DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Universidad de Granada

Dpto. Didctica de la Matemtica

NIVELES DE COMPRENSIÓN EN PROBLEMAS VERBALES DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA

Tesis doctoral que presenta
Enrique Castro Martínez

Realizada bajo la dirección del
Dr. Luis Rico Romero

GRANADA 1994

Esta Tesis ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Parcialmente financiada con los Proyectos de Investigación:

PB90-0849, "Evaluación de Conocimientos, Procesos y Actitudes en Matemáticas" de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT) y

"Diagnóstico de procedimientos y destrezas terminales para la resolución de problemas aritméticos de tercer ciclo de la educación primaria obligatoria" de la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.

Este trabajo lo dedico a mi esposa y muy especialmente a mis tres hijos Enrique, María del Mar y Elena

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi gratitud a Luis Rico Romero por su inestimable guía y apoyo para la realización de este estudio.

También quiero expresar mi agradecimiento a las siguientes personas:

* A los profesores Dr. Ramón Gutiérrez Jaimez y Dr. Mª del Carmen Batanero Bernabeu por su asesoramiento estadístico.
* A los profesores extranjeros invitados G. Vergnaud y J. Kilpatrick por las sugerencias que me realizaron en determinadas fases del trabajo.
* A los profesores que me facilitaron el acceso a los colegios y me ayudaron en la recogida de datos: Julián Valenzuela, Antonio Tortosa, Miguel Serrano, Nicolás Morcillo, Álvaro Pérez y Antonio García.
* A las dos personas que hicieron las grabaciones en video de las entrevistas: Aurelia Rodríguez y Encarnación Castro.
* A los profesores José Gutiérrez e Isidoro Segovia por los comentarios y sugerencias recibidas.

INDICE GENERAL

Capítulo 1

EL PROBLEMA A INVESTIGAR

Capítulo 2

FUNDAMENTACION TEORICA (REVISION DE LA LITERATURA)

Capítulo 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACION Y PROCEDIMIENTO DE RECOGIDA DE DATOS

Capítulo 4

ANALISIS GENERAL DE LOS DATOS. ESTUDIO DEL RENDIMIENTO

Capítulo 5

ANALISIS DEL INDICE DE DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS.

Capítulo 6

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE ERRORES

Capítulo 7

ANALISIS DE NIVELES DE COMPRENSION

Capítulo 8

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

REFERENCIAS

Índice de Gráficos

Índice de Tablas

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación que presentamos es un estudio sobre resolución de problemas. En un trabajo previo (Castro, 1991) hemos descrito el campo de investigación de la resolución de problemas y expuesto las teorías generales que lo enmarcan y desarrollan. Hay otros autores (Borasi, 1986; Kilpatrick, 1982; Puig, 1992-93) que también realizan una revisión amplia de las nociones de "problema" y "resolución de problemas". Creemos que no es necesario reiterar este tipo de cuestiones generales, por ello tomamos estos trabajos como referencia y no insistimos en el tema. No obstante, dado que hay tendencias o enfoques distintos en las investigaciones sobre resolución de problemas, conviene examinarlos brevemente y resaltar en cuál de ellos se ubica el presente trabajo.

Con la aparición de la Teoría del Procesamiento de la Información (Newell y Simon, 1972), el interés de los investigadores se centró en los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas. Expuesto de una manera sintética, esta teoría considera dos etapas fundamentales en la resolución de un problema: Una, la *representación mental* del problema que da lugar al espacio de solución de la persona que lo resuelve o resolutor y, dos, *la búsqueda de una solución* en el espacio del problema, que está determinada obviamente por la representación mental inicial que el resolutor hace del problema, empleando estrategias generales o heurísticos.

Ambos aspectos han sido, por separado, centro de interés en investigaciones realizadas sobre resolución de problemas. Nuestro trabajo se refiere al aspecto de la representación mental, entendida esta "*como la interpretación o comprensión que del mismo realiza la persona que tiene que resolverlo*"(Chi y Glaser, 1986, p.300). Hemos preferido utilizar el término "comprensión" al de "representación" porque es el más usual en la literatura sobre resolución de problemas verbales.

Otra característica de nuestro trabajo es que trata la resolución de problemas dentro de un campo de conocimiento específico, en la línea que en los últimos años vienen marcando las publicaciones de los miembros del grupo internacional de investigación PME. Los conocimientos específicos del resolutor determinan en cierto modo la representación del mismo. Esta idea puede ser invertida y considerar que las representaciones que las personas construyen en la resolución de problemas reflejan los conocimientos y organización de esos conocimientos que poseen o, al menos, que son capaces de activar y procesar en su memoria. Desde este punto de vista, las representaciones que el niño construye durante la resolución de un problema pueden servir para evaluar los conocimientos y los esquemas de conocimientos que posee.

Para Romberg (1989) el modelo de evaluación que surge de la anterior idea requiere "la especificación de los dominios matemáticos (a evaluar) y el desarrollo de ítems que reflejen ese dominio" (Romberg, 1989, p.11). Propone como ejemplo el trabajo de Vergnaud (1982b) sobre "campos conceptuales".

El campo específico de conocimiento en el que hemos situado nuestra investigación es el de la Cognición Matemática y, dentro de él el denominado Pensamiento Numérico. Es un trabajo contextualizado en el ámbito escolar. Pretende describir las representaciones mentales que construyen los niños al finalizar la Enseñanza Primaria Obligatoria cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa. Hemos tratado de establecer la influencia del problema (reflejada en los factores de tarea) y de los alumnos (manifestada por su rendimiento en 5º y 6º y por las estrategias empleadas en su solución); la influencia del profesor la hemos controlado mediante el factor colegio.

Dado un conjunto de problemas que se ajustan a un mismo esquema, la representación que cada persona realiza para cada uno de los problemas suele ser distinta de la representación que realiza otra persona diferente. Las razones pueden ser múltiples, por ejemplo, que una persona incorpore determinados aspectos que no incorpora otra, o que cada una active un esquema distinto. Ello independientemente de que la representación sea defectuosa o no. Cabe, por consiguiente, la posibilidad de encontrar en los niños distintas categorías de representaciones en función de las variables de tarea manipuladas en los problemas. En ese sentido consideramos en este trabajo distintas formas de comprensión o representación. Como además se dan en un orden jerárquico hablamos de niveles de comprensión.

Para llegar a determinar niveles de comprensión en alumnos de los dos últimos cursos de Enseñanza Primaria, cuando resuelven problemas simples de comparación multiplicativa hemos seguido un método que consta de las siguientes fases:

(1) identificar un conjunto de problemas verbales correspondientes al esquema de comparación multiplicativa, cuyas características varían en función de dos variables de tarea;

(2) elaborar pruebas de lápiz y papel con los problemas verbales identificados en la fase primera y presentarlas a los niños para que resuelvan los problemas en ellas contenidos;

(3) realizar un análisis estadístico cuantitativo de la variable dependiente: acierto-error del niño al elegir una operación adecuada al problema, en función de las dos variables independientes con las que han sido diseñadas las tareas;

(4) clasificar y analizar los errores en las respuestas escritas, relacionando los tipos de error con las variables de tarea,

(5) establecer predicciones sobre la comprensión de los escolares en problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa en función de las respuestas dadas a los problemas escritos y verificar mediante entrevista clínica dicha comprensión en una muestra de alumnos.

Debido a la insuficiencia actual que presentan las metodologías cuantitativa y cualitativa cuando se aplican aisladamente, y que ha dado lugar a una extensa polémica (Anguera, 1985) hemos optado por una metodología mixta, en la que empleamos las metodologías cuantitativa y cualitativa de forma complementaria.

Utilizamos un proceso de aproximaciones sucesivas, en el que, en cada aproximación, tratamos de aplicar la técnica que permita complementar el conocimiento obtenido anteriormente.

En la primera fase diseñamos variantes de una misma tarea -la comparación multiplicativa- susceptibles de producir patrones o pautas de respuestas correctas o incorrectas en las respuestas que dan los niños. Frente al uso de tareas indiscriminadas que en ocasiones se utilizan en investigación, esta forma de elegir las tareas disminuye el grado de inferencia necesaria para establecer relaciones entre las tareas utilizadas y las formas de comprensión de los sujetos.

La segunda fase de la investigación trata del diseño de las pruebas escritas de lápiz y papel en la que tenemos especialmente en cuenta las variantes de problemas definidos en la fase uno, y los posibles efectos distorsionadores que durante su resolución se pueden producir. Ello nos lleva a un diseño no estandarizado que requiere el estudio de cuál es el tratamiento estadístico más adecuado.

En la tercera fase realizamos un análisis estadístico de las respuestas correctas que dan los niños. Con ello llegamos a realizar una primera aproximación a la solución del problema de investigación planteado. Con el análisis estadístico que hemos hecho intentamos observar el grado de influencia en la dificultad de comprensión que pueden tener las dos variables de tarea que hemos utilizado para redactar los doce problemas de comparación multiplicativa que utilizamos en este estudio. La dificultad de cada problema, medida por el porcentaje de éxitos obtenidos por los niños de la muestra al elegir un proceso de solución adecuada, es la primera técnica de medida que utilizamos. Según el criterio adoptado para dar como acertada una respuesta, si dos problemas tienen índices de dificultad distintos esa diferencia de dificultad es atribuible a los diferentes niveles de comprensión, en el sentido de representación mental, que demandan en los sujetos. Hay mayor número de sujetos que comprenden los problemas con mayor índice de dificultad; es en este sentido en el que se considera que los niños comprenden con mayor facilidad estos problemas. Esta primera aproximación nos permite distinguir entre problemas donde es posible que alumnos diferentes puedan construir representaciones mentales distintas; por tanto, dan lugar a niveles distintos de comprensión entre los escolares.

Pero el análisis de si se ha elegido o no la operación adecuada y la cuantificación de los éxitos proporciona poca información sobre la naturaleza de la comprensión que ha realizado el alumno. Por ello, en la cuarta fase realizamos una segunda aproximación, con la que intentamos acercamos a las distintas formas de comprensión de estos problemas mediante el análisis de los patrones de respuestas incorrectas que los alumnos emplean en la resolución de cada uno de ellos. Describimos los tipos de respuestas incorrectas y estudiamos la asociación entre los tipos de respuestas y las dos variables de tarea. Utilizamos para este análisis un modelo log-lineal, que brinda la posibilidad de superar las viejas técnicas utilizadas para buscar relaciones entre variables medidas a niveles discretos.

A partir de los resultados de los análisis anteriores realizamos una categorización de los problemas verbales simples de comparación multiplicativa y de los niños de la muestra. Nuestro siguiente objetivo es contrastar si esas categorizaciones de sujetos, inferidas de los análisis estadísticos de las respuestas correctas e incorrectas, tienen existencia real o son mera entelequia. Para ello hemos seleccionado un conjunto de niños de la muestra previamente utilizada a los que hemos entrevistado individualmente con la finalidad de concluir si se adecuan a las categorías definidas. Esta fase es meramente cualitativa.

Todo este proceso, brevemente resumido, lo hemos desarrollado extensamente en las páginas siguientes. La organización del trabajo por capítulos es la siguiente:

En el **Capítulo 1** describimos y situamos de manera detallada el problema de investigación. Exponemos el ámbito o la perspectiva didáctica bajo la que se realiza el estudio: *la evaluación*, y el tipo de contenido evaluado: *la capacidad de resolución de problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa de comparación*. Situamos los problemas de comparación multiplicativa en el marco de las clasificaciones generales más difundidas sobre resolución de problemas de estructura multiplicativa. Definimos los problemas verbales simples de comparación multiplicativa y las variables que van a caracterizar los problemas empleados en el estudio. Destacamos la fase de resolución de problemas que vamos a observar. Por último, enunciamos los objetivos específicos del estudio, así como las cuestiones generales que tratamos de responder.

El **Capítulo 2** contiene una revisión de trabajos publicados sobre resolución de problemas aritméticos verbales. La primera parte trata de enfoques teóricos que se han utilizado en estas investigaciones. Seguidamente tratamos trabajos que se han centrado en la estructura multiplicativa y hacemos un apartado especial para los dedicados a la resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa.

En el **Capítulo 3** describimos el diseño de la experiencia y el procedimiento de recogida de datos, tanto en su aspecto cuantitativo como cualitativo. Describimos las variables, la muestra de sujetos, los materiales y los procedimientos utilizados en la recogida de datos. La codificación de las respuestas a los cuestionarios escritos y la validez y fiabilidad de las mismas. Recogemos las modificaciones realizadas con respecto al estudio previo (Castro, 1991) y describimos el diseño de las entrevistas individuales.

En los **Capítulos 4 y 5** realizamos varios contrastes de hipótesis tendentes a esclarecer la influencia de las variables de tarea, del colegio y del curso, sobre el rendimiento de los alumnos de 5º y 6º curso de Enseñanza Primaria y sobre el índice de dificultad de los problemas verbales de comparación.

El **Capítulo 6** incluye una clasificación de las respuestas incorrectas y un estudio de la *asociación* entre estas respuestas y las variables de tarea consideradas al definir los enunciados de los problemas.

En el **Capítulo 7** utilizamos los resultados de los contrastes de hipótesis realizados y el estudio de asociación entre variables de tarea y tipos de respuestas incorrectas para definir categorías de problemas de comparación multiplicativa y, en función de ellas, niveles de resolutores. Mediante entrevistas a niños seleccionados verificamos que hay niños que se ajustan a las características de cada una de las categorías de resolutores preestablecidas .

Finalmente, en el **Capítulo 8**, se recoge y discute los resultados más generales obtenidos en las páginas precedentes y se sugieren implicaciones tanto para la educación como para investigaciones futuras.

Capítulo 1

EL PROBLEMA A INVESTIGAR

Esta investigación trata de explorar, desde una perspectiva de evaluación, la comprensión de niños de los dos últimos cursos (5º y 6º) de Enseñanza Primaria (10 a 12 años de edad) en la resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa que requieren el uso de una multiplicación o división para su solución. Desde el punto de vista de la Didáctica este trabajo se ciñe al ámbito de la Evaluación y desde el punto de vista del contenido matemático al ámbito de la Aritmética.

1.1. Ámbito o contenido didáctico analizado

La evaluación es una parte sustancial del proceso didáctico que ha recibido y está recibiendo en la actualidad, a nivel internacional, una especial atención por la comunidad de educadores e investigadores en Ciencias de la Educación. Hay insatisfacción por el estado actual de la medición educativa. Esta no se encuentra a tono de los nuevos enfoques y teorías de la enseñanza y el aprendizaje. Glaser (1982) expone algunas de las causas de este descontento. De manera general, los tests y las medidas de aptitudes que se usan en la escuela miden el tipo de actividad intelectual, que puede más exactamente ser denominada «capacidad escolar general». Pero la información que proporcionan estas medidas no son suficientes para *estimular, mejorar o corregir* el aprendizaje. Proporcionan información sobre la situación general de un alumno, pero no la suficiente para orientar y guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta escasa capacidad diagnóstica de los tests debe ser subsanada ya que

> *los tests deberían ser medidas diagnósticas que evaluaran las diferencias, tanto respecto a las capacidades cognoscitivas como a los conocimientos adquiridos, de forma que las escuelas pudieran adaptar sus respuestas instructivas a las diferentes necesidades individuales* (Glaser, 1982, p.377).

La diferencia es clara, se trata de pasar de las predicciones estáticas de los tests psicométricos a "afirmaciones dinámicas sobre lo que puede hacerse para aumentar la probabilidad de que un individuo tenga éxito en la escuela" (p.377).

¿Cuáles son los avances en medición (evaluación) que pueden propiciar el desarrollo de estas ideas y permitir su puesta en práctica?. Para contestar a esta pregunta es útil la clasificación que hace Meier (1993) al respecto. Distingue cuatro áreas representativas en el conjunto de las aportaciones más sobresalientes que en medición (evaluación) se han producido en los últimos veinte años:

a) El enfoque clásico

b) El enfoque psicométrico y estadístico

c) El enfoque cognitivo

d) El enfoque basado en ordenadores

En el enfoque clásico de la teoría de los tests, la puntuación de un test está compuesta de la puntuación verdadera más un error. La puntuación verdadera representa un rasgo, tal como la inteligencia, que influye en la conducta en las diversas situaciones. El objetivo de la teoría clásica de los tests es maximizar la puntuación verdadera y minimizar el error.

Los aspectos psicológicos que se consideran en el enfoque psicométrico y estadístico son similares al enfoque clásico, la diferencia es que en este enfoque se enfatiza el uso de la estadística y otras técnicas matemáticas para darle sentido a los datos obtenidos. Meier incluye en esta categoría la *teoría de respuesta al ítem* y la *teoría de la generabilizidad*.

El enfoque basado en ordenadores tiene como característica distintiva las potencialidades de uso de estos aparatos.

Por último, el enfoque cognitivo es un resultado de la influencia ejercida por la metodología experimental y los constructos teóricos de la psicología cognitiva. En el enfoque cognitivo Meier distingue dos técnicas básicas: la *descomposición de tareas* y los *protocolos verbales*. Resalta Meier que

> *la más prometedor de los modelos cognitivos en evaluación es que estos enfoques parecen ser capaces de ofrecer métodos para examinar los supuestos de la validez de constructo* (Meier, 1993, p.888).

En nuestra investigación hemos adoptado el modelo cognitivo y, en particular, la técnica de descomposición de tareas. Es por tanto conveniente aclarar su significado. Esta técnica se refiere a que para comprender las respuestas a un ítem o a una tarea se requiere de una teoría de los factores subyacentes a la realiza-ción junto con un diseño de investigación que permita explicar estos factores. Según Meier

> *Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, los experimentos deberán ser diseñados para descomponer estas variables y determinar su peso relativo* (Meier, 1993, p.888).

Los investigadores en este campo han estudiado los procesos cognitivos que subyacen en la realización de determinadas tareas. En nuestro estudio la evaluación se centra en un tipo específico de tareas: la resolución de problemas aritméticos enunciados verbalmente.

1.2. El contenido a evaluar

La aritmética como materia escolar se ha justificado históricamente unas veces por el interés de la materia en sí misma, otras por la disciplina mental derivada de su estudio y, sobre todo, por su utilidad práctica. A este respecto señala Reed (1949) que "el fin de la aritmética (escolar) es desarrollar el conocimiento de las relaciones cuantitativas y la habilidad para resolver los problemas relativos a los números y la cantidad que se presentan en las transacciones ordinarias de la vida.... Naturalmente, la aritmética no se estudia únicamente por saber aritmética, ni por la disciplina mental derivada de su estudio, sino por su aplicación en ciertas actividades esenciales de la vida. Mientras más conocimiento tiene el alumno de estas actividades y de los objetos con que trata la aritmética, más significativa y valiosa resulta la materia." (p.301).

Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad, entre otras, de facilitar al alumno este acercamiento entre aritmética y realidad, entre aritmética y aplicaciones a la vida real, que hacen más significativo y valioso su estudio.

En los problemas de expresión o formato verbal la información viene dada mediante un texto que consta de una o varias frases. A los problemas aritméticos cuya expresión o enunciado es verbal se les llama problemas aritméticos verbales (PAEV).

Evaluaciones nacionales, tales como las que se realizan en U.S.A. han puesto de manifiesto en varias ocasiones que muchos niños tienen dificultad para resolver problemas verbales (Carpenter, Coburn, Reys y Wilson, 1976; Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist y Reys, 1980; Lindquist, Carpenter, Silver y Matthews, 1983). Investigadores de diversos países también han puesto de relieve esta dificultad como veremos en el capítulo 2 al hacer la revisión de la literatura.

Desde comienzos de este siglo, psicólogos y educadores han estado explorando las dificultades asociadas con la resolución de problemas enunciados verbalmente. El estudio de Kilpatrick (1992) presenta un resumen de las investigaciones de principio de siglo en Educación Matemática, con especial mención de la resolución de problemas aritméticos. Kilpatrick subraya que el *Report of the National Society for the Study of Education (Whipple, 1930)*, supuso un momento de cambio para el tratamiento de la Aritmética, en particular por la crítica realizada al predominio en el aprendizaje de destrezas y rutinas y por la defensa que hace en favor de una mayor atención a los estudios sobre resolución de problemas y pensamiento cuantitativo.

También Strech (1941), en una revisión realizada sobre investigaciones y estudios relativos a la enseñanza y aprendizaje de la Aritmética, ofrece una selección de 100 trabajos de los realizados en USA hasta la fecha basándose en tres criterios: validez de las conclusiones, excelencia de la técnica empleada, y efecto de los resultados sobre la práctica educativa. Aunque hay una cantidad considerable de informes y estudios de carácter general, que afectan a todos los tópicos de la Aritmética, dieciocho de los trabajos incluidos en la lista hacen referencia explícita en su título a la resolución de problemas. Por tanto, la resolución de problemas en Aritmética es un campo de investigación presente desde los comienzos de la Educación Matemática como área científica de conocimiento.

Ginsburg (1983) da tres razones para explicar el continuado estudio de la cognición matemática:

> *La primera razón para estudiar la cognición en matemáticas es que abarca una buena porción de la complejidad de la mente humana.*
> *Segundo, el investigador disfruta de alguna ventaja táctica. El tema puede ser bien definido, incluso formalizado. Esto hace posible desarrollar teorías que persiguen precisión similar y empleo formal de modelos matemáticos del aprendizaje y procesos de pensamiento.*
> *...Tercero, la investigación en cognición matemática ofrece la posibilidad de contribuir de manera importante a la educación (p.2).*

Investigaciones recientes realizadas sobre problemas verbales de estructura aditiva (Briars y Larkin, 1984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; 1983; Carpenter y Moser, 1982; 1983; 1984; Nesher, 1982; Nesher, Greeno y Riley, 1982; Vergnaud, 1982) tratan de identificar cómo piensan los niños cuando resuelven problemas verbales en los que interviene la suma o la resta. Parten de una identificación previa de las características estructurales de los problemas y en función de ella realizan una clasificación de los mismos. De estas investigaciones han resultado clasificaciones semánticas de la estructura de los problemas y descripciones detalladas de las estrategias de solución. Los investigadores han encontrado diferencias en cómo los niños resuelven cada uno de los tipos de problemas, han establecido relaciones entre la estructura semántica del problema y las estrategias que utilizan los niños para resolverlos, y han propuesto modelos explicativos.

Puede parecer obvia la extensión de los resultados obtenidos con problemas verbales de estructura aditiva a problemas de estructura multiplicativa. Sin embargo, la mayoría de los investigadores se muestran contrarios a una mera generalización de los resultados obtenidos en un área específica de conocimiento matemático a otra área matemática o, a un área más amplia de conocimiento. Este es uno de los motivos del reciente interés por investigar con igual intensidad los problemas de estructura multiplicativa (Anghileri, 1989; Bell, Greer, Grimison y Mangan, 1989; Brekke, 1991; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Huinker, 1989; Kouba, 1989; Levain, 1992; Luke, 1988; Nesher, 1988; Peled y Nesher, 1988; Schwartz, 1981, 1988; Vergnaud, 1983; 1988).

1.3. Clasificaciones generales de los PAEV

Un problema aritmético verbal (PAEV) es un problema de contenido aritmético y que se expresa o enuncia en un contexto de información verbal. Atendiendo al número de datos que aparecen explícita o implícitamente en la información se puede hablar de PAEV simples y compuestos. La información suministrada en un PAEV simple contiene sólo dos datos numéricos con los que el resolutor tiene que operar para obtener el resultado. Cuando intervienen más de dos datos y es necesario realizar más de una operación con ellos el problema se llama compuesto.

Para resolver un PAEV simple se necesita una sola clase de operación aritmética (adición, substracción, multiplicación o división) mientras que para resolver un PAEV compuesto es necesario emplear al menos dos operaciones distintas o una misma operación varias veces.

A los PAEV simples que requieren de una suma o una resta para obtener la solución se les llama PAEV de adición o de substracción. Puesto que la adición y substracción son operaciones inversas y la substracción puede concebirse como un caso especial de adición, a los PAEV de adición y substracción suele denominárseles con el nombre genérico de PAEV de estructura aditiva.

Así mismo, a los PAEV simples que se resuelven empleando una multiplicación o una división se les llama PAEV de estructura multiplicativa.

En el caso particular de que los datos se restrinjan al conjunto de los números naturales, los problemas de estructura multiplicativa pueden resolverse mediante una serie de sumas o de restas repetidas. Esto no los convierte desde nuestra óptica en PAEV compuestos, si no en PAEV en los que se pueden dar múltiples pasos para obtener la solución. Esta distinción entre las variables OPERACIONES Y PASOS es muy utilizada en los trabajos del Grupo de la Universidad de Stanford (Suppes, Loftus y Jerman, 1969; Jerman y Rees, 1972) sobre variables estructurales, si bien en sus investigaciones no distinguían entre problemas simples y compuestos. Lo que hemos denominado problemas simples y compuestos, Puig y Cerdán (1989) los denominan problemas de una etapa y problemas de varias etapas. Preferimos nuestra denominación para no confundir las dos variables anteriores, ya que los problemas de varias etapas podrían confundirse con los problemas que requieren varios pasos para obtener la solución.

Tabla 1.1. Clasificación de los problemas aritméticos verbales

- PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES
  - SIMPLES
    - ESTRUCTURA ADITIVA
    - ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA
  - COMPUESTOS

Si en una primera fase las investigaciones se centran en características generales, válidas para todos los PAEV, o en características que afectan a problemas ligados con las respectivas operaciones, que se asume son las adecuadas para su resolución -este es el caso de las investigaciones realizadas por el grupo de Stanford-, los trabajos actuales muestran una clara tendencia a separar las investigaciones sobre resolución de problemas de sumar y restar de las investigaciones sobre problemas de multiplicar y dividir. Es decir, estudiar por separado las estructuras aditivas y multiplicativas, manteniendo en conjunto los problemas de sumar y restar por un lado y los de multiplicar y dividir por otro.

En nuestro trabajo nos hemos centrado en el estudio de PAEV de estructura multiplicativa y dentro de ellos profundizamos en un tipo de problemas que describimos a continuación.

1.4. Clasificaciones de los PAEV de estructura multiplicativa

Para comprender la conducta de los niños cuando resuelven PAEV es necesario realizar una descripción clara de los tipos de problemas que le pedimos que resuelvan. En esta descripción es muy importante tomar en consideración los aspectos semánticos del problema, esto es, el significado de los conceptos y las relaciones implicados en el problema. Los trabajos realizados por Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1982; Nesher, 1982; Nesher, Greeno y Riley, 1982; Vergnaud, 1982; en PAEV de estructura aditiva, han puesto de manifiesto que las relaciones implicadas en el problema son un determinante de la dificultad del problema para los niños.

Nuestro estudio lo hemos enmarcado en esta perspectiva semántica y, puesto que la multiplicación y la división modelan diversas situaciones, es necesario describir claramente estas diferentes situaciones.

En el conjunto de los problemas de estructura multiplicativa los investigadores han distinguido tipos distintos de problemas. Las clasificaciones más divulgadas son la de Vergnaud (1983, 1988), la de Schwartz (1981, 1988) y la de Nesher (1988) (véase Tabla 1.2).

Según Nesher (1988, p.38), si bien hay acuerdo en estas tres grandes categorías de problemas multiplicativos, no lo hay, sin embargo, en sus características esenciales, en cuáles son los parámetros esenciales que las definen. Según ella, el tema no es acumular variables sino determinar cuáles son las de mayor poder explicativo.

Tabla 1.2. Clasificaciones de problemas de estructura multiplicativa.

Vergnaud	Schwartz	Nesher
Isomorfismo de medidas	I x E = E'	Regla de correspondencia (Mapping rule)
		Comparación multiplicativa
Producto de medidas	E x E'= E''	Producto cartesiano

En nuestro trabajo seguimos la clasificación de Nesher y nos centramos en PAEV de estructura multiplicativa de comparación. Este tipo de problemas queda englobado en la categoría que Vergnaud llama Isomorfismo de medidas, y en la que Schwartz denomina problemas tipo IxE=E'. Dentro de esta clase de problemas intentamos estudiar el poder explicativo de dos variables de tarea. Por ello, en los apartados siguientes describimos la clase de problemas que investigamos y las variables de tarea manipuladas.

1.5. Análisis de los PAEV de Estructura Multiplicativa de Comparación

1.5.1. Tipos de verbos

Aunque en menor medida que lo ocurrido en los problemas de estructura aditiva, el

análisis de los problemas verbales de estructura multiplicativa ha evolucionado, y de una preocupación inicial exclusiva hacia el análisis de las variables sintácticas se pasó al análisis semántico de los enunciados de los problemas. En los problemas de estructura aditiva el análisis centrado considerando sólo variables sintácticas y de contenido semántico no explicaba todas las dificultades, por lo que se recurrió a variables adicionales, por ejemplo, variables contextuales, que
para Nesher (1980) son variables pragmáticas que dan la significación profunda del enunciado del problema.

Un paso importante en este sentido fue la distinción entre textos estáticos y textos dinámicos, que se mostró muy útil en el análisis de problemas de estructura aditiva. Recordemos que

> *En un problema verbal dinámico se puede distinguir entre el estado inicial de la situación, en un tiempo T_1, un cambio provocado por una acción y ocurrido durante un tiempo T_2, y un estado final localizado en un tiempo T_3.*
> *Un problema verbal estático implica un estado singular de hechos. Sus condiciones subyacentes se refieren a subconjuntos de un todo* (Nesher, 1980, p.44).

La distinción entre texto estático y dinámico es la diferencia fundamental entre los tipos de problemas aditivos de cambio y combinación, así como entre los de comparación e igualación, demostrando los estudios empíricos que *el texto estático es más difícil para el niño que el dinámico* (Nesher, 1980, p.44).

Los problemas que vamos a estudiar son problemas verbales de comparación y, por tanto, son entidades textuales estáticas localizadas en un tiempo T_0; su enunciado no podrá expresar acción desarrollada en un tiempo. Esta idea es clave para delimitar la clase de problemas de comparación que vamos a estudiar. Una primera conclusión es que en los enunciados de nuestros problemas no intervienen verbos de acción, solamente verbos de existencia o estado.

1.5.2. Tipos de proposiciones

Para continuar con el análisis de los problemas verbales de comparación, objeto de nuestro estudio, vamos a distinguir tres tipos de proposiciones en el enunciado de estos problemas según que correspondan a asignaciones, relaciones y preguntas o interrogaciones.

Proposición asignativa: atribuye o asigna un valor numérico o una cantidad a una variable. Por ejemplo, "Daniel tiene 12 canicas" es una proposición asignativa.

Las proposiciones asignativas son oraciones simples enunciativas, en las que el sujeto de la oración actúa en nuestro análisis como una variable a la que se le asocia un valor numérico mediante un verbo que puede indicar o no acción.

Con las condiciones impuestas anteriormente, en los problemas de comparación, el verbo sólo puede ser un verbo de pertenencia o existencia (reducible a ser, haber o tener).

Proposición relacional: expresa o establece una relación cuantitativa entre dos variables. Por ejemplo, "María tiene 6 veces más que Daniel" es una proposición relacional. En ella María y Daniel actúan como dos variables entre las cuales existe la relación cuantitativa "12 veces más que".

Las proposiciones relacionales están constituidas por un verbo, un término de comparación entre dos cantidades C_1 y C_2, asociadas a los sujetos S_1 y S_2. En un enunciado con sentido las proposiciones relacionales conectan dos proposiciones asignativas y poseen algunos elementos comunes:

a) el verbo es del mismo tipo en las dos proposiciones asignativas y en la proposición relacional, y

b) las dos variables que intervienen en una proposición relacional, corresponden respectivamente a cada una de las variables de las dos proposiciones asignativas.

Si una relación R conecta las asignaciones A_1 y A_2 escribimos abreviadamente $R(A_1,A_2)$.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriormente expuestas si R conecta dos asignaciones A_1 y A_2, sus respectivos verbos V_1, V_2 así como el verbo V que aparece en la proposición relacional son verbos estáticos, preferentemente ser, haber o tener.

Ejemplo de relación entre asignaciones:

Si A_1 es la asignación "María tiene n canicas" y

A_2 es la asignación "Daniel tiene m canicas",

entonces

"María tiene k veces más canicas que Daniel",

es una relación R en la que el término comparativo es "veces más que". Esta relación conecta las asignaciones A_1 y A_2 mediante el comparativo, y la cuantifica mediante el número k.

Proposición interrogativa: en nuestro contexto de investigación una proposición se llama interrogativa cuando pregunta o interroga sobre el valor numérico de una cantidad.

La interrogación puede hacerse sobre una asignación; en este caso se desconoce la cantidad asignada a la variable en una proposición asignativa y la pregunta demanda que se halle ese valor. Por ejemplo,

"¿Cuántas canicas tiene Daniel?"

es una pregunta o interrogación de tipo asignativo.

La interrogación puede hacerse también sobre la cuantificación de la comparación entre las dos cantidades intervinientes en un estado relacional. Por ejemplo,

"¿Cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?"

es una interrogación relacional.

El enunciado de un problema de comparación se compone de tres proposiciones, y caben dos variantes:

a) Dos asignativas A_1, A_2 y una interrogación relacional I_R,
en la que los verbos de A_1 y A_2 coinciden con los de I_R. Por ejemplo:

Daniel tiene 12 canicas.

María tiene 72 canicas.

¿Cuántas veces más canicas tiene María que Daniel?.

b) Una asignación A_i (i=1,2), una interrogación asignativa I_{Aj} (j=1,2) y una relación $R(A_1,A_2)$ entre ambas asignaciones.

Por ejemplo:

Daniel tiene 12 canicas.

María tiene 6 veces más canicas que Daniel.

¿Cuántas canicas tiene María?.

En nuestra investigación estamos interesados en utilizar problemas enunciados verbalmente que contienen proposiciones asignativas y relacionales, y pretendemos observar si los estudiantes tienen éxito en igual medida con diferentes tipos de problemas de comparación según sean de tipo asignativo o relacional. El conjunto de estos problemas es muy amplio, por ello hemos acotado el campo limitando nuestro trabajo sólo a doce. Para delimitar estos doce problemas hemos puesto otras condiciones adicionales.

1.5.3. Tipos de magnitudes sobre las que vamos a trabajar

En este caso imponemos dos limitaciones:

i) Las dos cantidades C_1 y C_2 que aparecen relacionadas en el enunciado pertenecen a la misma magnitud y por tanto no las diferenciamos, es decir, si M es la magnitud entonces $C_1 \varepsilon M$ y $C_2 \varepsilon M$. De ahora en adelante nos referiremos a problemas que incluyen cantidades C de un sólo tipo.

ii) La cantidad C va a ser una cantidad de objetos discretos, con lo cual los valores numéricos que le asignamos: m y n son números naturales.

1.5.4. La Relación de Comparación Multiplicativa: Términos comparativos

En la proposición relacional $R(A_1,A_2)$ intervienen dos variables, un verbo que no expresa acción, unos términos que expresan comparación y un número que cuantifica la comparación.

Además, sabemos que teóricamente toda relación R implica una relación inversa, cuyo enunciado es más o menos fácil de establecer en el idioma castellano.

Para que un problema sea de comparación ya se ha dicho que el verbo no puede expresar acción en el tiempo, por lo que ya tenemos fijada esta componente relacional; así mismo el número que cuantifica la relación va a ser en nuestra investigación un número de un solo dígito.

Fijado lo anterior pasamos a analizar la proposición relacional en función de los términos comparativos con los que viene expresada la comparación entre las dos asignaciones, a los que nos referiremos como los términos o expresiones de comparación.

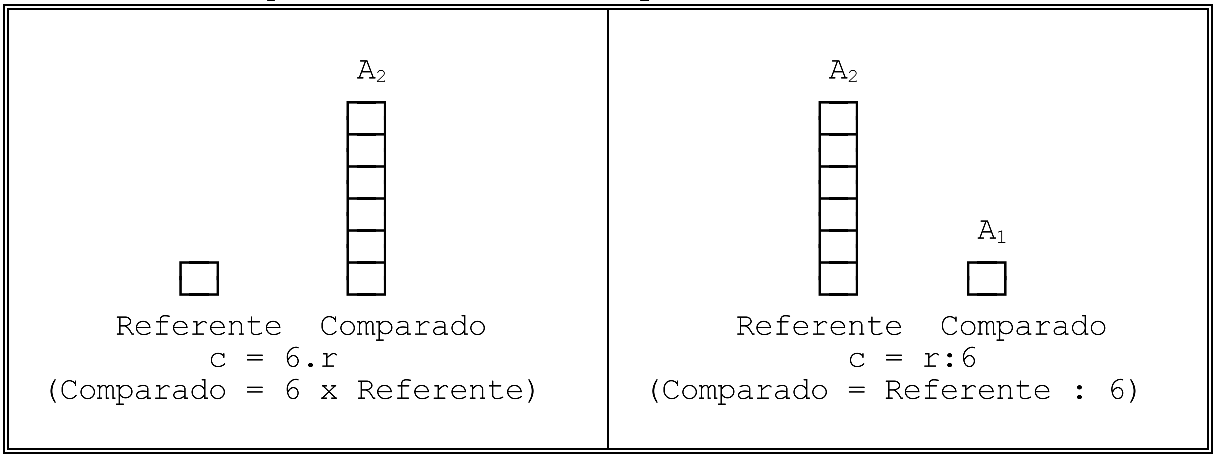
En una comparación intervienen dos cantidades. Una de ellas es el referente, con respecto a la cual se compara la otra, el comparado o referido.

Al igual que en la relación de comparación aditiva, la relación de comparación multiplicativa se establece entre las dos asignaciones, que pueden actuar indistintamente como referente o comparado. La singularidad en nuestro caso está en que entre el número del referente y el número del comparado vamos a considerar siempre una relación del tipo "ser múltiplo de", o su inversa "ser divisor de". Representada gráficamente esta relación entre el referente (r) y el comparado (c) con unidades discretas de longitud tendremos que los dos casos posibles son, según que se tome A_1 ó A_2 como referente, los que aparecen en la Tabla 1.3.

El hecho de que A_1 ó A_2 sean el referente o el comparado está ligado a que estemos considerando una proposición relacional o su inversa.

Para establecer verbalmente los dos tipos de comparación debemos recordar que en el idioma castellano se utilizan tres tipos de términos comparativos correspondientes a los tres tipos de comparaciones siguientes: comparación de superioridad que se forma incluyendo la expresión "más...que"; comparación de igualdad que se forma con "tanto...como" o "tan...como", y la comparación de inferioridad que se forma con "menos...que". Ejemplos:

Tabla 1.3. Comparación de aumento y de disminución



Manolo es más alto que José

Manolo está tan moreno como José

Manolo tiene tanto como José

Manolo es menos curioso que José

Al enunciar problemas multiplicativos de comparación no se pueden olvidar estas tres formas de comparar, que ya se utilizan en los problemas aditivos. A diferencia de los aditivos, los problemas de estructura multiplicativa en unos casos incorporan el término "veces", por lo que los términos de comparación que caracterizan a los problemas de multiplicar con cantidades discretas que incorporan el término "veces" son: "veces más que", "veces menos que", "veces tantas como". Ejemplos:

Problema 1. Daniel tiene 12 canicas.
María tiene 6 veces más canicas que Daniel.
¿Cuántas canicas tiene María?

Problema 2. Daniel tiene 12 canicas.
María tiene 6 veces menos canicas que Daniel.
¿Cuántas canicas tiene María?

Problema 3. Daniel tiene 12 canicas.
María tiene 6 veces tantas canicas como Daniel.
¿Cuántas canicas tiene María?

En castellano la proposición relacional "Manolo es más alto que José" tiene como inversa "José es menos alto que Manolo", es decir, hay dos términos comparativos distintos para expresar una relación y su inversa. Esto no ocurre en el comparativo de igualdad: la inversa de "Manolo es tan alto como José" es "José es tan alto como Manolo" que, como puede observarse, se forman con el mismo término comparativo. Esta comparación es por supuesto de tipo cualitativo.

Cuando se cuantifica la comparación, los términos "más que" y "menos que" siguen caracterizando a una expresión relacional y su inversa; sin embargo, el término comparativo de igualdad no se comporta como en la comparación cualitativa. Por ejemplo, si considero la proposición relacional "María tiene 6 veces tantas canicas como Daniel", no puedo formar la inversa simplemente cambiando las posiciones de María y Daniel, pues resultaría la expresión "Daniel tiene 6 veces tantas como María", que no es equivalente a la anterior, no significa lo mismo.

En la estructura aditiva este problema se resuelve incorporando términos opuestos como "faltan" o "sobran". Por ejemplo, "A María le faltan 5 para tener tantas como Daniel" y su equivalente inversa "A Daniel le sobran 5 para tener tantas como María". ¿Qué ocurre en el caso multiplicativo?.

En el caso multiplicativo hemos dicho que uno de los enunciados se forma incorporando la palabra "veces", por ejemplo, "María tiene 6 veces tantas canicas como "Daniel". Si la diferencia en la estructura aditiva la marcan términos opuestos, lo lógico en este caso es preguntarse cuál es el término inverso de "veces" que expresa la relación inversa. Desde un punto de vista general esta relación expresa que el conjunto mayor contiene un número de veces una parte equivalente al conjunto menor y, por tanto, la inversa debe expresar la idea de que el conjunto menor es como una de las partes iguales en que se puede descomponer o está descompuesto el conjunto mayor.

De acuerdo con esto, en su forma más general, la relación inversa lleva implícita la partición del conjunto mayor en partes iguales, es decir, fraccionar el conjunto mayor, o el que esa partición ya esté hecha. Puesto que en los problemas de comparación no puede haber acción, nos quedamos con el caso en el que el conjunto mayor está descompuesto en partes iguales y lo que hacemos es comparar una de las partes del conjunto mayor con el conjunto menor.

Así pues, según lo anterior la relación inversa de "María tiene 6 veces tantas canicas como Daniel" es "Daniel tiene tantas canicas como la sexta parte de las de María". En esta última expresión se observa una perturbación, y es la nomenclatura fraccionaria "sexta parte", que puede ser sustituida por la expresión "como una de las 6 partes iguales" que es más semejante a las otras tres.

Queda entonces:

"Daniel tiene tantas canicas como una de las 6 partes de María"

Si formamos la relación inversa de esta última, se puede hacer y tiene sentido en castellano utilizando el término comparativo "partes como":

"María tiene 6 partes como la de Daniel"

Teniendo en cuenta este razonamiento la conclusión es: Las proposiciones relacionales

"María tiene 6 veces tantas canicas como Daniel" y

"María tiene 6 partes como la de Daniel"

son equivalentes y lo único que cambia son los términos empleados

para expresar esa comparación. Lo mismo puede decirse de los respectivos enunciados inversos

"Daniel tiene la sexta parte de canicas que María" y

"Daniel tiene tantas canicas como una de las 6 partes de María"

1.5.5. La proposición relacional

Fijadas las condiciones anteriores surgen cuatro tipos de problemas de comparación multiplicativa según la expresión relacional utilizada.

En principio, las dos primeras proposiciones relacionales inversas son: "A_2 tiene(es) n veces más(mayor) que A_1" y "A_1 tiene(es) n veces menos(menor) que A_2". Pero la comparación multiplicativa se puede hacer también en base al comparativo de igualdad y a la considerando que "una cantidad es como n cantidades iguales a una dada", o que "una cantidad es como otra descompuesta en n partes iguales". Surgen así dos nuevas proposiciones relacionales inversas que son: "A_2 es n veces tanto como A_1" y "A_1 es como la n-sima parte de A_2". La Tabla 1.4 resume las cuatro posibilidades.

Como puede observarse en cada caso aparece una expresión relacional sintácticamente distinta, por lo que en adelante haremos referencia a cada caso por la expresión relacional que lo determina a la que nos referiremos también como "el término relacional", "término de comparación", "expresión de comparación" o con algún otro sinónimo.

Desde el punto de vista funcional estos problemas están caracterizados por incluir en su enunciado dos funciones proposicionales de una variable: $A_1(x)$ y $A_2(y)$ y una función proposicional relacional de las variables anteriores: $R(A_1,A_2)$. Un enunciado concreto de un problema de comparación multiplicativa surge de particularizar o asignar un valor numérico a dos de estas funciones y solicitar que se halle el valor de la tercera función. En el ejemplo citado anteriormente tenemos:

$A_1(x)$ = Daniel tiene x canicas, con x=12
$A_2(y)$ = María tiene y canicas, con y desconocido
$R(A_1,A_2)$ = A_2 6 veces más que A_1 (María tiene 6 veces más que Daniel).

Tabla 1.4. Tipos de proposiciones relacionales de comparación

A_2 tiene 6 veces más que A_1 ⟶ A_1 A_2 Referente Comparado	A_1 tiene 6 veces menos que A_2 ⟵ A_1 A_2 Comparado Referente
A_2 tiene 6 veces tanto como A_1 ⟶ A_1 A_2 Referente Comparado	A_1 es tanto como la sexta parte de A_2 ⟵ A_1 A_2 Comparado Referente

1.5.6. Cantidad desconocida en el esquema de comparación

Los problemas de comparación multiplicativa son entidades estáticas, localizadas en un tiempo T_0. Matemáticamente pueden ser descritos como una función escalar f entre el conjunto que hace de referente R y el conjunto comparado C.

$$\begin{array}{l} R \xrightarrow{\quad f \quad} C \\ x \longrightarrow f(x)=\alpha x \end{array}$$

el escalar α puede utilizarse de forma directa o inversa, teniendo pues las dos posibilidades:

$$\begin{array}{l} R \xrightarrow{\quad x\alpha \quad} C \\ x \longrightarrow y=\alpha x \end{array} \qquad \begin{array}{l} R \xrightarrow{\quad /\alpha \quad} C \\ x \longrightarrow y=\alpha^{-1}x \end{array}$$

Si nos ceñimos a números naturales los escalares indican comparaciones de aumento y de disminución, respectivamente.

Puesto que el enunciado contiene dos variables "x" e "y", y un escalar "α" que cuantifica la relación R(A1,A2), según que sea desconocida una de las variables x, y ó el escalar α, tendremos tres tipos de problemas multiplicativos, por cada una de las expresiones comparativas. A los problemas en los que se desconoce la cantidad "y" los llamamos *problemas de referido o comparado desconocido*. Si se desconoce "x" lo llamaremos *problema de referente desconocido*. Y si se desconoce "α" *problemas de escalar desconocido*.

1.6. Fases en resolución de problemas aritméticos verbales

En la resolución de un problema han sido identificados dos fases generales: la comprensión del problema y la solución del problema (Kintsch y Greeno, 1985; Mayer, 1986a, 1986b; Newell y Simon, 1974; Riley, Greeno y Heller, 1983).

Tabla 1.5. Fases en la resolución de problemas verbales

Enunciado del problema	——>	Comprensión	——>	Solución	——>	Respuesta
		1ª traducción 2ª integración		3ª planificación 4ª ejecución		

Para el caso particular de los problemas aritméticos verbales estos dos procesos han sido analizados con más detalle (véase Tabla 1.5). La comprensión (representación mental) del problema ha sido caracterizada mediante dos subetapas: (a) traducción del problema a una representación interna, y (b) integración del problema en una estructura coherente. De manera similar, la fase de solución de un problema ha sido caracterizada mediante dos subetapas: planificación y ejecución, que incluye seleccionar el proceso a seguir y ejecutar los cálculos necesarios para obtener una respuesta numérica. (Mayer, 1986a, 1986b).

Una distinción similar entre los subprocesos de comprensión del problema ha sido hecha por Kintsch y Greeno (1985). Cuando el resolutor lee el problema construye un "textobase", una representación mental del mismo. Esta representación mental expresa el contenido semántico del enunciado del problema. Entonces el resolutor construye un modelo del problema que integra la información del "textobase" para expresar la situación matemática del problema. Según Kintsch y Greeno (1985), un resolutor podría leer y comprender el texto de un problema pero no ser capaz de situar matemáticamente el problema y, por tanto, no ser capaz de elegir la operación adecuada para obtener la solución.

1.7. Fase de resolución objeto de estudio

Varios estudios sobre resolución de problemas aritméticos han mostrado que la mayoría de los errores que cometen los estudiantes en problemas verbales se deben a falta de comprensión de la estructura del problema más que a errores de cálculo. Los estudiantes pueden ser capaces de realizar determinados cálculos pero no ser capaces de resolver problemas verbales en los que para obtener la solución sólo se requiere de esos cálculos (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist y Reys, 1980; De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Dellarosa Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988).

En los resultados de la National Assessment (Carpenter y otros, 1980), se observa que los niños cometen de un 10% a un 30% más de errores en problemas verbales que si se les planteaba el mismo problema en formato numérico.

En el estudio de Dellarosa Cummins y otros (1988) un tipo de problema aritmético fue resuelto por todos los niños de primer grado cuando se le planteó en formato numérico, pero sólo el 29% de los niños lo resolvieron en formato verbal.

Esta discrepancia en el índice de dificultad de un problema según el formato numérico o verbal sugiere que la dificultad que plantea un problema a los niños no está determinada sólo por las destrezas de cálculo implicadas sino que hay otros aspectos que contribuyen a su dificultad, entre ellos, aspectos relacionados con la fase de comprensión.

Nuestro trabajo tiene como objetivo explorar la dificultad de resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa en la fase de comprensión. En un trabajo previo hicimos el estudio piloto de la dificultad de comprensión de este tipo de problemas en función de las respuestas correctas (Castro, 1991; Castro y otros, 1991). Ahora añadimos más evidencia utilizando las respuestas correctas y analizando además las respuestas incorrectas.

> *El análisis de las respuestas incorrectas proporciona una valiosa e insustituible información. La comparación de respuestas correctas nos dice solamente qué categorías difieren entre sí, pero ofrece poca información acerca de cómo difieren* (Marshall y Smith, 1987, p.372).

La validez del análisis de errores en la investigación ha sido puesta de manifiesto en investigaciones previas (Brown y Burton, 1978; Marshall, 1983).

La relación entre la investigación sobre errores y el aprendizaje de las matemáticas ha sido considerada por diversos autores (Brousseau, Davis y Werner, 1986; Nesher, 1987). Mulhern (1989) y Rico (1993) hacen una revisión de la literatura al respecto.

Para Lindvall e Ibarra (1980) conocer los procesos incorrectos que emplean los estudiantes para resolver tipos específicos de problemas es útil para diagnosticar las habilidades de los niños y para planificar la instrucción. Ginsburg (1976) ha enfatizado la importancia de este tipo de información para diagnosticar las dificultades de aprendizaje de los niños.

Cómo utilizar este tipo de información para mejorar la enseñanza puede verse en Brekke (1991) y Hart (1984).

1.8. Objetivos del estudio

La finalidad de este trabajo es estudiar la comprensión de los niños en problemas verbales de comparación multiplicativa en los dos últimos años de Educación Primaria: 5º y 6º (10-12 años de edad).

Perseguimos cuatro objetivos particulares. El primero es examinar si distintos tipos de problemas verbales de comparación multiplicativa tienen igual índice de dificultad para los niños de 5º y 6º de Educación Primaria (niños de edad comprendida entre 10 y 12 años). Los problemas que hemos utilizado se diferencian en dos variables de tarea: La cantidad desconocida en el esquema de comparación y en la expresión lingüística utilizada para enunciar la comparación. La pregunta que hemos planteado al respecto es:

1. ¿Influyen las variables "cantidad desconocida en el esquema de comparación" y "expresión lingüística utilizada" en la dificultad de comprensión de los problemas verbales simples de comparación multiplicativa en niños de 5º y 6º de Educación Primaria?.

El segundo objetivo del estudio es hacer una descripción de los errores que cometen los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa. La pregunta que hemos planteado al respecto es:

2. ¿Qué errores cometen los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria cuando resuelven problemas verbales simples de comparación multiplicativa.

El tercer objetivo es describir la asociación entre los tipos de errores que cometen los niños y las variables de tarea utilizadas para definir los problemas. La pregunta que nos planteamos al respecto es:

3. ¿Cómo se asocian las variables de tarea "cantidad desconocida en el esquema de comparación" y "expresión lingüística" con los tipos de errores que cometen los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria?

El cuarto objetivo es categorizar a niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria en función de su comprensión de los problemas verbales simples de comparación multiplicativa definidos en función de las dos variables de tarea consideradas. La pregunta que nos hacemos al respecto es:

4. ¿Qué niveles de comprensión alcanzan los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria en problemas verbales simples de comparación multiplicativa?

Capítulo 2

FUNDAMENTACION TEÓRICA

En este capítulo hacemos una revisión de la literatura relacionada con el tema de investigación. En primer lugar, analizamos los enfoques que se han utilizado en la investigación de problemas verbales aritméticos sin distinguir entre problemas de estructura aditiva y estructura multiplicativa. En segundo lugar, nos centramos en los enfoques específicos que se han utilizado en las investigaciones sobre problemas verbales de estructura multiplicativa. En tercer lugar, resumimos hallazgos empíricos sobre la dificultad debida al tipo de estructura semántica. En cuarto lugar, revisamos las investigaciones centradas en la influencia del tipo de números. En quinto lugar, tratamos las investigaciones sobre la comprensión de los problemas verbales de comparación multiplicativa. Por último, revisamos investigaciones que exponen clasificaciones de respuestas incorrectas. Acaba el capítulo con unas conclusiones e implicaciones para el problema de investigación.

2.1 Enfoques de investigaciones en problemas verbales aritméticos

En este apartado damos una perspectiva de cuáles han sido los principales enfoques con los que se ha abordado el estudio de las dificultades en resolución de problemas aritméticos verbales.

La revisión de la literatura sobre investigaciones en resolución de problemas verbales y detección del nivel de dificultad que presentan para los escolares nos ha permitido establecer que estas investigaciones se han realizado bajo cuatro enfoques fundamentales:

1 El enfoque lingüístico,

2 el enfoque de variables estructurales,

3 el enfoque de sentencias abiertas y

4 el enfoque semántico.

2.1.1. El enfoque lingüístico

Hay un gran número de investigaciones en las que se ha prestado especial interés al papel que juega el lenguaje y los aspectos relacionados con él, en la resolución de los problemas artiméticos verbales. En las investigaciones que han tratado las dificultades de resolución de problemas en función del lenguaje, podemos distinguir las que se centraron en:

a) la habilidad lectora,

b) la legibilidad de textos, y

c) factores lingüísticos.

Habilidad lectora

Las primeras investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales se centraron fundamentalmente en el papel que desempeña la lectura. Reed (1949), cita las investigaciones hechas por Lessenger, Wilson, Monroe y Engelhart, en las que se pusieron de manifiesto que si se mejora la habilidad para leer aumenta la habilidad para resolver problemas verbales. Lessenger, en 1925, constató el hecho de que a un adelanto logrado en lectura correspondía un progreso igual en el cálculo. Wilson, en 1922, ensayó un método para mejorar la comprensión de los problemas verbales que consistía en: primero, hacer una serie de preguntas conducentes a aclarar el significado del problema; segundo, hacer una composición tomando el problema como tema y, tercero, dramatizar el problema o presentar la solución por medio de una pantomima. Esta práctica resultó ser favorable. Monroe y Engelhart, en 1933, también obtuvieron que la enseñanza sistemática en la lectura de problemas verbales mejora el rendimiento, sobre todo de los alumnos retrasados. Estos investigadores ejercitaban a los alumnos en definir términos, indicar procesos, formular problemas semejantes y esquematizar las condiciones de los problemas. Obtuvieron sólo una pequeña diferencia en favor del grupo experimental, lo que según Reed pudo ser debido a dos razones: primero, la diferencia entre los métodos de instrucción fue muy pequeña y, segundo, mejorar la habilidad para la lectura más allá de ciertos límites tiene poco valor sobre la habilidad para resolver problemas.

En investigaciones posteriores que siguen este enfoque se acepta ya como hipótesis el que existe correlación entre la habilidad lectora y el éxito en resolución de problemas verbales. Muchas de ellas concluyen dando un coeficiente de correlación significativo (Aiken, 1971).

La dificultad del problema verbal se identifica fundamental-mente en este enfoque con la dificultad de aprendizaje de una nueva lengua. Por ello, se proponen métodos de enseñar a resolver problemas verbales que enfatizan la traducción del enunciado del problema a una relación numérica. En el método de Dahmus, por ejemplo, los estudiantes primero aprenden cómo convertir enunciados del idioma inglés en enunciados matemáticos y, a continuación, resolver las ecuaciones o sistemas de ecuaciones a que dan lugar. Dahmus destaca que su método es especialmente efectivo con los alumnos retardados (Dahmus, 1970).

Legibilidad

En el período comprendido entre 1950 y 1980 gran número de investigadores se han dedicado a investigar el nivel de legibilidad de los libros de texto de matemáticas y han intentado aplicar fórmulas ideadas para medir el nivel de legibilidad de textos corrientes (narrativos u otros) a los textos que aparecen en los libros de matemáticas y particularmente a los problemas verbales (Barnett, 1980).

Dentro de este enfoque Kane (1970) afirma que es inapropiada la aplicación de fórmulas de legibilidad ideadas para el lenguaje natural a textos matemáticos. Kane afirma que los textos de matemáticas están escritos en más de un lenguaje: la lengua materna, la notación indoarábiga de los números, el sistema de notación algebraico, el lenguaje del cálculo de proposiciones, etc. Estos lenguajes aparecen mezclados en mayor o menor medida de unos libros a otros y de unas unidades didácticas a otras. La lengua materna se ve complementada con expresiones que son traducciones de algunos de los lenguajes adicionales que usa la matemática. Por ejemplo, frases tales como "si y solo si", "si ...entonces", "A y B" son traducciones del lenguaje del cálculo proposicional. El significado preciso de estas traducciones deberá ser comprendido por el lector antes de que aparezcan empleadas en un texto, si queremos que entienda el significado del mismo. Kane sostiene la idea de que la resolución de problemas verbales es una mera traducción entre lenguajes.

Más recientemente Paul, Nibbelink y Hoover (1986) hacen un estudio para comprobar si las fórmulas de legibilidad proporcionan información fiable que permita decidir cuándo determinados problemas verbales son apropiados para alumnos de un nivel dado. Las fórmulas de legibilidad que se emplean en esta investigación son la Fórmula de Dale-Chall y la Fórmula de Spache. Los resultados de este estudio no sostienen la hipótesis de que las fórmulas de legibilidad sean útiles para predecir la dificultad de los problemas verbales.

Otros investigadores (Moyer y otros, 1984a, 1984b) han estudiado la dificultad de los problemas en función de formatos distintos y contrapuestos que se supone tienen distinto grado de legibilidad: Problemas verbales versus telegráficos, problemas con dibujos versus verbales versus telegráficos.

2.1.2. El enfoque de variables estructurales

El concepto variable de tarea es utilizado por Kilpatrick (1978) y por otros autores posteriores como Goldin y McClintock (1980). En estos trabajos se refieren a ellas como características de los enunciados de los problemas que asumen un valor particular dentro de un conjunto de valores posibles. Un tipo de variable de tarea correspondiente a la estructura superficial del problema son las variables sintácticas (Goldin y McClintock, 1980). En el enfoque adoptado para estudiar la influencia de las variables de estructura superficial sobre la dificultad del problema, expresada en porcentaje de éxitos, se considera el problema aritmético verbal como un ente independiente del resolutor que puede ser descrito mediante un número finito de características discretas, a las que Nesher (1976) llama variables estructurales. Detectar si cada una de estas variables estructurales tiene influencia significativa o no sobre la dificultad del problema es un objetivo general de este grupo de investigaciones. Sin embargo, no todas persiguen el mismo fin, ni adoptan la misma metodología. Como señalan Puig y Cerdán (1989), los estudios realizados bajo este enfoque pueden clasificarse en dos categorías. Los que pretenden predecir la dificultad del problema en función de todas las variables estructurales que tengan influencia significativa sobre esa dificultad, y los estudios que han tratado de determinar si una variable en particular afectaba de forma significativa al nivel de dificultad expresado en porcentajes, controlando el resto de las variables. Al primer enfoque lo vamos a llamar análisis global de variables y al segundo análisis parcial de variables.

Análisis global

Los investigadores de la primera categoría tratan de expresar la dificultad del problema como la suma de las dificultades aportadas por cada una de las variables estructurales, tales como la longitud del problema, la complejidad gramatical de sus oraciones, la operación con la que resuelve el problema o el orden en el que aparece la información. Los trabajos más significativos dentro de esta categoría del enfoque variables estructurales son los realizados en el Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences de la Stanford University por un grupo de investigadores bajo la dirección de P. Suppes. Además de trabajar en la construcción de un programa de enseñanza por ordenador para aprender a resolver problemas aritméticos verbales, intentan identificar en sus estudios variables estructurales que permitan predecir la dificultad de los problemas aritméticos verbales para los estudiantes (Suppes; Loftus y Jerman, 1969; Jerman y Rees, 1972; Jerman, 1973; Searle, Lorton y Suppes, 1974).

Utilizando la técnica estadística del análisis de regresión lineal pretendían encontrar una recta de regresión que permitiera poder predecir la dificultad de un problema aritmético verbal en función de las variables discretas que tuvieran efecto significativo sobre la dificultad.

Una asunción fundamental de esta aproximación, como lo expresan Jerman y Rees (1972), es que "la estructura (superficial) de los problemas aritméticos por sí misma, para un gran número de mediciones determina su nivel de dificultad". Este grupo de investigadores es consciente de que los factores de aptitud-interacción del estudiante frente al problema son importantes, pero hasta que no haya una teoría que describa convincentemente la naturaleza de tales factores, los componentes del grupo opinan que mediante el análisis de tipo estructural resultará un camino fructífero para la investigación y desarrollo del currículum. La pretensión final es poder formular un conjunto claro de reglas para generar conjuntos de problemas aritméticos de un nivel específico de dificultad. "Los diseñadores de currículum estarían entonces en una mejor posición para controlar el nivel de dificultad cuando preparan materiales para la enseñanza" (Jerman y Rees, 1972).

El enfoque de variables estructurales tiene por referencia básica el trabajo de Suppes, Loftus y Jerman (1969). En esta investigación las variables que se analizan como posibles factores que afectan a la dificultad de un problema son: operaciones, pasos, longitud, secuencia, pista verbal y conversión.

La distinción entre la variable "operaciones" y "pasos" queda reflejada claramente en el siguiente ejemplo: Un problema que pida hallar la media de 11 números tiene 11 pasos y 2 operaciones.

Para reafirmar la importancia de la variable longitud, Suppes, Loftus y Jerman citan investigaciones sobre la adquisición del lenguaje en las que se pone de manifiesto el desarrollo gradual de los niños en la comprensión de sentencias de menor a mayor número de palabras y la dificultad que tienen los niños para retener sentencias.

Las palabras que consideraron en este trabajo como pistas verbales son: para la adición: "y"; para la substracción: "menos" o un comparativo; para la multiplicación: "cada uno"; para la división: "promedio" o "cada uno" apareciendo en la pregunta.

La variable "conversión" se definió para el caso en que los estudiantes tuvieran que recordar de memoria hechos tales como que "1 semana = 7 días".

Se utilizaron oraciones tales como "Cuál fue su ventaja neta en metros" que dejan a los estudiantes sin la menor idea de qué operación usar. Esto sugiere la idea de que la presencia o ausencia de una palabra clave puede ser un potente indicativo de la dificultad del ítem.

Los resultados que obtuvieron en esta investigación muestran que sólo tres de las variables estudiadas: operaciones, secuencia y conversión de unidades, son significativas. El modelo de regresión lineal en esta investigación da cuenta del 45% de la varianza de la probabilidad de que la respuesta sea correcta.

Una constante en los sucesivos trabajos de este enfoque es que los investigadores tratan de identificar nuevas variables que añadir a las investigadas anteriormente. En concreto, Bárbara Searle (Jerman y Rees, 1972), utiliza los datos obtenidos en la investigación anterior para estudiar un conjunto de 13 variables. Dichas variables habían sido tratadas en un contexto CAI donde los estudiantes sólo tuvieron que indicar las operaciones que era necesario realizar, pero no efectuar los cálculos. Jerman y Rees (1972), consideran de interés examinar el efecto de estas mismas variables cuando se aplican a problemas resueltos con lápiz y papel. Ello les llevó a definir otras variables e incrementar hasta 22 la lista de las variables consideradas por B. Searle. En las conclusiones de este trabajo, Jerman y Rees, afirman que sólo cinco de las variables consideradas dan cuenta aproximadamente del 87 % de la varianza de la probabilidad de que la respuesta sea correcta. La que más contaba fue la variable multiplicación con el 32 %, seguida por la variable división con el 23 %, la variable longitud del problema con el 21 %, la variable distractor con el 11%, y finalmente la variable adición-sustracción con el 1%.

El proceso de identificar y recopilar variables estructurales en los enunciados de los problemas aritméticos verbales es llevado a su mayor refinamiento por Jerman y Mirman (1974).

Establecen dos grandes bloques: variables lingüísticas y variables computacionales. Las variables computacionales que consideran en este trabajo son seis de las ya empleadas en los trabajos anteriores (conversión, memoria, longitud, operaciones, NOMC2 y cociente), mientras que las lingüísticas son una recopilación de variables ya utilizadas por otros investigadores a las que añaden otras nuevas no investigadas anteriormente y que agrupan en siete categorías: (1) longitud, (2) partes de la oración, (3) palabras, (4) números, (5) oraciones, (6) elementos de las oraciones, y (7) puntuación-símbolos-caracteres.

Análisis parcial de variables

La segunda categoría de investigaciones analiza el efecto de determinados factores sobre el rendimiento de los sujetos. El análisis de regresión no es la técnica estadística obligada, como ocurría en el caso anterior, y se utilizan técnicas estadísticas alternativas como el análisis de la varianza. Este es el caso de Linville (1976), que estudia la habilidad de resolver problemas verbales en función de la dificultad del vocabulario y de la sintaxis, o el de Nesher (1976) que estudia la influencia de las variables "número de pasos", "presencia o no de información superflua" y "presencia o no de palabras clave".

2.1.3. El enfoque de sentencias abiertas

En este enfoque las investigaciones se caracterizan por clasificar los problemas aritméticos a partir de las sentencias abiertas que subyacen en el problema, con el ánimo de distinguir entre ellas distintos niveles de rendimiento o distintas estrategias en escolares de los primeros niveles. Las investigaciones iniciales se hacen sólo sobre dificultades relativas de sentencias numéricas simples de adición y sustracción, así por ejemplo, Weaver (1971, 1972, 1973) investiga el nivel de rendimiento de escolares de 1º, 2º y 3º grado, al resolver determinadas sentencias abiertas de adición y sustracción. Compara el nivel de rendimiento, medido en porcentajes de aciertos, de los tres grados, el de sentencias análogas de adición y substracción ([]+a=b, []-a=b) el de una sentencia abierta y su simétrica (a-[]=b, b=a-[]), el de sentencias cuya solución es un número natural con otras que carecen de ella, y las diferencias debidas a la posición de la incógnita, es decir, si el dato desconocido es uno de los dos que se componen o bien lo es el resultado.

Posteriormente se incorporan nuevos elementos en las investigaciones sobre sentencias abiertas. Así, Grouws (1972) estudia el rendimiento en sentencias abiertas de adición y sustracción en función del sexo, y además investiga la influencia sobre el rendimiento en una determinada sentencia si ésta está o no acompañada de un enunciado verbal en el que subyace dicha sentencia.

En posteriores trabajos se analizan otros aspectos en función de las sentencias abiertas, es el caso de Grouws (1974), que utiliza la técnica de entrevista individual para aplicar un test elaborado con sentencias abiertas e investigar los métodos (estrategias) que los niños utilizan para resolverlas. La finalidad del estudio fue:

(1) identificar los métodos de solución empleados por los niños y determinar su frecuencia de uso.

(2) indagar la extensión con la que diferentes métodos de solución son usados por los niños para resolver sentencias abiertas similares, y

(3) examinar la relación entre el número de soluciones correctas y tipos de métodos empleados.

El estudio realizado por Lindvall e Ibarra (1980) con niños de 1º y 2º de diferentes comunidades, trata de la identificación de estrategias incorrectas y la frecuencia con la que aparecen. El estudio implica la resolución con lápiz y papel de sentencias abiertas, la habilidad para leerlas, la resolución de problemas verbales en los que estaban implicadas dichas sentencias y la influencia de material manipulativo para demostrar las soluciones obtenidas.

Así mismo, Hiebert (1982) investiga las estrategias que siguen los escolares de primer grado al resolver problemas verbales de adición y sustracción con datos menores que 10. Los problemas utilizados fueron seis pertenecientes a la estructura semántica de cambio, correspondiendo tres a unión y tres a separación. En cada caso las tres posibilidades surgen al variar sistemáticamente la posición de la incógnita. A los niños se les daba la posibilidad de poder utilizar material manipulativo (cubos pequeños) como ayuda para resolver el problema. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que la posición de la incógnita tiene una influencia sustancial en la conducta que siguen los niños.

En un trabajo nuestro sobre resolución de problemas verbales aritméticos de comparación de estructura multiplicativa (Castro, Rico, Batanero, y Castro, 1991; Castro, 1991) ponemos de manifiesto también que la posición de la incógnita tiene efecto significativo sobre el nivel de dificultad, medido en porcentajes de aciertos, con niños de 10 a 12 años.

Como conclusión de estos estudios podemos decir que dentro de las investigaciones previas sobre dificultades en problemas aritméticos verbales de adición y sustracción, la variable posición de la incógnita en la sentencia abierta subyacente en el problema, cuyos valores representan la identidad de la cantidad desconocida, se ha mostrado como una de las variables más interesantes y que con más claridad ha establecido diferencias de dificultad entre problemas.

2.1.4. El enfoque semántico

Para resolver un problema aritmético enunciado verbalmente (PAEV) es necesario conocer el significado del texto en el que está enunciado. En un PAEV todas las palabras del texto de su enunciado no juegan el mismo papel desde el punto de vista de su resolución. Se pueden distinguir, como hacen Puig y Cerdán (1989) "las que desempeñan algún papel en la elección de la operación y las que no desempeñan papel alguno. El papel de estas últimas suele limitarse a conectar el enunciado del problema con la realidad, o a delimitar el contexto del problema". Las palabras -o grupos de palabras- que influyen en la elección de la operación que hay que realizar se denominan palabras clave.

En las investigaciones de PAEV que se han centrado en el estudio del significado han existido dos tendencias claramente diferenciadas: las que los han estudiado en base a significaciones parciales del texto y las que lo hacen globalmente, considerando el texto del problema como un todo.

Dentro de las investigaciones sobre significaciones parciales se han utilizado variables de contenido semántico con la creencia de que la resolución correcta de un PAEV depende de la asociación adecuada entre una "palabra clave" y la operación que "representa". Por el contrario, el análisis global, aunque no margina el papel de las palabras clave a la hora de resolver el problema, sin embargo no considera a éstas como los únicos determinantes en la interpretación del significado del problema; hace intervenir otros factores que convierten en relativa su aportación. Las investigaciones que se centran en el análisis global del problema son investigaciones de tipo estructural, en las que se admite que el resolutor utiliza determinados esquemas conceptuales para comprender el significado del texto del problema. Puig y Cerdán (1989) califican de ingenuo el enfoque del análisis basado en palabras clave y mantienen que el enfoque global, es el más adecuado y el que tiene mayor actualidad.

Palabras claves

Las variables de contenido semántico describen los significados de palabras y expresiones matemáticas que aparecen en el enunciado del problema y que se supone tienen una influencia decisiva a la hora de elegir la operación con la que solucionarlo. Webb (1980) considera que estas variables de contenido semántico se han utilizado en la investigación para "describir los significados del lenguaje natural y del lenguaje técnico que pueden influir en el nivel de dificultad en la resolución de problemas", y las divide en dos categorías: palabras clave y vocabulario matemático.

Para Webb la razón de ser de estas variables en la investigación es la siguiente: Durante su período de escolarización los alumnos deben resolver una gran cantidad de problemas que están enunciados verbalmente, es decir, que están expresados en el lenguaje natural. Para resolver estos problemas verbales el sujeto debe comprender el enunciado verbal y traducirlo a expresiones matemáticas que representen la estructura del problema. La investigación sobre palabras clave recibió un fuerte impulso con los trabajos del Grupo de Stanford sobre variables estructurales. Así Suppes y otros (1969), intentando determinar factores que afecten a la dificultad de un problema, investigaron un conjunto de seis variables, una de las cuales es la presencia o no de palabras clave en los enunciados de los problemas. Como hemos señalado anteriormente, las palabras clave que utilizaron fueron "y" para la suma, "menos" o un comparativo para la resta, "cada uno" para la multiplicación, "promedio", o "cada uno" colocado en la sentencia interrogativa del enunciado del problema para la división. Los resultados obtenidos por Suppes y sus colaboradores muestran que no hallaron efectos significativos de regresión de esta variable para la dificultad de los problemas, es decir, que la presencia o no de palabras clave no explicaba una proporción suficiente de la varianza observada.

Jerman (1973) prestó especial atención a las palabras clave y definió varias variables a partir de ellas, tratando de dilucidar si la presencia o no de palabras clave representaba una mayor o menor dificultad en el problema. No obtuvo resultados significativos, salvo cuando actúan como distractores, de que la ausencia o presencia de una palabra clave en un problema afecta a su nivel de dificultad.

Nesher y Teubal (1975), desde un enfoque del procesamiento de la información, estudiaron la influencia de palabras clave en el proceso de traducción desde la formulación verbal del problema hasta la expresión matemática del mismo. En concreto, investigaron en problemas que se pueden resolver con sumas y restas, si la elección de una de estas operaciones para solucionar el problema está influida por la presencia de una palabra clave en el enunciado del mismo. Las palabras clave aparecen unas veces empleadas como pistas verbales de la operación a realizar y otras como distractores. Los resultados mostraron un menor rendimiento de los sujetos en los problemas donde las palabras clave actuaban como distractores. La conclusión que sacó Nesher de este trabajo es que "si una palabra no tiene un unívoco y definitivo significado en todo problema verbal, no puede ser usada como palabra clave. Hay que hacer comprender las relaciones matemáticas subyacentes que están expresadas en la formulación verbal" (Nesher, 1976).

Nesher (1976) estudió la influencia de tres variables en la dificultad de problemas aritméticos, una de ellas es "palabras clave". En esta investigación las palabras clave no actúan como distractores. Los datos obtenidos fueron tratados estadísticamente mediante el análisis de varianza. De este análisis resultó que la variable "palabras clave" no tenía efecto significativo sobre la dificultad de resolución de los problemas estudiados por ella.

En una investigación realizada por otros miembros de nuestro grupo de investigación (González y otros, 1985) se estudió el papel de los verbos de acción como determinantes de la operación que hay que elegir para resolver problemas aritméticos simples y realizamos una clasificación de verbos por operación.

Las investigaciones sobre vocabulario matemático se basan en el supuesto de que existe distinción entre el significado de una palabra usada en el lenguaje usual y la misma palabra usada con significado matemático. Investigadores como Kane (1970), sostienen que la lectura de textos matemáticos requiere una habilidad especial diferente de la requerida para leer textos ordinarios, por lo que necesita de una particular instrucción.

El enfoque de esquemas mentales

Los enfoques teóricos más recientes utilizados en las investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales se basan en el análisis del esquema mental que utiliza el resolutor cuando resuelve un problema verbal. Estos enfoques de esquemas mentales se enraizan en la tradición psicológica de Bartlett, centrada en la cuestión de carácter cognitivo sobre cómo se organiza el conocimiento verbal en la mente de las personas. Son pues enfoques cognitivos de la resolución de problemas verbales que consisten en intentar analizar este tipo de conocimiento verbal en sus partes, e indicar la estructura en la que se enlazan éstas. Por ello, en este enfoque, una categoría de problemas verbales es un modelo estructural de conocimiento verbal de una persona que consta generalmente de elementos y relaciones entre esos elementos.

En la segunda mitad de la década de los setenta y primeros años de los ochenta, varios investigadores estuvieron empleando, por separado, el enfoque de esquemas mentales en sus investigaciones sobre problemas aritméticos verbales simples de estructura aditiva, y clasificaron los problemas en categorías semánticas similares. Entre ellos destacan las aportaciones de Vergnaud y Durand (1983), Riley, Greeno y Heller (1983), Carpenter y Moser (1982), y Nesher (1982).

En este período las investigaciones sobre problemas aritméticos se dividen para su estudio en dos campos: el campo de la estructura aditiva y el campo de la estructura multiplicativa. Los problemas de estructura aditiva son aquellos cuyas soluciones implican solamente sumas y restas. Mientras que los problemas de estructura multiplicativa implican sólo multiplicaciones y divisiones. En lo que sigue vamos a tratar por separado las investigaciones realizadas sobre la estructura aditiva de las realizadas sobre estructura multiplicativa.

Dentro de este enfoque estructural se pueden distinguir dos corrientes:

a) la corriente impulsada por el psicólogo francés Gerard Vergnaud, que utiliza el cálculo relacional como concepto esencial para comprender el funcionamiento cognitivo del sujeto, y

b) la corriente basada en las categorías semánticas (unir, separar, etc) de los problemas.

El cálculo relacional

Para Vergnaud el estudio clásico de los problemas de aritmética elemental en base a la diferenciación según las operaciones de adición, substracción, multiplicación y división crea dificultades y no caracteriza ciertas relaciones numéricas que aparecen en los enunciados de los problemas. Por ello, distingue, basándose en la noción de campo conceptual, entre el campo conceptual de las estructuras aditivas y el de las estructuras multiplicativas.

Una noción clave en el enfoque de Vergnaud es si los datos del problema expresan, o no, una acción que se desarrolla en el tiempo. Para realizar esta distinción utiliza los conceptos de estado (medida) y de operador (transformación).

En base a estas nociones realiza una categorización de los problemas aritméticos de estructura aditiva en cinco grandes tipos (Vergnaud y Durand, 1983):

1) Dos medidas que se componen en una tercera,
2) Una transformación que opera sobre una medida para dar una medida,
3) Dos transformaciones que se componen en una tercera,
4) Una transformación que opera sobre un estado relativo para dar otro estado relativo,
5) Dos estados relativos que se componen en un tercero.

Basándose en esta clasificación trató de establecer una jerarquía por el nivel de dificultad que los diversos tipos de problemas plantean a los niños. Así obtuvo que los problemas de la categoría tercera (composición de transformaciones) son más difíciles que los de la categoría segunda (transformación entre estados).

Vergnaud considera además que cada una de estas categorías, da lugar a varias clases de problemas de diferente grado de dificultad según la identidad -posición- de la incógnita, la dimensión absoluta o relativa de los números, que sean enteros o decimales, según el orden de presentación, la estructuración sintáctica de los enunciados, etc.

En un trabajo posterior (Vergnaud, 1982) este investigador añade otra categoría a las definidas en 1976 y las formula del siguiente modo: 1) composición de dos medidas, 2) transformación entre dos medidas, 3) relación estática entre dos medidas, 4) composición de dos transformaciones, 5) transformación entre dos relaciones estáticas, 6) composición de dos relaciones estáticas.

No obstante, hay que señalar que sus trabajos en estructuras aditivas han recibido menor atención que los que ha realizado en el campo de las estructuras multiplicativas, cuyo trabajo de 1983 es una referencia básica al respecto.

Las categorías semánticas de problemas aditivos

En un trabajo presentado por Heller y Greeno en 1978 sobre procesamiento semántico de los problemas verbales (Heller y Greeno, 1979), distinguen tres esquemas que representan estructuras alternativas de información cuantitativa relativas a problemas de adición y substracción, a las que llaman Causa/Cambio, Combinación, y Comparación. Este análisis semántico es coincidente con el realizado por Nesher y Katriel en 1978 (Nesher, 1982) aunque utilizan un nombre distinto para algunas de las categorías.

Los problemas de Causa/Cambio son los que describen situaciones en las que algún evento cambia el valor de una cantidad. Por ejemplo, "Juan tiene 5 bolas; José le da 3 más," manifiesta un cambio en la cantidad de objetos poseídos por una persona como resultado de una acción. El esquema abstracto subyacente contiene una cantidad inicial, una acción que implica un cambio de valor, bien sea de aumento o de disminución, y una cantidad final resultante. La dirección del cambio así como la identidad de la cantidad desconocida determinan la operación matemática necesaria para resolver el problema. En función de estas dos variables hay seis posibles problemas de Causa/Cambio. Esta categoría es similar a la categoría que Vergnaud denomina "transformación entre dos medidas". Carpenter, Hiebert y Moser (1981) y Carpenter y Moser (1982) la denominan en estos trabajos previos como problemas de "unión y de separación", y Nesher (1982) la denomina categoría "dinámica". Actualmente hay común acuerdo entre los investigadores en denominar a esta categoría como problemas de estructura semántica de cambio.

Los problemas de combinación se basan en la relación estática existente entre un conjunto total y dos subconjuntos disjuntos cuya unión sea el conjunto total. Por ejemplo, "Juan tiene 4 caramelos. Ana tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?." Según la identidad de la cantidad desconocida hay dos tipos de problemas de combinación: se conoce el tamaño de los dos subconjuntos y se pide el tamaño de la unión, o se conoce uno de los subconjuntos y su unión y se pide el tamaño del otro subconjunto. Esta categoría coincide con la que Vergnaud llama "composición de dos medidas". Carpenter, Hiebert y Moser (1981), y Carpenter y Moser (1982) la llaman "parte-parte-todo". Nesher (1982) la llama categoría "estática". Actualmente esta categoría de problemas es comúnmente denominada como problemas de estructura semántica de combinación.

El tercer esquema, el de comparación, al igual que el de cambio, implica relaciones estáticas, es decir, relaciones en las que no hay implícita una acción. Los problemas de comparación implican la comparación de dos cantidades, una de los cuales es la cantidad referente y la otra la comparada o referido. La tercera cantidad es la diferencia, o cantidad en la que la más grande excede a la otra. Por ejemplo, "María tiene tres cintas. Susana tiene 8 cintas. ¿Cuántas cintas tiene Susana más que María?." Según que la dirección de la comparación (más que o menos que) y la cantidad desconocida (referente, referido o diferencia) surgen seis tipos de problemas de comparación. Esta categoría se corresponde con la que Vergnaud (1982) llama "relación estática entre medidas", Carpenter, Hiebert y Moser (1981), Carpenter y Moser (1982), y Nesher (1982) denominan también esta categoría como problemas de estructura semántica de comparación, que es la que se usa actualmente.

Carpenter, Hiebert y Moser (1981), Carpenter y Moser (1982, 1983), consideran además la categoría de igualación, híbrida de las de cambio y comparación. Se trata de problemas en los que se demanda la acción que hay que realizar sobre una cantidad para hacerla igual a otra. Por ejemplo, "Juan tiene 50 pesetas. Antonio tiene 20 pesetas. ¿Cuántas tiene que perder Juan para tener tantas como Antonio?." Según que la acción a realizar se aplique sobre la cantidad mayor o menor y según cuál sea la identidad de la cantidad desconocida en la igualación surgen seis tipos de problemas de igualación.

Las categorías semánticas se han aplicado a problemas simples de adición y substracción que se suponen son apropiados para escolares de los primeros grados, en los que se utilizan sólo números naturales. En esto se diferencia del enfoque adoptado por Vergnaud, que trata de hacer una clasificación más exhaustiva en la que intenta englobar tipos de problemas en un período más amplio del currículum escolar, y no sólo de los primeros grados. Como consecuencia de ello las categorías elaboradas por Vergnaud abarcan problemas aritméticos verbales con clases más amplias de números, como por ejemplo, los números enteros.

Durante la década de los ochenta numerosos investigadores han estudiado la resolución de problemas de estructura aditiva en función de estas categorías de problemas. Buena prueba de ello lo podemos encontrar en los trabajos de Carpenter, Hiebert y Moser (1981); Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984); Riley, Greeno y Heller (1983); Nesher, Greeno y Riley (1982); Nesher (1982); Kintsch y Greeno, (1985), De Corte y Verschaffel (1985a, 1985b, 1987a); Bermejo y Rodríguez (1987a, 1987b). Gran número de ellas estudian el nivel de dificultad en función de las categorías semánticas y en función de la identidad de la cantidad desconocida en el problema.

Entre los resultados sobre dificultades más difundidos dentro de este enfoque se encuentran los obtenidos por Riley y otros (1983) sobre las tres primeras categorías semánticas. El orden de dificultad que obtienen para las categorías es: cambio, combinación y comparación. Pero esta ordenación se complica cuando hacen intervenir la variable identidad de la cantidad desconocida (posición de la incógnita). Dentro de una misma categoría de problemas hallan casos de bastante diferencia de dificultad según esta última variable:

-En la categoría de cambio los problemas más fáciles son los de la cantidad final desconocida bien sea la acción de aumento o de disminución, mientras que los más difíciles dentro de esa categoría corresponden a aquellos en los que se desconoce la cantidad inicial.

-En problemas de combinación los más fáciles son aquellos en los que se pide hallar la cantidad total, frente a los que piden hallar alguna de las dos partes.

-En problemas de comparación el tipo más difícil es cuando se pide hallar el referente.

Además de diferenciarse por el porcentaje de éxitos que obtienen los escolares de los primeros grados, las categorías semánticas provocan en los escolares procesos distintos de actuación (Carpenter y Moser, 1983). Incluso De Corte y otros (1990) observan diferencias entre las categorías semánticas en función de los movimientos oculares de los niños durante la resolución de este tipo de problemas. Carpenter, Moser y Bebout (1988) estudian la incidencia de la estructura semántica de los problemas verbales aditivos de un paso sobre la sentencia abierta que le asignan los niños. Su conclusión es que "la estructura semántica de los problemas verbales influye directamente sobre la sentencia numérica que los niños escriben para representarlos" (p.354). En otros trabajos dirigidos por Carpenter, por ejemplo, Bebout (1990) y Carey (1991), dentro de las categorías semánticas se utilizan las sentencias abiertas para investigar las dificultades que tienen los niños para representar estos problemas simbólicamente.

2.2. La estructura multiplicativa como área de investigación

Los problemas que requieren de las operaciones de multiplicar o dividir para su resolución tienen la misma estructura matemática subyacente, a la que se conoce como "*estructura multiplicativa*". Como en el caso de la estructura aditiva, las investigaciones sobre la estructura multiplicativa abarcan una amplia variedad de aspectos. Muchos de ellos se han estudiado de forma conjunta con los problemas de estructura aditiva y han sido ya citados en las secciones precedentes. Otros se han centrado en investigar aspectos distintivos y específicos de la estructura multiplicativa. Entre ellos:

-Investigaciones sobre la dificultad de las combinaciones básicas de la multiplicación y de la división como las citadas en Resnick y Ford (1981), y Jerman (1970).

-Investigaciones que comparan la efectividad de métodos de enseñar las combinaciones numéricas básicas (Cook y Dossey, 1982; Cooney, Davis y Hirstein, 1981; Thornston, 1978).

-Investigaciones sobre enseñanza del algoritmo de la multiplicación (Heege, 1978, 1983, 1985).

-Investigaciones que comparan la dificultad relativa de las sentencias abiertas

(Grouws y Good, 1976).

-Investigaciones sobre la enseñanza del concepto de razón (Van den Brink y Streefland, 1979; Hart, 1984; Onslow, 1986; Streefland, 1984, 1985).

-Investigaciones sobre el desarrollo del concepto de razón y del razonamiento proporcional en los niños (Hart, 1988; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Noelting, 1980a, 1980b; Tournaire, 1986; Tournaire y Pulos, 1985).

-Investigaciones para enseñar la multiplicación con comprensión (Lampert, 1986).

-Investigaciones sobre el desarrollo inicial de los conceptos multiplicativos y estudio de las estrategias iniciales (Anghileri, 1989; Boero, Ferrari y Ferrero, 1989; Kouba, 1987, 1989; Mulligan, 1992; Ricco, 1982; Steffe, 1988, 1990).

En esta sección nos referimos sólo a la investigación sobre resolución de problemas verbales en el campo conceptual de la estructura multiplicativa. Hay puntos en común en las investigaciones hechas sobre las estructuras aditivas y las multiplicativas, como el énfasis en la clasificación semántica de los problemas, pero también hay diferencias importantes. Greer (1987b, pp. 65-66) y De Corte y otros (1988, pp. 197-198) señalan los siguientes contrastes:

a) la edad de los niños: mientras que los trabajos en resolución de problemas verbales de adición y substracción se han realizado principalmente con niños entre 5-8 años de edad, los sujetos utilizados en los estudios de multiplicación y división han sido en su mayoría estudiantes entre 10 y 15.

b) la técnica de investigación: en la estructura aditiva los métodos de investigación más empleados han sido las entrevistas individuales y la simulación con computador, mientras que en la estructura multiplicativa la técnica más empleada ha sido test de lápiz y papel en la que se enfatiza si el niño escoge o no la operación correcta. Unas veces se le pide a los niños que hagan los cálculos debajo del enunciado y en otras investigaciones que escoja entre varias opciones. También se han utilizado entrevistas individuales.

c) los tipos de números: en contraste con los problemas de estructura aditiva, el trabajo en la estructura multiplicativa no presta sólo atención a la estructura del problema como variable, sino también a los tipos de números usados.

La revisión de la investigación sobre este tópico empieza con la descripción de los marcos teóricos que se han utilizado para clasificar problemas de estructura multiplicativa basados en estructuras semánticas.

2.2.1. Categorías semánticas de problemas multiplicativos

La clasificación de los problemas verbales de estructura multiplicativa no está tan bien establecida como la de los problemas de estructura aditiva. Se han realizado varias clasificaciones desde el punto de vista semántico. Entre ellas cabe citar las de Hendrickson (1986), Nesher (1988), Schwartz (1981, 1988) y Vergnaud (1983, 1988).

Aunque difieren en su terminología estas clasificaciones poseen categorías básicas comunes.

Vergnaud (1983, 1988) define la noción de campo conceptual como

un campo conceptual es un espacio de problemas o de situaciones-problema en los que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión (Vergnaud, 1981, p. 217).

Centra su interés fundamentalmente en dos campos conceptuales las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas

considerados como conjunto de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo, traslación) o de tipo multiplicativo (tales como multiplicación, división, fracción, razón, semejanza) (Vergnaud, 1983, p. 129).

Vergnaud reconoce que las estructuras multiplicativas se basan en las aditivas, pero él está interesado en los aspectos intrínsecos de la estructura multiplicativa no reductibles a aspectos aditivos. El desarrollo de la comprensión de este campo conceptual abarcaría, según él, desde los 7 a los 18 años.

Clases de estructuras multiplicativas

El análisis que hace Vergnaud (1983) de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división muestra que los problemas "simples" de este tipo se sitúan casi siempre en el marco de dos grandes estructuras:

a) La estructura del *isomorfismo de medidas*, y

b) La estructura del *producto de medidas*.

La otra gran estructura que considera Vergnaud, la *proporción múltiple*, se refiere a problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes y que son, por tanto, problemas compuestos que dejamos al margen del estudio previo sobre problemas simples de estructura multiplicativa. Lo que sí podemos decir es que estos problemas de proporción múltiple reúnen características de las otras dos categorías.

a) <u>El Isomorfismo de Medidas</u>

El isomorfismo de medidas es una estructura que engloba a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. En ella se incluyen los clásicos problemas tipo referidos a: *repartos iguales* (personas y objetos), *precios constantes* (bienes y costos), movimiento uniforme (espacio y velocidad), densidades constantes a lo largo de una línea (árboles y distancias), en una superficie o en un volumen.

Para representar de forma cómoda esta estructura Vergnaud utiliza las tablas de correspondencia:

M_1	M_2
x	y = f(x)
x'	y'= f(x')

en las que la función f: $M_1 \longrightarrow M_2$ es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1 y M_2.

Vergnaud (1983) identifica cuatro grandes subclases de problemas dentro de la estructura de isomorfismo de medidas: una subclase multiplicación, dos subclases de división y una cuarta subclase que llama problemas generales de regla de tres. Estas subclases las analiza desde dos puntos de vista:

a) El punto de vista de la función lineal

$$x \longrightarrow f(x) \qquad f(x) = ax$$

que en su expresión clásica: y=ax pone de manifiesto la relación entre tres magnitudes; ejemplo, s=vt en el caso del movimiento uniforme.

b) El punto de vista de las propiedades de homomorfismo

$$f(x+x') = f(x)+f(x')$$
$$f(\alpha x) = \alpha\, f(x)$$

Para Vergnaud

> *estos dos análisis, complementarios el uno del otro, permiten distinguir diferentes clases de problemas y diferentes procesos de solución y es erróneo no distinguir entre ellos porque no traducen las mismas propiedades y no tienen el mismo estatuto para el alumno*. (Vergnaud, 1978, p. 334).

<u>Subclase de Multiplicación</u>

Esta subclase de problemas responde al esquema específico

M_1	M_2
1	a
b	x

Ejemplo: Juan compra 6 caramelos al precio de 12 pesetas cada uno. ¿Cuánto tiene que pagar?.

a = 12, b = 6, M_1=[número de caramelos], M_2=[pesetas].

Ante un problema de este tipo Vergnaud (1983) dice que los niños pueden optar por dos opciones:

a) emplear una ley binaria, o

b) emplear una ley unaria.

Algunos niños reconocen que la situación es multiplicativa y por tanto multiplican 6 y 12 para encontrar la respuesta. En este caso están empleando una ley binaria.

Otros niños, especialmente los más jóvenes, utilizan una operación unaria. Esto lo hacen de dos modos:

a) usando el operador escalar

$$a \xrightarrow{.b} x$$

que es adimensional y que es una razón entre cantidades de una misma magnitud.

b) usando un operador función

$$b \xrightarrow{.a} x$$

que representa el coeficiente de la función lineal y cuya dimensión es el cociente de otras dos dimensiones.

Primer Tipo de la Subclase de División

El primer tipo de la subclase división consiste en hallar el valor unidad f(1) como refleja el siguiente esquema

M_1	M_2
1	x=f(1)
a	b=f(a)

Esta clase de problemas puede resolverse aplicando un operador escalar adimensional

$$b \xrightarrow{/a} x$$

Según Vergnaud, puesto que la inversión de una relación es difícil, algunos niños prefieren hallar x tal que x.a=b (en su caso por ensayo y error).

Segundo Tipo de la Subclase División

El segundo tipo de problema de división queda reflejado en el siguiente esquema

M_1	M_2
1	a=f(1)
x	b=f(x)

y consiste en hallar x conociendo f(x) y f(1).

Esta clase de problemas puede resolverse invirtiendo el operador "a" de la función de proporcionalidad directa y aplicarlo a "b".

$$x \xleftarrow{/a} b$$

según Vergnaud (1983), este procedimiento es difícil para los niños, no sólo a causa de la inversión, sino también porque el operador inverso tiene una dimensión y los niños prefieren hallar el número de veces que a cabe en b, obtener así el operador escalar y aplicarlo en la magnitud M_1.

Problemas de Regla de Tres: Caso General

El caso general de los problemas de regla de tres viene esquematizado por

M_1	M_2
a	b
c	x

En estos problemas intervienen tres datos a,b,c; por tanto, no son problemas simples de estructura multiplicativa. Vergnaud los utiliza para hacer constar al respecto que:

> *debería quedar ya claro que los problemas de multiplicación y división son casos simples de los problemas más generales de regla de tres y se distinguen de estos en que uno de los cuatro términos implicados es igual a uno* (Vergnaud, 1983, p. 133).

b) El Producto de Medidas

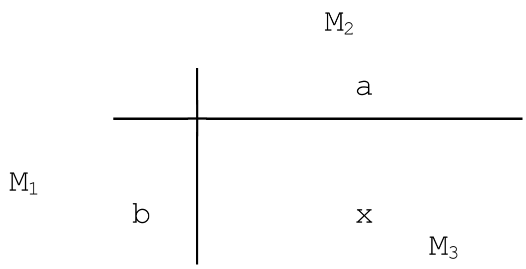
El producto de medidas es una estructura que engloba a tres magnitudes M_1, M_2 y M_3, de tal manera que una de ellas, M_3 es el producto cartesiano de las otras dos

$$M_1 \times M_2 = M_3$$

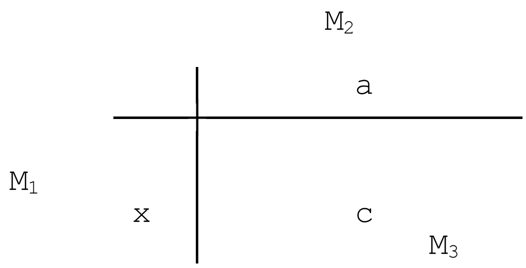
Esta estructura describe un buen número de problemas relativos a áreas, volúmenes, y a productos cartesianos de conjuntos discretos. Su forma general es una relación ternaria entre tres cantidades una de las cuales está definida como un par ordenado cuyas componentes son las otras dos cantidades. Por ello la forma más natural de representar esta relación ternaria es mediante una representación cartesiana.

Dentro de la estructura producto de medidas se pueden distinguir dos subtipos de problemas:

<u>Multiplicación</u>: encontrar la medida producto conocidas las medidas que se componen. Esquemáticamente:



<u>División</u>: encontrar una de las cantidades elementales que se componen, conociendo la otra y la cantidad compuesta. Esquemáticamente:



Dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas se pueden distinguir subclases de problemas sin más que considerar el tipo de magnitud elemental implicado: discretadiscreta, continua-continua; o bien el tipo de números implicados: enteros, decimales, números grandes, números inferiores a 1, y también teniendo en cuenta los conceptos implicados.

Vergnaud utiliza la noción de teorema en acción para describir *las relaciones matemáticas que tienen en cuenta los estudiantes cuando escogen una operación o secuencia de operaciones para resolver un problema* (Vergnaud, 1988, p. 144)

Estructura multiplicativa y simetría

La distinción que hace Vergnaud entre isomorfismo de medidas y producto de medidas la expresan Bell y otros (1989) en función de si el producto es o no simétrico. En el producto de medidas, (por ejemplo, en los problemas de áreas) las dos cantidades elementales (el largo y el ancho) juegan el mismo papel y pueden ser intercambiadas. En este caso Bell y colaboradores consideran que el producto puede ser denominado simétrico. Sin embargo, en el isomorfismo de medidas las dos cantidades que aparecen como datos en el problema desempeñan papeles distintos. Por ejemplo, si tenemos 3 cajas y cada una contiene 4 lápices, la estructura consiste en repetir 3 veces un conjunto de 4 objetos, o 4+4+4; y según este grupo de investigadores no tiene sentido expresar esta estructura como 4 lotes de 3 elementos. En este caso dicen que la multiplicación es asimétrica. Otro ejemplo, lo constituirían los problemas de velocidad y tiempo empleado. En estos problemas uno de los datos actúa como multiplicando y el otro como multiplicador, pero no son intercambiables.

Bell y otros (1989) estudian sólo problemas multiplicativos asimétricos y hacen previamente una clasificación de ellos en siete categorías, que hemos recogido en la Tabla 2.1. A cada tipo de problema de multiplicar de la Tabla 2.1, Bell y otros (1989) consideran que hay asociados dos tipos de problemas de dividir. Un tipo corresponde a la división como partición, en el que se dan la cantidad total y el número de partes, hay que hallar el tamaño de cada parte; y el segundo tipo de problemas de división cuotición, en el que se dan como datos el total y el tamaño de cada parte, debiéndose hallar el número de partes.

El enfoque de estructura de cantidades

Schwartz (1988) resume los supuestos de este enfoque teórico de la siguiente manera:

1. Apuesta por la matemática como una actividad de modelización y piensa que los problemas aritméticos contribuyen a proporcionar a los estudiantes un conjunto de herramientas analíticas con las que comprender mejor el mundo en que vive.

Tabla 2.1 *Clasificación de los problemas multiplicativos asimétricos según Bell y otros (1989)*

Estructura	*Problema Multiplicativo*
Grupos múltiples	*Hay 3 cartones de huevos a 6 huevos cada uno. ¿Cuántos huevos hay en total?.*
Medida repetida	*Un sastre necesita 3 piezas de tela de 4.6 metros de largo. ¿Cuánta tela comprará?.*
Razón (Tasa)	*Un hombre camina a la velocidad de 4.6 kms/h durante 3.2 horas. ¿Cuánto caminará?.*
Cambio de unidad (la misma unidad)	*Una fotografía se amplia según el factor 4.6. Si la altura original era 3.2 pulgadas, ¿cuánto medirá la altura de la fotografía ampliada?.*
Cambio de unidad (unidades distintas)	*La maqueta de un bote está hecha a escala de 4.6 metros por pulgada. Si la maqueta es de 3.2 pulgadas de larga, ¿cuál es la longitud del bote?.*
Mezcla (con la misma unidad)	*Un pintor obtiene un determinado color usando 4.6 veces más rojo que amarillo. ¿Cuánta pintura roja necesitará para obtener 3.2 litros de amarillo?.*
Mezcla (unidades distintas)	*Se mezclan 4.6 libras de polvo por galón de agua. ¿Cuántas libras se necesitarán para mezclar con 3.2 galones?.*

En esta concepción de la matemática como una actividad de modelización juega un papel fundamental la interpretación física del entorno modelizado y como consecuencia las cualidades físicas de ese entorno a las que llamamos magnitudes.

2. Las cantidades usadas en matemáticas se derivan de las acciones de *contar* y de *medir*, dependiendo de que estemos cuantificando propiedades continuas o discretas del entorno. Alternativamente, pueden ser derivadas de contar o medir cantidades por la sucesiva aplicación de operaciones matemáticas que estén definidas.

Todas las cantidades que surgen en el curso de medir, o en el subsecuente cálculo con estas cantidades, tienen unidades de referencia y Schwartz se refiere a ellas como *cantidades adjetivadas*. Un axioma de este enfoque es que esta unión entre números y sus unidades de referencia es un componente esencial de las matemáticas usadas para el propósito de modelizar.

3. En el conjunto de las cantidades resultantes de contar o medir es posible definir un conjunto básico de operaciones binarias. Estas operaciones pueden ser usadas para generar nuevas cantidades que pueden tener o no nuevas unidades de medida. La composición de dos cantidades matemáticas para producir una tercera cantidad derivada puede tomar cualquiera de las dos formas, *composición conservando el referente* o *composición transformando el referente*.

4. La composición de dos cantidades similares para producir una tercera del mismo tipo es fundamentalmente la manera de componer cantidades que las operaciones aritméticas de adición y sustracción proporcionan. Tales composiciones se refieren como composición preservando el referente.

5. La composición de dos cantidades, similares o no, para producir una tercera cantidad que es, en general, no similar a las dos cantidades originales se conoce como composición transformando el referente. La multiplicación y la división son composiciones que transforman el referente.

6. Las composiciones que transforman el referente obligan a distinguir entre dos tipos de cantidades en cierto modo diferentes, cantidades *extensivas* y cantidades *intensivas* (Schwartz, 1988, p.41)

Las cantidades que aparecen en los problemas de estructura multiplicativa pueden ser extensivas o intensivas. Las cantidades extensivas se pueden clasificar en discretas (D) y continuas (C) y puesto que, en general, las intensivas son el cociente indicado de dos extensivas, podemos clasificarlas en los cuatro tipos siguientes:

a) Cantidades intensivas de la forma D/D.

b) Cantidades intensivas de la forma C/D

c) Cantidades intensivas de la forma D/C

d) Cantidades intensivas de la forma C/C

Los enunciados de los problemas de estructura multiplicativa simples contienen dos cantidades conocidas, los datos, y una cantidad por hallar. Cada una de ellas puede ser de uno de los tipos citados. Pero este aspecto es secundario en la clasificación que hace Schwartz. El aspecto fundamental es la distinción entre cantidades extensivas y cantidades intensivas. A partir de ella establece tres tipos de ternas de cantidades que corresponden a categorías semánticas distintas:

1. Problemas asociados a la terna (I,E,E'). Estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama *isomorfismo de medidas*. Hay tres tipos de problemas asociados a esta terna:

IxE=E'   E'/E=I   E'/I=E

2. Problemas asociados a la terna (E,E',E"). Estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama *producto de medidas*. A esta terna corresponde el problema ExE'=E" y las divisiones asociadas: E"/E=E' o E"/E'=E.

3. Problemas asociados a la terna (I,I',I"). A esta terna corresponde el problema IxI'=I" y las divisiones asociadas.

En sus primeros trabajos (Quintero, 1981, 1986; Schwartz, 1981) Schwartz considera tres tipos de cantidades: extensiva, intensiva y cuantificador (escalar), con lo cual el número de tipos de problemas era mayor. Sólo para multiplicación había seis combinaciones básicas:

a) cuantificador x cuantificador
b) extensiva x cuantificador
c) intensiva x cuantificador
d) intensiva x extensiva
e) intensiva x intensiva
f) extensiva x extensiva

en el trabajo posterior Schwartz considera el cuantificador como un tipo de cantidad intensiva.

En los trabajos de Kaput (1987, 1989) se pueden encontrar más detalles sobre esta clasificación de los problemas de estructura multiplicativa.

El enfoque proposicional

Para Nesher (1988), los análisis tanto de Vergnaud como de Schwartz se apoyan en el concepto físico de análisis dimensional. La diferencia entre ellos consiste en que Schwartz considera que en la estructura multiplicativa hay una relación entre tres cantidades mientras que Vergnaud considera que la relación es cuaternaria. Nesher se sitúa en una perspectiva lingüística y, al igual que hizo con los problemas de estructura aditiva (Nesher y Katriel, 1977), en primer lugar formula las condiciones lógicas de los textos correspondientes a los problemas de multiplicar o dividir, para buscar después las relaciones semánticas entre las proposiciones subyacentes en el texto.

Distingue tres grandes categorías de PAEV de estructura multiplicativa:

a) Problemas que denomina "*mapping rule*" y que Puig y Cerdán (1989) han traducido como "regla de correspondencia". Se corresponden con los problemas que Vergnaud denomina "isomorfismo de medidas" y con el tipo IxE=E' de Schwartz. En esta categoría considera dos subtipos: problemas de multiplicación y de división.

Según Nesher, "el tipo de problema multiplicativo es considerado por todos los investigadores como el más fácil" (p. 21). Algunos los denominan "adición repetida" (Bell y otros, 1984; Greer, 1987b; Fischbein y otros, 1985).

Distingue dos tipos de problemas de dividir: *cuotitivo* y *partitivo*.

b) Problemas de *comparación multiplicativa*, que no están contemplados como categoría independiente en el análisis de Vergnaud (que los engloba como isomorfismo de medidas) ni en el de Schwartz (que los engloba en el tipo IxE'=E". Brown (1981) los llama problemas de "factor multiplicativo" y Brekke (1991) los emplea como "problemas de factor escalar" (scale factor problems). Los ejemplifica con el siguiente problema:

Dan tiene 5 canicas.

Ruth tiene 4 veces tantas canicas como Dan.

¿Cuántas canicas tiene Ruth?.

en el que cada una de las oraciones expresa:

1) En la primera línea dice que hay un conjunto referente que contiene n objetos y (Dan tiene 5 canicas).

2) En la segunda línea dice que hay una función específica que aplica cada elemento y del conjunto referente en un conjunto comparado de objetos x (por cada canica de Dan, hay exactamente 4 canicas de Ruth).

3) En la tercera línea, en la que se enuncia la cuestión del problema, pregunta cuántos objetos x hay en el conjunto comparado (¿Cuántas canicas tiene Ruth?).

c) Problemas de *multiplicación cartesiana* que está incluida en la categoría producto de medidas de Vergnaud, y en la categoría ExE'=E" de Schwartz.

La extensión de categorías aditivas

Hendrickson (1986) distingue cuatro clases de problemas de estructura multiplicativa: *Cambio, Comparación, Selección y Razón*.

La categoría de *Cambio* la considera como una extensión de los problemas aditivos de cambio y los define de manera similar: Hay un conjunto inicial, un cambio numérico, y un conjunto final. Distingue tres tipos de problemas de Cambio. El tipo *Cambio 1* corresponde a la interpretación de la multiplicación como adición repetida. El tipo *Cambio 2*, en los que se desconoce el cambio numérico. Corresponde a la interpretación de la división como medida o como substracción repetida o división cuotitiva. El tipo *Cambio 3* corresponde a la interpretación partitiva de la división.

Para Hendrickson (1986, p. 27) Cambio 2, o división cuotitiva, es más fácil que Cambio 3, o división partitiva, puesto que esta última requiere una estrategia para asegurar la igualdad de los subconjuntos que resultan.

La categoría de *Comparación* la define también como una extensión de la comparación aditiva. Son problemas en los que interviene un conjunto referente, un conjunto comparado y cuestiones tales como "¿cuántas veces tanto como?" y "¿qué parte de?". Matemáticamente los expresa mediante una correspondencia múltiple entre el conjunto referente y el comparado. Según que se desconozca la cantidad referente, la comparada, o la ley de la correspondencia distingue ocho tipos de problemas de comparación. Si nos ceñimos a números naturales tanto para expresar el cardinal del referente, del comparado, como para expresar ley de la correspondencia, entonces las categorías se reducen a seis. Estos seis tipos de problemas con números naturales han sido incluidos en nuestro estudio.

La categoría *Razón* se refiere a problemas con dos variables (una independiente y otra dependiente) y una razón de proporcionalidad entre ellas como "kilómetros por hora" o "kilómetros por litro". Distingue tres tipos de problemas según que se busque el valor de una de las dos variables o bien la razón de proporcionalidad entre ellas.

La clase *Selección* incluye problemas de Producto Cartesiano en los que se pide hallar el número de combinaciones, o bien el cardinal de uno de los conjuntos componentes.

2.3. Hallazgos empíricos sobre la dificultad debida al tipo de estructura semántica

Hervey (1966) compara las respuestas que dan los niños de segundo curso a dos tipos de problemas verbales aritméticos asociados con dos interpretaciones de la multiplicación: *adición repetida de sumandos iguales* y *producto cartesiano*. La investigación intenta responder a la pregunta de cómo conceptualizan los niños las situaciones multiplicativas antes de que se les empiece a impartir instrucción formal sobre la multiplicación en el aula.

Los enunciados utilizados fueron del tipo:

Si Juan compra seis manzanas a tres céntimos cada una, ¿cuánto costarán las manzanas en total?

María tiene dos faldas, una negra y otra marrón. Tiene tres blusas, una azul, una amarilla, y una rosa. ¿Cuántas combinaciones diferentes de colores de faldas y blusas tiene María? (Hervey, 1966, p. 289) para expresar situaciones físicas de adición repetida de sumandos iguales y de producto cartesiano, respectivamente.

Utilizando como medida de dificultad de un problema el porcentaje de respuestas correctas concluye que

> *los problemas de sumandos iguales fueron significativamente menos difíciles (para los niños) que los problemas de producto cartesiano* (Hervey, 1966, p. 291).

El porcentaje de respuestas correctas que los sujetos dieron a los problemas de sumandos iguales fue del 64 por ciento, frente al 32 por ciento de los problemas de producto cartesiano.

Por conceptualización del problema Hervey entiende el método que el sujeto emplea para hallar su respuesta. Para determinarla observa si el sujeto resuelve el problema sumando, combinando, contando grupos iguales, apareando los elementos de un conjunto con los del otro conjunto, o bien utiliza cualquier otro método. Sus resultados sobre este tipo de conceptualización dan una media del 71 por ciento de conceptualización apropiada para problemas de sumandos iguales, y sólo el 35 por ciento para el producto cartesiano.

Así mismo, Hervey hace uso de representaciones visuales esquemáticas para los dos tipos de multiplicación empleados en su estudio, y halla que sólo para los problemas de sumandos iguales los sujetos establecieron una relación significativa con las representaciones visuales. La conclusión general a la que llega es que

> *los problemas de sumandos iguales fueron menos difíciles de resolver, menos difíciles de conceptualizar, y menos difíciles de seleccionar la «forma de pensar sobre el problema» que con problemas de producto cartesiano.* (p.291)

La investigación del CSMS

El capítulo de Brown (1981) sobre operaciones numéricas enmarcado en la investigación del CSMS (Hart, 1981) examina la comprensión que tienen los niños ingleses de las cuatro operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división). La observación se centra en la capacidad de los niños para reconocer qué operación aplicar para resolver un problema verbal y también en la capacidad de inventar un problema para una operación dada.

En particular, se pretendía investigar:

a) diferencias de dificultad entre varios "modelos" de cada una de las operaciones;

b) la dificultad relativa de reconocer cada una de las cuatro operaciones;

c) el efecto del tamaño de los números;

d) el efecto del tipo de magnitud (discreta o continua),

e) la dificultad de inventar el enunciado de un problema, comparada con la dificultad de reconocer la operación en un problema ya enunciado.

Para describir la comprensión de las operaciones por los niños que fuera representativa de la población inglesa eligieron los modelos de situaciones de operaciones aritméticas más comunes en la enseñanza inglesa.

En el caso de la multiplicación los modelos seleccionados fueron:

(i) *factor multiplicativo*

(v.g. Tengo 7 manzanas y tú tienes 5 veces tantas como yo; ¿cuántas tienes?).

(ii) *adición repetida*

(v.g. Compré 7 manzanas cada día durante 5 días; ¿cuántas tengo en total?).

(iii) *razón*

(v.g. Había 5 personas y cada una tenía 7 manzanas; ¿cuántas tenían entre todos?). (iv) *producto cartesiano*

(v.g. Hay 7 tipos diferentes de manzanas, y cada tipo está graduado en cinco tamaños diferentes; ¿cuántas clases diferentes de manzanas puedes pedir?

En el caso de la división los modelos utilizados fueron:

(i) la división como *partición*

(v.g. Tengo 35 manzanas para repartir entre 5 personas; ¿cuántas a cada una?

(ii) y la división como *cuotición*

(v.g. Tengo 35 manzanas y quiero dar 5 a cada persona; ¿a cuántas personas puedo dar?.

La investigación se realizó con niños ingleses de 11 y 12 años y en cuanto a la comparación de la dificultad relativa de los modelos para una misma operación dio como resultado que:

-El modelo de multiplicación más fácil escogido fue "adición repetida" y el más difícil fue "producto cartesiano".

-El modelo de división "partición" resultó ligeramente más fácil que el de "cuotición".

En cuanto al orden de dificultad de las operaciones los resultados obtenidos apoyan el orden de dificultad: adición, substracción, división, multiplicación.

La formulación lingüística de los problemas de estructura multiplicativa.

Un aspecto importante en la dificultad de comprensión de los problemas verbales es la formulación lingüística del problema. Investigaciones con problemas de estructura aditiva han puesto de manifiesto que cambios en la expresión lingüística de problemas de la misma categoría semántica afectan a su dificultad de comprensión (Carpenter, 1985; De Corte, Verschaffel y De Win (1985); Fayol y Abdi, 1986; Hudson, 1983). Por ello, hay que tener sumo cuidado al realizar conclusiones de estudios en los que se ha utilizado sólo una versión de los problemas empleados como tareas. Es fundamental conocer cómo influyen las diversas formulaciones verbales de un mismo problema en las producciones de los niños.

Este aspecto no ha sido suficientemente tratado en los problemas de estructura multiplicativa.

Zweng (1964) estudia las diferencias de dificultad para niños de segundo grado entre problemas de división partitiva y problemas de división cuotitiva. Además tiene en cuenta dos factores lingüísticos relacionados con los problemas de división que llama factor *básico* y factor *razón*. El factor *básico* se da cuando sólo se menciona un conjunto de objetos, mientras que en los de *razón* se mencionan dos conjuntos de objetos.

Resultan cuatro tipos de problemas al combinar los tipos de división (partitiva, cuotitiva) con los tipos de formulaciones verbales (básica y de razón). Zweng pone los siguientes ejemplos de cada tipo.

Cuotitivo básico. (Hallar el número de subconjuntos. Un conjunto dado, balones). Si tengo 8 balones y los separo en grupos de 2 balones, ¿cuántos grupos obtendré?.

Cuotitivo razón. (Hallar el número de subconjuntos. Dos conjuntos dados, balones y sacos). Si tengo 8 balones y los pongo en sacos, colocando 2 balones en cada saco, ¿cuántos sacos usaré?.

Partitivo básico. (Hallar el número de elementos en cada subconjunto. Un conjunto dado, balones). Si tengo 8 balones y los separo en cuatro grupos con el mismo número de balones en cada grupo, ¿cuántos balones habrá en un grupo?.

Partitivo razón. (Hallar el número de elementos en cada subconjunto. Dos conjuntos dados, balones y sacos). Si tengo 8 balones y los pongo en 4 sacos con el mismo número de balones en cada saco, ¿cuántos balones habrá en cada saco?.

Zweng concluye que los problemas de división cuotitiva son más fáciles que los problemas de división partitiva y que los problemas de *razón* son más fáciles que los *básicos*. La diferencia de dificultad entre los problemas verbales "básicos" y los de "razón" se debería a la forma de expresar lingüísticamente la división: "separarlos en grupos" y "ponerlos en sacos". La primera expresión es más difícil de comprender que la segunda porque la unidad "grupos" es más abstracta que la unidad "sacos" y por tanto más difícil de modelizar con material.

Nesher pone de manifiesto en dos trabajos (Nesher, 1988; Peled y Nesher, 1988) que las formulaciones lingüísticas en idiomas distintos de un mismo concepto, como la multiplicación, pueden ocasionar diferencias de dificultad al comprender esos textos.

Nesher (1988) describe tres estudios empíricos. El primero es una prueba de lápiz y papel con el que estudia dos cuestiones:

a) qué tipos de problemas (mapping rule, comparación y producto cartesiano) son más accesibles para los niños.

b) hasta qué punto los niños son conscientes de las asunciones subyacentes de los textos multiplicativos.

La muestra fueron israelíes de 4, 5 y 6 grado (10-12 años de edad). Se les propuso a los niños dos tareas:

1. Que compusieran un problema verbal que se resolviera con una multiplicación, frente a otro que se resolviera con una adición. El 34% de los niños escribieron un problema del tipo "mapping rule", el 41% escribió un tipo especial de problema de comparación; el 2% un problema de producto cartesiano, y un 23% de otras categorías.

2. Que explicaran con sus propias palabras, a un niño que tiene dificultad para decidir qué operación escoger en orden a resolver el problema, cómo conocer cuál es la operación necesaria para un texto dado (adición o multiplicación).

Los niños tuvieron dificultad con esta tarea. El 32% no da una respuesta interpretable. De los que completaron la tarea con éxito el 53% dio la clave lingüística distintiva de los problemas de comparación.

Para Nesher estos resultados son sorprendentes. Esperaba que los problemas de comparación fueran más difíciles que los de adición repetida, como habían mostrado las investigaciones del CSMS (Hart, 1981). La explicación que da a esta contradicción es que en Israel se utiliza una forma especial abreviada "P" para la comparación "veces tantos como" que es enfatizada por los maestros como claves lingüística para la multiplicación. La expresión inglesa de la comparación "5 times as many as" en hebreo se abrevia como "P-5", y los niños israelíes identifican fácilmente la letra P con multiplicar.

2.4. Influencia del tipo de números

La influencia del tamaño de los números sobre la elección de la operación adecuada para resolver problemas verbales simples ha sido puesta de manifiesto por Hart (1981). Los ítems con números pequeños eran más fáciles de reconocer. En el test final las diferencias entre ítems paralelos que contenían números pequeños y grandes respectivamente fueron del orden del 15%.

Un aspecto que ha recibido más atención ha sido la influencia de las clases de números: decimales menores que uno frente a números naturales.

Bell y otros (1981) examinan las dificultades conceptuales de alumnos ingleses, de 12 a 16 años, para escoger la operación adecuada en problemas verbales de estructura multiplicativa que contienen números decimales. En una entrevista exploratoria detectan concepciones equivocadas de los niños sobre el efecto de multiplicar y dividir por números decimales menores que la unidad. Una concepción equivocada muy común fue *que la multiplicación siempre aumenta, que la división disminuye, y que la división debe ser de un número grande entre otro pequeño*. Estas concepciones, que son válidas con determinadas clases de números, como los números naturales, los alumnos las extrapolan a números decimales menores que la unidad. Los alumnos elegían correctamente la operación 2x5 para calcular el coste de 5 galones a 2 libras el galón. Sin embargo, escogían 1.20/0.22 para calcular el coste de 0.22 galones a 1.20 libras el galón. En este caso, "el hecho de que el coste de 0.22 galones fuera menor que un galón les conducía a elegir la división" (Bell y otros, 1981, p. 405).

Ekenstam y Greger (1983) confirman este mismo hecho con niños suecos de 12-13 años de edad. Se les propuso elegir la operación adecuada, entre cuatro, para calcular el coste de una pieza de queso, conocido lo que cuesta un kilo y el peso de la pieza. La tasa de éxitos bajó de un 83% a un 29% cuando el peso de la pieza cambió de 5 kg a 0.923 kg. La operación elegida por muchos de los niños fue la división, *porque al pesar menos de un kilo, su valor es menor de lo que cuesta un kilo, y por tanto hay que dividir para hacer el número más pequeño*.

Bell y otros (1984), estudian este mismo fenómeno y lo analizan en conjunción con la estructura del problema y el contexto. Utilizan niños ingleses de 12 a 13 años. Sus resultados confirman la dificultad que añade el uso de números decimales menores que la unidad, y además encuentran que

> *el efecto de las concepciones equivocadas debidas a los tipos de números interactúan con varios aspectos de la estructura del problema y el contexto. Una es la amplitud con la cuál el contexto induce al alumno a concebir que uno de los números está siendo operado y cambiado su tamaño por el otro número. Otra es si la estructura del problema puede ser asimilada a una de las estructuras accesibles: adición repetida para la multiplicación; partición o cuotición para la división.* (Bell y otros, 1984, p. 145).

Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) explican estas dificultades en la elección de la operación en problemas de estructura multiplicativa mediante su teoría de modelos primitivos de conducta asociados con las operaciones aritméticas. Se plantean la siguiente hipótesis:

> *Cada operación básica de la aritmética está (remains) unida a un modelo primitivo, implícito e inconsciente. La identificación de la operación necesaria*

para resolver un problema con dos datos numéricos no se realiza directamente sino mediatizada por el modelo. El modelo impone sus propias restricciones en el proceso de búsqueda. (Fischbein y otros, 1985, p.4)

Asumen que los modelos imponen una serie de restricciones a los números usados y a su papel en la estructura del problema. Si los datos del problema violan alguna de estas restricciones, el resolutor tendrá dificultades para elegir la operación aritmética apropiada.

Suponen que el modelo primitivo asociado con la multiplicación es el de *adición repetida*, en el cual un número de conjuntos de igual tamaño se ponen juntos. El modelo de adición repetida no es conmutativo y el multiplicador y el multiplicando juegan papeles diferentes, y como consecuencia de ello, este modelo de multiplicación lleva asociados dos modelos de división: *división partitiva* y *división cuotitiva*.

Fischbein y otros contrastan estas hipótesis con escolares italianos de 11 a 15 años de edad. En el caso de la multiplicación concluyen que

el papel de los números decimales en la estructura de un problema de multiplicación es claramente decisiva en la elección de la operación. Un problema de multiplicar es claramente más difícil cuando el operador es un número decimal (puesto que viola las restricciones del modelo). (p. 11)

En la interpretación de la multiplicación como adición repetida las restricciones impuestas a los números por el modelo son: el operador deberá ser un número natural y el producto deberá ser más grande que el operando.

En el caso de la división concluyen que

hay solamente un modelo primitivo intuitivo para los problemas de división -el modelo partitivo. Con la instrucción, los niños adquieren un segundo modelo intuitivo -el modelo cuotitivo. (p.14).

En la interpretación partitiva de la división, el divisor deberá ser un número natural y ambos divisor y cociente deberán ser más pequeños que el dividendo. En la interpretación cuotitiva de la división, hay sólo una restricción: el divisor deberá ser más pequeño que el dividendo.

Dan dos explicaciones plausibles sobre el origen de estos modelos primitivos. Una es que reflejan el modo en que son enseñadas las operaciones en la escuela. Otra es que reflejan características primarias, naturales y básicas de la conducta humana.

Los resultados de Nesher (1988) no validan la teoría de los modelos implícitos primitivos. Según ella:

el fenómeno demostrado por Fischbein es un reflejo de la introducción explícita en la escuela del modelo de adición repetida como el primer y más dominante tipo de multiplicación más que un reflejo de un modelo psicoló-

gico implícito. (Nesher, 1988, p. 31).

Greer (1987a) llama *noconservación de las operaciones* al fenómeno de cambiar la elección de la operación adecuada por la operación inversa cuando se cambian los números del problema.

Luke (1988) analiza el efecto del tipo de número (natural, decimal mayor que uno y decimal menor que uno) en el multiplicando y el multiplicador sobre la dificultad de resolución de problemas verbales. Utiliza niños de 12-13 años. Obtiene los siguientes resultados:

a) No hay diferencias significativas entre los números naturales y los decimales mayores que uno.

b) En el multiplicador, los números decimales menores que uno son significativamente más difíciles que los naturales y los decimales mayores que uno.

c) En el multiplicando no hay diferencias significativas entre los tres tipos de números.

d) No hay efecto significativo debido al orden de aparición del multiplicando o el multiplicador en el enunciado del problema.

e) Efecto significativo de interacción entre el tipo de número en el multiplicador y el orden de aparición del multiplicando y el multiplicador en el enunciado. Cuando el multiplicando aparece en primer lugar y el multiplicador es un número natural o decimal mayor que uno el problema es más fácil que cuando el multiplicador es decimal menor que uno.

De Corte, Verschaffel y Van Coillie (1988) añaden información adicional sobre el efecto del *tipo de multiplicador* y *tipo de multiplicando*. Según los autores esta investigación difiere de las precedentes en:

Primero, el diseño está más cuidado.

Segundo, incluye problemas *asimétricos* y *simétricos*.

Tercero, los datos los obtienen de dos formas de responder: *elección de la operación* y *respuesta libre*.

Analizan el efecto del multiplicador, el efecto de interacción multiplicador por estructura (asimétrica y simétrica) y multiplicador por modo de respuesta sobre la variable dependiente *elección de una estrategia correcta*.

Los sujetos empleados fueron escolares flamencos de 12 años de edad. El instrumento utilizado fue un test escrito con 24 ítems que resuelven los niños de dos formas: elección de la operación y respuesta libre.

Obtienen efectos significativos del tipo de multiplicador y de la estructura del problema pero no del tipo de multiplicando ni del modo de respuesta. El orden de dificultad obtenida para el tipo de multiplicador es: decimal menor que la unidad (.71), decimal mayor que la unidad (.89), y número natural (.94). Para los problemas simétricos obtiene un índice de dificultad menor (.88) que para los asimétricos (.80).

Obtienen además interacción significativa entre el tipo de multiplicador y la estructura, que se traduce en:

-Para los problemas simétricos no hay diferencias significativas de dificultad según el tipo de multiplicador.

-En los problemas asimétricos hay diferencia de dificultad entre los tres tipos de multiplicadores.

-Los problemas simétricos tienen un índice de dificultad menor cuando el multiplicador es menor que la unidad pero no en los otros dos casos.

Otras interacciones significativas que obtienen son: tipo de multiplicador por el modo de respuesta, y tipo de multiplicador por estructura por modo de respuesta.

La Teoría de los Estímulos en Competencia

Bell y otros (1989) analizan la teoría de los modelos implícitos de Fischbein y le hacen dos críticas:

a) para hacerla consistente con los resultados empíricos hay que añadirle hipótesis extrañas, y

b) las percepciones numéricas que conllevan ignorar el punto decimal causan conflicto con las predicciones.

A partir de estas críticas concluyen que la teoría da peso insuficiente a las percepciones numéricas frente a las percepciones estructurales.

A partir de un estudio a gran escala realizado por Mangan en 1986 y de una investigación a pequeña escala proponen una extensión de la teoría de los modelos implícitos: *La Teoría de Estímulos en Competencia* (A Competing-Claims Theory), en la cual dice que los niños cuando resuelven problemas simples de estructura multiplicativa optimizan su elección de la operación a realizar en función de cuatro factores:

1. *Preferencias numéricas*. Dividir el número mayor entre el menor, y multiplicar o dividir por un número entero, si es posible.
2. *Conformidad con el nivel más bajo posible de estructura*. La hipótesis es que (a) las estructuras de Grupos Múltiples, Medidas Repetidas y razón tienen índices de dificultad crecientes, pero que el efecto de la estructura es menor que el de la preferencia numérica.
3. *Concepciones numéricas equivocadas*. Estas son las creencias de que la multiplicación siempre hace a un número más grande y que la división lo hace más pequeño.

4. *Orden de las cantidades en la razón*. Se refiere a la confusión del papel del numerador y del denominador de las dos cantidades en una razón, que les conduce al error de invertir las cantidades de la razón.

La investigación realizada por Mangan es utilizada para validar el concepto de multiplicador preferido. En ella la muestra engloba niños de 10, 12, 14, y 17-19 años de edad, así como alumnos de primer año de psicología y estudiantes para profesores. Los resultados muestran a) que el porcentaje de aciertos aumenta con la edad, b) que los problemas de precio y velocidad son algo más fáciles que los de conversión de unidades, c) que el tipo de número usado como multiplicando (entero, decimal y decimal menor que uno) no tiene virtualmente efecto, y d) el tipo de número usado como multiplicador tiene un gran efecto: *el efecto multiplicador*.

2.5. Investigaciones sobre la comprensión de los problemas verbales de comparación multiplicativa

Las investigaciones sobre problemas aritméticos verbales de estructura aditiva han detectado en los niños de los primeros niveles de enseñanza diferencias de comprensión entre problemas de la categoría semántica de comparación (Riley, Greeno y Heller, 1983; Briars y Larkin, 1984; Morales, Shute y Pellegrino, 1985; Riley y Greeno, 1988). Puesto que en este trabajo se van a estudiar los problemas de comparación multiplicativa, es importante hacer un balance de investigaciones en las que se han empleado este tipo de problemas. Resumiremos en este apartado resultados de investigaciones en las que intervienen aunque sea parcialmente problemas de comparación multiplicativa.

Lewis y Mayer (1987), utilizan problemas de estructura aditiva y de estructura multiplicativa para explicar la diferencia de dificultad entre dos tipos de problemas de comparación: problemas de comparación con enunciado consistente y problemas de comparación con enunciado inconsistente. En los problemas con enunciado consistente se conoce el referente y el factor de comparación y se pide hallar el valor del comparado, mientras que en los problemas con enunciado inconsistente lo que se conoce es el comparado y el factor de comparación y se desconoce el referente.

Partiendo del supuesto de que la resolución de problemas matemáticos puede descomponerse para su análisis en dos componentes fundamentales: el proceso de comprensión y el proceso de (calcular la) solución (Mayer, 1986a), Lewis y Mayer consideran que la diferencia de dificultad entre estos dos tipos de problemas tiene su origen en el proceso de comprensión del problema, y construyen un modelo del proceso de comprensión para intentar explicar la diferencia de dificultad entre estos dos tipos de problemas aritméticos verbales de comparación.

Basándose en el trabajo previo de Huttenlocher y Strauss (1968), Lewis y Mayer enuncian la hipótesis de consistencia en la que se afirma que el resolutor posee un conjunto de esquemas o preferencias en relación a la forma de los enunciados de los problemas de comparación que coincide con los enunciados consistentes. Cuando el enunciado es inconsistente el resolutor debe transformarlo mentalmente en enunciado consistente. Este proceso consiste en intercambiar el sujeto y el objeto de la sentencia relacional, así como invertir la operación aritmética sugerida por el término relacional. Según Lewis y Mayer la necesidad de realizar esta transformación hace que la probabilidad de cometer un error de inversión sea mayor en los problemas inconsistentes que en los consistentes.

Una segunda característica del modelo concierne a si el término comparativo que se emplea en la sentencia relacional es marcado o no marcado, con el sentido que le da Clark (1969) a estos términos. Los términos comparativos no marcados que utilizan Lewis y Mayer son "más que" y "veces tanto como", y los no marcados son "menos que" y "1/3 tanto como". Según Lewis y Mayer la probabilidad de que los estudiantes cometan un error de comprensión mientras invierten la expresión relacional en los enunciados inconsistentes se incrementa cuando el término comparativo empleado es marcado. Extendiendo los resultados que Clark (1969) obtuvo con series de tres término, Lewis y Mayer concluyen que los términos marcados resaltan más, y esto ocasiona en los estudiantes una dificultad añadida a la hora de invertir la relación y por tanto a la hora de elegir una operación o su inversa para obtener la solución.

El tercer factor se refiere a la cantidad de memoria de trabajo del estudiante necesaria para codificar la información del problema. Aunque esta variable no la manipulan Lewis y Mayer en su trabajo, suponen que los errores de comprensión en problemas de enunciado inconsistente aumentan cuando el tipo de problema requiere mayor capacidad de memoria. Según esto, cabe esperar más errores de inversión en problemas de enunciado inconsistente de dos pasos que en problemas de enunciado inconsistente de un paso.

En resumen, Lewis y Mayer (1987) asocian los errores que cometen estudiantes universitarios en problemas de dos pasos durante el proceso de comprensión de problemas de comparación -con enunciado consistente e inconsistente- con dos variables de enunciado del problema y una variable del resolutor.

Los resultados de este estudio confirman que los estudiantes cometen errores en algunos problemas matemáticos debido más a la dificultad en la fase de comprensión que en la fase (de cálculo) de solución. Además, para Lewis y Mayer, es deseable valorar la dificultad de un problema en términos de los procedimientos de comprensión y representación necesarios para llegar a la ecuación necesaria para su solución que en términos de los aspectos de cálculo algorítmico necesarios para resolver la ecuación. Estos resultados también sugieren la necesidad para los estudiantes de recibir más instrucción en destrezas de representación de problemas, particularmente en representación de enunciados relacionales.

Verschaffel, De Corte y Pauwels (1992) hacen una réplica del trabajo de Lewis y Mayer en la que emplean la técnica de movimientos oculares. Realizan dos experiencias en las que utilizan como sujetos a estudiantes universitarios: en una emplean problemas de comparación de un sólo paso de adición y substracción, y en otra problemas de comparación de dos pasos en los que están implicadas las cuatro operaciones. Los resultados del primer experimento con alumnos universitarios en el que las tareas son problemas de comparación de un sólo paso no confirma el modelo de Lewis y Mayer (1987). Sin embargo, los resultados del segundo experimento con estudiantes universitarios en el que las tareas son problemas de comparación de dos pasos implicando las cuatro operaciones aritméticas sí confirman este modelo.

También realizan un experimento con alumnos de tercer grado empleando problemas de comparación de un sólo paso de adición y substracción. Los resultados que obtienen en este caso están de acuerdo con el modelo de Lewis y Mayer. La conclusión que sacan Verschaffel y otros (1992) de estas tres experiencias es que el modelo de Lewis y Mayer es válido sólo para tareas que requieran cierta demanda cognitiva en el sujeto.

Realizan una breve discusión crítica del modelo de Lewis y Mayer. Subrayan que el modelo de Lewis y Mayer está en desacuerdo con la teoría de comprensión del discurso de Van Dijk y Kintsch's, particularmente con la idea de coherencia del texto, y con la idea de foco narrativo de un problema verbal debida a Reusser (Verschaffel y otros, 1992, p.93). En ambos casos se postula que la interpretación e integración de nueva información escrita sobre un agente se ve facilitada cuando la nueva información empieza con el mismo agente. Esta idea lleva a predicciones incongruentes con el modelo de Lewis y Mayer. Puesto que las dos primeras sentencias de un problema verbal inconsistente empiezan con el mismo protagonista deberían ser, por tanto, más fáciles de comprender que los de un problema de enunciado consistente en los que cada sentencia empieza con un protagonista diferente.

Además de la incompatibilidad del modelo de Lewis y Mayer con estos modelos teóricos, Verschaffel y otros destacan dos aspectos no tenidos en cuenta en el modelo de Lewis y Mayer, y que pueden utilizarse para interpretar los datos obtenidos. Uno es el concepto de referencia o anáfora pronominal. En efecto, en los problemas utilizados tanto en el experimento de Lewis y Mayer (1987), como en el de Verschaffel y otros (1992), sólo los problemas con enunciado inconsistente contienen pronombres. Puesto que está generalmente aceptado que resolver el problema de la referencia pronominal puede causar dificultades a los lectores, sobre todo a los más jóvenes, se puede argumentar que las diferencias sistemáticas en el uso de pronombres entre los problemas inconsistentes y los consistentes puede haber contribuido a la diferencia del porcentaje de éxitos obtenidos para un tipo y otro de problemas.

Un segundo aspecto, se refiere a la asunción subyacente en el modelo de Lewis y Mayer de que los errores producidos en la resolución de problemas verbales de comparación se deben a dificultades en la fase de comprensión. Sin embargo, los errores de inversión que se producen en la resolución de problemas de comparación con enunciado inconsistente pueden ser debidos a otras razones, como la aplicación de una estrategia de resolución basada en palabras clave. Los sujetos que aplican esta estrategia no intentan comprender el problema, simplemente miran la palabra clave y eligen la operación que está asociada a ella. Puesto que esta estrategia lleva al éxito en problemas verbales consistentes y a invertir la operación en problemas verbales inconsistentes, la diferencia de éxitos en unos y otros sería debida, al menos parcialmente, al empleo de esta estrategia.

Carretero (1989) explora, en el marco teórico de Vergnaud, el efecto de dos clases de "estructuras multiplicativas" (proporción simple y proporción doble). Analiza los procedimientos, tanto correctos como incorrectos, utilizados por niños franceses de los cursos CE2 (8-9 años), CM1 (9-10 años) y CM2 (10-11 años) (equivalen a 3º, 4º y 5º de Primaria en España) en diferentes problemas de las categorías citadas que implican una o varias operaciones de multiplicación y división.

Una de las variables lingüísticas controladas en este estudio es la intervención de las dos expresiones de cantidad: "3 veces más" y "3 veces menos". Controla además:

- El *campo de referencia* de las informaciones (mercancías y su coste; producciones agrícolas; distribución de objetos en cajas; ahorro por persona; etc.)
- El tamaño y el tipo de los números: pequeños y naturales
- La naturaleza de las cantidades: discretas.

Algunos de los resultados son:

1. Existen diferencias de dificultad notables entre los problemas de proporción simple y los de proporción doble. En dos problemas de proporción simple el índice de acierto es del 86 y 94%, respectivamente; en cambio en los dos problemas de proporción doble el índice es de 25 y 28%.

2. Hay evidente diferencia entre los niveles escolares, pero esta es más notable cuando aumenta el número de operaciones a efectuar.

3. La introducción de la relación "3 veces menos" en un problema de proporción simple lo convierte en el problema más difícil de la experiencia. Los niños mayores no

alcanzan el 50% de aciertos.

4. El error más frecuente es interpretar la expresión "3 veces menos" de manera sustractiva. Un 49% del total de sujetos de la muestra comete este error.

5. El error más frecuente en los problemas en los que intervienen la expresión "3 veces más" es la interpretación aditiva "3 más". Un 27% de los sujetos comete este error.

Comentario final: En la parte del estudio de Carretero relacionado con nuestra investigación queremos resaltar que:

a) Utiliza sólo las expresiones comparativas "veces más que" y "veces menos que" pero en problemas de dos operaciones. Esto hace que sea muy difícil distinguir si la mayor dificultad de un problema se debe a esas expresiones comparativas o a otros factores implícitos en el problemas.

b) Las expresiones "veces más que" y "veces menos que" no son tratadas exhaustivamente en todas las posibilidades que ofrece el esquema de comparación. Sólo se utilizan las expresiones en problemas de referido desconocido dentro de un problema compuesto que requiere de dos operaciones.

Brekke (1991) en una parte de su tesis doctoral analiza las respuestas correctas y las incorrectas que dan niños ingleses de 8 a 11 años de edad, a dos tests escritos de problemas de estructura multiplicativa. Sus objetivos son describir:

-estrategias de solución correcta a problemas de diferentes categorías estructurales

-obstáculos conceptuales característicos y concepciones equivocadas para diferentes categorías de problemas multiplicativos

-el efecto de los (tipos de) números empleados y el papel de otras variables tales como el contexto, distractores y problemas directos e inversos.

Uno de los tipos de problemas que emplea son problemas de comparación, a los que llama "*problemas de factor escalar*". El conjunto de problemas de comparación que emplea varían con respecto a:

-objetos discretos (sellos, libros) frente a continuos longitud, peso)

-problemas directos (comparado desconocido) frente a problemas inversos (referente desconocido)

En sus resultados sobre problemas de comparación el efecto de la variable contexto (discreto frente a continuo) es marginal. Por el contrario, los porcentajes de respuestas correctas caen del 50% al 25% cuando se pasa de problemas directos (comparado desconocido) a inversos (referente desconocido) en los niños más jóvenes, y caen del 75% al 50% en los niños mayores de la muestra que utiliza. Todo ello con problemas cuyo escalar es un número natural. Cuando se pasa de un problema directo a inverso esto ocasiona en los niños una regresión hacia métodos más intuitivos para ellos como sumar o restar el escalar.

Otra conclusión que obtiene con respecto a la comprensión de la palabra "veces" es que su significado real no es bien comprendido por los niños. Un alto porcentaje de niños suman o restan el escalar. Para muchos niños la palabra "veces" es sinónima de multiplicación, pero cuando el factor escalar es un número decimal, como 1.5, lo inusual de tomar 1.5 veces causa una regresión hacia métodos más elementales, como la suma o resta del escalar.

Compara los índices de dificultad de varios problemas de categorías distintas: grupos múltiples, factor escalar y producto cartesiano. En todos los casos se obtienen unos porcentajes de aciertos que sostiene el orden anterior, es decir, que los problemas de grupos múltiples son más fáciles que los de factor escalar que a su vez son más fáciles que los de producto cartesiano.

2.6. Tipos de comprensiones erróneas

Una parte de nuestra investigación consiste en analizar los patrones de error cometidos por los niños. Previo a ello es necesario establecer el criterio a seguir para clasificar los errores. Para fundamentar la clasificación de errores de comprensión que utilizamos en nuestro estudio hemos tenido en cuenta criterios ya seguidos en clasificaciones previas que se encuentran en la literatura. Estas no son muchas. Para problemas aditivos hemos considerado la clasificación de Dellarosa Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, (1988) y para problemas multiplicativos la de Brekke (1991).

Dellarosa Cummins y otros (1988) identifican en niños de primer grado, mediante la técnica de recordar problemas verbales, antes o después de resolverlos, los siguientes tipos de comprensiones erróneas para problemas simples de estructura aditiva correspondientes a las categorías semánticas de cambio, combinación y comparación.

Tipo 1. <u>Transformaciones que conservan la estructura</u> (SP)

El problema recordado tiene la misma estructura pero es expresado con otras palabras.

Ejemplo, un problema de comparación de aumento de referente desconocido (substracción) como

> Problema. María tiene 9 bolas. Ella tiene 4 más que Juan. ¿Cuántas bolas tiene Juan?

es transformado en un problema de comparación de disminución de referido desconocido (substracción) como el siguiente

> Problema. María tiene 9 bolas. Juan tiene 4 bolas menos que María. ¿Cuántas bolas tiene Juan?

Tipo 2. Transformaciones que alteran la estructura (SV)

Los problemas fueron transformados en otros problemas válidos, pero las transformaciones violan las relaciones matemáticas en el problema original.

Ejemplo, un problema de comparación de aumento de referente desconocido (substracción) como

Problema. María tiene 9 bolas. Ella tiene 4 más que Juan. ¿Cuántas bolas tiene Juan?

es transformado en un problema de comparación de aumento de referido desconocido (adición) como el siguiente

Problema. María tiene 9 bolas. Juan tiene 4 más que María. ¿Cuántas bolas tiene Juan?

Tipo 3. Recordar un problema sin sentido (NP).

Ejemplo,

a) María tiene 5 bolas.
Juan tiene 4 bolas.
¿Cuántas tiene Juan?.

b) María tiene algunas bolas.
Juan le da 3 bolas más.
Ahora María tiene 7 bolas.
¿Cuántas bolas tiene María ahora?.

es un problema sin sentido porque no requiere cálculo alguno y simplemente pregunta por uno de los números dados en el problema.

Tipo 4. Es similar a la anterior pero se pregunta por el conjunto total.

Ejemplo,

María y Juan tienen 5 bolas en total.
María tiene 3 bolas.
¿Cuántas tienen en total.

Tipo 5. No se especifica el conjunto total.

Ejemplo,

María tiene algunas bolas.
Juan le da 3 más.
¿Cuántas tenía María al principio?

Tipo 6. Otros fallos de recuerdo.

Cuando se produce un fallo de comprensión clasificable en los problemas de comparación, tiende a estar comprendido con más frecuencia en dos categorías, la categoría de transformaciones cambiando la estructura (38%) y la categoría de problemas sin sentido (31%). (Dellarosa Cummins y otros, 1988, p.416).

En esta clasificación de errores observamos dos limitaciones:

a) En ella no se tiene en cuenta la fase en la que se produce el error. El error de comprensión se puede producir en la fase de traducción, en la de integración o producto de ambas (según la terminología de Mayer).

b) Algunos de los tipos de errores considerados son propios de la estructura semántica de los problemas, pero otros los son del tipo de técnica empleada, en este caso una tarea de recuerdo. Con otro tipo de técnicas es posible que no aparezcan.

Brekke (1991) clasifica las distintas respuestas de los niños a problemas de comparación en función de las operaciones realizadas. Por ejemplo, en problemas de factor escalar de tipo inverso da los siguientes tipos:

-No respuesta

-Correcta

-Multiplicación

-Restar el escalar

-Restar el escalar el número de veces como el mismo indica. Ejemplo, si el escalar es 4 y 200 es el referente: 200-4-4-4-4

-Sumar el escalar

2.7. Conclusiones

En las investigaciones revisadas en este capítulo hemos querido resaltar la perspectiva, el planteamiento, con el que se ha abordado el estudio de las dificultades en problemas aritméticos verbales y subrayar algunos de los logros que en base a ellos se han obtenido.

Desde las primeras investigaciones revisadas hemos podido observar la gran atención que han recibido las variables lingüísticas como causa de las dificultades y los numerosos intentos realizados por proponer y ensayar métodos que los solucionaran. Así mismo, se puede percibir el progresivo avance en el control de aquellas variables de tarea que se habían mostrado significativas en las investigaciones previas. De unas primeras investigaciones donde la única distinción era la de ser problema aritmético y, por tanto, podían aparecer arbitrariamente en su resolución sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, se pasa a tener en cuenta variables tales como: si el problema requiere una o más operaciones, si el problema requiere de uno o más pasos para su resolución, si el problema es de estructura aditiva o multiplicativa, cuál es la posición de la incógnita y cuál es la estructura o el esquema semántico de los enunciados. El enfoque de variables estructurales puso de manifiesto la influencia de determinadas variables sintácticas sobre la dificultad de resolución de los problemas aritméticos verbales, pero las investigaciones posteriores, basadas en esquemas, han puesto de manifiesto que la estructura semántica es una componente con mayor peso que la sintaxis a la hora de determinar la dificultad del problema. Las investigaciones más recientes parten ya de una clasificación de los problemas en estructuras semánticas y analizan la posible influencia de otros aspectos. Así, por ejemplo, Fayol y Abdi (1986) utilizando el esquema de clasificación de problemas aditivos de Vergnaud, estudiaron la influencia de la *formulación verbal* del problema manteniendo constante la estructura relacional del problema. Otros autores también han estudiado la influencia del estilo del texto sobre la dificultad de problemas pertenecientes a la misma categoría semántica, este es el caso, por ejemplo, de De Corte, Verschaffel y De Win (1985). Los resultados obtenidos por estas investigaciones han conducido a los investigadores actuales a establecer que las diferencias de nivel de ejecución encontradas entre los niños cuando resuelven problemas aritméticos verbales simples de estructura aditiva se explican fundamentalmente en función de tres factores: *la categoría semántica, la cantidad desconocida en el esquema que relaciona los datos y la formulación verbal* de esa relación.

Se observa también una evolución global de la perspectiva bajo la que se realizan las investigaciones. Las primeras investigaciones están inmersas en una dinámica de proceso-producto en las que se postulaba que simplemente una mejora en los métodos de enseñanza mejoraría los resultados de los niños. Estas investigaciones predominan en la etapa inicial y perviven hasta la década de los sesenta. Si bien en esta fase se realizan investigaciones que se centran en determinar factores influyentes en la dificultad de los problemas, es a partir de esta década cuando proliferan investigaciones mediacionales que tratan de aislar factores de dificultad específicos que ocupan un lugar intermedio en el proceso enseñanza-aprendizaje. Estas últimas investigaciones no se ocupan del problema de qué método es más efectivo para enseñar a resolver problemas verbales, sino de cómo obtienen los resolutores los significados globales de los enunciados de los problemas. Por tanto, las consecuencias de tipo práctico que el educador puede sacar de estas últimas investigaciones no pueden ser de tipo metodológico, sino de tipo puntual que pueden tener cabida en una enseñanza diagnóstica.

El recorrido que hemos realizado por los distintos enfoques que se han adoptado en la investigación sobre resolución de problemas de estructura multiplicativa nos ha conducido a realizar el siguiente extracto:

-El estudio realizado por Vergnaud además de señalar que hay esquemas, como la regla de tres y el esquema de proporcionalidad, relacionados con ellos, pone de manifiesto que, en las personas, la estructura multiplicativa necesita de un gran período de tiempo para desarrollarse.

-Los trabajos realizados por Schwartz y Kaput sobre la "estructura de cantidades" nos señalan el importante papel que desempeñan las magnitudes en los problemas de estructura multiplicativa.

-Los trabajos de Bell y colaboradores inciden en el papel que juegan los números decimales en la dificultad de resolución, lo que complica la investigación realizada sobre problemas de estructura multiplicativa, pues en la escuela se produce casi con simultaneidad el estudio de este tipo de problemas y la introducción de los números decimales. Ello acarrea que se planteen con simultaneidad problemas con ambos tipos de números, circunstancia que complica el análisis.

-La investigación realizada por el CSMS pone de manifiesto que los niños no tienen el mismo nivel de comprensión para los diferentes modelos de las operaciones aritméticas, y debe ser tenido en cuenta.

Así mismo, de la consideración de todos ellos se observa de manera general que no se dispone de un cuerpo coherente y organizado de investigaciones sobre problemas de estructura multiplicativa similar al que existe para la estructura aditiva. Hay investigaciones puntuales -cada vez más- que se han realizado y que han obtenido resultados. Pero se necesita más investigación.

También hemos encontrado al hacer la revisión de investigaciones en resolución de problemas de estructura multiplicativa que:

a) Si bien no hay unanimidad en el nombre de las clases de problemas sí parece haber acuerdo en que hay tres categorías básicas. Una de las cuales es la de comparación.

b) Hay acuerdo en que unas categorías de problemas son más difíciles que otras; pero no hay acuerdo en cual es la más fácil. Nesher (1988) obtiene que es la de comparación. Hart (1981) y Brekke (1991) la de adición repetida. Se necesita más investigación.

c) El tipo de número, natural frente a decimal, es una variable importante a tener en cuenta.

d) La formulación de un tipo de problema en un idioma y las diferencias de formulaciones debidas a los idiomas provocan cambios en el índice de dificultad. Esta variable está poco estudiada.

e) No hay acuerdo sobre si el origen de las dificultad de un tipo de problema es de naturaleza psicológica o producto de la enseñanza recibida.

En el caso particular de los problemas verbales de comparación multiplicativa en las investigaciones revisadas se ha puesto de manifiesto que:

a) Ha empezado a considerarse como una categoría de problemas con entidad propia en determinadas investigaciones.

b) No se han investigado en un mismo trabajo las distintas posibilidades del esquema de comparación.

c) Se han estudiado las comparaciones de aumento y de disminución pero de manera puntual.

d) En ninguno de los trabajos que incluyen problemas de comparación multiplicativa se incorpora más de una formulación del mismo problema.

e) No hemos encontrado ningún trabajo que realice un estudio de los patrones de errores en el conjunto de los problemas de comparación multiplicativa. Sí hay estudios parciales.

f) La mayoría de los estudios sobre comparación multiplicativa se han realizado con estudiantes de los primeros años de Facultades de Letras. Hay pocos estudios con niños de Primaria.

g) Las teorías explicativas propuestas por determinados investigadores no están suficientemente contrastadas.

Capítulo 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN Y PROCEDIMIENTO DE RECOGIDA DE DATOS

La finalidad de este capítulo es describir el diseño del estudio, los instrumentos de evaluación y el procedimiento utilizado para la recogida de los datos.

El concepto de diseño experimental es difícil de definir y por ello no hay acuerdo unánime entre los investigadores sobre los aspectos que abarca. Según Pereda (1987, p.247) una de las definiciones más acertadas de lo que se entiende por *diseño experimental* es la dada por Kirk (1982): *Un diseño experimental es un plan de acuerdo con el cual se asignan los sujetos a los diferentes grupos o tratamientos experimentales*. Para Arnau (1981, p.10) además de lo anterior el diseño experimental incluye *la selección de las técnicas estadísticas de análisis adecuadas*.

En lo que se refiere al diseño, en este capítulo nos ceñimos a tratar los aspectos a que alude la definición de Kirk y por tanto nos ocupamos en él del conjunto de reglas o técnicas a seguir en la asignación de los factores que se manipulan a los sujetos o grupos experimentales (Pereda, 1987, pp.71-72).

Hacemos consideraciones acerca de las variables independientes o factores que hemos manipulado experimentalmente, de las variables dependientes consideradas y de cómo se cuantifican, del control de las variables concomitantes, de la muestra de sujetos, de los instrumentos de medida utilizados, del procedimiento de aplicación de los instrumentos, de la codificación de las respuestas, así como de la validez y fiabilidad de los instrumentos de medida.

3.1. Las variables

Con el fin de responder a los interrogantes planteados en esta investigación hemos elaborado un diseño que nos permite contrastar las hipótesis planteadas, controlar la homogeneidad de los tres grupos formados en la muestra para la aplicación de los tres cuestionarios, y controlar también la influencia de los colegios y el curso sobre los contrastes realizados.

Hemos utilizado varios tipos de variables independientes o factores. En primer lugar, utilizamos dos variables independientes que identifican a los tipos de problemas empleados: la variable "tipo de expresión verbal" utilizada para enunciar la relación multiplicativa entre las cantidades, y la variable "cantidad desconocida" en el esquema de comparación, ambas variables manipuladas por el experimentador. También hay dos variables independientes de identificación de los sujetos: "el nivel escolar" y "el colegio". El nivel escolar es, fundamentalmente, una variable de desarrollo del niño, mientras que la variable colegio permite considerar diferentes modos o diferencias en la instrucción recibida por los niños sobre esta clase de problemas. Por último, hay una variable independiente, el "cuestionario", cuyos valores se corresponden con los tres grupos de alumnos a cada uno de los cuales se le aplica uno de los tres cuestionarios elaborados.

3.1.1. Variables independientes de tarea

Los problemas utilizados en este estudio han sido treinta problemas verbales de estructura multiplicativa correspondientes a las tres categorías que contempla Nesher (1988): "mapping rule" (proporcionalidad simple), comparación y producto cartesiano. Para cada una de estas categorías hemos empleado dos variables independientes: *tipo de expresión verbal* y *cantidad desconocida*.

En el caso de los problemas de comparación la variable "tipo de expresión verbal" la notamos con la letra R y toma cuatro valores R_1, R_2, R_3 y R_4. Para los problemas de proporcionalidad empleamos la letra X y toma también cuatro valores X_1, X_2, X_3 y X_4. En el caso de los problemas de producto cartesiano hay un sólo valor que hemos notado PC. La variable "cantidad desconocida" la notamos en todos los casos con la letra Q y toma tres valores Q_1, Q_2 y Q_3. La definición o descripción de los valores de estas variables se hace a continuación según la categoría de problemas.

<u>Problemas de comparación</u>

Los problemas de comparación utilizados pueden ser identificados en función de tres características distintas: a) en el tipo de comparación (aumento o disminución), b) en la forma de expresar verbalmente cada tipo de comparación y c) en cuál es la cantidad desconocida en el esquema de comparación: el comparado, el escalar o el referente. Puesto que no hay solapamiento entre el tipo de comparación y su expresión verbal, ya que la comparación de aumento se expresa verbalmente con términos distintos de la comparación de disminución, utilizaremos una sola variable independiente para expresar tanto al tipo de comparación como la forma de expresar verbalmente cada una de ellas.

En castellano la comparación de aumento se puede expresar mediante los términos relacionales: "veces más que" y "veces tanto como". Así mismo, la comparación de disminución se puede expresar mediante los términos relacionales: "veces menos que" y "tanto como una de las partes iguales que".

Tabla 3.1. Clases de problemas verbales simples de comparación multiplicativa.

Tipo (R_1,Q_1): 1.-Daniel tiene 12 canicas. María tiene 6 veces más canicas que Daniel. ¿Cuántas canicas tiene María?	Tipo (R_3,Q_1): 7.-Daniel tiene 12 canicas. María tiene 6 veces tantas canicas como Daniel ¿Cuántas canicas tiene María?.
Tipo (R_1,Q_2): 2.-María tiene 72 canicas. Daniel tiene 12 canicas. ¿Cuántas veces más canicas tiene María que Daniel?.	Tipo (R_3,Q_2): 8.-María tiene 72 canicas. Daniel tiene 12 canicas. ¿Cuántas veces tiene María tantas canicas como Daniel?.
Tipo (R_1,Q_3): 3.-María tiene 72 canicas. María tiene 6 veces más canicas que Daniel. ¿Cuántas canicas tiene Daniel?.	Tipo (R_3,Q_3): 9.-María tiene 72 canicas. María tiene 6 veces tantas canicas como Daniel ¿Cuántas canicas tiene Daniel?.
Tipo (R_2,Q_1): 4.-María tiene 72 canicas. Daniel tiene 6 veces menos canicas que María. ¿Cuántas canicas tiene Daniel?.	Tipo (R_4,Q_1): 10.-María tiene 72 canicas. Daniel tiene tantas canicas como una de las 6 partes iguales que tiene María. ¿Cuántas canicas tiene Daniel?.
Tipo (R_2,Q_2): 5.-Daniel tiene 12 canicas. María tiene 72 canicas. ¿Cuántas veces menos canicas tiene Daniel que María?.	Tipo (R_4,Q_2): 11.-Daniel tiene 12 canicas. María tiene 72 canicas. ¿Qué parte son las canicas de Daniel comparadas con las de María?.
Tipo (R_2,Q_3): 6.-Daniel tiene 12 canicas. Daniel tiene 6 veces menos canicas que María. ¿Cuántas canicas tiene María?.	Tipo (R_4,Q_3): 12.-Daniel tiene 12 canicas. Daniel tiene tantas canicas como una de las 6 partes iguales que tiene María ¿Cuántas canicas tiene María?.

Tabla 3.2. Clases de problemas verbales simples de proporcionalidad.

Tipo (X_1,Q_1): 1.-Ana compra 4 paquetes de caramelos; cada paquete contiene 12 caramelos, ¿cuántos caramelos ha comprado?.	Tipo (X_3,Q_1): 7.-Un sastre compra 3 piezas de tela; cada pieza mide 15 metros de largo, ¿cuántos metros de tela ha comprado?.
Tipo (X_1,Q_2): 2.-Ana compra 4 paquetes iguales de caramelos; en total ha comprado 48 caramelos, ¿cuántos caramelos hay en cada paquete?.	Tipo (X_3,Q_2): 8.-Un sastre compra 3 piezas iguales de tela; en total ha comprado 45 metros de tela, ¿cuántos metros mide cada pieza?.
Tipo (X_1,Q_3): 3.-Ana compra varios paquetes de 12 caramelos cada uno; en total ha comprado 48 caramelos, ¿cuántos paquetes ha comprado?.	Tipo (X_3,Q_3): 9.-Un sastre compra piezas de tela de 15 metros cada una; en total ha comprado 45 metros, ¿cuántas piezas de tela compró el sastre?.
Tipo (X_2,Q_1): 4.-Un profesor compra 4 lápices por niño; hay 16 niños en clase, ¿cuántos lápices ha comprado?.	Tipo (X_4,Q_1): 10.-Un ciclista lleva corriendo 6 horas; recorre 18 kilómetros por hora, ¿cuántos kilómetros ha recorrido?.
Tipo (X_2,Q_2): 5.-En una clase hay 16 niños. el profesor compra 64 lápices para los niños, ¿cuántos lápices por niño hay?.	Tipo (X_4,Q_2): 11.-Un ciclista lleva corriendo 6 horas; ha recorrido en total 108 kilómetros, ¿cuántos kilómetros por hora recorre?.
Tipo (X_2,Q_3): 6.-Un profesor compra 4 lápices por niño; en total ha comprado 64 lápices, ¿cuántos niños hay en clase?.	Tipo (X_4,Q_3): 12.-Un ciclista corre 18 kilómetros por hora; en total ha recorrido 108 kilómetros, ¿cuántas horas ha empleado?.

A esta variable la notamos con la letra R y, en este experimento toma cuatro valores R_1, R_2, R_3, R_4, correspondientes a las expresiones comparativas:

R_1 = "n veces más que"

R_2 = "n veces menos que"

R_3 = "n veces tanto como"

R_4 = "tantas como una de las n partes iguales"

Esta variable independiente se trata de un factor con efectos fijos.

La segunda característica diferenciadora de los problemas de comparación utilizados se refiere a cuál es la "cantidad desconocida" en el esquema de comparación. Esta variable independiente, la hemos notado con la letra Q, y toma tres valores:

Q_1 = "comparado desconocido"

Q_2 = "escalar desconocido"

Q_3 = "referente desconocido"

Esta variable independiente es un factor de efectos fijos cruzado con el factor R.

Problemas de proporcionalidad simple

Los problemas verbales de estructura multiplicativa de proporcionalidad simple que hemos utilizado en este experimento los hemos identificado en función de tres características: a) forma de conceptualizar o expresar verbalmente la proporcionalidad, b) tipo de magnitud cuantificada (discreta o continua), y c) cantidad desconocida en el esquema de proporcionalidad simple.

Hemos utilizado dos formas de conceptualizar la proporcionalidad. La expresión "cada uno" para caracterizar a los problemas de reiteración de cantidades y la expresión "por" para caracterizar a los problemas de tasa. Los tipos de magnitudes empleadas han sido dos: discreta, y continua con cantidades discretizadas. La consideración conjunta de estas dos variables da lugar a cuatro tipos de problemas que hemos notado de la siguiente manera:

X_1 = reiteración de cantidades discretas
X_2 = tasa de cantidades discretas
X_3 = reiteración de cantidades continuas discretizadas
X_4 = tasa de cantidades continuas discretizadas

Esta variable independiente se trata de un factor de efectos fijos y la notamos con la letra X.

La tercera característica diferenciadora que hemos utilizado para identificar los problemas de proporcionalidad simple es de la misma naturaleza que la empleada en los problemas de comparación. Por ello, la variable a la que da lugar la notamos con la misma letra Q. Para definirla partimos del esquema de proporcionalidad utilizado por Vergnaud (1988, p.150)

1	f(1)
x	f(x)

del que surgen tres tipos de problemas según cuales sean los dos valores conocidos y cuál el valor desconocido. Los valores de Q que corresponden a estos tres valores son:

Q_1 = desconocido f(x) (multiplicación)
Q_2 = desconocido f(1) (división partitiva)
Q_3 = desconocido x (división cuotitiva)

La variable independiente Q es un factor de efectos fijos cruzado con el factor X.

Problemas de producto cartesiano.

En el producto cartesiano dos conjuntos M_1 y M_2 se componen para dar un tercero M_3. Esta estructura puede ser representada con una tabla de doble entrada en la que M_1 son las filas, M_2 las columnas y M_3 las celdas o cruces de filas y columnas. Esquematizando esta representación gráfica tal como lo hace Vergnaud (1983, pp. 135-136) tenemos dos posibles tipos de problemas:

El primero de ellos corresponde al esquema

	M2	a	
M1 b		x	M3

en el que se conocen los valores de las cantidades que se componen y se desconoce el valor de la cantidad compuesta. Este tipo de problema lo hemos codificado como Q_1.

En el segundo tipo de problemas se conoce la cantidad compuesta y el valor de una de las componentes. Se trata de hallar la otra componente

	M2	a	
M1 x		c	M3

Hemos incluido dos problemas de este tipo: uno corresponde al caso en el que la componente desconocida es M1 y otro en el que lo es M2. Estos dos problemas han sido codificados como Q_2 y Q_3 respectivamente.

Las condiciones anteriores dan lugar a veintisiete problemas verbales simples distintos de estructura multiplicativa. El tipo de problemas de comparación correspondientes a R_4 lo hemos repetido empleando terminología fraccionaria para la comparación y en los tres valores de Q, por lo cual el total de problemas ha sido de treinta. Estos treinta problemas pueden ser visualizados como cada una de las casillas de la Tabla 3.3, donde el Bloque 1 son todos problemas de comparación, el Bloque 2 son todos problemas de proporcionalidad simple, R_5 es una replicación del problema de comparación R_4, y PC son los problemas de producto cartesiano.

3.1.2 Variable dependiente

La variable dependiente observada en cada niño es el éxito o fracaso en la comprensión de cada uno de los problemas que le planteamos. Si un niño no comprende correctamente un problema lo hemos puntuado con 0 en ese problema, y con 1, si su comprensión es correcta. No hemos considerado valores intermedios entre 0 y 1.

Tabla 3.3. Variantes de problemas empleados en esta investigación

	Bloque 1				Bloque 2					
	R_1	R_2	R_3	R_4	X_1	X_2	X_3	X_4	R_5	PC
Q_1										
Q_2										
Q_3										

Hemos considerado comprensión correcta el que el alumno siga un proceso que conduzca a la solución, independientemente de la operación empleada y de los posibles errores de cálculo. La suma de los valores de esta variable en el conjunto de problemas que resuelve un niño es el rendimiento del niño y también la hemos utilizado como variable dependiente. El valor medio de las puntuaciones de los diferentes alumnos, o, lo que es lo mismo, el porcentaje de respuestas correctas es el índice de dificultad relativa de comprensión del problema.

3.1.3 Variables de tarea controladas

Para que los problemas queden plenamente identificados en función de las variables R y Q hemos controlado otras variables de tarea (Kilpatrick, 1978) en los problemas verbales de estructura multiplicativa. En concreto, al redactar los problemas hemos controlado los siguientes tipos de variables de tarea:

-Variables de formato (Kilpatrick, 1978)
-Variables de contenido (Kulm, 1980)
-Variables de contexto (Kilpatrick, 1978)
-Variables de estructura (Kulm, 1980; Kilpatrick, 1978)

-Variables de sintaxis (Kulm, 1980)

Dentro de las opciones de formato posibles en las que se puede plantear un problema hemos utilizado exclusivamente el formato verbal para el conjunto de los treinta problemas. Es pues una variable absolutamente controlada.

El contenido matemático de los problemas ha sido controlado a nivel global y a nivel local. A nivel global puesto que la investigación se ciñe a un aspecto matemático muy concreto: problemas simples de estructura multiplicativa. A nivel local, es decir, a nivel de los contenidos matemáticos parciales que conforman los problemas se han controlado los siguientes aspectos:

-tipos de números

-tipos de magnitudes

-tamaño de los números

-relación operatoria entre los números

los números empleados en todos los problemas han sido números naturales, las magnitudes de tipo discreto, el número mayor de la terna de números en cada problema no sobrepasa la centena y los números que aparecen como datos son siempre divisibles.

Las variables de contexto se han controlado eligiendo contextos familiares para el alumno y de nivel de dificultad similar, por lo que dada la familiaridad del alumno con los cuatro contextos empleados los consideramos como el mismo tipo de contexto para los alumnos de 5º y 6º curso, que son a los que hemos aplicado los cuestionarios.

Las variables de estructura, con el sentido de ecuaciones algebraicas o algoritmos que hacen posible la solución del problema, han sido controladas de tal manera que no intervienen otras variables de estructura distintas a la empleada para identificar el conjunto de problemas, variable Q, y que actúa como variable independiente en esta investigación.

Las variables de sintaxis describen la disposición y la relación entre palabras, frases y símbolos en el enunciado verbal del problema. Puesto que estamos investigando problemas enunciados con palabras, los distintos valores de la variable Q han de ser traducidos a expresiones verbales que no son idénticas. La variable Q restringida a problemas verbales puede ser interpretada como una variable sintáctica que afecta a la secuencia de la información y a la posición de las sentencias u oraciones en el enunciado del problema. Estos aspectos sintácticos actúan como variable independiente y, por tanto, no pueden ser controlados. Son variables consustanciales con la variable Q.

Los restantes aspectos sintácticos que no interfieren con las variables independientes R y Q han sido controlados. Los que nos parecen más relevantes son los siguientes:

-longitud de los enunciados (Jerman y Rees, 1972)

-forma de disponer las oraciones

-tiempo de los verbos (todos en presente salvo el 8)

-presencia en el enunciado de anáforas pronominales

-inclusión de distractores (Jerman y Rees, 1972)
-presencia de palabras clave (Nesher, 1976)

La longitud de los enunciados de los problemas es lo más corta posible evitando con ello que la complejidad sintáctica pueda influir en el índice de dificultad de los problemas.

Las tres oraciones que conforman el problema están remarcadas mediante signos de puntuación ortográfica, y además, cada oración la hemos colocado en renglón distinto, lo que facilita la lectura.

El tiempo de los verbos empleados en todos los casos (excepto en el problema 8 de cada cuestionario) ha sido el presente.

Hemos procurado controlar la presencia o no de anáforas pronominales en los enunciados. La opción que hemos tomado ha sido la de no incluir este tipo de anáforas.

La inclusión de palabras clave y distractores también ha sido controlada. Especial mención debe hacerse de los problemas de comparación, pues en ellos aparecen términos asociados con la suma "más", con la resta "menos", con la multiplicación "veces" y con la división "partes". La presencia o no de palabras clave o distractores está condicionada por la identidad del problema, definida mediante R y Q. La consideración conjunta de estas dos variables determina qué problemas los incluyen y cuáles no.

En definitiva, la sintaxis de los problemas se ha mantenido constante siempre que ello no afectara a la variabilidad de los problemas impuesta por las variables R y Q, se ha elegido la opción de la menor complejidad sintáctica de los enunciados. Pensamos que de esta manera se puede detectar con mayor precisión el efecto de las variables semánticas y de la variable Q sobre el índice de dificultad de los problemas.

3.2. Instrumentos de evaluación

En este estudio hemos utilizado dos tipos de instrumentos de evaluación: a) cuestionarios escritos de respuesta libre propuestos a la vez a todos los niños de un mismo grupo en su misma clase, y b) entrevistas individuales a niños seleccionados. Describimos en primer lugar los cuestionarios.

3.2.1 Composición de los cuestionarios

En el conjunto de los treinta problemas la diferencia existente entre problemas con la misma estructura semántica se refiere sólo a cuál es la cantidad desconocida. Así mismo, aquellos en los que la cantidad desconocida es de la misma naturaleza, los problemas difieren sólo en la forma de conceptualizar verbalmente el problema. Esto hace que los problemas puedan ser identificados por los sujetos como iguales cuando no lo son, que el niño pueda utilizar el conocimiento adquirido durante la resolución de un problema para extrapolarlo a otro, o que el alumno se canse o se aburra ante problemas que presentan apariencia externa muy semejante. Como consecuencia de estos efectos se puede provocar una interpretación "perversa" de los resultados.

Para tratar de evitar estos efectos y que los resultados obtenidos sean lo más válidos posibles, hemos impuesto una serie de condiciones o restricciones a la composición de las pruebas escritas (cuestionarios) de resolución de problemas.

Restricción 1

La primera restricción se refiere al número y al tipo de problemas que hemos incluido en cada cuestionario. Para evitar en lo posible los efectos antes señalados, hemos adoptado el criterio de incluir un problema por cada una de las formas posibles de expresar verbalmente las distintas categorías semánticas. Esto nos ha dado un total de diez problemas por cada cuestionario y un total de tres cuestionarios distintos. Los cuatro primeros problemas de cada cuestionario son problemas de comparación multiplicativa, los cuatro siguientes son de isomorfismo de medidas o proporcionalidad, el noveno es una réplica fraccionaria del cuarto problema de comparación y el décimo es un problema de producto cartesiano.

Lo que diferencia un cuestionario de otro es que por cada forma de expresar verbalmente cada categoría semántica, la cantidad desconocida en el problema difiere para cada uno de los cuestionarios. Hemos adoptado también el criterio de que los cuatro problemas de comparación en cada cuestionario se diferencien por la variable Q. Puesto que son cuatro problemas de comparación los que están incluidos en cada cuestionario y Q sólo tiene tres valores, el criterio anterior sólo se puede cumplir parcialmente y hay que repetir un mismo valor de Q. En Castro (1991, pp.138-140) se detallan las razones de por qué entre las composiciones posibles elegimos las que aparecen a continuación

Composición 1

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	X			X
Q_2		X		
Q_3			X	

Composición 2

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1			X	
Q_2	X			X
Q_3		X		

Composición 3

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1		X		
Q_2			X	
Q_3	X			X

Como se puede observar decidimos que los valores de R_4 estuvieran emparejados con los de R_1 en los tres cuestionarios. Esto se ha hecho así para mantener el criterio de que en cada cuestionario los problemas deben ser lo más distintos entre sí para evitar los efectos susodichos. Y, para cada valor de la variable Q los problemas correspondientes a R_1 y R_4 son los tipos de problemas que menos tienen en común. En efecto, mientras que R_1 y R_4 difieren en la relación de comparación y en que producen efectos contrarios, R_1 de aumento y R_4 de disminución, con respecto a los otros niveles R_2 y R_3, el factor R_4 mantiene una sola diferencia: R_4 y R_2 se diferencian en la relación de comparación, y R_4 con R_3 sólo se diferencian en que son relaciones inversas: una produce aumento y la otra disminución.

Por razones similares a las expuestas y por la razón añadida de poder aplicar los mismos análisis estadísticos, para la elección de los problemas de proporcionalidad hemos adoptado los mismos esquemas de composición que para los problemas de comparación.

En cada cuestionario el problema noveno es una réplica del cuarto, siendo el valor de Q el mismo para ambos.

El problema diez de cada cuestionario tiene también el mismo valor de Q que los problemas uno, cuarto, quinto, octavo y noveno.

Con todo lo dicho los tres cuestionario de resolución de problemas se han elaborado en base a las tres composiciones que aparecen en las Tablas 3.4, 3.5 y 3.6. En ellas, están marcadas con cruces las casillas que identifican los problemas incluidos en esos cuestionario.

Tabla 3.4. Problemas incluidos en el Cuestionario 1

	Bloque 1				Bloque 2					
	R_1	R_2	R_3	R_4	X_1	X_2	X_3	X_4	R_5	PC
Q_1	X			X	X			X	X	X
Q_2		X				X				
Q_3			X				X			

Tabla 3.5. Problemas incluidos en el Cuestionario 2

	Bloque 1				Bloque 2					
	R_1	R_2	R_3	R_4	X_1	X_2	X_3	X_4	R_5	PC
Q_1			X				X			
Q_2	X			X	X			X	X	X
Q_3		X				X				

Tabla 3.6. Problemas incluidos en el Cuestionario 3

	Bloque 1				Bloque 2					
	R_1	R_2	R_3	R_4	X_1	X_2	X_3	X_4	R_5	PC
Q_1		X				X				
Q_2			X				X			
Q_3	X			X	X			X	X	X

En función de lo anterior hicimos una distribución de los treinta problemas. Los enunciados de los diez problemas que conforman cada cuestionario o prueba aparecen al final de este apartado.

Restricción 2

La segunda restricción del diseño se refiere a las ternas de números, a las cantidades discretas y a los personajes ficticios empleados en los enunciados de los problemas. El control absoluto de estas variables en los problemas exige la utilización de una sola terna de números, de unos mismos tipos de cantidades y de unos mismos nombres para los personajes ficticios en todos los problemas. Por las razones que exponemos en el estudio exploratorio (Castro, 1991, p.132) esto favorece la aparición del efecto de aprendizaje en los niños. Hemos decidido por ello que en lugar de un control absoluto, estas variables tomen valores distintos pero que puedan ser considerados "razonablemente" como equivalentes.

En el caso de las ternas de números empleadas en un problema se han elegido aleatoriamente entre aquellas que cumplan una serie de condiciones bastante restrictivas.

La primera limitación impuesta a la terna de números es que los números de la terna sean divisibles dos a dos. Esta condición trata de evitar que si los números no son divisibles el niño deseche la división como la operación adecuada para obtener la respuesta. Por ejemplo, la terna (6,12,72) cumple esta condición, ya que 6 es divisor de 12, 6 es divisor de 76, y 12 es divisor de 72.

La segunda limitación es que no haya en la terna dos números iguales, por ejemplo

6x6=36. Esta condición se impone por que para describir e interpretar adecuadamente las respuestas de los niños, sobre todo en caso de error, es básico para el investigador establecer la diferencia a nivel numérico entre multiplicando y multiplicador. Esta diferencia se materializa en la mayoría de los casos eligiendo para el multiplicador y el multiplicando números menores que diez y números entre diez y veinte, respectivamente. La única excepción han sido los problemas de producto cartesiano.

El número menor de la terna se ha evitado que sea dos, porque además de ser una terna excesivamente fácil para los sujetos de la muestra, si el niño suma la otra cantidad consigo misma no podemos estar seguros de que lo que ha dado es una solución basada en una simple adición, en cuyo caso podría no haber comprendido el problema, o una solución basada en adiciones repetidas, en cuyo caso sí hay comprensión por parte del sujeto.

Dentro de cada bloque de problemas se ha procurado incluir ternas con similar índice de dificultad. En el bloque de problemas de comparación las ternas utilizadas han sido (3,18,54), (4,16,64), (5,15,75), (6,12,72); en el bloque de problemas de proporcionalidad: (4,12,48), (4,16,64), (3,15,45), (6,18,108); y en el problema nueve (4,12,48). En el problema diez, de producto cartesiano, se consideró que era excesivamente difícil para los niños de la muestra y para favorecer las soluciones no basadas en la aplicación directa de las operaciones de multiplicar y dividir se eligió una terna más sencilla (2,6,12).

En cuanto a las cantidades discretas y los nombres de los personajes ficticios que aparecen en los problemas se han elegido con la condición de que fueran familiares a los niños para que no les plantearan dificultades. La asignación de las ternas, las cantidades discretas y los nombres de los personajes ficticios a los problemas se ha hecho aleatoriamente, pero la disposición resultante para un cuestionario se ha mantenido constante en los otros dos cuestionarios. En la Tabla 3.7 se refleja cuales han sido los valores asignados a estas variables para los diez problemas en cada uno de los cuestionario.

Tabla 3.7. Ternas de números, personajes y cantidades incluidas en los enunciados de los problemas

Problema	Terna	Personaje	Cantidad
1	(4,16,64)	Daniel-María	caramelos
2	(3,18,54)	Luis-Pilar	globos
3	(6,12,72)	Marta-José	canicas
4	(5,15,75)	Nuria-Jaime	bolas
5	(4,12,48)	Ana	paquetes-caramelos
6	(4,16,64)	profesor	niños-lápices
7	(3,15,45)	sastre	piezas-metros
8	(6,18,108)	ciclista	horas-kilómetros

9	(4,12,48)	Elena-Javier	pegatinas
10	(2,6,12)	Yo	camisetas-pantalones

Los enunciados que hemos redactado para los treinta problemas en base a las consideraciones anteriores y tal como se les presentaron a los niños los presentamos a continuación.

HOJA DE PROBLEMAS 1

Colegio:____ Fecha de hoy:________________

Nombre y apellidos:____

Fecha de nacimiento: día________ mes________ año_________ Curso:_______ Grupo:_______

Problema 1

Daniel tiene 16 caramelos.
María tiene 4 veces más caramelos que Daniel.
¿Cuántos caramelos tiene María?

Solución:____

Problema 2

Luis tiene 18 globos.
Pilar tiene 54 globos.
¿Cuántas veces menos globos tiene Luis que Pilar?

Solución:____

Problema 3

Marta tiene 72 canicas.
Marta tiene 6 veces tantas canicas como José.
¿Cuántas canicas tiene José?

Solución:____

Problema 4

Nuria tiene 75 bolas.
Jaime tiene tantas bolas como una de las 5 partes iguales que tiene Nuria.
¿Cuántas bolas tiene Jaime?

Solución:____

HOJA DE PROBLEMAS 1 (Continuación)

Problema 5

Ana compra 4 paquetes de caramelos;
cada paquete contiene 12 caramelos.
¿Cuántos caramelos ha comprado?

Solución:______________________________

Problema 6

En una clase hay 16 niños;
el profesor compra 64 lápices para los niños.
¿Cuántos lápices por niño hay?

Solución:______________________________

Problema 7

Un sastre compra piezas de tela de 15 metros cada una;
en total ha comprado 45 metros.
¿Cuántas piezas de tela compró el sastre?

Solución:______________________________

Problema 8

Un ciclista lleva corriendo 6 horas;
recorre 18 kilómetros por hora.
¿Cuántos kilómetros ha recorrido?

Solución:______________________________

Problema 9

Elena tiene 48 pegatinas.
Javier tiene tantas pegatinas como la cuarta parte de Elena.
¿Cuántas pegatinas tiene Javier?

Solución:______________________________

Problema 10

Tengo 6 camisetas y 2 pantalones.
¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?

Solución:______________________________

HOJA DE PROBLEMAS 2

Colegio:____Fecha de hoy:_________________

Nombre y apellidos:____

Fecha de nacimiento: día________mes________año_________ Curso:_______ Grupo:_______

Problema 1

María tiene 64 caramelos.
Daniel tiene 16 caramelos.
¿Cuántas veces más caramelos tiene María que Daniel?

Solución:____

Problema 2

Luis tiene 18 globos.
Luis tiene 3 veces menos globos que Pilar.
¿Cuántos globos tiene Pilar?

Solución:____

Problema 3

José tiene 12 canicas.
Marta tiene 6 veces tantas canicas como José.
¿Cuántas canicas tiene Marta?

Solución:____

Problema 4

Jaime tiene 15 bolas.
Nuria tiene 75 bolas.
¿Qué parte son las bolas de Jaime comparadas con las de Nuria?

Solución:____

HOJA DE PROBLEMAS 2 (Continuación)

Problema 5

Ana compra 4 paquetes iguales de caramelos;
en total ha comprado 48 caramelos.
¿Cuántos caramelos hay en cada paquete?

Solución:____

Problema 6

Un profesor compra 4 lápices por niño;
en total ha comprado 64 lápices.
¿Cuántos niños hay en clase?

Solución:____

Problema 7

Un sastre compra 3 piezas de tela;
cada pieza mide 15 metros de largo.
¿Cuántos metros de tela ha comprado?

Solución:____

Problema 8

Un ciclista lleva corriendo 6 horas;
ha recorrido en total 108 kilómetros.
¿Cuántos kilómetros por hora recorre?

Solución:____

Problema 9

Javier tiene 12 pegatinas.
Elena tiene 48 pegatinas.
¿Qué parte son las pegatinas de Javier comparadas con las de Elena?

Solución:____

Problema 10

Tengo 6 camisetas que al combinarlas con los
pantalones me permiten 12 formas distintas de vestirme.
¿De cuántos pantalones dispongo?

Solución:____

HOJA DE PROBLEMAS 3

Colegio:____Fecha de hoy:_________________

Nombre y apellidos:____

Fecha de nacimiento: día_________mes_________año__________ Curso:_______ Grupo:_______

Problema 1

María tiene 64 caramelos.
María tiene 4 veces más caramelos que Daniel.
¿Cuántos caramelos tiene Daniel?

Solución:____

Problema 2

Pilar tiene 54 globos.
Luis tiene 3 veces menos globos que Pilar.
¿Cuántos globos tiene Luis?

Solución:____

Problema 3

Marta tiene 72 canicas.
José tiene 12 canicas.
¿Cuántas veces tiene Marta tantas canicas como José?

Solución:____

Problema 4

Jaime tiene 15 bolas.
Jaime tiene tantas bolas como una de las 5 partes iguales que tiene Nuria.
¿Cuántas bolas tiene Nuria?

Solución:____

HOJA DE PROBLEMAS 3 (Continuación)

Problema 5

Ana compra varios paquetes de 12 caramelos cada uno;
en total ha comprado 48 caramelos.
¿Cuántos paquetes ha comprado?

Solución:______________________________

Problema 6

Un profesor compra 4 lápices por niño;
hay 16 niños en clase.
¿Cuántos lápices ha comprado?

Solución:______________________________

Problema 7

Un sastre compra 3 piezas iguales de tela;
en total ha comprado 45 metros de tela.
¿Cuántos metros mide cada pieza?

Solución:______________________________

Problema 8

Un ciclista corre 18 kilómetros por hora;
en total ha recorrido 108 kilómetros.
¿Cuántas horas ha empleado?

Solución:______________________________

Problema 9

Javier tiene 12 pegatinas.
Javier tiene tantas pegatinas como la cuarta parte de Elena.
¿Cuántas pegatinas tiene Elena?

Solución:______________________________

Problema 10

Tengo varias camisetas que al combinarlas con
mis 2 pantalones me permiten 12 formas distintas de vestirme.
¿De cuántas camisetas dispongo?

Solución:______________________________

3.3. Los sujetos

Para obtener información relevante sobre la influencia de las variables de tarea R y Q sobre el índice de dificultad y sobre los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas de comparación no podemos elegir sujetos de cualquier nivel escolar. Un nivel escolar excesivamente bajo provocaría un fracaso generalizado de todos los niños en todos los problemas. Por el contrario, un nivel excesivamente alto provocaría un éxito generalizado en la mayoría de los problemas y como consecuencia en uno u otro caso no obtendríamos información relevante de cómo influyen las variables de tarea R y Q en las soluciones que dan los estudiantes.

En el estudio exploratorio (Castro, 1991, pp. 131-134) se describe el proceso que seguimos en su momento para evitar el efecto suelo y el efecto techo, y que nos condujo a identificar los niveles de alumnos más adecuados para constituir la muestra. En ese estudio se decidió que eran los alumnos de 5º y 6º curso de Enseñanza Primaria los más adecuados. Después de analizar los datos del experimento exploratorio no hemos encontrado razones para pensar que esta elección fuese equivocada. Por lo tanto, la vamos a mantener en el estudio confirmatorio.

Los sujetos utilizados en este estudio han sido niños de ambos sexos de 5º y 6º curso de Enseñanza Primaria, de edades comprendidas entre 10 y 13 años, pertenecientes a colegios situados en distintas áreas urbanas de la ciudad de Granada. Los colegios se han elegido de forma intencional con la condición de que hubiera colegios públicos y privados, y que no todos pudieran catalogarse como colegios representativos de poblaciones con el mismo status socioeconómico. También se han evitado los colegios con rendimiento académico extremo. Se han evitado, por ejemplo, las unidades de educación especial, ya que producirían el efecto suelo.

El número de colegios utilizados ha sido seis. En cada colegio se ha elegido al azar un grupo de 5º y otro de 6º. En la aplicación de los cuestionarios se ha respetado la composición de los grupos de 5º y 6º existentes en los colegios.

Las pruebas se han aplicado en el tercer trimestre del curso 1992-93, durante el mes de Abril.

El tamaño de la muestra escolar sometida a la prueba ha sido de 386, de los cuales 194 corresponden a 5º y 192 a 6º. El tamaño de cada grupo puede observarse en la Tabla 3.8, y como vemos el grupo más pequeño tiene 27 alumnos.

Debido a que en la recogida de los datos se respetó la distribución de los alumnos según los grupos ya existentes en los colegios, el número de alumnos por grupo no era el mismo. Por ello, y por la ventaja que implica respecto al análisis estadístico y a su interpretación, se decidió recurrir a un diseño equilibrado, esto es, con igual número de alumnos en cada una de las combinaciones de los niveles de las variables independientes.

Tabla 3.8. Número de alumnos en cada grupo

	Colegio						
	1	2	3	4	5	6	Total
Nivel 5°	36	40	32	29	30	27	194
Nivel 6°	31	27	40	39	28	27	192
Total	67	67	72	68	58	54	386

Para conseguirlo, recurrimos a eliminar al azar de cada grupo de la muestra a tantos alumnos como excedían de nueve por prueba, lo que nos da un total de veintisiete alumnos por grupo. Este proceso igualó el número total de sujetos que han realizado cada prueba (108), el número de sujetos que han intervenido de cada grupo (27), curso (162) y colegio (54). El número de sujetos desechados ha sido 62. Sólo a los datos proporcionados por la muestra que constituyen los 324 sujetos restantes se le ha aplicado el análisis estadístico.

3.4. Procedimiento de aplicación

Los tres cuestionarios de problemas escritos se pasaron a todo el grupo a la vez en su aula. Los niños estaban sentados en sus sitios habituales. Para evitar una posible causa de invalidez de las respuestas producida por los niños que pudieran fijarse en las respuestas de otro compañero, se tomó la precaución de que cada niño hiciese un sólo cuestionario, y que al repartir aleatoriamente los cuestionarios se hiciese mediante un proceso de aleatorización sistemática, de tal manera que cada niño no resolvía la misma prueba que su compañero más próximo. Además, el investigador advertía que las pruebas eran distintas y que, si se fijaban en el compañero, posiblemente se equivocarían. El investigador instaba también a los niños para que respondieran en conciencia "según lo que ellos pensaran que era la solución sin fijarse en el compañero, por que de otra manera "no servirían sus respuestas". Por regla general los niños aceptaron estas indicaciones y resolvieron en silencio y con interés los diez problemas. El tiempo empleado por los niños para resolver los diez problemas de cada cuestionario osciló entre 15 y 45 minutos.

Antes de repartir los cuestionarios de problemas se le dio a los niños una hoja de instrucciones para la realización de la prueba (véase cuadro adjunto) y les pedimos que las leyeran. Concluida esta lectura preliminar se le preguntó si necesitaban alguna aclaración.

Independientemente de que se pidieran o no aclaraciones el investigador incidía en una explicación oral de las instrucciones. Fundamentalmente instábamos a los niños a que escribieran todas las operaciones necesarias para resolver un problema en el espacio reservado al mismo, incluso aunque las supieran hacer de memoria, y que no dieran como respuesta sólo un número, si no que escribieran qué significaba aquel número.

INSTRUCCIONES
1. Rellenar todos los datos que se piden en la primera hoja. 2. Resolver los problemas según el orden en el que se presentan. 3. Escribir todas las operaciones necesarias para resolver cada problema en el espacio en blanco que hay a continuación del problema. 4. Escribir la solución en el espacio reservado a la misma. 5. No des como solución sólo un número. Escribe la solución dando el número y lo que ese número significa. Por ejemplo, en el siguiente problema Juan tenía 5 pesetas. Carmen le da 3 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene ahora Juan?. la solución se pondría en la forma: Solución: Juan_tiene_8_pesetas 6. Subrayar las palabras o expresiones que no entendáis en cada uno de los problemas.

Una vez resueltas las posibles dudas sobre las instrucciones a seguir en la resolución de los problemas, se repartieron los cuestionarios.

Previo a la aplicación de las pruebas a los sujetos de la muestra no hubo indicaciones por nuestra parte para que estos niños fueran especialmente instruidos en algún tópico relacionado con los contenidos de la investigación. Los niños siguieron la instrucción que normalmente imparte su profesor y en el mes de Abril de 1993 y sin previo aviso a los niños se les aplicaron los cuestionarios de problemas. Los profesores no conocían de antemano el contenido de las pruebas aplicadas.

3.5. Codificación de las respuestas

Las respuestas escritas dadas por los niños a los problemas han sido catalogadas como correctas o como incorrectas. Si un niño no ha dado respuesta a un problema se ha catalogado como incorrecta. En las respuestas dadas por los niños, y puesto que esta investigación se refiere a dificultades de comprensión, la decisión de si una respuesta es correcta o no se ha basado en si el proceso seguido por el niño le conducía o no a la obtención del resultado correcto. Hemos dado por correctas soluciones en las que el sujeto ha elegido una operación adecuada pero se ha equivocado al operar y daba como resultado un número incorrecto. Se han dado también como correctas respuestas obtenidas mediante estrategias distintas que conducen a la solución. Así, las respuestas a un problema como el R_2Q_2, consistentes en dividir los datos, multiplicar por el factor desconocido, realizar restas reiteradas del dato menor sobre el mayor hasta llegar a cero, o realizar sumas reiteradas del dato menor hasta alcanzar el mayor, han sido consideradas como correctas. Para el tratamiento estadístico las respuestas correctas han sido codificadas como 1 y las respuestas incorrectas como 0.

3.6. Idoneidad de las medidas: Fiabilidad y validez

En esta investigación hemos tomado como variable dependiente el éxito o fracaso en la comprensión de problemas verbales de comparación multiplicativa y hemos definido una medida de la misma. Es un aspecto fundamental en la planificación de nuestra investigación asegurarnos que esta medida es apropiada. Los requisitos más importantes que debe cumplir una medida para ser idónea son los de *fiabilidad* y *validez*.

Fiabilidad

Hemos realizado dos estudios de fiabilidad. El primero es el cálculo de la fiabilidad como consistencia interna de los tres Cuestionarios o Tests empleados en la recogida de datos. El segundo es el cálculo de la fiabilidad como estabilidad de las respuestas a tres ítems específicos.

3.6.1. Consistencia interna de los Cuestionarios

Los coeficientes de fiabilidad como consistencia interna de los tres Cuestionarios utilizados los hemos calculado con la fórmula 20 de Kuder-Richardson (KR-20) y están listados en la Tabla 3.9. Los coeficientes de fiabilidad obtenidos son aceptables dado el pequeño número de ítems en cada Cuestionario.

Tabla 3.9. Coeficientes de fiabilidad

Cuestionario 1 (10 ítems)	r=0.66
Cuestionario 2 (10 ítems)	r=0.80
Cuestionario 3 (10 ítems)	r=0.78

3.6.2. Estabilidad de las respuestas

Para el estudio que estamos realizando es importante asegurarnos una cierta estabilidad en el tiempo de las respuestas de los niños. El tipo de medida (0-1) que hemos utilizado en esta investigación para codificar la respuesta de cada niño a cada problema es una razón para ello. Para asegurarnos que los cambios producidos en las respuestas son producto de las manipulaciones de las variables independientes, hemos controlado la estabilidad de las respuestas de los niños en cada problema. Es decir, hemos controlado si esta medida es fiable en el sentido de que las respuestas de los mismos niños a un mismo problema, en ocasiones distintas, y en las mismas condiciones, reciben la misma puntuación.

Planteamos así un problema particular dentro de lo que se entiende por estudio de la fiabilidad de un test según los principios psicométricos clásicos, ya que estos principios se aplican al estudio de instrumentos que contienen varias cuestiones o ítems. Buscar la fiabilidad de una pregunta aislada impide el uso de métodos válidos para el cálculo de la fiabilidad de los tests, tales como el de las *dos mitades* o el método de *consistencia interna* que utiliza el alfa de Cronbach o las fórmulas de Kuder-Richardson.

Hemos optado en esta investigación por la solución que da Guttman a la estimación de la fiabilidad de una pregunta aislada (Bacher, 1982, pp.119-122). En particular, utilizamos el procedimiento de variables cruzadas, que permite estimar un límite superior e inferior del coeficiente de fiabilidad. El método requiere dos aplicaciones del mismo problema a los niños, lo cual nos llevaría a tener que hacer dos pasaciones del mismo cuestionario a los mismos sujetos, si queremos calcular la fiabilidad de las respuestas a cada uno de los doce problemas. Esto es prácticamente inviable, y conduce a problemas similares a los que plantea el método *test-retest* (Santisteban, 1990, p.52). Para evitar estos problemas hemos recurrido a la técnica de *medidas paralelas* pero restringidas a un sólo ítem por cuestionario. Este método es similar al de la estimación de la fiabilidad por *división en dos mitades* de un test, particularizado en nuestro caso a un test que supuestamente tenga dos ítems. Esta idea no es nueva, la fiabilidad de un cuestionario según Bisquerra es "la congruencia entre las respuestas a preguntas congruentes (preguntas iguales formuladas de forma diferente a lo largo del cuestionario)" (Bisquerra, 1989b, p.102).

Estamos fundamentalmente interesados en estimar la estabilidad de las respuestas a los tres problemas que contienen la expresión R_4, puesto que es la expresión menos usual para expresar la comparación, y a priori, la menos fiable. Para ello hemos incorporado en cada cuestionario una réplica de uno de estos tres problemas con las mínimas variantes posibles. Los problemas ocupan los lugares cuatro y nueve respectivamente en cada cuestionario. En el caso de los problemas tipo Q_1 y Q_3 las réplicas respectivas difieren en la expresión verbal, en los personajes y en la terna de números utilizada en su redacción. La pareja de problemas tipo Q_2 difieren sólo en los personajes y en la terna de números, la expresión utilizada es la misma.

Al ser el método que vamos a utilizar para la estimación de la estabilidad de las respuestas de *medidas repetidas* debemos asegurarnos que cumplen las condiciones formales de paralelismo para que se les pueda considerar como *medidas paralelas* (Santisteban, 1990, p.53). En nuestro caso, para considerar los resultados de cada pareja de problemas provenientes de medidas paralelas tenemos que asegurar que ambos problemas tienen la misma media y la misma varianza (Santisteban, 1990, pp.32-35). Los resultados obtenidos en nuestra investigación para cada par de problemas paralelos no tienen exactamente la misma media y varianza (véase Tabla 3.10), por lo que hay que recurrir a contrastar las hipótesis de no existencia de diferencias significativas entre las medias y entre las varianzas en base a los datos recogidos (Santisteban, 1990, p.36).

En la primera pareja de problemas repetidos hay diferencias en las medias y en las varianzas. Por tanto, para comprobar si son o no medidas paralelas hay que realizar sendos contrastes de hipótesis para decidir si hay o no diferencias significativas entre las medias y entre las varianzas.

El contraste de medias da el valor z=0.80 que es menor que 1.96 correspondiente al nivel de significación del 5%. Aceptamos pues que no hay diferencias significativas entre las medias del primer par de problemas repetidos.

Tabla 3.10. Medias y varianzas de las tres parejas de problemas paralelos.

Parejas	Media	Desv. típica	Varianza
Problema R_4Q_1	.769	.424	.180
Problema R_5Q_1	.722	.450	.202
Problema R_4Q_2	.389	.490	.240
Problema R_5Q_2	.407	.494	.244
Problema R_4Q_3	.676	.470	.221
Problema R_5Q_3	.685	.467	.218

Para contrastar la hipótesis que las varianzas son iguales al nivel de significación del 5 por 100, hemos utilizado la F de Snedecor. La razón experimental F es igual a 0.202/0.180=1.12. Como grados de libertad del numerador y del denominador hemos tomado 107. El valor $F_{(0.025;107,107)}$=1.47. Por lo que al ser $F_{exp} < 1.47$ aceptamos la hipótesis nula de igualdad de varianzas al nivel de significación del 5 por 100. El primer par de problemas son pues formas paralelas de un mismo problema.

Las parejas de problemas dos y tres tienen medias distintas y varianzas iguales. En cada una de estas parejas debemos contrastar sólo la hipótesis de no existencia de diferencias significativas entre las medias. Como resultado del contraste de hipótesis realizado para la pareja segunda hemos obtenido una z=0.27, por lo cual concluimos que no hay diferencias significativas entre estas dos medias al nivel de significación del 5 por 100. Para la tercera pareja hemos obtenido una z=0.15, con lo cual tampoco hemos encontrado diferencias significativas entre las medias de estos problemas al nivel de significación del 5 por 100.

Los contrastes anteriores prueban que *las tres parejas de problemas se pueden tomar como medidas paralelas* y, por tanto, a partir de ellas podemos estimar la fiabilidad de las medidas.

Si notamos con ρ la fiabilidad de un problema para una muestra de sujetos tal como la define Guttman, los límites inferior y superior obtenidos para los tres tipos de problemas están listados en la Tabla 3.11.

Tabla 3.11. Coeficientes de estabilidad

Problema tipo Q_1:	$.67 \leq \rho \leq .91$
Problema tipo Q_2:	$.92 \leq \rho \leq .96$
Problema tipo Q_3:	$.56 \leq \rho \leq .67$

De acuerdo con estos datos, y siguiendo la terminología que se utiliza para interpretar la correlación (Bisquerra, 1987, p.189), la fiabilidad como estabilidad de las medidas realizadas con el problema tipo Q_2 es muy alta, la de los problemas tipo Q_1 es alta, mientras que la medida obtenida mediante el problema tipo Q_3 tienen una estabilidad que oscila entre moderada y alta. Hay que señalar que los problemas con menor fiabilidad Q_3 y Q_1 están redactados con expresiones similares, pero no idénticas. Sin embargo, en el problema con mayor fiabilidad, el tipo Q_2, los dos problemas incorporan la misma expresión comparativa. Estos aspectos pueden haber influido en el intervalo de fiabilidad estimado, y como consecuencia podemos pensar que aunque sean problemas paralelos, el cambio de expresión en la redacción de la comparación provoca una bajada en la fiabilidad. En consecuencia, cabe pensar que las medidas obtenidas en base a estos dos problemas tiene una fiabilidad superior a la que expresa su correlación con problemas paralelos pero que no son idénticos.

Si no hacemos distinción entre problemas según la variable Q y consideramos los tres problemas conjuntamente podemos estimar mediante el método anterior un único intervalo de fiabilidad para la medida obtenida a través de estos problemas. El intervalo obtenido para la fiabilidad es

$$0.72 \leq \rho \leq 0.91$$

que corresponde a una fiabilidad que oscila entre un límite inferior alto y un límite superior muy alto.

Validez

En esta investigación estamos utilizando como unidades de medidas las cuestiones aisladas, es decir, cada uno de los doce problemas seleccionados actúa como una unidad de medida. Queremos ahora poner de manifiesto la validez de las medidas, pues como dice Nunnally, "después de haber seleccionado un modelo para elaborar un instrumento de medición y después de haberlo construido, el siguiente paso es demostrar su utilidad. A menudo se dice que este paso del proceso es el que determina la *validez* del instrumento"(Nunnally, 1987, p.99). Este autor entiende que "un instrumento de evaluación es válido si cumple satisfactoriamente el propósito con el que se diseñó" (p.99). Desde este punto de vista no se valida el instrumento de manera aislada, si no en concordancia con el uso que se le da.

Teniendo en cuenta que en nuestra investigación hemos delimitado un *universo de contenido específico,* y que los problemas seleccionados representan ese universo de contenido, según Nunnally corresponde estudiar el tipo de validez conocido como *validez de contenido* (p.100).

Desde el punto de vista clásico en la construcción de tests psicométricos hay dos cuestiones fundamentales en la validez de contenido: la *relevancia del contenido* y el *contenido cubierto* (Messick, 1980, p.1015). La relevancia del contenido, se refiere a la especificación del dominio de la conducta en cuestión y a la correspondiente especificación de la tarea o dominio del test. El otro aspecto es el contenido cubierto, que se refiere a que los elementos del test representen adecuadamente al dominio, es decir, que las cuestiones incluidas en el test sean una muestra representativa de la clase de problemas sobre los que se extraerán conclusiones.

Los requisitos a cumplir para determinar si un instrumento de evaluación tiene o no validez de contenido son difíciles de establecer de manera general para todos los casos. En la construcción de ciertos instrumentos, la validez se hace depender de que se haya realizado un muestreo aleatorio dentro del dominio específico. Pero, como señala Nunnally, "en muchos casos estos criterios no son fáciles de juzgar" y continúa diciendo "A menudo es lógicamente imposible, o cuando menos impráctico, tratar de muestrear el contenido" (p.105). Otros autores también han cuestionado este aspecto, así según Silva (1989, p.122) el concepto de validez de contenido basado en el muestreo ha sido puesto seriamente en cuestión en el desarrollo más reciente de la corriente psicométrica. Silva recoge ideas de Thorndike "hablar de muestreo de contenidos es por lo menos extraño y llevaría a confusión" y de Loevinger "hablar de muestreo a partir de una población de contenidos representa una extensión abusiva del concepto de muestreo".

Según Nunnally "la validez de contenido estriba principalmente en la propiedad del contenido y en la forma en que éste se presenta" (pp.107-108). Frente a posibles interpretaciones alternativas Nunnally mantiene que "la validez de contenido más apropiada es tener en cuenta el plan del contenido y el de construcción de los reactivos" (p.126).

Un aspecto importante es decidir cómo se determina la validez de contenido en un caso concreto. A este respecto hay bastante unanimidad en considerar el consenso de la comunidad experta en el tema como un criterio de validez. Veamos como expresan esta idea diversos autores:

> Para Visauta este tipo de validación debe realizarse de tal manera "que no sea una única persona sino un grupo, a priori considerado como experto en el campo a medir, el que lleve a cabo la validación lógica o de contenido" (Visauta, 1989, p.215).
>
> Santisteban afirma que "La validez de contenido se determina a través de juicios subjetivos, y no existen procedimientos ni índices estadísticos adecuados para estimarla"(Santisteban, 1990, p.151).
>
> Así mismo, Messick escribe que "Juicios consensuados acerca de la relevancia del dominio del test como un dominio particular de conducta de interés, junto con juicios de la adecuación del contenido cubierto en el test, son los tipos de evidencia usualmente ofrecidos para la validez de contenido" (Messick, 1980, p.1018).

Guion (1977) propone cinco condiciones necesarias para aceptar una medida en base a su contenido:

> <u>Primera</u>: El dominio de contenido debe estar enraizado en una conducta con un significado generalmente aceptado.
>
> <u>Segunda</u>: El dominio de contenido debe ser definido sin ambigüedad.
>
> <u>Tercera</u>: El dominio de contenido debe ser relevante para los propósitos de la medida.
>
> <u>Cuarta</u>: Jueces cualificados deberán acordar si el dominio ha sido muestreado adecuadamente.
>
> <u>Quinta</u>: El contenido de las respuestas deberá ser fiablemente observado y calificado. Esto se refiere a que estemos seguros de que los estímulos se les presentan de la misma manera a todos los examinados y que la

respuesta es evaluada de acuerdo con las mismas reglas por todos los observadores.

También es importante destacar en qué momento de la investigación hay que realizar acciones encaminadas a asegurar la validez de contenido. En este sentido Bisquerra es bastante claro y rotundo: la validez de contenido

Debe asegurase "a priori" mediante una cuidadosa planificación en la elaboración de la prueba (Bisquerra, 1989b, p.91).

En nuestra investigación para asegurarnos "a priori" la validez de contenido hemos realizado las siguientes acciones.

1º) Hemos fijado el dominio más amplio de contenido en el que vamos a efectuar la selección del conjunto de problemas. En nuestro caso el dominio más amplio coincide con el concepto de "estructura multiplicativa". Este concepto está ampliamente documentado en la literatura científica sobre el tema (Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1983, 1988) y aceptado por la gran mayoría de los expertos internacionales. Así mismo, en nuestra investigación hacemos uso de la subdivisión que de este dominio han realizado dichos expertos. En concreto, la división en problemas de comparación, de producto cartesiano y de proporcionalidad simple, se haya expuesta en el trabajo de Greer citado. De una manera u otra hacemos uso del dominio global que constituye la estructura multiplicativa, pero nuestro interés se centra en el subdominio de la comparación multiplicativa, y dentro de él tratamos de medir la comprensión de problemas verbales.

2º) Tan importante como fijar el dominio de contenido es fijar la población de sujetos a los que se aplica el test o cuestionario, y que en cierto modo condicionan o delimitan el universo conductual. La necesidad de determinación del universo conductual es recogida en autores como Fitzpatrick (1983), para quién la validez del contenido de un test no se realiza sólo en función de los estímulos sino también en función de las respuestas que el instrumento elicita como representativas de un universo conductual.

Como podemos observar en los apartados correspondientes al diseño de la experiencia, en nuestra investigación hemos delimitado "a priori" el dominio de contenido en función de la población a la que se le aplicará y por tanto en función de un universo conductual determinado. Queda con ello cumplido el primer requisito para que cumpla la validez de contenido.

3º) La naturaleza de nuestro problema de investigación y el control que hemos realizado de las variables de tarea conlleva que los problemas que conforman los cuestionarios aplicados a los niños se ajusten a las restricciones preestablecidas. Dichas restricciones delimitan un subdominio de contenido dentro de la estructura multiplicativa, al igual que la restricción que hemos realizado sobre el nivel escolar delimita la sub-población a la que aplicamos los cuestionarios. Los problemas seleccionados tienen que ser representativos de ese subdominio de contenido que viene obligado por las variables de tarea que hemos tomado como independientes y por las variables de tarea controladas.

4º) El primer conjunto de problemas se elaboró bajo la premisa de que todos los elementos importantes del dominio definido por las variables de tarea independientes estuviesen representados con un problema. Este primer conjunto de problemas fue sometido a juicio crítico por un grupo de profesores en activo del nivel correspondiente a la población de niños encuestados.

5º) Los doce problemas que resultaron de la crítica anterior fue la base para la elaboración de un estudio exploratorio previo (Castro, 1991).

6º) Los enunciados han sido sometidos al dictamen de expertos internacionales y al de cuatro profesores de Universidad pertenecientes a Áreas de Conocimiento del campo de la Filología Española.

7º) Atendiendo a las sugerencias recibidas se han modificado los problemas utilizados en la fase previa, salvo en aquellos puntos que incidían en un cambio de planteamiento básico de la investigación. Me refiero con ello a la idoneidad o no de la expresión correspondiente a R_4 utilizada en la redacción de los problemas. Los problemas consensuados son los que se han utilizado en esta segunda experiencia.

8º) La solución que hemos adoptado a la discordancia surgida con respecto al uso de la expresión R_4 ha consistido en aplicarle a cada niño un problema con la expresión cuestionada y otro con la expresión fraccionaria usual, que era la propuesta por las personas en desacuerdo. Vistos los resultados, y como hemos visto anteriormente al estudiar la fiabilidad, ambos conjuntos de problemas son paralelos, es decir, no difieren en dificultad ni en la varianza que producen, además de tener un índice alto de correlación entre sí las respuestas a uno u otro tipo de problemas.

9º) La conducta que hemos tomado como base para medir la comprensión ha sido el proceso que sigue el niño para la solución del problema. Si el proceso es correcto se considera que ha habido comprensión. Además no se tienen en cuenta los fallos de cálculo, al considerar que no forman parte sustancial de la fase de comprensión del problema. Esta forma de medir se basa en teorías explicativas de resolución de problemas en general (Polya, 1979) y de resolución de problemas aritméticos verbales (Mayer, 1986a) que separan la fase de comprensión de la fase de cálculo. Criterios similares a estos utilizan De Corte, Verscheffel y Van Coillie (1988).

10º) Los cuestionarios de problemas han sido propuestos personalmente por el investigador en compañía del profesor del grupo correspondiente al que se le aplicaba. Las normas y las indicaciones para responder han sido las mismas para todos los grupos y se han dado por escrito a todos y cada uno de los niños encuestados. La corrección de las respuestas ha sido realizada dos veces y de acuerdo con las mismas reglas. En este sentido la fiabilidad de las observaciones y de la evaluación de las respuestas queda contrastada.

Todo lo anterior garantiza la validez de las medidas obtenidas en nuestro estudio.

3.7. Modificaciones realizadas en el diseño en relación con el estudio exploratorio

El estudio actual incorpora aspectos que no fueron tratados en el estudio exploratorio, por lo que en este apartado comentamos las modificaciones que se han hecho en relación con él en aquellos aspectos que son comunes a ambos estudios.

Una finalidad que perseguimos con este experimento es confirmar o no los resultados que obtuvimos en un experimento exploratorio previo (Castro, 1991). En ese estudio exploratorio previo hicimos varios contrastes de hipótesis tendentes a determinar si había diferencias de dificultad entre los doce problemas de comparación multiplicativa, que utilizamos en nuestro estudio, respecto a las variables independientes: "términos comparativos" y "cantidad desconocida en el problema". Nos planteábamos también la posibilidad de la existencia de efecto de interacción entre las dos variables anteriores, que son variables de tarea.

Para llevar a cabo estos contrastes de hipótesis elaboramos un diseño del experimento en el que tuvimos que optar por elegir unas opciones frente a otras varias posibles. Ante las restricciones bajo las que se realizó el diseño en el estudio exploratorio, cabe preguntarse qué ocurriría si se modifican algunas de las condiciones del diseño y cómo afectaría a los resultados obtenidos.

En este estudio se ha elaborado un nuevo diseño que engloba al que hicimos en el estudio exploratorio y lo sobrepasa en muchos aspectos. He aquí las principales modificaciones realizadas con respecto al estudio exploratorio.

3.7.1. Respecto a las variables independientes

En el estudio exploratorio una de las variables independientes consideradas es la que denominamos "cantidad desconocida", notada por P. Para establecer esta variable se consideraba como estructura de referencia la relación algebraica $a=\alpha\bullet b$ entre las cantidades en el enunciado del problema, y según que la incógnita fuese el valor $\underline{a}$, el valor $\underline{\alpha}$, o el valor $\underline{b}$, asignábamos los valores P_1, P_2 y P_3 a esta variable. En todos los casos α era el escalar que cuantifica la relación de comparación, pero la cantidad $\underline{a}$ pasaba de referido a referente según que la comparación fuese de aumento o de disminución, intercambiando su papel con la cantidad $\underline{b}$.

En el nuevo diseño se ha considerado que en todos los problemas de comparación hay tres cantidades fundamentales: referente, referido y el operador o escalar, independientemente de si la comparación es de aumento o de disminución. Es la estructura de la relación comparativa entre cantidades la que se elige para establecer la nueva variable Q, que también toma tres valores: Q_1, Q_2 y Q_3, según que la incógnita sea el referido, el operador o el referente.

Esta modificación de la variable P por la Q ha sido un cambio importante que nos permite analizar los resultados en términos de comprensión de la relación comparativa entre las cantidades y no en términos de la estructura de la relación multiplicativa entre las mismas.

También afecta este cambio de variables a la composición de los cuestionarios de problemas utilizados en la recogida de datos. El tipo de cuestionario empleado en la experiencia piloto no producía diferencias significativas. En la elaboración de los cuestionarios se procuró hacer un reparto de los problemas que diese como resultado tres cuestionarios entre los que no hubiera diferencia de dificultad. En esta nueva experiencia al mantener el mismo criterio de asignar los problemas a los cuestionarios y al haber cambiado la variable P por la Q, y visto en el estudio exploratorio la influencia que tiene esta segunda variable sobre el índice de dificultad de los problemas, contemplamos la expectativa de que no salgan cuestionarios equivalentes en dificultad.

Dado que la muestra se ha dividido en tres grupos a cada uno de los cuales se le aplica un cuestionario, este tipo de diseño exige que los grupos sean homogéneos para poder hacer una interpretación global de la influencia de las variables R y Q sobre el índice de dificultad de los problemas. En el estudio previo este control se realizó en base a los mismos cuestionarios, puesto que se procuró que fuesen equivalentes en dificultad. En el presente estudio no es posible utilizar sólo los cuestionarios que surgen de los problemas de comparación multiplicativa debido a nuestra sospecha de que no son equivalentes en dificultad. La solución que hemos adoptado ha sido ampliar el cuestionario utilizado en el estudio previo con problemas de otras categorías de problemas verbales de estructura multiplicativa. Ello nos permite contrastar la hipótesis previa de si los tres grupos de niños formados en base al tipo de cuestionario que le aplicamos son homogéneos o no, utilizando todos los problemas en ellos incluidos o parte de estos problemas pertenecientes a alguna categoría semántica más básica que la de comparación. De esta manera los problemas de comparación no se convierten "en juez y parte", sino que mediante una prueba adicional de problemas de proporcionalidad simple se comprueba que los tres grupos son homogéneos y una vez detectado esto se procede a determinar en esta muestra homogénea cómo influyen las variables R y Q sobre el índice de dificultad de los problemas de comparación multiplicativa.

Esto ha exigido definir nuevas variables independientes para los tipos de problemas que no se utilizaron en el estudio previo.

3.7.2. En relación con el instrumento empleado

El estudio mantiene como objetivo fundamental determinar niveles de dificultad de comprensión en la resolución de los problemas verbales simples de comparación multiplicativa y por ello se mantienen los doce problemas considerados en el estudio exploratorio, sin embargo, una pregunta que surgió en el estudio exploratorio fue la necesidad de determinar el nivel de conocimientos aritméticos generales -y en particular sobre multiplicación- que tenían los niños de la muestra seleccionada y, de este modo, interpretar mejor nuestros resultados en el contexto de ese nivel escolar sobre multiplicación.

También en relación con el instrumento utilizado se ha hecho otra modificación, que afecta a los números que intervienen en los enunciados de los problemas de comparación multiplicativa. Entre las restricciones impuestas al diseño en el estudio exploratorio propusimos utilizar ternas de números distintas para los cuatro problemas de cada cuestionario, aunque estas ternas no eran completamente distintas pues cumplían una serie de condiciones:

1ª) el primer problema de cada cuestionario incluye la misma terna de números, al igual que los otros tres restantes, ello lleva consigo que la terna de números es distinta para la variable R pero no para la Q.

2ª) los números que constituyen las ternas cumplen una serie de condiciones de homogeneización (Castro, 1991, pp.137-138).

De estas restricciones al diseño surgió la duda de que los resultados obtenidos podían estar mediatizados por la terna concreta asignada a los problemas. Por lo que en este nuevo diseño se ha incluido una rotación aleatoria de la terna asignada a cada problema.

3.7.3 Modificaciones en el tamaño de la muestra y en su composición

Los resultados que obtuvimos en el estudio exploratorio sobre la influencia de la variable semántica R en la dificultad de los problemas de comparación no permitieron el rechazo de la hipótesis nula, pero el grado de significación con el que se tomó esta decisión ($p=0.076$) nos hizo plantearnos la pregunta de si con una muestra mayor este grado de significación no sería más pequeño, con la posibilidad incluso de llegar a rechazar la hipótesis nula a un nivel de significación del 5% (Castro, 1991, p.162). Por ello, en esta nueva experiencia hemos ampliado el tamaño de la muestra.

En el estudio exploratorio se eligió una muestra intencional de colegios que resultaron homogéneos para el objeto de nuestro estudio. Esto simplificó el análisis de los resultados, pero nos privó de una información valiosa: la posibilidad de obtener datos sobre cómo afectan las variables R y Q a la diferenciación entre colegios. En el estudio exploratorio al ser los colegios homogéneos no hubo diferencias significativas entre ellos, pero hay que suponer que, aún para el objeto restringido de nuestro estudio, lo normal es que haya colegios con un nivel superior a otros. Hemos procurado elegir, dentro de nuestra muestra intencional de colegios, alumnos procedentes de colegios que tengan distinto nivel de rendimiento aritmético con el objeto de observar en qué se diferencian estos colegios con respecto a los valores de las variables independientes R y Q establecidas.

En el estudio exploratorio se encontró que el nivel escolar producía diferencias significativas en el número de problemas verbales de comparación multiplicativa que resolvían correctamente los niños. Puesto que los cambios realizados en el diseño pensamos que no afectan a esta variable, cabe suponer que van a volver a aparecer diferencias significativas por curso en esta nueva experiencia. Uno de los objetivos de esta experiencia es confirmar las diferencias por curso en problemas de comparación multiplicativa. No hemos introducido modificaciones en este sentido. Nuestra muestra está formada de nuevo por escolares de 5º y 6º de EGB exclusivamente.

3.8. Las entrevistas

La finalidad de las entrevistas ha sido contrastar las categorías o niveles de comprensión de sujetos que hemos establecido en la muestra utilizada en la investigación.

Las categorías de sujetos son definidas en función de los patrones de respuesta y de los tipos de error producidos por los niños de la muestra en los problemas de comparación incluidos en los tres cuestionarios escritos. Puesto que cada niño no hace todos los problemas de comparación, las categorías son generalizaciones estadísticas y surge la cuestión de si realmente hay niños concretos que se encuentren en la situación que describen las categorías.

3.8.1. La selección de la muestra para las entrevistas

Los colegios elegidos para las entrevistas han sido cuatro de los seis utilizados en la aplicación de los cuestionarios a gran escala. Hemos incluido los colegios con mayor y menor nivel así como dos con nivel intermedio.

De los cuatro colegios seleccionados para realizar entrevistas hemos tomado al azar un total de nueve niños en función de su patrón de respuestas correctas e incorrectas a los cuestionarios escritos. Cuando un niño de los seleccionados no estaba presente en ese momento en el Colegio se sustituía por uno de su misma categoría. Los niños que tomaron parte finalmente en esta fase de la investigación están descritos en la Tabla 3.12

Tabla 3.12. Muestra de sujetos en la entrevista

		Categoría					
Colegio	Curso	1	2	3	4	5	6
1	5°	1*		1			
	6°					1	1
2	5°						
	6°				1	1	
5	5°		1				
	6°						
6	5°			1	1		
	6°						

* Indica el número de sujetos

3.8.2. Materiales utilizados en la entrevista

La entrevista consta de dos fases: En la primera, se le proponen por escrito cuatro problemas verbales de comparación multiplicativa, similares a los incluidos en los Cuestionarios primeros, y se le pide al niño que elija la solución correcta entre cuatro, seguido de un posterior diálogo sobre las respuestas elegidas. En la segunda se le propone una actividad manipulativa con fichas en las que el niño tiene que responder a una serie de cuestiones relativas a la comparación multiplicativa.

Para llevar a cabo la primera fase de la entrevista se han elaborado dos tipos de materiales: Uno para el alumno y otro para el entrevistador. El material del alumno consiste en un conjunto de doce actividades, una por cada tipo de problema de comparación, cada una en un folio distinto, presentadas en un formato de elección múltiple. En cada folio se incluye un problema y cuatro respuestas correspondientes a cada una de las cuatro operaciones aritméticas aplicadas a los datos. Las operaciones están ya hechas y el niño sólo tiene que marcar con una "x" la casilla correspondiente a SI o NO. A continuación de las cuatro soluciones hay un espacio para una posible explicación de los niños. Un ejemplo de este material aparece al final del capítulo.

El material elaborado para el entrevistador es una hoja de registro y un guión para el diálogo posterior. Se han elaborado seis modelos de hojas de registro, una por categoría de sujetos seleccionados. Este hoja de registro-guión le permite al entrevistador contrastar sobre la marcha si se han cumplido o no las expectativas y en función de ello plantear las preguntas programadas para cada situación. Un modelo de estos guiones utilizados por el entrevistador puede verse al final del capítulo. Este material se utilizó para controlar el desarrollo de la primera fase de la entrevista.

En la actividad manipulativa desarrollada en la segunda fase de la entrevista se utilizaron fichas rojas redondas de 2 cm de diámetro en número suficiente (una caja de 100 fichas) y tres folios marcados en rojo con las letras mayúsculas A, B y C, respectivamente, como material del alumno. Para uso del entrevistador elaboramos tres tipos de fichas guión a modo de compendio de las posibles actividades a realizar con el material manipulativo (véase final del capítulo).

3.8.3. Forma de conducir la entrevista

En cada colegio solicitamos una habitación aislada para realizar las entrevistas en la que el entrevistador pudiera dialogar con el niño y grabar la sesión en vídeo. Las entrevistas las realizamos de manera individual y en una habitación aislada. El niño está sentado frente al entrevistador separados por una mesa de trabajo. El entrevistador explica al niño que está realizando una investigación para saber cómo resuelven los niños problemas de matemáticas, y que la cámara de vídeo es para recordar sus respuestas. Se le garantiza que nadie, salvo el entrevistador, verá la grabación. Ningún niño puso reparos a estas condiciones.

La entrevista tiene dos fases. En la primera el investigador informa al niño de que le ha puesto unos problemas a niños de su misma edad y que han dado cuatro contestaciones distintas. Se le pide que haga de profesor y diga qué niños han dado respuesta correcta y cuáles no. El entrevistador presenta al niño de manera sucesiva los cuatro folios que contienen respectivamente los cuatro problemas que hemos considerado adecuados a su nivel de comprensión. En cada folio hay un problema y la posibilidad de elegir entre cuatro soluciones distintas. Cada vez que el niño termina una tarea el entrevistador anota en su hoja de registro si se cumplen o no las expectativas. Finalizadas las cuatro actividades planificadas puede ocurrir:

A) Que el sujeto cumpla las expectativas

En este caso el entrevistador selecciona el folio correspondiente al problema criterio de la categoría (el de mayor índice de dificultad) y le plantea al niño la pregunta relativa a por qué ha elegido esa respuesta (la que ha dado previamente) y no ha elegido una de las otras (aquella que hubiera conducido al éxito en ese tipo de problema).

B) Que el sujeto no cumpla las expectativas

Si el sujeto no cumple las expectativas, esto puede deberse a tres razones:

a) que haya aumentado de nivel totalmente

b) que haya aumentado de nivel parcialmente (sólo en algunos problemas de la categoría)

c) que invierta la escala

En el caso a), se selecciona el ítem criterio de la categoría y se le plantea al niño la pregunta relativa a por qué ha elegido esa respuesta y no ha elegido una de las otras (aquella que hubiera conducido al error asociado a ese tipo de problema).

En el caso b), se selecciona un ítem de entre los que haya aumentado de nivel y se le plantea al niño la pregunta relativa a por qué ha elegido esa respuesta y no ha elegido una de las otras (aquella que hubiera conducido al error asociado a ese tipo de problema).

En el caso c), se analizan los ítems criterios de las categorías invertidas según los criterios anteriormente utilizados: Si esperamos que fracase y tiene éxito le preguntamos por qué no ha elegido la respuesta errónea y al revés.

Estas son las directrices básicas marcadas para el desarrollo de la primera fase de la entrevista. En función de su desarrollo el entrevistador decidiría si era necesario ampliar o no el contenido de la entrevista.

La segunda fase de la entrevista no es tan estructurada como la primera. Su finalidad complementaria nos hizo dejar libertad al entrevistador para que decidiera sobre la marcha y en función de las respuestas dadas por el niño en la primera fase. La única condición que se impuso fue que las actividades manipulativas y las preguntas que propusiera el investigador se ajustaran a las incluidas en uno de los tres modelos de cuestiones que respondían a problemas de referido, escalar o referente desconocidos.

Las entrevistas se realizaron en el mes de Mayo de 1993, un mes después de aplicados los cuestionarios de respuesta libre. Cada entrevista fue grabada en cassette y en vídeo. Posteriormente han sido transcritas y comentadas por el investigador.

HOJA PARA EL ALUMNO EN LA ENTREVISTA

Nombre:... Curso:......

María tiene 72 caramelos. Daniel tiene 12 caramelos. ¿Cúantas veces más caramelos tiene María que Daniel?

R_1Q_2

Este problema lo hemos propuesto a cuatro niños.
Cada niño lo ha resuelto de una manera distinta.
Las soluciones las tienes escritas a continuación.

Lee con atención cada una de las soluciones.
Pon una cruz en la casilla Si para indicar que el problema está bien hecho. Pon una cruz en la casilla No si está mal hecho.

Respuesta del primer niño: $\begin{array}{r} 72 \\ +\ 12 \\ \hline 84 \end{array}$ Solución: *84.* ------------------------------ ¿Está bien resuelto? [ ] Si [ ] No	Respuesta del segundo niño: $\begin{array}{r} 72 \\ -\ 12 \\ \hline 60 \end{array}$ Solución: *60.* ----------------------------- ¿Está bien resuelto? [ ] Si [ ] No
Respuesta del tercer niño: $\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 12 \\ \hline 144 \\ 72\ \ \\ \hline 864 \end{array}$ Solución: *864.* ------------------------------ ¿Está bien resuelto? [ ] Si [ ] No	Respuesta del cuarto niño: $\begin{array}{r\|l} 72 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$ Solución: *6.* ----------------------------- ¿Está bien resuelto? [ ] Si [ ] No

Explicación:

GUION UTILIZADO POR EL ENTREVISTADOR

Nombre:..

Colegio:...Curso:......

Categoría 1

	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R1Q1:	....	....	[ ] Si [ ] No
Problema R2Q1:	....	....	[ ] Si [ ] No
Problema R3Q1:	....	....	[ ] Si [ ] No
Problema R4Q1:	....	....	[ ] Si [ ] No

....

Si se cumplen las expectativas:

Se le muestra la hoja con el problema R1Q1 y se le pregunta:

¿Por qué es esta la respuesta correcta (sumar o restar) y no lo es esta (mu-ltiplicar)?

....

Si no se cumplen las expectativas porque:

a) el niño resuelve correctamente el problema R1Q1

Se le muestra la hoja con el problema R1Q1 y se le pregunta:

¿Por qué es esta la respuesta correcta (multiplicar) y no lo es esta (sumar)?

....

Si no se cumplen las expectativas porque:

b) fracasa en R1Q1 y tiene éxito en al menos un problema de las otras categorías

Se le muestra la hoja con el problema criterio de la categoría siguiente en la que ha tenido éxito y se le pregunta:

¿Por qué es esta la respuesta correcta (multiplicar) y no lo es esta (sumar)?

Se le muestra también la hoja con el problema R1Q1 y se le pregunta:

¿Por qué es esta la respuesta correcta (sumar o restar) y no lo es esta (mu-ltiplicar)?

Nombre:...
Colegio:...Grupo:.............
Edad:......

Actividad manipulativa 1
(Búsqueda del significado de la expresión relacional)

Ponemos delante del sujeto, en lugares separados, tres folios marcadas con las etiquetas A, B y C, respectivamente, y, aparte, una caja llena de fichas (100 fichas aproximadamente).

En primer lugar le decimos:

"Coloca 6 fichas en el folio A"

A continuación le decimos, en función de la expresión relacional que estemos estudiando:

[ ]
"coloca fichas en el folio B para que el folio A tenga 3 veces más que el B".

[ ]
"coloca fichas en el folio B para que el folio A tenga 3 veces menos que el B"

[ ]
"coloca fichas en el folio B para que el folio A tenga 3 veces tantas fichas como el B".

[ ]
"coloca fichas en el folio B para que el folio A tenga la tercera parte que el B".

y le preguntamos

"¿cuántas has puesto?. Anotamos la **respuesta:**_________

A continuación se le dice:

[ ] "coloca fichas en el folio C hasta que tenga 3 más que el folio A".

[ ] "coloca fichas en el folio C hasta que tenga 3 menos que el folio A".

[ ] "coloca fichas en el folio C hasta que tenga tantas como el folio A".

según el término relacional (el entrevistador pone una cruz en el recuadro de la opción correspondiente)

Anotamos la **respuesta:**__________

A continuación se le dice:

"explícame por qué has puesto la misma (distinta) cantidad de fichas en los folios B y C?.

Capítulo 4

ANÁLISIS GENERAL DE LOS DATOS.
ESTUDIO DEL RENDIMIENTO

El modelo experimental utilizado para la recogida y análisis de los datos es un diseño factorial con cinco factores. De estos cinco factores dos son variables independientes de tarea: la variable semántica (R) y la variable cantidad desconocida (Q); los otros tres factores son tres variables concomitantes: el colegio, el curso y el tipo de cuestionario. La razón de incluir estas tres variables concomitantes como factores se debe a que queremos controlarlas estadísticamente. Las variables dependientes examinadas son de dos tipos: unas referidas al rendimiento global de los niños en el conjunto de problemas, y otras referidas al rendimiento de los niños (éxito o fracaso) en cada problema.

Puesto que las variables dependientes son de naturaleza distinta hacemos análisis estadísticos diferenciados para estudiar el efecto de los factores considerados -que sean pertinentes- sobre cada una de ellas. En primer, lugar hacemos el análisis de la variable dependiente rendimiento global o puntuación total en un conjunto de problemas y, después estudiamos las variables dependientes que se refieren al rendimiento de los niños en cada problema.

4.1. Análisis de las puntuaciones totales

Previo al estudio de la dificultad de los problemas de comparación en función de las variables de tarea R y Q, describimos los resultados obtenidos por la muestra de sujetos utilizados en esta experiencia respecto a su rendimiento en resolución de problemas verbales simples de estructura multiplicativa, y si este rendimiento depende o no del COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO utilizados.

Los objetivos que perseguimos son:

Primero, *asegurar que la muestra es adecuada* para estudiar la influencia de los factores de tarea R y Q sobre la dificultad de comprensión de problemas verbales de comparación multiplicativa.

Segundo, *poner de manifiesto si ha sido acertada o no nuestra decisión de estudiar los problemas de comparación independientemente* de las otras categorías de problemas de estructura multiplicativa.

Tercero, *conocer la equivalencia de los tres cuestionarios parciales construidos* según las especificaciones del diseño, equivalencia en cuanto a su dificultad global, y de este modo, en caso de que no lo sean incorporar la variable CUESTIONARIO como factor en el estudio e interpretación de la dificultad relativa de cada problema, análisis que haremos posteriormente.

Cuarto, *detectar si hay o no diferencias de rendimiento por colegio*. Si la dificultad global de cada cuestionario no es la misma en todos los colegios a los que pertenecen los sujetos de la muestra incluiremos la variable COLEGIO como un factor en el estudio de la dificultad relativa de cada problema.

Quinto, *comparar las puntuaciones obtenidas en los cursos 5º y 6º*. Caso de que los cuestionarios presentaran una mayor dificultad para los alumnos de 5º que para los de 6º (o viceversa) nos veríamos obligados a hacer un estudio independiente de cada uno de estos niveles.

Por ello realizamos tres análisis factoriales de la varianza de los datos. En el primer análisis de datos tratamos de determinar si hay efectos significativos de los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO sobre el rendimiento de los alumnos en resolución de problemas verbales simples de estructura multiplicativa. En este primer análisis la variable dependiente utilizada es el número de problemas que resuelve correctamente cada sujeto de entre los diez problemas que se pasaron en los cuestionarios escritos. Esta variable dependiente la hemos codificado como PT3; puesto que cada problema resuelto correctamente lo hemos puntuado con un 1, esta variable dependiente tiene un rango de 0 a 10.

En el segundo análisis de datos tratamos de determinar si hay efectos significativos de los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO sobre el rendimiento de los sujetos en problemas verbales de proporcionalidad simple. En cada cuestionario se han incluido cuatro problemas de este tipo que corresponden a los problemas número 5, 6, 7 y 8 de cada cuestionario. En este caso la variable dependiente la hemos codificado como PT2 y tiene un rango de 0 a 4.

En el tercer análisis de datos tratamos de determinar si hay efectos significativos de los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO sobre el rendimiento de los sujetos en problemas verbales simples de comparación multiplicativa. En cada cuestionario se han incluido cuatro problemas de este tipo que corresponden a los números 1, 2, 3 y 4. La variable dependiente que expresa el rendimiento en problemas de comparación multiplicativa la hemos notado PT1, y tiene un rango de 0 a 4.

Con cada uno de estos análisis contrastamos las siguientes hipótesis nulas, para la muestra utilizada:

(1) No hay diferencias significativas debidas al factor COLEGIO.

(2) No hay diferencias significativas debidas al factor CURSO.

(3) No hay diferencias significativas debidas al factor CUESTIONARIO.

(4) No hay efecto significativo de interacción de dos vías entre los factores

COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.

(5) No hay efecto significativo de interacción de tres vías entre los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.

4.1.1. Técnica estadística empleada

En estos tres análisis hemos realizado un análisis factorial de la varianza de tres factores con efectos fijos: COLEGIO, CURSO, y CUESTIONARIO.

Somos conscientes de que los supuestos paramétricos no se cumplen con todo el rigor que sería de desear, sobre todo los supuestos de normalidad y de homocedasticidad. Pero, como ya justificamos en otro estudio (Castro, 1991), se ha elaborado un diseño que minimiza los efectos del no cumplimiento de los supuestos paramétricos: diseño equilibrado, el mismo número de sujetos por grupo, independencia de observaciones. Este punto está desarrollado con más amplitud en el Capítulo 5.

Para las comparaciones múltiples a posteriori, que realizamos para los factores que resultan con efecto significativo en el análisis factorial de la varianza, hemos empleado la prueba de Scheffé que, como dice Joaristi, "es insensible a la no normalidad y a la heterocedasticidad" (Etxebarría, Joaristi y Lizasoain, 1991, p.248).

Rendimientos medios

En la Tabla 4.1 hemos recogido las medias obtenidas por los niños de la muestra en las tres variables dependientes consideradas PT1, PT2 y PT3 por COLEGIO, CURSO, CUESTIONARIO y de manera total o global, prescindiendo de estos factores.

En la Tabla 4.1 podemos observar que la media que han obtenido los niños de la muestra en los diez problemas de estructura multiplicativa es de 6.78. Podemos por consiguiente pensar que es una muestra de sujetos que tiene conocimientos sobre la estructura multiplicativa en general.

Tabla 4.1. Medias de las puntuaciones totales PT1, PT2 y PT3 por COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO

	T O T A L E S											
	COLEGIO						**CURSO**		**CUESTIONARIO**			**TOTAL**
	1	2	3	4	5	6	5°	6°	1	2	3	*****
ALUMNOS	54	54	54	54	54	54	162	162	108	108	108	324
MEDIA-1	2.02	1.94	2.24	1.96	2.56	2.57	2.02	2.41	2.26	1.96	2.43	2.22
MEDIA-2	3.26	2.89	3.37	3.63	3.59	3.83	3.41	3.45	3.54	3.45	3.30	3.43
MEDIA-3	6.54	5.80	6.63	6.59	7.31	7.83	6.51	7.06	6.99	6.37	6.99	6.78

La MEDIA-1 y la MEDIA-2 sobre un total de 4 problemas.
La MEDIA-3 es sobre un total de 10 problemas.

Puesto que hay tres categorías de problemas implicados, es posible conocer el rendimiento que tienen los niños en los problemas de comparación frente al rendimiento en problemas que supuestamente tienen una dificultad menor para ellos, como es el caso de los problemas de proporcionalidad simple. La categoría de problemas de proporcionalidad simple ha sido recogida como variable dependiente PT2 y la media obtenida sobre 4 problemas ha sido 3.43. Si queremos hipotetizar qué hubiera pasado con diez problemas el resultado sería 3.43 x 2.5 = 8.575 que como vemos es superior a la media para todas las categorías de problemas. En la Tabla 4.2 se hallan las medias transformadas a porcentajes para poder realizar mejor las comparaciones.

El rendimiento medio de los niños en los problemas de proporcionalidad simple (MEDIA-2) ha sido del 85.8%, el obtenido considerando la totalidad de los problemas (MEDIA-3) ha sido del 67.8% y el obtenido en los problemas de comparación (MEDIA-1) ha sido del 55.5%.

Tabla 4.2. Rendimiento de los alumnos en porcentajes de aciertos en PT1, PT2 y PT3 por COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO

	T O T A L E S											
	COLEGIO						**CURSO**		**CUESTIONARIO**			**TOTAL**
	1	2	3	4	5	6	5°	6°	1	2	3	*****
ALUMNOS	54	54	54	54	54	54	162	162	108	108	108	324
MEDIA-1	50.5	48.5	56.0	49.0	64.0	64.3	50.5	60.3	56.5	49.0	60.8	55.5
MEDIA-2	81.5	72.3	84.3	90.8	89.8	95.8	85.3	86.3	88.5	86.3	82.5	85.8
MEDIA-3	65.4	58.0	66.3	65.9	73.1	78.3	65.1	70.6	69.9	63.7	69.9	67.8

Así pues, ha habido un rendimiento bastante superior en los problemas de proporcionalidad simple que en los problemas de comparación. Ante estos resultados se puede decir que el rendimiento medio de los niños de 5º y 6º de la muestra empleada en los problemas de proporcionalidad simple es muy alto, mientras que en los problemas de comparación estos mismos niños han tenido un rendimiento mediano.

Con lo dicho en el párrafo anterior queda patente que la mayoría de los niños de la muestra poseen una formación básica en estructura multiplicativa que les ha permitido resolver con éxito los problemas de proporcionalidad simple. Sin embargo, a muchos de los niños esta formación básica no les ha bastado para resolver los problemas de comparación. Estos resultados ponen de manifiesto el interés que tiene el análisis y estudio de la dificultad de los problemas de comparación, independientemente del resto de categorías, y de los factores y variables que inciden en esa dificultad, con niños de 5º y 6º de Educación Primaria.

Es interesante resaltar, respecto a la variable curso, que el rendimiento de los alumnos de 5º y 6º en los problemas de proporcionalidad simple ha sido muy similar: Un 85.3% en 5º y un 86.3% en 6º. Sin embargo, para los problemas de comparación hay diferencias al pasar de 5º a 6º. El rendimiento ha sido de un 50.5% en 5º frente a un 60.3% en 6º.

4.2. Resultados del análisis de la varianza con PT3 como variable dependiente

En primer lugar exponemos los resultados del análisis de la varianza de la puntuación obtenida por cada niño en los diez problemas verbales de estructura multiplicativa como variable dependiente (PT3) (véase Tabla 4.3).

Los resultados del análisis de la varianza con la variable PT3 como dependiente por COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO, revelan:

a) que el efecto principal debido a la variable COLEGIO es altamente significativo (F=5.223; p=0.000).

b) que el efecto principal debido a la variable CURSO es significativo (F=4.875; p=0.028) al nivel de significación del 5%.

c) que el efecto principal debido a la variable CUESTIONARIO no es significativo (F=2.702; p=0.069) al nivel de significación del 5%.

Esto nos lleva a rechazar para la variable dependiente PT3 "rendimiento en los diez problemas de estructura multiplicativa", las hipótesis nulas (1) y (2) y a aceptar la hipótesis nula (3).

Tabla 4.3. Resultados del análisis de la varianza de la variable PT3 por COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	g.l.	Media de cuadrados	F	Signif. de F
Efectos principales	186.623	8	23.328	4.549	.000
COLEGIO	133.914	5	26.783	5.223	.000
CURSO	25.000	1	25.000	4.875	.028
CUESTIONARIO	27.710	2	13.855	2.702	.069
Interacciones de 2 vías	137.457	17	8.086	1.577	.069
COLEGIO x CURSO	65.741	5	13.148	2.564	.027
COLEGIO x CUESTIONARIO	71.253	10	7.125	1.389	.184
CURSO x CUESTIONARIO	.463	2	.231	.045	.956
Interacciones de 3 vías	39.907	10	3.991	.778	.650
COLEGIO x CURSO x CUESTIONARIO	39.907	10	3.991	.778	.650

El rechazo de la hipótesis nulas (1) y (2) tiene como consecuencia que hay diferencias significativas en las medias de la puntuación total obtenida por los niños en los diez problemas verbales de estructura multiplicativa según el COLEGIO y según el CURSO. La proporción de respuestas correctas de cada nivel de los factores COLEGIO Y CURSO se halla en la Tabla 4.2. Hemos realizado comparaciones múltiples a posteriori mediante el método de Scheffé al nivel de significación del 5% para los niveles del factor COLEGIO, y estas nos muestran que el colegio 2 difiere significativamente del colegio 5 y del 6. La prueba de Scheffé proporciona dos subconjuntos de colegios homogéneos entre sí.

Subconjunto 1: El formado por los colegios 1, 2, 3 y 4.

Subconjunto 2: El formado por los colegios 1, 3, 4, 5 y 6.

Siendo el colegio 2 el que rompe la homogeneidad del conjunto de colegios.

El no rechazar la hipótesis nula para el factor CUESTIONARIO lleva consigo la aceptación de que no hay diferencias significativas entre los tres cuestionario utilizados en la recogida de datos.

En cuanto a las hipótesis de interacción, rechazamos la hipótesis nula (4) de no existencia de interacciones de dos vías, puesto que la pareja de variables COLEGIOxCURSO presenta un efecto de interacción significativo (F=2.564; p=0.027), siendo la interacción existente no ordenada (véase Gráfico 4.1).

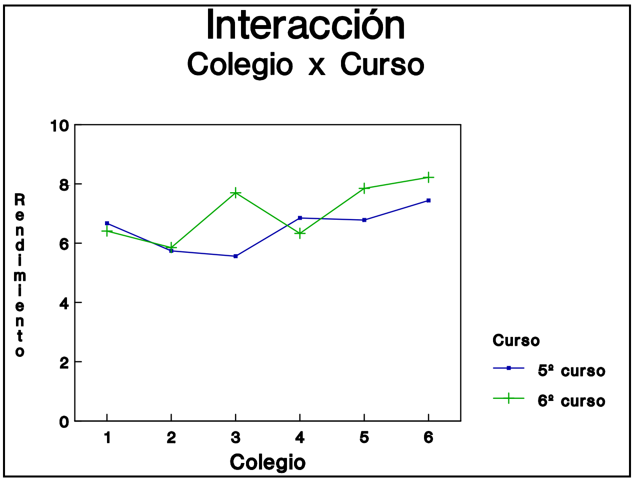


Gráfico 4.1. Puntuaciones totales de respuestas correctas obtenidas en los diez problemas

En la tabla de medias de la pareja de variables COLEGIOxCURSO (Tabla 4.4) podemos observar que los colegios 1 y 4 en quinto curso tiene una media superior a la de sus correspondientes clases de sexto curso. Un análisis suplementario de comparaciones múltiples a posteriori por el método de Scheffé, a un nivel de significación del 5%, revela que en sexto curso hay diferencias significativas entre el colegio 2 y el colegio 6, dando dos subconjuntos de colegios homogéneos entre sí.

Subconjunto 1: Formado por los colegios 1, 2, 3, 4 y 5.

Subconjunto 2: Formado por los colegios 1, 3, 4, 5 y 6.

Tabla 4.4. Medias de la variable PT3 por CURSO y COLEGIO

	COLEGIO					
CURSO	1	2	3	4	5	6
5°	6.67 (27)	5.74 (27)	5.56 (27)	6.85 (27)	6.78 (27)	7.44 (27)
6°	6.41 (27)	5.85 (27)	7.70 (27)	6.33 (27)	7.85 (27)	8.22 (27)

mientras que en quinto curso el método de Scheffé da como homogéneos los seis colegios.

No hay razones para rechazar la hipótesis nula (5) de no existencia de efecto de interacción significativo de tres vías entre las variables COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.

4.2.1. **Conclusiones del análisis de la variable PT3**

La muestra de niños fue elegida intencionalmente entre colegios cuyos alumnos han mostrado tradicionalmente diferencias de rendimiento en matemáticas. Nuestra suposición inicial se ha visto confirmada con el análisis del rendimiento de los niños de estos colegios, pues la muestra elegida difiere significativamente en su rendimiento en resolución de problemas verbales de estructura multiplicativa según el colegio. Así mismo, el curso es un factor diferenciador en el rendimiento en resolución de problemas verbales de estructura multiplicativa. Estas conclusiones hay que matizarlas en función de la interacción mutua COLEGIOxCURSO y decir que, en general, los alumnos de sexto tienen un rendimiento superior al de quinto, pero que esto no ocurre en todas las comparaciones posibles entre clases de quinto y sexto, pues hay grupos de 5º curso que han obtenido una media superior a los de 6º, y decir también que la diferencia entre colegios ha sido más acusada en 6º que en 5º.

4.3. Resultados del análisis de la varianza con PT2 como variable dependiente

En este caso nos fijamos sólo en los cuatro problemas de proporcionalidad simple que incluye cada cuestionario y la suma de los aciertos de cada niño en cada problema actúa como variable dependiente (rango 0-4).

Los resultados obtenidos en el análisis de la varianza de la variable dependiente PT2 según los factores COLEGIO, CURSO Y CUESTIONARIO (Tabla 4.5) nos revelan que sólo el factor COLEGIO tiene efecto significativo sobre esta variable dependiente (F=7.968; p=0.000). Lo que implica el rechazo de la hipótesis nula (1) referida sólo a los problemas de proporcionalidad simple, y por tanto la aceptación de la existencia de diferencias significativas entre los niveles del factor COLEGIO.

Las proporciones de respuestas correctas obtenidas para cada nivel del factor COLEGIO se hallan en la Tabla 4.2. Realizadas comparaciones múltiples a posteriori por el método de Scheffé, al nivel de significación del 5%, nos revelan que hay diferencias significativas entre los siguientes pares de colegios (2,4), (2,5) y (2,6). La prueba de Scheffé da como subconjuntos homogéneos:

Subconjunto 1: El formado por los colegios 1, 2 y 3.

Subconjunto 2: El formado por los colegios 1, 3, 4, 5 y 6.

Al igual que pasaba con el rendimiento en los diez problemas. Es el colegio 2 el que impide que los seis colegios sean homogéneos.

Tabla 4.5. Resultados del análisis de la varianza de la variable PT2 por COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	g.l.	Media de cuadrados	F	Signif. de F
Efectos principales	33.321	8	4.165	5.542	.000
COLEGIO	29.941	5	5.988	7.968	.000
CURSO	.151	1	.151	.201	.654
CUESTIONARIO	3.228	2	1.614	2.148	.119
Interacciones de 2 vías	27.497	17	1.617	2.152	.006
COLEGIO x CURSO	14.682	5	2.936	3.907	.002
COLEGIO x CUESTIONARIO	11.031	10	1.103	1.468	.151
CURSO x CUESTIONARIO	1.784	2	.892	1.187	.307
Interacciones de 3 vías	6.105	10	.610	.812	.617
COLEGIO x CURSO x CUESTIONARIO	6.105	10	.610	.812	.617

En este caso no hay razones para rechazar las hipótesis nulas (2) y (3). Por tanto, para los problemas de proporcionalidad simple admitimos que el rendimiento de los alumnos de 5º y 6º es el mismo, y también ha sido el mismo en los tres cuestionarios.

En cuanto, a las hipótesis de interacción rechazamos la hipótesis nula (4) de no interacción de dos vías. Los factores COLEGIO y CURSO presentan interacción significativa (F=3.907; p=0.002). Los colegios 1, 2 y 4 en quinto curso han obtenido una media superior a sus respectivos pares de sexto curso y en los otros ha sido al contrario (véase Tabla 4.6). No hay interacción significativa entre las parejas de factores COLEGIO y CUESTIONARIO ni entre CURSO y CUESTIONARIO.

Tabla 4.6. Medias de la variable PT2 por COLEGIO y CURSO

COLEGIO CURSO	1	2	3	4	5	6
5°	3.48 (27)	3.00 (27)	2.96 (27)	3.78 (27)	3.44 (27)	3.78 (27)
6°	3.04 (27)	2.78 (27)	3.78 (27)	3.48 (27)	3.74 (27)	3.89 (27)

Puesto que hay interacción COLEGIOxCURSO hemos realizado por separado para los niveles 5º y 6º comparaciones múltiples a posteriori mediante el método de Scheffé, al nivel de significación del 5%. Para los niños de 5º estas comparaciones dan como resultado que hay diferencias significativas entre los siguientes pares de colegios:

(3,4), (3,6)

Para los niños de 6º curso las comparaciones múltiples a posteriori han dado como resultado la existencia de diferencias significativas entre los siguientes pares de colegios:

(2,5), (2,3), (2,6)

(1,6)

Es de destacar que el bajo rendimiento del colegio 2 se debe sobre todo al grupo de 6º curso. El grupo de 5º curso de este colegio, si bien tiene un rendimiento bajo, no es el peor de los seis, pues el grupo de 5º curso del colegio 3 tiene un rendimiento inferior.

4.4. Resultados del análisis de la varianza con PT1 como variable dependiente

Los resultados obtenidos en el análisis de la varianza efectuado tomando la puntuación total obtenida por cada niño en los cuatro problemas de comparación (variable PT1) como variable dependiente según los factores COLEGIO, CURSO Y CUESTIONARIO (véase Tabla 4.7) muestran que no hay efectos de interacción significativos de dos ni de tres vías entre los factores COLEGIO, CURSO Y CUESTIONARIO. Hay pues una razón adicional para pensar que el rendimiento de los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria es distinto según se trate de problemas que hemos catalogado como de proporcionalidad simple y los problemas de comparación multiplicativa. Recordemos que en los problemas de proporcionalidad había interacción entre los factores COLEGIO Y CURSO.

En cuanto a los efectos principales, el factor COLEGIO presenta efecto significativo al nivel del 5% ($F=3.212$; $p=0.008$), el factor CURSO tiene efecto significativo ($F=8.384$; $p=0.004$), y el factor CUESTIONARIO también tiene efecto significativo ($F=4.196$; $p=0.016$).

De conformidad con lo anterior, cuando la variable dependiente es el número de problemas de comparación resueltos correctamente o puntuación total en problemas de comparación, al nivel de significación del 5%, rechazamos las hipótesis nulas (1), (2) y (3), y aceptamos que el rendimiento de los niños en los cuatro problemas de comparación multiplicativa ha sido distinto según el colegio, según el curso y según el cuestionario.

Tabla 4.7. Resultados del análisis de la varianza de la variable PT1 por COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	g.l.	Cuadrado medio	F	Signif. de F
Efectos principales	46.469	8	5.809	4.105	.000
COLEGIO	22.728	5	4.546	3.212	.008
CURSO	11.864	1	11.864	8.384	.004
CUESTIONARIO	11.877	2	5.938	4.196	.016
Interacciones de 2 vías	27.210	17	1.601	1.131	.323
COLEGIO x CURSO	7.765	5	1.553	1.097	.362
COLEGIO x CUESTIONARIO	17.938	10	1.794	1.268	.248
CURSO x CUESTIONARIO	1.506	2	.753	.532	.588
Interacciones de 3 vías	9.642	10	.964	.681	.742
COLEGIO x CURSO x CUESTIONARIO	9.642	10	.964	.681	.742

No hay razones para rechazar las hipótesis nulas (4) y (5) referidas a los efectos de interacción.

Las proporciones de respuestas obtenidas para cada nivel de los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO se hallan en la Tabla 4.2. Hemos realizado comparaciones múltiples a posteriori por el método de Scheffé, al nivel de significación del 5%, para detectar diferencias significativas entre pares de colegios y hemos obtenido como resultado que no hay dos colegios que sean significativamente diferentes al nivel del 5%. Si bien la media más baja es la del colegio 2 con 1.9630 y la más alta la del colegio 5 con 2.5741.

Aplicando el método de Scheffé hemos obtenido que sí hay diferencias significativas entre el cuestionario 2 y el 3. Este procedimiento nos ha proporcionado dos subconjuntos de pruebas homogéneas

Subconjunto 1: Cuestionarios 1 y 2.

Subconjunto 2: Cuestionarios 1 y 3.

4.5. Resumen de las conclusiones de los tres análisis de las puntuaciones totales

Las conclusiones de los contrastes de hipótesis realizados mediante el análisis de la varianza para las puntuaciones totales en problemas de comparación (PT1), problemas de proporcionalidad simple (PT2) y para los problemas de estructura multiplicativa sin diferenciar subtipos (PT3), están recogidas en la Tabla 4.5. En esta tabla los cuadros en blanco corresponden a los casos en los que no hay razones para rechazar la hipótesis nula correspondiente.

Como puede observarse en la Tabla 4.8:

1º) No hay efecto significativo de interacción triple entre COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO sobre el rendimiento obtenido por los niños en ninguna de las categorías de problemas analizadas.

2º) No hay efecto de interacción doble entre COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO en el caso de los problemas de comparación.

3º) El factor COLEGIO tiene efecto significativo en las tres variables.

4º) Los tres factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO tienen efecto significativo al 5% en el rendimiento de los alumnos para los problemas de comparación.

5º) El factor CUESTIONARIO no tiene efecto significativo en la totalidad de los problemas, ni en los problemas de proporcionalidad simple.

6º) En los problemas de proporcionalidad simple no hemos obtenido diferencias significativas por CURSO.

Tabla 4.8. Hipótesis nulas rechazadas para cada una de las variables

	Hipótesis Nula (1)	Hipótesis Nula (2)	Hipótesis Nula (3)	Hipótesis Nula (4)	Hipótesis Nula (5)
PT1	Rechazada $p<0.05$	Rechazada $p<0.01$	Rechazada $p<0.05$		
PT2	Rechazada $p<0.05$			Rechazada $p<0.05$	
PT3	Rechazada $p<0.01$	Rechazada $p<0.05$		Rechazada $p<0.05$	

PT1=problemas de comparación
PT2=problemas de proporcionalidad simple
PT3=totalidad de problemas

4.6. Implicaciones para el estudio posterior

De los resultados de los análisis estadísticos realizados hemos sacado varias consecuencias para el estudio posterior de los problemas de comparación multiplicativa en función de las variables de tarea R y Q. La primera es que *la muestra de niños que hemos utilizado posee una formación básica en problemas de estructura multiplicativa adecuada para nuestro estudio posterior*. El rendimiento obtenido por los niños de la muestra en el total de problemas ha sido del 67.8%, lo que indica que son problemas *fáciles* para estos niños. La conclusión anterior es válida independientemente del cuestionario, pero hay que matizarla según el curso y el colegio. Contrariamente a lo normal, en dos colegios el rendimiento de los niños de 5º ha sido ligeramente superior al de 6º curso. El rendimiento más bajo lo ha obtenido el grupo de 5º del colegio 3, con un resultado de 55.6%, lo que indica que si bien unos grupos de niños poseen una formación mayor que otros, todos ellos sin excepción tienen un rendimiento superior al 50%. Esto evita el llamado "efecto suelo" que impediría encontrar, caso de existir, diferencias significativas en el rendimiento de los niños en la resolución de problemas de comparación multiplicativa debidas a los factores de tarea R y Q.

La segunda implicación para nuestro estudio es que *la diferenciación hecha en los problemas verbales de estructura multiplicativa considerando los problemas de comparación como una categoría con entidad propia es acertada*, por cuanto que refleja diferencias de actuación de los niños de la muestra empleada con respecto a otras categorías de problemas. Estas diferencias se han manifestado de dos formas:

Una, en el rendimiento medio. Y dos, en la forma diferente de influir los factores colegio, curso y cuestionario en el rendimiento que tienen los niños en cada uno de estos tipos de problemas.

El rendimiento medio alcanzado por los niños de la muestra en los problemas de comparación ha sido del 55.5%, y en los problemas de proporcionalidad simple ha sido del 85.8%, lo que indica que los problemas de proporcionalidad simple son *muy fáciles* para estos niños y que los problemas de comparación tienen *dificultad mediana*. Mientras los problemas de proporcionalidad simple representan clases de problemas que ya tienen consolidados los niños de 5º y 6º, los problemas de comparación no han sido dominados aún por los niños de la muestra. Los niños de la muestra poseen una formación básica en problemas de estructura multiplicativa. Esta formación básica se refleja sobre todo en el rendimiento con los problemas de proporcionalidad. Sin embargo, estos niños aún están en período de desarrollo y consolidación de otras categorías de problemas, como es el caso de los problemas de comparación. Un dato que apoya esta conclusión es que en los problemas de proporcionalidad no hay diferencias significativas entre los alumnos de 5º y los de 6º curso, mientras que en los problemas de comparación sí las hay. Otro dato es que en los problemas de comparación no hay interacción de dos vías entre los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO, mientras que en los problemas de proporcionalidad hay efecto de interacción significativo entre COLEGIO Y CURSO. Nuestro estudio particular de los problemas de comparación es oportuno para la muestra utilizada, porque refleja cómo está condicionado ese desarrollo y la actuación de los sujetos en problemas verbales de comparación multiplicativa.

Lo anterior evita el llamado "efecto techo" en los problemas de comparación que puede darse en estos niveles de alumnos con los problemas de proporcionalidad y que no permitiría detectar la posible influencia de los factores R y Q sobre el índice de dificultad de los problemas de comparación multiplicativa.

La tercera implicación es que al ser *el rendimiento en problemas de comparación multiplicativa significativamente distinto según el COLEGIO, según el CURSO y según el CUESTIONARIO*, debemos, en consecuencia, tener en cuenta los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO en el análisis de la dificultad de los problemas verbales de comparación multiplicativa en función de las variables de tarea R y Q.

La inclusión intencionada de colegios con distinto nivel de rendimiento ha propiciado que entre los niveles del factor COLEGIO haya habido diferencias significativas. Estas diferencias destacan más en los problemas que, teóricamente, deberían estar consolidados en estos niveles, como son los problemas de proporcionalidad. Sin embargo, en problemas que no han sido abordados abiertamente en el currículum escolar estas diferencias entre colegios disminuyen. Este es el caso de los problemas de comparación que, aunque en el contraste de hipótesis hayan aparecido diferencias significativas entre colegios, al aplicar la prueba de comparaciones múltiples de Scheffé, al nivel del 5%, no ha detectado colegios significativamente distintos para los problemas de comparación. Pero el hecho de que el efecto principal del factor COLEGIO sea significativo en el análisis de la varianza, ha influido en nuestra decisión de incluir este factor en el análisis de los índices de dificultad de los problemas en función de las variables independientes R y Q.

Capítulo 5

ANÁLISIS DEL INDICE DE DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

En el estudio realizado en el capítulo anterior hemos tenido en cuenta problemas verbales simples de estructura multiplicativa de tres categorías. A partir de ahora nos ceñimos a estudiar los problemas de estructura multiplicativa de comparación. En este capítulo abordamos el análisis estadístico de la influencia de las variables R y Q sobre el *índice de dificultad* de los problemas verbales de estructura multiplicativa de comparación en niños de 5º y 6º curso de enseñanza primaria. Antes de iniciar dicho análisis queremos realizar algunas precisiones.

Una de ellas se refiere a la noción de índice de dificultad y de nivel de dificultad de un problema. El significado que le damos en este trabajo a la dificultad de un problema es el mismo que el que se le da en la teoría de los tests, ya sea la clásica o la Teoría de la Respuesta al Item (TRI), y que, como afirma Santisteban "tiene el mismo contenido semántico que el que se le da en el lenguaje habitual" (Santisteban, 1990, p.335).

Santisteban da la siguiente definición de índice de dificultad (p.334):

Se define para un ítem i el índice de dificultad p_i como la proporción p de examinados que responden correctamente a ese ítem i.

$$p_i = d_i = \frac{\text{número de respuestas correctas al ítem } i}{\text{número total de examinados}}$$

de la definición anterior se deduce:

a) Los valores que toma el índice de dificultad asignado a un ítem pertenecen al intervalo cerrado de números reales [0,1].

b) El valor del índice de dificultad varía en sentido inverso que el nivel de dificultad. Los ítems con índice de dificultad próximos a 1 tienen un bajo nivel de dificultad, y por el contrario los ítems con bajo índice de dificultad tienen un nivel de dificultad elevado.

La definición anterior vale para el caso en que los ítems son problemas verbales, y es la que adoptamos en el análisis que realizamos a continuación, donde el índice de dificultad de cada tipo de problema, definido en función de R y Q, coincide con la media de los valores de la variable dependiente en toda la muestra.

La segunda consideración se refiere a que los análisis los realizamos sobre los datos recogidos bajo las condiciones descritas en el capítulo 3, en el cual contemplamos dos tipos de control sobre las variables que pueden influir sobre las relaciones que queremos destacar. Un tipo de control, aplicado a variables de tarea distintas a las consideradas como variables independientes en esta investigación, ha consistido en mantenerlas constantes, y por lo tanto asegurarnos que no van a interaccionar con las variables de tarea R y Q que hemos tomado como independientes. Un segundo tipo de control efectuado ha sido un control estadístico de las variables COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO cuya exposición hemos realizado previamente en el capítulo 4. Los resultados que se han obtenido mediante el análisis estadístico de la influencia de estos factores sobre el rendimiento de los escolares de 5º y 6º de EGB muestran que estos factores tienen influencia significativa en el rendimiento que han tenido los niños de la muestra empleada. Esta es la razón que nos ha llevado a incorporar las variables COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO como factores intersujetos en el análisis de la dificultad de los problemas en función de las variables R y Q.

5.1. Análisis empleado

Para analizar, mediante los datos obtenidos, la influencia de las variables R y Q sobre la dificultad de resolución de los problemas verbales de comparación multiplicativa, empleamos el análisis de la varianza. Las hipótesis generales del análisis de la varianza son tres: independencia de las observaciones, normalidad de las variables y homocedasticidad o igualdad de varianzas en los distintos grupos.

La más importante de ellas es la suposición de independencia de las observaciones pues, en caso contrario, las fórmulas de las varianzas de las distribuciones muestrales de las medias son inválidas, por lo que todos los cálculos sobre la precisión de los estimadores serían erróneos. En nuestro caso si utilizáramos un solo modelo factorial para evaluar todos los factores implicados incumpliríamos esta hipótesis de independencia. Esto nos ha obligado a realizar un análisis por pasos en el que hacemos en primer lugar un estudio del efecto del factor R, a continuación el estudio del efecto del factor Q y por último el estudio de la interacción RxQ.

Los supuestos paramétricos de normalidad y homocedasticidad no son tan importantes como el de independencia y como dice Bisquerra:

> *Existe clara evidencia, tanto matemática como empírica de que las pruebas con una sola variable dependiente (por ejemplo ANOVA) son altamente robustas bajo la violación de la normalidad y homocedasticidad."* (Bisquerra,

1989a, p.32).

En nuestro caso hemos adoptado medidas al respecto de estos dos supuestos paramétricos y, el presunto incumplimiento de la hipótesis de normalidad queda subsanado por el hecho de que estamos utilizando un diseño equilibrado, es decir, con igual número de alumnos por cada una de las combinaciones de variables independientes y controladas. Este tipo de diseño garantiza la robustez respecto a la hipótesis de normalidad (Dunn y Clark, 1987).

Finalmente, el efecto de las varianzas desiguales en los grupos depende de la heterogeneidad del número de elementos en cada grupo. En caso de igual número de elementos en cada grupo, como es nuestro caso, el análisis de la varianza es una técnica robusta en cuanto a la comparación de las medias de los grupos. Por tanto, el problema de mayor importancia es asegurar la independencia de las observaciones, o bien aplicar una técnica de análisis de la varianza que tenga en cuenta la dependencia de las mismas. Hay que considerar dos tipos de independencia:

1-Independencia de observaciones de diversos grupos

2-Independencia de observaciones de un mismo grupo

En lo que sigue, estudiaremos este problema y la solución de análisis adoptada en cada caso. Respecto a las otras dos hipótesis, puesto que en nuestro estudio no tienen un efecto apreciable sobre las comparaciones de medias al ser un diseño equilibrado (igual número de objetos en cada grupo), no las tendremos en cuenta.

Es claro que los datos tomados de cada colegio son independientes de los del resto de los colegios (independencia de observaciones de distintas muestras), ya que el conocimiento de los resultados alcanzados por uno de ellos no nos proporciona ninguna información de lo que se va a alcanzar en el resto, antes de realizar la prueba. Por la misma razón, dentro de un mismo colegio son independientes las observaciones por curso. La asignación de los cuestionarios parciales o cuestionario a los niños dentro de un mismo grupo se ha realizado mediante un procedimiento de muestreo sistemático con arranque aleatorio, que es equivalente a una aleatorización completa, lo cual hace que las observaciones de cada niño sean independientes de las de sus compañeros de aula.

Puesto que en nuestro caso en cada niño hemos realizado cuatro observaciones, resulta que para cada uno de los niños estas cuatro observaciones son valores relacionados. Para asegurar la independencia en el análisis de la varianza podemos optar entre realizar un análisis independiente para cada una de las cuatro observaciones realizadas, con lo cual llevaríamos a cabo cuatro pruebas de significación, o bien realizar un análisis multivariante con una sola prueba de significación. Debido a que el ajuste de Bonferroni (Bisquerra, 1989a, pp.32-33) tiene como consecuencia que la probabilidad de error de rechazar una hipótesis nula va aumentando a medida que crece el número de pruebas de contraste aplicadas, optamos, siempre que sea posible, por el análisis multivariante de la varianza con el cual realizamos un sólo contraste para las cuatro observaciones.

En cuanto a los requisitos exigidos para la aplicación de los métodos multivariantes Bisquerra (1989a) pone de manifiesto que

> *Se observa un cierto vacío en cuanto a recomendaciones concretas aceptadas de forma generalizada (p.32)*

y según este mismo autor

> *La tendencia actual está en considerar que en muestras grandes (n > 30) los análisis multivariantes son lo suficientemente robustos como para ser insensibles a ligeras desviaciones de los supuestos paramétricos, principalmente de la normalidad multivariante y de la homocedasticidad (Bisquerra, 1989a, p.32).*

Véase también Kirk (1982, pp.74-79) para una discusión amplia de los supuestos paramétricos. Para una introducción al análisis multivariante en castellano remitimos a las obras de Gutiérrez y González (1991), y Cuadras (1991). Sobre este mismo tópico existen bastantes obras en inglés, de las que destacamos las de Tatsuoka (1971) y Timm (1975).

5.2. Efecto del factor R sobre la dificultad de los problemas.

El factor "relación de comparación", que es una variable de carácter semántico, lo hemos simbolizado como factor R. Puesto que para cada niño tenemos una observación de cada uno de los posibles valores de este factor: R_1, R_2, R_3, R_4, ocurre que estas cuatro observaciones son valores relacionados, ya que la capacidad general del niño influirá en cada una de las cuatro respuestas. Por otro lado, podemos considerar independientes las observaciones de cada niño respecto a las del resto de sus compañeros.

Para este factor los datos tomados de cada colegio son independientes de los del resto de los colegios (independencia de observaciones de distintas muestras), ya que el conocimiento de los resultados alcanzados por uno de ellos no nos proporciona ninguna información de lo que se va a alcanzar en el resto, antes de realizar la prueba.

De este modo, para cumplir el requisito de la independencia de observaciones, y con las salvedades que ya hemos indicado previamente, el modelo lineal que hemos aplicado en este caso particular es el diseño de medidas repetidas con tres factores intersujetos: COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO, y un factor intrasujeto, el factor R. Es decir, consideramos que tenemos 36 grupos de niños (6 colegios x 2 cursos x 3 cuestionarios) y a cada uno de los niños de esos 36 grupos se les han efectuado cuatro medidas diferentes, que corresponden a un problema de cada uno de los tipos R_1, R_2, R_3 y R_4. La inclusión de los factores intersujetos COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO se debe a que en el análisis realizado previamente encontramos que tenían efecto significativo sobre el rendimiento de los estudiantes.

Hemos un análisis multivariante de la varianza de este diseño de medidas repetidas. Mediante este análisis pretendemos contrastar la siguiente hipótesis nula:

(6) No hay efecto significativo del factor R sobre el índice de dificultad de los problemas.

El índice de dificultad de los problemas según los distintos valores de R es el considerado como valor medio en el análisis de la varianza realizado y que hemos recogido en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Media (índice de dificultad) y desviaciones típicas para los cuatro valores del factor R

Variable R	Media	Desv. Típica	N	Interv. de confianza al 95 %	
R_1	.593	.492	324	.539	.646
R_2	.444	.498	324	.390	.499
R_3	.568	.496	324	.514	.622
R_4	.611	.488	324	.558	.664

Como resultado del análisis multivariante de la varianza con medidas repetidas en el factor R, con valores 1-0 para expresar el éxito/fracaso en cada uno de los problemas, hemos obtenido para este factor un valor F=12.45, con un grado de significación p=0.000 (véase Tabla 5.2). *Rechazamos pues la hipótesis nula (6) y aceptamos que los problemas verbales de estructura multiplicativa de comparación no tienen igual nivel de dificultad si cambiamos la expresión relacional de comparación utilizada en su redacción*. En el estudio piloto (Castro, 1991) obtuvimos para la F un grado de significación p=0.076, con lo cual nos quedábamos entonces con la duda de si con una muestra distinta, más amplia, aumentaría la probabilidad de rechazar la hipótesis nula. Ahora vemos que nuestra suposición se ha confirmado y lo ha hecho en el sentido que sugeríamos en el estudio previo.

Tabla 5.2. Resultados del análisis de la varianza implicando al factor R

Fuente de Variación	S. de C.	g.l.	M. de C.	F	Sig. de F
Test de efectos inter-sujetos					
INTRA CELDAS	101.89	288	.35		
CONSTANTE	397.78	1	397.78	1124.37	.000
COLEGIO	5.68	5	1.14	3.21	.008
CURSO	2.97	1	2.97	8.38	.004
CUESTIONARIO	2.97	2	1.48	4.20	.016
COLEGIO x CURSO	1.94	5	.39	1.10	.362
COLEGIO x CUESTIONARIO	4.48	10	.45	1.27	.248
CURSO x CUESTIONARIO	.38	2	.19	.53	.588
COLEGIO x CURSO x CUESTIONARIO	2.41	10	.24	.68	.742
....					
Test de efectos intra-sujetos implicando a la variable "R".					
INTRA CELDAS	127.00	864	.15		
R	5.49	3	1.83	12.45	.000
COLEGIO x R	3.23	15	.22	1.47	.111
CURSO x R	.11	3	.04	.24	.865
CUESTIONARIO x R	46.78	6	7.80	53.04	.000
COLEGIO x CURSO x R	1.98	15	.13	.90	.564
COLEGIO x CUESTIONA. x R	5.14	30	.17	1.17	.249
CURSO x CUESTIONARIO x R	2.23	6	.37	2.53	.019
COLEGIO x CURSO x CUESTIONARIO x R	5.53	30	.18	1.25	.165

Hemos realizado comparaciones múltiples a posteriori entre los valores medios obtenidos para cada valor de R (véase Tabla 5.1) al nivel de significación del 5%. Estas comparaciones nos llevan a afirmar que hay tres valores de R cuyas medias no difieren significativamente entre sí, que son R_1, R_3 y R_4. La media correspondiente a R_2 sí difiere significativamente con respecto a cada una de las otras tres. Hay dos subconjuntos homogéneos:

Subconjunto 1: El formado por R_1, R_3 y R_4.

Subconjunto 2: El formado por R_2.

Puesto que las modificaciones realizadas en el diseño utilizado en el presente estudio frente al utilizado en el estudio previo (Castro, 1991) no afectan a los valores medios correspondientes a cada nivel de R, podemos comparar las medias obtenidas en los dos estudios (véase Tabla 5.3).

Tabla 5.3. Medias obtenidas para los niveles de R en este estudio y en el estudio previo

Estudio	R_1	R_2	R_3	R_4
Estudio Previo	.579	.486	.551	.588
Estudio Actual	.593	.444	.568	.611

Los tres valores del subconjunto 1 (R_1, R_3 y R_4), han incrementado ligeramente su media, entre un 1.5% y un 2.5%, con respecto a los valores obtenidos en el estudio previo. Sin embargo, el valor medio de R_2 ha disminuido en torno al 4% con respecto al estudio previo. Las diferencias entre estos valores no son apreciables. El coeficiente de correlación producto-momento de Pearson para estas dos series de valores es 0.99. Este dato es un índice de la estabilidad temporal de las medias de los niveles de R.

Las únicas interacciones significativas entre los factores intersujetos COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO y el factor intrasujeto R son: CUESTIONARIOxR con $F=53.04$ y un grado de significación $p=0.000$, y CURSOxCUESTIONARIOxR con $F=2.53$ y un grado de significación $p=0.019$. La interacción CUESTIONARIOxR significa que las diferencias entre los valores medios obtenidos según los valores de R no son iguales en los tres cuestionarios. Ahora bien, si tenemos en cuenta el proceso seguido para la construcción de los tres cuestionarios, podemos observar que el criterio seguido para diferenciar un cuestionario de otro se basa en el factor Q. Por tanto, cabe pensar que el efecto de interacción que provoca el factor CUESTIONARIO es en última instancia un efecto debido al factor Q, y en consecuencia, tenemos un primer indicio de que hay interacción entre los factores R y Q.

5.3. Influencia del colegio y del curso sobre el vector de respuestas según los niveles de R

Como resultado de los contrastes realizados sobre las puntuaciones totales de los niños se obtuvo que había diferencias significativas entre los colegios, entre los cursos y entre los cuestionarios. En el análisis precedente también se ha obtenido que hay diferencias significativas entre los índices de dificultad de los problemas correspondientes a los niveles del factor R. Como consecuencia de ello surge el interrogante de *si las diferencias encontradas por colegio, curso y cuestionario, y los resultados obtenidos para las interacciones de segundo y tercer orden entre estos factores, se dan también cuando no se acumulan los valores de las observaciones realizadas en cada niño, sino que se toman como cuatro* *variables dependientes, una por cada nivel del factor R*.

Para tratar de responder a este interrogante, hemos considerado las cuatro observaciones realizadas en cada sujeto de la muestra como cuatro variables dependientes en un diseño MCFR-rcv, versión multivariante de un diseño completamente aleatorizado, que considera tres factores cruzados: COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.

Los resultados obtenidos del análisis efectuado han sido los siguientes:

En cuanto a las interacciones:

La interacción triple COLEGIOxCURSOxCUESTIONARIO tiene una lambda de Wilks de 0.85285, con un valor aproximado de F=1.16 y un grado de significación p=0.230, por tanto, no hay interacción significativa entre colegio, curso y cuestionario. En los análisis univariantes tampoco se ha obtenido interacción significativa en ninguno de los cuatro niveles de R.

La interacción doble CURSOxCUESTIONARIO tiene una lambda de Wilks de 0.94568, con un valor aproximado de F=2.02 y un grado de significación p=0.042, hay interacción significativa. En los análisis univariantes hemos obtenido que esta interacción es significativa para el valor R_2, que es el único que produce interacción significativa, F=3.06 con p=0.048.

La interacción doble COLEGIOxCUESTIONARIO tiene una lambda de Wilks de 0.84871, con un valor aproximado F=1.20 y un grado de significación p=0.190. Por tanto, no hay interacción significativa entre el colegio y el cuestionario. En los análisis univariantes tampoco se ha obtenido interacción significativa para ninguno de los cuatro valores de R.

La interacción doble COLEGIOxCURSO tiene una lambda de Wilks de 0.93760, con un valor aproximado F=0.93 y un grado de significación p=0.551. Por tanto, no hay interacción significativo entre el colegio y el curso. Esto concuerda con los cuatro contrastes realizados en los análisis univariantes, en los que tampoco se ha obtenido interacción significativa.

El efecto COLEGIO tiene una lambda de Wilks de 0.88641 con una F=1.75 y una p=0.022. Por tanto, se confirma el rechazo de la hipótesis nula y la aceptación de la existencia de diferencias significativas por colegio. En los resultados del análisis univariante hemos obtenido que las diferencias significativas sólo se dan para los valores R_2, con una F=3.19 y una p=0.008, y R_3, con una F=2.65 y una p=0.023. Por contra, no hay diferencias significativas en los valores R_1, con F=1.13 y p=0.342, y R_4, con F=1.82 y p=0.109.

El efecto CURSO tiene una lambda de Wilks de 0.97011, con F=2.20 y p=0.070. En este caso no se produce el rechazo de la hipótesis nula de no existencia de diferencias significativas por curso. Sin embargo, esta conclusión no se mantiene por igual en los cuatro valores de R. El análisis univariante ha dado como resultado que para los valores R_2, con F=6.25 y p=0.013, y R_4, con F=3.81 y p=0.05, hay diferencias significativas por curso. Por el contrario, para los valores R_1, con F=2.62 y p= 0.107, y R_3, con F=2.75 y p=0.098, no hay diferencias significativas. Por tanto, se han obtenido diferencias significativas por curso en los valores correspondientes a la comparación de disminución y no se han obtenido en los valores correspondientes a la comparación de aumento.

El efecto CUESTIONARIO tiene una lambda de Wilks de 0.43701, con F=36.53 y p=0.0. Rechazamos la hipótesis nula de no existencia de diferencias significativas por cuestionario. En los cuatro análisis univariantes, correspondientes a cada uno de los cuatro valores de la variable R se han obtenido diferencias significativas entre los cuestionarios para los cuatro valores de R considerados aisladamente. En el caso R_1 el valor F=64.53 con p=0.0. Para R_2 el valor F=29.25 con p=0.0. Para R_3 el valor F=17.78 con p=0.000. Y para R_4 el valor F=20.39 con p=0.0. Puesto que para cada valor de R, la diferencia entre los problemas que incluye cada cuestionario se basa en la variable Q, lo que expresan los resultados de estos análisis univariantes es que para cada valor de R hay diferencias significativas entre los valores de la variable Q.

5.4. Efecto del factor Q sobre la dificultad de los problemas

El factor "cantidad desconocida" en el esquema de comparación es una variable que hemos simbolizado anteriormente como factor Q. Cada niño ha sido medido tres veces correspondiendo cada una de las medidas, respectivamente, a los niveles Q_1, Q_2 y Q_3 del factor Q; pero como cada niño pasó cuatro problemas quiere decir que cada niño se vio afectado por dos medidas de uno de estos niveles del factor Q. En el caso de que para uno de estos niveles haya dos medidas, se toma como dato el valor medio de ambas.

Puesto que para cada niño tenemos una observación de dos de los niveles de Q y dos observaciones del otro nivel, resulta que para cada uno de los niños estas cuatro observaciones son valores relacionados, ya que la capacidad general del niño influirá en cada una de las cuatro respuestas. Por otro lado, podemos considerar independientes las observaciones de cada niño respecto a la del resto de sus compañeros.

Por la misma razón que expusimos en el análisis del factor R, los datos tomados de cada colegio, de cada curso y con cada cuestionario son independientes entre sí (independencia de observaciones de distintas muestras).

De este modo, y de modo análogo a como hicimos en el estudio del factor R, para cumplir el requisito de la independencia de observaciones, y con las salvedades que ya hemos indicado previamente, el modelo lineal que hemos aplicado en este caso particular es el diseño de medidas repetidas con tres factores intergrupos: COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO, y un factor intrasujeto, el factor Q. Es decir, consideramos que tenemos 36 grupos de niños (6 colegios x 2 cursos x 3 cuestionarios) y a cada uno de los niños de esos

36 grupos se les han efectuado tres medidas diferentes, que corresponden a cada uno de los niveles Q_1, Q_2 y Q_3. La inclusión de los factores intersujetos COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO se debe a que en el análisis realizado previamente encontramos que tenían efecto significativo sobre el rendimiento de los estudiantes.

Hemos realizado un análisis multivariante de la varianza de este diseño de medidas repetidas. Mediante este análisis pretendemos contrastar la siguiente hipótesis nula:

(7) No hay efecto significativo del factor Q sobre el índice de dificultad de los problemas.

El índice de dificultad de los problemas según los distintos valores de Q es el considerado como valor medio en el análisis de la varianza realizado y que hemos recogido en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4. Media (índice de dificultad) y desviaciones típicas para los tres valores del factor Q

Factor Q	Media	Desv. Típica	N	Interv. de confianza al 95 %	
Q_1	.744	.414	324	.699	.789
Q_2	.372	.457	324	.322	.422
Q_3	.498	.463	324	.448	.549

Los resultados del análisis de la varianza aplicado al factor Q (cantidad desconocida) nos han dado para Q una F=97.55 con un grado de significación p=0.000, luego *rechazamos la hipótesis nula (7) y aceptamos que en los niños de la muestra hay diferencias significativas entre los niveles del factor Q*.

Hemos realizado comparaciones múltiples a posteriori entre las medias de los niveles del factor Q, por el método de Scheffé y al nivel de significación del 5%. Los resultados dan que los tres niveles difieren significativamente entre sí. Apareciendo con mayor dificultad Q_2 que Q_3 y éste a su vez mayor que Q_1, es decir,

$$Q_2<Q_3<Q_1$$

como puede observarse de la comparación de las respectivas medias que aparecen ya calculadas en la Tabla 5.4.

Como puede observarse en la Tabla 5.5 hay interacción significativa de dos vías CURSOxQ (F=5.27; p=0.005) y CUESTIONARIOxQ (F=23.89; p=0.000). Esto puede tener como consecuencia que el orden de dificultad obtenido entre los niveles de Q puede verse afectado por el curso y por el cuestionario. Puesto que

Tabla 5.5. Resumen del análisis de la varianza considerando el efecto intra sujetos "Q"

Fuente de Variación	S. de C.	g.l.	M. de C.	F	Sig. de F
Test de Efectos Intra-Sujetos.					
INTRA CELDAS	84.20	288	.29		
CONSTANTE	281.41	1	281.41	962.49	.000
COLEGIO	5.23	5	1.05	3.58	.004
CURSO	2.37	1	2.37	8.11	.005
CUESTIONARIO	3.06	2	1.53	5.23	.006
COLEGIO x CURSO	2.01	5	.40	1.38	.233
COLEGIO x CUESTIONARIO	3.71	10	.37	1.27	.248
CURSO x CUESTIONARIO	.61	2	.31	1.05	.352
COLEGIO x CURSO x CUESTIONARIO	1.23	10	.12	.42	.937
Test implicando el Efecto Intra-Sujetos "Q".					
INTRA CELDAS	68.41	576	.12		
Q	23.17	2	11.59	97.55	.000
COLEGIO x Q	1.67	10	.17	1.41	.174
CURSO x Q	1.25	2	.63	5.27	.005
CUESTIONARIO x Q	11.35	4	2.84	23.89	.000
COLEGIO x CURSO x Q	1.33	10	.13	1.12	.345
COLEGIO x CUESTIONA. x Q	2.24	20	.11	.94	.534
CURSO x CUESTIONARIO x Q	.34	4	.09	.72	.575
COLEGIO x CURSO x CUESTIONARIO x Q	2.91	20	.15	1.22	.227

para cada nivel de Q la diferencia entre cuestionario se debe a los niveles del factor R, la interacción CUESTIONARIOxQ viene explicada por la interacción RxQ que estudiaremos más adelante. La interacción CURSOxQ puede tener como consecuencia: (a) que no haya efecto significativo del factor Q en alguno de estos dos cursos, y (b) que el factor Q tenga efecto significativo, tanto en 5º como 6º curso, pero que el orden de dificultad obtenido para los niveles de Q cambie de 5º a 6º. Realizados por separado contrastes específicos en 5º y 6º curso hemos encontrado que el factor Q presenta efecto significativo tanto en 5º como en 6º curso al nivel de significación del 5%.

Las comparaciones múltiples a posteriori han dado que en 5º curso los tres niveles de Q difieren significativamente entre sí; sin embargo, en 6º curso, los niveles Q_2 y Q_3 no difieren de forma significativa. Si nos fijamos en las medias por curso de los tres niveles del factor Q, y en sus intervalos de confianza (Tabla 5.6), vemos que en 5º se conserva el mismo orden de dificultad que se obtuvo globalmente para los dos cursos, y en 6º se conserva el orden de dificultad pero hay solapamiento entre los intervalos de confianza de Q_2 y Q_3, el orden en 6º es pues $Q_2 \leq Q_3 < Q_1$.

Resulta, pues, que hay interacción entre el curso y la variable Q, pero como puede verse en el Gráfico 5.1, las líneas no se cruzan, por lo que la interacción existente entre CURSO y Q es una interacción "ordenada" (Bacher, 1982, pp.84-87) u "ordinal" (Glass y Stanley, 1980, pp.409-410), es decir, los valores de Q mantienen la misma posición relativa entre sí en 5º y en 6º cursos. A efectos de interpretación, el que la interacción sea de tipo ordinal "equivale a pensar que a pesar de la presencia de interacción puede enunciarse una sola afirmación" (Glass y Stanley, 1980, p.409) respecto a los dos cursos, en nuestro caso.

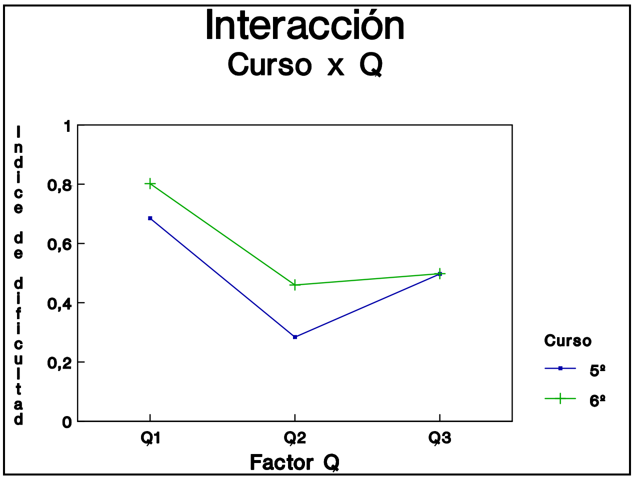


Gráfico 5.1. Porcentajes de respuestas correctas por CURSO y Q.

Tabla 5.6. Media (índice de dificultad) y desviaciones típicas para los tres valores del factor Q por CURSO

CURSO	Q	Media	Desv. Típica	N	Interv. de confianza al 95 %	
5º	Q_1	.685	.442	162	.617	.754
	Q_2	.284	.424	162	.218	.350
	Q_3	.497	.465	162	.425	.569
6º	Q_1	.802	.375	162	.744	.861
	Q_2	.460	.473	162	.387	.533
	Q_3	.498	.463	162	.448	.549

El "casi" paralelismo existente entre el gráfico de Q_1 y Q_2 es un indicativo gráfico de que no hay interacción entre este par de valores con el curso (Bacher, 1982, p.77), lo que significa que *la diferencia entre los índices de dificultad de los problemas tipo Q_2 y Q_1 es prácticamente la misma en 5º que en 6º*. El tercer valor, Q_3, se comporta de manera distinta que Q_1 y Q_2: *el índice de dificultad de R_3 es el mismo en 5º y 6º cursos*. Esto hace que se incremente la diferencia entre los índices de dificultad de los problemas Q_1 y Q_3, y disminuya la diferencia entre los de Q_2 y Q_3.

5.5. Influencia del colegio y del curso sobre el vector de respuestas según los valores de Q

Como resultado de los contrastes realizados sobre las puntuaciones totales de los niños se obtuvo que había diferencias significativas entre los colegios, entre los cursos y entre los cuestionarios. En el análisis precedente también se ha obtenido que hay diferencias significativas entre los índices de dificultad correspondientes a los niveles del factor Q. De manera natural surge pues el interrogante de si las diferencias encontradas por COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO y los resultados obtenidos para las interacciones de segundo y tercer orden entre estos factores, se dan también cuando no se acumulan los valores de las observaciones realizadas en cada niño, sino que se toman como tres variables dependientes, una por cada nivel del factor Q.

Para dar respuesta a estas preguntas hemos considerado las cuatro observaciones realizadas en cada sujeto de la muestra como tres variables dependientes en un diseño MCFR-rcv, versión multivariante de un diseño completamente aleatorizado, que considera tres factores cruzados: COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO. La conversión de las cuatro observaciones en tres valores se ha realizado hallando la media de las dos observaciones que en cada sujeto hacemos de uno de los niveles de Q.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

En primer lugar el resultado del análisis de la interacción triple entre los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO, donde se ha obtenido un valor de lambda de Wilks igual a 0.90880, cuya aproximación a F es de 0.93, con un valor de p=0.580, por lo que nada se opone a aceptar la hipótesis nula de no interacción triple de los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO. Así pues, no sólo no hay interacción entre estos tres factores cuando la variable dependiente son las puntuaciones totales, sino que tampoco la hay cuando se consideran las puntuaciones en cada nivel de Q como tres variables dependientes conjuntamente. En los análisis factoriales univariantes de la varianza correspondientes tampoco hemos encontrado razones para rechazar la hipótesis nula de no existencia de interacción triple para cada una de las variables dependientes, consideradas por separado.

Con respecto a las interacciones dobles. En primer lugar la interacción CURSOx-CUESTIONARIO, cuya lambda de Wilks es 0.98030, con un valor aproximado de F=0.95 y una p=0.457. Lo cual indica que nada se opone a aceptar la hipótesis nula de no interacción entre los factores CURSO y CUESTIONARIO. En los análisis univariantes la conclusión anterior se mantiene para los valores Q_2 y Q_3 con grados de significación altos, p=0.885 y p=0.796, respectivamente. Pero para el valor Q_1 el grado de significación p=0.070, está muy próximo al rechazo de la hipótesis de no interacción CURSOxCUESTIONARIO al nivel de significación del 5%.

La interacción COLEGIOxCUESTIONARIO tiene una lambda de Wilks de 0.89457, con un valor aproximado de F=1.08 y una p=0.348. Nada se opone pues a aceptar la hipótesis nula de no interacción entre los factores COLEGIO y CUESTIONARIO. Los análisis univariantes de la varianza para cada una de las variables nos llevan a sacar la misma conclusión para cada una de las variables dependientes consideradas por separado: Nada se opone a aceptar que *no hay efecto de interacción significativo entre el colegio y el cuestionario para los valores de Q*.

La interacción COLEGIOxCURSO tiene una lambda de Wilks de 0.94055, con un valor aproximado de F=1.18 y una p=0.280. Esto es, nada se opone a aceptar la hipótesis nula de no interacción significativa entre los factores COLEGIO y CURSO. En los análisis univariantes la conclusión anterior se mantiene para los valores Q_1 y Q_3, pero no para Q_2 (p=0.018).

El efecto CUESTIONARIO tiene una lambda de Wilks de 0.71770, con un valor aproximado de F=17.20 y un grado de significación p=0.0. Se rechaza la hipótesis nula, y se acepta que las medias de las puntuaciones correspondientes a los tres cuestionario no son iguales. Esta conclusión se mantiene en cada uno de los análisis univariantes.

El efecto CURSO tiene una lambda de Wilks de 0.93358, un valor aproximado de F=6.78 con un grado de significación p=0.000. Por tanto, existen diferencias significativas entre 5º y 6º curso. Los análisis univariantes para cada uno de los niveles de Q dan diferencias significativas entre cursos para el nivel Q_1 (F=7.30; p=0.007) y para el nivel Q_2 (F=14.65; p=0.000), pero no para el nivel Q_3 (F=0.004; p=0.951).

El efecto COLEGIO tiene una lambda de Wilks de 0.89331, un valor aproximado de F=2.20 con un grado se significación p=0.005. Por tanto, *existen diferencias significativas entre los colegios según los niveles de Q*. Los análisis univariantes para cada nivel de Q han mostrado diferencias altamente significativas para el nivel Q_1, con una F=5.23 y un grado de significación p=0.000, diferencias "casi" significativas para el nivel Q_3, con F=2.11 y p=0.064, y diferencias no significativas para el nivel Q_2 (p=0.509).

5.6. Análisis de las interacciones entre R y Q

En este apartado realizamos el análisis estadístico de la interacción entre los factores R y Q. En él realizamos el contraste de la siguiente hipótesis nula:

(8) No hay interacción entre las variables R y Q.

Puesto que no podemos realizar un análisis factorial de la varianza normal de estos dos factores, debido a que no hay independencia total de las muestras de las posibles combinaciones R_iQ_j, ya que ciertos valores de R aparecen en los cuestionarios con ciertos valores de Q, utilizaremos otra técnica. Partiremos, para ello, del estudio de la posible dependencia de los efectos que hemos hallado para el factor Q respecto a los diferentes niveles de R.

Según la definición de interacción, lo que deseamos estudiar es si el efecto de la variable Q depende del valor elegido para la variable R o si el efecto de la variable Q es el mismo para cada uno de los valores de R. Por ello, hemos tomado cada uno de los valores de R sucesivamente y dentro de él, hemos estudiado el efecto de Q mediante un ANOVA factorial, ya que para cada posible valor de R cada niño sólo tiene una observación y, por tanto, se respeta la hipótesis de independencia.

Compararemos estos resultados parciales respecto al efecto global hallado para Q. Si en alguno de los valores de R se encuentra un cambio, sería posible sospechar la existencia de interacción entre los factores.

Es decir, según la definición de interacción, lo que interesa evaluar es si el orden de dificultad general de Q se conserva para cada uno de los niveles de R. Para ello, y a partir de los resultados de los análisis de varianza a que hemos aludido (véanse Tablas 5.10 a 5.13) se han obtenido los valores medios e intervalos de confianza de los niveles de dificultad de los problemas para la muestra total según las combinaciones de factores, que se presentan en la Tabla 5.7.

En cada casilla de esta tabla se han incluido dos datos: la proporción de respuestas correctas para el tipo de problema que representan y el intervalo de confianza al 95% colocados según la siguiente disposición:

Primer dato: proporción de respuestas correctas de los problemas correspondientes al valor dado de la combinación de factores.

Segundo dato: intervalo de confianza al 95%, calculado a partir de los resultados de los programas del análisis de la varianza.

Estos intervalos de confianza han sido calculados según la siguiente expresión:

$$(\bar{x} - z_\alpha\, \sigma_e/b\sqrt{n},\ \bar{x} + z_\alpha\, \sigma_e/b\sqrt{n}) \quad \text{con } b=3,\ n=108$$

siendo σ_e^2 la varianza residual, obtenida mediante el análisis de varianza efectuado, b el número de niveles del factor Q, n el número de observaciones por nivel y z_α la abscisa de la distribución Normal que corresponde a un nivel de significación α (Dunn y Clark, 1987).

Puesto que deseamos comparar todos los pares de medias entre sí, y hay doce tipos de problemas, hemos de efectuar 12x11/2=66 comparaciones. Con objeto de evitar el problema de las comparaciones múltiples, y obtener un nivel global de significación de 0.05 para el conjunto de comparaciones, en el cálculo de intervalos de confianza se ha tomado α=0.05/66=0.00075, por lo que hemos tomado un valor 1-α=0.99925 y z_α=3.385. De este modo se han obtenido los siguientes intervalos:

Para R_1, ya que $\sigma_e^2 = 0.170$, $\mu \pm 0.045$

Para R_2, ya que $\sigma_e^2 = 0.198$, $\mu \pm 0.048$

Para R_3, ya que $\sigma_e^2 = 0.220$, $\mu \pm 0.051$

Para R_4, ya que $\sigma_e^2 = 0.208$, $\mu \pm 0.050$

Tabla 5.7. Índice de dificultad de cada problema e intervalo de confianza para las combinaciones posibles de los factores R y Q

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	.94 (.895;.985)	.63 (.582;.678)	.75 (.699;.801)	.77 (.720;.820)
Q_2	.31 (.265;.355)	.19 (.142;.238)	.58 (.529;.631)	.39 (.340;.440)
Q_3	.54 (.495;.585)	.52 (.472;.568)	.37 (.319;.421)	.68 (.630;.730)

Al comparar los intervalos de confianza obtenidos en la Tabla 5.7 deducimos que el orden de dificultad de Q no es idéntico respecto a cada valor de R, aunque según se muestra en los resultados del análisis de la varianza (Tablas 5.10 a 5.13) en todos los casos sigue siendo significativo el efecto del factor Q. Es decir, observamos la presencia de interacción ya que el orden de dificultad relativa de Q para cada uno de los niveles de R es el siguiente:

Para $R=R_1$ $Q_2<Q_3<Q_1$

Para $R=R_2$ $Q_2<Q_3<Q_1$

Para $R=R_3$ $Q_3<Q_2<Q_1$

Para $R=R_4$ $Q_2<Q_3\leq Q_1$

El orden $Q_2<Q_3<Q_1$ obtenido de manera general cuando no se tiene en cuenta la variable R, se altera en el caso R_3 (véase Gráfico 5.2) donde los valores de Q_2 y Q_3 invierten su orden de dificultad con respecto a la tónica general, que sí se respeta en los otros tres casos. Otra alteración, aunque menor que la citada, se refiere a que para el valor R_4 los valores de Q_3 y Q_1, si bien respetan el orden de dificultad general, no podemos decir a la

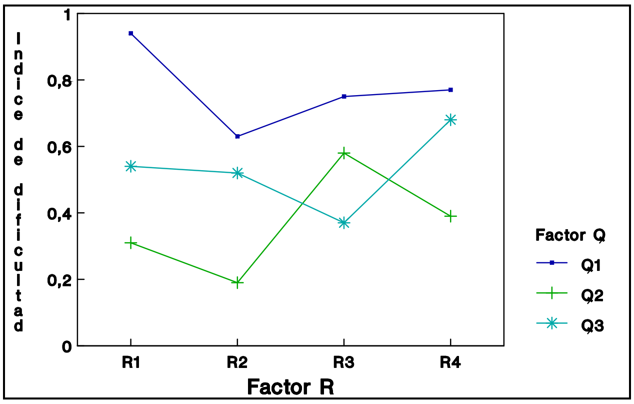


Gráfico 5.2. Indices de dificultad de los tres niveles de Q según los cuatro niveles de R

vista del pequeño solapamiento de los intervalos de confianza, que haya diferencias significativas entre ellos. Esta incidencia la hemos expresado sustituyendo el signo menor por el signo menor o igual, que expresa la posibilidad de una u otra opción. No hemos encontrado interacciones significativas de tres vías entre COLEGIO, CURSO y Q en ninguno de los niveles de R (véanse Tablas 5.10 a 5.14). Para el nivel R_2 hay efecto significativo de interacción de 2 vías CURSOxQ (F=3.063, p=0.048) y efecto "casi" significativo COLEGIOxQ (F=1.781, p=0.064) al nivel de significación del 5%. En consecuencia, las desigualdades anteriores no se alteran significativamente según el colegio y el curso, salvo en el caso R_2 en 5º curso, donde el valor R_2Q_1 no es significativamente distinto del valor R_2Q_3 (véase Tabla 5.8). No obstante, el efecto de interacción significativo se mantiene tanto en 5º como en 6º curso.

Tabla 5.8. Índice de dificultad de cada problema e intervalo de confianza para las combinaciones posibles de los factores R y Q en 5º curso.

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	.93 (.867;.993)	.50 (.432;.568)	.72 (.648;.792)	.74 (.670;.810)
Q_2	.24 (.177;.303)	.11 (.042;.178)	.48 (.408;.552)	.28 (.210;.350)
Q_3	.50 (.437;.633)	.54 (.472;.608)	.37 (.298;.442)	.67 (.600;.740)

Tabla 5.9. Índice de dificultad de cada problema e intervalo de confianza para las combinaciones posibles de los factores R y Q en 6º curso

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	.94 (.877;1.00)	.76 (.692;.828)	.78 (.708;.852)	.80 (.730;.870)
Q_2	.37 (.307;.433)	.26 (.192;.328)	.69 (.618;.762)	.50 (.430;.570)
Q_3	.57 (.507;.633)	.50 (.432;.568)	.37 (.298;.442)	.69 (.620;.760)

Tabla 5.10. Resumen del análisis de la varianza de R_1 por COLEGIO, CURSO y Q

Fuente de Variación	S. de C.	g.l.	M. de C.	F	Sig. de F
Efectos Principales	23.315	8	2.914	17.168	0.0
COLEGIO	.963	5	.193	1.135	.342
CURSO	.444	1	.444	2.618	.107
Q	21.907	2	10.954	64.527	0.0
Interacciones de dos vías	3.111	17	.183	1.078	.375
COLEGIO x CURSO	.593	5	.119	.698	.625
COLEGIO x Q	2.352	10	.235	1.385	.186
CURSO x Q	.167	2	.083	.491	.613
Interacciones de 3 vías	2.907	10	.291	1.713	.077
COLEGIO x CURSO x Q	2.907	10	.291	1.713	.077
Explicada	29.333	35	.838	4.937	.000
Residual	48.889	288	.170		
Total	78.222	323	.242		

Tabla 5.11. Resumen del análisis de la varianza de R_2 por COLEGIO, CURSO y Q

Fuente de Variación	S. de C.	g.l.	M. de C.	F	Sig. de F
Efectos Principales	15.938	8	1.992	10.086	0.0
COLEGIO	3.148	5	.630	3.188	.008
CURSO	1.235	1	1.235	6.250	.013
Q	11.556	2	5.778	29.250	0.0
Interacciones de 2 vías	6.049	17	.356	1.801	.027
COLEGIO x CURSO	1.321	5	.264	1.338	.248
COLEGIO x Q	3.519	10	.352	1.781	.064
CURSO x Q	1.210	2	.605	3.063	.048
Interacciones de 3 vías	1.123	10	.112	.569	.839
COLEGIO x CURSO x Q	1.123	10	.112	.569	.839
Explicada	23.111	35	.660	3.343	.000
Residual	56.889	288	.198		
Total	80.000	323	.248		

Tabla 5.12. Resumen del análisis de la varianza de R_3 por COLEGIO, CURSO y Q

Fuente de Variación	S. de C.	g.l.	M. de C.	F	Sig. de F
Efectos Principales	11.340	8	1.417	6.446	.000
COLEGIO	2.914	5	.583	2.650	.023
CURSO	.605	1	.605	2.751	.098
Q	7.821	2	3.910	17.782	.000
Interacciones de 2 vías	3.765	17	.221	1.007	.450
COLEGIO x CURSO	1.840	5	.368	1.673	.141
COLEGIO x Q	1.327	10	.133	.604	.811
CURSO x Q	.599	2	.299	1.361	.258
Interacciones de 3 vías	1.068	10	.107	.486	.899
COLEGIO x CURSO x Q	1.068	10	.107	.486	.899
Explicada	16.173	35	.462	2.101	.001
Residual	63.333	288	.220		
Total	79.506	323	.246		

Tabla 5.13. Resumen del análisis de la varianza de R_4 por COLEGIO, CURSO y Q

Fuente de Variación	S. de C.	g.l.	M. de C.	F	Sig. de F
Efectos Principales	11.142	8	1.393	6.710	.000
COLEGIO	1.889	5	.378	1.820	.109
CURSO	.790	1	.790	3.807	.052
Q	8.463	2	4.231	20.387	0.0
Interacciones de 2 vías	3.235	17	.190	.917	.555
COLEGIO x CURSO	.173	5	.035	.167	.975
COLEGIO x Q	2.426	10	.243	1.169	.312
CURSO x Q	.636	2	.318	1.532	.218
Interacciones de 3 vías	2.846	10	.285	1.371	.193
COLEGIO x CURSO x Q	2.846	10	.285	1.371	.193
Explicada	17.222	35	.492	2.371	.000
Residual	59.778	288	.208		
Total	77.000	323	.238		

A la vista de estos resultados *rechazamos la hipótesis nula (8) de no interacción de las variables R y Q. El índice de dificultad de un problema verbal de comparación multiplicativa no es el mismo según sea la cantidad desconocida en el esquema de comparación*, pero además el orden general de dificultad obtenido para los valores de Q se altera en el caso de la expresión "veces tantas como" donde los problemas de referente desconocido Q_3 tienen mayor índice de dificultad que los de escalar desconocido Q_2, contrariamente a lo que ocurre en los demás casos.

La presencia de interacción de las variables R y Q requiere que se realicen matizaciones sobre lo dicho, por separado, de cada uno de los factores R y Q. En el caso del factor Q se ha puesto de manifiesto la ordenación

$$Q_2<Q_3<Q_1,$$

que matizada por el efecto de interacción con la variable R nos lleva a establecer las siguientes conclusiones:

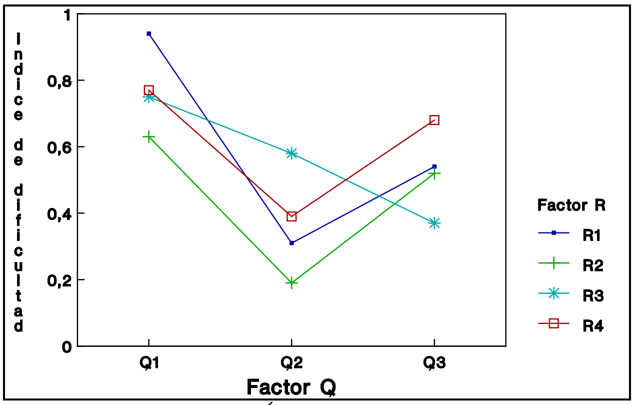


Gráfico 5.3. Índices de dificultad de los niveles del factor R según los niveles del factor Q

-La media correspondiente a Q_1 tiene un valor significativamente mayor que la media de Q_2.

-La media correspondiente a Q_1 tiene un valor significativamente mayor que la media de Q_3, excepto en el caso R_4.

-Salvo en R_3, el orden general observado ($Q_2<Q_3<Q_1$) entre las medias de los valores de Q se conserva.

Al pasar de un valor de Q a otro la presencia o no de interacción con la variable R depende de si la comparación es de aumento o de disminución. En el caso de la comparación de disminución las gráficas de R_2 y R_4 son paralelas, por lo que no se observa, para estos dos valores, interacción con la variable Q. Por el contrario en las dos expresiones de la comparación de aumento sí se observa la presencia de interacción al pasar de unos valores de Q a otros:

-El valor R_1 tiene la proporción de aciertos más elevada en Q_1, mientras que en Q_2 y Q_3 tiene una proporción intermedia.

-El valor R_3 tiene en Q_1 una proporción de aciertos intermedia, en Q_2 tiene la proporción más elevada y en Q_3 la más pequeña que el resto de valores R.

Tabla 5.14. Pares de problemas significativamente distintos.

Y X	(R_2,Q_2) .19 (.142;.238)	(R_1,Q_2) .31 (.265;.355)	(R_3,Q_3) .37 (.319;.421)	(R_4,Q_2) .39 (.340;.440)	(R_2,Q_3) .52 (.472;.568)	(R_1,Q_3) .54 (.495;.585)	(R_3,Q_2) .58 (.529;.631)	(R_2,Q_1) .63 (.582;.678)	(R_4,Q_3) .68 (.630;.730)	(R_3,Q_1) .75 (.699;.801)	(R_4,Q_1) .77 (.720;.820)	(R_1,Q_1) .94 (.895;.895)
(R_2,Q_2) .19 (.142;.238)												
(R_1,Q_2) .31 (.265;.355)	SID											
(R_3,Q_3) .37 (.319;.421)	SID											
(R_4,Q_2) .39 (.340;.440)	SID											
(R_2,Q_3) .52 (.472;.568)	SID	SID	SID	SID								
(R_1,Q_3) .54 (.495;.585)	SID	SID	SID	SID								
(R_3,Q_2) .58 (.529;.631)	SID	SID	SID	SID								
(R_2,Q_1) .63 (.582;.678)	SID	SID	SID	SID	SID							
(R_4,Q_3) .68 (.630;.730)	SID	SID	SID	SID	SID	SID						
(R_3,Q_1) .75 (.699;.801)	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID				
(R_4,Q_1) .77 (.720;.820)	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID				
(R_1,Q_1) .94 (.895;.985)	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID	SID	

La relación "X significativamente distinto de Y" se define como "X tiene un porcentaje distinto de Y, y los intervalos de confianza no se solapan.

En la Tabla 5.14 los pares de problemas "significativamente distintos están marcados con "SID".

5.6.1. Comparación de índices de dificultad

Puesto que hay efecto significativo del factor R, del factor Q, y además hay efecto significativo de interacción entre las variables R y Q, hemos procedido a estudiar entre qué pares de problemas existen diferencias significativas de dificultad. Para ello, hemos realizado comparaciones múltiples entre los índices de dificultad de los doce problemas en base a los intervalos de confianza calculados (véase Tabla 5.7). Por este método hemos detectado las posibles parejas de problemas entre los que hay diferencias significativas de dificultad. Hemos considerado que dos problemas tienen índices de dificultad significativamente distintos si no se solapan sus respectivos intervalos de confianza.

El resumen de las comparaciones entre los índices de dificultad de los doce problemas está en la Tabla 5.14, donde se ha indicado abreviadamente los pares de problemas significativamente distintos mediante la expresión "SID".

Producto de las comparaciones múltiples han surgido grupos de problemas homogéneos en el sentido de solaparse sus respectivos intervalos de confianza. En total, hemos obtenido siete subconjuntos de problemas homogéneos (véase Tabla 5.15).

Tabla 5.15. Grupos de problemas homogéneos

Subconjunto 1				
	Problema	R_2Q_2		
	Porcentaje	.19		
Subconjunto 2				
	Problema	R_1Q_2	R_3Q_3	R_4Q_2
	Porcentaje	.31	.37	.39
Subconjunto 3				
	Problema	R_2Q_3	R_1Q_3	R_3Q_2
	Porcentaje	.52	.54	.58
Subconjunto 4				
	Problema	R_1Q_3	R_3Q_2	R_2Q_1
	Porcentaje	.54	.58	.63
Subconjunto 5				
	Problema	R_3Q_2	R_2Q_1	R_4Q_3
	Porcentaje	.58	.63	.68
Subconjunto 6				
	Problema	R_4Q_3	R_3Q_1	R_4Q_1
	Porcentaje	.68	.75	.77
Subconjunto 7				
	Problema	R_1Q_1		
	Porcentaje	.94		

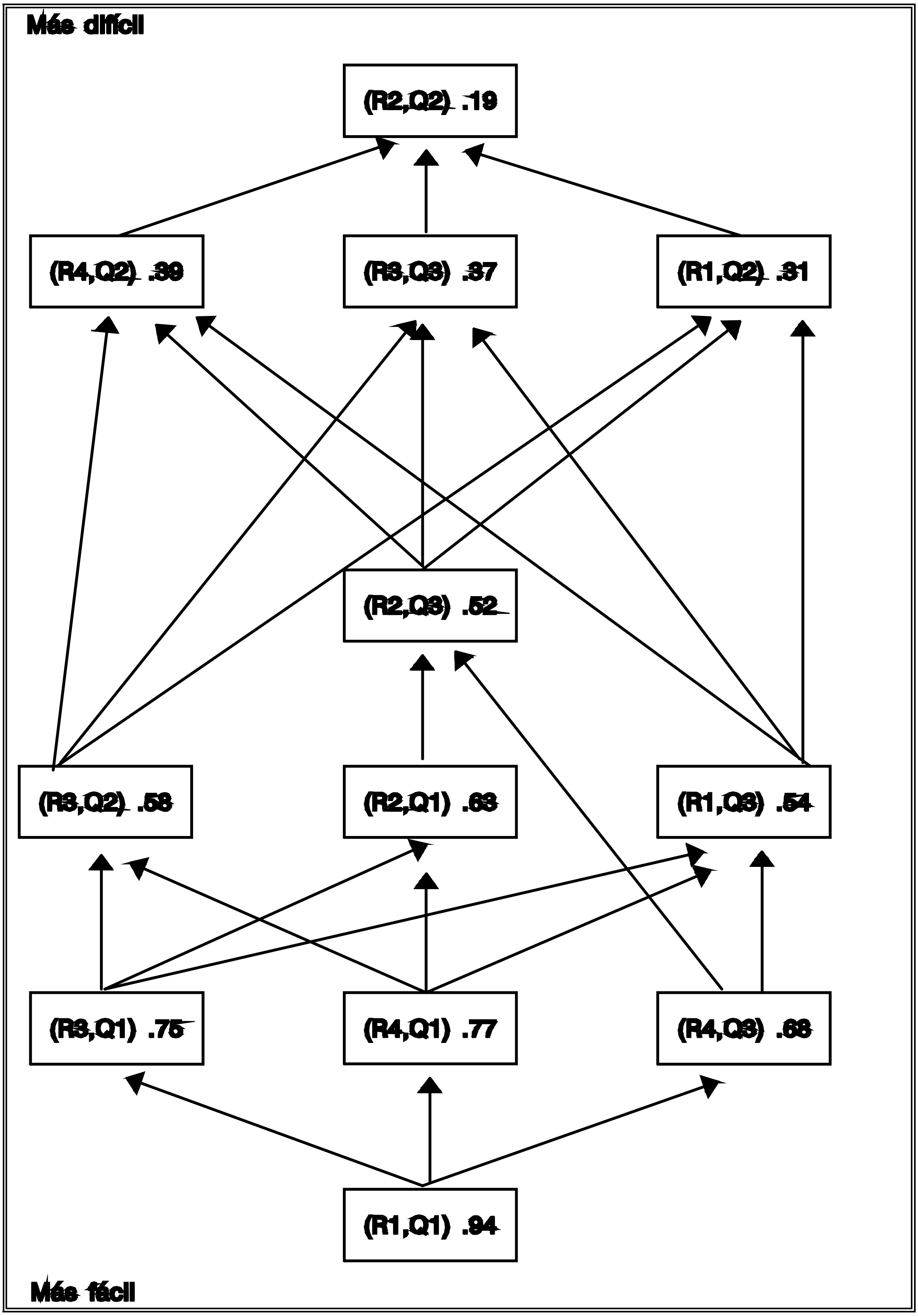


Gráfico 5.4. Ordenación parcial de los índices de dificultad de los doce problemas de comparación multiplicativa

5.6.2. Ordenación parcial

A partir de la Tabla 5.14 y de la comparación entre los índices de dificultad de problemas se define un orden parcial en el conjunto de las doce categorías de problemas de comparación multiplicativa. La relación "X tiene menor dificultad que Y"(X < Y) equivale a "X tiene un porcentaje mayor que Y y no se solapan los intervalos de confianza". Para visualizar mejor dicha ordenación parcial la hemos representado en el Gráfico 5.4 mediante un diagrama de Hesse.

5.7. Resumen

Los contrastes de hipótesis realizados en este capítulo respecto del efecto de los factores R, Q y su interacción, sobre el porcentaje de éxitos de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa nos llevan a enunciar las siguientes conclusiones:

1ª) El rechazo de la Hipótesis nula (6) de no existencia de efecto significativo de la variable R (expresión de comparación) y aceptación de la hipótesis alternativa: *El factor R tiene efecto significativo sobre la dificultad de comprensión de los problemas de comparación multiplicativa.*

2ª) Rechazar la Hipótesis nula (7) de no existencia de efecto significativo de la variable Q (cantidad desconocida en el esquema de comparación) y aceptar la hipótesis alternativa: *El factor Q tiene efecto significativo sobre la dificultad de comprensión de los problemas verbales de comparación multiplicativa.*

3ª) Rechazar la Hipótesis nula (8) de no existencia de efecto de interacción entre las variables independientes R y Q y aceptar la hipótesis alternativa: *Hay efecto de interacción significativa entre los factores R y Q sobre la dificultad de compresión de los problemas verbales de comparación multiplicativa.*

Capítulo 6

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE ERRORES

En este capítulo hacemos una clasificación de los procesos que han empleado los niños en respuesta a los problemas de comparación incluidos en los tres cuestionarios y analizamos si hay o no asociación entre las variables de tarea R, Q y los tipos de errores o fallos de comprensión en niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria.

Con respecto a la variable que hemos notado R, tratamos de dilucidar cómo están asociados los fallos de comprensión con las cuatro expresiones relacionales que hemos seleccionado y con las que se puede expresar lingüísticamente la comparación. Con respecto a la segunda variable, que hemos notado Q, pretendemos identificar cómo están asociados los tipos de errores o faltas de comprensión en los problemas verbales de comparación multiplicativa con el hecho de que la cantidad desconocida en el problema sea una u otra de las tres cantidades implicadas en el esquema de comparación.

Sobre el conjunto de los doce tipos de problemas que quedan determinados por ambas variables de tarea hemos planteado la siguiente hipótesis:

> *Si un alumno produce una respuesta incorrecta, el error o la dificultad de comprensión que produce esa incorrección depende del término relacional, de la cantidad desconocida y de la interacción mutua de ambas variables.*

Para contrastar esta hipótesis hemos tenido que clasificar las respuestas y definir los tipos de errores que producen los niños. Para ello, hemos tenido en cuenta clasificaciones de errores en investigaciones previas tales como la de Dellarosa Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988) para problemas de tipo aditivo.

6.1. Tipos de respuestas en problemas de estructura multiplicativa de comparación: Estudio Piloto.

La identificación de los tipos de faltas de comprensión o errores que cometen los niños de 5º y 6º curso de EGB en problemas verbales de estructura multiplicativa de comparación la hemos realizado tomando como base las respuestas escritas dadas por los niños a las pruebas escritas de resolución de problemas en el estudio piloto (Castro, 1991). La descripción de los tipos de errores observados en este estudio piloto se ha hecho teniendo en cuenta una serie de consideraciones bajo los que cabe interpretarlos.

El error más frecuente en los problemas de comparación de estructura aditiva según el trabajo de Dellarosa Cummins y otros (1988) es el de transformaciones que cambian la estructura matemática del problema. Por tanto una técnica útil para estudiar la comprensión en problemas de comparación es aquella que tenga en cuenta algún aspecto estrechamente relacionado con la estructura matemática del problema, como es el tipo de operación u operaciones que el niño emplea. Esta técnica ha sido utilizada por Bell y colaboradores (Bell, Fischbein y Greer, 1984; Bell, Swan y Taylor, 1981; Greer y Mangan, 1986) haciendo que el niño elija, entre varias operaciones que se le presentan junto al problema, la operación adecuada para resolverlo.

Por ello, en nuestro trabajo, encaminado a estudiar niveles de comprensión en problemas de comparación multiplicativa, hemos utilizado la técnica de analizar en las respuestas escritas, libremente producidas por los niños, el tipo de operación u operaciones que emplea y que suponemos son un producto directo de la comprensión.

En principio, las respuestas dadas por los niños en el estudio piloto las clasificamos en respuestas correctas y respuestas incorrectas.

Una respuesta ha sido considerada correcta desde el punto de vista de la comprensión del problema si el niño emplea una operación aritmética que conduce al resultado. Para mantener este criterio hemos tenido que obviar errores cometidos por los niños que no hemos achacado a la fase de comprensión. Entre ellos tenemos:

-La estrategia de resolución adoptada, siempre que conduzca a la solución. Una respuesta a un problema que requiera de una división entre los datos, 72 bolas y 12 bolas, ha sido considerada como correcta si el niño ha realizado substracciones repetidas del divisor y cuenta el número de substracciones realizadas, obteniendo la respuesta esperada, en este caso 6. Así mismo, una respuesta que requiera de una multiplicación ha sido considerada correcta si el niño realiza sumas reiteradas del multiplicando y obtiene como solución la misma cantidad que daría si lo hubiera hecho con la multiplicación.

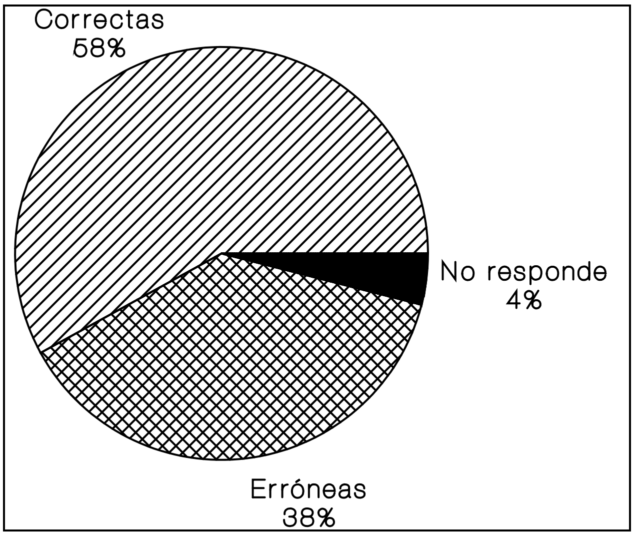


Gráfico 6.1. Porcentajes de tipos de respuestas.

-Los errores de cálculo, que corresponden a la fase de ejecución (Mayer, 1986a).

-La forma lingüística de expresar el resultado, siempre que sea una expresión equivalente a la esperada. Por ejemplo, si la expresión esperada es "Daniel tiene 6 veces menos que María" y el niño escribe "María tiene 6 veces más que Daniel" esta respuesta la hemos considerado como correcta desde el punto de vista de la comprensión. Para Dellarosa Cummins y otros (1988) recordar un problema en términos lingüísticos equivalentes es considerado como un error de comprensión. Nosotros no lo hemos considerado como tal.

De las 1200 respuestas analizadas en el estudio piloto (Véase Castro, Rico y Castro, 1992) dadas por niños de 11 a 12 años, el 58 % fueron correctas, el 38 % erróneas y el 4 % no respondió.

En la Tabla 6.1 presentamos el número de procesos distintos (correctos e incorrectos) utilizados por los niños en cada uno de los doce problemas. En ellos no hemos incluido las respuestas en blanco.

Presentamos en la Tabla 6.2 el número de procesos diferentes utilizados por los niños del estudio piloto que conducen a una solución errónea y en la Tabla 6.3 el número de procesos distintos que conducen a la solución correcta. Como puede observarse de la comparación de estas dos tablas, el número de procesos correctos utilizados por los niños en cada problema es mucho menor que el número de procesos incorrectos.

Tabla 6.1. Número de procesos distintos utilizados por los niños

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	8	10	7	5
Q_2	8	9	11	11
Q_3	7	7	8	7

Tabla 6.2. Número de procesos erróneos distintos

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	6	9	5	4
Q_2	5	6	7	6
Q_3	6	6	7	5

Tabla 6.3. Número de procesos correctos distintos

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	2	1	2	1
Q_2	3	3	4	5
Q_3	1	1	1	2

En problemas de comparado desconocido y de referente desconocido el número de procesos correctos en cada problema empleados por los niños no pasa de dos. El número de soluciones medio es de 1.4, es decir, los niños han empleado predominantemente un sólo proceso correcto, que suele ser multiplicar o dividir. Ocasionalmente utilizan un proceso alternativo: sumas o restas repetidas. Con los problemas de escalar desconocido, tipo Q_2, los niños han utilizado un número mayor de procesos correctos (véase Tabla 6.4). No obstante, dividir los datos es el proceso empleado con mayor frecuencia.

Tabla 6.4. Procesos correctos utilizados por los niños.

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	RxE (99%) 12x6 -------------- R+R+R+R+R+R (1%) 12+12+12+12+12+12	R:E (100%) 72:6	RxE (99%) 12x6 ------------------ R+R+R+R+R+R 12+12+12+12+12+12	R:E (100%) 72:6
Q_2	C:R (79%) 72:12 --------------- RxE (18%) 12x6 --------------- C-R-R-R-R-R-R (3%) 72-12-12-12-12-12-12	C:R (83%) 72:12 ----------------- RxE (13%) 12x6 ------------------ R+R+R+R+R+R 12+12+12+12+12+12	C:R (68%) 72:12 ------------------- C:E (2%) 72:6 ------------------ RxE (23%) 12x6 ------------------ R+R+R+R+R+R (7%) 12+12+12+12+12+12	C:R (81%) 72:12 ----------------- C:E (4%) 72:6 ------------------- RxE (11%) 12x6 ------------------ C-R-R-R-R-R-R (2%) 72-12-12-12-12-12-12 ------------------ R+R+R+R+R+R (2%) 12+12+12+12+12+12
Q_3	C:E (100%) 72:6	CxE (100%) 12x6	C:E (100%) 72:6	CxE (98%) 12x6 ------------------ R+R+R+R+R+R (2%) 12+12+12+12+12+12

R = referente; C = comparado; E = escalar; + = sumar; - = restar; x = multiplicar; : = dividir
Los datos numéricos corresponden a los problemas de la Tabla 3.1
El porcentaje está calculado sobre el número de respuestas correctas

Tabla 6.5. Procesos incorrectos empleados por los niños en problemas de comparado desconocido.

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	Sin respuesta (0%) -------------------- R+E (60%)* 12+6 -------------------- R:E (6.7%) 12:6 --------------------- (RxE)+R (6.7%) 12x6+12 --------------------- (RxE)-R (6.7%) 12x6-12 -------------------- (ExE)-R (6.7%)	Sin respuesta (16%) -------------------- R+E (5%) 72+6 -------------------- R-(E+E+E+E+E+E) (3%) 72-(6+6+6+6+6+6) -------------------- R-E (47%) 72-6 -------------------- R-E-E-E-E-E-E (3%) 72-6-6-6-6-6-6 -------------------- RxE (3%)	Sin respuesta (23%) -------------------- R+E (23%) 12+6 -------------------- R-E (15%) 12-6 -------------------- R:E (23%) 12:6 -------------------- (RxE)-R (8%) (12x6)-12 -------------------- ?xE=R (8%)	Sin respuesta (30%) ------------------- R+E (9%) 72+6 ------------------- R-E (9%) 72-6 ------------------- RxE (48%) 72x6 ------------------- 72:2 1,5+1,5 (4%)

	(6x6)-16 -------------------- (R:E)xE (13.2%) (12:6)x6	72x6 -------------------- R-(ExE) (14%) 72-(6x6) -------------------- R-(R:E) (3%) 72-(72:6) -------------------- (RxE)/2 (3%) (72x6)/2 -------------------- R-(Ex10) (3%) 72-60	?x6=12	

* Porcentaje sobre el total de respuestas incorrectas+no respuesta
R = referente; C = comparado; E = escalar; + = sumar; - = restar; x = multiplicar; : = dividir
Los datos numéricos corresponden a los problemas de la Tabla 3.1

Tabla 6.6. Procesos incorrectos empleados por los niños en problemas de escalar desconocido

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_2	Sin respuesta (3%) -------------------- C+R (4.5%) 72+12 -------------------- C-R (85%) 72-12 -------------------- (C-R):10 (3%) (72-12):10 -------------------- (C-R):C (1.5) (72-12):72 -------------------- (C-R):R (3%) (72-12):12	Sin respuesta (4%) -------------------- C-R (6%) 12-72 -------------------- R-C (80%) 72-12 -------------------- (R-C)=D C+C+C+C+C=D (1.5%) (72-12=60 12+12+12+12+12=60 -------------------- (R-C):C (4%) (72-12):12 -------------------- R-C-C-C-C-C (3%) 72-12-12-12-12-12 Solución = E-1=5 -------------------- Otras (1.5%) Varias operaciones	Sin respuesta (11%) -------------------- C+R (13%) 72+12 -------------------- R-C (2%) 12-72 -------------------- C-R (56%) 72-12 -------------------- C-R-R-R-R-R (2%) 72-12-12-12-12-12 Solución = E-1=5 -------------------- (C+R):2 (2%) (72+12):2 -------------------- (C-R):R (4%) (72-12):12 -------------------- CxR (9%) 72x12	Sin respuesta (26%) ------------------- C+R (11%) 12+72 ------------------- C-R (4%) 12-72 ------------------- R-C (53%) 72-12 ------------------- R-C=D CxE=D (2%) 72-12=60 12x5=60 S=5 ------------------- (R-C)/R (2%) (72-12)/72 ------------------- RxC (2%) 72x12

R = referente; C = comparado; E = escalar; + = sumar; - = restar; x = multiplicar; : = dividir
Los datos numéricos corresponden a los problemas de la Tabla 3.1
Los porcentajes están calculados sobre el número de respuestas incorrectas+no respuesta

Tabla 6.7. Procesos incorrectos empleados por los niños en problemas de referente desconocido

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_3	Sin respuesta (2.75%) --------------------- C+R (2.75%) 72+12 --------------------- C+E (13.5%) 72+6 --------------------- C-E (21.5%) 72-6 --------------------- CxE (54%) 72x6 --------------------- (CxE)-C (2.75%) (72x6)-72 --------------------- Otras (2.75%) 36+36=72	Sin respuesta (2%) --------------------- C+E (19%) 12+6 --------------------- C-E (30%) 12-6 --------------------- (ExE)+C (6%) (6x6)+12 --------------------- (CxE)-E (2%) (12x6)-6 --------------------- C:E (38%) 12:6 --------------------- Otras (2%) 8+4=12	Sin respuesta (11%) --------------------- C+E (4.5%) 72+6 --------------------- C-E (3%) 72-6 --------------------- C-E-E-E-E-E-E (1.5%) 72-6-6-6-6-6-6 --------------------- C-(Ex10) (1.5%) 72-6x10) --------------------- CxE (75%) 72x6 --------------------- Cx(ExE) (1.5%) 72x(6x6) --------------------- C-(ExE) (1.5) 72-(6x6)	Sin respuesta (15%) --------------------- C+E (2%) 12+6 --------------------- C-E (5%) 12-6 --------------------- C:E (73%) 12:6 --------------------- R:E (2%) 72:6 --------------------- E+E+E+E+E+E (2%) 6+6+6+6+6+6 ---------------------

R = referente; C = comparado; E = escalar; + = sumar; - = restar; x = multiplicar; : = dividir

Los datos numéricos corresponden a los problemas de la Tabla 3.1

Los porcentajes están calculados sobre el número de respuestas incorrectas+no respuesta

En resumen, los procesos correctos empleados con más frecuencia por los niños de la muestra al resolver problemas verbales de comparación multiplicativa son:

a) *Multiplicar referente por escalar* en problemas de comparación de aumento con comparado desconocido (R_1Q_1 y R_3Q_1).

b) *Multiplicar comparado por escalar* en problemas de comparación de disminución de referente desconocido (R_2Q_3 y R_4Q_3.

c) *Dividir referente entre escalar* en problemas de comparación de disminución de comparado desconocido (R_2Q_1 y R_4Q_1).

d) *Dividir comparado entre escalar* en problemas de comparación de aumento de referente desconocido (R_1Q_3 y R_3Q_3).

e) *Dividir comparado entre referente* en problemas de escalar desconocido, tanto de aumento como de disminución (R_1Q_2, R_2Q_2, R_3Q_2 y R_4Q_2).

Las respuestas erróneas, excluidas las no respuestas, suponen el 38% del total de respuestas. Los tipos de errores que hemos observado en ellas en función de la operación u operaciones empleadas por los niños, son todos del tipo de los que Dellarosa Cummins y otros (1988) titulan como "transformaciones violando la estructura". El número de variantes de este error en problemas de estructura multiplicativa de comparación es mayor que el de sus correspondientes de estructura aditiva (véanse Tablas 6.5, 6.6 y 6.7). Dada la variedad de procesos incorrectos utilizados por los niños en la resolución de los problemas verbales de comparación multiplicativa, hemos realizado una clasificación de los mismos con la finalidad de analizar si hay asociación entre las clases de error así definidas y la variables de tarea R y Q. La clasificación de los procesos incorrectos surge al considerar los siguientes criterios básicos, que bien individualmente o actuando a la vez provocan determinados tipos de error.

Criterio 1. Si el alumno interpreta el problema como de estructura multiplicativa o aditiva.

Criterio 2. Si el alumno invierte o no el sentido de la comparación.

Criterio 3. Si el alumno mezcla las dos estructuras.

Criterio 4. Si el alumno se bloquea y deja el problema en blanco, es decir, sin respuesta.

El criterio 2 puede darse tanto si el alumno interpreta el problema como de estructura aditiva o como de estructura multiplicativa (invierte la operación a realizar dentro de la estructura multiplicativa o aditiva que ha elegido). Esto daría lugar a la consideración de los siguientes tipos de errores:

1 Sin respuesta
2 Cambio de estructura e inversión
3 Cambio de estructura
4 Inversión
5 Doble estructura

6 Otros errores

Pero el error 2 forma parte del estudio de errores en la estructura aditiva y como no estamos estudiando esa estructura hemos tomado la decisión de incorporarlo al error 3 como un cambio de estructura.

6.1.1. Variable tipo de error

A partir de estos supuestos básicos hemos definido la variable tipo de error a la que hemos notado "ERROR" con los siguientes valores:

$ERROR_1$ = 1 Sin respuesta

$ERROR_2$ = 2+3 Cambio de estructura

$ERROR_3$ = 4 Inversión multiplicativa

$ERROR_4$ = 5 Doble estructura

$ERROR_5$ = 6 Otros errores.

cuyo significado es:

$ERROR_1$. Sin respuesta: El alumno deja el espacio reservado a la resolución del problema en blanco.

$ERROR_2$. Cambio de estructura: Significa que el alumno interpreta el problema como si fuera de estructura aditiva (en el sentido que Vergnaud da a este término).

Por ejemplo, en el problema

María tiene 54 canicas.

Daniel tiene 18 canicas.

¿Cuántas veces menos canicas tiene Daniel que María?

cambio de estructura significa que el alumno propone como solución 54-18 o bien 54+18.

$ERROR_3$. Inversión de la relación: Significa que el alumno da una respuesta al problema mediante la relación inversa de la que aparece en el enunciado.

Por ejemplo, en el problema

María tiene 54 canicas.

María tiene 3 veces tantas canicas como Daniel.

¿Cuántas canicas tiene Daniel?.

el error de inversión significa que el alumno propone como solución 54x3=162.

$ERROR_4$. Doble estructura: El alumno utiliza la estructura aditiva y la multiplicativa para obtener la solución. Utiliza dos operaciones una de ellas es una multiplicación o división y la otra una suma o una resta.

Por ejemplo, en el problema

María tiene 54 canicas.

Daniel tiene 18 canicas.

¿Cuántas veces menos canicas tiene Daniel que María?

un error de doble estructura es dar como solución "2 veces menos" resultado de realizar primero una resta 54-18=36 y después una división 36:18=2.

$ERROR_5$. Otros errores: Errores que no encajan en los anteriores.

Del análisis de las respuestas escritas de los alumnos en el estudio piloto hemos obtenido que los tipos de error más frecuentes en problemas de comparación multiplicativa son el $ERROR_2$: *cambio de estructura*, y el $ERROR_3$: *inversión de la relación*.

En algunos problemas la mayoría de los procesos de solución erróneos se reducen a uno sólo de estos tipos, pero en otros ambos tipos de error se presentan con porcentajes muy similares.

Tabla 6.8. Tipos de errores más frecuentes y porcentajes sobre el total de respuestas y sobre el total de errores en cada problema

	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	ERROR-2 9% (60%) (*) (**)	ERROR-2 20% (61%)	ERROR-2 5% (50%) ----------- ERROR-3 3% (30%)	ERROR-3 11% (70%)
Q_2	ERROR-2 59% (92%)	ERROR-2 60% (90%)	ERROR-2 32% (80%)	ERROR-2 32% (91%)
Q_3	ERROR-2 15% (42%) ---------- ERROR-3 20% (56%)	ERROR-2 23% (50%) ----------- ERROR-3 18% (39%)	ERROR-3 49% (84%)	ERROR-3 30% (86%)

(*) porcentaje sobre el total de respuestas
(**) porcentaje sobre el total de respuestas erróneas (no se incluyen las no respuesta)

Para dar idea de cuál es el tipo de proceso erróneo que con mayor frecuencia induce cada tipo de problema, presentamos en la Tabla 6.8 el tipo de error que se presenta con mayor frecuencia para cada uno de los doce problemas, los porcentajes con los que se han presentado los tipos de error calculados sobre el total de respuestas (correctas+erróneas+sin respuesta) y el porcentaje de ese tipo de error sobre el número total de respuestas erróneas dadas en cada problema excluidas las no respuestas.

De la observación de los datos de la Tabla 6.8 hemos inferido que los errores de los niños en estos problemas se ajustan fundamentalmente a dos pautas de error y aunque cometen otros tipos de error, éstos representan un pequeño porcentaje de las respuestas incorrectas.

6.2. Predicciones

A raíz de los resultados anteriores hemos enunciado una serie de hipótesis o predicciones que desarrollan la naturaleza de la asociación existente entre las variables de tarea R y Q y los tipos de error cometidos por los niños.

> *Predicción 1. Los errores que cometen los niños se ajustan a la tipología que hemos establecido previamente.*
> *Predicción 2. El tipo de error más frecuente es el* $ERROR_2$*, cambio de estructura.*
> *Predicción 3. Los problemas tipo* Q_1 *provocan un porcentaje muy bajo de error, excepto el problema* R_2Q_1
> *Predicción 4. Los errores en los cuatro problemas tipo* Q_2 *son debidos fundamentalmente al cambio de estructura.*
> *Predicción 5. Los cuatro problemas tipo* Q_3 *provocan el error de inversión de la relación, no obstante los dos problemas* R_1Q_3 *y* R_2Q_3 *provocan también el error de cambio de estructura con un porcentaje muy similar al de inversión de la relación.*
> *Predicción 6. Los problemas que incorporan las expresiones* R_1 *y* R_2 *provocan el error de cambio de estructura.*

Para confirmar las predicciones que hemos hecho a raíz del estudio piloto, hemos llevado a cabo una nueva recogida de datos inserta en nuestro estudio principal y bajo las condiciones que se han descrito previamente en el Capítulo 3, en el apartado de diseño de la experiencia. Los resultados que se exponen a continuación corresponden a esa segunda y definitiva recogida de datos.

6.3. Análisis de los resultados en el estudio principal

Las soluciones de los niños a los doce problemas simples de estructura multiplicativa de comparación del estudio principal han sido clasificadas en correctas e incorrectas. Una solución la hemos considerado correcta si el proceso que ha seguido el alumno conduce a la obtención de la cantidad desconocida en el problema, independientemente de los errores de cálculo que el alumno haya cometido. Hay dos tipos de respuestas que hemos dado por incorrectas: a) las que contienen explícitamente un proceso erróneo y b) las que han dejado en blanco. Cuando el espacio destinado a la respuesta se nos ha devuelto en blanco lo hemos catalogado como "sin respuesta".

De las 1296 respuestas aportadas por los niños a los doce problemas de comparación propuestos, el número de respuestas correctas ha sido de 718, es decir, el 55 por ciento. El número de respuestas con procesos erróneos ha sido de 503, el 39 por ciento. Y el número de respuestas en blanco ha sido 75, es decir, el 6 por ciento. En la Tabla 6.9 aparecen las frecuencias por cada tipo de error según las variables R y Q.

Tabla 6.9. Distribución de la frecuencia de tipos de respuestas incorrectas según las variables R, Q y ERROR

Variable		Tipo de error				
R	Q	Ausencia de respuesta	Cambio de estructura	Error de inversión	Doble estructura	Otros
R_1	Q_1	0	5	1	1	0
	Q_2	4	68	0	3	0
	Q_3	0	15	30	4	1
R_2	Q_1	6	24	3	5	2
	Q_2	1	83	0	4	0
	Q_3	4	31	12	5	0
R_3	Q_1	5	15	4	1	2
	Q_2	5	31	1	6	2
	Q_3	12	2	48	1	5
R_4	Q_1	13	3	7	2	0
	Q_2	18	43	0	2	3
	Q_3	7	8	16	0	4
Total		75	328	122	34	19

Para tablas de contingencia con variables nominales tales como la Tabla 6.9, los modelos lineales logarítmicos son apropiados (Bishop, Fienberg y Holland, 1975).

Esta tabla de contingencia ha sido analizada para determinar el modelo que mejor predice la frecuencia de los datos. Para determinar el mejor modelo hemos aplicado "el método stepwise" en su modalidad de eliminación hacia atrás (backward elimination). La estrategia seguida ha sido partir del modelo saturado y aplicarle el procedimiento backward. El ajuste del modelo ha sido comprobado mediante la razón de verosimilitud (likelihood ratio chi square).

El único modelo lineal-logarítmico posible obtenido es el R*Q*ERROR (modelo saturado), que incluye interacciones de tres vías. Esto significa que la asociación entre la variable R y la Q difiere según el tipo de error. Más adelante realizaremos el estudio individualizado de cada error en relación con las variables R y Q. De momento continuamos interpretando los datos obtenidos en el análisis de la distribución de errores.

Para el estudio de las asociaciones parciales entre las variables hemos utilizado como estadístico de contraste la chicuadrado parcial, que es la diferencia entre los valores de chi-cuadrado de dos modelos que sólo difieren en un efecto. En la Tabla 6.10 están los resultados obtenidos.

Como puede observarse en la Tabla 6.10 todos los efectos parciales son significativos, destacando el efecto ERROR Y la asociación entre las variables Q y ERROR por un lado y R y ERROR por otro. Por ello vamos a realizar una interpretación de todos los efectos en base a los parámetros estimados y a los valores z.

Tabla 6.10. Resultado de los tests estadísticos de asociaciones parciales

Nombre del efecto	G.L.	Chi-Cuad. Parcial	Prob.
R*Q	6	31.073	.0000
R*ERROR	12	117.242	.0000
Q*ERROR	8	246.249	0.0
R	3	11.816	.0080
Q	2	86.591	.0000
ERROR	4	480.545	0.0

A partir de los parámetros estimados y de los valores z hemos extraído las siguientes interpretaciones.

6.3.1. Respecto a la variable ERROR

Los valores de los parámetros lambda estimados que hemos obtenidos para la variable ERROR son los mostrados en la Tabla 6.11 y cuya representación gráfica puede verse en el Gráfico 6.2. En ellos puede observarse que:

-La frecuencia con la que aparece el tipo de error "sin respuesta" no difiere de la media de la frecuencia de errores de forma significativa (parámetro λ=0.077, valor de z=0.340).

-El tipo de error "cambio de estructura" aparece con una frecuencia superior a la media de la frecuencia de errores de forma significativa (parámetro λ=1.499; valor de z=11.687).

-La frecuencia con la que aparece el error de "inversión" no difiere de la media de la frecuencia de errores de forma significativa (parámetro λ=-0.040, valor de z=-0.182).

-El tipo de error "doble estructura" aparece con una frecuencia menor que la media de la frecuencia de errores de forma significativa (parámetro λ=0.482, valor z=-2.373).

-El tipo de error "otros errores" aparece con una frecuencia menor que la media de la frecuencia de errores de forma significativa (parámetro λ=-1.054, valor z=-4.111).

Tabla 6.11. Parámetros estimados para el efecto ERROR

ERROR Parámetro	Coeficiente	Desviación típica	Valor z	Interv. de confianza 95% Extremo inf.	Extremo sup.
1	.0770941929	.19283	.39980	-.30086	.45504
2	1.4986982283	.12824	11.68698	1.24735	1.75004
3	-.0397223527	.21818	-.18206	-.46736	.38792
4	-.4819128141	.20309	-2.37291	-.87997	-.08386
5	-1.0541572544	.25644	-4.11081	-1.55677	-.55154

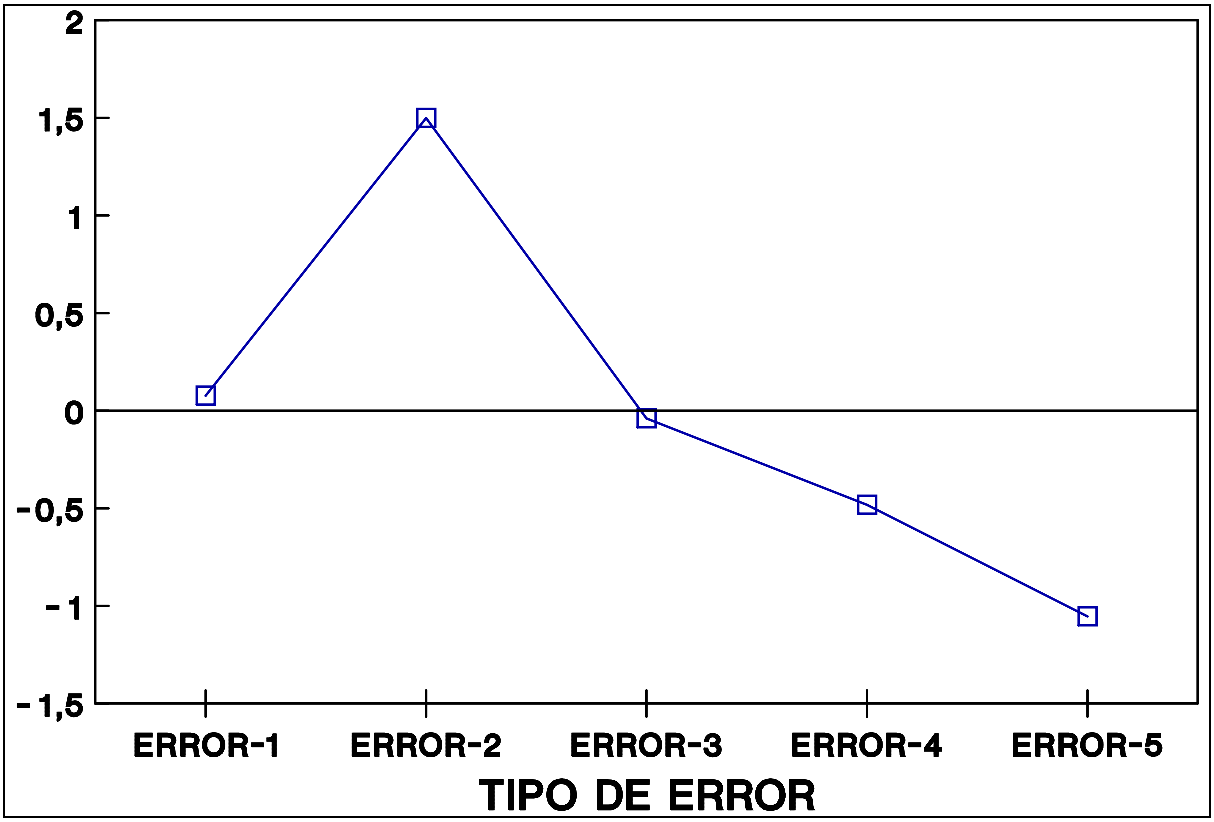


Gráfico 6.2. Representación de los parámetros estimados para el efecto ERROR.

Tabla 6.12. Distribución de frecuencias de la variable ERROR

	Tipo de error				
	Ausencia de respuesta	Cambio de estructura	Error de inversión	Doble estructura	Otros
Frecuencia	75	328^{+}	122	34^{-}	19^{-}
Porcentaje*	13%	57%	21%	6%	3%

* porcentaje sobre el número total de errores

$^{+}$ frecuencia superior a la media de forma significativa

$^{-}$ frecuencia inferior a la media de forma significativa

A modo de conclusión parcial podemos decir que el error "cambio de estructura" ($ERROR_2$) se presenta con una frecuencia muy alta, significativamente superior al resto de los tipos de error.

Los tipos de error "doble estructura" ($ERROR_4$) y "otros errores" ($ERROR_5$) se presentan con una frecuencia baja, significativamente inferior al resto de los tipos de error. Y la frecuencia con la que se presenta el "error de inversión" ($ERROR_3$ y "ausencia de respuesta" ($ERROR_1$) no difieren significativamente de la frecuencia media de errores (véase Tabla 6.12).

6.3.2. Respecto a la variable Q

Los parámetros estimados para el efecto Q son los que aparecen en la Tabla 6.13 y cuya representación aparece en el Gráfico 6.3. A partir de ellos hemos realizado las siguientes consideraciones:

Tabla 6.13. Parámetros estimados para el efecto Q

Q Parámetro	Coeficiente	Desviación típica	Valor z	Interv. de confianza 95% Extremo inf.	Extremo sup.
1	-.2498003204	.14435	-1.73047	-.53273	.03313
2	-.0290542780	.15046	-.19310	-.32395	.26584
3	.2788545984	.13782	2.02327	.00872	.54899

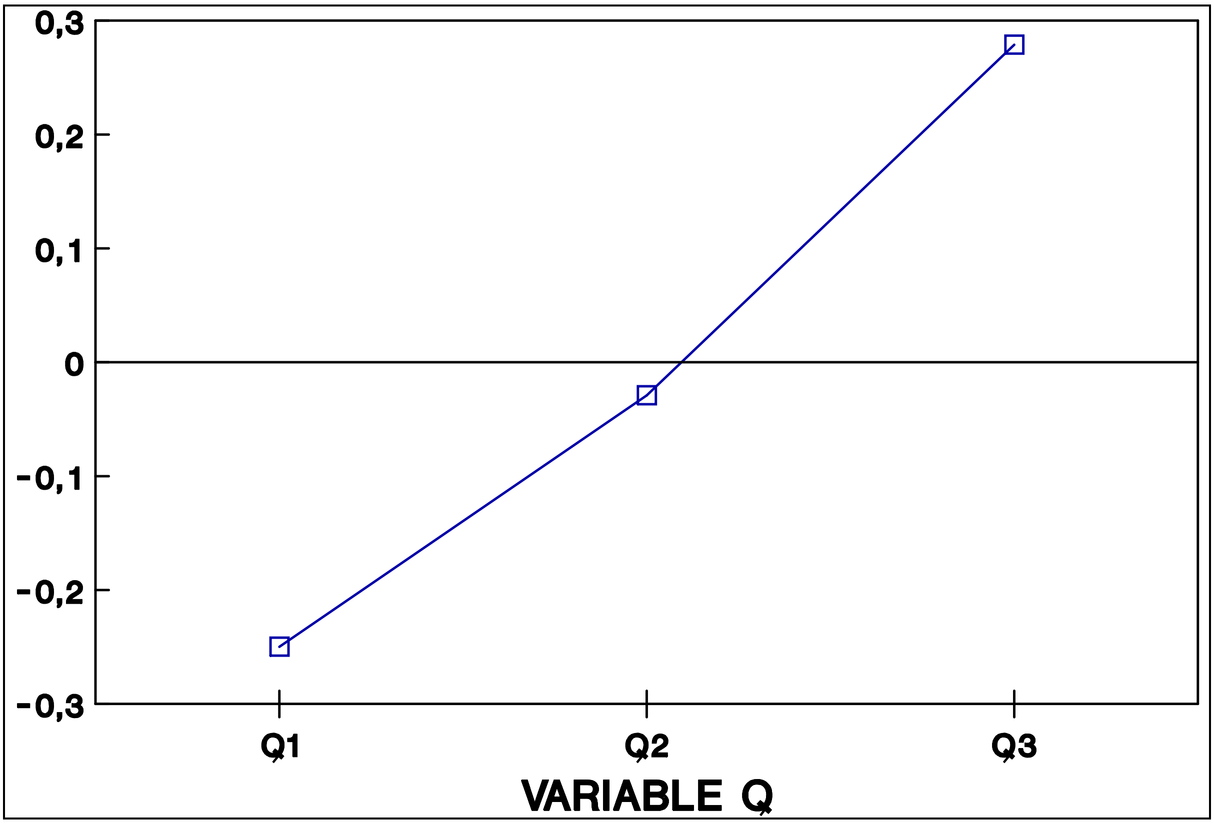


Gráfico 6.3. Representación de los parámetros estimados para el efecto Q.

-Los tipos de problemas de referente desconocido, tipo Q_3, son los que más contribuyen a la aparición de los distintos tipos de errores y lo hacen de forma significativa (parámetro λ = 0.279, valor z=2.023).

-Los tipos de problemas de referido desconocido son los que menos contribuyen a la aparición de errores (parámetro λ =-0.250, valor z=-1.730).

-Los tipos de problemas de escalar desconocido se mantienen en una posición intermedia (parámetro λ=-0.029, valor z=- 0.324). Esto contrasta con la observación de que el número total de errores en los problemas tipo Q_2 es mayor que el número total de errores en los problemas tipo Q_3 (véase Tabla 6.16).

La explicación a esta aparente contradicción es que los problemas tipo Q_3 tienen una distribución de errores más homogénea, mientras que la distribución de errores de los problemas tipo Q_2 tienen dos extremos: el cambio de estructura, donde se concentra la mayor parte de los errores, y el error de inversión con frecuencia casi nula. Los problemas de referente desconocido fomentan la aparición de los distintos tipos de errores de comprensión, mientras que los problemas de escalar desconocido están asociados fundamentalmente con un sólo tipo de error, el de cambio de estructura.

6.3.3. Respecto a la variable R

Los parámetros estimados obtenidos para el efecto R son los que aparecen en la Tabla 6.14 y cuya representación corresponde al Gráfico 6.4. De acuerdo con ellos hemos

Tabla 6.14. Parámetros estimados para el efecto R

R Parámetro	Coeficiente	Desviación típica	Valor z	Interv. de confianza 95% Extremo inf.	Extremo sup.
1	-.4569175506	.20458	-2.23347	-.85789	-.05595
2	.1209272446	.17483	.69168	-.22174	.46360
3	.2257688405	.15206	1.48473	-.07227	.52381
4	.1102214655	.17147	.64280	-.22586	.44630

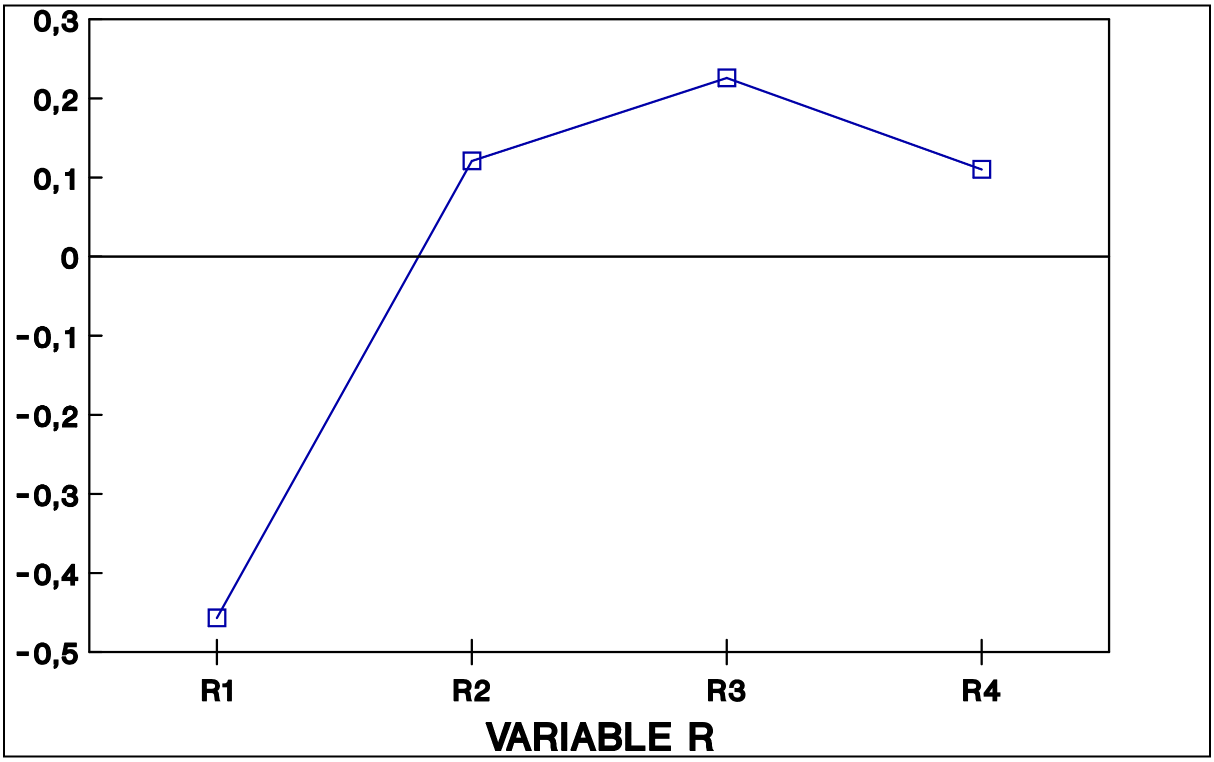


Gráfico 6.4. Representación de los parámetros estimados para el efecto R

realizado las siguientes consideraciones:

-Los problemas que incluyen la expresión "veces más" contribuyen de forma significativa en el modelo a la no aparición de los distintos tipos de error (parámetro λ=-0.457, valor z=-2.235).

-Los problemas que incluyen la expresión "tantas veces como" fomentan la diversidad de errores, aunque no de forma significativa.

-Los problemas que incluyen las expresiones "veces menos" y "como una de las partes iguales de" se hallan en una posición intermedia.

De lo anterior se desprende que los cuatro valores de la variable R, se pueden considerar agrupados en dos bloques según la frecuencia de errores que cometen los niños en los problemas verbales correspondientes. El bloque formado por R_2, R_3 y R_4 que están ligados a la producción de errores y el bloque formado por el problema R_1, que está asociado con no provocar errores.

6.3.4. Asociación Q*ERROR

Los parámetros estimados que hemos obtenido para el efecto Q*ERROR son los mostrados en la Tabla 6.15 y que están representados en el Gráfico 6.5. A partir de ellos observamos que:

-Los problemas de referido desconocido no favorecen la producción del error "cambio de estructura" de forma significativa (parámetro λ=-0.380, valor z=-2.0354).

-Los problemas de escalar u operador desconocido favorecen la aparición del error "cambio de estructura" de forma significativa (parámetro λ=1.209, valor z=7.015) e inhiben la producción del error "inversión" de forma significativa (parámetro λ=-1.731, valor z=-4.510).

Tabla 6.15. Parámetros estimados para el efecto Q*ERROR

Q*ERROR Parámetro	Coeficiente	Desviación típica	Valor z	Interv. de confianza 95% Extremo inf.	Extremo sup.
(1,1)	.2111279126	.27956	.75521	-.33681	.75907
(1,2)	-.3801874543	.18679	-2.03534	-.74630	-.01407
(1,3)	.1173987683	.28215	.41609	-.43561	.67041
(1,4)	.0275313032	.29227	.09420	-.54532	.60038
(1,5)	.0241294703	.37240	.06479	-.70578	.75404
(2,1)	.1436579884	.26121	.54998	-.36831	.65563
(2,2)	1.2089118535	.17233	7.01494	.87114	1.54669
(2,3)	-1.7309118592	.38384	-4.50951	-2.48323	-.97859
(2,4)	.4735923124	.26286	1.80168	-.04162	.98880
(2,5)	-.0952502951	.37202	-.25603	-.82442	.63392
(3,1)	-.3547859010	.27698	-1.28089	-.89767	.18810

(3,2)	-.8287243992	.18460	-4.48930	-1.19054	-.46691
(3,3)	1.6135130910	.24226	6.66038	1.13869	2.08833
(3,4)	-.5011236156	.30488	-1.64366	-1.09869	.09645
(3,5)	.0711208248	.34274	.20751	-.60064	.74288

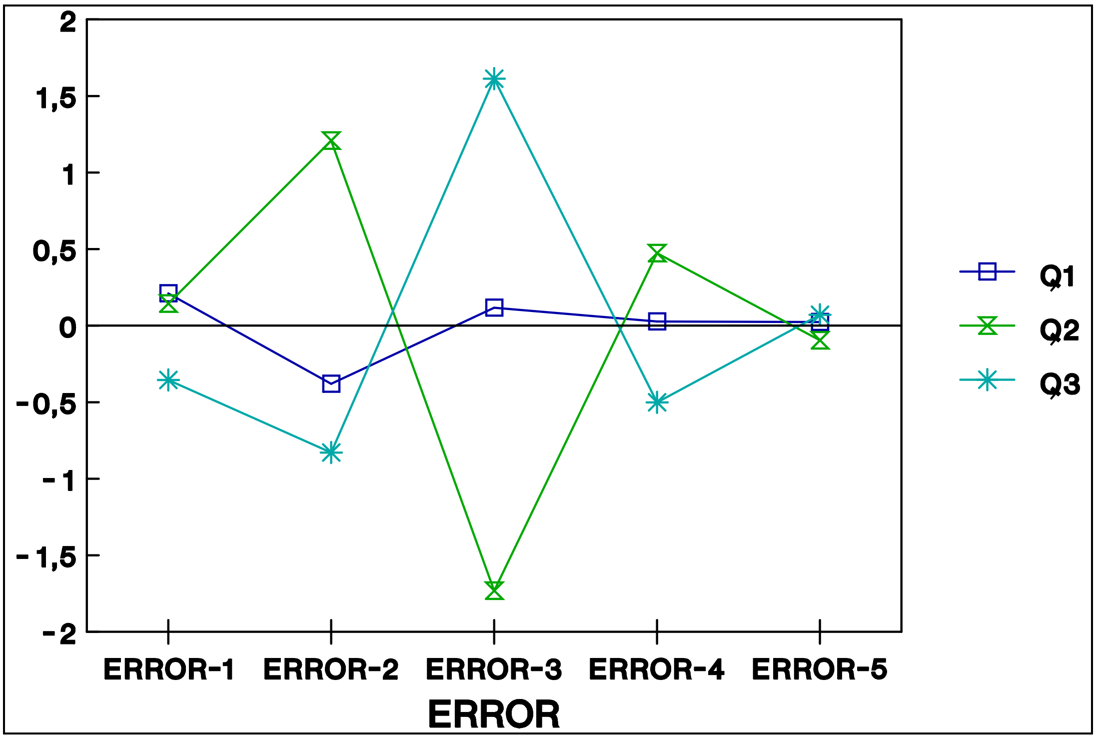


Gráfico 6.5. Parámetros estimados del efecto Q*ERROR

Tabla 6.16. Distribución de frecuencias de errores según las variables Q y ERROR

Variable Q	Tipo de error: Ausencia de respuesta	Cambio de estructura	Error de inversión	Doble estructura	Otros	Total
Q_1	24	47	15	9	4	99
Q_2	28	225	1	15	5	274
Q_3	23	56	106	10	10	205

-Los problemas de referente desconocido favorecen la producción del error "inversión" de forma significativa (parámetro λ=1.614, valor z=6.660) y no favorecen la aparición del error "cambio de estructura" de forma significativa (parámetro λ=-0.829, valor z=-4.489).

Tabla 6.17. Asociaciones significativas entre valores de Q y ERROR

Variable Q	Tipo de error: Ausencia de respuesta	Cambio de estructura	Error de inversión	Doble estructura	Otros
Q_1		-			
Q_2		+	-		
Q_3		-	+		

"-" indica asociación negativa
"+" indica asociación positiva

En la Tabla 6.17 hemos recogido los valores que influyen de forma significativa tanto positivamente como negativamente en la asociación entre Q y ERROR. Como puede observarse en ella, el tipo de problema de escalar desconocido está asociado con la producción del error "cambio de estructura" y el tipo de problema de referido desconocido está asociado con la producción del error de "inversión".

En el Gráfico 6.5 podemos observar que los problemas de referido desconocido (Q_1) apenas influyen en la aparición o no de los tipos de error. Así mismo se puede observar la influencia opuesta que tienen los problemas de escalar desconocido (Q_2) y de referente desconocido (Q_3) en la producción de los diferentes tipos de errores por los niños.

6.3.5. Asociación R*ERROR

Las frecuencias absolutas de los tipos de error según la variable R se hallan resumidos en la Tabla 6.19. Los parámetros estimados que hemos obtenido para el efecto R*ERROR son los que aparecen en la Tabla 6.18 y están representados en el gráfico 6.6.

Tabla 6.18. Parámetros estimados para el efecto R*ERROR

R*ERROR Parámetro	Coeficiente	Desviación típica	Valor z	Interv. de confianza 95% Extremo inf.	Extremo sup.
(1,1)	-.9000047468	.45857	-1.96261	-1.79881	-.00120
(1,2)	.5240564907	.23930	2.18997	.05503	.99308
(1,3)	.1194951992	.42445	.28153	-.71242	.95141
(1,4)	.4873044768	.35421	1.37576	-.20694	1.18155
(1,5)	-.2308514198	.51368	-.44941	-1.23766	.77596
(2,1)	-.4184982652	.32336	-1.29423	-1.05228	.21528
(2,2)	.7775069702	.19866	3.91383	.38814	1.16687
(2,3)	-.3975757437	.38512	-1.03235	-1.15240	.35725
(2,4)	.6162141936	.28821	2.13806	.05132	1.18111

(2,5)	-.5776471548	.48571	-1.18929	-1.52964	.37434
(3,1)	.3185696869	.25692	1.23998	-.18499	.82212
(3,2)	-.7259003113	.22163	-3.27530	-1.16029	-.29151
(3,3)	.2866238650	.32043	.89449	-.34142	.91467
(3,4)	-.4264309746	.35522	-1.20049	-1.12265	.26979
(3,5)	.5471377339	.34419	1.58962	-.12748	1.22176
(4,1)	.9999333251	.25564	3.91148	.49888	1.50099
(4,2)	-.5756631497	.22691	-2.53697	-1.02041	-.13092
(4,3)	-.0085433204	.37431	-.02282	-.74219	.72510
(4,4)	-.6770876958	.40029	-1.69148	-1.46166	.10749
(4,5)	.2613608408	.41335	.63229	-.54881	1.07153

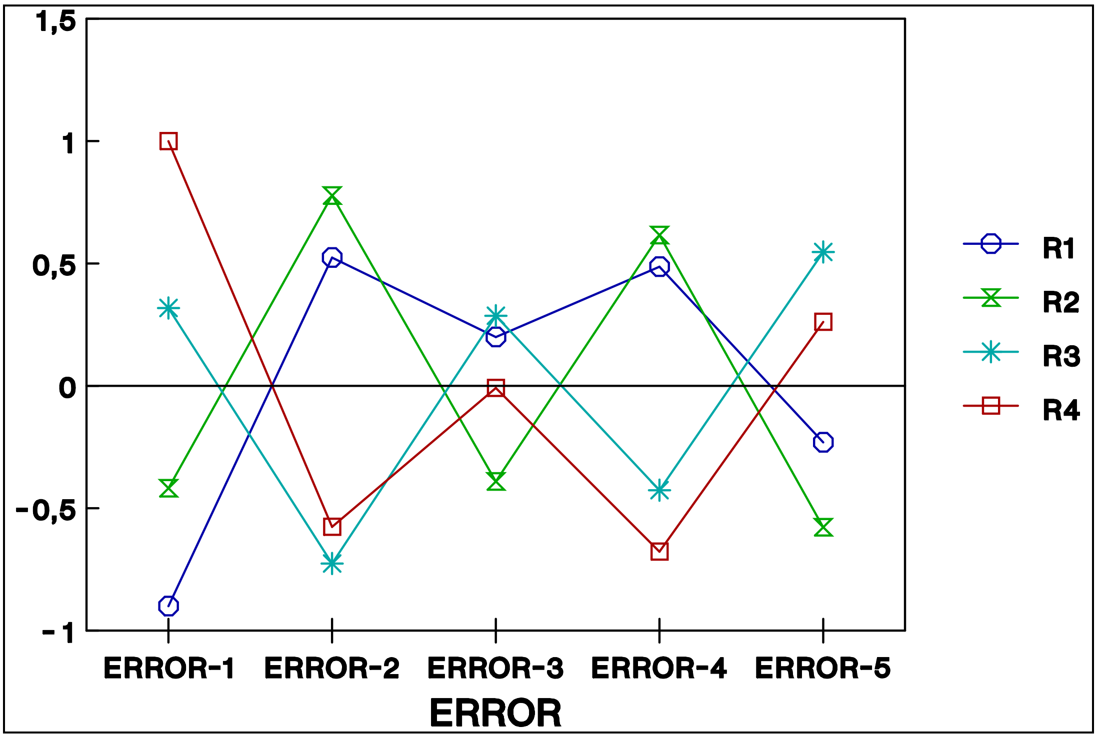


Gráfico 6.6. Respresentación de los parámetros estimados para el efecto R*ERROR.

A partir de ellos hemos realizado las siguientes consideraciones:

-Los problemas que incorporan la expresión "veces más" contribuyen de forma negativa a la aparición del error "sin respuesta" (parámetro λ=-0.900, valor z=-1.963) y de forma positiva a la aparición del error "cambio de estructura" (parámetro λ=0.524, valor z=2.190).

-Los problemas redactados con la expresión "veces menos" influyen en la aparición del error "cambio de estructura" (parámetro λ=0.778, valor z=3.913) y "doble estructura" (parámetro λ=0.616, valor z=2.138) de forma significativa.

-Los problemas redactados con la expresión "veces tantas como" influyen de forma negativa en la aparición del error "cambio de estructura" (parámetro λ=0.726, valor z=-3.275) de forma significativa.

-Los problemas redactados con la expresión "como una de las partes iguales de" influyen en la aparición del error "sin respuesta" (parámetro λ=0.9999, valor z=3.911) y en la no producción del error cambio de estructura (parámetro λ=-0.576, valor z=-2.537) de forma significativa.

Tabla 6.19. Distribución de frecuencias de errores según las variables R y ERROR

Variable	Tipo de error					
R	Ausencia de respuesta	Cambio de estructura	Error de inversión	Dos operaciones	Otros	Total
R_1	4	88	31	8	1	132
R_2	11	138	15	14	2	180
R_3	22	48	53	8	9	140
R_4	38	54	23	4	7	126

El resumen de las asociaciones significativas entre las variables R y ERROR aparece en la Tabla 6.20. A partir de ella sacamos las siguientes conclusiones parciales:

-Las expresiones "veces más" y "veces menos" favorecen la producción del error cambio de estructura.

-La expresión "veces más" favorece que el alumno actúe y escriba una respuesta.

-La expresión "veces menos" favorece la producción del error "doble estructura".

-La expresión "como una de las partes iguales de" inhibe la producción de una respuesta y no favorece la producción del error cambio de estructura.

En el Gráfico 6.6 pueden observarse además lo siguiente:

-Las expresiones "veces más" (R_1) y "veces menos" (R_2) influyen en el mismo sentido en la producción o no de cada tipo de error.

Tabla 6.20. Asociaciones significativas entre valores de R y ERROR

Variable	Tipo de error				
R	Ausencia de respuesta	Cambio de estructura	Error de inversión	Doble estructura	Otros
R_1	-	+			
R_2		+		+	
R_3		-			
R_4	+	-			

-Las expresiones "veces tantas como" (R_3) y "como una de las partes iguales de" (R_4) influyen en el mismo sentido en la producción o no de cada tipo de error.

6.3.6. Asociación R*Q

Las frecuencias absolutas según las variables R y Q se halla en la Tabla 6.21. Los parámetros estimados para el efecto R*Q son los recogidos en la Tabla 6.22 y representados en el Gráfico 6.7.

Tabla 6.21. Distribución de la frecuencia de errores según las variables R y Q

	Variable R			
Variable Q	R_1	R_2	R_3	R_4
Q_1	7	40	27	25
Q_2	75	88	45	66
Q_3	50	52	68	35

La asociación R*Q es la más débil entre las interacciones de primer orden (o interacciones de dos factores). De hecho sólo se destaca de forma significativa el valor (R=2, Q=1) que contribuye de forma significativa a la aparición de errores (parámetro λ=0.523, valor z=2.357).

Hemos detectado que el problema de referido desconocido redactado con la expresión "veces menos", R_2Q_1, es el que provoca con frecuencia mayor variedad de errores. No hay ningún tipo de error que no se presente en este problema. Aunque de forma no significativa, hay dos problemas que destacan por su contribución negativa a la distribución de la frecuencia de errores. Uno de ellos es el problema de referido desconocido redactado con la expresión "veces más", el problema R_1Q_1, al único error que contribuye es al cambio de estructura y lo hace con una frecuencia muy baja. No hay casos de ausencia de respuesta ni de los errores catalogados como "otros", mientras que los errores de inversión y de doble estructura presentan un sólo caso. El otro problema que destaca por su contribución negativa a la distribución de errores es el problema de escalar desconocido redactado con la expresión "veces menos", R_2Q_2. En este caso la frecuencia total del error, 88, no es baja, pero está concentrada en el cambio de estructura, 83, no presentándose ningún caso de error de inversión, ni de los englobados en "otros" y presentando un sólo caso de "sin respuesta".

Tabla 6.22. Parámetros estimados para el efecto R*Q

R*Q Parámetro	Coeficiente	Desviación típica	Valor z	Interv. de confianza 95% Extremo inf.	Extremo sup.
(1,1)	-.5284815233	.30596	-1.72729	-1.12816	.07120
(1,2)	.2697677229	.29109	.92676	-.30076	.84030
(1,3)	.2587138004	.26976	.95906	-.27001	.78744
(2,1)	.5232471075	.22197	2.35731	.08819	.95830
(2,2)	-.4879329495	.27906	-1.74851	-1.03488	.05902
(2,3)	-.0353141580	.23718	-.14889	-.50018	.42955
(3,1)	.0235893064	.21678	.10882	-.40130	.44848
(3,2)	.0291236863	.21911	.13292	-.40033	.45857
(3,3)	-.0527129927	.20913	-.25206	-.46260	.35717
(4,1)	-.0183548907	.24532	-.07482	-.49918	.46247
(4,2)	.1890415404	.24707	.76514	-.29521	.67329
(4,3)	-.1706866497	.23492	-.72657	-.63113	.28976

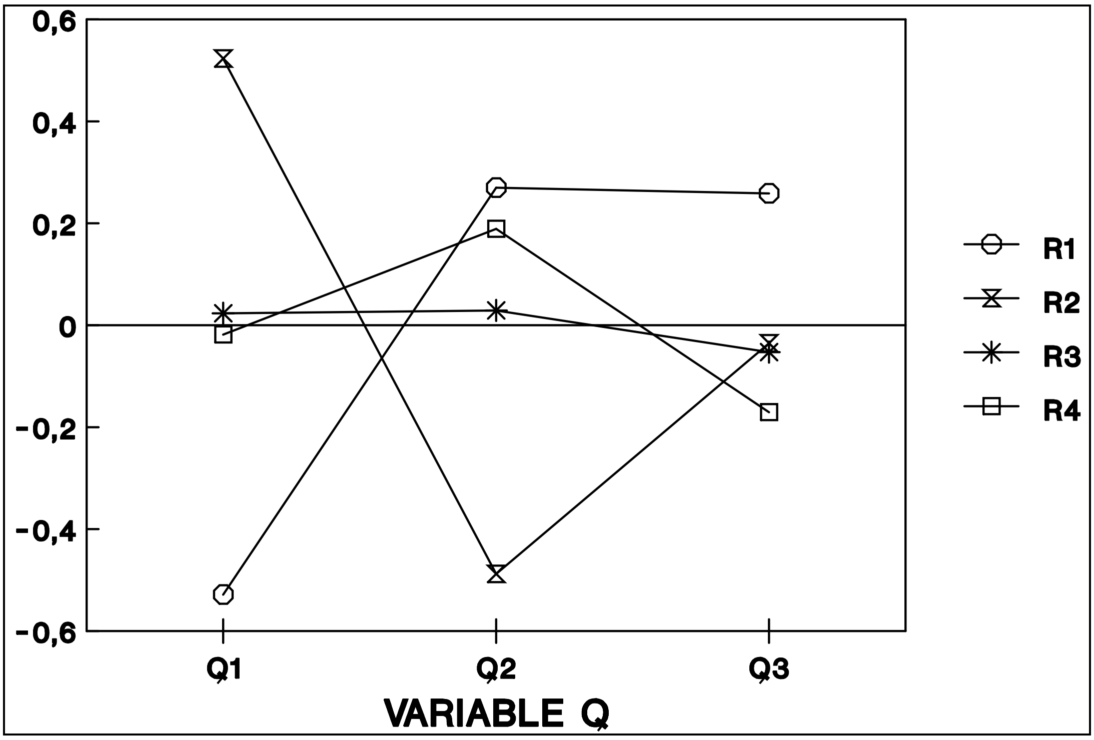


Gráfico 6.7. Representación de los parámetros estimados para el efecto R*Q.

6.4. Resumen

Del estudio de la distribución de errores según las variables R y Q mediante modelos lineales logarítmicos hemos obtenido:

1. *La asociación entre las variables R y Q depende del tipo de error*.

2. *Hay efecto significativo de la variable ERROR*. En concreto el error "cambio de estructura" se presenta con un error superior a la media. Mientras que los errores de "doble estructura" y "otros errores" son poco frecuentes.

3. *Hay efecto significativo de la variable Q*. En los problemas de referente desconocido se produce mayor diversidad de errores que en los problemas de escalar desconocido y que en los problemas de comparado desconocido.

4. *Hay efecto significativo de la variable R*. En este caso hay que destacar el valor R_1="veces más que" como el que menos contribuye a la producción de errores.

5. *Hay asociación significativa entre las variables Q y ERROR*. Los problemas de comparado desconocido se asocian negativamente con el error "cambio de estructura". Los problemas de escalar desconocido se asocian positivamente con el error "cambio de estructura" y negativamente con el error de "inversión".

6. *Hay asociación significativa entre las variables R y ERROR*. La expresión "veces más que" está asociada positivamente con el error de "cambio de estructura" y negativamente con la ausencia de error.

La expresión "veces menos que" provoca dos tipos de errores: el error de "cambio de estructura" y el error de doble estructura.

La expresión "veces tanto como" destaca por su escasa contribución a la producción del error "cambio de estructura".

La expresión "como una de las partes iguales de" destaca por su contribución a la ausencia de respuesta y por su escasa incidencia en la producción de error "cambio de estructura".

7. *Hay asociación significativa entre R y Q*. La expresión "veces menos que" en problemas de comparado desconocido contribuye significativamente a la frecuencia de errores.

Capítulo 7

ANÁLISIS DE NIVELES DE COMPRENSIÓN

En este capítulo definimos en primer lugar las categorías de problemas de comparación que surgen de considerar simultáneamente los índices de dificultad de cada problema y el tipo de error asociado. A continuación, las categorías de problemas obtenidas las utilizamos para definir las categorías de sujetos seleccionados para las entrevistas. Enunciamos después las predicciones sobre las producciones de los niños, encuadrados en estas categorías de sujetos, cuando resuelven problemas de comparación. Por último, exponemos los resultados de las entrevistas y las conclusiones sobre las predicciones realizadas.

7.1. Introducción

En el Capítulo 5 obtuvimos que hay efecto significativo del factor R, del factor Q y, además, hay efecto significativo de interacción entre las variables R y Q sobre la proporción de sujetos que comprenden un problema verbal de comparación multiplicativa. La dificultad de comprensión de este tipo de problemas no pudo determinarse sólo por una de estas variables, por lo que fue necesario realizar comparaciones múltiples a posteriori entre los doce tipos de problemas que determinan las variables de tarea R y Q para determinar los grupos de problemas que no difieren significativamente en su índice de dificultad y también para determinar cuáles difieren entre sí. Esto nos permitió establecer un orden parcial de dificultad en el conjunto de los doce tipos de problemas, con un problema de dificultad máxima: R_2Q_2, y otro de dificultad mínima: R_1Q_1. Ambos problemas forman parte del Cuestionario 1. Los otros dos tipos de problemas de comparación incluidos en este cuestionario, el R_3Q_3 y el R_4Q_1, tienen índices de dificultad próximos a estos extremos, pero difieren entre sí. En conjunto, los cuatro problemas del Cuestionario 1, pueden ordenarse linealmente según su índice de dificultad formando una escala de dificultad decreciente

R_2Q_2	R_3Q_3	R_4Q_1	R_1Q_1
.19	.37	.77	.94

Esto no ocurre en los cuatro tipos de problemas verbales de comparación incluidos en los otros dos cuestionarios. Por ello tomamos los cuatro problemas del Cuestionario 1 como punto de partida para formar una escala más amplia que incluya a los doce tipos de problemas de comparación multiplicativa. Para elaborarla hemos tenido en cuenta dos aspectos:

a) el índice de dificultad, y

b) el tipo de error asociado.

El índice de dificultad de los problemas tipo Q_2 es en general alto y el fracaso en este tipo de problemas está asociado de manera significativa con el error "cambio de estructura". Por ello, hemos agrupado a estos cuatro problemas en la misma categoría que el problema R_2Q_2 y la catalogamos como la categoría de comprensión más difícil.

A la categoría anterior le sigue en dificultad la formada por los problemas de referente desconocido cuyo representante es R_3Q_3. El error representativo de esta categoría es el error de "inversión de la relación".

Los problemas de referido (comparado) desconocido no pueden considerarse conjuntamente como una categoría, puesto que ni los cuatro problemas de este tipo poseen igual índice de dificultad, ni hay un tipo de error que los caracterice. Puesto que hemos encontrado que los problemas R_4Q_1 y R_1Q_1 tienen un índice de dificultad significativamente distinta los consideramos como representantes de dos categorías de problemas distintos. En el caso de R_1Q_1 la categoría está formada sólo por este problema.

El problema R_4Q_1 lo consideramos el representante de una categoría de problemas a la que pertenece además el problema R_3Q_1, y ello por dos razones: a) poseen índices de dificultad similares, y b) poseen el par de valores Z más próximos a cero en el estudio de la asociación entre R y Q realizada sobre la distribución de errores, lo que indica que los dos problemas tienen un efecto muy similar sobre esta asociación.

El problema R_2Q_1 no lo hemos agrupado con ninguno de los problemas de referido desconocido por dos razones: a) su índice de dificultad es distinto, y b) por que es el único problema que destaca de manera significativa en la asociación R*Q realizada sobre la distribución de los errores.

A partir de estos criterios hemos definido las cinco categorías de problemas siguientes.

7.2. Categorías distintas de problemas

De fácil a difícil:

<u>Categoría 1</u>

Características de los problemas:

Está formada por el problema R_1Q_1.

Corresponde a problemas de comparación de aumento.

Se desconoce el referido.

Actuación de los niños:

Operación más frecuente: multiplicación.

Error más frecuente: Cambio de estructura (sumar los datos).

Categoría 2

Características de los problemas:

Está formada por los problemas R_3Q_1 y R_4Q_1.

Corresponde a los problemas de comparación (uno de aumento y otro de disminución) en los que el término relacional incorpora la expresión "tantos como".

Se desconoce el referido.

Actuación de los niños:

Operación más frecuente: En R_3Q_1 multiplicar y en R_4Q_1 dividir.

Errores más frecuentes:

-No hay error predominante en R_3Q_1.

-Falta de respuesta (en blanco), y error de inversión de la relación en R_4Q_1.

Categoría 3

Características de los problemas:

Está formada por el problema R_2Q_1.

Corresponde a problemas de comparación de disminución.

Se desconoce el referido.

Actuación de los niños:

Operación adecuada más frecuente: división.

Error más frecuente en R_2Q_1:

-Cambio de estructura (restar los datos).

Categoría 4

Característica de los problemas:

Está formada por los problemas R_1Q_3, R_2Q_3, R_3Q_3 y R_4Q_3.

R_1Q_3 y R_3Q_3 son de comparación de aumento.

R_2Q_3 y R_4Q_3 son de comparación de disminución.

Se desconoce el referente.

Actuación de los niños:

Operación adecuada más frecuente:

Comparación de aumento: División.

Comparación de disminución: Multiplicación.

Errores más frecuentes:

Error de inversión en los cuatro problemas.

Error de cambio de estructura en R_1Q_3 y R_2Q_3.

Categoría 5

Característica de los problemas:

Está formada por los problemas R_1Q_2, R_2Q_2, R_3Q_2 y R_4Q_2.

R_1Q_2 y R_3Q_2 son problemas de comparación de aumento.

R_2Q_2 y R_4Q_2 son problemas de comparación de disminución.

Se pide cuantificar la relación de comparación.

Actuación de los niños:

Operación adecuada más frecuente: División.

Error más frecuente: Cambio de estructura (Restar los datos).

En adelante llamaremos ítem o problema criterio de una categoría al problema que posee mayor índice de dificultad de entre todos los que pertenecen a esa categoría.

7.3. Elección de niños para la entrevista

Las cinco categorías de problemas establecidas nos permiten delimitar seis categorías de niños con miras a la entrevista. Las condiciones para que un niño lo situemos en una u otra categoría son las siguientes:

Sujetos en la categoría 6:

Son sujetos que resuelven correctamente todos los problemas verbales de comparación multiplicativa.

Los sujetos que cumplen esta condición son los que tienen los siguientes patrones de respuesta en los cuestionarios escritos:

Cuestionario 1: Patrón de respuesta 1111

Cuestionario 2: Patrón de respuesta 1111

Cuestionario 3: Patrón de respuesta 1111

Puesto que en el Cuestionario 1 está incluido el problema con índice de dificultad mayor, R_2, los sujetos que han resuelto correctamente los cuatro problemas del Cuestionario 1 son los más idóneos para estudiar esta categoría.

Para la entrevista, elegimos aleatoriamente un niño entre los que tienen puntuación 4 en el Cuestionario 1 y se le plantean cuatro problemas que completen la información que ya disponemos del sujeto, obtenida de la prueba escrita hecha en grupo.

Para completar la información sobre la actuación de los sujetos en los problema tipo Q_2 le proponemos los problemas R_1Q_2 y R_4Q_2.

Del tipo Q_3 le proponemos el ítem criterio de esta categoría, el problema R_3Q_3.

Del tipo Q_1 le proponemos el problema con índice de dificultad mayor, R_2Q_1.

Resumen:

De esta categoría entrevistamos un sujeto elegido al azar entre los que tiene puntuación 4 en el Cuestionario 1.

Se le proponen en la entrevista los cuatro problemas siguientes: R_1Q_2, R_2Q_1, R_3Q_3, R_4Q_2.

Sujetos en la categoría 5:

Son sujetos que:

a) resuelven correctamente los problemas de comparación de referido desconocido,

b) resuelven correctamente los problemas de comparación de referente desconocido,

c) fracasan en los problemas en los que hay que cuantificar la relación de comparación, problemas tipo Q_2.

El error asociado es el cambio de estructura. Los sujetos interpretan erróneamente el problema como una comparación aditiva y el proceso que siguen es restar los datos y expresar el resultado como el exceso de una cantidad sobre la otra.

Los sujetos que cumplen estas tres condiciones por cuestionario son:

Cuestionario 1: Patrón de respuesta 1011.

Cuestionario 2: Patrón de respuesta 0110.

Cuestionario 3: Patrón de respuesta 1101.

Puesto que el Cuestionario 1 incluye el problema criterio de la Categoría 4 (R_3Q_3), y el ítem criterio de la Categoría 5 (R_2Q_2), los sujetos que tengan éxito en el problema R_3Q_3 y fracasen en el problema R_2Q_2 son sujetos que tienen bastante probabilidad de ajustarse a esta categoría. Le siguen en probabilidad de adaptación a la Categoría 5 los sujetos del Cuestionario 2 puesto que han fracasado en dos problemas de tipo Q_2 que es uno de los criterios que definen esta categoría.

El hecho de que en el Cuestionario 2 haya dos problemas del tipo Q_2 nos permite analizar los casos en situación dudosa, aquellos que sólo fallan en uno de los problemas tipo Q_2.

Sujetos en situación dudosa

Cuestionario 2: Patrón de respuesta 1110 y 0111.

Para la entrevista elegimos un niño del Cuestionario 1 y otro del Cuestionario 2 con el patrón de respuesta dudosa.

De los patrones de respuesta dudosos hay uno que es sistemático, el 0111. Elegimos un niño con este error para entrevistarlo.

En la entrevista se les plantean los cuatro problemas tipo Q_2: Es decir, se le plantean los problemas R_1Q_2, R_2Q_2, R_3Q_2, R_4Q_2.

Sujetos en la categoría 4:

Son sujetos que:

a) resuelven correctamente los problemas de comparación de referido desconocido,

b) fracasan en problemas de comparación de referente desconocido, y

c) fracasan en problemas en los que hay que cuantificar la relación de comparación (de escalar desconocido).

Los sujetos que mejor cumplen estas tres condiciones por cuestionario son:

Cuestionario 1: Patrón de respuesta 1001

Cuestionario 2: Patrón de respuesta 0010

Cuestionario 3: Patrón de respuesta 0100

El mejor cuestionario para elegir los sujetos con los que estudiar esta categoría es el Cuestionario 3, puesto que en él están incluidos dos problemas de referente desconocido, R_1Q_3 y R_4Q_3, y además contiene el problema con menor índice de dificultad de esta categoría, R_4Q_3, con lo cual si un sujeto falla en este problema es más probable que falle en los otros tres problemas tipo Q_3, que si partimos del fallo en otros problemas tipo Q_3 con índice de dificultad mayor.

El Cuestionario 1 es mejor que el Cuestionario 2, puesto que al elegir al sujeto del Cuestionario 1 nos aseguramos el éxito en dos problemas de dificultad menor frente a uno en la Categoría 2.

Entrevistaremos dos sujetos en esta categoría. Uno del Cuestionario 3 y otro del Cuestionario 2.

No hay sujetos en el Cuestionario 3 con patrón de respuesta 0100 por lo que entrevistaremos a sujetos con patrones de respuesta dudosos en este mismo Cuestionario.

Sujetos en situación dudosa:

Hay dos razones teóricas por las que un patrón de respuesta es dudoso:

a) Porque en él se invierte la escala.

b) Porque se cumple sólo parcialmente la condición de fallar en los problemas Q_3.

Estas dos razones dan lugar a tres tipos de patrones de respuesta según se cumplan cada una de ellas aisladamente o las dos a la vez. Pero dado que el índice de dificultad de los cuatro problemas del Cuestionario 3 es muy similar, y que este Cuestionario incluye el problema de tipo Q_2 con índice de dificultad menor, las dos razones a) y b) anteriores no determinan con nitidez los patrones de respuesta dudosos a seleccionar para la entrevista. En lugar de ello emplearemos el criterio de seleccionar al azar los sujetos con patrón de respuesta que contenga al menos un fallo en los problemas tipo Q_3, que acierten en el problema R_2Q_1, sin considerar el resultado obtenido en el problema R_3Q_2. Es decir,

Cuestionario 3: Patrón de respuestas 0110, 01*1 y 11*0

donde * puede ser un 1 o un 0.

Según esto los tres tipos de respuesta son:

i) inversión de la escala solamente

Patrón de respuesta 0110

ii) error en un problema tipo Q_3

Patrón de respuesta 0101 y 1100

iii) cumplen las condiciones a) y b)

Patrón de respuesta 0111 y 1110

Con patrón de respuesta 0110 sólo hay cuatro niños y los cuatro han invertido en los dos problemas tipo Q_3.

Todos los alumnos con patrón de respuesta 01*1 han cometido el error de inversión en el problema R_1Q_3.

El error mayoritario que han cometido los alumnos con patrón de respuesta 11*0 en el problema cuarto de este Cuestionario ha sido el error de inversión.

Así pues el error asociado con esta categoría es el error de inversión. Para su estudio elegimos un sujeto de entre los que han producido los patrones de respuesta anteriores.

En la entrevista se le proponen los siguientes problemas:

-El ítem criterio de la categoría anterior, problema R_2Q_2.

-El ítem criterio de esta categoría R_3Q_3.

-Los problemas R_1Q_3, y R_2Q_3

Sujetos en la categoría 3:

Son sujetos que:

a) fracasan en los problemas de referido desconocido redactados con la expresión "menos".

b) fracasan en los problemas de comparación en los que hay que cuantificar la relación de comparación (escalar desconocido).

c) fracasan en los problemas de comparación de referente desconocido.

Los sujetos que mejor cumplen estas tres condiciones por cuestionario son los que han dado como respuestas:

Cuestionario 2: Patrón de respuesta 0010 con error distinto del error de inversión en R_2Q_3.

Cuestionario 3: Patrón de respuesta 0000 con error de inversión en R_1Q_3 y R_4Q_3.

El mejor Cuestionario para elegir los sujetos es el Cuestionario 2, puesto que en este Cuestionario hay un problema de la categoría siguiente, la categoría 2, en el que tienen éxito. No obstante, hay que fijarse también en el tipo de error cometido en el problema R_2Q_3. Si el error cometido fuese el de inversión el sujeto probablemente haría bien el problema R_2Q_1, por eso añadimos la condición de que el sujeto tenga un error distinto del error de inversión, como puede ser el error de cambio de estructura, en R_2Q_3.

Si se eligen del Cuestionario 3 hay que añadir la condición de que en los problemas R_1Q_3 y R_4Q_3 los sujetos cometan simultáneamente el error de inversión.

Sujetos en situación dudosa:

Cuestionario 3: Patrón de respuesta 0001 con error de inversión o cambio de estructura en R_1Q_3.

De esta categoría de sujetos entrevistamos un niño del Cuestionario 2 y otro dudoso del Cuestionario 3.

A estos niños se les proponen los siguientes problemas:

R_2Q_1, R_4Q_1, R_3Q_3 y R_2Q_3.

Sujetos en la categoría 2:

Son sujetos que:

-Resuelven correctamente los problemas de comparación de aumento de referido desconocido redactados con la expresión "veces más".

-Fracasan al menos en uno de los problemas de referido desconocido que incorporan la expresión "tantos como" o a la expresión "tanto como una parte de" (R_3Q_1, R_4Q_1).

-Fracasan en los problemas de comparación de disminución redactados con la expresión "veces menos" (R_2Q_1).

-Fracasan al menos en un problema de referente desconocido.

-Fracasan al menos en un problema de escalar desconocido.

Los sujetos que mejor cumplen estas condiciones por cuestionario son:

Cuestionario 1: Patrón de respuesta 1000 y tenga un error distinto del de inversión en R_3Q_3.

El Cuestionario idóneo para elegir a los sujetos es el Cuestionario 1, ya que en él se encuentra el problema criterio de la categoría siguiente, la categoría 1, y el problema criterio de la categoría que estamos estudiando.

Al elegir los sujetos en el Cuestionario 1 con patrón de respuesta 1000, hay que añadir la condición de que el sujeto no tenga el error de inversión en el problema R_3Q_3, puesto que entonces es probable que resolviera correctamente el problema R_3Q_1.

En esta categoría, dado el alto nivel de escalabilidad que alcanzan los problemas del Cuestionario 1, no estudiaremos casos intermedios.

A estos sujetos se les aplican los siguientes problemas: ítem criterio de Q_3, y los problemas R_2Q_1, R_3Q_1 y R_4Q_1.

El ítem criterio de esta categoría es el R_4Q_1.

Sujetos en la categoría 1:

Son sujetos que resuelven todos los problemas como si fueran de estructura aditiva.

Se eligen del Cuestionario 1: Patrón de respuesta 0000.

Los elegimos del Cuestionario 1 por que este Cuestionario contiene el problema con índice de dificultad menor, R_1Q_1, que es el problema criterio de esta categoría.

Además de tener puntuación 0, el error que cometan es el de cambio de estructura.

Sujetos dudosos:

Dado el alto índice de escalabilidad del Cuestionario 1 no hay sujetos dudosos.

El problema criterio es el R_1Q_1.

Se les proponen los cuatro problemas de referido desconocido, es decir, R_1Q_1, R_2Q_1, R_3Q_1 y R_4Q_1.

7.4. Predicciones

A continuación exponemos las predicciones que hemos formulado para cada categoría de sujetos. Mediante la entrevista pretendemos confirmar si estas predicciones son o no acertadas.

Esperamos que los niños seleccionados para las entrevistas se ajusten a las siguientes normas por categoría de sujetos:

Categoría 1

-Fracasan en todos los problemas.

-Cometen el error de cambio de estructura en todos los problemas.

Categoría 2

Esperamos que el niño acierte en el problema R_1Q_1 y que fracase en el resto.

Que cometa los errores de:

-cambio de estructura en R_2Q_1.

-error distinto del error de inversión de la relación, en los problemas de referente desconocido.

<u>Categoría 3</u>

Esperamos que el niño:

-acierte en el problema R_4Q_1, y

-fracase en los problemas R_2Q_1, R_2Q_3 y R_3Q_3.

Los errores esperados son:

-error distinto del de inversión (e.j., cambio de estructura) en R_2Q_1 y R_2Q_3.

-inversión de la relación en R_3Q_3.

Categoría 4

Esperamos que el niño:

-resuelva correctamente los problemas de comparación de referido desconocido,

-fracase en los problemas de escalar desconocido

-fracase en los problemas de referente desconocido

Los errores esperados son:

-cambio de estructura en los problemas de escalar desconocido

-inversión de la relación en los problemas de referente desconocido

Categoría 5

Esperamos que el niño fracase sólo en los problemas de escalar desconocido, tipo Q_2

Los errores esperados son sólo de cambio de estructura en los problemas tipo Q_2.

Categoría 6

Los sujetos de la Categoría 6 resuelven correctamente todos los problemas de comparación.

Comprenden la relación existente entre los datos y expresan el resultado con la unidad correcta.

No esperamos ningún error.

7.5. Resultados de las entrevistas

Categoría 1

Vanesa [Colegio 1, 5º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 1. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 0000-1001-00. En todos los problemas de comparación cambió de estructura, salvo en el cuarto que dejó en blanco. Resolvió bien dos problemas del bloque segundo: uno mediante sumas reiteradas y el otro mediante una multiplicación.

Las características anteriores corresponden a la Categoría 1 y, en la entrevista le propusimos las cuestiones que hemos preparado para esta categoría.

1ª Fase

Le planteamos en la entrevista de manera consecutiva los cuatro problemas R_1Q_1, R_2Q_1, R_3Q_1, R_4Q_1. Esperábamos que fracasara en todos ellos y que el error en todos los casos fuera el error de cambio de estructura. Como puede verse en el cuadro resumen (Tabla 7.1) en tres problemas se cumplen las expectativas, pero no en el problema primero R_1Q_1.

Tabla 7.1. Porción del protocolo de Vanesa

Categoría 1			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_1Q_1:	*...Acierto...*	*Cambia Estructura*	[ ] Si [*] No
Problema R_2Q_1:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_1:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_4Q_1:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No

Siguiendo el guión planificado para la entrevista de sujetos de la Categoría 1 el entrevistador le muestra a Vanesa la hoja con el problema R_1Q_1 y le pregunta:

[Entrevistador: E; Vanesa: V]
E: *¿Por qué es ésta la respuesta correcta (multiplicar) y no lo es ésta (sumar)?*
V: *Porque ahí dice "veces" y no dice "más"*.

Vanesa ha utilizado palabras clave para justificar su respuesta. El entrevistador quiere asegurarse de que la comprensión de Vanesa en este tipo de problema no va más allá del uso de palabras clave. Para ello le plantea una actividad manipulativa adicional.

2ªFase

El entrevistador pone delante de Vanesa, en lugares separados, dos folios marcados con las letras A y B. Al lado coloca también una caja con 100 fichas. El entrevistador le pide a Vanesa:

E: *coloca 6 fichas en el folio A*
(Vanesa coloca las fichas)
E: *coloca fichas en el folio B para que el folio A tenga 3 veces más que el B*
[Pausa larga]
V: *¿puede repetir la pregunta?*
E: *coloca fichas en el folio B para que el folio A tenga 3 veces más que el B*
(Vanesa coloca fichas).
E: *¿cuántas fichas has colocado?*
V: *18 fichas*

Vanesa no ha detectado la inversión de la relación y ha resuelto la actividad manipulativa, que es un problema tipo Q_3 (referente desconocido), como si se tratara de un problema tipo Q_1 (comparado desconocido). Esto confirma que su comprensión se limita a palabras clave.

Vanesa no ha cumplido las expectativas en el problema R_1Q_1. En sus respuestas a los Cuestionarios escritos en clase no utilizó la palabra "veces" como palabra clave para la operación de multiplicar. A requerimiento mío, su profesor me informa que en el espacio de tiempo transcurrido hasta la entrevista les ha explicado el significado de la expresión "veces más" y han hecho ejercicios del tipo R_1Q_1. Esta puede ser la explicación del progreso realizado por Vanesa, que ha pasado de la Categoría 1 a la 2.

Categoría 2

José [Colegio 5, 5º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 1. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 1000-1110-00. En el segundo problema cometió el error de cambió de estructura, en el tercero y cuarto sólo escribió: "no lo entiendo". Resolvió bien tres problemas del bloque segundo en los que utilizó la multiplicación en el primero y la división en el segundo y tercero. En el cuarto problema del bloque segundo invirtió la operación.

Por las características anteriores lo elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la Categoría 2 y, en la entrevista le propusimos las cuestiones que hemos preparado para esta categoría.

1ª Fase

Le planteamos de manera consecutiva los cuatro problemas R_2Q_1, R_3Q_1, R_4Q_1, R_3Q_3. Esperábamos que fracasara en todos ellos y que el error en el problema primero fuera el error de cambio de estructura y que en los otros tres tuviera un error distinto del error de inversión. Como puede verse en el cuadro resumen (Tabla 7.2) en tres problemas se cumplen las expectativas, pero no en el problema segundo R_3Q_1.

Durante el transcurso de la resolución de los cuatro problemas, después de leer el problema R_4Q_1 y antes de resolverlo, José y el entrevistador mantienen el siguiente diálogo

[Entrevistador: E; José: J]
J: *No entiendo el problema*
E: *¿Quieres leerlo en voz alta?*
J: (José lee el problema R_4Q_1 en voz alta) *Nuria tiene 64 bolas. Jaime tiene tantas bolas como una de las 4 partes iguales que tiene Nuria. ¿Cuántas bolas tiene Jaime?.*
E: *¿Qué es lo que no entiendes?*
J: *Es que no me acuerdo muy bien del problema*
E: *Aunque no te acuerdes, ¿crees que es alguna de éstas la solución?*
J: *Si (señalando), creo que es ésta*
E: *¿La suma?*
J: *Si*
E: *¿Por qué crees que es esa solución?*

J: *O ésta también (señalando el producto)*
E: *¿O el producto? ¿Puede ser la suma o el producto?*
J: *Sí*.

José no entiende el problema tipo R_4Q_1. En este problema José se atiene a lo que de él esperábamos. No ocurre así en el problema R_3Q_1, donde José hace una elección acertada.

Tabla 7.2. Porción del protocolo de José

Categoría 2			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_2Q_1:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_1:	*...Acierta.......*	*Error $\neq$ Inversión*	[ ] Si [*] No
Problema R_4Q_1:	*Cambia Estructura*	*Error $\neq$ Inversión*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_3:	*Cambia Estructura*	*Error $\neq$ Inversión*	[*] Si [ ] No

Siguiendo el guión planificado para la entrevista de sujetos en la categoría 2 el entrevistador le muestra a José la hoja con el problema R_3Q_1, en el que ha dado una respuesta acertada, y lo somete a la siguiente serie de preguntas para observar si su respuesta es consistente.

E: *Lee el problema en voz alta*
J: (José lee el problema R_3Q_1 en voz alta) *José tiene 18 canicas. Marta tiene 3 veces tantas canicas como José. ¿Cuántas canicas tiene Marta?*
E: *¿Has elegido multiplicación?*
J: *Sí*
E: *¿Por qué no has elegido la suma?.*
J: *No lo sé*.
E: (El entrevistador le muestra el folio con el problema R_2Q_1) *Por ejemplo, en este (problema) has elegido la suma y aquí la resta ¿Por qué no has elegido la suma o la resta como lo has hecho aquí?*.
J: *Porque son menos*
E: *¿Porque son 3 veces menos?.*
J: *5 veces menos*
E: *¿Y éste es...?*(el R_3Q_1)
J: *"3 veces tantas canicas como José"*
E: *¿Como son "5 veces menos" has escogido la resta?*
J: *Sí*
E: *¿Son problemas distintos? Compáralos*
J: (José mira alternativamente a uno y otro problema) *Iguales*
E: *Si son iguales ¿serán iguales también las soluciones?*
J: *Sí*
E: *¿Cuál de las dos crees que es?*

J: *La resta*
E: *Corrige la que creas que no es correcta*
(José corrige la primera respuesta (multiplicar) que dio al problema R_3Q_1 y la sustituye por una resta).

2ª Fase

El entrevistador advierte que el nivel de José es bajo y piensa que la única respuesta correcta que dio José en el Cuestionario escrito al problema R_1Q_1 pudo ser producto del azar. Por esta razón procede a confirmar si José conoce el significado de la expresión "veces más". Para ello le propone una actividad manipulativa y coloca delante de José tres folios con las etiquetas A, B y C, y una caja con 100 fichas.

E: *En el papel A coloca 6 fichas*
(José coloca las fichas correctamente)
E: *y en el B coloca 3 veces más*
(José coloca las fichas)
E: *¿Cuántas has colocado?*
J: *Nueve*
E: *En el papel C coloca 3 más que en el A*
(José coloca fichas en el folio A)
E: *¿Cuántas has colocado?*
J: *Nueve*
E: *¿He hecho la misma pregunta?*
J: *No*
(José señala con la mano el papel B y dice)
J: *Me tengo que llevar tres veces más*
E: *O sea, que en B hemos dicho "3 veces más" y ¿en C?*
J: *3 más*
E: *Y en total, ¿cuántas has colocado?*
J: *Nueve*

En la primera fase de la entrevista José no se ajustó a la Categoría 2 porque tuvo éxito en el problema R_3Q_1; pero en el diálogo posterior José no mantiene la solución correcta que había elegido e incluso la cambia por la solución de restar. Tras este diálogo queda establecido que José se ajusta a las expectativas y no supera los topes establecidos para la categoría dos.

Al finalizar la segunda fase de la entrevista concluimos que José no conoce el significado de la expresión "veces más", pues la ha interpretado en sentido aditivo. Su respuesta correcta en el problema R_1Q_1 no es demasiado consistente y pudo deberse al azar. Por ello, sacamos la conclusión final de que José se encuentra en el nivel de comprensión más bajo y que es un sujeto de la Categoría 1.

Categoría 3

Zeleste [Colegio 6, 5º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 2. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 0010-1111-10. En el primer y segundo problema cometió el error de cambio de estructura, en el cuarto sólo escribió: "no lo entiendo". Resolvió bien los cuatro problemas del bloque segundo en los que utilizó la multiplicación en el tercero y la división en los otros tres. En el noveno problema obtiene la respuesta correcta. La respuesta más usual a este problema es dividir los datos. Zeleste la ha obtenido buscando un número que multiplicado por el dato menor nos da el dato mayor del problema. Este tipo de problemas no lo tiene enteramente dominado. El problema diez lo deja en blanco.

Por las características anteriores la elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la categoría 3 y, en la entrevista le propusimos las cuestiones que hemos preparado para esta categoría.

1ª Fase

Le planteamos de manera consecutiva los cuatro problemas R_2Q_1, R_3Q_3, R_4Q_1, R_2Q_3. Esperábamos que tuviera éxito en el problema R_4Q_1, que fracasara en los otros tres, que el error en los problemas primero y cuarto fuera un error distinto del error de inversión (e.j., error de cambio de estructura) y que en el segundo cometiera el error de inversión. Como puede verse en el cuadro resumen (Tabla 7.3) se cumplieron las expectativas en los cuatro problemas.

Tabla 7.3. Porción del protocolo de Zeleste

Categoría 3			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_2Q_1:	*Cambia Estructura*	*Error ≠ Inversión*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_3:	*...Inversión.....*	*...Inversión.....*	[*] Si [ ] No
Problema R_4Q_1:	*...Acierto.......*	*... Acierto .....*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_3:	*Cambia Estructura*	*Error ≠ Inversión*	[*] Si [ ] No

Siguiendo el guión planificado para la entrevista con los sujetos de la Categoría 3, y puesto que Zeleste ha cumplido las expectativas, el entrevistador le muestra a Zeleste la hoja con el problema R_2Q_1, en el que ha dado una respuesta acertada, y le dice:

[Entrevistador: E; Zeleste: Z]
E: *¿Quieres leer este problema en voz alta?*
Z: (Zeleste lee en voz alta el problema R_2Q_1)

Pilar tiene 75 globos. Luis tiene 5 veces menos globos que Pilar. ¿Cuántos globos tiene Luis?.
E: *Entonces, ¿ese problema es de ...?*
Z: (Zeleste no responde)
E: *¿Has dicho (en la respuesta escrita) que es de restar, no? ¿En qué te has fijado para saber que es de restar?*
Z: *En que "Luis tiene 5 veces menos"*
E: *¿Crees que el (niño) que ha elegido división se ha equivocado?*
Z: *Sí*

2ª Fase

En el primer diálogo Zeleste ha estado algo retraída. Por ello, el entrevistador le propone una actividad manipulativa con la finalidad de seguir profundizando en el conocimiento que tiene Zeleste de la expresión "veces menos". Después de explicarle el material que va a utilizar comienza la actividad, el entrevistador le dice:

E: *Quiero que coloques en el papel A doce fichas*
(Zeleste coloca doce fichas en el papel A)
E: *Ahora, en el papel B coloca 4 veces menos*
(Zeleste se muestra inquieta y el entrevistador le ofrece papel por si quiere hacer cuentas. Zeleste lo rechaza)
Z: *Ninguna*
E: *¿Cuántas?*
Z: *Ninguna*
E: *¿Por qué?*
Z: *Porque 4 veces menos de 12 no puede ser*
E: *¿No puede ser, no?*
Z: *Yo creo que no*
E: *Entonces en el B no colocamos ninguna. Ahora en C.*
E: *En el (folio) C coloca 4 fichas menos que en el A*
(Zeleste coloca fichas en el folio C)
E: *En total, ¿cuántas hay?*
Z: *Veinte*
E: *¿Y en C?*
Z: *Ocho*

Lo anterior confirma que Zeleste tiene problemas de comprensión con la expresión "veces menos", pero no con la expresión "menos".
El entrevistador monta una segunda actividad manipulativa para ver si también tiene problemas con la expresión "veces más". Retira la fichas anteriores y comienza la segunda actividad manipulativa

E: *En A ponemos 6 fichas. Pon en el papel B cuatro veces más fichas de las que hay en A.*
(Zeleste coloca fichas en B)
E: *¿En total?*
Z: *22*

E: *¿Por qué?*
Z: *Como había 6 y como eran 4 veces más, he sumado 4 cuatro veces*

Zeleste ha interpretado los dos términos de la expresión "veces más" de forma separada y ha utilizado el escalar 4 como multiplicando y multiplicador. Posiblemente esta fue la causa de que en el caso de "veces menos" contestara "ninguno", pues a 12 no le podemos restar 4 cuatro veces.

Por último, el entrevistador le plantea una tercera actividad manipulativa para confirmar que Zeleste posee conocimiento de los términos fraccionarios. El entrevistador le dice a Zeleste:

E: *En A coloca 12 fichas y en B coloca la cuarta parte*
(Zeleste resuelve la actividad con gran rapidez en comparación con las anteriores y sin muestra de duda)
E: *¿La cuarta parte es...?*
Z: *Tres*.

En resumen, Zeleste conoce y utiliza por separado los términos "veces" "más" y "menos". También conoce los términos fraccionarios. Cuando aparecen mezclados los términos "veces" con el término "más" o con el "menos", unas veces se queda con el término predominante, como ha pasado en las pruebas escritas, y otras veces utiliza los dos términos por separado asignándole al término "veces" el valor repetitivo, repitiendo el escalar tantas veces como indica el propio escalar, y sumando o restando este resultado a la cantidad que se da como referente.

Categoría 3

Sebastián [Colegio 1, 5º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 3. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 0001-1110-00. En el primer problema comete el error de inversión. En el segundo problema resta 54 de 54 y le da 0. A continuación intenta restar 54 de 0 y da como solución 56. En el tercero resta los datos. El cuarto da la solución multiplicando los datos. Resolvió bien tres problemas del bloque segundo en los que utilizó la multiplicación en el quinto y sexto, y la división en el séptimo. El problema octavo lo hizo mal. En el problema noveno cometió el error de inversión. En el problema décimo no realizó ninguna operación y dio como respuesta uno de los datos.

Por las características anteriores lo elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la Categoría 3 en la modalidad de dudoso. En la entrevista le propusimos las cuestiones que hemos preparado para la Categoría 3.

1ª Fase

Le planteamos de manera consecutiva los cuatro problemas R_2Q_1, R_3Q_3, R_4Q_1, R_2Q_3. Esperábamos que tuviera éxito en el problema R_4Q_1, que fracasara en los otros tres, que el error en los problemas primero y cuarto fuera un error distinto del error de inversión (e.j., error de cambio de estructura) y que en el segundo cometiera el error de inversión. Como puede verse en el cuadro resumen (Tabla 7.4) en la actividad de elegir la operación adecuada entre cuatro se cumplieron las expectativas. Las expectativas del tipo de error sólo fallaron en uno de los problemas. Sebastián en el problema R_2Q_1 cometió el error de inversión y la previsión era que cometiera un error distinto al de inversión.

Tabla 7.4. Porción del protocolo de Sebastián

Categoría 3			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_2Q_1:	*...Inversión....*	*Error ≠ Inversión*	[ ] Si [*] No
Problema R_3Q_3:	*...Inversión.....*	*...Inversión.....*	[*] Si [ ] No
Problema R_4Q_1:	*...Acierto.......*	*... Acierto .....*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_3:	*Doble Estructura*	*Error ≠ Inversión*	[*] Si [ ] No

Al acabar de resolver el cuarto problema, el último de la serie, Sebastián espontáneamente da pie al entrevistador para iniciar la entrevista.

[Entrevistador:E; Sebastián: S]
S: *¿Luego se puede repasar?*
E: *¿Quieres repasarlos?*
S: *Luego, sí, porque...*
(El entrevistador aprovecha para iniciar las preguntas)
E: *A ver, en este problema (R_2Q_3) ¿cuál has elegido: restar o...?*
S: *Las dos* (multiplicar y restar)
E: *¿Tú crees que puede ser o bien restar o bien multiplicar?*
S: *Multiplico, setenta y cinco, y le resto quince*
E: *O sea, que crees que ninguna de las cuatro soluciones que hay aquí es la correcta, que hay que multiplicar y luego restar*
S: *Sí*
E: *¿En ese caso cuál sería la solución?.*
S: *Pues 75-15 son 55*
E: *Escribe ahí debajo la solución. Haz las cuentas*
(Sebastián multiplica 15x5=75 y resta 75-15=60. Da como solución: *60 globos*).

Dialogar sobre el problema anterior no estaba planificado. Surgió como consecuencia de que Sebastián había elegido dos soluciones de las cuatro que le proponíamos y sólo debía elegir una. En la planificación de la entrevista habíamos previsto que si se cumplían las expectativas el diálogo se desarrollara sobre el problema R_2Q_1. Para llevarlo a cabo, y una vez finalizado el anterior diálogo el entrevistador le pide a Sebastián que lea en voz alta el problema R_2Q_1 y que explique la solución que ha dado.

E: *Lee este problema*
S: (Sebastián lee el problema R_2Q_1 en voz alta). *Pilar tiene 75 globos. Luis tiene 5 veces menos globos que Pilar. ¿Cuántos globos tiene Luis?.*
S: (cuando acaba de leer empieza a decir) *Pues si multiplico, como aquí dice 5 veces menos, pues 7x5, no, aquí dice 5x7=35. (Se detiene). Pues yo he pensado que si multiplico 75x5 me da 375 y como dice "menos", 375 lo resto entre, pues "5 veces menos", "veces" y "menos"*
E: *¿veces y menos?*
S: *Sí*
E: *¿Entonces, cuál sería la solución? Haz igual que en el otro y escribe debajo la solución que tú harías.*
(Sebastián realiza los cálculos)
E: *Total, ¿qué sale?*
S: *300*
(Sebastián ha multiplicado 75x5=375 y ha restado 375-75=300).

2ª Fase

El entrevistador empieza explicándole el tipo de material que se va a emplear: 3 folios marcados con A, B y C sobre los que hay que colocar fichas a manera de cajas y una caja de 100 fichas iguales. Después de la presentación y explicación del material

E: *Encima del papel A pon 6 fichas*
S: (Sebastián coloca las seis fichas)
E: *En el papel B coloca 3 veces menos que en A*
S: (Sebastián coloca fichas en B)
E: *¿Cuántas hay en B?*
S: *Tres*
E: *En la hoja C, coloca 2 menos que en A*
S: (Sebastián coloca fichas en C)
E: *¿Cuántas hay en total?*
S: *14*
E: *¿Y en C?*
S: *4*
E: *¿Por qué has puesto aquí (en el B) tres?*
S: *¿Veces?*
E: *Te he preguntado: Coloca en B tres veces más que en A*
S: *Entonces lo tengo mal*
E: *No digo que lo tienes bien ni mal, sino que expliques por qué lo has hecho*
S: (Sebastián reflexiona unos instantes) *Voy a poner más*
(Sebastián coloca más fichas en B)
E: *¿Cuántas hay en B?*
S: *En B doce*
E: *¿Por qué ahora son 12 y antes 3?*
S: *Porque antes no pensé mucho y creía que había que quitarle uno, pero a 6 le he*

multiplicado y me salió 18, a 18 le quito 6 y esto (resulta)
E: *¿A 18 le quitas 6 y salen?*
S: *12*
E: *¿O sea, que has multiplicado 6 por 3, 3x6=18, y le has restado 6 y quedan 12?*
(Sebastián confirma con la cabeza).

En resumen, Sebastián se ha ajustado a las características de sujetos de la Categoría 3. Fracasa en el problema R_2Q_1, acierta en el R_4Q_1, invierte en el R_3Q_3 y comete un error distinto del de inversión en R_2Q_3. Sebastián conoce el significado de los términos "veces", "más", "menos" y los utiliza como términos claves para las operaciones de multiplicar, sumar y restar, respectivamente. En las expresiones compuestas tales como "veces menos" las interpreta como dos operaciones. Comete el error de doble estructura. Su actuación es similar a la de Zeleste, la niña anterior de la Categoría 3. La diferencia entre Sebastián y Zeleste radica en la cantidad que repiten. Sebastián repite el referente tantas veces como indica el escalar y la cantidad resultante la suma o resta al referente, según sea "más" o "menos" el otro término. Por tanto, le asigna dos papeles al referente: el de cantidad inicial y el de referente. Zeleste, sin embargo, al referente sólo le asigna el papel de cantidad inicial, mientras que al escalar le asigna las funciones de referente y escalar.

Categoría 4

José Ramón [Colegio 2, 6º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 1. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 1001-1111-11. En el primer problema multiplica 16x4=64 caramelos. En el segundo problema comete el error de cambio de estructura 54-18=36 globos. En el tercer problema comete el error de inversión 72x6=432 canicas. En el cuarto problema divide los datos 75:5=15 bolas.

Resolvió bien los cuatro problemas del bloque segundo en los que utilizó la multiplicación en el quinto y octavo, la división en el sexto y suma reiteradas en el séptimo.

El problema noveno lo resolvió al igual que el cuarto dividiendo los datos. El problema diez lo realizó gráficamente y multiplicando los datos.

Por las características anteriores lo elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la Categoría 4. En la entrevista le propusimos los cuatro problemas y las cuestiones que hemos preparado para la Categoría 4.

1ª Fase

Previa introducción para motivar y darle instrucciones al niño, el entrevistador le plantea de manera consecutiva los cuatro problemas R_1Q_3, R_2Q_3, R_3Q_3, R_2Q_2. Esperábamos que no tuviera éxito en ninguno de los cuatro problemas, que cometiera el error de cambio de estructura en el problema R_2Q_2 y que cometiera el error de inversión en los otros tres problemas. En la primera respuesta que dio José Ramón a cada una de las cuatro actividades de elegir la operación adecuada entre cuatro respuestas distintas no se cumplieron las expectativas en los problemas R_1Q_3 y R_2Q_3, y sí se cumplieron en los problemas R_2Q_2 y R_3Q_3.

Tabla 7.5. Porción del protocolo inicial de José Ramón

Categoría 4

	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_1Q_3:	*...Acierto.....*	*...Inversión.....*	[ ] Si [*] No
Problema R_2Q_3:	*...Acierto.....*	*...Inversión.....*	[ ] Si [*] No
Problema R_3Q_3:	*...Inversión.....*	*...Inversión.....*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No

Siguiendo la programación de la entrevista, al tener José Ramón éxito en los problemas R_1Q_3 y R_2Q_3 se procede a un diálogo sobre las soluciones que ha dado a estos dos problemas.

En primer lugar el entrevistador le muestra la hoja que contiene el problema R_1Q_3 donde la respuesta elegida ha sido dividir los datos.

[Entrevistador: E; José Ramón: J.R.]
E: *¿A ver, en este problema, por qué hay que dividir y no hay que multiplicar?*
(El entrevistador le pide a José Ramón que lea el problema R_1Q_3 en voz alta)
J.R.: (lee en voz alta) *María tiene 72 caramelos.*
María tiene 6 veces más caramelos que Daniel.
¿Cuántos caramelos tiene Daniel?.
(Al acabar de leer el problema José Ramón dice)
J.R.: *Es que me he equivocado aquí. Me ha pasado igual que en la primera de aquí (señala el que corrigió por propia iniciativa durante la fase de resolución previa)*
E: *¿Te has equivocado?*
J.R.: *Sí*
E: *¿Crees que es multiplicar?*
J.R.: *Sí*
E: *¿Por qué crees que es multiplicar?*
J.R.: *Porque 6 veces es multiplicar 72 caramelos. Es multiplicar 72 caramelos 6 veces*
E: *¿Siempre que aparece "veces más" es multiplicar?*
J.R.: *Yo creo que sí*
(El entrevistador le pide que lea de nuevo el problema. José Ramón lee de nuevo el problema en voz alta. Al acabar dice)
J.R.: *Hay que multiplicar*

Tras el diálogo José Ramón se ha ajustado a las expectativas previstas para el problema

R_1Q_3 y comete el error de inversión en este problema. Su razón para la respuesta es la palabra clave "veces". No parece advertir la presencia del término "más". No advierte tampoco la inversión de la relación. La respuesta correcta que dio al principio parece ser que fue producto del despiste.

En segundo lugar el entrevistador le presenta a José Ramón el folio que contiene el problema R_2Q_3 junto con la respuesta inicial. José Ramón había elegido como solución multiplicar los datos 15x5=75.

El entrevistador le pide a José Ramón que lea el problema en voz alta.

J.R.: *Luis tiene 15 globos.*
Luis tiene 5 veces menos globos que Pilar
¿Cuántos globos tiene Pilar?
(al finalizar la lectura del problema continúa hablando)
J.R.: *Pues es multiplicar 15 por 5 veces que es lo que tiene Luis*
E: *¿Y qué le digo al niño que ha dividido?*
(el entrevistador se refiere al supuesto niño que ha dado como solución la de dividir)
J.R.: *Que al dividir entre 5 lo que hace es restar, como aquí ha pasado (señala en el folio la solución de restar), pero aquí es de otra forma*
E: *Pero el niño me dice a mí que ha dividido por que son "5 veces menos globos que Pilar" y que hay que dividir*

José Ramón lee de nuevo el problema. Se queda unos instantes pensativo. No sabe qué explicación dar. Al igual que pasó en el problema anterior no advierte la presencia del término "menos". Por ello, el entrevistador cambia la forma de la entrevista introduciendo el problema R_1Q_3 en la discordia.

E: *Mira, aquí antes hemos hecho este problema. Léelo en voz alta*.
J.R.: (José Ramón lee en voz alta el problema R_1Q_3)
E: *Ahora, compara este problema con ése*.
J.R.: *Han cambiado los números*
E: *¿Es el mismo?*
J.R.: *Es el mismo, pero han cambiado los números*
E: *¿Y por eso hay que multiplicar en los dos sitios?*
J.R.: *Sí*
E: *¿Estás seguro que es el mismo?. Compáralos para ver si son exactamente el mismo*
J.R.: *Han cambiado solamente 72 y los caramelos. Después "Luis tiene 5 veces menos globos que Pilar" y aquí "María tiene 6 veces más caramelos que Daniel". Ha cambiado solamente el nombre y los 6 caramelos, 6 veces*
E: *¿O sea, que son iguales los problemas?*
J.R.: *Sí*
E: *¿Y el que tenga "más" o "menos", eso no significa nada, no?. ¿El que aparezca aquí más y aquí menos. Eso no?*
(José Ramón reacciona)
J.R.: *¡Aah! ¡Ya lo tengo mal!*
E: *A ver, léelos otra vez*
(José Ramón lee los problemas en voz baja y corrige la respuesta que dio al problema

R_2Q_3)
E: *¿Entonces en el problema este que dice "5 veces menos" qué hay que hacer?*
J.R.: *Dividir entre 5*
E: *¿Por qué?*
J.R.: *No sé explicarlo*
E: *¿Tú crees que es dividir entre 5?*
J.R.: *Sí*
E: *¿Seguro, no?*
J.R.: *Sí*
E: *¿Y que antes te habías equivocado?*
J.R.: *Sí*
E: *¿En qué te habías equivocado antes? ¿Eso sí lo sabes explicar?*
J.R.: *En que yo me creía al leer éste que era también "más"*
E: *¿O sea, que ahí en vez de "5 veces menos" creías que era "5 veces más", y por eso habías elegido la multiplicación?*
J.R.: *Sí*

El acierto de José Ramón en el problema R_2Q_3 fue debido a que se fijó sólo en el término "veces" al que asoció con multiplicación. No fue producto de la comprensión sino de una comprensión parcial más la coincidencia de la operación con la solución adecuada.

Después de la entrevista José Ramón ha cumplido las expectativas previstas y consideramos que forma parte de la Categoría 4, puesto que ha invertido en los problemas de tipo Q_3 y ha cambiado de estructura en el problema R_2Q_2 tanto en el Cuestionario escrito en clase como en esta entrevista. Además conoce el significado de las expresiones "veces más", "veces menos" y los términos fraccionarios.

2ª Fase

En esta fase manipulativa el entrevistador trata, en primer lugar, de averiguar si el error de cambio de estructura que ha realizado José Ramón en el problema R_2Q_2 lo realiza también en los otros tres problemas de escalar desconocido. Para ello, previa explicación del material a utilizar en la actividad manipulativa el entrevistador dice:

E: *Coloca en A*
J.R.: *¿En A?*
E: *En el folio A, 8 fichas*
(José Ramón coloca las ocho fichas)
E: *En el B coloca 24*
J.R.: *¿25?*
E: *24*
(José Ramón coloca las 24 fichas)
E: *¿Cuántas veces más hay en B que en A?*
J.R.: *¿Cuántas veces?*
E: *¿Cuántas veces?*
J.R.: *16 fichas*
E: *¿Cuántas veces menos fichas hay en A que en B?*
J.R.: *16*

E: *¿Cuántas veces tantas fichas como en A hay en B?*
J.R.: *¿Tantas?*
E: *¿Cuántas veces tantas fichas como en A hay en B?*
J.R.: *3*
E: *¿Qué parte son las fichas de A comparadas con las de B?*
J.R.: *¿Qué parte? Un tercio.*

José Ramón comete el error de cambio de estructura en los problemas que contienen las expresiones "veces más" y "veces menos". En ambos casos ha restado las cantidades y ha dado como solución 16 fichas. Sin embargo, sus contestaciones a los problemas que contienen las expresiones "veces tantas como" y "parte de" han sido correctas.

A continuación, el entrevistador trata de confirmar si José Ramón sigue cometiendo el error de inversión en problemas tipo Q_3. Para ello le plantea una cuestión correspondiente al tipo de problema R_3Q_3.

E: *Coloca aquí (en A) 6 fichas*
(José Ramón coloca las 6 fichas en el folio A)
E: *Coloca en B para que A tenga 3 veces tantas como B*
(José Ramón coloca fichas en el folio B)
E: *¿Cuántas has puesto?*
J.R.: *18*
E: *¿Cómo lo has calculado?*
J.R.: *Multiplicando 3 por 6*

En resumen, José Ramón ha resuelto correctamente los problemas de referido desconocido. En los problemas de escalar desconocido acierta en los que intervienen las expresiones "veces tanto como" y "como una parte de" y fracasa en los problemas de escalar desconocido correspondientes a las expresiones "veces más" y "veces menos". Ha fracasado en problemas de referente desconocido. En estos problemas, ha cometido el error de inversión en los problemas de referente desconocido y ha cambiado de estructura en dos problemas de escalar desconocido: R_1Q_2 y R_2Q_2.

Categoría 4

Sergio [Colegio 6, 5º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 3. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 0101-1111-11. En el primer problema multiplica 64x4=256 caramelos, comete el error de inversión. En el segundo problema divide 54:3=18 globos. En el tercer problema comete el error de cambio de estructura y da como solución 72-12=60 caramelos. En el cuarto problema multiplica los datos 15x5=75 bolas.

Resolvió bien los cuatro problemas del bloque segundo en los que utilizó la división en el quinto, séptimo y octavo, y la multiplicación en el sexto.

El problema noveno lo resolvió al igual que el cuarto multiplicando los datos. El problema diez lo resolvió dividiendo los datos.

Por las características anteriores lo elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la Categoría 4 dentro de la Categoría de dudosos. En la entrevista le propusimos los cuatro problemas y las cuestiones que hemos preparado para esta Categoría.

1ª Fase

Previa introducción para motivar y darle instrucciones al niño, le planteamos de manera consecutiva los cuatro problemas R_1Q_3, R_2Q_3, R_3Q_3, R_2Q_2. Esperábamos que no tuviera éxito en ninguno de los cuatro problemas, que cometiera el error de cambio de estructura en el problema R_2Q_2 y que cometiera el error de inversión en los otros tres problemas. Las cuatro respuestas de Sergio se ajustaron a las expectativas (véase Tabla 7.6).

Tabla 7.6. Porción del protocolo de Sergio

Categoría 4			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_1Q_3:	*...Inversión...*	*...Inversión.....*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_3:	*...Inversión...*	*...Inversión.....*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_3:	*...Inversión.....*	*...Inversión.....*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No

Siguiendo la programación de la entrevista, al cumplir Sergio las expectativas, el entrevistador le muestra la hoja con el problema R_3Q_3 y le pide que lea el problema en voz alta

[Entrevistador: E; Sergio: S]
E: *Lee este problema en voz alta*
S: (Sergio lee el problema R_3Q_3 en voz alta). *Marta tiene 54 canicas. Marta tiene 3 veces tantas canicas como José. ¿Cuántas canicas tiene José?*
E: *Tú has dicho que es una multiplicación y has puesto en la respuesta 54x3=16. Tú crees que este niño (señalando a la división) se ha equivocado en la respuesta. ¿Por qué crees que este niño se ha equivocado? El que ha hecho la división.*
S: *Porque el resultado no es exacto (el de la división)*
(Sergio quiere explicar que la división no está bien hecha, pero el entrevistador no quiere seguir por ahí)
E: *Independientemente de que pueda ser exacto el resultado, ¿tú crees que una división no corresponde a ese problema? ¿O sí?. ¿Por qué tú has elegido multiplicar y no dividir?*

S: *Porque si tiene "3 veces más" que las canicas suyas, entonces debe tener el triple de canicas*
E: *¿Debe tener el triple?*
S: *Tres veces las canicas esas*

Sergio ha reinterpretado la expresión "3 veces tantas" como "3 veces más" y esta a su vez la ha interpretado como el triple. Por tanto, comprende los problemas verbales de comparación de aumento de referido desconocido.

En el problema R_2Q_3 comete el error de inversión, luego la expresión "veces menos" la interpreta como división, lo que indica que ha interpretado este problema como el correspondiente problema de referido desconocido. Además en la prueba escrita de problemas inicial resolvió correctamente el problema R_2Q_1. Por tanto, hay datos que nos confirman que comprende la expresión "veces menos" en problemas de referido desconocido.

También en el Cuestionario escrito realizado en clase resolvió correctamente el problema tipo R_4Q_3. Esto indica que conoce el uso de la expresión "como una de las partes de" e incluso que ha sido capaz de comprenderla en un problema donde hay que invertir la relación.

Por todo ello concluimos que comprende los problemas de referido desconocido, tipo Q_1.

No ha comprendido el problema criterio de los problemas de referente desconocido (R_3Q_3), ni el problema criterio de los problemas de tipo escalar desconocido (R_2Q_2). Se ajusta pues a las características de la Categoría 4.

Categoría 5

Laura [Colegio 2, 6º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 1. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 1011-1111-11. En el primer problema multiplica los datos y da como solución 16x4=64 caramelos. En el segundo problema multiplica los datos y da como resultado 54x18=36 globos menos. En el tercer problema da como solución 72:6=12 canicas. En el cuarto problema divide los datos 75:5=15 bolas.

Resolvió bien los cuatro problemas del bloque segundo en los que utilizó la división en el sexto y en el séptimo, y la multiplicación en el quinto y octavo.

El problema noveno lo resolvió al igual que el cuarto dividiendo los datos. El problema diez lo resolvió gráficamente y multiplicando los datos.

Por las características anteriores la elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la Categoría 5. En la entrevista le propusimos los cuatro problemas y las cuestiones que hemos preparado para esta Categoría.

1ª Fase

Previa introducción para motivar y darle instrucciones, le planteamos de manera consecutiva los cuatro problemas R_1Q_2, R_2Q_2, R_3Q_2, R_4Q_2. Esperábamos que no tuviera éxito en al menos uno de los cuatro problemas anteriores y que cometiera el error de cambio de estructura.

Las respuestas de Laura se ajustaron a las expectativas en los tres primeros problemas de la entrevista, pero no en el cuarto (véase Tabla 7.7).

Tabla 7.7. Porción del protocolo de Laura

Categoría 5			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_1Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_4Q_2:	*...Acierto.......*	*Cambio de Estructura*	[ ] Si [*] No

Al presentarle el tercer problema R_3Q_2, Laura pregunta al entrevistador

[Entrevistador: E; Laura: L]
L: *¿Me puede explicar la pregunta?*
E: *¿Qué es lo que no entiendes?*
L: *¿Cuántas veces tiene Marta tantas canicas como José?*
E: *Aunque no entiendas esto, ¿cuál de las cuatro operaciones que hay ahí crees que es la más adecuada?*

En el cuarto problema, R_4Q_2, Laura hace ostensiblemente cálculo mental ayudándose de los dedos. El entrevistador le dice que si quiere hacer cuentas las puede hacer en la parte inferior de la hoja. Laura acepta la indicación y escribe

```
   1 5
 + 1 5
------
   3 0
 + 1 5
 + 1 5
------
 + 1 5
------
   7 5
```

Laura ha cometido el error de cambio de estructura en los tres problemas primeros R_1Q_2, R_2Q_2 y R_3Q_2. En el problema R_4Q_2 elige la opción correcta, dividir, obtenida mediante sumas reiteradas.

Siguiendo las directrices planificadas para la entrevista, se le presenta la hoja con el problema R_4Q_2 [Antonio tiene 15 bolas. Elena tiene 75 bolas. ¿Qué parte son las bolas de Antonio comparadas con las de Elena?] y le pregunta el entrevistador

E: *¿Por qué has elegido división?*
L: *Porque como son 1,2,3,4 y 5 (cuenta las veces que ha sumado 15), voy sumando, es la, 15 es la 5*
E: *¿La quinta parte?*
L: *La quinta parte*
E: *¿Has sumado 15?*
L: *1, 2, 3, 4 y 5*
E: *¿5 veces?*
L: *Sí*
E: *¿Por qué no podría ser 75x15?*
L: *No porque entonces serían 15 veces*
E: *¿En qué se ha equivocado el niño que ha elegido la resta?*
L: *El se creía que era "cuántas menos"*
E: *¿Pero es correcta la resta?*
L: *No*

2ª Fase

En esta actividad el entrevistador somete a Laura a una serie de preguntas que tratan de esclarecer varias cuestiones que vamos a numerar.

Previa descripción del material a emplear y explicación de las normas, el entrevistador empieza planteando las cuestiones:

Cuestión 1

Su finalidad es confirmar si el acierto en el problema R_4Q_2 ha sido casual o es producto de una verdadera comprensión de las expresiones fraccionarias.

E: *Coloca 8 fichas en A*
(Laura coloca las fichas en el papel A)
E: *Coloca 24 fichas en B*
(Laura coloca las fichas en el papel B)
E: *¿Qué parte son las fichas de A comparadas con las de B?*
(Laura separa en 3 grupos de 8 las fichas del papel B y dice)
L: *Las de A son una parte*
E: *¿Cómo se llama esa parte?*
L: *La primera parte*

Cuestión 2

El entrevistador trata de analizar las dificultades que tuvo Laura con la expresión "tantas veces como". Retira las fichas que había encima de los papeles A y B. C continuación coloca 6 fichas en el papel A y le pide a Laura:

E: *Coloca en B tres veces tantas fichas como hay en A*
L: *¿3 veces?*
(Laura coloca fichas en B)
L: *¿3 veces?*
E: *3 veces tantas como hay en A*
(Laura acaba de poner fichas)
E: *¿Cuántas son?*
L: *6x3=18*

Cuestión 3

El entrevistador retira las fichas de B y deja 6 en A. Le dice a Laura

E: *Coloca en B tres veces menos que en A*
L: *3 veces menos*
(Laura coloca 3 fichas en B)
E: *¿Cuántas has puesto?*
L: *3*
E: *¿Cómo lo has calculado?*
L: *Porque si son 3 veces menos le quito 3*
E: *Si son 3 veces menos le quitas 3*
L: *No, espera, 3 veces menos que 6...Sí, 3*
E: *¿Estás segura?*
L: *Sí*
E: *¿Por qué has dicho: espera, espera?*
L: *Porque me creí que aquí (en A) había más de 6*

Cuestión 4

El entrevistador retira las fichas del papel B y deja 6 en el papel A. Le dice a Laura:

E: *En B coloca 3 veces más que en A*
L: *¿3 veces más?*
E: *3 veces más que en A*
(Laura coloca fichas en A)
E: *¿Cuántas has puesto?*
L: *6x3*

Cuestión 5

El entrevistador trata de ver si Laura advierte la diferencia entre "veces menos" y "menos". Retira las fichas de B y deja 6 en A. Le dice a Laura

E: *Coloca en B tres menos que en A*
L: *¿3 menos?*
(Laura coloca fichas en B)
E: *¿Cuántas son?*

L: *3*
E: *Y en el papel C coloca 3 veces menos que en A*
(Laura coloca fichas en C)
E: *¿Cuántas son en C?*
L: *3*
E: *¿Tres veces menos que 6 son?*
L: *3*

Cuestión 6

El entrevistador retira las fichas de B y C, y deja 6 en A. Le dice a Laura

E: *Coloca fichas en B para que A tenga 3 veces más que B*
L: *3 veces más*
(Laura coloca fichas en B)
E: *¿Por qué has colocado 2?*
L: *Porque aquí (en B) hay 2 y aquí (en A) hay 3 veces más*

Cuestión 6

El entrevistador retira las fichas del papel B y deja 6 fichas en el papel A. Le dice a Laura

E: *Coloca fichas en B para que A tenga 3 veces tantas como B*
L: *3 veces tantas. En B tres veces*
E: *Para que A tenga 3 veces tantas como B*
(Laura pone 2 fichas en B).

Cuestión 7

El entrevistador retira las fichas del papel B y deja 6 en el papel A. Le dice a Laura

E: *Coloca en B para que A tenga 3 veces menos que B*
(Laura habla para sí en voz baja: Si ponga 18 entonces 3 veces menos serían...Y coloca fichas en B)
E: *¿Cuántas son?*
L: *18*
E: *18*
(Laura empieza a reflexionar de nuevo)
L: *Y 3 veces menos...Entonces tenemos que poner 24*
(Laura añade 6 fichas a las que había en B)
E: *¿Cuántas has puesto?*
L: *24*
E: *¿Por qué?*
L: *Porque 6x4=24 le quitamos 3 veces 6 y me dan las que hay en aquí* (en A).

En resumen, Laura utiliza la palabra "veces" como sinónimo de multiplicación.

Tiene éxito en los problemas de referido desconocido, aunque la expresión "menos" le ha conducido en algunos casos a no considerar el término "veces".

Tiene éxito en los problemas de referente desconocido.

Cambia de estructura en los problemas de escalar desconocido salvo en el R_4Q_2.

Por tanto, salvo la dificultad con la expresión "veces menos" en problemas de referido desconocido, Laura cumple los requisitos de la Categoría 5.

Categoría 5

Juan Carlos [Colegio 1, 6º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 2. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 0110-1101-11. En el primer problema ha cometido el error de cambio de estructura, ha restado 64-16=48 y dado como solución "María tiene 48 caramelos más que Daniel". En el segundo problema multiplica los datos 18x3=54 globos. En el tercer problema da como solución 12x6=72 canicas. En el cuarto problema comete el error de cambio de estructura, resta los datos 75-15=60 bolas, y da como solución "60 bolas que tiene María más".

Resolvió bien tres problemas del bloque segundo: los problemas quinto, sexto y octavo, en los que utilizó la división. En el problema séptimo invierte la relación y en vez de multiplicar los datos los divide.

En el problema noveno, al igual que el cuarto cometió el error de cambio de estructura y restó los datos. El problema diez lo resolvió dividiendo los datos.

Por las características anteriores lo elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la Categoría 5. En la entrevista le propusimos los cuatro problemas y las cuestiones que hemos preparado para esta Categoría.

1ª Fase

Previa introducción para motivar y darle instrucciones, le planteamos de manera consecutiva los cuatro problemas R_1Q_2, R_2Q_2, R_3Q_2, R_4Q_2. Esperábamos que no tuviera éxito en ninguno de los cuatro problemas y que cometiera el error de cambio de estructura.

Tabla 7.8. Porción del protocolo de Juan Carlos

Categoría 5			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_1Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No
Problema R_4Q_2:	*Cambia Estructura*	*Cambia Estructura*	[*] Si [ ] No

Las respuestas de Juan Carlos se ajustaron a las expectativas en los cuatro problemas de la entrevista (véase Tabla 7.8).

Una vez que Juan Carlos ha resuelto el último problema el entrevistador le presenta la hoja que contiene el problema R_4Q_2 y le pregunta

[Entrevistador: E; Juan Carlos: J.C.]
E: *¿Por qué has elegido esta respuesta?* (el entrevistador señala la resta)
J.C.: *Por que como dice (Juan Carlos lee el problema en voz alta) entonces tienes que restar 75-15*

A continuación el entrevistador le presenta la hoja con el problema R_3Q_2 y le pregunta

E: *¿Por qué has elegido restar?*
J.C.: *Porque es lo mismo que el anterior, dice (Juan Carlos lee el problema en voz alta) entonces he restado esto porque 54-18=36 y era cuántas canicas tenía Marta más que José.*
E: *O sea, que estas 36 canicas son las que tiene Marta*
J.C.: *más que José*

A continuación el entrevistador le presenta la hoja con el problema R_2Q_2 y le pregunta

E: *¿En este caso?*
J.C.: (Juan Carlos lee el problema R_2Q_2 en voz alta) *He restado 75-15 y he hecho esto porque, a ver quién tenía menos globos, cuántos menos globos tenía Luis que Pilar*
E: *¿Aquí hay 60, no?*
J.C.: *Sí*
E: *¿Qué "coletilla" habría que ponerle?*
J.C.: *60 globos menos que Pilar*
E: *¿Luis tiene 60 globos menos que Pilar?*
Juan Carlos asiente.

A continuación el entrevistador le presenta la hoja con el problema R_1Q_2 y le pregunta

E: *¿En éste?*
J.C.: *En este dice (lee el problema en voz alta). Pues yo he dicho esta (restar) porque era a ver quién tenía, que cuántos caramelos tenía Daniel menos que María*.

2ª Fase

Después de describirle el material y de darle instrucciones para la actividad manipulativa, el entrevistador le dice a Juan Carlos

E: *Coloca 8 fichas en el papel A y 24 en el papel B*

Después de que Juan Carlos coloca las fichas

E: *¿Cuántas veces menos fichas hay en A que en B?*
J.C.: *16*

En resumen, Juan Carlos ha cometido el error de cambio de estructura en los problemas de escalar desconocido, tanto en la prueba escrita como en las cuestiones planteadas en la entrevista. Se ha ajustado a las expectativas planteadas para la Categoría 5.

Categoría 6

Daniel [Colegio 1, 6º curso]

En la primera prueba escrita realizó el Cuestionario 1. Su patrón de respuestas en los diez problemas fue 1111-1111-11. En el primer problema multiplicó los datos 16x4="64 caramelos". En el segundo problema dividió los datos 54:18="3 veces menos". En el tercer problema da como solución 72:6="12 canicas". En el cuarto problema dividió los datos 75:5="15 bolas".

Resolvió bien los cuatro problemas del bloque segundo. En los problemas quinto y octavo multiplicó los datos y en el sexto y séptimo dividió los datos.

En el problema noveno, al igual que el cuarto lo resolvió dividiendo los datos. El problema diez lo resolvió multiplicando los datos.

Por las características anteriores lo elegimos para realizar la entrevista correspondiente a la Categoría 6. En la entrevista le propusimos los cuatro problemas y las cuestiones que hemos preparado para esta Categoría.

1ª Fase

Previa introducción para motivar y darle instrucciones, le planteamos de manera consecutiva los cuatro problemas R_1Q_2, R_2Q_1, R_3Q_3, R_4Q_2. Esperábamos que tuviera éxito en los cuatro problemas.

Las respuestas de Daniel se ajustaron a las expectativas en los cuatro problemas de la entrevista (véase Tabla 7.9).

Tabla 7.9. Porción del protocolo de Daniel

Categoría 6			
	Resultados	Expectativas	¿Se cumplen las expectativas?
Problema R_1Q_2:	*...Acierto.......*	*...Acierto.......*	[*] Si [ ] No
Problema R_2Q_1:	*...Acierto.......*	*...Acierto.......*	[*] Si [ ] No
Problema R_3Q_3:	*...Acierto.......*	*...Acierto.......*	[*] Si [ ] No
Problema R_4Q_2:	*...Acierto.......*	*...Acierto.......*	[*] Si [ ] No

Después de que Daniel ha resuelto los cuatro problemas, el entrevistador le muestra la hoja que contiene el problema R_4Q_2 y le dice

[Entrevistador: E; Daniel: D]
E: *Aquí por qué has elegido ésta (respuesta) y no ésta, es decir, ¿por qué has elegido dividir y no restar?*
D: *Porque pregunta qué parte de bolas tiene Antonio comparadas con las de Elena. Entonces tienes que dividir para saber cuántas veces tiene más bolas Elena que Antonio. Por eso se tiene que dividir.*
E: *¿Y si fuera restar ¿cómo se diría?*
D: *Pues, Antonio tiene 15 bolas, Elena tiene 75 bolas. Sería: ¿Cuántas bolas tiene más Elena que Antonio?*

El entrevistador retira la hoja y le muestra otra con el problema R_3Q_3 y dice

E: *Veamos éste, ¿por qué has elegido aquí la división y no la multiplicación?*
D: *Porque pone que "Marta tiene 3 veces tantas canicas como José" y yo creo que se tiene que dividir 54 entre 3 porque Marta tiene 3 veces más que José.*
E: *O sea, que aunque ahí pone "3 veces tantas" hay que dividir, ¿no?*
D: *Yo creo que sí*
E: *¿En los problemas en los que aparece "3 veces" ¿qué hacéis, multiplicar o dividir?*
D: *¿3 veces? Es que según*
E: *Pónme un problema de multiplicar con "veces"*
D: Por ejemplo, Marta tiene 54 canicas y José tiene 3 veces más que Marta. Entonces sí se tendría que multiplicar para saber las que tiene José
E: *¿Y aquí se divide porque...?*
D: *Por que dice "3 veces tantas canicas como José"*
E: *¿Primero en qué has pensado, en multiplicar o en dividir?*
D: *Primero multiplicar, pero después dividir*

2ª Fase

Previa introducción a la actividad y descripción del material a utilizar el entrevistador dice

E: *Pon en el papel A ocho fichas*
(Daniel las coloca)
E: *En el B pon 24*
(Daniel las coloca)
E: *¿Cuántas veces menos hay en A que en B?*
D: *Aquí teníamos 8 y aquí 24, pues 16. ¡Ah!, ¿cuántas veces hay más?*
E: *¿Cuántas veces menos fichas hay en A que en B?*
D: *3 veces menos*
E: *¿Cuántas veces tantas como en A hay en B?*
D: *Pues, aquí (en B) hay 3 veces más y aquí (en A) 3 veces menos*

En resumen, Daniel resolvió correctamente todos los problemas del Cuestionario 1. Es decir, ha resuelto correctamente los problemas R_1Q_1, R_2Q_2, R_3Q_3 y R_4Q_1, todos ellos ítem criterio de las categorías de problemas que hemos establecido. En la entrevista ha resuelto también correctamente todos los problemas que le hemos propuesto. Estos han sido dos problemas de escalar desconocido, R_1Q_2 y R_4Q_2, junto con los ítems criterio R_2Q_1 y R_3Q_3. Ha tenido, por tanto, éxito en todos los problemas criterio de las categorías de problemas establecidas. Además, es consciente de que la solución de un problema no depende sólo de las expresiones claves. En definitiva, ha alcanzado el nivel máximo de comprensión en este tipo de problemas.

7.6. Conclusiones

Los resultados de las entrevistas nos llevan a establecer las siguientes conclusiones con respecto a las predicciones planteadas según las distintas categorías de resolutores.

La niña entrevistada en la Categoría 1, Vanesa, no se ajustó completamente a esta categoría. Sus respuestas coinciden con los requisitos de la Categoría 2. Ha subido pues de nivel.

El niño entrevistado en la Categoría 2, tiene un rendimiento menor del esperado, se sitúa claramente en la Categoría 1. Ha bajado de nivel.

Puesto que la finalidad es encontrar niños que se ajusten a las características exigidas a cada categoría, concluimos que hay niños que cumplen las condiciones de las Categorías 1 y 2.

En la Categoría 3 hemos entrevistado a una niña y a un niño. En ambos casos se han cumplido las expectativas planteadas para esta categoría.

En la Categoría 4 hemos entrevistado a dos niños. José Ramón, cumple parcialmente las expectativas planteadas para esta Categoría puesto que no falla en todos los problemas de escalar desconocido. El segundo niño, Sergio se ha acomodado a esta categoría en la entrevista. No obstante los dos niños fracasan en los problemas criterios R_3Q_3 y R_2Q_2. Por tanto, la definición de la categoría debe ser reformulada en el sentido de exigir sólo el fallo en los dos problemas criterios R_2Q_2 y R_3Q_3.

De los dos sujetos entrevistados de la Categoría 5, uno de ellos, Laura, cumple parcialmente las expectativas planteadas para esta categoría. El otro, Juan Carlos, sí las cumple.

En la Categoría 6, Daniel ha cumplido las expectativas planteadas para esta categoría.

Por tanto, podemos decir que hemos encontrado como mínimo seis niveles de comprensión en los escolares de 5º y 6º correspondientes a las categorías definidas. Los resultados obtenidos con los sujetos de las categorías 4 y 5 nos llevan a la conclusión de que se pueden refinar aún más estas categorías y considerar que en cada una de ellas hay dos subcategorías: a) la de los que fracasan en los cuatro problemas tipo Q_3 o Q_2 según el caso y b) la de los que tienen un fracaso parcial en ellos.

Capítulo 8

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

En este capítulo se resaltan los principales resultados obtenidos en nuestra investigación y se comparan con los resultados de investigaciones previas. Se explicitan implicaciones que tiene nuestra investigación sobre los modelos teóricos y sobre la enseñanza. Por último, se hacen sugerencias sobre futuras investigaciones.

8.1. Influencia de las variables de tarea sobre el índice de dificultad

Exponemos en primer lugar las conclusiones del análisis realizado sobre la influencia de los factores R y Q sobre la dificultad de comprensión de los problemas verbales de comparación multiplicativa, así como la interacción de estas dos variables.

Con respecto a la *variable R*, es decir, el tipo de expresión utilizada para redactar la comparación, hemos obtenido que *afecta significativamente al rendimiento de los niños en esta clase de problemas y por tanto a su índice de dificultad.* Según el índice de dificultad de los valores de R hemos encontrado dos clases homogéneas de problemas: La formada por los problemas que incorporan las expresiones "veces más", "veces tanto como" y "como una de las partes iguales de", y otra formada por los problemas redactados con la expresión "veces menos que".

Hemos obtenido también que *el índice de dificultad global obtenido para todos los problemas verbales de comparación multiplicativa no es el mismo ni en todos los colegios, ni en los dos cursos (5º y 6º), ni en los tres cuestionarios.* Por tanto, al tener la variable R influencia significativa, esta afirmación hay que matizarla según los valores de R. En primer lugar, para los colegios, *los problemas redactados con las expresiones R_1= "veces más que" y R_4="como una de las partes iguales" no han producido diferencias significativas entre colegios, mientras que los problemas redactados con R_2="veces menos" y R_3="veces tantas como" sí las han producido*. La expresión "veces más que" es la que produce menos diferencias entre colegios. De las cuatro, es pues la expresión mejor comprendida por los niños de los diferentes colegios que constituyen la muestra. Le sigue la expresión "como una de las partes iguales de".

El curso ha producido diferencias significativas en los dos valores con los que hemos expresado la comparación de disminución: R_2="veces menos que" y R_4="como una de las partes iguales de", y no las ha producido en los dos valores correspondientes a la comparación de aumento. Cabe pensar pues que *la comprensión en los niños al pasar de 5º a 6º de Enseñanza Primaria se incrementa con mayor intensidad en uno de los tipos de comparación: la comparación de disminución*.

Las diferencias significativas entre los cuestionarios son el reflejo de las diferencias de dificultad entre problemas que difieren en la variable Q. Esto se hace más evidente considerando cada valor de R individualmente. En los cuatro valores de R hay diferencias significativas entre problemas que difieren en la variable Q.

Hemos obtenido diferencias significativas entre las medias de los niveles del factor Q. Las diferencias se dan entre cada par de niveles, lo que permite establecer un orden total de dificultad entre ellos $\mathbf{Q_2<Q_3<Q_1}$. Estas desigualdades no se alteran significativamente por el factor COLEGIO, pero sí por el factor CURSO y por el factor R, por separado. En 5º curso la ordenación anterior es válida, pero al pasar a 6º la diferencia entre los índices de dificultad de Q_2 y Q_3, no son significativas. Al pasar de 5º a 6º los niños han incrementado significativamente su rendimiento en los problemas tipo Q_1 y tipo Q_2, pero en los problemas tipo Q_3 el rendimiento de los niños de 5º es de 49.7% y el de los niños de 6º del 49.8%, es decir, no sólo no hay diferencias significativas, sino que las diferencias de rendimiento por curso en este tipo de problemas son imperceptibles. Se ha producido un estancamiento en los problemas de referente desconocido: *Los niños de 6º de la muestra no han mejorado su rendimiento en problemas verbales de comparación multiplicativa de referente desconocido con respecto a los de 5º curso. En cambio, sí han mejorado su rendimiento de manera significativa los alumnos de 6º con respecto a los de 5º en los problemas de referido desconocido y en los de escalar desconocido*.

La influencia del curso sobre el índice de dificultad de los problemas no cambia de sentido ninguna de las desigualdades que se verifican de manera global, pero en 6º han disminuido las diferencias entre los índices de dificultad de Q_3 (0.50) y Q_2 (0.46) hasta el punto de no ser significativa esta diferencia.

La alteración que produce la influencia del factor R sobre las desigualdades anteriores es mayor que la producida por el factor CURSO. Para las expresiones "veces más" y "veces menos" se cumple la ordenación obtenida de forma general. La expresión "como una de las partes iguales" provoca un acercamiento entre los índices de dificultad de Q_1 y Q_3, que hace que no hallamos encontrado diferencias significativas entre ellos. La expresión que más alteración produce en la ordenación general es la "veces tanto como", que llega a provocar una inversión entre los índices de dificultad de Q_2 y Q_3 con respecto a la ordenación general.

Hemos obtenido diferencias significativas entre los colegios para los problemas de referido desconocido, tipo Q_1, pero no en los otros dos tipos. Si entendemos las diferencias entre colegios como diferencias en cuanto a la formación recibida, podemos concluir que los niños de la muestra han recibido diferente formación en los problemas de comparación de referido desconocido. Sin embargo, esta diferente formación recibida no ha ocasionado diferencias significativas en los otros dos tipos de problemas. Lo dicho sugiere que no basta con una instrucción en uno sólo de estos tipos de problemas para tener éxito en los otros dos tipos. La instrucción escolar normalmente parte de la enseñanza de los problemas tipo Q_1, en la que la elección de la operación adecuada va ligada a la expresión verbal correspondiente, por ejemplo, "veces más"=multiplicar, "veces menos"=dividir, etc. Sin embargo, esta instrucción no es suficiente en la mayoría de los niños para tener éxito en problemas de escalar desconocido, ni en problemas de referente desconocido. Los niños resuelven los problemas tipo Q_1 en base a una comprensión de palabras clave, pero en muchos casos no realizan una integración del esquema de comparación multiplicativa. La mayoría de los niños de estos niveles requieren práctica adicional en los tipos de problemas Q_2 y Q_3 para integrar el esquema de comparación multiplicativa.

8.2. Análisis de errores

La clasificación de errores que hemos realizado contempla cinco clases de faltas de comprensión:

1ª No respuesta
2ª Cambio de estructura
3ª Inversión de la relación
4ª Doble estructura
5ª Otros errores

Esta tipología de errores que hemos realizado es válida para describir los distintos errores que cometen los niños cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa. Si la frecuencia de errores en el tipo que hemos catalogado como "otros errores" hubiese sido alta, esto indicaría que el criterio para establecer la clasificación no sería bueno, ya que habría muchos errores en una categoría que ha sido definida para incluir los errores que no se ajustan a las categorías preestablecidas, y por tanto habría que reconsiderar el criterio clasificatorio. Pero en nuestro caso esto no ha sido así; el resultado obtenido para la categoría "otros errores" muestra que su influencia en la distribución de errores es altamente negativa, como se pone de manifiesto en el estudio que hemos realizado del efecto ERROR, y ello de forma significativa.

Hemos encontrado diferencias significativas en la frecuencia con la que se presenta cada tipo de error. El error más frecuente es el "cambio de estructura", seguido por el error de "inversión" y de "sin respuesta".

Los problemas que difieren en el tipo de cantidad desconocida provocan la producción de errores de manera desigual. Los problemas de referido o comparado desconocido son los que provocan la aparición de un número menor de errores. Los problemas de referente desconocido y de escalar desconocido se caracterizan por que provocan frecuencias altas de errores, pero estas frecuencias están distribuidas de manera distinta en uno y otro tipo de problema. Los problemas de referente desconocido provocan la aparición de los distintos tipos de error con mayor frecuencia que los otros dos tipos de problemas. Sin embargo, los problemas de escalar desconocido presentan una frecuencia total de errores superior al resto pero concentrada en el error de cambio de estructura y apenas provocan errores de inversión. Todo lo contrario que en los problemas de referente desconocido que provocan el error de inversión y apenas provocan cambio de estructura.

El tipo de expresión relacional utilizada en el enunciado del problema influye también en la aparición o no de los tipos de errores. En este sentido hay que destacar que las expresiones que menos errores han producido en frecuencia absoluta han sido "como una de las partes iguales de" con 126 errores y "veces más que" con 132. Y las que mayor número de errores han producido han sido los problemas que incluyen las expresiones "veces menos que" con 180 errores y "veces tantas como" con 140 errores. Esto en términos globales, pero si nos atenemos a la distribución de errores observamos que la expresión "veces más" es la que menos contribuye a la diversificación de los errores. Esta expresión contribuye de forma significativa a la aparición del error de cambio de estructura e inhibe de forma significativa que el niño no de respuesta. Por el contrario la expresión que más contribuye a la diversificación de los errores es la expresión "veces tantas como" y no provoca la aparición de ningún tipo de error de forma significativa.

La expresión "veces menos que" provoca dos tipos de errores de forma significativa: el cambio de estructura y la doble estructura. La expresión "como una de las partes iguales de" favorece de forma significativa que el niño deje la respuesta en blanco si no comprende el problema. Por otra parte, esta expresión incide negativamente con respecto a las demás en la aparición del error cambio de estructura.

Hay asociación entre la expresión lingüística utilizada y el tipo de cantidad desconocida en el esquema de comparación en relación a la frecuencia de errores. Destaca de manera significativa la expresión "veces menos que" en problemas de comparado desconocido. Pero esta asociación influye en la aparición de unos errores y no otros. Veámoslo según cada uno de los errores:

-<u>Error de inversión</u>. La asociación entre el error de inversión y los problemas de referente desconocido en el problema no depende de la expresión lingüística utilizada. El error de inversión no está provocado por la variable lingüística R, es exclusivamente un error de integración de la estructura semántica de la comparación.

-<u>Error de doble estructura</u>. El error de doble estructura está provocado por la variable lingüística R (sobre todo "veces menos que") y no depende del tipo de cantidad desconocida en el esquema de comparación.

-<u>El error de cambio de estructura</u>. El error de cambio de estructura está provocado por ambas variables, R y Q.

-<u>No respuesta</u>. Es un error debido sólo a la variable lingüística R (sobre todo a la expresión "como una de las partes iguales de").

8.3. Niveles de comprensión

Como consecuencia de los resultados obtenidos en los análisis del índice de dificultad y de los tipos de soluciones, tanto correctas como incorrectas hemos realizado una categorización jerárquica de los problemas de comparación multiplicativa. Los doce problemas los hemos agrupado en cinco categorías resumidas en la Tabla 8.1

Las categorías obtenidas son:

Categoría 1. Incluye el problema de comparación de aumento de referido desconocido redactado con la expresión "veces más".

Tabla 8.1. Categorías de problemas de comparación

Categorías	Problemas	Descripción
Categoría 1	R_1Q_1	Comparación de aumento Referido desconocido Expresión "veces más"
Categoría 2	R_3Q_1 .... R_4Q_1	Comparación de aumento Referido desconocido Expresión "veces tanto como" .... Comparación de disminución Referido desconocido Expresión "tantas como una de las partes iguales de"
Categoría 3	R_2Q_1	Comparación de disminución Referido desconocido Expresión "veces menos"
Categoría 4	R_1Q_3 R_2Q_3 R_3Q_3 R_4Q_3	Comparación de aumento (R_1 y R_3) y comp. de disminución (R_2 y R_4) Referente desconocido
Categoría 5	R_1Q_2 R_2Q_2 R_3Q_2 R_4Q_2	Comparación de aumento (R_1 y R_3) y comp. de disminución (R_2 y R_4) Escalar desconocido

Categoría 2. Contiene dos problemas de referido desconocido, uno de comparación de aumento y otro de disminución redactados con la expresión comparativa "tanto como".

Categoría 3. Contiene el problema de comparación de disminución de referido desconocido redactado con la expresión "veces menos".

Categoría 4. Contiene los cuatro tipos de problemas de comparación de referente desconocido. Dos de comparación de aumento y dos de disminución. Los dos problemas redactados con las expresiones "veces más que" y "veces menos que" pueden considerarse como una subcategoría.

Categoría 5. Contiene los cuatro tipos de problemas de escalar desconocido. Dos de aumento y dos de disminución. Puede considerarse como una subcategoría la formada por los dos problemas redactados con las expresiones "veces más que" y "veces menos que".

A partir de estas categorías de problemas hemos realizado una categorización de sujetos según que superen o no los ítems incluidos en cada categoría de problemas.

Las entrevistas realizadas con sujetos seleccionados nos han permitido poner de manifiesto que estas categorías definidas teóricamente tienen su reflejo en la realidad y que hay niños cuyas producciones en problemas de comparación se adecuan a ellas. Las condiciones exigidas a un niño para ubicarlo en una categoría es que falle en los problemas de esa categoría de problemas y tenga éxito en los problemas de categorías inferiores. Desde este enfoque, lo que hemos obtenido es un categorización ordinal de sujetos según su nivel de comprensión y por ello hablamos de niveles de comprensión.

Los resultados de las entrevistas nos han confirmado que hay al menos seis niveles de comprensión en resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa en los niños de la muestra. Un resumen de los mismos puede verse en la Tabla 8.2.

Nivel 1. A este nivel pertenecen los niños que fracasan en todos los problemas de comparación multiplicativa. Fracasar en problemas de comparación de aumento redactado con la expresión "veces más" es un síntoma evidente de encontrarse en este primer nivel. Las respuestas de los niños de este nivel son de tipo aditivo.

Nivel 2. En este nivel están los niños que en problemas de comparación de aumento de referido desconocido redactados con la expresión "n veces más" la traducen como sumas reiteradas del referente o multiplicación del referente por el escalar. Fracasan en los problemas de comparación de aumento de referido desconocido redactados con la expresión "n veces tanto como", y también en los problemas de comparación de disminución redactados con la expresión "tantas como una de las partes iguales de".

Nivel 3. Pertenecen a este nivel los niños que tienen éxito en los dos problemas de comparación de aumento de referido desconocido y en el problema de comparación de disminución de referido desconocido redactado con la expresión "tantas como una de las partes iguales de". El tope superior de este nivel lo constituye el fracaso en problemas de comparación de disminución de referido desconocido redactados con la expresión "veces menos". El error se refleja en utilizar sólo "menos" y restar, o interpretar "veces" y "menos" por separado y multiplicar y restar. En este último han aparecido dos variantes: a) multiplicar el escalar por sí mismo y restar lo que resulta a la cantidad referente, y b) multiplicar la cantidad referente por el escalar y restar de este resultado el referente.

Nivel 4. Los niños de este nivel resuelven correctamente los problemas de comparación de referido desconocido, los de aumento y los de disminución, independientemente de la expresión utilizada en su enunciado. Se caracterizan por fracasar en los problemas de referente desconocido, bien parcial o totalmente. Superar este nivel requiere resolver correctamente el problema de referente desconocido redactado con la expresión "tantas veces como". El error asociado con el problema criterio es el de inversión de la relación, es decir, realizar con los datos la operación inversa a la adecuada.

Tabla 8.2. Niveles de comprensión

Nivel	Ítem Criterio	Características
Nivel 1	R_1Q_1 .94*	Fracaso en todos los problemas Error de "cambio de estructura"
Nivel 2	R_4Q_1 .77	Acierto en R_1Q_1 Fracaso en R_4Q_1 Error distinto del error de inversión en el ítem criterio
Nivel 3	R_2Q_1 .63	Acierto en los ítems criterio R_1Q_1 y R_4Q_1 Fracaso en R_2Q_1 Error de cambio de estructura o doble estructura en el ítem criterio
Nivel 4	R_3Q_3 .37	Acierto en los ítems criterio R_1Q_1, R_4Q_1 y R_2Q_1 Fracaso en R_3Q_3 Error de inversión de la relación en el ítem criterio
Nivel 5	R_2Q_2 .19	Acierto en los ítems criterio R_1Q_1, R_4Q_1, R_2Q_1 y R_3Q_3 Fracaso en R_2Q_2 Error de cambio de estructura en el ítem criterio
Nivel 6		Acierto en todos los ítems criterio Exito en todos los problemas

* Indice de dificultad del ítem criterio

Nivel 5. Pertenecen a este nivel los niños que resuelven correctamente los problemas de comparación de aumento y de disminución de referido desconocido y de referente desconocido. Fracasan parcial o totalmente en los problemas de escalar desconocido. Superar este nivel exige tener éxito en el problema de escalar desconocido redactado con la expresión "veces menos". El error asociado con el problema criterio es el cambio de estructura, es decir, restar las dos cantidades en vez de dividirlas que es lo adecuado.

Nivel 6. Tienen este nivel los niños que resuelven correctamente problemas de comparación de aumento y de disminución de referido desconocido, de referente desconocido y de escalar desconocido redactados con cualquiera de las cuatro expresiones. Cuando resuelven el problema realizan una integración del esquema de comparación.

8.4. Implicaciones para los modelos teóricos

En el estudio del estado de la cuestión realizado en el capítulo dos hemos extractado los principales enfoques teóricos que han surgido en el estudio de los problemas verbales de estructura multiplicativa. Cada uno de ellos trata de identificar categorías distintas de problemas y aunque algunas clasificaciones son paralelas, difieren en la esencia de las clasificaciones.

Nesher subraya la importancia de continuar estos análisis teóricos

> *Si los investigadores en educación matemática obtienen una teoría explicatoria satisfactoria, serán capaces de afectar el proceso de aprendizaje centrándose en los principales obstáculos con los que los niños se enfrentan en el aprendizaje de estos problemas" (Nesher, 1988, p. 38)*

El estudio que hemos realizado aporta algunos datos nuevos al respecto. Hemos puesto de relieve que la dificultad de los problemas de comparación es mayor que la de los otros problemas incluidos en la categoría isomorfismo de medidas de Vergnaud o en la categoría IxE'=E" de Schwartz. Nuestros resultados confirman la decisión de Nesher (1988) y de Hendrickson (1986) de considerar los problemas de comparación como categoría independiente.

Dentro de la categoría de comparación multiplicativa hemos hallado que las variables "cantidad desconocida en el esquema de comparación" y "término comparativo" utilizado para expresar la comparación son variables esenciales para predecir las producciones de los alumnos de 5º y 6º de Enseñanza Primaria (10 a 12 años de edad). Ambas variables han tenido efecto significativo en la dificultad de los problemas de comparación y en el tipo de error que inducen en los niños. Los resultados, tanto del estudio de las respuestas correctas como el de los errores, nos llevan a la conclusión de que en los problemas verbales de estructura multiplicativa *los niños no se ajustan a un único modelo primitivo* como sugiere el trabajo de Fischbein y otros (1985). El modelo se ve afectado por las dos variables de tarea que hemos estudiado en problemas de comparación. Las limitaciones de la teoría de los modelos implícitos de Fischbein y otros (1985) ha sido puesta de manifiesto por Nesher (1988) y Bell y otros (1989). La primera subraya la influencia de las palabras clave y la práctica instruccional, mientras que Bell y colaboradores subrayan la importancia del tipo de números. A esto hay que añadir que la expresión lingüística utilizada y el tipo de cantidad desconocida en el esquema subyacente al problema provocan que el niño se retraiga hacia distintos modelos primitivos más básicos. No hay un sólo modelo primitivo, como sugieren Fischbein y colaboradores.

Nuestra investigación ha puesto de manifiesto que los problemas de comparado desconocido son los más accesibles para los niños. Sin embargo, la dificultad de un problema de comparado desconocido se ha visto afectada significativamente por la forma verbal de expresar la comparación que a su vez interacciona con los colegios. Estos resultados apoyan la conjetura de Nesher de que *hay más de un modelo intuitivo* de las operaciones y que estos modelos son el reflejo de claves lingüísticas y de la instrucción escolar.

Los resultados que hemos obtenido confirman la hipótesis de consistencia de Lewis y Mayer (1987). Estos autores enuncian la hipótesis de consistencia para problemas de estructura aditiva y multiplicativa, pero es limitada puesto que: sólo consideran problemas de referido desconocido, de referente desconocido y una sola formulación en cada uno de estos tipos de problemas. Nuestros resultados confirman esta hipótesis con varias expresiones lingüísticas, lo que hace pensar que la hipótesis de consistencia para problemas de comparación sea independiente de la expresión relacional utilizada.

8.5. Implicaciones para la enseñanza

Como señalan Nesher y otros (1982, p. 393), los estudios como el que hemos realizado tienen dos tipos generales de implicaciones didácticas. La primera, que el profesor puede ser más sensible a la secuencia de instrucción cuando comprende cuáles son las estructuras de conocimiento necesarias para resolver ciertos tipos de problemas, y puede adaptar estrategias diferentes en enseñanza en los diferentes niveles. Segundo, este análisis permite una mejor comprensión de las dificultades y que los niños encuentran en los diferentes niveles de realización.

De nuestro estudio surgen implicaciones para la enseñanza tales como:

a) Problemas con la misma estructura y que difieren sólo en la forma de expresar la comparación difieren en dificultad. Esto indica que los alumnos de estos niveles no transfieren el conocimiento que tienen sobre una expresión relacional de comparación a otra de significado equivalente. Por tanto, *se requiere una enseñanza explícita que conduzca a la comprensión de las distintas expresiones comparativas*.

b) Problemas con la misma expresión de comparación pero que difieren en el tipo de cantidad desconocida en el esquema de comparación varían grandemente en dificultad. Esto pone de manifiesto que el alumno no comprende las relaciones subyacentes al esquema de comparación. Por tanto, *es necesaria un tipo de enseñanza que haga explícita la relación estructural entre las cantidades en una comparación*.

c) Muchas de las soluciones correctas dadas por los niños no son producto de una integración coherente del problema, de una comprensión global del problema. Son producto de una comprensión parcial que se limita al uso de palabras clave, tales como "veces" para la multiplicación. El profesor debe ser consciente de ello y ser capaz de detectar cuando una solución es producto de comprensión parcial y cuando de comprensión global. *Los problemas de referente desconocido son útiles para valorar si la comprensión del alumno es parcial o global*.

d) Los errores que cometen los niños ponen de manifiesto las dificultades y obstáculos que deben vencer para progresar en su comprensión de la comparación. En nuestra investigación *la comparación aditiva se revela como un obstáculo para la comprensión de los problemas de comparación multiplicativa de escalar desconocido.*

e) Hay diferentes niveles de comprensión en los niños de 5º y 6º (10 a 12 años de edad). En el mismo aula pueden encontrarse desde el niño con el nivel de comprensión más bajo, que interpreta todos los problemas de comparación multiplicativa como de estructura aditiva, hasta niños con el nivel de comprensión más alto en este tipo de problemas. *Cada nivel de comprensión requiere un tratamiento específico que le permita ascender a niveles superiores*.

8.6. Limitaciones de la investigación

La muestra de niños seleccionada ha sido intencional, esto limita la generalización de nuestros resultados a niños de otros medios como el rural, o a niños con deficiencias. La recolección de los datos de tipo transversal frente a una de tipo longitudinal limita la aplicabilidad de nuestros hallazgos al estudio del desarrollo de la comprensión de los niños en problemas verbales de comparación multiplicativa.

Los problemas verbales utilizados en la investigación limitan los resultados en varias maneras. Los números utilizados ha sido sólo números naturales relativamente pequeños. Como han puesto de manifiesto Bell y colaboradores (1981, 1989) la introducción de números decimales y particularmente decimales menores que la unidad afecta a la comprensión de los problemas verbales de estructura multiplicativa. Por ello, hay que ser cautos a la hora de generalizar los resultados que hemos obtenido a problemas con números decimales.

Aunque hemos utilizado problemas de estructura multiplicativa de varias categorías semánticas, los resultados principales del estudio sólo se han obtenido a partir de los problemas de la categoría semántica de comparación. Por tanto, los resultados no pueden generalizase a otras categorías semánticas como "producto de medidas" o problemas de proporcionalidad simple redactados con la expresiones "en cada" o "por".

8.7. Sugerencias para investigaciones futuras

Las limitaciones señaladas en nuestro estudio, así como las variables controladas marcan las sugerencias para futuras investigaciones. Investigaciones con niños del medio rural y con niños deficientes pueden complementar los resultados que hemos obtenido. Así mismo, se hace necesario realizar investigaciones complementarias sobre el efecto de las variables controladas en los resultados obtenidos. Prioritariamente se deberían realizar investigaciones sobre la comparación con niños mayores utilizando los problemas de escalar desconocido y los de referente desconocido. También son necesarias investigaciones en las que se consideren el efecto de otras variables de tarea. Se debería estudiar cómo influyen el tipo de número (naturales, fraccionarios, decimales) y la naturaleza de las cantidades (discreta, continua) sobre los resultados que hemos obtenido, tanto en el índice de dificultad de los problemas, como en los tipos de errores que cometen los niños.

Otro aspecto a tratar en futuras investigaciones es el análisis conjunto de distintas categorías semánticas de problemas de estructura multiplicativa en relación con los problemas de comparación, sobre todo con niños de niveles superiores a los utilizados en nuestro estudio.

Por último, es necesario elaborar material didáctico para el desarrollo de la comprensión de la comparación multiplicativa y contrastarlo empíricamente.

REFERENCIAS

Aiken, L.R., Jr.(1971). Verbal factors and mathematics learning: A review of research. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*, 304-313.

Anghileri, J.(1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 367-385.

Anguera, M.T.(1985). Posibilidades de la metodología cualitativa VS. Cuantitativa. *Revista Investigación Educativa, 3*(6), 127-144.

Arnau, J.(1981). *Diseños experimentales en psicología y educación*. (Tomo 1). México: Trillas.

Arnau, J.(1984). *Diseños experimentales en psicología y educación*. (Tomo 2). México: Trillas.

Bacher, F.(1982). *Les enquêtes en psycologie*. Tome 2. Lille: Presses universitaires de Lille.

Barnett, J.(1980). The study of syntax variables. En G.A. Goldin y C.E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving* (pp. 23-68). Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.

Batanero, M.C., Castro, E. y Rico, L.(1991). Diseño experimental para comparación de ítems empleando cuestionarios múltiples y su aplicación a la evaluación de problemas verbales. *Comunicación presentada en las V JAEM*, Castellón.

Bebout, H.C.(1990). Children's symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 123-131.

Bell, A. W, Fischbein, E. y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 129-147.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L. y Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 434-449.

Bell, A.W., Swan, M. y Taylor, G.(1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 399-420.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987a). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40*, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. *Enseñanza de las Ciencias, número extra*, 332-333.

Bishop, Y.M., Fienberg, S.E. y Holland, P.W. (1975). *Discrete multivariate analysis: Theory* *and practice*. Cambridge, MA: M.I.T. Press.

Bisquerra, R.(1987). *Introducción a la estadística aplicada a la investigación educativa*. Barcelona: PPU.

Bisquerra, R.(1989a). *Introducción conceptual al análisis multivariable* (Vols. I y II). Barcelona: PPU.

Bisquerra, R.(1989b). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: CEAC.

Boero, P., Ferrari, P.L. y Ferrero, E.(1989). Division problems: Meanings and procedures in the transition to a written algorithm. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 17-25.

Borasi, R.(1986). On the natura of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 125-141.

Brekke, G.(1991). *Multiplicative structures at ages seven to eleven.* Doctoral thesis. University of Nottingham.

Briars, D.J. y Larkin, J.H.(1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.

Brousseau, G., Davis, R. y Werner, T.(1986). Observing students at work. En B. Christiansen, G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrech: Reidel Publishing Company.

Brown, J.S. y Burton, R.(1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*, 155-192.

Brown, M.(1981). Number operations. En K.M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 23-47). London: John Murray.

Carey, D.A.(1991). Number sentences: Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 266-280.

Carpenter, T.C.(1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: LEA.

Carpenter, T.P., Coburn, T.G., Reys, R.E. y Wilson, J.W.(1976). Notes from national assessment: Word problems. *Arithmetic Teacher, 23*, 389-393.

Carpenter, T.P., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Lindquist, M.M. y Reys, R.E. (1980). Solving verbal problems: Results and implications for national assessment. *Arithmetic Teacher, 28*, 8-12.

Carpenter, T.P., Hiebert, J. y Moser, J.M.(1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 27-39.

Carpenter, T.P., Hiebert, J. y Moser, J.M.(1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 56-72.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M.(1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M.(1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 7-44). Orlando, Florida: Academic Press.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M.(1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179-202.

Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Bebout, H.C.(1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 345-357.

Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, T.A.(Eds.)(1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carretero, L.(1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de Psicología, 42*(3), 83-101.

Castro, E.(1991). *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Tercer Ciclo. Director: L. Rico. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E.(1992). Errores en la comprensión de problemas verbales de comparación multiplicativa. *Comunicación presentada en las VI JAEM*. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Castro, E., Rico, L., Batanero, C. y Castro, E.(1991). Dificultad en problemas de comparación multiplicativa. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings Fifteenth PME Conference.* Vol.1 (pp. 192-198). Assisi (Italy).

Castro, E., Rico. L. y Castro, E.(1992). Choice of structure and interpretations of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth PME Conference.* Vol. 1 (pp. 113-120). Durham, NH (USA).

Castro, E., Rico, L. y Gil, F.(1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10*(3), 243-253.

Clark, H.H.(1969). Linguistic processes in deductive reasoning. *Psychological Review, 76*, 387-404.

Cook, C.J. y Dossey, J.A.(1982). Basic fact thinking strategies for multiplication revisited. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3)

Cooney, T.J., Davis, E.J. y Hirstein, J.J.(1981). The effects of two strategies for teaching two mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 220-225.

Cuadras, C.M.(1991). *Métodos de Análisis Multivariante*. Barcelona: PPU.

Chi, M.T.H. y Glaser, R.(1986). Capacidad de resolución de problemas. En R. J. Sternberg (Ed.), *Las Capacidades Humanas*. Barcelona: Labor.

Dahmus, R.M.(1970). How to teach verbal problems. *School Science and Mathematics, 70*(2), 121-138.

Davydov, V.V.(1992). The psychological analysis of multiplication procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 14*(1), 1-67.

De Corte, E. y Verschaffel, L.(1985a). Working with simple word problems in early mathematics instruction. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education.* Volume 1. Individual contributions, (pp. 304-309). Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center, Subfaculty of Mathematics, State University of Utrecht, The Netherlands.

De Corte, E. y Verschaffel, L.(1985b). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L.(1987a). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 363-381.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L.(1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representation and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*(4), 460-470.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Pauwels, A.(1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology, 82*, 359-365.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Van Coillie, V.(1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 197-216.

Dellarosa Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K. y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20*, 405-438.

Devoper, C.(1977). Etude de quelques variables d'enonces dans des situations de problemes d'arithmetiques. *Mathematique et Pedagogie, 10*, 37-49.

Dunn, O. J. y Clark, V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression*. New York: J. Wiley.

Ekenstam, A. y Greger, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 369-384.

Etxeberria, J., Joaristi, L. y Lizasoain, L.(1991). *Programación y análisis estadísticos básicos con SPSS/PC+*. Madrid: Paraninfo.

Fayol, M. y Abdi, H.(1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 a 10 ans. *European Journal of Psychology of Education, 1*(1), 41-58.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. y Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Fitzpatrick, A.R.(1983). The meaning of content validity. *Applied Psychological Measurement. 7*(1), 3-13.

Fox, J.D.(1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra. (La versión original data de 1969).

Furinghetti, F.(Ed.)(1991). *Proceedings Fifteenth PME Conference*. Assisi (Italy): Program Committee of the 15th PME Conference.

Geeslin, W. y Graham, K.(Eds.)(1992). *Proceedings of the Sixteenth PME Conference*. Durham, NH: University of New Hampshire.

Ginsburg, H.(1976). Learning difficulties in children's arithmetic: A clinical cognitive approach. En A. R. Osborne y D. A. Bradbard (Eds.), *Models for learning mathematics. Papers from a research workshop*. Columbus, Ohío: ERIC.

Ginsburg, H.P.(1983). *The development of mathematical thinking*. London: Academic Press.

Ginsburg, H.P.(1983). Introduction. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. London: Academic Press.

Ginsburg, H.P., Kossan, N.E., Schwartz, R. y Swanson, D.(1983). Protocol method in research on mathematical thinking. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. London: Academic Press.

Glaser, R.(1982). Psicología de la instrucción: pasado, presente y futuro. *Bordón, 244*, 365-394.

Glass, G.V. y Stanley, J.C.(1980). *Métodos Estadísticos Aplicados a las Ciencias Sociales*. Madrid: Prentice/Hall International.

Goldin, G.A. y McClintock, C.E.(Eds.) (1980). *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.

Gómez Granell, C.(1981). Procesos cognitivos en el aprendizaje de la multiplicación. *Infancia y Aprendizaje, 15*, 109-119.

Gómez Granell, C.(1985a). La representación gráfica de la multiplicación aritmética: una experiencia de aprendizaje. *Infancia y aprendizaje, 31-32*, 229-249.

González, E., Gutiérrez, J., Rico, L. y Tortosa, A.(1985). Relación verbo-operación en los problemas de aritmética del Tercer Ciclo de la E.G.B. *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas*. Almería. Sociedad Anadaluza de Profesores de Matemáticas "THALES".

Greer, B.(1987a). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 37-45.

Greer, B. (1987b). Understanding of arithmetical operations as models of situations. En J. A. Sloboda y D. Rogers, *Cognitive Processes in Mathematics* (pp. 60-80). New York: Oxford University Press.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on learning and teaching mathematics*. NCTM/Macmillan.

Greer, B. y Mangan, C. (1986). Choice of operations: from 10-year-old to student teachers. En L. Burton y C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the Tenth International Conference of Psychology of Mathematics Education,* 25-30, London: London Institute of Education.

Grouws, D. A. (1972). Open sentences: Some instructional considerations from research. *The Arithmetic Teacher, 19*, 595-599.

Grouws, D. A. (1974). Solution methods used in solving addition and subtraction open sentences. *The Arithmetic Teacher, 21*, 255-261.

Grows, D.A.(Ed.)(1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan.

Grouws, D.A. y Good, T.L.(1976). Factors associated with third- and fourth-grade children's performance in solving multiplication and division sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*, 155-171.

Guion, R.M.(1977). Content validity-The source of my discontent. *Applied Psychological Measurement, 1*(1), 1-10.

Gutiérrez, R. y González, A. (1991). *Estadística multivariable. Vol. 1. Introducción al análisis multivariante*. Universidad de Granada: Los autores.

Harel, G. y Behr, M.(1990). Understanding the multiplicative structure. En G. Booker, P. Cobb y T.N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings Fourteenth PME Conference*. México. Vol. III, pp. 27-34.

Harel, G., Post, T. y Behr, M.(1988). On the textual and the semantic structure of mapping rule and multiplicative compare problems. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. II (pp. 372-379). Veszprém.

Hart, K. (Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor: NFER-NELSON.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr, *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum/Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heege, H. ter. (1978). Testing the maturity for learning the algorithm of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 9*, 75-84.

Heege, H. ter. (1983). The multiplication algorithm: an integrated approach. *For the Learning of Mathematics, 3*, 29-34.

Heege, H. ter. (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 375-388.

Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1979). Information processing analyses of mathematical problem solving. En R. Lesh, D. Mierkiewicz, y M. Kantowski (Eds.), *Applied Mathematical Problem Solving*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Hendrickson, A. D. (1986). Verbal multiplication and division problems: Some difficulties and some solutions. *Arithmetic Teacher, 33*(8), 26-33.

Hervey, M.A.(1966). Children's responses to two types of multiplication problems. *The Arithmetic Teacher, 13*, April, 288-292.

Hiebert, H. (1982). The position of the unknown set and children's solutions of verbal problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 341-349.

Hiebert, J.(1986)(Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Huinker, D. M. (1989). Multiplication and division word problems: Improving students' understanding. *Arithmetic Teacher, 37*(2), 8-12.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90.

Huttenlocher, J. y Strauss, S. (1968). Comprehension and a statement's relation to the situation it describes. Journal of Verbal *Learning and Verbal Behavior, 7*, 300-304.

Janvier, C.(1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jerman, M. (1970). Some strategies for solving simple multiplication combinations. *Journal for Research in Mathematics Education, 1*, 95-128.

Jerman, M. (1973). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 5*, 109-123.

Jerman, M. E. y Mirman, S. (l974). Linguistic and computational variables in problem solving in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 5*, 3l7-362.

Jerman, M. y Rees, R. (1972). Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 306-323.

Kane, R. B. (1970). The readability of mathematics textbooks revisited. *The Mathematics Teacher, 63*, 579-581.

Kaput, J.J.(1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier, *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 150-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J.(1989). Supporting concrete visual thinking in multiplicative reasoning: Difficulties and opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 35-47.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 219-233.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, K.(1982). What is a problem?. *Problem Solving, 4(2)*. Paper prepared for the 60th Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Toronto, 14-17 April.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*, 109-129.

Kirk, R. E. (1982). *Experimental design: Procedures for the Behavioral Sciences.* (Segunda Edición). Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company.

Kouba, V.L.(1987). An investigation of children's solution strategies for one-step, grouping and ratio forms of multiplication and division problems (Doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison, 1985). *Dissertation Abstracts International, 47*, 112A.

Kouba, V.L.(1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 147-158.

Krulik, S.(Ed.)(1980). *Problem solving un school mathematics. 1980 Yearbook.* Reston, VA: NCTM.

Kulm, G.(1980). The classification of problem-solving research variables. En G.A. Goldin y C.E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institue Press, 1984.

Lampert, M. (1986). Teaching multiplication. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 241-280.

Lesh, R. y Landau, M.(Eds.)(1983). *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press.

Levain, J. P. (1992). La resolutions de problem multiplicatifs a la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 139-161.

Lewis, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81*, 521-531.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Lindquist, M.M., Carpenter, T.P., Silver, E.A., y Matthews, W. (1983). The third national assessment: Results and implications for elementary and middle schools. *Arithmetic Teacher, 31*(4), 14-19.

Lindsay, P.H. y Norman, D.A.(1972). *Human information processing*. New York: Academic Press. [Trad. cast. de J. Seoane y C. García Trevijano: Procesamiento de información humana. Madrid: Ed. Tecnos, 1977].

Lindvall, C. M. e Ibarra, C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 50-62.

Linville, W. J. (1976). Syntax, vocabulary, and the verbal arithmetic problem. *School Science and Mathematics, 76*(2), 152-158.

López Feal, R.(1986). *Construcción de instrumentos de medida en ciencias conductuales y sociales*. Volumen 1. Barcelona: Alamex.

Luke, C. (1988). The repeated addition model of multiplication and children's performance on mathematical word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 217-226.

Marshall, S. P. (1983). Sex differences in mathematical errors: An analysis of distractor choices. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(4), 325-336.

Marshall, S. P. y Smith, J. D. (1987). Sex differences in learning mathematics: A longitudinal study with item and error analyses. *Journal of Educational Psychology, 79*, 372-383.

Mayer, R. E. (1986a). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Mayer, R. E. (1986b). Capacidad matemática. En R. J. Sternberg (Ed.), *Las Capacidades Humanas*. Barcelona: Labor.

Meier, S.T.(1993). Revitalizing the measurement curriculum. *American Psychologist, 48*(8), 886-891.

Messick, S.(1980). Test validity and the ethics of assessment. *American Psychologist, 35*(11), 1012-1027.

Morales, R.V., Shute, V.J. y Pellegrino, J.W.(1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction, 2*, 41-57.

Moyer, J. C., Moyer, M. B., Sowder, L. y Threadgill-Sowder, J. (1984a). Story problem formats: Verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 64-68.

Moyer, J. C., Moyer, M. B., Sowder, L. y Threadgill-Sowder, J. (1984b). Story problem formats: Drawn versus verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 342-351.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes. En B. Greer y G. Mulhern (Eds.), *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), 24-41.

Nelson, D. (1976). Problem solving in a model for early mathematics learning. En A. R. Osborne y D. A. Bransford (Eds.), *Models for Learning Mathematics*. Athens, Georgia: Georgia Center for Study of Learning and Teaching Mathematics and the Department of Mathematics Education, University of Georgia (ERIC/SMEAC Ohio State University).

Nesher, P. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 41-51.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 369-388.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problem. *For the Learning of Mathematics, 1*, 41-48.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 25-38). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1987). Toward an instructional theory: the role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 33-39.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM.

Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13*, 373-394.

Nesher, P. y Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 251-269.

Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds.)(1990). *Mathematics y cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge: Cambridge University Press.

Nesher, P. y Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 41-51.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972): *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II: Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 331-363.

Norusis, M.J.(1985). *SPSS/PC+ Advanced Statistics*. Chicago, IL: SPSS Inc.

Nunnally, J.C.(1987). *Teoría Psicométrica*. México: Trillas.

Onslow, B. A. (1986). *Overcoming conceptual obstacles concerning rates: design and implementation of a diagnostic teaching unit*. Ph. D., Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham.

Paul, D.J., Nibbelink, W.H. y Hoover, H.D.(1986). The effects of adjusting readability on the difficulty of mathematics story problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 163-171.

Peled, I. y Nesher, P.(1988). What children tell us about multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 239-262.

Pereda, S.(1987). *Psicología experimental. I. Metodología.* Madrid: Pirámide.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, (Octava reimpresión).

Puig, L. (1992-1993). *Elementos para la instrucción en resolución de problemas de matemáticas.* Tesis doctoral. Facultad de Psicología, Universidad de Valencia.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Ed. Síntesis.

Quintero, A. H. (1981). The role of semantic understanding in solving multiplication word problems: Two step RxE problems. En J. L. Schwartz, *The role of semantic understanding in solving multiplication and division word problems*. Final report to NIE (Grant NIE-G-80-0144). MIT, Cambridge, MA.

Quintero, A. H. (1986). Children's conceptual understanding of situations involving multiplication. *Arithmetic Teacher, 33*(5), 34-37.

Quintero, A. H., y Schwartz, J. L. (1981). The development of the concept of ratio in children. En J. L. Schwartz, *The role of semantic understanding in solving multiplication & division word problems*. Final report to NIE (Grant NIE-G-80-0144). MIT, Cambridge, MA.

Rao, C.R. (1965). *Linear statistical inference and its applications*. (1973, 2ª ed.). New York: John Wiley.

Reed, H. B. (1949). *Psicología de las materias de enseñanza primaria*. México: UTEHA.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instructio*n. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. [Trad. cast. de A. Pareja: La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Paidós/M.E.C., 1991].

Ricco, G. (1982). Les premieres acquisitions de la notion de fonction lineaire chez l'enfant de 7 a 11 ans. *Educational Studies in Mathematics, 13*, 289-327.

Rico, L. y otros (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico. L. (1993). *Investigación sobre Errores de Aprendizaje en Educación Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Riley, M. S. y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5*, 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (ed.), *The development of mathematical* *thinking*. London: Academic Press.

Romberg, T.A.(1989). Evaluation: A coat of many colors. En D.F. Robitaille, *Evaluation and Assessment in Mathematics Education*. Paris: UNESCO.

Santisteban Requena, C. (1990). *Psicometría. Teoría y práctica de la construcción de tests*. Madrid: Ediciones Norma.

Schoenfeld, A. H. (1985a). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En, *La enseñanza de la matemática a debate*, Madrid: M.E.C., pp. 25-30.

Schoenfeld, A.H.(1985b). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985c). Making sense of "out loud" problem solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*, 171-191.

Schoenfeld, A.H.(Ed.)(1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawerence Erlbaum Associates.

Schwartz, J. L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication & division word problems*. Final report to NIE (Grant NIE-G-80-0144). MIT, Cambridge, MA.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM.

Scott, P. (1989). *Introducción a la investigación y evaluación educativa*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Searle, B., Lorton, P. y Suppes, P. (1974). Structural variables affecting CAI performance on arithmetic word problems of disadvantaged and deaf students. *Educational Studies in Mathematics, 5*, 371-384.

Shulman, L.S.(1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En M.C. Wittrock (Ed.), *La investigación en la enseñanza, I*. Madrid: M.E.C./Barcelona: Paidós.

Silva, F.(1989). *Evaluación conductual y criterios psicométricos*. Madrid: Pirámide.

Silver, E.A.(Ed.)(1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L. P. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 119-140). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM.

Steffe, L. P. (1990). A child generated multiplying scheme. En G. Booker, P. Cobb y T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings Fourteenth PME Conference*. México.

Strech, L. B. (1941). One hundred selected research studies. En, *Arithmetic in General Education* (pp. 318-327). Sixteenth Yearbook. Yew York: NCTM.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Toward...A theory). Part I: Reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 327-348.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Toward...A theory). Part II: The outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 75-94.

Suppes, P., Loftus, E. y Jerman, M. (1969). Problem-Solving on a computer-based teletype. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 1-15.

Swanson, D., Schwartz, R., Ginsburg, H. y Kossan, N. (1981). The clinical interview: validity, reliability and diagnosis. *For the Learning of Mathematics, 2*(2), 31-38.

Tatsuoka, M.M.(1971). *Multivariate analysis: Techniques for educational and psychological research.* New York: John Wiley.

Tejedor, F.J.(1984). *Análisis de varianza aplicado a la investigación en pedagogía y psicología*. Madrid: Anaya/2.

Teule-Sensacq, T., y Vinrich, G. (1982). Résolution de problèmes de division au cycle élèmentaire dans deux types de situations didactiques. *Educational Studies in Mathematics, 13*, 177-203.

Thornton, C. A. (1978). Emphasizing thinking strategies in basic facts instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 214-227.

Timm, N.H.(1975). *Multivariate Analysis with Applications in Education and Psychology*. Monterrey, California: Brooks/Cole.

Tournaire, F.(1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 401-412.

Tournaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Van den Brink, F.J. y Streefland, L.(1979). Young children (6-8) -Ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 403-420.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations theoriques et des recherches franÇaises en Didactique des Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 2*.2, 215-232.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G.(1982b). Cognitive and development psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 31-41.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). London: Academy Press.

Vergnaud, G.(1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P. Nesher y J. Kilpatrick, *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. y Durand, C. (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. En C. Coll (Comp.), *Psicología genética y aprendizajes escolares.* Madrid: Siglo XXI. Versión original: (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Fran¢aise de Pedagogie, 36*, 28-43.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*(1), 85-94.

Visauta, B. (1989). *Técnicas de investigación social. I: Recogida de datos*. Barcelona: PPU.

Weaver, J.F. (1971). Some factors associated with pupil's performance levels on simple addition and subtraction sentences. *The Arithmetic Teacher, 18*, 513-519.

Weaver, J. F. (1972). The ability of first-, second-, and third- grade pupils to identify open addition and subtraction sentences for which no solution exists within the set of whole numbers. *School Science and Mathematics, 72*, 679-691.

Weaver, J. F. (1973). The symmetric property of the equality relation and young children's ability to solve open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*, 45-56.

Webb, N. L.(1980). Content and context variables in problem tasks. En Goldin y McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.

Wittrock, M.C.(Ed.)(1986). *Handbook of Research on Teaching (3rd Ed.).* New York: Macmillan.

Zweng, M. J. (1964). Division problems and the concept of rate. *Arithmetic Teacher, 11*, 547-556.