	0	4
NIC12	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	2
NIC13	1	1	1	1	0	0,5	1	1	1	1	8,5
NIC14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
NIC15	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9
NIC16	1	1	1	0	1	0,5	1	1	1	1	8,5
NIC17	0,5	0	1	1	1	1	0,5	0	0	0	5
NIC18	1	1	1	0,5	0	0	0	0	0	0	3,5
NIC19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
NIC20	1	1	1	1	1	0,5	1	1	0,5	0	8
NIC21	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
NIC22	0,5	1	1	0	0	1	1	1	0,5	1	7
NIC23	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	9,5
NIC24	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
NIC25	1	1	1	1	1	0,5	0	1	0	1	7,5
NIC26	1	1	1	0,5	1	1	0	0	0	0	5,5
NIC27	0,5	1	1	0	0	0,5	0	1	1	0	5
NIC28	0,5	1	1	1	0	0,5	0	1	0	0	5
NIC29	1	1	1	0	0	0,5	0	1	1	1	6,5
NIC30	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	8
NIC31	0	1	0	0	0	0,5	0	0	0	0	1,5
NIC32	1	1	1	0,5	0	1	1	1	0	0,5	7
NIC33	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0,5
NIC34	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	6
NIC35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**I–1**	**I–2**	**I–3**	**I–4**	**I–5**	**Rot**	**Div**	∇	$\triangle$	$\vec{N}$	**Total**
NIC36	1	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	1,5
NIC37	1	1	0,5	1	1	0	0	0	0	0	4,5
NIC38	0	1	1	0,5	0,5	0,5	0	1	1	1	6,5
NIC39	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
NIC40	1	1	1	1	1	0,5	1	1	1	1	9,5
NIC41	1	1	1	0	0	0,5	0	1	0,5	0	5
NIC42	1	1	0,5	0,5	0	1	0,5	1	1	1	7,5
NIC43	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	0	8,5
NIC44	1	0	1	0,5	1	0,5	0	1	0	0	5
NIC45	0,5	1	0	0,5	0	0,5	0	0	0	0	2,5
NIC46	1	1	1	1	0,5	1	0,5	0	0	0	6
NIC47	1	1	1	1	0,5	1	1	0,5	0	0	7
NIC48	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	1
NIC49	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	3
NIC50	0,5	1	0,5	0,5	0	0,5	0	1	0,5	1	5,5
NIC51	0,5	1	0,5	1	0	1	1	0,5	0	0	5,5
NIC52	1	0	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0	2
NIC53	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	6
NIC54	1	1	0,5	1	0,5	1	1	1	1	1	9
NIC55	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
$\overline{x}$	0,61	0,73	0,61	0,48	0,32	0,47	0,32	0,51	0,32	0,33	**4,69**
σ	0,42	0,45	0,43	0,44	0,43	0,42	0,44	0,48	0,43	0,46	3,25

Tabla H.2: Prueba de nivel. Grupo experimental.

Ref.	**I–1**	**I–2**	**I–3**	**I–4**	**I–5**	**Rot**	**Div**	∇	$\triangle$	$\vec{N}$	**Total**
NIE01	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
NIE02	1	1	0,5	1	0	1	0	1	1	1	7,5
NIE03	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9
NIE04	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2
NIE05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
NIE06	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	9,5

(continúa en la página siguiente) . . .

Ref.	**I–1**	**I–2**	**I–3**	**I–4**	**I–5**	**Rot**	**Div**	∇	$\triangle$	$\vec{N}$	**Total**
NIE07	0	1	0	0	0	0,5	1	0	0	0	2,5
NIE08	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0	0,5	6
NIE09	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1,5
NIE10	0,5	1	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0	2,5
NIE11	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	4,5
NIE12	1	1	0,5	1	0,5	0	0	1	1	1	7
NIE13	1	1	0,5	1	1	1	0	0	0	0	5,5
NIE14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
NIE15	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	3
NIE16	0,5	1	0	0,5	0	0	0	0	0	0	2
NIE17	1	1	1	0	0	1	0,5	1	0	1	6,5
NIE18	0,5	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	2,5
NIE19	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9
NIE20	0,5	1	0,5	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	4
NIE21	1	1	1	0,5	0	1	1	1	0	1	7,5
NIE22	1	1	0,5	0,5	0,5	1	1	1	0	0,5	7
NIE23	0	1	0	0	0	0,5	0	0,5	0	0	2
NIE24	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0,5	6,5
NIE25	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
NIE26	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
NIE27	0,5	1	1	0,5	1	0	0	1	0	0	5
NIE28	1	1	1	1	0,5	0	0	1	0	1	6,5
NIE29	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
NIE30	0,5	1	0,5	0	0	1	0	1	0	1	5
NIE31	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9
NIE32	1	1	0	1	1	0	0	0,5	0	0,5	5
NIE33	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
NIE34	1	1	0,5	0,5	0	0,5	0	0	0	0	3,5
NIE35	1	1	0,5	1	1	0,5	0	0	0,5	0	5,5
NIE36	1	1	1	1	1	0,5	0,5	1	1	1	9
$\overline{x}$	0,58	0,92	0,54	0,50	0,26	0,49	0,36	0,54	0,24	0,40	**4,83**
σ	0,43	0,28	0,41	0,42	0,40	0,43	0,47	0,48	0,42	0,45	2,81

H.2. Ficheros de Derive

En la siguiente tabla se recoge la información cuantitativa obtenida del análisis de los ficheros de Derive. Cada fila corresponde a un alumno que queda caracterizado por su D.N.I. Las columnas recogen si un determinado alumno ha realizado correctamente cada uno de los comandos que se le propusieron, además del número de intentos realizados. En la última columna se recoge el número de ejercicios que el alumno ha utilizado para comprobar la correcta elaboración de los comandos. El listado de todos los ficheros de Derive creados por los alumnos se encuentra en el anexo V.

Tabla H.3: Ficheros de Derive.

Leyenda:

DE2	≡	Comando `DIFERENCIALEXACTA2` realizado o no.
DE2 Nº	≡	Intentos realizados con dicho comando.
POT3	≡	Comando `POTENCIAL3` realizado o no.
POT3 Nº	≡	Intentos realizados con dicho comando.
LP2	≡	Comando `LINEAPARAMETRICA2` realizado o no.
LP2 Nº	≡	Intentos realizados con dicho comando.

Referencia	**DE2**	**Nº**	**POT3**	**Nº**	**LP2**	**Nº**	**Nº Ejercicios**
74875402-y	NO	0	NO	0	NO	0	0
74731322-K	SI	2	NO	1	NO	0	0
54095815E	SI	1	SI	1	SI	1	0
26975751-v	SI	1	NO	1	NO	0	2
74662132	SI	1	NO	0	NO	0	0
75714097	SI	1	NO	1	NO	0	1
27394392n	SI	1	SI	1	NO	0	1
30788944	SI	1	NO	0	SI	1	1
74669442	NO	0	NO	0	NO	0	0
74840977	SI	1	SI	1	NO	0	0
74934182-K	NO	0	NO	0	NO	0	0
74917109-Z	NO	0	NO	0	NO	0	0
77332152-B	NO	1	NO	0	NO	0	0
74888625O	NO	0	NO	0	NO	0	0

(continúa en la página siguiente) ...

Referencia	DE2	Nº	POT3	Nº	LP2	Nº	Nº Ejercicios
79019727	SI	1	NO	0	NO	0	3
x4688184-w	SI	1	NO	0	NO	0	1
31731692	SI	1	NO	0	NO	0	1
26970391-Q	SI	1	NO	0	NO	0	1
79023312G	SI	1	NO	1	NO	0	1
72252549s	SI	1	NO	0	NO	0	0
74842426N	SI	1	SI	1	NO	0	3
75949539	SI	1	NO	0	NO	0	0
74919408	SI	1	NO	1	NO	0	1
74890730-Q	SI	1	NO	0	NO	0	1
26808360C	SI	1	NO	1	NO	0	3
74886783-w	SI	1	NO	1	NO	0	1
28618123	SI	1	SI	1	NO	0	2

H.3. Prueba de evaluación

Las dos siguientes tablas recogen todos los datos de la prueba de evaluación efectuada a los alumnos del grupo control y a los del grupo experimental respectivamente.

En cada bloque de dos filas se detallan las puntuaciones obtenidas por cada uno de los alumnos. En la primera columna aparece una referencia para poder localizar la correspondiente prueba de evaluación en los anexos finales. En las siguientes 8 columnas se tienen las puntuaciones obtenidas en cada una de las 16 preguntas. La penúltima columna expresa los resultados totales de cada prueba, mientras que la última columna expresa los resultados totales ponderados a 10 puntos.

En los dos últimos bloques de filas aparecen las medias y las desviaciones estándar por preguntas y sobre las calificaciones totales de los exámenes.

Las respuestas dadas por los alumnos a la prueba de evaluación se recogen en los anexos II y VI.

Tabla H.4: Prueba de evaluación. Grupo control.

Ref.	P1 P9	P2 P10	P3 P11	P4 P12	P5 P13	P6 P14	P7 P15	P8 P16	Tot.	Tot. Pon.
EVC01	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	1	1	0	1	1	0,5	1	14,5	9,06
EVC02	1	1	1	1	1	1	1	1		
	0,5	1	1	1	1	1	1	1	15,5	9,69
EVC03	0	0	0	0	0	0	1	0,5		
	0	1	1	0	0,5	0	0	0,5	4,5	2,81
EVC04	1	1	1	0	1	0	0	0		
	0	1	1	0	0	0	0	0	6	3,75
EVC05	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	1	1		
	0	1	1	0	1	1	0,5	1	11,5	7,19
EVC06	0	0	0	0	0	0	1	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,63
EVC07	1	1	1	0	0	0	1	0		
	0	1	1	1	0	0	0	0,5	7,5	4,69
EVC08	0	0	0	1	1	1	1	1		
	1	1	1	0	1	0	0,5	1	10,5	6,56
EVC09	0	0,5	0	0,5	0	0	0	1		
	0	0	0	0	0,5	0	0,5	1	4	2,5
EVC10	0	0,5	0,5	0	0	0	0	1		
	0	1	1	0	0	0	0	0	4	2,5
EVC11	0	0	0	0	0	1	0	1		
	0	1	1	1	0	0	0	0	5	3,13
EVC12	0,5	0,5	1	1	0,5	1	1	1		
	0	1	0	1	0	0	0,5	1	10	6,25
EVC13	0	0	0	0	1	1	0	0		
	0	1	0,5	0	0	0	0	0	3,5	2,19
EVC14	0	0	0	1	0	0	0	0		
	0	0	1	0	1	0	0	0	3	1,88
EVC15	0	1	0	0	0,5	0	0,5	0,5		
	1	0	1	0	0	0	0	0	4,5	2,81

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	P1 P9	P2 P10	P3 P11	P4 P12	P5 P13	P6 P14	P7 P15	P8 P16	Tot.	Tot. Pon.
EVC16	1 0	1 1	1 1	1 1	0 1	1 0	1 0	0 0	10	6,25
EVC17	0,5 0	0,5 0,5	1 1	1 1	1 1	0 1	1 1	1 1	12,5	7,81
EVC18	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0,5	0 0	1 0	1 0	9,5	5,94
EVC19	1 1	1 0,5	0,5 0	1 1	0 1	0 0	1 1	1 1	11	6,88
EVC20	0,5 0	0,5 1	0 0	1 0,5	0 0	1 0	0 0,5	1 1	7	4,38
EVC21	1 0	1 1	0 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	14	8,75
EVC22	0,5 0	1 0	0,5 1	1 0	0 1	1 0	1 0,5	1 0	8,5	5,31
EVC23	0 0	0,5 0,5	1 0	1 0	0,5 0	0 0	0,5 0	1 0	5	3,13
EVC24	0 1	0 1	0,5 1	1 0	1 1	1 0	1 0,5	1 1	11	6,88
EVC25	0,5 0	1 1	0 1	1 0,5	1 1	0 0	0,5 0,5	1 1	10	6,25
EVC26	0 0	1 1	1 0,5	1 1	1 1	1 0	0,5 0,5	0 1	10,5	6,56
EVC27	0,5 1	0,5 1	1 0	1 0	1 1	1 0	0 0	1 1	10	6,25
EVC28	1 1	1 0	0,5 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	14,5	9,06
EVC29	0,5 0,5	1 1	0 1	1 1	0 0	1 0	1 0	1 1	10	6,25
EVC30	1 1	1 1	0 0	1 1	0 1	0 0	1 0,5	1 1	10,5	6,56
EVC31	1 0	1 1	1 1	0,5 1	0 1	0,5 0	1 0,5	1 0	10,5	6,56

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**P1 P9**	**P2 P10**	**P3 P11**	**P4 P12**	**P5 P13**	**P6 P14**	**P7 P15**	**P8 P16**	**Tot.**	**Tot. Pon.**
EVC32	0,5 0,5	1 1	0 1	1 1	1 1	1 1	1 0,5	1 1	13,5	8,44
EVC33	0 0	0,5 0	0,5 0,5	1 0,5	0 0,5	0 0	1 0,5	0 0	5	3,13
EVC34	0 1	0 1	0 1	1 1	0 0	1 0	1 0,5	1 0,5	9	5,63
EVC35	0,5 0	0,5 0	0 0	1 1	1 1	1 0	1 1	1 0	9	5,63
EVC36	0 0	0,5 0	0 0,5	0,5 0	1 1	1 0	0,5 0,5	1 1	7,5	4,69
EVC37	0 0,5	0 0,5	1 0	1 0	0,5 1	1 0	1 1	1 0	8,5	5,31
EVC38	0 0	0 0	0 0	1 0	0 1	0 0	0 0	0 1	3	1,88
EVC39	1 0,5	1 1	0 0,5	1 1	0,5 1	1 0	1 0	1 0	10,5	6,56
EVC40	0,5 1	0,5 1	1 0,5	1 1	1 0,5	1 0	1 0	1 1	12	7,5
EVC41	0 1	0,5 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0,5	14	8,75
EVC42	0 1	0 1	1 1	1 0	0 1	0 0	1 0	0 0	7	4,38
EVC43	0,5 0	0,5 1	0,5 0	1 0	0 1	1 0	1 0	1 0	7,5	4,69
EVC44	0 1	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	0,5 0,5	1 0,5	10,5	6,56
EVC45	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0	0
EVC46	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0	0
EVC47	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0	0

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8		Tot.
	P9	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**	**Tot.**	**Pon.**
EVC48	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EVC49	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EVC50	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EVC51	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EVC52	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EVC53	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EVC54	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EVC55	0	0	0	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{x}$	0,33	0,47	0,39	0,62	0,40	0,48	0,58	0,60		
	0,28	0,56	0,53	0,39	0,52	0,15	0,30	0,43	7,03	**4,39**
σ	0,41	0,43	0,45	0,47	0,46	0,50	0,46	0,48		
	0,42	0,48	0,47	0,47	0,48	0,35	0,36	0,47	4,74	2,96

Tabla H.5: Prueba de evaluación. Grupo experimental.

Ref.	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8		Tot.
	P9	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**	**Tot.**	**Pon.**
EVE02	0	1	0,5	1	1	1	1	1		
	1	1	0	1	1	0,5	0,5	1	12,5	7,81
EVE03	1	1	0,5	1	1	1	1	0,5		
	1	0,5	0,5	1	1	0	1	0,5	12,5	7,81

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	P1 P9	P2 P10	P3 P11	P4 P12	P5 P13	P6 P14	P7 P15	P8 P16	Tot.	Tot. Pon.
EVE04	0	0	0,5	0,5	1	0	1	0,5		
	0	1	1	0,5	0,5	0	0	0	6,5	4,06
EVE05	1	0,5	0,5	1	1	0	0	1		
	0	1	0,5	0	0	0	0	0,5	7	4,38
EVE07	0	0	0,5	0	0	0	1	1		
	0	1	1	0	0	0	0	0	4,5	2,81
EVE09	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	0,5	1	0,5	1	15	9,38
EVE10	0,5	1	0	1	0,5	0	0	0		
	0	1	0	1	1	0	0	0	6	3,75
EVE11	0,5	0,5	0	0,5	0	1	1	1		
	0	1	1	1	0	0	0	0,5	8	5
EVE12	1	1	1	0,5	1	1	1	1		
	0	1	1	1	1	0	0	0	11,5	7,19
EVE13	0,5	0,5	0	0,5	0,5	1	0,5	0,5		
	1	0	0,5	1	0,5	0	0	1	8	5
EVE14	1	1	0	0,5	1	1	1	1		
	0	0	1	1	0	0	0,5	1	10	6,25
EVE17	1	1	0	0,5	0	0	1	0		
	0	0,5	0	0	0	0	0	0	4	2,5
EVE19	0	0	0	0	0,5	0	0	1		
	0	0	0	0	1	0	0	0	2,5	1,56
EVE21	0,5	0	0	1	0	1	1	1		
	1	1	1	0,5	0	0	0	1	9	5,63
EVE22	1	1	0	1	1	0,5	1	1		
	1	1	1	1	1	1	1	1	14,5	9,06
EVE23	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5	14,5	9,06
EVE24	1	0	1	1	1	1	1	1		
	1	1	1	0	0	0	0	0	10	6,25
EVE25	1	1	0	1	1	1	1	1		
	1	1	1	0,5	1	0	0	0	11,5	7,19

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	P1 P9	P2 P10	P3 P11	P4 P12	P5 P13	P6 P14	P7 P15	P8 P16	Tot.	Tot. Pon.
EVE26	0	1	1	1	0,5	0	1	1		
	1	1	1	1	0,5	0	0,5	1	11,5	7,19
EVE27	1	1	0	1	1	0	1	1		
	1	1	0	1	1	0	0,5	0	10,5	6,56
EVE28	1	1	0	1	0	0	1	1		
	0	1	1	0	1	0	0,5	0	8,5	5,31
EVE29	1	1	0	0	0	1	1	0,5		
	0	1	1	0	0	0	0	0	6,5	4,06
EVE30	1	1	0	1	0	1	0	1		
	0	0,5	0	0	1	0	0	0,5	7	4,38
EVE31	1	0,5	0,5	1	0	1	1	0		
	0	1	1	1	1	0	0	0	9	5,63
EVE32	0,5	0	0,5	1	0	1	1	1		
	0	1	1	0	1	0	1	0	9	5,63
$\overline{x}$	0,70	0,68	0,34	0,76	0,56	0,62	0,82	0,80		
	0,44	0,82	0,70	0,58	0,60	0,12	0,26	0,38	9,18	5,74
σ	0,40	0,42	0,39	0,35	0,45	0,47	0,37	0,35		
	0,50	0,34	0,42	0,46	0,45	0,29	0,35	0,43	3,24	2,03

H.4. Encuestas

Las cuatro tablas siguientes recogen todos los datos de las encuestas realizadas a los alumnos del grupo control y a los del grupo experimental.

En la primera y en la tercera se detalla en cada bloque de filas la respuesta (de 1 a 5) que cada alumno ha dado a los distintos ítemes. En la primera columna aparece una referencia para poder localizar la correspondiente encuesta en los anexos III y VII.

Por otro lado, en la segunda y en la cuarta se recogen las medias y desviaciones típicas de los datos anteriores.

Tabla H.6: Encuestas. Grupo control.

Ref.	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	
EC01	3	1	2	1	4	2	3	2	3	2
	3	1	4	2	4	4	3	3	3	
EC02	3	3	4	1	4	3	3	1	1	3
	3	2	3	4	5	5	4	4	4	
EC03	3	2	4	1	5	3	3	1	1	5
	3	2	3	5	5	5	4	4	5	
EC04	4	3	3	3	5	3	4	1	2	2
	4	1	2	4	5	5	3	4	5	
EC05	3	2	2	1	5	2	3	1	1	2
	3	2	3	4	4	4	3	3	4	
EC06	3	2	2	1	5	3	3	2	2	4
	3	3	3	4	3	4	4	3	3	
EC07	4	2	3	1	5	3	3	2	1	4
	3	2	2	4	5	4	3	4	4	
EC08	4	4	4	1	5	1	4	2	2	1
	3	1	3	3	5	5	4	4	5	
EC09	3	2	3	1	5	2	3	2	2	5
	3	2	4	4	4	3	4	4	4	
EC10	3	2	1	1	5	3	3	2	3	3
	3	2	4	4	3	4	4	3	3	
EC11	1	1	1	1	5	1	3	2	3	2
	3	1	3	3	3	3	3	4	3	
EC12	4	2	4	1	5	2	3	1	2	5
	3	2	2	5	5	5	5	4	4	
EC13	1	2		1	5	4	3	2	2	2
	3	2	3	3	3	3	3	3	3	
EC14	3	4	2	1	5	3	3	2	2	3
	3	1	3	4	4	4	4	3	5	
EC15	4	4	4	1	5	2	3	2	2	4
	4	2	3	3	5	4	4	4	4	

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	
EC16	4	3	3	1	5	4	3	1	2	3
	3	2	1	5	5	5	5	4	5	
EC17	3			1	5	3	2	2	3	3
	2	2	4	3	4	3	3	4	4	
EC18	5	3	3	1	5	3	3	2	1	5
	3	2	3	3	4	4	3	4	4	
EC19	3	1	2	1	5	3	3	2	1	3
	3	2	3	4	4	4	4	4	4	
EC20	2	2	3	1	5	2	3	2	1	3
	3	1	3	4	4	4	3	3	3	
EC21	2	3	3	1	5	2	2	1	2	4
	3	2	3	4	5	4	4	4	4	
EC22	3	3	3	1	5	2	3	1	2	4
		2	3	4	5	5	4	4	4	
EC23	4	4	4	1	4	4	3	2	3	4
	3	3	3	4	5	4	4	4	4	
EC24	4	3	4	1	5	2	4	2	1	3
	4	2	2	5	5	5	5	5	4	
EC25	4	4	5	1	4	1	3	2	2	2
	3	1	2	3	3	3	3	3	3	
EC26	3	3	3	1	5	4	3	2	2	5
	3	5	3	3	5	5	4	4	4	
EC27	3	2	3	1	5	3	3	2	3	5
	3	3	3	3	4	4	3	3	4	
EC28	4	4	4	1	5	4	3	2	1	5
	3	4	3	4	5	5	5	4	4	
EC29	3	3	3	1	5	3	3	1	1	4
	3	2	3	4	4	4	4	3	4	
EC30	3	2	4	1	5	2	3	1	2	4
	3	2	3	4	4	5	4	4	4	
EC31	4	3	3	1	5	3	3	2	2	3
	3	2	2	4	5	4	2	3	3	

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	
EC32	1			1	5	3	2	1	2	3
	3	4	4	4	5	5	4	3	4	
EC33	2	2	3	1	4	3	3	2	2	2
	3	2	3	4	4	4	4	4	3	
EC34	5	4	2	1	5	1	3	2	2	1
	3	1	3	4	4	4	4	4	4	
EC35	4	3	4	1	5	2	3	2	2	2
	3	2	3	4	5	5	4	4	4	
EC36	3	2	4	1	5	3	3	2	2	3
	3	2	3	4	4	3	3	4	4	
EC37	4	3	3	1	5	3	3	1	1	5
	3	3	3	3	5	5	4	4	4	
EC38	3	3	4	1	5	2	3	1	1	5
	3	2	3	5	5	5	5	4	5	
EC39	2	3	3	1	5	4	3	2	2	5
	3	2	3	3	4	4	4	4	4	
EC40	1	3	2	1	5	4	3	2	2	5
	3	2	3	5	5	5	5	5	5	
EC41	4	3	2	1	5	2	4	1	1	5
	3	3	2	4	4	4	3	4	4	
EC42	3	2	2	1	5	2	3		3	4
	3	1	4	4	4	3	3	3	3	
EC43	3	3	4	1	5	2	3	2	2	5
	3	2	3	4	5	5	4	4	4	
EC44	3	3	3	1	5	3	3	1	1	5
	2	2	2	4	5	5	5	5	4	
EC45	4	3	3	1	5	2	3	2	2	1
	4	1	3	4	4	4	4	4	4	
EC46	3	3	4	1	4	2	3	2	2	3
	3	2	3	4	4	4	3	3	3	

Tabla H.7: Grupo control. Medias y varianzas.

	1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
$\overline{x}$	3,15	2,70	3,07	1,04	4,87	2,61	3,02	1,67	1,85	3,50
σ	0,97	0,82	0,91	0,29	0,34	0,86	0,39	0,48	0,67	1,28
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	
$\overline{x}$	3,04	2,04	2,91	3,85	4,37	4,24	3,78	3,76	3,91	
σ	0,37	0,84	0,63	0,67	0,68	0,71	0,73	0,57	0,63	

Tabla H.8: Encuestas. Grupo experimental.

Ref.	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	**18ª**
	19ª	**20ª**	**21ª**	**22ª**	**23ª**	**24ª**	**25ª**	**26ª**	**27ª**	**28ª**
	29ª	**30ª**	**31ª**	**32ª**	**36T**	**36E**	**36D**			
EE01	3	2	2	2	4	3	3	2	1	4
	3	3	2	2	5	5	5	4	4	4
	4	2	4	2	1	3	1	1	1	3
	3	3	3	3	45	35	20			
EE02	3	2	2	1	5	2	5	3	1	2
	3	1	3	4	3	3	3	4	4	4
	1	3	4	4	2	2	2	3	3	4
	3	3	4	4						
EE03	4	3	4	1	5	3	3	2	2	3
	4	2	3	4	4	4	5	5	5	5
	1	2	1	3	1	2		2	2	4
	4	4	5	4	30	50	20			
EE04	1	2	3	5	4	3	3	2	3	3
	3	2	3	3	4	4	3	4	3	2
	3	5	3	4	1	4	3	3	2	4
	2	2	3	3	30	50	20			

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	**18ª**
	19ª	**20ª**	**21ª**	**22ª**	**23ª**	**24ª**	**25ª**	**26ª**	**27ª**	**28ª**
	29ª	**30ª**	**31ª**	**32ª**	**36T**	**36E**	**36D**			
EE05	2	3	3	1	5	2	3	2	3	3
	2	2	3	4	4	3	4	3	4	4
	2	4	3	3	3	4	3	2	3	3
	3	3	4	3	40	40	20			
EE06	4	3	3	3	5	4	3	2	3	5
	3	3	3	4	5	5	5	4	4	
EE07	4	3	4	1	5	2	3	2	2	3
	3	4	3	4	3	3	3	4	4	1
	4	4	2	2	4	2	2	5	2	2
	2	2	2	2	40	60	0			
EE08	3	2	4	1	5	3	3	2	3	4
	2	2	4	2	5	3	2	3	3	5
	4	3	4	4	1	2	1	2	1	3
	3	3	3	4	30	50	20			
EE09	4	3	4	1	5	2	3	1	1	5
	4	2	3	4	4	4	4	4	4	4
	3	5	4	2	1	5	1	2	2	4
	4	4	5	4						
EE10	3	4	5	1	4	2	3	1	1	5
	3	1	3	4	5	5	4	4	4	
EE11	4	3	4	2	5	3	4	2	2	5
	4	2	2	3	5	5	4	4	4	3
	4	2	4	2	1	3	1	2	2	2
	2	2	2	3	40	50	10			

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	**18ª**
	19ª	**20ª**	**21ª**	**22ª**	**23ª**	**24ª**	**25ª**	**26ª**	**27ª**	**28ª**
	29ª	**30ª**	**31ª**	**32ª**	**36T**	**36E**	**36D**			
EE12	3	3	3	1	5	3	3	1	1	5
	3	2	2	4	5	4	5	5	5	4
	2	3	2	3	1	4	2	2	2	4
	4	4	5	3	20	60	20			
EE13	2	2	3	1	5	1	4	1	1	2
	4	1	2	5	5	5	5	5	5	5
	3	3	3	3	1	3	1	1	2	3
	3	3	3	2	40	40	20			
EE14	4	3	3	1	5	2	3	2	1	4
	3	2	3	3	5	5	4	4	4	4
	2	4	3	4	1	3	2	2	1	3
	3	3	4	3	40	50	10			
EE15	3	2	3	1	5	3	3	2	2	4
	3	3	3	4	5	4	4	4	4	3
	2	4	1	4	1	4	1	4	3	4
	4	3	4	4	30	40	30			
EE16	4			1	5	3	3	2	2	2
	3	1	3	3	4	3	3	3	3	
EE17	3	3	2		5	1	1	1	1	5
	4	1	3	5	5	5	5	5	5	
EE18	2			1	5	3	2	2	1	3
	3	2	3	3	5	5	4	4	4	

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	**18ª**
	19ª	**20ª**	**21ª**	**22ª**	**23ª**	**24ª**	**25ª**	**26ª**	**27ª**	**28ª**
	29ª	**30ª**	**31ª**	**32ª**	**36T**	**36E**	**36D**			
EE19	2	2	1	2	4	3	3	2	3	4
		3	3	3	4	3	3	4	4	
					40	45	15			
EE20	3	3	4	1	5	3	3	2	2	
	2	3	3	3	4	3	4	4	4	4
	1		2	4	1	3	3	3	2	4
	4	4	4	3	30	60	10			
EE21	3	2	3	3	5	1	3	1	2	4
	3	1	3	4	5	4	4	4	4	4
	2	4	1	2	1	4	1	1	1	4
	4	4	4	3	40	50	10			
EE22	1	1	3	1	5	2	3	1	1	4
	3	2	3	4	4	4	4	4	4	5
	3	4	3	5	2	3	1	1	4	4
	5	4	4	4	45	40	15			
EE23	1	2	2	3	5	2	3	1	2	4
	3	2	3	4	4	4	4	4	4	3
	2	3	2	4	1	3	2	2	2	3
	3	3	4	3	25	60	15			
EE24	4	2	3	1	5	2	3	2	1	3
	3	1	3	3	4	4	4	4	4	5
	1	5	3	4	2	4	1	2	3	4
	4	4	5	4	30	40	30			
EE25	2	2	2	1	5	2	3	1	1	4
	2	2	2	4	5	4	5	4	5	4
	3	3	3	2	4	3	2	2	1	3
	3	3	4	2	47,5	47,5	5			

(continúa en la página siguiente) ...

Ref.	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
	11ª	**12ª**	**13ª**	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	**18ª**
	19ª	**20ª**	**21ª**	**22ª**	**23ª**	**24ª**	**25ª**	**26ª**	**27ª**	**28ª**
	29ª	**30ª**	**31ª**	**32ª**	**36T**	**36E**	**36D**			
EE26	4	3	1	1	5	3	2	3	3	5
	3	2	3	3	4	4	4	3	3	1
	3	3	4	2	4	3	3	4	1	2
	2	2	2	1	40	60	0			
EE27	2	3	2	4	5	2	3	1	2	5
	3	1	2	5	5	4	4	4	4	4
	4	3	3	4	2	4	1	2	2	3
	4	3	4	3	40	50	10			
EE28	4	3	1	1	5	4	3	2	3	4
	2	5	3	3	4	3	4	4	4	4
	3	4	4	3	4	3	1	3	2	4
	4	4	4	3	30	50	20			
EE29				2	5	2	3	2	1	4
	2	2	3	4	5	4	4	4	4	
EE30	4	2	4	1	5	2	2	1	1	3
	2	2	3	3	5	4	3	3	3	
EE31	2	3	4	1	5	2	3	3	2	2
	3	1	2	3	3	3	3	3	3	

Tabla H.9: Grupo experimental. Medias y varianzas.

	1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**	**11ª**	**12ª**
$\overline{x}$	2,93	2,54	2,93	1,57	4,87	2,42	2,97	1,74	1,77	3,77	2,93	2,03
σ	1,01	0,64	1,05	1,04	0,34	0,76	0,66	0,63	0,80	1,01	0,64	0,95
	13ª	**15a**	**15b**	**15c**	**15d**	**16ª**	**17ª**	**18ª**	**19ª**	**20ª**	**21ª**	**22ª**
$\overline{x}$	2,81	3,58	4,42	3,97	3,94	3,94	3,97	3,73	2,59	3,48	2,86	3,18
σ	0,48	0,76	0,67	0,75	0,77	0,57	0,60	1,16	1,05	0,93	1,04	0,96
	23ª	**24ª**	**25ª**	**26ª**	**27ª**	**28ª**	**29ª**	**30ª**	**31ª**	**32ª**		
$\overline{x}$	1,82	3,23	1,67	2,32	2,00	3,36	3,32	3,18	3,73	3,09		
σ	1,18	0,81	0,80	1,04	0,82	0,73	0,84	0,73	0,94	0,81		

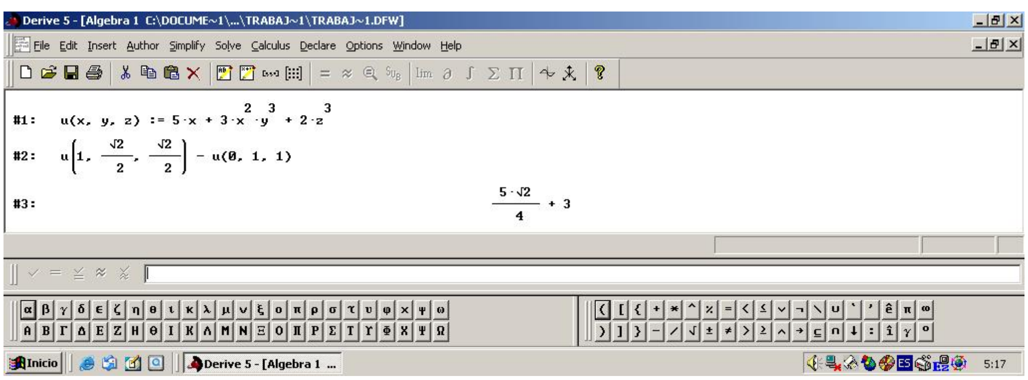
Apéndice I

Tareas desarrolladas en la clase de laboratorio

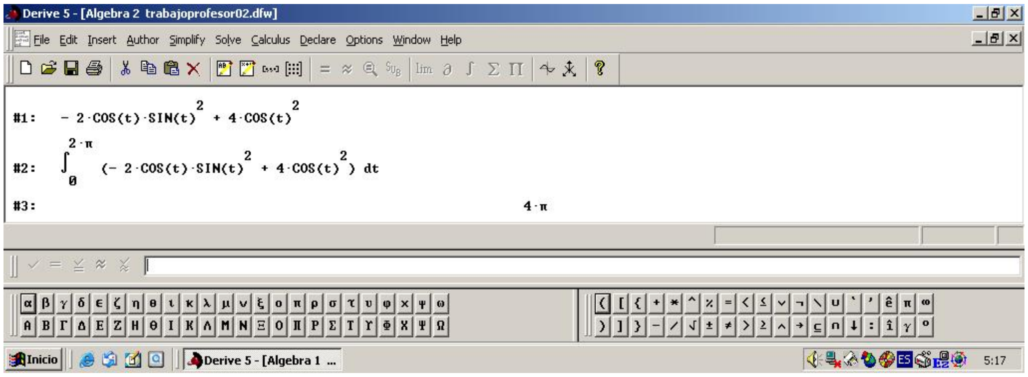
En este apéndice se presentan las distintas tareas que se desarrollaron en la clase impartida en el laboratorio para el grupo experimental. Utilizaremos un formato parecido al de pantallas del propio programa DERIVE. Recordemos que en el apéndice B se puede ver el desarrollo completo del tema así como de su relación de ejercicios.

I.1. Tareas guiadas por el profesor

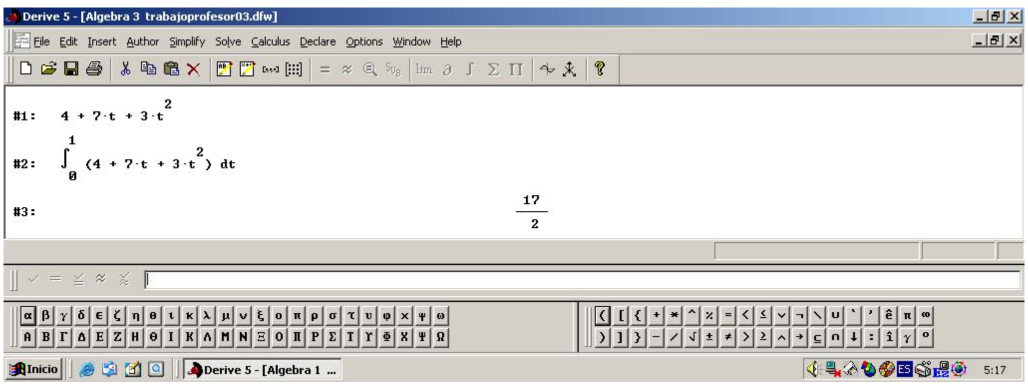
• Resolución con DERIVE de los cálculos finales del ejercicio 6.



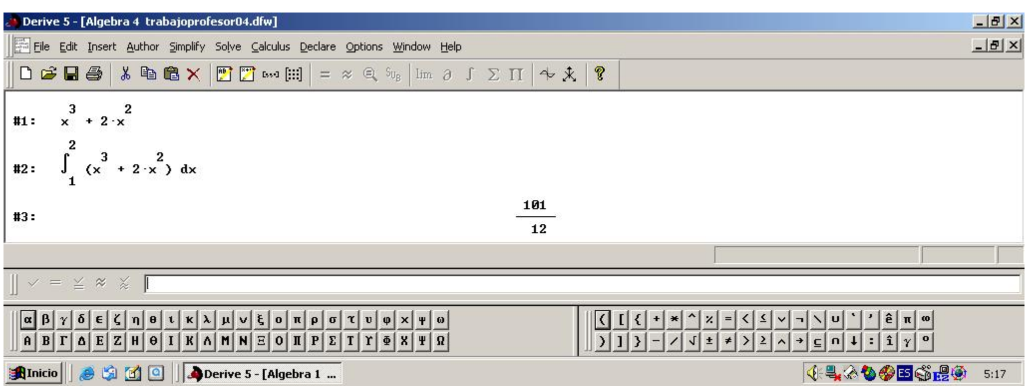
• Resolución con Derive de los cálculos finales del ejercicio 8.



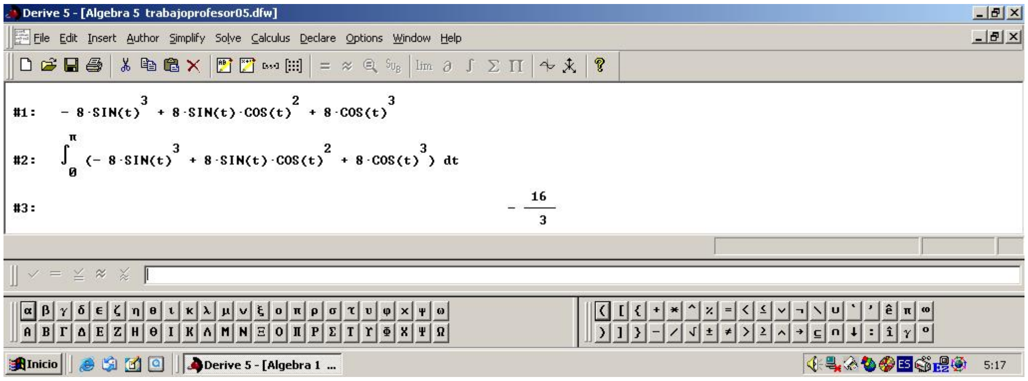
• Resolución con Derive de los cálculos finales del ejercicio 9 (a).



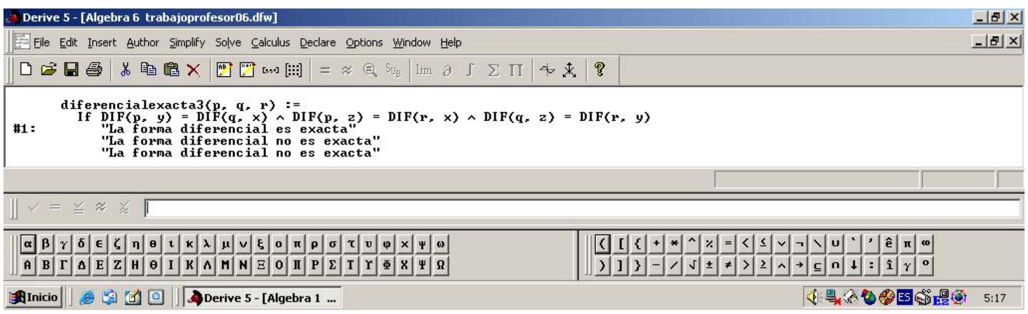
• Resolución con Derive de los cálculos finales del ejercicio 9 (b).



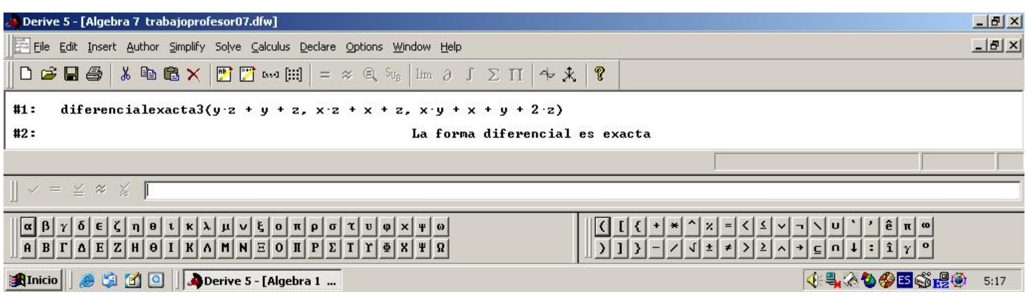
• Resolución con Derive de los cálculos finales del ejercicio 10.



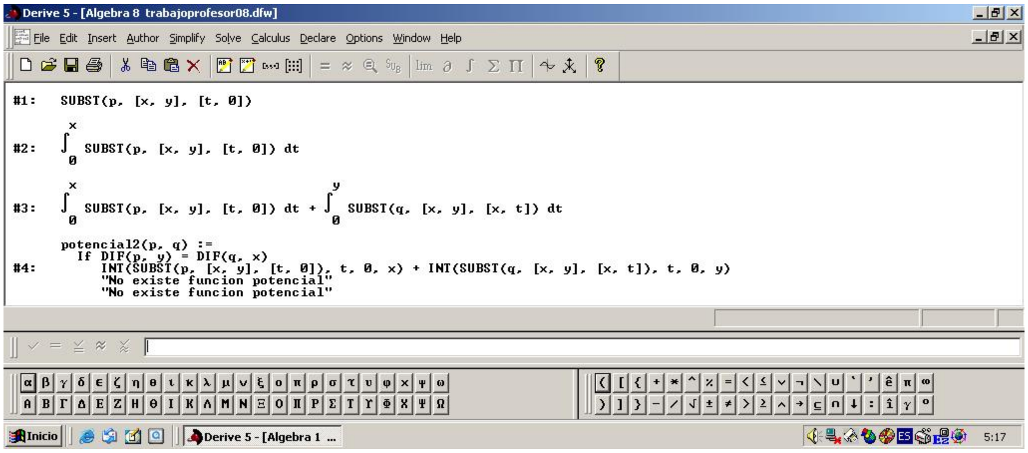
• Construcción/definición del comando `DIFERENCIALEXACTA3` para comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ es exacta o no.



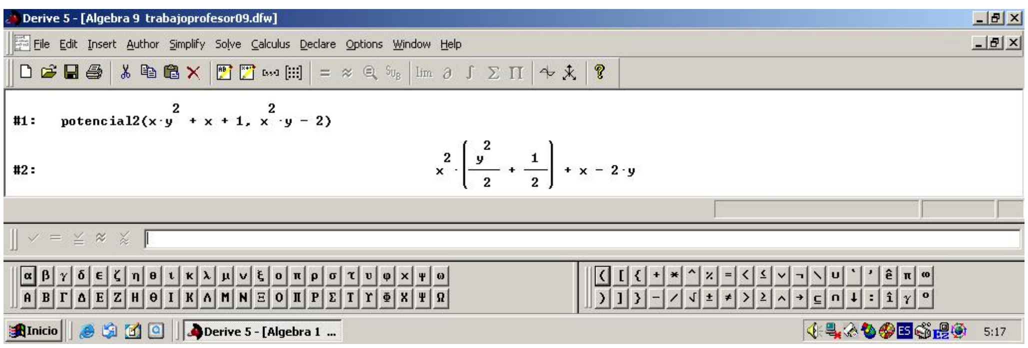
• Comprobación del comando `DIFERENCIALEXACTA3` con el ejercicio 4 (b).



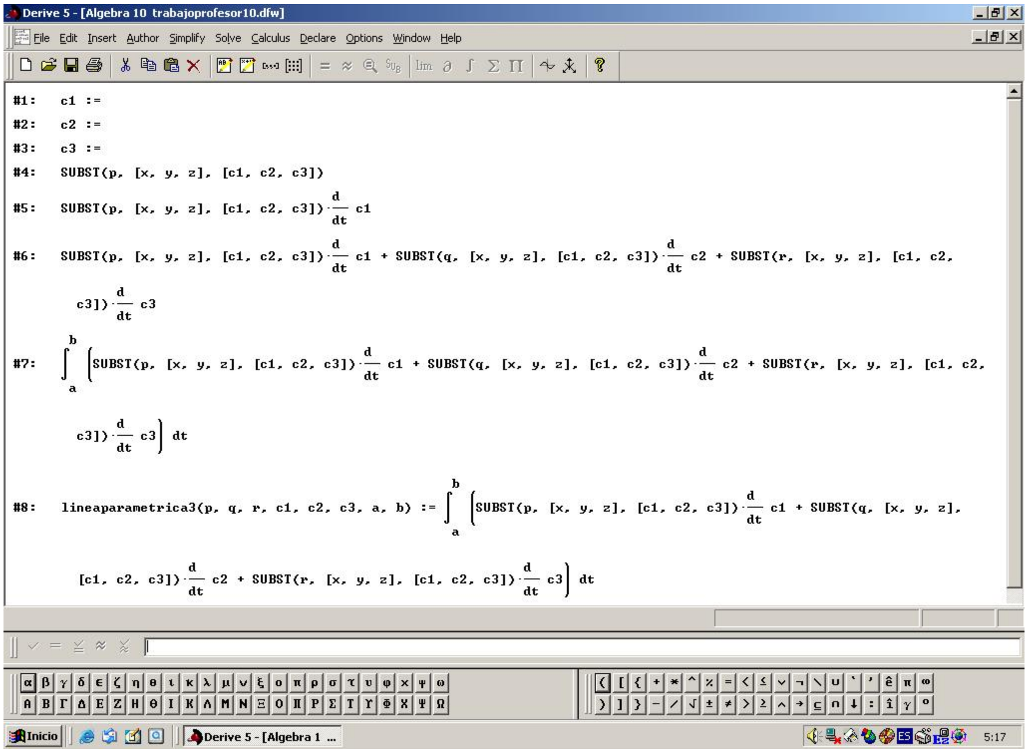
• Construcción/definición del comando POTENCIAL2 para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^2$.



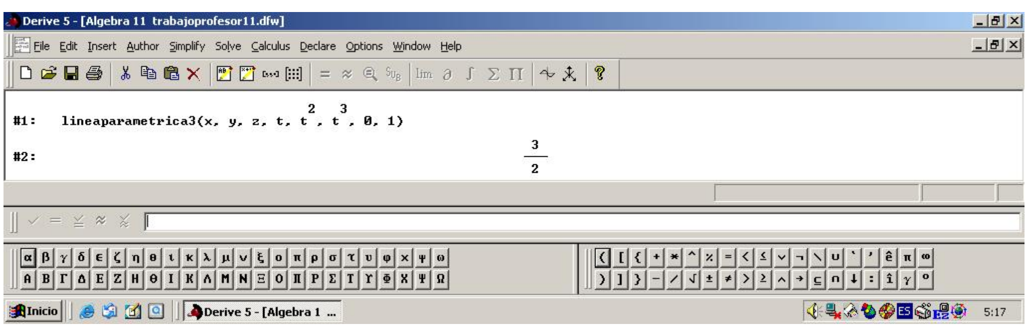
• Comprobación del comando POTENCIAL2 con el ejercicio 4 (a).



• Construcción/definición del comando LINEAPARAMETRICA3 para calcular la integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ a través de un camino dado.

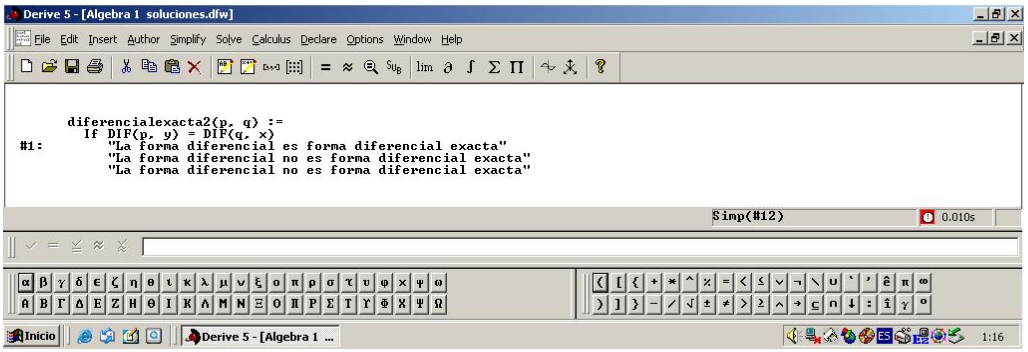


• Comprobación del comando LINEAPARAMETRICA3 con el ejercicio 3.

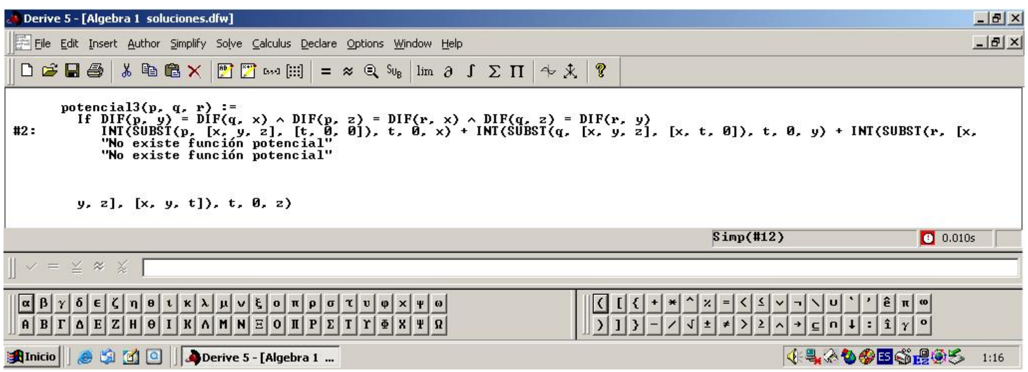


I.2. Tareas autónomas por parte del alumno

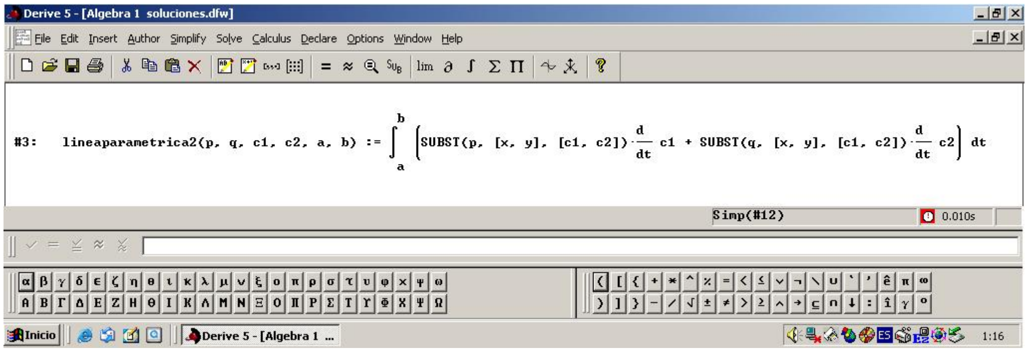
• Construcción/definición del comando `DIFERENCIALEXACTA2` para comprobar si una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ es exacta o no.



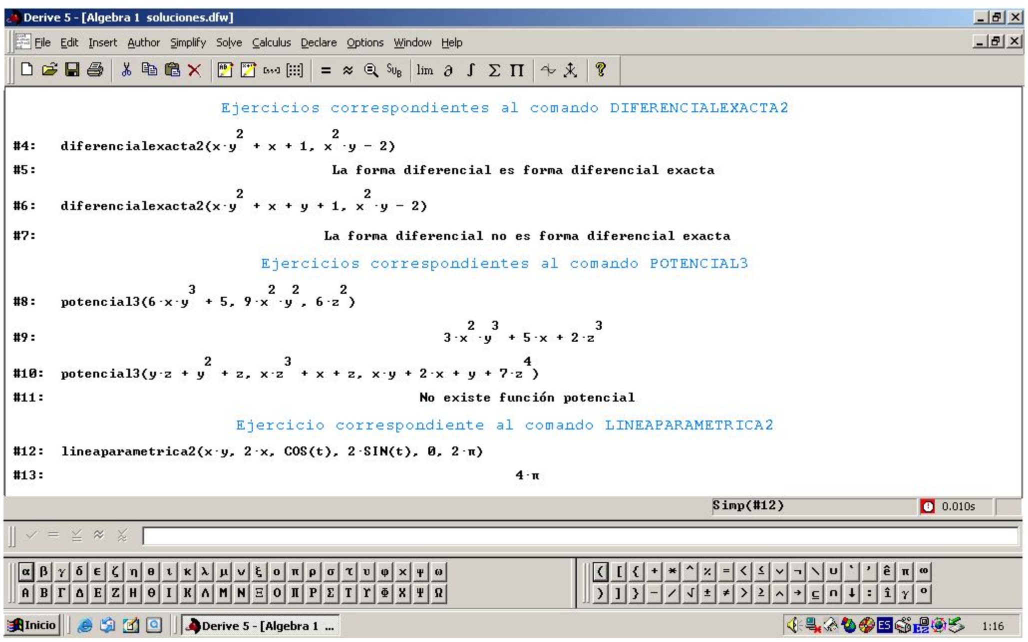
• Construcción/definición del comando `POTENCIAL3` para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de $\mathbb{R}^3$.



• Construcción/definición del comando `LINEAPARAMETRICA2` para calcular la integral de línea de una forma diferencial de $\mathbb{R}^2$ a través de un camino dado.



• Comprobación de los comandos creados con ejercicios de la relación.



Parte VI
Bibliografía

Bibliografía

[Abboud, 2002] Abboud, M. (2002). Introducing experiments into a first course in calculus. En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Albano y Desiderio, 2002] Albano, G. y Desiderio, M. (2002). Improvements in teaching and learning using CAS. En *Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*, Viena (Austria).

[Alonso y otros, 2001] Alonso, F., García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G. y de la Villa, A. (2001). Some unexpected results using computer algebra systems. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8(3):239–252.

[Anido, 2001] Anido, M. A. (2001). *Una propuesta de incorporación de herramientas computacional a la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Evaluación de experiencias.* Tesis doctoral, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España.

[Apostol, 1991] Apostol, T. (1991). *Calculus (vol II).* Reverté, Barcelona.

[Arzarello, 1999] Arzarello, F. (1999). *Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia.* En poder del autor.

[Asensio, 2001] Asensio, G. (2001). Laboratorio de Matemáticas en la E.U.I.T.I. de la Universidad Politécnica de Madrid. En *IX Congreso de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas*, páginas 1649–1655, Vigo (Pontevedra).

[Ayers y otros, 1988] Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. y Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3):246–259.

[Ayres y Mendelson, 1991] Ayres, F. y Mendelson, E. (1991). *Cálculo Diferencial e Integral*. McGraw-Hill.

[Bajpai y otros, 1990] Bajpai, A., Mustoe, L. y Walker, D. (1990). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, Gran Bretaña.

[Bartolini, 1998] Bartolini, M. (1998). *Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico*. En poder del autor.

[Bartolini y otros, 1999] Bartolini, M., Boni, M., Ferri, F. y Garuti, R. (1999). Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School. En *Educational Studies in Math*.

[Bellostas y otros, 1992] Bellostas, B. y otros (1992). *¿Qué Matemáticas debe conocer un Ingeniero Técnico? Una prospección sobre el tema*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

[Bellostas y otros, 1993] Bellostas, B. y otros (1993). *¿Qué Matemáticas debe conocer un Ingeniero Técnico? Unas propuestas didácticas*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

[Bisquerra, 1989] Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa: guía práctica*. CEAC, Barcelona.

[Borbón, 2001] Borbón, A. (2001). El uso de la computadora para la introducción del concepto de recta tangente y la resolución de problemas no rutinarios de cálculo. En *www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-3.doc*.

[Bradley y Smith, 1998] Bradley, G. y Smith, K. (1998). *Cálculo de varias variables. Volumen 2*. Prentice-Hall, Madrid.

[Cabello y otros, 2000] Cabello, J., Hernández, M., Luque, M. y Miguel, F. (2000). Mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas Empresariales. En *Campus Virtuales y Enseñanza Universitaria*, páginas 493–502. Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Málaga, Málaga.

[Camacho y otros, 2002] Camacho, M., Rivero, R. y Barquisimeto, L. (2002). Students' attitudes towards Mathematics and computers when using DERIVE in the learning of calculus concepts. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 9(4):259–283.

[Carretero y otros, 1995] Carretero, R., Coriat, M. y Nieto, P. (1995). Secuenciación, organización de contenidos y actividades de Aula. En *Materiales Curriculares. Educación Secundaria Obligatoria*. Vol. 17. Consejería de Educación y Ciencia. Junta de Andalucía, Sevilla.

[Castro, 1995] Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Comares, Granada.

[Cohen y Manion, 1990] Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla, Madrid.

[Cordero y otros, 1995] Cordero, L., Fernández, M. y Gray, A. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Addison-Wesley.

[Coriat, 1997] Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Vol. 12. Rico, L. (coord.) ICE Universidad Barcelona, Barcelona.

[Cretchley, 2002] Cretchley, P. (2002). Mathematics and technology: How integrated is this learning partnership? En *Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*, Viena (Austria).

[Cretchley y Galbraith, 2002] Cretchley, P. y Galbraith, P. (2002). Mathematics or computers? Confidence or motivation? How do these relate to Achievement. En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Davis y Snider, 1992] Davis, H. y Snider, A. (1992). *Análisis Vectorial*. McGraw Hill Interamericana, México.

[de Alwis, 2002] de Alwis, T. (2002). Computer Algebra Systems in a multivariable calculus course and center of gravity problems. En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Demidovich, 1976] Demidovich, B. (1976). *6000 problemas de Análisis Matemático*. Paraninfo, Moscú.

[Denzin y Lincoln, 1994] Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Sage Publications, Londres.

[do Carmo, 1990] do Carmo, M. (1990). *Geometría Diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, Madrid.

[Drijvers, 1999] Drijvers, P. (1999). Students encountering obstacles using CAS. A developmental-research pilot study. En *Exploring CAS as a pedagogical vehicle towards expressiveness and explicitness in Mathematics*. Weizmann Institute of Science, Rehovoth (Israel).

[Dubinsky, 1994] Dubinsky, E. (1994). Pedagogical Change in Undergraduate Mathematics Education. *MAA Notes*, 35:114–119.

[Dubinsky, 1995] Dubinsky, E. (1995). ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48:1–25.

[Dubinsky, 1998] Dubinsky, E. (1998). Writing Programs to Learn Mathematics. En *http://trident.mcs.kent.edu/∼edd/publications.html*.

[Dubinsky, 2000] Dubinsky, E. (2000). De la investigación en Matemática teórica a la investigación en Matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1):47–70.

[Dubinsky y Noss, 1996] Dubinsky, E. y Noss, R. (1996). Some kinds of computers for some kinds of Mathematical learning. *Mathematical Intelligencer*, 18(1):17–20.

[Eisenhart, 1988] Eisenhart, M. A. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematic Education Research. *Journal for Research in Mathemathics Education*, (2):99–114.

[Elliot, 1993] Elliot, J. (1993). *El cambio educativo desde la Investigación-Acción*. Morata, Madrid.

[Ernest, 1990] Ernest, P. (1990). Social constructivism as a philosophy of Mathemathics: radical constructivism rehabilited? En *Proceedings of PME 14 Conference*, página 221.

[Ernest, 1994] Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Horoshima Journal of Mathemathics Education*, páginas 1–14.

[Fernández, 1995] Fernández, A. (1995). *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Síntesis, Madrid.

[Filloy, 1988] Filloy, E. (1988). *Theoretical aspects of PME Algebra Research*. Manuscript. Institute of Education. University of London, Londres.

[Fraleigh, 1990] Fraleigh, J. (1990). *Calculus with Analytic Geometry*. Addison-Wesley.

[Freudhental, 1983] Freudhental, H. (1983). *Didactical phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing, Company, Dordrecht, Holanda.

[Fuchs, 1996] Fuchs, K. (1996). The planning of observation windows when using CAS in Mathematics teaching. *The International* DERIVE *Journal*, 3(1):39–55.

[Galán, 1998] Galán, J. L. (1998). *Análisis Vectorial para la Ingeniería. Teoría y Problemas*. Bellisco, Madrid.

[Galán, 2003] Galán, J. L. (2003). *Integrales Múltiples con* DERIVE*. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones*. Tesis doctoral, Universidad de Málaga, España.

[García y otros, 1996] García, A., López, A., Rodríguez, G., Romero, S. y de la Villa, A. (1996). *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. CLAGSA, Madrid.

[García y otros, 2002] García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G. y de la Villa, A. (2002). Differential calculus of several variables with Mathematica or Maple. En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Gilligan, 1994] Gilligan, L. (1994). Learning visually with DERIVE. *The International* DERIVE *Journal*, 1(1):19–35.

[Goetz y Lecompte, 1988] Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Morata, Madrid.

[González, 1998] González, J. L. (1998). *Números naturales relativos*. Comares, Granada.

[González, 1999a] González, J. L. (1999a). Comentario a la Ponencia Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico. En *Actas da Escola de verao*. Santarem (Portugal).

[González, 1999b] González, J. L. (1999b). Contribución al panel "Qualidade da Investigaçao": Relevancia de la investigación para la calidad de la enseñanza. En *Actas da Escola de verao*. Santarem (Portugal).

[González, 1999c] González, J. L. (1999c). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in Mathematics Education. En *Proceedings of European Research in Mathematics Education I.II: Group 7*. Schwank, I. (edit.), Osnabrüeck, Alemania.

[González, 2000] González, J. L. (2000). Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. En *Actas III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, páginas 213–225. Valladolid.

[González, 2003] González, J. L. (2003). *Tendencia "Investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas"*. En poder del autor. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.

[González y Ortiz, 2000] González, J. L. y Ortiz, A. (2000). La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: Estructura y fundamentos. En *Proceedings IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, páginas 131–146. Huelva.

[González y otros, 1997] González, A., Calderón, S., Galache, T. y Torrico, A. (1997). Avance curricular en el proceso enseñanza-aprendizaje de la investigación operativa bajo un entorno informático. En *Creación de Materiales para la Innovación Educativa con Nuevas Tecnologías (EDUTEC'97)*, páginas 618–621, Málaga.

[González y otros, 1998] González, A., Calderón, S., Galache, T., Luque, M. y Torrico, A. (1998). El Ordenador en el Proceso Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas Empresariales. En *Promover la Calidad de la Enseñanza Universitaria. Proyectos de Innovación Educativa en la Universidad*, páginas 207–215. Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Málaga, Málaga.

[Goyette y Lessard Hébert, 1988] Goyette, G. y Lessard Hébert, M. (1988). *La investigación-acción*. Laertes, Barcelona.

[Greeno, 1991] Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathemathics Education*, (3):170–218.

[Grouws, 1992] Grouws, D. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Mac Millan Publishing Company, Nueva York.

[Guba y Lincoln, 1985] Guba, E. G. y Lincoln, Y. S. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Sage, Beberly Hills, California.

[Guzmán, 2001] Guzmán, M. (2001). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Pirámide, Madrid.

[Hector, 2002] Hector, J. (2002). Problem Solving, Programming and Pedagogy. En *Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*, Viena (Austria).

[Henderson, 2002] Henderson, J. (2002). Blending technology and pure Mathematics: Is the hard work worthwhile? En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Hirlimann, 1996] Hirlimann, A. (1996). Computer algebra systems in French secondary schools. *The International* Derive *Journal*, 3(3):1–4.

[Howson y otros, 1981] Howson, A. G., Keitel, C. y Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in Mathematics*. CUP, Londres.

[Hoya y otros, 2002] Hoya, S., Martín, A., Rodríguez, G. y Visus, I. (2002). The use of symbolic calculus software in the teaching of Mathematics at Engineering Schools. En *International Conference on ICT's in Education*, páginas 1000–1004, Badajoz.

[Hsu, 1987] Hsu, H. (1987). *Análisis Vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana.

[Huertos, 2000] Huertos, M. (2000). Transferencia de los contenidos matemáticos a las nuevas tecnologías. En *IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (THALES)*, páginas 265–267, San Fernando (Cádiz).

[Ibrahim y Fernández, 2000] Ibrahim, S. y Fernández, P. (2000). A note on the evaluation of Fresnel integrals in DERIVE. *The* DERIVE *Newsletter*, 39:16–20.

[Jackson, 1975] Jackson, P. W. (1975). *La vida en las aulas*. Marova. Biblioteca del educador, Madrid.

[Kemmis, 1988] Kemmis, S. (1988). Action Research. En *Educational Research, Methodology and Measurement. An International Handbook*, páginas 42–49. Keeves, J. P. (edit.) Pergamon, Oxford.

[Kempski, 2002] Kempski, B. (2002). Imaginative deployment of computer algebra in the undergraduate mathematics curriculum. En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Kilpatrick y otros, 1994] Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación*. Síntesis, Madrid.

[Koepf y Ben Israel, 1994] Koepf, W. y Ben Israel, A. (1994). The definitive nature of indefinite integrals. *The International* DERIVE *Journal*, 1(1):115–131.

[Latorre y otros, 1996] Latorre, A., del Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa*. GR92, Barcelona.

[Lawton, 1986] Lawton, D. (1986). *Curriculum studies and Educational Planning*. Hodder and Stoughton, London.

[Leinbach, 1994] Leinbach, L. (1994). Visualizing concepts in advanced analysis. *The International* DERIVE *Journal*, 1(2):101–113.

[Lindsay, 1999] Lindsay, M. (1999). Designing assessment tasks to accommodate students' cognitive skills in a technology-based mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(5):691–697.

[Llorens, 2001] Llorens, J. (2001). El impacto de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza de las Matemáticas (diez años de Matemáticas con ordenador). *Epsilon*, 17(1):97–118.

[Mackie, 2002] Mackie, D. (2002). Using computer algebra to encourage a deep learning approach to calculus. En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Mainini, 1998] Mainini, G. (1998). Pocket calculators and computer algebra programs. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 37:75–78.

[Majewski, 2000] Majewski, M. (2000). Non trivial applications of Maple in teaching Mathematics. En *International Conference on Technology in Mathematics Education (ICTME 2000)*, Beirut (Líbano).

[Marsden y Tromba, 1991] Marsden, J. y Tromba, A. (1991). *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana.

[Mataix, 1973] Mataix, J. (1973). *1000 problemas de Cálculo Integral*. Dossat, Madrid.

[Mendenhall y Sincich, 1997] Mendenhall, W. y Sincich, T. (1997). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Prentice Hall, México.

[Monagan, 1994] Monagan, M. (1994). Worksheets: can we teach mathematical algorithms with them? En *Maple V: Mathematics and its application*, páginas 187–196, Nueva York.

[Morphett, 1997] Morphett, B. (1997). Using a Computer Algebra System as an aid to problem solving in the secondary school. En *16th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*, páginas 232–240, Melbourne (Australia).

[Muñoz y Ruiz, 1988] Muñoz, M. y Ruiz, B. (1988). *Problemas de Ampliación de Matemáticas*. Ágora, Málaga.

[Nava, 1998] Nava, J. (1998). Experiencia en el uso de programas computacionales para enseñar Matemáticas en Ingeniería en la UNITEC. En *http://dcb.fic.unam.mx/foro/memorias/dieciocho.pdf*.

[Neuper, 2001] Neuper, W. (2001). What teachers can request from CAS-designers. En *5th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 5)*, Klagenfurt (Austria).

[Nocker, 1998] Nocker, R. (1998). Effects of computer algebra on classroom methodology and pupil activity. En *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996*, páginas 76–89, Osnabrueck (Germany).

[Ojeda, 1993] Ojeda, M. (1993). *Cálculo para la Ingeniería (I).* Ágora, Málaga.

[Oliveras, 1996] Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de Profesores e Innovación Curricular.* Comares. Colección Mathema nº 7, Granada.

[Ortega, 2002a] Ortega, P. (2002a). Análisis de una estrategia didáctica que incorpora el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal. En *http://www.uam.es/personal_pdi/economicas/portega/cas/articulo.htm.*

[Ortega, 2002b] Ortega, P. (2002b). *La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.

[Ortiz, 1997] Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

[Padilla y otros, 1998] Padilla, Y., Sánchez, S., Rodríguez, P. y Morones, J. F. (1998). Una propuesta de innovación docente en Matemáticas para la Ingeniería. En *VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales"*, páginas 341–346, Jaén.

[Padilla y otros, 1999a] Padilla, Y., Morones, J. F., Rodríguez, P. y Sánchez, S. (1999a). Prácticas autodidactas para el aprendizaje de las Matemáticas apoyadas por ordenador. En *IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, páginas 234–236, Lugo.

[Padilla y otros, 1999b] Padilla, Y., Rodríguez, P., Sánchez, S. y Morones, J. F. (1999b). *Matemáticas con Derive. Iniciación al programa.* Ágora, Málaga.

[Padilla y otros, 1999c] Padilla, Y., Sánchez, S., Rodríguez, P. y Morones, J. F. (1999c). Actividades complementarias a las asignaturas de Matemáticas del primer curso de Ingeniería. En *Desarrollo Profesional y Docencia Universitaria. Proyecto de Innovación en la Universidad*, páginas 197–206. Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Málaga, Málaga.

[Padilla y otros, 1999d] Padilla, Y., Sánchez, S., Rodríguez, P. y Morones, J. F. (1999d). Cómo abordar un cambio de planes de estudios en una carrera técnica. En *IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, páginas 467–469, Lugo.

[Padilla y otros, 1999e] Padilla, Y., Sánchez, S., Rodríguez, P. y Morones, J. F. (1999e). Una experiencia de innovación educativa en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas de la Universidad de Málaga. En *I Simposium Iberoamericano sobre Didáctica Universitaria*, páginas 158–159, Santiago de Compostela.

[Padilla y otros, 2000a] Padilla, Y., Morones, J. F., Rodríguez, P. y Sánchez, S. (2000a). El ordenador: una herramienta útil en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Secundaria. En *IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas "Thales"*, páginas 59–61, San Fernando (Cádiz).

[Padilla y otros, 2000b] Padilla, Y., Rodríguez, P., Sánchez, S. y Morones, J. F. (2000b). Cambiando la metodología de evaluación en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas de la Universidad de Málaga. En *IV Simposio sobre propuestas metodológicas y de evaluación en la Formación Inicial de los Profesores del Área de Didáctica de la Matemática*, páginas 333–348, Oviedo.

[Padilla y otros, 2000c] Padilla, Y., Sánchez, S., Rodríguez, P. y Morones, J. F. (2000c). Actividades complementarias a las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería. En *Campus Virtuales y Enseñanza Universitaria*, páginas 509–522. Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Málaga, Málaga.

[Padilla y otros, 2001] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2001). Análisis Vectorial para la Ingeniería con ayuda del programa Derive. En *International Conference on New Technologies in Science Education*, páginas 199–205, Aveiro (Portugal).

[Padilla y otros, 2002a] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2002a). ANALVEC.MTH: Integration and Vector Field Problems for Engineering using Derive. En *Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (Visit-me)*, Viena (Austria).

[Padilla y otros, 2002b] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2002b). Are computers under-used in Mathematical teaching for engineers? En *Educational technology. Serie Sociedad de la información nº 9*, páginas 220–225, Badajoz.

[Padilla y otros, 2002c] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2002c). COMPLEX.MTH: Solving Problems of Functions of a Complex Variable for Engineering using Derive. En *Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (Visit-me)*, Viena (Austria).

[Padilla y otros, 2002d] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2002d). *Multiple Integration.dfw*. Users Math Packages, Derive 5.0.6.

[Padilla y otros, 2002e] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2002e). Teaching Mathematics in Engineering with Derive. An Experience in the University of Málaga. En *Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (Visit-me)*, Viena (Austria).

[Padilla y otros, 2002f] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2002f). Use of the computer in Mathematic teaching for engineers. A powerful calculator? En *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Padilla y otros, 2002g] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á., Rodríguez, P., Sánchez, E. y Sánchez, J. (2002g). *Complex Analysis.dfw*. Users Math Packages, Derive 5.0.6.

[Padilla y otros, 2003a] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á., Guerrero, P. y Rodríguez, P. (2003a). Elaboración de comandos con Derive: Integración Múltiple. En *XI JAEM Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Canarias.

[Padilla y otros, 2003b] Padilla, Y., Galán, J. L., Galán, M. Á. y Rodríguez, P. (2003b). Variable Compleja con Derive. En *XI JAEM Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Canarias.

[Pao y Soon, 1993] Pao, K. y Soon, F. (1993). *Cálculo Vectorial. Problemas resueltos.* Addison-Wesley Iberoamericana.

[Papert, 1981] Papert, S. (1981). *Desafío a la mente. Computadoras y Educación.* Ediciones Galápago, Buenos Aires.

[Pérez, 1985] Pérez, A. I. (1985). Paradigmas contemporáneos e investigación didáctica. En *La enseñanza, su teoría y su práctica.* AKAL, Madrid.

[Piaget y Beth, 1980] Piaget, J. y Beth, E. W. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología.* Crítica, Barcelona.

[Pierce, 2001] Pierce, R. (2001). Using CAS-calculators requires algebraic insight. *Australian Senior Mathematics Journal*, 15(2):59–63.

[Pierce y Stacey, 2001] Pierce, R. y Stacey, K. (2001). Observations on students' responses to learning in a CAS environment. *Mathematics Education Research Journal*, 13(1):28–46.

[Pita, 1995] Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial.* Prentice-Hall Hispanoamericana, México.

[Polya, 1965] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, Mexico.

[Puig, 1997] Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Vol. 12. Rico, L. (coord.) ICE Universidad Barcelona, Barcelona.

[Quesada y otros, 1989] Quesada, V., Isidoro, A. y López, L. (1989). *Curso y ejercicios de Estadística.* Alhambra, Madrid.

[Raj, 1995] Raj, L. (1995). Visual interpretation and reinforcement of mathematical concepts using a computer algebra system. En *2nd Workshop in Educational Computing and Mathematics*, páginas 69–76, Papúa Nueva Guinea.

[Real Academia Española, 2001] Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española.* Espasa, Madrid.

[Rico, 1997] Rico, L. (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Síntesis, Madrid.

[Rico, 1998] Rico, L. (1998). Concepto de Currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, 1(4):7–42.

[Rodríguez y otros, 1996] Rodríguez, P., Rodríguez, C. y Sánchez, S. (1996). *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales. Problemas comentados de examen.* Ágora Universidad, Málaga.

[Rodrigo y Rodrigo, 1998] Rodrigo, F. y Rodrigo, F. (1998). *Problemas de Matemáticas para Científicos y Técnicos.* Tébar.

[Romberg, 1991] Romberg, T. (1991). Características problemáticas del currículum escolar de Matemáticas. *Revista de Educación*, (294):323–406.

[Romberg, 1992] Romberg, T. (1992). Perspectives on Scholarship and Research methods. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, páginas 49–64. Grouws, D. (edit.) Mac Millan, Nueva York.

[Romberg y Carpenter, 1986] Romberg, T. A. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning Mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En *Handbook of Research on Teaching*, páginas 850–873. Mac Millan Publishing Company, Nueva York.

[Scala, 1998] Scala, J. (1998). *Análisis Vectorial II. Funciones vectoriales y teoría de campos.* Síntesis, Madrid.

[Schneider, 1999] Schneider, E. (1999). Changes of teaching Mathematics by Computer Algebra Systems (CAS). En *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1997*, páginas 136–147, Osnabrueck (Germany).

[Schneider, 2000] Schneider, E. (2000). Teacher experiences with the use of a CAS in Mathematics classroom. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(2):119–141.

[Schoenfeld, 1985] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

[Shaw y otros, 1997] Shaw, N., Jean, B. y Peck, R. (1997). A statistical analysis of the effectiveness of using a computer algebra system in a developmental algebra course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(2):175–180.

[Shulman, 1986] Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En *Handbook of Research on Teaching*, páginas 3–36. Wittrock, M. C. (edit.) Mac Millan Publishing Company, Londres.

[Sierpinska, 1994] Sierpinska, A. (1994). *Understanding Mathematics.* LEA.

[Sierra, 1999] Sierra, M. (1999). Comentario a la Ponencia Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico. En *Actas da Escola de verao.* Santarem (Portugal).

[Stenhouse, 1984] Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo.* Morata, Madrid.

[Stenhouse, 1987] Stenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza.* Morata, Madrid.

[Sternberg, 1990] Sternberg, R. J. (1990). *Más allá del cociente intelectual.* Desclée de Brouwer, Bilbao.

[Strickland, 1999] Strickland, P. (1999). A Computer Algebra System for improving student's manipulation skills in Algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 6(1):17–24.

[Swokowski, 1989] Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica.

[Taylor y Bogdan R., 1986] Taylor, S. y Bogdan R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Paidós, Buenos Aires.

[Townend, 1994] Townend, M. (1994). Introducing the convolution theorem through DERIVE. *The International* DERIVE *Journal*, 1(2):39–54.

[Townsley, 1997] Townsley, L. (1997). Attracting teachers to use CAS in the classroom: common strategies. En *The State of Computer Algebra in Mathematics Education*, páginas 153–159.

[Van Herwaarden y Gielen, 2002] Van Herwaarden, O. y Gielen, J. (2002). An approach for the effective integration of Computer Algebra in an Undergraduate Calculus and Linear Algebra Course. En *2nd International Conference on* *the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, Hersonissos, Creta (Grecia).

[Vlachos y Kehagias, 2000] Vlachos, P. y Kehagias, A. (2000). A Computer Algebra System and a new approach for teaching Business Calculus. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(2):87–104.

[Watkins, 1993] Watkins, A. (1993). A new approach to Mathematics for Engineers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(5):689–702.

[Westermann, 2000] Westermann, T. (2000). Teaching Mathematics using a Computer Algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(4):277–293.

[Yamamoto, 2002] Yamamoto, Y. (2002). Analyzing the limitations of technology in teacher preparing courses. En *Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*, Viena (Austria).

[Zehavi, 1997] Zehavi, N. (1997). Changes that computer algebra systems bring to teacher professional development. En *21 conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, páginas 307–314, Lahti (Finland).